

DE TTK



1949

FINSLER-METRIZÁLHATÓSÁGI PROBLÉMÁK VIZSÁLATA

Milkovszki Tamás

Témavezető: Dr. Muzsnay Zoltán

Doktori (PhD) értekezés

DEBRECENI EGYETEM

Természettudományi Doktori Tanács

Matematika- és Számítástudományok Doktori

Iskola

Debrecen, 2018.

Ezen értekezést a Debreceni Egyetem Természettudományi Doktori Tanács Matematika- és Számítástudományok Doktori Iskola Differenciálgeometria és alkalmazásai programja keretében készítettem a Debreceni Egyetem természettudományi doktori (PhD) fokozatának elnyerése céljából.

Debrecen, 2018. ...

.....
Milkovszki Tamás
doktorjelölt

Tanúsítom, hogy Milkovszki Tamás doktorjelölt 2011-2018 között a fent megnevezett Doktori Iskola Differenciálgeometria és alkalmazásai doktori program keretében irányításommal végezte munkáját. Az értekezésben foglalt eredményekhez a jelölt önálló alkotó tevékenységével meghatározóan hozzájárult. Az értekezés elfogadását javaslom.

Debrecen, 2018. ...

.....
Dr. Muzsnay Zoltán
témavezető

Finsler-metrizálhatósági problémák vizsgálata

Értekezés a doktori (PhD) fokozat megszerzése érdekében
matematika tudományágban.

Írta: Milkovszki Tamás okleveles matematikus

Készült a Debreceni Egyetem Matematika- és Számítástudományok Doktori
Iskolája Differenciálgeometria és alkalmazásai programja keretében

Témavezető: Dr. Muzsnay Zoltán egyetemi docens

A doktori szigorlati bizottság:

Elnök: Dr.

Tagok: Dr.

Dr.

A doktori szigorlat időpontja: 2017. április 21.

Az értekezés bírálói:

Dr.

Dr.

A bírálóbizottság:

Elnök: Dr.

Tagok: Dr.

Dr.

Dr.

Dr.

Az értekezés védésének időpontja:

Köszönetnyilvánítás

Ezúton szeretnék köszönetet mondani témavezetőmnek, Dr. Muzsnay Zoltánnak témavezetői munkájáért, támogatásáért. Segítsége nélkül ez a disszertáció nem készülhetett volna el.

Tartalomjegyzék

Bevezetés	1
1. Előzmények	5
1.1. Sprayk és asszociált geometriai mennyiségek	6
1.2. Formális integrálhatóság	10
2. Metrizálhatóság és projektív metrizálhatóság	15
2.1. Finsler és Riemann metrizálhatóság és projektív metrizálhatóság	15
2.2. A Rapcsák-rendszer	18
3. A kibővített Rapcsák-rendszer	25
3.1. Kompatibilitási feltételek	26
3.2. Involutivitás	28
4. A görbületi feltétellel kiegészített Rapcsák-rendszer	31
4.1. Másodrendű kompatibilitási feltételek	31
4.2. Spencer-kohomológia és 2-aciklikusság	36
4.3. Harmadrendű kompatibilitási feltételek	40
5. A háromdimenziós eset	45
5.1. Első kompatibilitási feltételek	45
5.2. Magasabb rendű kompatibilitási feltételek	46
5.3. A reducibilis eset vizsgálata	51
6. Kanonikus sprayk invariáns projektív metrizálhatósága	61
6.1. Lie-csoporthoz tartozó kanonikus spray	61
6.2. Homogén terek geodetikus orbitstruktúrája	66
7. Magyar nyelvű összefoglaló	71
8. Summary	79
Jelölések	87
Irodalomjegyzék	88

Bevezetés

A differenciálgeometriai kutatások egyik legfontosabb területe az olyan geometriai terek vizsgálata, ahol valamilyen energiafüggvény segítségével egy metrika van megadva. Ilyen terekre példák a Riemann-sokaságok, ahol a metrika egy kvadratikusan energiafüggvényből származtatható, illetve a Finsler-sokaságok, ahol a metrika egy 2-homogén (de nem feltétlenül kvadratikusan) energiafüggvényből származtatható. Ezekben a geometriai terekben a geodetikusok görbeseregét az Euler–Lagrange-differenciálegyenlet megoldásai szolgáltatják, így a geodetikusok meghatározása egy másodrendű közönséges differenciálegyenlet-rendszer megoldásához vezet. A közönséges differenciálegyenletek általános elmélete garantálja a geodetikus görbesereg létezését. Igen érdekes és már régóta kutatott probléma a fordított kérdés, azaz annak eldöntése, hogy egy differenciálgeometriai térben egy másodrendű differenciálegyenlet-rendszerrel adott görbesereg esetén vajon létezik-e olyan Riemann-, vagy Finsler-metrika, amelynek geodetikusai megegyeznek az adott görbesereggel (az adott differenciálegyenlet-rendszer megoldásaival). Az alábbiakban pontosabban is megfogalmazzuk ezeket a problémákat.

Egy M sokaságon adott másodrendű közönséges homogén differenciálegyenletrendszernek egyértelműen megfeleltethető egy, a sokaság érintőnyalábján adott S vektormező úgy, hogy a differenciálegyenlet-rendszer megoldásai megegyeznek S integrálgörbéinek M -re való projekcióival. Ezt az S vektormezőt spraynek, S integrálgörbéinek projekcióit pedig a spray geodetikusainak nevezzük.

- Egy M sokaságon adott S sprayt *Finsler-, illetve Riemann-metrizálhatónak* nevezünk, ha létezik egy olyan Finsler-, illetve Riemann-metrika az M -en, melynek geodetikusai megegyeznek S geodetikusával.

A másodrendű közönséges homogén differenciálegyenlet-rendszerrel (vagy sprayvel) megadott görbesereg metrizálhatóságánál általánosabb, és talán geometriai szempontból érdekesebb probléma ezek projektív metrizálhatósága. Akkor mondjuk, hogy két spray projektív ekvivalens, ha geodetikusaik mint geometriai alakzatok megegyeznek, azaz van olyan irányítástartó átparaméterezés, mely az egyik geodetikusait a másik geodetikusába átviszi.

- Egy M sokaságon adott S spray *projektív Finsler-, illetve Riemann-metrizálható*, ha létezik olyan Finsler-, illetve Riemann-metrika M -en, melynek kanonikus spraye projektív ekvivalens S -sel.

Sokaságok metrizálhatóságának és projektív metrizálhatóságának vizsgálata nemcsak matematikai, hanem fizikai szempontból is érdekes kérdés, hiszen az általános relativitáselméletben a (töltéssel nem rendelkező) szabadon eső részecskék világvonalai paraméterezetlen geodetikusok [20, 21, 31, 32, 40]. Asztronómiai megfigyelések

útján meghatározhatóak az objektumok paraméterezetlen geodetikusai, ebből pedig esetleg rekonstruálható a metrika [31, 32].

Megjegyezzük, hogy egy Riemann- vagy szemi-Riemann-metrikához tartozó kanonikus spray kvadratikus, és minden kvadratikus spray egyértelműen meghatároz egy torziómentes lineáris konnexit, illetve fordítva: minden lineáris konnexit meghatároz egy kvadratikus sprayt. A spray és az általa meghatározott konnexit geodetikusai megegyeznek. Ilyen értelemben beszélhetünk a torziómentes lineáris konnexitok metrízálhatóságáról is. Lineáris konnexitok projektív metrízálhatóságára a kétdimenziós esetben R. Liouville talált szükséges és elégséges feltételt egy elsőrendű parciális differenciálegyenlet-rendszer formájában [26]. A rendszert M. Eastwood és V.S. Matveev általánosították kettőnél magasabb dimenzióra [18]. A lineáris konnexitok projektív Riemann-metrízálhatósági problémáját egyenlőre csak kétdimenzióra sikerült megoldani, melyet R.L. Bryant, M. Dunajski és M. Eastwood [10]-ben publikáltak.

A projektív Finsler-metrízálhatóságot elsőként Hamel tanulmányozta [24] abban a speciális esetben, amikor S egy lapos (görbületmentes) spray, és amely Hilbert negyedik problémájának Finsler-változataként ismeretes [1, 13, 48]. Az irodalomban a projektív Finsler-metrízálhatóság vizsgálatának többféle (de ekvivalens) megközelítésével találkozhatunk. A [14]-ben a szerzők a variációs multiplikátor létezését vizsgálják, [4]-ben egy szemibázikus 1-formára vonatkozó parciális differenciálegyenlet-rendszert tanulmányoznak, [15]-ben pedig egy 2-formák segítségével való megfogalmazást is megadnak.

A disszertációban Rapcsák András megközelítését használva vizsgáljuk a projektív metrízálhatóság problémáját. Rapcsák András [41]-ben adott szükséges és elegendő feltételeket a projektív Finsler-metrízálhatóságra egy másodrendű parciális differenciálegyenlet-rendszer segítségével. Ezeket ma *Rapcsák-egyenleteknek* nevezzük [14, 46, 50]. Az egyenletek koordinátamentes megfogalmazása J. Klein, A. Voutier, valamint Szilasi József és Vattamány Szabolcs nevéhez fűződik [25, 46]. A dolgozat felépítése a következő:

A 1. fejezetben röviden emlékeztetünk a Frölicher–Nijenhuis-elméletre, és áttekintjük a sokaság érintőnyalábján adott kanonikus struktúrákat. Továbbá bevezetjük a sprayk tanulmányzásához szükséges olyan alapvető fogalmakat mint a konnexit, Jacobi-endomorfizmus és a görbület. A fejezet végén rövid áttekintést adunk a Cartan–Kähler elméletéről és annak alkalmazásáról.

A 2. fejezetben pontosan megfogalmazzuk a Finsler- és Riemann-metrízálhatóság és a projektív metrízálhatóság problémáját. Ezek után igazoljuk, hogy a Rapcsák-rendszer a projektív metrízálhatóság szükséges és elegendő feltételeit nyújtja. Amennyiben lokális koordinátarendszert használunk az M sokaságon és az indukált koordinátákat használjuk a TM érintőterén, úgy az

$$\ddot{x}^i = f^i(x, \dot{x}), \quad i = 1, \dots, n, \quad (1)$$

differenciálegyenlet-rendszerhez tartozó Rapcsák-egyenlet az ismeretlen $F : TM \rightarrow \mathbb{R}$ Finsler-függvényre a

$$y^j \frac{\partial^2 F}{\partial x^j \partial y^i} + f^j \frac{\partial^2 F}{\partial y^j \partial y^i} - \frac{\partial F}{\partial x^i} = 0, \quad i = 1, \dots, n \quad (2)$$

formába írható. A (2) egyenlet egy túldeterminált másodrendű lineáris parciális differenciálegyenlet-rendszer. Megjegyezzük, hogy a keresett F Finsler-függvény 1-homogén is az y -változójában, ami az Euler-tétel alapján szintén leírható egy parciális differenciálegyenlet segítségével. Ezeket a parciális differenciálegyenleteket koordinátamentesen is meg lehet fogalmazni, és ennek segítségével adódik, hogy egy S spray akkor és csak akkor projektív Finsler-metrizálható, ha létezik pozitív kvázidefinit $F: \mathcal{TM} \rightarrow \mathbb{R}$ megoldása az

$$\{i_S\Omega = 0, \mathcal{L}_C F = F\} \quad (3)$$

Rapcsák-rendszernek. A 2.2. alfejezetben meghatározzuk az (3) rendszer integrálhatósági feltételeit és megmutatjuk, hogy (3) integrálhatósági szempontból ekvivalens a

$$\{i_\Gamma\Omega = 0, \mathcal{L}_C F = F\} \quad (4)$$

kibővített Rapcsák-rendszerrel, ahol Γ a sprayhez társított nemlineáris konnexitást jelöli.

A 3. fejezetben a kibővített Rapcsák-rendszer integrálhatóságát vizsgáljuk. Belátjuk, hogy (4) egyenletrendszer integrálhatósági feltétele a sprayhez társított nemlineáris konnexitás görbületével kifejezhető. Az integrálhatósági feltétel az $i_R\Omega = 0$ alakba írható, ahol R a görbületi tenzor. Ezen túlmenően megmutatjuk, hogy a rendszer szimbóluma involutív, ennél fogva a másodrendű kompatibilitási feltételek teljesülése esetén (4) formálisan integrálható. Amennyiben $\dim M = 2$, vagy a vizsgált spray lapos illetve izotróp, úgy a kompatibilitási feltételek teljesülnek, így a (4) parciális differenciálegyenlet-rendszer formálisan integrálható. Ennek következményeként adódik, hogy az analitikus esetben S lokálisan projektív Finsler-metrizálható. Ezeket az eredményeket más módszerek alkalmazásával már igazolták. A kétdimenziós sokaságok esetét M. Matsumoto tisztázta [28]-ban. Magasabb dimenziós sokaságokra M. Crampin [12]-ben igazolta, hogy minden izotróp spray projektív ekvivalens egy R -lappal, továbbá, [11]-ben megmutatta, hogy minden R -lapos spray Finsler-metrizálható. Ezen két eredmény alapján az adódik, hogy minden izotróp spray projektív Finsler-metrizálható.

Az 4. fejezetben a nem izotróp esetet vizsgáljuk. Erről az esetről rendkívül kevés eredmény található a szakirodalomban. A görbületi tenzort tartalmazó kompatibilitási feltétel ekkor nem teljesül minden kezdeti értékre, ennél fogva a projektív metrizálhatóság tanulmányozásához a görbületre vonatkozó integrálhatósági feltétellel is ki kell bővíteni a (4) rendszert. Mivel az görbületi feltétel helyettesíthető a spray Jacobi-endomorfizmusára vonatkozó $i_\Phi\Omega = 0$ egyenlettel, így a nem izotróp esetben az

$$\{i_\Gamma\Omega = 0, \mathcal{L}_C F = F, i_\Phi\Omega = 0\} \quad (5)$$

rendszer integrálhatóságát vizsgáljuk. A 4. fejezetben a (5) rendszert vizsgáljuk a generikus esetben, vagyis abban az esetben, amikor a Jacobi-endomorfizmus sajátértékei páronként különbözőek. A 4.1. alfejezetben meghatározzuk a másodrendű integrálhatósági feltételeket, majd megmutatjuk, hogy a rendszer szimbóluma nem 2-aciklikus, így magasabb rendű integrálhatósági feltételek megjelenése várható. A Spencer-elmélettel meghatározható, hogy melyik szinten, és hány ilyen feltétel jelenik meg. A 4.2. alfejezetben belátjuk, hogy az első nem triviális Spencer-kohomoló-

gia csoport nem tűnik el, és így extra harmadrendű integrálhatósági feltételek lépnek fel. Az 4.3. fejezetben meghatározzuk az adódó harmadrendű obstrukció alakját is.

A harmadrendű feltétel konkrét alakjától függően a rendszer további analízise rendkívül szerteágazóvá válik. Ezért az 5. fejezettől kezdve a háromdimenziós sokaságokra korlátozzuk a vizsgálatokat. Célunk nem a teljes analízis, hiszen a megjelenő számos eset és részeset leírása még ekkor is szinte reménytelen. Viszont a dolgozatban minden olyan nehézség leírása megjelenik, amelyek a rendszer vizsgálata során felmerülhetnek, így a leírt módszerek segítségével elvben bármely három, vagy akár magasabb dimenziós sokaságon adott konkrét spray megvizsgálható. Példát adunk olyan esetekre, ahol a másodrendű kompatibilitási feltételek teljesülnek és a differenciáloperátor szimbóluma involutív, ezért a rendszer a Cartan–Kähler-tétel alapján formálisan integrálható (2.2.3. Állítás, 3.2.1. Állítás). Vizsgálunk olyan esetet is, ahol ez a másodrendű kompatibilitási feltétel nem teljesül. Ekkor a vizsgált rendszert ezzel kibővítve folytatjuk vizsgálatainkat és kapunk eredményeket. Leírunk olyan esetet is, amikor a rendszer szimbóluma nem involutív, sőt nem is 2-aciklikus (4.2.1. Állítás). Ekkor a Cartan–Kähler-tétel feltételei nem teljesülnek, így a rendszer formális integrálhatóságát csak a Spencer–Goldschmidt-elmélet segítségével vizsgálhatjuk. Itt találhatunk olyan speciális eseteket is, ahol a másodrendű kompatibilitási feltételek teljesülése ellenére a rendszer nem integrálható, mert magasabb rendű nemtriviális kompatibilitási feltételek lépnek fel. Számításaink során megmutatjuk, hogyan lehet a magasabb rendű kompatibilitási feltétel rendjét a Spencer-kohomológia segítségével megtalálni, majd a kompatibilitási feltételeket a megfelelő rendű prolongált rendszer segítségével kiszámítani (4.3.1. Állítás). Végül olyan esetre is adunk példát, amikor a rendszer prolongáltja már 2-aciklikus (5.2.1. Állítás), illetve involutív (5.3.9. Állítás), így a talált magasabb rendű feltételen túl további magasabb rendű kompatibilitási feltételek már nem lépnek fel, és a Spencer–Goldschmidt-tétel biztosítani tudja a formális integrálhatóságot.

A 6. fejezetben Lie-csoportokon és homogén tereken vizsgáljuk a Riemann-, illetve a Finsler-metrizálhatósági és projektív metrizálhatósági problémákat. Mivel a Finsler-sokaságok a Riemann-sokaságok általánosításai, így minden Riemann-metrizálható spray egyben Finsler-metrizálható is. A megfordítás általában nem teljesül, azaz léteznek Finsler-metrizálható sprayk, amik nem Riemann-metrizálhatóak. Abban a speciális esetben, amikor a vizsgált spray kvadratikus, a két probléma ekvivalens [44], azaz egy kvadratikus spray pontosan akkor Finsler-metrizálható, ha Riemann-metrizálható. Azonban a projektív Finsler-metrizálható sprayk osztálya még a kvadratikus sprayk esetében is ténylegesen nagyobb a projektív Riemann-metrizálhatóakénál. A 6. fejezetben megvizsgáljuk azt a speciális esetet, amikor a sokaság egy Lie-csoport, és a spray nem más, mint a kanonikus konnexióhoz tartozó kanonikus spray. Igazolunk egy, bizonyos értelemben vett merevségi tételt, mely szerint a Lie-csoport kanonikus sprayje akkor és csakis akkor balinvariáns projektív Finsler-metrizálható, ha balinvariáns Riemann-metrizálható. Megmutatjuk, hogy ez a merevségi tulajdonság homogén terek geodetikus orbitstruktúrájára is teljesül.

1. fejezet

Előzmények

A továbbiakban M egy n -dimenziós, Hausdorff-féle, megszámlálható bázisú sima sokaságot, $C^\infty(M)$ az M -en adott sima függvények gyűrűjét, $\mathfrak{X}(M)$ pedig az M vektormezőinek $C^\infty(M)$ -modulusát fogja jelölni. Az M sokaság (TM, π, M) érintőnyalábját és a $(TM \setminus \{0\}, \pi, M)$ hasított érintőnyalábját TM -mel, illetve $\mathcal{TM}$ -mel jelöljük. $VTM = \text{Ker}(\pi_*)$ jelöli a TTM vertikális résznyalábját.

Lokális számolásaink során $x = (x_1, \dots, x_n)$ egy koordinátarendszert jelöl egy $U \subset M$ koordináta környezetén, $(x, y) = (x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)$ pedig az asszociált koordinátarendszert jelöli $\pi^{-1}(U) \subset TM$ -en.

Skalár és vektorértékű differenciálformák

A ferdeszimmetrikus, illetve szimmetrikus k -formák modulusait $\Lambda^k(M)$ -mel, illetve $S^k(M)$ -mel jelöljük. Speciálisan $\Lambda^1(M) = T^*M$. Azt mondjuk, hogy a TM -en adott ω szimmetrikus vagy ferdeszimmetrikus k -forma *szemibázikus*, ha $\omega(X_1, \dots, X_k) = 0$, amennyiben az X_i ($i \in \{1, \dots, k\}$) vektormezők valamelyike vertikális. A szimmetrikus, illetve ferdeszimmetrikus szemibázikus k -formák modulusát $\Lambda_v^k(TM)$, illetve $S_v^k(TM)$ jelöli. Az M sokaságon adott vektorértékű k -formán ($0 \leq k$) egy

$$K : \underbrace{\mathfrak{X}(M) \times \dots \times \mathfrak{X}(M)}_k \longrightarrow \mathfrak{X}(M)$$

ferdeszimmetrikus, $C^\infty(M)$ -multilineáris leképezést értünk. Megjegyezzük, hogy a vektorértékű 0-formák a vektormezők. Az M -en adott vektorértékű k -formák $C^\infty(M)$ -modulusát $\Psi^k(M)$ jelöli. Egy $K \in \Psi^k(TM)$ vektorértékű k -formát szemibázikusnak nevezünk, ha értéke vertikális, valamint $K(X_1, \dots, X_k) = 0$, amennyiben az X_i vektormezők valamelyike vertikális ($i \in \{1, \dots, k\}$). A szemibázikus vektorértékű k -formák modulusát $\Psi_v^k(TM)$ -mel jelöljük.

Derivációk

A $\Lambda(M) = \bigoplus_{k \in \mathbb{N}} \Lambda^k(M)$ gradált algebra egy D derivációja i_* típusú (vagy algebrai), ha a függvényeken triviális a hatása, azaz $Df = 0$ minden $f \in C^\infty(M)$ -re és d_* típusú, ha kommutál a külső deriválttal, azaz ha $[d, D] = 0$.

Legyen $L \in \Psi^l(M)$. Ekkor létezik az L -hez asszociált és i_L -vel jelölt i_* típusú

$(l-1)$ -edfokú deriváció, amelyet a következőképpen definiálunk: ha $\omega \in \Lambda^1(M)$ és $X_1, \dots, X_l \in \mathfrak{X}(M)$, akkor legyen

$$i_L \omega(X_1, \dots, X_l) = \omega(L(X_1, \dots, X_l)).$$

Tekinthető továbbá az i_L és a d derivációk kommutátora, azaz a

$$d_L := [i_L, d] = i_L \circ d - (-1)^{l-1} d \circ i_L,$$

ami egy l -ed fokú d_* típusú deriváció. Speciálisan, ha $X \in \Psi^0(M) = \mathfrak{X}(M)$, akkor i_X a helyettesítési operátor, $d_X = \mathcal{L}_X$ pedig az X szerinti Lie-derivált.

Legyen $K \in \Psi^k(M)$ és $L \in \Psi^l(M)$ két vektorértékű differenciálforma és tekintsük ezek $[d_K, d_L] = d_K d_L - (-1)^{kl} d_L d_K$ kommutátorát. Ekkor egyértelműen létezik egy olyan $[K, L]$ -lel jelölt vektorértékű $(k+l)$ -forma $\Psi^{k+l}(M)$ -ben, amire

$$[d_K, d_L] = d_{[K, L]}. \quad (1.1)$$

$[K, L]$ -t a K és az L *Fröhlicher–Nijenhuis-zárójelének* nevezzük. Megjegyezzük, hogy abban a speciális esetben, amikor $X, Y \in \Psi^0(M)$, akkor X és Y vektormezők és (1.1) az X és Y szokásos Lie-zárójelét jelenti. Amennyiben $K \in \Psi^1(M)$ egy vektorértékű 1-forma, akkor az $N_K = \frac{1}{2}[K, K]$ vektorértékű 2-formát a K *Nijenhuis-torziójának* nevezzük:

$$N_K(X, Y) = [KX, KY] + K^2[X, Y] - K[KX, Y] - K[X, KY].$$

Számításaink során gyakran alkalmazzuk az alábbi formulákat: ha $K, L \in \Psi^1(M)$ és $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, akkor

$$\begin{aligned} i_{[K, X]} &= i_K d_X - d_X i_K \\ i_{[K, L]} &= d_{LK} - i_K d_L + d_L i_K, \end{aligned}$$

illetve

$$[K, X](Y) = [KY, X] - K[Y, X].$$

1.1. Sprayk és asszociált geometriai mennyiségek

Természetes struktúrák TM -en

Tekintsük a

$$TM \times_M TM := \{ (v, w) \mid \pi(v) = \pi(w) \},$$

sokaságot, valamint a

$$i : TM \times_M TM \rightarrow VTM \quad (v, w) \longmapsto i(v, w) := \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (v + tw),$$

és a

$$j : TTM \rightarrow TM \times_M TM \quad X \longmapsto j(X) := (v, \pi_{*,v}(X)), \quad X \in T_v TM.$$

leképezéseket. Ezek segítségével bevezethető a

$$J = i \circ j,$$

leképezés, amelyet a *TTM vertikális endomorfizmusának* nevezünk. Erre teljesül, hogy $J^2 = 0$, $\text{Ker } J = \text{Im } J = VTM$ és $[J, C] = J$. A vertikális endomorfizmus koordinátakifejezése a TM egy (x^i, y^i) lokális koordinátarendszerére vonatkozóan

$$J = dx^i \otimes \frac{\partial}{\partial y^i}.$$

Az infinitezimális dilatációt reprezentáló $C \in \mathfrak{X}(TM)$ vektormezőt, ahol

$$C(v) = i(v, v) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (v + tv), \quad (1.2)$$

Liouville-vektormezőnek nevezzük. A TM lokális bázisában C a

$$C = y^i \frac{\partial}{\partial y^i}$$

alakot ölti. Azt mondjuk, hogy a $L \in C^\infty(TM)$ függvény k -adfokú pozitív homogén (az y változóban), ha $L(\lambda y) = \lambda^k L(y)$ minden $\lambda > 0$ -ra és $y \in TM$ -re. Euler homogén függvényekre vonatkozó tétele szerint az $L \in C^\infty(TM)$ függvény akkor és csak akkor k -adfokú pozitív homogén, ha teljesül, hogy $y^i \frac{\partial L}{\partial y^i} - kL = 0$, azaz, ha lokálisan fennáll az

$$\mathcal{L}_C L = kL \quad (1.3)$$

egyenlőség.

Spray és geodetikusai

Az M sokaságon adott *szemispray*n egy olyan $S \in \mathfrak{X}(TM)$ vektormezőt értünk, melyre teljesül, hogy $JS = C$. Azt mondjuk, hogy az S szemispray *spray*, ha $[C, S] = S$, azaz ha S egy 2-homogén vektormező. S spray lokális alakja

$$S = y^i \frac{\partial}{\partial x^i} + f^i(x, y) \frac{\partial}{\partial y^i}, \quad (1.4)$$

ahol az $f^i(x, y)$ függvények másodfokú pozitív homogének az y változóban, azaz $f^i(x, \lambda y) = \lambda^2 f^i(x, y)$, $\lambda > 0$. A spray *kvadratikussá*, ha a spray együtthatók kvadratikusak y -ban, azaz ha $f^i = \Gamma_{jk}^i(x) y^j y^k$, ahol $\Gamma_{jk}^i(x)$ sima függvényeket jelölnek.

Egy S *spray geodetikusán* olyan $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M$ reguláris görbét értünk, amelyre teljesül, hogy $S \circ \dot{\gamma} = \ddot{\gamma}$ (tehát ha a γ sebességvektormezője integrálgörbéje az S vektormezőnek). Az S spray geodetikusai lokálisan a (1) közönséges másodrendű differenciálegyenlet-rendszer megoldásai.

1.1.1. Definíció. Azt mondjuk, hogy az S és $\tilde{S}$ spray *projektív ekvivalensek*, ha geodetikusaik egy irányítástartó átparaméterezéstől eltekintve megegyeznek.

Belátható, hogy S és $\tilde{S}$ akkor és csak akkor projektív ekvivalensek, ha teljesül, hogy

$$\tilde{S} = S - 2PC, \quad (1.5)$$

ahol a $P \in C^\infty(TM)$ projektív faktor 1-homogén függvény.

Konnexió

Egy M sokaságon adott (nemlineáris) *konnexión* olyan $\Gamma \in \Psi^1(TM)$ vektorértékű 1-formát értünk, amelyre teljesül, hogy

$$J\Gamma = J \quad \text{és} \quad \Gamma J = -J.$$

Ekkor $\Gamma^2 = \text{Id}$, és a -1 sajátértéknek megfelelő sajátaltér a vetrikális résznyaláb, azaz

$$VTM = \{ X \in TTM \mid \Gamma(X) = -X \},$$

a $+1$ sajátértéknek megfelelő sajátalteret pedig *horizontális résznyalábnak* nevezzük, és HTM -mel jelöljük, azaz

$$HTM = \{ X \in TTM \mid \Gamma(X) = X \}.$$

Ekkor minden $v \in TM$ estén fennáll, hogy $T_v TM = H_v TM \oplus V_v TM$. A Γ konnexi-óhoz társított h horizontális, illetve v vertikális projektorokat a

$$h = \frac{1}{2}(\text{Id} + \Gamma), \quad v = \frac{1}{2}(\text{Id} - \Gamma). \quad (1.6)$$

formulák definiálják.

Fontos észrevétel, hogy egy S spray esetén a

$$\Gamma := [J, S] \quad (1.7)$$

formulával definiált vektorértékű 1-forma egy konnexió, melyet a *sprayhez társított konnexiónak* nevezünk. Amennyiben S kvadratikusan spray, úgy Γ egy lineáris konnexió. Az (1.4) sprayhez asszociált (1.7) konnexió koefficienseit a

$$\Gamma_j^i = -\frac{1}{2} \frac{\partial f^i}{\partial y^j}$$

formula adja meg.

Görbület és Jacobi-endomorfizmus

Egy Γ konnexió *görbületén* az

$$R = \frac{1}{2}[h, h] \quad (1.8)$$

vektorértékű 2-formát értjük, tehát a görbület a h horizontális projektor Nijenhuis-torziója. Mivel

$$R(X, Y) = v[hX, hY],$$

ahol $X, Y \in \mathfrak{X}(TM)$, így a görbület a horizontális disztribúció integrálhatóságát jellemzi.

Tetszőleges S spray esetén tekinthetjük a

$$\Phi = i_S R. \quad (1.9)$$

vektorértékű 1-formát. Mivel (1.8) szemibázikus, így (4.2) nem függ az S spray választásától. Φ -t *Jacobi-endomorfizmusnak* ([50]-ben Riemann-görbületnek) nevezzük. A Φ koordinátakifejezése a $\Phi = \Phi_j^i(x, y)dx^j \otimes \frac{\partial}{\partial y^i}$ alakú, ahol

$$\Phi_j^i = -\frac{\partial f^i}{\partial x^j} - \Gamma_l^i \Gamma_j^l - S(\Gamma_j^i). \quad (1.10)$$

A Jacobi-endomorfizmus és a görbület egymást kölcsönösen meghatározza, hiszen teljesül az

$$R = \frac{1}{3}[J, \Phi]$$

egyenlet. Lokálisan az adódik, hogy

$$\Phi_j^i = R_{jk}^i y^k, \quad R_{jk}^i = \frac{1}{3} \left(\frac{\partial \Phi_k^i}{\partial y^j} - \frac{\partial \Phi_j^i}{\partial y^k} \right).$$

Az S sprayt *laposnak* nevezzük, ha a Jacobi-endomorfizmusa $\Phi = \lambda J$ alakú, ahol $\lambda \in C^\infty(\mathcal{TM})$. Továbbá S *izotróp*, ha $\Phi = \lambda J - \alpha \otimes C$, ahol $\lambda \in C^\infty(\mathcal{TM})$, α pedig egy szemibázikus 1-forma.

Azt mondjuk, hogy egy nemzérus horizontális $X \in \mathfrak{X}(\mathcal{TM})$ vektormező a Φ sajátvektormezője, ha teljesül, hogy $\Phi X = \lambda JX$, ahol $\lambda \in C^\infty(\mathcal{TM})$. Ekkor λ az X -hez tartozó *sajátfüggvény*. Mivel R ferdeszimmetrikus, ezért $\Phi(S) = R(S, S) = 0$, azaz S mindig egy sajátvektormezője Φ -nek, $\lambda = 0$ pedig az S -hez tartozó sajátfüggvény. A Φ -t *diagonalizálhatónak* nevezzük, ha létezik egy olyan $\{h_1, \dots, h_n, v_1, \dots, v_n\}$ bázisa $T_x(\mathcal{TM})$ -nek, hogy $\Phi h_i = \lambda_i v_i$, ahol a h_i -k horizontális vektorok, és $Jh_i = v_i$, $i = 1, \dots, n$.

Euler-Lagrange egyenlet

Ha adott egy L egy reguláris Lagrange-függvény az M -en, azaz $L : \mathcal{TM} \rightarrow \mathbb{R}$, ahol $\det \left(\frac{\partial^2 L}{\partial y^i \partial y^j} \right) \neq 0$, akkor az

$$\Omega_L := dd_J L$$

képlettel definiált 2-forma maximális rangú. Ekkor az

$$i_S \Omega_L + dd_C L - dL = 0$$

egyenlettel definiált S vektormező egy szemispray úgy, hogy S geodetikusai az Euler-Lagrange-féle egyenlet megoldásai, azaz teljesül a

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} - \frac{dL}{dx^i} = 0, \quad i = 1, \dots, n \quad (1.11)$$

másodrendű közönséges differenciálegyenlet-rendszer. Amennyiben az L 2-homogén tulajdonságú is, úgy az S vektormező 2-homogén, azaz egy spray.

Tegyük fel, hogy most adott egy S spray az M sokaságon. Ekkor tetszőleges $L \in C^\infty(\mathcal{TM})$ Lagrange-függvény esetén tekintsük a

$$\omega_L = i_S \Omega_L + dd_C L - dL \quad (1.12)$$

szemibázikus 1-formát $\mathcal{TM}$ -en. Az adódik, hogy az

$$\omega_L = 0 \quad (1.13)$$

pontosan akkor teljesül, ha (1.11) teljesül, azaz (1.13) az Euler–Lagrange-egyenletek koordinátamentes alakja.

1.1.2. Megjegyzés. Adott S spray esetén (1.13) egy n egyenletből álló másodrendű parciális differenciálegyenlet-rendszer az L függvényre, amelyet Euler–Lagrange-féle parciális differenciálegyenlet-rendszernek nevezünk.

1.2. Formális integrálhatóság

Legyen B egy m -dimenziós vektornyaláb az n -dimenziós M sokaság felett π projekcióval, $\text{Sec}(B)$ pedig a B metszései halmaza. Azt mondjuk, hogy a B két metszése ugyanazt a k -adrendű jetet határozza meg x -ben, ha valamely lokális koordinátarendszerre vonatkozóan a Taylor-soraik k -ad rendig megegyeznek x -ben. Ez a feltétel független a lokális koordinátarendszer megválasztásától. Jelölje az s metszés k -adrendű jetjét $x \in M$ -ben $j_k(s)_x$, az összes k -jetek halmazát pedig $J_k(B)$. Ekkor a $J_k(B)$ fibrált nyaláb az M sokaság felett π_0 projekcióval, ahol $\pi_0(j_k(s)_x) = x$. $J_k(B)$ -t a B vektornyaláb k -adrendű jetnyalábjának hívjuk. Ha $m > k$ és $p \in J_m(B)$, akkor $\pi_k(p)$ legyen $J_k(B)$ egy eleme úgy, hogy $\pi_k(j_m(s)_x) = j_k(s)_x$. Ekkor a $\pi_k : J_m(B) \rightarrow J_k(B)$ projekcióval $J_m(B)$ is fibrált nyalább $J_k(B)$ felett. Speciálisan, $J_k(\mathbb{R}_M)$ a valós értékű függvények k -adrendű jetjeit jelölni, azaz a triviális vonalnyaláb metszéseit.

Belátható, hogy $\text{Ker } \pi_{k-1}$ izomorf $S^k T^*M \otimes B$ -vel, és az izomorfizmust a következő ϵ leképezés adja:

$$\epsilon(df_1 \odot df_2 \odot \dots \odot df_k \otimes s)_x = (j_k(f_1 \dots f_k s))_x, \quad (1.14)$$

ahol $\odot$ a szimmetrikus szorzatot jelöli, $f_1, \dots, f_n \in C^\infty(M)$ az x pontban eltűnő függvények, $s \in \text{Sec}(B)$.

Legyenek B_1 és B_2 vektornyalábok az M sokaság fölött és $\mathcal{P} : \text{Sec}(B_1) \rightarrow \text{Sec}(B_2)$ egy lineáris differenciáloperátor. Ha $\mathcal{P}$ egy k -adrendű lineáris differenciáloperátor, akkor a következő morfizmus társítható hozzá:

$$p_k(\mathcal{P}) : J_k(B_1) \rightarrow B_2.$$

Az l -edrendű deriváltakat véve, természetes módon vezethető be a differenciáloperátor

$$p_{k+l}(\mathcal{P}) : J_{k+l}(B_1) \rightarrow J_l(B_2)$$

l -edrendű *prolongáltja*. Azt mondjuk, hogy egy $s \in \text{Sec}(B_1)$ metszés *megoldása* $\mathcal{P}$ -nek, ha $\mathcal{P}s \equiv 0$. Az l -ed *rendű formális megoldások terét* $x \in M$ -ben $\text{Sol}_{k+l,x}(\mathcal{P}) := \text{Ker } p_{k+l,x}(\mathcal{P})$ fogja jelölni. Ekkor

$$\mathcal{P}s \equiv 0 \quad \Rightarrow \quad j_{l,x}(s) \in \text{Sol}_{l,x}(\mathcal{P}),$$

minden $l \geq k$ és $x \in M$ esetén. Vezessük be a $\bar{\pi}_{l,x} = \pi_{l,x}|_{\text{Sol}_{l+1,x}(\mathcal{P})}$ jelölést.

1.2.1. Definíció. Egy k -ad rendű $\mathcal{P}$ lineáris differenciáloperátor *formálisan integrálható*, ha $Sol_l(\mathcal{P})$ vektornyaláb minden $l \geq k$ -ra, és a $\bar{\pi}_{l,x}: Sol_{l+1,x}(\mathcal{P}) \rightarrow Sol_{l,x}(\mathcal{P})$ leképezés minden $l \geq k$ esetén szürjektív.

Amennyiben $\mathcal{P}$ egy formálisan integrálható k -ad rendű lineáris differenciáloperátor, akkor minden k -adrendű x -beli megoldás (vagy más néven kezdeti érték) felemelhető végtelen rendű formális megoldássá, hiszen $\bar{\pi}_{k,x}$ szürjektivitása miatt minden l -ed rendű $s_{l,x} \in Sol_{l,x}(\mathcal{P})$ megoldás esetén ($l \geq k$) van olyan $l+1$ -ed rendű $s_{l+1,x} \in Sol_{l+1,x}(\mathcal{P})$ megoldás, amelynek projekciója $s_{l,x}$.

Az analitikus esetben a formális integrálhatóságból következik a megoldások létezése tetszőleges kezdeti értékek esetén (lásd [9], 397. oldal):

1.2.2. Tétel. Legyen $\mathcal{P}$ egy analitikus, k -ad rendű parciális differenciáloperátor, amely formálisan integrálható $x \in M$ -ben, továbbá tegyük fel, hogy $\mathcal{P}$ reguláris, azaz $Sol_{k+1}(\mathcal{P})$ vektornyaláb $Sol_k(\mathcal{P})$ felett. Ekkor tetszőleges $s_{k,x} \in Sol_{k,x}(\mathcal{P})$ kezdeti érték esetén létezik egy s lokális analitikus metszés az x pont egy U környezetében, amelyre $\mathcal{P}s \equiv 0$ és $j_k(s)_x = s_{k,x}$.

Legyen $\mathcal{P}$ egy k -adrendű lineáris differenciáloperátor. A $\mathcal{P}$ operátor *szimbólumának* nevezzük a $\sigma_k(\mathcal{P}): S^k T^*M \otimes B_1 \rightarrow B_2$ leképezést, ahol az (1.14)-öt használva

$$\sigma_k(\mathcal{P}) = p_k(\mathcal{P}) \circ \epsilon. \quad (1.15)$$

Lényegében a $\sigma_k(\mathcal{P})$ -t úgy kapjuk, hogy a $\mathcal{P}$ hatását csak a legmagasabb, k -adrendű tagokon vizsgáljuk:

$$\begin{array}{ccc} S^k T^*M \otimes B_1 & \xrightarrow{\sigma_k(\mathcal{P})} & B_2 \\ \downarrow \epsilon & & \downarrow \epsilon \\ J_k B_1 & \xrightarrow{p_k(\mathcal{P})} & B_2 \end{array}$$

A $\mathcal{P}$ szimbólumának l -edik prolongáltját a következő diagrammal értelmezett $\sigma_{k+l}(\mathcal{P})$ leképezés adja:

$$\begin{array}{ccc} S^{k+l} T^*M \otimes B_1 & \xrightarrow{\sigma_{k+l}(\mathcal{P})} & S^l T^*M \otimes B_2 \\ \downarrow \epsilon & & \downarrow \epsilon \\ J_{k+l} B_1 & \xrightarrow{p_{k+l}(\mathcal{P})} & J_l B_2 \end{array}$$

Ha $\mathcal{E} = \{e_1 \dots e_n\}$ a $T_x M$ egy bázisa, akkor legyen

$$\begin{aligned} g_{k,x}(\mathcal{P}) &= \text{Ker } \sigma_{k,x}(\mathcal{P}), \\ g_{k,x}(\mathcal{P})_{e_1 \dots e_j} &= \{A \in g_{k,x}(\mathcal{P}) \mid i_{e_1} A = \dots = i_{e_j} A = 0\}, \quad j = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Azt mondjuk, hogy az $\mathcal{E}$ bázis *kvázi-reguláris*, ha teljesül a következő feltétel:

$$\dim g_{k+1,x}(\mathcal{P}) = \dim g_{k,x}(\mathcal{P}) + \sum_{j=1}^n \dim g_{k,x}(\mathcal{P})_{e_1 \dots e_j}. \quad (1.16)$$

Ha minden $x \in M$ -re létezik kvázi-reguláris bázisa $T_x M$ -nek, akkor a $\mathcal{P}$ szimbólumát *involutív*nek hívjuk. A fenti fogalmak segítségével megfogalmazható a formális integrálhatóságra vonatkozó

1.2.3. Tétel. *[Cartan–Kähler]*

Legyen $\mathcal{P}$ egy k -adrendű reguláris lineáris parciális differenciáloperátor. Ha a $\bar{\pi}_k: \text{Sol}_{k+1}(\mathcal{P}) \rightarrow \text{Sol}_k(\mathcal{P})$ leképezés szürjektív és a $\mathcal{P}$ szimbóluma involutív, akkor $\mathcal{P}$ formálisan integrálható.

A kvázi-reguláris bázis létezésének feltétele helyettesíthető egy gyengébb feltétellel is. Ehhez tekintsük a következő *Spencer-komplexust*:

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow g_{m+k}(\mathcal{P}) \xrightarrow{\delta_0^m} T^*M \otimes g_{m-1+k}(\mathcal{P}) \xrightarrow{\delta_1^m} \Lambda^2 T^*M \otimes g_{m-2+k}(\mathcal{P}) \xrightarrow{\delta_2^m} \\ \xrightarrow{\delta_3^m} \Lambda^3 T^*M \otimes g_{m-3+k}(\mathcal{P}) \xrightarrow{\delta_4^m} \dots \xrightarrow{\delta_{n-1}^m} \Lambda^n T^*M \otimes g_{m-n+k}(\mathcal{P}) \rightarrow 0, \end{aligned} \quad (1.17)$$

ahol

$$\delta_i^m: \Lambda^i T^*M \otimes g_m(\mathcal{P}) \rightarrow \Lambda^{i+1} T^*M \otimes g_{m-1}(\mathcal{P})$$

az első $i+1$ változóban antiszimmetrizáló δ -operátor. Ekkor a $H^{m,i}$ *Spencer-féle kohomológia csoportot* a következőképpen definiáljuk:

$$H^{m,i} = \text{Ker } \delta_i^m / \text{Im } \delta_{i-1}^m. \quad (1.18)$$

Egy k -adrendű differenciáloperátor szimbóluma r -*aciklikus*, ha $H^{m,i} = 0$, $0 \leq i \leq r$, $\forall m \geq k$. Belátható, hogy a szimbólum mindig 1-aciklikus, azaz $H^{m,i} = 0$, $\forall m \geq k$, $i = 1, 2$. Tehát a 2-aciklikusság igazolásához azt kell megmutatni, hogy $H^{m,2} = 0$ is teljesül.

1.2.4. Tétel. *[Spencer–Goldschmidt]* Legyen $\mathcal{P}$ egy k -adrendű reguláris parciális differenciáloperátor. Ha a $\bar{\pi}_k: \text{Sol}_{k+1}(\mathcal{P}) \rightarrow \text{Sol}_k(\mathcal{P})$ leképezés szürjektív és az operátor szimbóluma 2-aciklikus, akkor $\mathcal{P}$ formálisan integrálható. (lásd [9], 410. oldal)

Tehát egy olyan reguláris k -adrendű differenciáloperátor formális integrálhatóságának vizsgálatához, amelynek szimbóluma involutív vagy 2-aciklikus, elegendő a $\bar{\pi}_{k+1}$ leképezés szürjektivitását ellenőrizni. Ezt a következő állítás alapján tehetjük meg:

1.2.5. Állítás. *Megadható egy olyan $\varphi: \text{Sol}_k(\mathcal{P}) \rightarrow \text{Coker}(\sigma_{k+1}(\mathcal{P}))$ morfizmus, amivel a*

$$\text{Sol}_{k+1}(\mathcal{P}) \xrightarrow{\bar{\pi}_k} \text{Sol}_k(\mathcal{P}) \xrightarrow{\varphi} \text{Coker}(\sigma_{k+1}(\mathcal{P}))$$

egzakt. Így $\bar{\pi}_k$ pontosan szürjektív, ha $\varphi \equiv 0$.

1.2.6. Megjegyzés. A φ leképezést *obstrukciós leképezésnek*, a $\text{Coker}(\sigma_{k+1}(\mathcal{P}))$ tér pedig *obstrukciós térnek* hívjuk, mivel egy k -adrendű $s \in \text{Sol}_k(\mathcal{P})$ megoldás akkor és csakis akkor prolongálható $(k+1)$ -ed rendű megoldássá, ha $\varphi(s) = 0$. A $\varphi = 0$ parciális differenciálegyenletet a $\mathcal{P}$ *első kompatibilitási (vagy integrálhatósági) feltételének* hívjuk. Speciálisan, ha $\text{Coker}(\sigma_{k+1}(\mathcal{P})) = \{0\}$, akkor nincs kompatibilitási feltétel, így nincs obstrukciója a megoldás prolongálásának.

1.2.7. Megjegyzés. Legyen $\tau: T^*M \otimes B_2 \rightarrow K$ egy olyan leképezés, melyre $\text{Ker } \tau = \text{Im } \sigma_{k+1}(\mathcal{P})$. Ekkor K izomorf a $\text{Coker}(\sigma_{k+1}(\mathcal{P}))$ obstrukciós térrel. Továbbá, ha $s_{k,x} = j_k(s)_x$ egy k -adrendű megoldás, azaz $(\mathcal{P}s)_x = 0$, akkor

$$\varphi(s_{k,x}) = \tau(\nabla(\mathcal{P}s))_x, \quad (1.19)$$

ahol ∇ tetszőleges lineáris konnexió a B_2 vektornyalábon.

A fenti megjegyzés egy, a gyakorlatban igen hasznos módját adja a φ leképezés, és így az integrálhatósági feltétel kiszámításának. A szaggatott útvonal az alábbi diagramban a $\varphi : \text{Sol}_k(\mathcal{P}) \rightarrow K$ leképezést ábrázolja:

$$\begin{array}{ccccccc}
 g_{k+1}(\mathcal{P}) & \longrightarrow & S^{k+1}T^*M \otimes B_1 & \xrightarrow{\sigma_{k+1}(\mathcal{P})} & T^*M \otimes B_2 & \xrightarrow{\tau} & K \longrightarrow 0 \\
 \downarrow & & \downarrow \epsilon & & \updownarrow \epsilon & & \\
 \text{Sol}_{k+1}(\mathcal{P}) & \xrightarrow{i} & J_{k+1}B_1 & \xrightarrow{p_{k+1}(\mathcal{P})} & J_1B_2 & & \\
 \downarrow \bar{\pi}_k & & \updownarrow \pi_k & & \downarrow \pi_0 & & \\
 \text{Sol}_k(\mathcal{P}) & \xrightarrow{i} & J_kB_1 & \xrightarrow{p_k(\mathcal{P})} & B_2 & &
 \end{array}$$

1.2.8. Jelölés. Legyen (x^i) lokális koordinátarendszer M -en, (x^i, y^i) pedig az ehhez társított koordinátarendszer TM -en $v \in TM$ egy környezetében. Ha $j_k(F)_v \in J_k(\mathbb{R}_{TM})$ a valós értékű F függvények k -adrendű jetje TM -en, akkor a következő jelölést használjuk:

$$F_{i_1 \dots i_a \underline{i_{a+1} \dots i_l}} := \frac{\partial^l F}{\partial x^{i_1} \dots \partial x^{i_a} \partial y^{i_{a+1}} \dots \partial y^{i_l}}(v), \quad 1 \leq l \leq k. \quad (1.20)$$

2. fejezet

Metrizálhatóság és projektív metrizálhatóság

2.1. Finsler és Riemann metrizálhatóság és projektív metrizálhatóság

Egy M sokaságon adott *Finsler-függvényen* olyan $F : TM \rightarrow \mathbb{R}_+$ folytonos függvényt értünk, amely sima a TM hasított érintőnyalábon, fibrumonként elsőfokú pozitív homogén, azaz $F(x, \lambda y) = \lambda F(x, y)$, minden $\lambda > 0$ -ra, és a

$$g_{ij}(x, y) = \frac{\partial^2 E}{\partial y^i \partial y^j} \quad (2.1)$$

mátrix minden $(x, y) \in TM$ esetén pozitív definit, ahol az $E := \frac{1}{2}F^2$ az F -hez társított *energiafüggvény*. Belátható, hogy ekkor az F függvény Hesse-mátrixa pozitív kvázi-definit, azaz $\frac{\partial^2 F}{\partial y^i \partial y^j} v^i v^j \geq 0$, és az egyenlőség akkor és csak akkor teljesül, ha v az y skalárszorosa [14]. *Finsler-sokaságon* egy (M, F) párt értünk. A

$$g = g_{ij} dx^i \otimes dx^j \quad (2.2)$$

tenzort az F -hez tartozó Finsler-metrikának nevezzük. Abban a speciális esetben, amikor az energiafüggvény kvadratikus, akkor (2.1) nem függ az $y = (y^i)$ változótól és (2.2) egy Riemann-metrika.

Jól ismert tény, hogy egy (M, F) Finsler-sokasághoz egyetlen olyan S spray létezik, melyre

$$i_S dd_J E = -dE.$$

Ezt az S sprayt a Finsler-sokaság *kanonikus spray*ének nevezzük. Ennek geodetikusai a Finsler-sokaság geodetikusai és a

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial E}{\partial \dot{x}^i} - \frac{\partial E}{\partial x^i} = 0, \quad i = 1, \dots, n \quad (2.3)$$

Euler–Lagrange-egyenletek megoldásai.

2.1.1. Definíció. Azt mondjuk, hogy az M sokaságon adott S spray Finsler- (illetve Riemann-) metrizálható, ha létezik egy olyan Finsler- (illetve Riemann-) metrika M -en, amelynek kanonikus spraye S .

2.1.2. Megjegyzés. Egy M sokaságon adott S spray pontosan akkor Finsler- (illetve Riemann-) metrizálható, ha létezik egy 2-homogén (illetve kvadratikus) $E : TM \rightarrow \mathbb{R}$ függvény, melyre teljesül az

$$\omega_E = 0, \quad (2.4)$$

Euler–Lagrange-egyenlet (ahol az E 2-homogenitása miatt (1.12) $\omega_E = i_S dd_J E + dE$ alakú) és teljesül, hogy (2.1) pozitív definit TM -en. A 1.1.2 Megjegyzés alapján a Riemann- és a Finsler- metrizálhatóság problémája egy parciális differenciálegyenlet-rendszer megoldására vezet.

Az 1.1.1 Definíciót használva a metrizálhatóság mintájára vezetjük be az alábbi definíciót:

2.1.3. Definíció. Azt mondjuk, hogy az M sokaságon adott S spray projektív Finsler- (illetve Riemann-) metrizálható, ha létezik egy olyan Finsler- (illetve Riemann-) metrika M -en, amelynek kanonikus spraye projektív ekvivalens S -sel.

A következő tétel lokális alakját Rapcsák András bizonyította 1961-ben [41]. A koordinátamentes változat megtalálható az alábbi munkákban: [25, 49, 46]. Itt egy másik bizonyítást közlünk.

2.1.4. Tétel ([8]). Legyen S egy spray az M sokaságon. Ekkor M akkor és csak akkor projektív Finsler- (illetve Riemann-) metrizálható, ha létezik egy $F : TM \rightarrow \mathbb{R}$ Lagrange-függvény, melyhez asszociált $E = \frac{1}{2}F^2$ energiafüggvény 2-homogén (illetve kvadratikus), (2.1) pozitív definit TM -en és teljesül az $\omega_F = 0$ egyenlet.

Bizonyítás. Egy S spray akkor és csak akkor projektív Finsler- (Riemann-) metrizálható, ha létezik olyan Finsler- (Riemann-) metrizálható $\tilde{S}$ spray, amely projektív ekvivalens S -sel. Ekkor a sprayk projektív ekvivalenciája miatt megadható egy olyan P függvény, hogy (1.5) teljesüljön. Jelölje $\tilde{F}$ az $\tilde{S}$ -hoz tartozó Finsler-függvényt. Jól ismert, hogy $\tilde{F}$ invariáns a $\tilde{\Gamma} = [J, \tilde{S}]$ konnexióhoz társított párhuzamos eltolással szemben, így $d_{\tilde{h}}\tilde{F} = 0$. Felhasználva a horizontális projektorok közti

$$\tilde{h} = h - PJ - d_J P \otimes C$$

relációt ([5], 4. fejezet) és az $\tilde{F}$ függvény 1-homogenitását, azt kapjuk, hogy

$$0 = d_{\tilde{h}}\tilde{F} = d_h\tilde{F} - d_P J\tilde{F} - d_J P C\tilde{F} = d_h\tilde{F} - P d_J\tilde{F} - \tilde{F} d_J P = d_h\tilde{F} - d_J(P\tilde{F}). \quad (2.5)$$

Ebből a $JS = C$ azonosság, valamint az $\tilde{F}$ és P függvények 1-homogenitásának következtében az adódik, hogy

$$0 = i_S d_{\tilde{h}}\tilde{F} = S\tilde{F} - C(P\tilde{F}) = S\tilde{F} - 2P\tilde{F}.$$

Tehát a projektív faktor: $P = \frac{1}{2\tilde{F}}S\tilde{F}$. Behelyettesítve P -t (2.5)-be:

$$d_h\tilde{F} - d_J\left(\frac{1}{2\tilde{F}}(\tilde{F}d_S\tilde{F})\right) = d_h\tilde{F} - \frac{1}{2}d_J(d_S\tilde{F}) = 0.$$

Az (1.6) reláció, valamint $d_{[J,S]} = d_Jd_S - d_Sd_J$ segítségével azt nyerjük, hogy

$$\begin{aligned} 0 &= d_{\Gamma+I}\tilde{F} - d_Jd_S\tilde{F} = d_{[J,S]}\tilde{F} + d\tilde{F} - d_Jd_S\tilde{F} \\ &= -(i_Sd + di_S)d_J\tilde{F} + d\tilde{F} = -i_Sdd_J\tilde{F} - d_C\tilde{F} + d\tilde{F} = -i_Sdd_J\tilde{F}. \end{aligned}$$

Mivel $\tilde{F}$ 1-homogén függvény, így $d_C\tilde{F} = \tilde{F}$ és $dd_C\tilde{F} - d\tilde{F} = 0$. Tehát

$$\omega_{\tilde{F}} = i_Sdd_J\tilde{F} + dd_C\tilde{F} - d\tilde{F} = i_Sdd_J\tilde{F}. \quad (2.6)$$

Mivel $i_Sdd_J\tilde{F} = 0$, így azt kapjuk, hogy $\omega_{\tilde{F}} = 0$. Az állításban szereplő F függvény nem más, mint az $\tilde{S}$ sprayhez tartozó $F := \tilde{F}$ Finsler függvény.

Az állítás megfordításának bizonyításához tegyük fel, hogy az F függvény teljesíti a tétel feltételeit. Ekkor F egy Finsler-függvény. Legyen $P = \frac{1}{2F}SF$ és tekintsük az $\tilde{S} = S - 2PC$ vektormezőt. Az (M, F) -hez tartozó spray éppen a $\tilde{S}$ és világos, hogy $\tilde{S}$ projektív ekvivalens S -sel. Így az S projektív metrizálható. $\square$

2.1.5. Definíció. Legyen S egy spray az M sokaságon. Azt a parciális differenciálegyenlet-rendszert, amely az

$$i_Sdd_JF = 0, \quad (2.7)$$

$$\mathcal{L}_CF - F = 0 \quad (2.8)$$

egyenletekből áll Rapcsák-féle parciális differenciálegyenlet-rendszernek, röviden *Rapcsák-rendszernek* nevezzük.

Lokális koordinátázást használva a Rapcsák-rendszer (2.7) egyenlete az

$$y^j \frac{\partial^2 F}{\partial x^j \partial y^i} + f^j \frac{\partial^2 F}{\partial y^j \partial y^i} - \frac{\partial F}{\partial x^i} = 0, \quad (2.9)$$

a (2.8) egyenlete pedig a

$$y^i \frac{\partial F}{\partial y^i} - F = 0, \quad (2.10)$$

alakba írható.

2.1.6. Következmény. A 2.1.4. Állítás alapján, egy M sokaságon adott S spray pontosan akkor projektív Finsler-metrizálható, ha létezik a Rapcsák-rendszernek egy olyan F megoldása, melyre (2.1) a TM -en pozitív definit.

Valóban, az (1.3) és a (2.8) összevetéséből adódik, hogy a Rapcsák-rendszer F megoldása szükségképpen pozitív 1-homogén függvény, a (2.6) egyenletből pedig látható, hogy a (2.7) egyelet nem más, mint az 1-homogén F függvényre vonatkozó Euler–Lagrange-egyenlet, azaz (2.6) úgy is írható, hogy $\omega_F = 0$.

A 6. fejezet számolásai során igen hasznos lesz az alábbi

2.1.7. Állítás ([8]). *Legyen S egy spray az M sokaságon, $L : TM \rightarrow \mathbb{R}$ pedig egy Lagrange-függvény. Amennyiben L invariáns az S integrálgörbéi mentén, úgy*

$$\omega_L = 0 \quad \Leftrightarrow \quad d_h L = 0. \quad (2.11)$$

Bizonyítás. Ha L invariáns az S integrálgörbéi mentén, azaz $S(L) = d_S L = 0$, akkor a következőt kapjuk

$$\begin{aligned} \omega_L &= i_S dd_J L + dd_C L - dL = d_S d_J L - d i_S d_J L + dd_C L - dL \\ &= d_{[S,J]} L + d_J d_S L - d(d_{JS} - d_J i_S + i_{[J,S]}) L + dd_C L - dL \\ &= -d_\Gamma L - dL = -d_{\Gamma+I} L = -2d_h L. \end{aligned}$$

□

2.1.8. Következmény ([8]). *Legyen S egy spray, L invariáns az S integrálgörbéi mentén, f pedig egy olyan $\mathbb{R}$ -en értelmezett sehol sem zérus függvény, melynek deriváltja nem tűnik el. Ekkor L akkor és csak akkor megoldása az S -hez tartozó Euler–Lagrange-egyenletnek, ha $f(L)$ is megoldása.*

Bizonyítás. A 2.1.7. Állítás alapján az $\omega_L = 0$ egyenlet ekvivalens a $d_h L = 0$ egyenlettel, az $\omega_{f(L)} = 0$ pedig a $d_h(f(L)) = 0$ -val. Továbbá, mivel $f'(L) \neq 0$ és

$$d_h(f(L)) = f'(L)d_h L, \quad (2.12)$$

az adódik, hogy $d_h(f(L)) = 0$ akkor és csakis akkor teljesül, ha $d_h L = 0$, ez pedig a 2.1.7. Állítás miatt ekvivalens az Euler–Lagrange egyenlettel. □

2.2. A Rapcsák-rendszer

Célunk a projektív metrizálhatóság vizsgálata. Annak eldöntése, hogy egy adott S spray projektív metrizálható-e vagy sem, a 2.1.6 Következmény alapján a Rapcsák-egyenlet megoldhatóságára vezethető vissza. Ennek a másodrendű túlhatározott parciális differenciálegyenlet-rendszernek a megoldhatóságát a 1.2 alfejezetben leírt integrálhatósági elméletek (Cartan–Kähler, illetve Spencer–Goldschmidt) segítségével vizsgáljuk.

Az egyszerűség kedvéért a továbbiakban a $T(TM)$ második érintőnyalábra a T , T^*TM -re pedig a T^* jelölést használjuk. A $\Lambda^k T^*$ és $S^k T^*$ az antiszimmetrikus, illetve a szimmetrikus k -formák nyalábját fogja jelölni TM felett, a T_v^* , $\Lambda^k T_v^*$, illetve $S^k T_v^*$ a szemibázikus 1-, szemibázikus antiszimmetrikus, illetve szemibázikus szimmetrikus k -formák nyalábját jelöli TM felett.

Legyen S egy spray és tekintsük a Rapcsák-rendszerhez tartozó $\mathcal{P}_1$ differenciálope-rátort:

$$\mathcal{P}_1 = (\mathcal{P}_S, \mathcal{P}_C), \quad (2.13)$$

ahol

$$\mathcal{P}_S : C^\infty(TM) \longrightarrow \text{Sec } T^*, \quad \mathcal{P}_S(F) = i_S dd_J F, \quad (2.14)$$

$$\mathcal{P}_C : C^\infty(TM) \longrightarrow C^\infty(TM), \quad \mathcal{P}_C(F) = \mathcal{L}_C F - F. \quad (2.15)$$

A (2.9) és (2.10) lokális kifejezésekből látható, hogy $\mathcal{P}_S$ másodrendű, $\mathcal{P}_C$ pedig elsőrendű differenciáloperátor. Így a társított $p_2(\mathcal{P}_S)$, $p_1(\mathcal{P}_C)$ morfizmusok az első, illetve a második jet tereken értelmezettek. Az (1.20)-ban a jetnyalábon bevezetett koordináta-rendszert használva a következőt írhatjuk:

$$\begin{aligned} p_1(\mathcal{P}_C): J_1(\mathbb{R}_{TM}) &\longrightarrow \mathbb{R}, & j_1(F) &\longrightarrow y^i F_{\underline{i}} - F, \\ p_2(\mathcal{P}_S): J_2(\mathbb{R}_{TM}) &\longrightarrow T^*, & j_2(F) &\longrightarrow (y^i F_{\underline{ij}} + f^i F_{\underline{ij}} - F_j) dx^i - (F_{\underline{i}} + y^j F_{\underline{ij}} - F_i) dy^i. \end{aligned}$$

Mivel a Rapcsák-rendszer első és másodrendű egyenletekből áll, így az integrálhatósági feltételek meghatározásához az alacsonyabb rendű egyenletet prolongáljuk, és a továbbiakban azt a másodrendű rendszert vizsgáljuk, amely a (2.7) Rapcsák-egyenletet és a (2.8) homogenitási feltétel prolongáltját tartalmazza. Így a rendszerhez társított morfizmus a következőképpen írható:

$$p_2(\mathcal{P}_1) = p_2(\mathcal{P}_S) \times p_2(\mathcal{P}_C): J_2(\mathbb{R}_{TM}) \longrightarrow T^* \times J_1(\mathbb{R}_{TM}).$$

Egy másodrendű differenciáloperátor integrálhatóságának vizsgálata a Cartan–Kähler, illetve a Spencer–Goldschmidt-elméletben is két lépésből áll. Az első lépésben meghatározzuk a másodrendű integrálhatósági feltételeket. Ezen feltételek teljesülése esetén minden másodrendű megoldás felemelhető harmadrendűvé. A második lépésben pedig megvizsgáljuk az operátor szimbólumának involutivitását (vagy 2-aciklikusságát). Amennyiben a szimbólum involutív (vagy 2-aciklikus), úgy minden harmadrendű megoldás végtelen rendűvé prolongálható (1.2.3. Tétel, illetve 1.2.4. Tétel), tehát az operátor formálisan integrálható. Ha az operátor szimbóluma nem 2-aciklikus, akkor magasabb rendű integrálhatósági feltételek is felléphetnek, így az operátor nem integrálható.

Ebben az alfejezetben igazoljuk, hogy a Rapcsák-rendszer akkor és csakis akkor formálisan integrálható, ha az $i_\Gamma dd_J F = 0$ feltétel teljesül. Ehhez a 2.2.1. Állításban meghatározzuk a másodrendű obstrukciókat, majd a 2.2.3. Állításban bizonyítjuk, hogy az operátor szimbóluma involutív.

2.2.1. Állítás ([34]). *A Rapcsák-rendszer egy másodrendű $s = j_2(F)_x$ megoldása $x \in TM$ -ben akkor és csak akkor emelhető fel harmadrendű megoldássá, ha az*

$$(i_\Gamma dd_J F)_x = 0, \quad (2.16)$$

integrálhatósági feltétel teljesül, ahol $\Gamma = [J, S]$ az S -hez társított nemlineáris konexió.

Bizonyítás. Az 1.2.7. Megjegyzés alapján először meghatározzuk a szereplő differenciáloperátorok szimbólumait, majd megadunk egy olyan τ_1 leképezést, amelyre $\text{Im } \sigma_3(\mathcal{P}_1) = \text{Ker } \tau_1$. Ennek segítségével az (1.19) egyenlet alapján meg tudjuk határozni a φ obstrukciós leképezést.

A $\mathcal{P}_C$ operátor szimbóluma

$$\sigma_1(\mathcal{P}_C): T^* \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \sigma_1(\mathcal{P}_C)A_1 = A_1(C), \quad (2.17)$$

és így $\mathcal{P}_C$ szimbólumának prolongáltja

$$\sigma_2(\mathcal{P}_C): S^2 T^* \longrightarrow T^*, \quad (\sigma_2(\mathcal{P}_C)A_2)(X) = A_2(X, C), \quad (2.18)$$

valamint a $\mathcal{P}_S$ szimbóluma

$$\sigma_2(\mathcal{P}_S): S^2T^* \longrightarrow T^*, \quad (\sigma_2(\mathcal{P}_S)A_2)(X) = A_2(S, JX) - A_2(X, C), \quad (2.19)$$

minden $X \in T$ -re, $A_1 \in T^*$ -ra és $A_2 \in S^2T^*$ -ra.

Valóban, számítsuk ki (1.15) alapján a szimbólumokat. Legyen f egy olyan sima függvény, hogy $f(x) = 0$, $x \in \mathcal{TM}$. Ekkor

$$\sigma_1(\mathcal{P}_C)(df)_x = (\mathcal{P}_C(f))_x = (\mathcal{L}_C(f) - f)_x = (i_C df - di_C f - f)_x = df(C).$$

Tehát $\mathcal{P}_C$ szimbólumát (2.17) adja, amiből következik, hogy a szimbólum prolongáltja (2.18). Továbbá legyenek $f_1, f_2 \in C^\infty(\mathcal{TM})$ olyan függvények, amelyek eltűnnek $x \in \mathcal{TM}$ -ben. Ekkor

$$\begin{aligned} \sigma_2(\mathcal{P}_S)_x(df_1 \odot df_2)(X) &= (i_S dd_J(f_1 f_2))_x(X) = i_S d(d_J f_1 f_2 + f_1 d_J f_2)_x(X) \\ &= i_S (dd_J f_1 f_2 + df_2 \wedge d_J f_1 + df_1 \wedge d_J f_2 - f_1 dd_J f_2)_x(X) \\ &= (df_1 \wedge d_J f_2 - d_J f_1 \wedge df_2)_x(S, X) \\ &= df_1(S) d_J f_2(X) - df_1(X) d_J f_2(S) - d_J f_1(S) df_2(X) + d_J f_1(X) df_2(S) \\ &= df_1(S) df_2(JX) - df_1(X) df_2(JS) - df_1(JS) df_2(X) + df_1(JX) df_2(S) \\ &= (df_1 \odot df_2)_x(S, JX) - (df_1 \odot df_2)_x(X, C). \end{aligned}$$

Azaz a $\mathcal{P}_S$ operátor szimbóluma valóban (2.19).

A szimbólumok prolongáltjai a harmadrendű szinten a következők:

$$\sigma_3(\mathcal{P}_C): S^3T^* \rightarrow T^* \otimes S^2T^*, \quad (\sigma_3(\mathcal{P}_C)A_3)(X, Y) = A_3(X, Y, C), \quad (2.20)$$

$$\sigma_3(\mathcal{P}_S): S^3T^* \rightarrow T^* \otimes T^*, \quad (\sigma_3(\mathcal{P}_S)A_3)(X, Y) = A_3(X, S, JY) - A_3(X, Y, C), \quad (2.21)$$

ahol $X, Y \in T$, $A_3 \in S^3T^*$. Így azt kaptuk, hogy

$$\sigma_3(\mathcal{P}_1) = (\sigma_3(\mathcal{P}_S), \sigma_3(\mathcal{P}_C)): S^3T^* \longrightarrow (T^* \otimes T^*) \times S^2T^*.$$

2.2.2. Lemma. *Az alábbi sorozat egzakt:*

$$S^3T^* \xrightarrow{\sigma_3(\mathcal{P}_1)} (T^* \otimes T^*) \times S^2T^* \xrightarrow{\tau_1} K_1 \rightarrow 0. \quad (2.22)$$

ahol $K_1 = \text{Im } \tau_1$,

$$\tau_1 := (\tau_1^1, \tau_1^2, \tau_1^3, \tau_1^4), \quad (2.23)$$

és $B = (B_S, B_C)$, $B_S \in T^* \otimes T^*$, $B_C \in S^2T^*$, $X, Y \in T$ esetén

$$\tau_1^1(B)(X, Y) = B_S(JX, hY) - B_S(hY, JX) - B_S(JY, hX) + B_S(hX, JY), \quad (2.24a)$$

$$\tau_1^2(B)(X) = B_S(X, S), \quad (2.24b)$$

$$\tau_1^3(B)(X, Y) = B_S(X, JY) + B_C(X, JY), \quad (2.24c)$$

$$\tau_1^4(B)(X, Y) = B_S(C, hX) - B_C(S, JX) + B_C(hX, C). \quad (2.24d)$$

Bizonyítás. Mivel K_1 definíciójából adódóan (2.22) egzakt a harmadik tagban, így csak a második tagban való egzaktságot kell ellenőrizni. Egyszerű számolással adódik, hogy $\tau_1 \circ \sigma_3(\mathcal{P}_1) = 0$, és ennél fogva $\text{Im } \sigma_3(\mathcal{P}_1) \subset \text{Ker } \tau_1$. A továbbiakban kiszámítjuk $\text{Im } \sigma_3(\mathcal{P}_1)$ dimenzióját, majd megmutatjuk, hogy ez megegyezik $\dim \text{Ker } \tau_1$ -gyel. Tekintsük a következő bázist:

$$\mathcal{B} := \{h_1, \dots, h_n, v_1, \dots, v_n\} \subset T_x, \quad (2.25)$$

ahol a h_i -k horizontális vektormezőket jelölnek, $h_n = S$, $Jh_i = v_i$, $i = 1, \dots, n$ (és ennél fogva $v_n = C$). Az alábbi jelölést fogjuk alkalmazni egy szimmetrikus $A \in S^k T^*$ tenzor komponenseire a (2.25) bázisra vonatkozóan:

$$A_{i_1 \dots i_j i_{j+1} \dots i_k} := A(h_{i_1}, \dots, h_{i_j}, v_{i_{j+1}}, \dots, v_{i_k}). \quad (2.26)$$

Első lépés: $\text{Im } \sigma_3(\mathcal{P}_1)$ dimenziójának meghatározása.

Világos, hogy $\text{Ker } \sigma_3(\mathcal{P}_1) = \text{Ker } \sigma_3(\mathcal{P}_S) \cap \text{Ker } \sigma_3(\mathcal{P}_C)$. Továbbá egy $A \in S^3 T^*$ szimmetrikus tenzorra

$$A \in \text{Ker } \sigma_3(\mathcal{P}_C) \Leftrightarrow A_{ijn} = 0, \quad A_{ijn} = 0, \quad A_{ijn} = 0, \quad (2.27)$$

és $A \in S^3 T^* \in \text{Ker } \sigma_3(\mathcal{P}_S)$ akkor és csak akkor, ha

$$\sigma_3(\mathcal{P}_S)(A)(h_i, h_j) = A(h_i, h_n, v_j) - A(h_i, h_j, v_n) = A_{inj} - A_{ijn} = 0, \quad (2.28a)$$

$$\sigma_3(\mathcal{P}_S)(A)(h_i, v_j) = -A(h_i, v_j, v_n) = -A_{ijn} = 0, \quad (2.28b)$$

$$\sigma_3(\mathcal{P}_S)(A)(v_i, h_j) = A(v_i, h_n, v_j) - A(v_i, h_j, v_n) = A_{inj} - A_{ijn} = 0, \quad (2.28c)$$

$$\sigma_3(\mathcal{P}_S)(A)(v_i, v_j) = -A(v_i, v_j, v_n) = -A_{ijn} = 0, \quad (2.28d)$$

$i, j = 1, \dots, n$. Meghatározzuk a független egyenletek számát a (2.27)–(2.28d) egyenletrendszerben. Jelölje

$$\mathcal{C}_n^k = \binom{n}{k}, \quad \mathcal{C}_n^{k,i} = \binom{n+k-1}{k} \quad (2.29)$$

az n elem k -adosztályú kombinációit, illetve ismétléses kombinációit. Az A tenzor szimmetrikusságát figyelembe véve $2\mathcal{C}_n^{2,i} + \mathcal{C}_n^1 \mathcal{C}_n^1 = 2\frac{n(n+1)}{2} + n^2$ független egyenletet kapunk (2.27)-ben. Látható, hogy (2.28b) és (2.28d) triviálisan teljesülnek (2.27) miatt. Továbbá (2.28a)-ból $\mathcal{C}_n^1 \mathcal{C}_{n-1}^1 = n^2 - n$ független egyenlet adódik, mivel $j = n$ -re az egyenletek triviálisan teljesülnek, (2.28c)-ből pedig $\mathcal{C}_{n-1}^{2,i} = \frac{n(n-1)}{2}$ a független, mivel $j = n$ esetén az egyenletek ismét triviálisan teljesülnek. Következésképpen a független egyenletek száma a (2.27)–(2.28d) rendszerben $2\frac{n(n+1)}{2} + 2n^2 - n + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{7n^2 - n}{2}$. Tehát

$$\dim(g_3(\mathcal{P}_1)) = \dim \text{Ker } \sigma_3(\mathcal{P}_1) = \dim S^3 T^* - \frac{7n^2 - n}{2} = \frac{8n^3 - 9n^2 + 7n}{6} \quad (2.30)$$

és így

$$\text{rank } \sigma_3(\mathcal{P}_1) = \frac{7n^2 - n}{2}. \quad (2.31)$$

Második lépés: $\text{Ker } \tau_1$ dimenziójának meghatározása.

Legyen $B = (B_S, B_C) \in \text{Ker } \tau_1$, és használjuk a $B_S(v_i, h_j) := B_{ij}^S$, stb. jelöléseket. Ekkor az adódik, hogy

- A $\tau_1^1 = 0$ egyenlet pivot elemei B_{ij}^S , $i < j < n$. Ezért itt a független egyenletek száma $\mathcal{C}_{n-1}^2 = \frac{(n-1)(n-2)}{2}$.
- A $\tau_1^2 = 0$ pivot elemei B_{in}^S és B_{in}^S , $i = 1, \dots, n$, ami $2\mathcal{C}_n^1 = 2n$ független egyenletet ad.
- A $\tau_1^3 = 0$ és a $\tau_1^4 = 0$ egyenletek pivot elemei B_{ij}^S , B_{ij}^S , $i, j = 1, \dots, n$ és B_{ni}^S , $i = 1, \dots, n-1$. Ezek $2\mathcal{C}_n^1\mathcal{C}_n^1 + \mathcal{C}_{n-1}^1 = 2n^2 + n - 1$ független egyenletet jelentenek.

Így azt kapjuk, hogy

$$\dim \text{Ker } \tau_1 = \dim S^2 T^* + \dim(T^* \otimes T^*) - \left[\frac{(n-1)(n-2)}{2} + 2n^2 + 3n - 1 \right] = \frac{7n^2 - n}{2}. \quad (2.32)$$

Tehát (2.31) és (2.32) alapján adódik, hogy $\text{Im } \sigma_3(\mathcal{P}_1) = \text{Ker } \tau_1$, amivel a lemma bizonyítását befejeztük. $\square$

A 2.2.1 Állítás bizonyításának folytatása. A Rapcsák-rendszerhez társított morfizmusok, szimbólumok és az obstrukciós leképezés a következő kommutatív diagramon reprezentálhatók:

$$\begin{array}{ccccccc} g_3(\mathcal{P}_1) & \longrightarrow & S^3 T^* & \xrightarrow{\sigma_3(\mathcal{P}_1)} & (T^* \otimes T^*) \times S^2 T^* & \xrightarrow{\tau_1} & K_1 \longrightarrow 0 \\ \downarrow & & \downarrow \epsilon & & \updownarrow \epsilon & & \\ Sol_3(\mathcal{P}_1) & \xrightarrow{i} & J_3(\mathbb{R}_{TM}) & \xrightarrow{p_3(\mathcal{P}_1)} & J_2(\mathbb{R}_{TM}) & & \\ \downarrow \bar{\pi}_2 & & \updownarrow \pi_2 & & \downarrow \pi_0 \times \pi_1 & & \\ Sol_2(\mathcal{P}_1) & \xrightarrow{i} & J_2(\mathbb{R}_{TM}) & \xrightarrow{p_2(\mathcal{P}_1)} & T^* \times J_1(\mathbb{R}_{TM}) & & \end{array}$$

Szaggyatott nyilakkal a $\varphi_1 : Sol_2(\mathcal{P}_1) \rightarrow K_1$ leképezést ábrázoltuk. Az integrálhatósági feltétel az 1.2.7. Megjegyzés alapján a $\tau_1 = (\tau_1^1, \tau_1^2, \tau_1^3, \tau_1^4)$ leképezés segítségével számítható ki: legyen $s = j_2(F)_x \in Sol_{2,x}(\mathcal{P}_1)$ egy másodrendű megoldása $\mathcal{P}_1$ -nek x -ben, azaz

$$(i_S dd_J F)_x = 0, \quad (\mathcal{L}_C F - F)_x = 0, \quad (\nabla(\mathcal{L}_C F - F))_x = 0. \quad (2.33)$$

Az s akkor és csakis akkor emelhető fel harmadrendű megoldássá, ha $\varphi_1(s) = 0$, ahol $\varphi_1(s) = (\tau_1 \nabla \mathcal{P}_1(F))_x$. Kiszámítva $\varphi_1(s)$ -t a következő adódik:

1. Az $\omega := i_S dd_J F$ jelölést használva (2.33) miatt $\omega_x = 0$, és így

$$\begin{aligned} & \tau_1^1(\nabla(\mathcal{P}_1 F))_x(X, Y) \\ &= \nabla \omega(JX, hY) - \nabla \omega(hY, JX) - \nabla \omega(JY, hX) + \nabla \omega(hX, JY) \\ &= JX \omega(hY) - hY \omega(JX) - JY \omega(hX) + hX \omega(JY) = i_J d\omega(hX, hY). \end{aligned}$$

Továbbá, $di_S = -i_S d + d_S$, $i_J d_S = i_{[J,S]} + d_S i_J$ és $d_J d_J = 0$. Így az adódik, hogy

$$\begin{aligned} i_J d\omega(hX, hY)_x &= (i_J d_S d d_J F - i_J i_S d d d_J F)_x(hX, hY) \\ &= (i_{[J,S]} d d_J F + d_S i_J d d_J F)_x(hX, hY) = (i_\Gamma d d_J F)_x(hX, hY). \end{aligned}$$

$$2. \tau_1^2(\nabla(\mathcal{P}_1 F))_x = (\nabla\omega)_x(X, S) = X_x\omega(S) = X_x d d_J(S, S) = 0.$$

3. Használva a $J[JX, S] = JX$ azonosságot a következőt kapjuk:

$$\begin{aligned} \tau_1^3(\nabla(\mathcal{P}_1 F))_x &= X_x(i_S d d_J F(JY)) + X_x(JY(CF - F)) \\ &= X_x(-JY d_J F(S) - d_J F([S, JY])) + X_x(JYCF - JYF) \\ &= -X_x(J[S, JY]F) - X_x(JYF) = X_x(JYF) - X_x(JYF) = 0. \end{aligned}$$

4. Mivel $dd_J(CF - F)(S, hX) = S(JX(CF - F)) - hX(C(CF - F))$, így

$$\begin{aligned} \tau_1^4(\nabla(\mathcal{P}_1 F))_x &= C(i_S d d_J F(hX)) - S(JX(CF - F)) + hX(C(CF - F)) \\ &= d_C d d_J F(S, hX) - dd_J d_C F(S, hX) + dd_J F(S, hX). \end{aligned}$$

Továbbá a $d_J d_C - d_C d_J = d_{[J,C]} = d_J$ azonosság alapján azt kapjuk, hogy

$$d_C d d_J F - dd_J d_C F + dd_J F = d_C d d_J F - dd_C d_J F = d_C d d_J F - d_C d d_J F = 0.$$

A fenti számításokból következik, hogy $\varphi_1(s) = (\tau_1 \nabla \mathcal{P}_1(F))_x = (i_\Gamma d d_J F_x, 0, 0, 0)$. Ennélfogva az egyedüli feltételt egy másodrendű megoldás harmadrendűvé emeléséhez a (2.16) egyenlet nyújtja. $\square$

2.2.3. Állítás ([34]). *A $\mathcal{P}_1 = (\mathcal{P}_S, \mathcal{P}_C)$ differenciáloperátor szimbóluma involutív.*

Bizonyítás. Használva a (2.25)-ben bevezetett $\mathcal{B}$ bázist és a (2.26)-ban bevezetett jelöléseket azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} g_2(\mathcal{P}_1) &= \text{Ker } \sigma_2(\mathcal{P}_1) = \{A \in S^2 T^* \mid A(X, C) = 0, A(S, JX) = A(X, C)\} \\ &= \{A \in S^2 T^* \mid A_{ij} = A_{ji}, A_{\underline{ij}} = A_{\underline{ji}}, A_{i\underline{n}} = A_{n\underline{i}} = A_{\underline{in}} = A_{\underline{ni}} = 0\}, \end{aligned}$$

és ennél fogva

$$\dim(g_2(\mathcal{P}_1)) = \frac{n(n+1)}{2} + (n-1)^2 + \frac{n(n-1)}{2} = n^2 + (n-1)^2. \quad (2.34)$$

Tekintsük az $\mathcal{E} = \{e_i\}_{i=1 \dots 2n}$ bázist, ahol

$$\mathcal{E} = \left\{ \underbrace{h_1}_{e_1}, \dots, \underbrace{h_{n-1}}_{e_{n-1}}, \underbrace{h_n + v_1 + \dots + v_n}_{e_n}, \underbrace{v_1}_{e_{n+1}}, \dots, \underbrace{v_n}_{e_{2n}} \right\}. \quad (2.35)$$

Jelöljük $A \in S^2 T^*$ komponenseit az $\mathcal{E}$ bázisra vonatkozóan $\tilde{A}_{ij}$ -vel. Ekkor

$$\begin{aligned} g_2(\mathcal{P}_1)_{e_1 \dots e_k} &= \{A \in S^2 T^* \mid i_{e_1} A = 0, \dots, i_{e_k} A = 0\} \\ &= \{A \in S^2 T^* \mid \tilde{A}_{ij} = \tilde{A}_{ji}, \tilde{A}_{\underline{ij}} = \tilde{A}_{\underline{ji}}, \\ &\quad \tilde{A}_{i\underline{n}} = \tilde{A}_{n\underline{i}} = \tilde{A}_{\underline{in}} = \tilde{A}_{\underline{ni}} = 0, \tilde{A}_{lj} = 0, \tilde{A}_{\underline{l}j} = 0, l \leq k\}, \end{aligned}$$

tehát

$$\dim(g_2(\mathcal{P}_1))_{e_1 \dots e_k} = \begin{cases} \frac{(n-k)(n-k+1)}{2} + (n-k)(n-1) + \frac{(n-2)(n-1)}{2}, & \text{if } k \leq n, \\ \frac{(n-2-k)(n-k-1)}{2}, & \text{if } k > n, \end{cases}$$

és így

$$\begin{aligned} \dim g_2(\mathcal{P}_1) + \sum_{k=1}^{2n} \dim g_2(\mathcal{P}_1)_{e_1 \dots e_k} \\ = n^2 + (n-1)^2 + \sum_{k=1}^n \left(\frac{(n-k)(n-k+1)}{2} + (n-k)(n-1) \right) + \frac{n(n-2)(n-1)}{2} \\ + \sum_{k=1}^n \frac{(n-2-k)(n-k-1)}{2} = \frac{8n^3 - 9n^2 + 7n}{6} \stackrel{(2.30)}{=} \dim g_3(\mathcal{P}_1). \end{aligned}$$

Tehát (1.16) alapján a (2.35) bázis kvázi-reguláris, és $\mathcal{P}_1$ szimbóluma involutív. $\square$

2.2.4. Tétel ([34]). *Legyen S egy spray az M sokaságon. Az S -hez társított Rapcsák-rendszer akkor és csak akkor formálisan integrálható, ha bármely $s = j_2(F)_x$ másodrendű megoldásra teljesül az $(i_\Gamma dd_J F)_x = 0$ egyenlet.*

Bizonyítás. A 2.2.1. Állítás alapján, ha a (2.16) integrálhatósági feltétel teljesül, akkor minden másodrendű megoldás harmadrendű megoldássá prolongálható. Továbbá mivel a $\mathcal{P}_1$ differenciáloperátor szimbóluma involutív, így a Cartan–Kähler-tétel alapján nincs magasabb rendű kompatibilitási feltétel, és minden harmadrendű megoldás végtelen rendű megoldássá prolongálható. $\square$

2.2.5. Megjegyzés. Minden $F \in C^\infty(TM)$ függvényre $i_\Gamma dd_J F$ egy szemi-bázikus 2-forma, és így azonosan zérus, amennyiben M egy 1-dimenziós sokaság. Ebben az esetben a Rapcsák-rendszer formálisan integrálható. Azonban ha $\dim M > 1$, akkor az $i_\Gamma dd_J F = 0$ egyenlet nem teljesül minden másodrendű megoldás esetén, ezért a Rapcsák-rendszer nem formálisan integrálható.

Lokális koordinátarendszert használva a (2.16) integrálhatósági feltétel a

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^i \partial y^j} - \frac{\partial^2 F}{\partial x^j \partial y^i} + \Gamma_j^k \frac{\partial^2 F}{\partial y^k \partial y^i} - \Gamma_i^k \frac{\partial^2 F}{\partial y^k \partial y^j} = 0 \quad (2.36)$$

$i, j = 1, \dots, n$ másodrendű parciális differenciálegyenletek teljesülését jelenti.

3. fejezet

A kibővített Rapcsák-rendszer

Amint az a 2.2.1. és a 2.2.3. Állítások alapján látható, a Cartan–Kähler-tétel feltételei akkor és csakis akkor teljesülnek, ha $\mathcal{P}_1$ tetszőleges $j_2(F)_x$ kezdeti értéke esetén fennáll az $i_\Gamma dd_J F = 0$ egyenlet. Azonban, $\dim M \geq 2$ esetén ez a feltétel nem teljesül minden másodrendű megoldásra, azaz nem minden másodrendű megoldás (kezdeti érték) emelhető fel harmadrendű megoldássá. Ez azt jelenti, hogy a kezdeti értékek halmaza túl nagy, ezért a kompatibilitási feltételt a rendszerhez adva redukáljuk ennek a méretét. Ennek alapján tehát az interálhatósági feltétellel kibővített

$$(\mathcal{P}_S, \mathcal{P}_C, \mathcal{P}_\Gamma), \quad (3.1)$$

differenciáloperátor megoldhatóságát kell tovább vizsgálnunk, ahol a $\mathcal{P}_\Gamma$ a (2.16) kompatibilitási feltételnek megfelelő másodrendű differenciáloperátor:

$$\mathcal{P}_\Gamma : C^\infty(TM) \rightarrow \text{Sec}(\Lambda^2 T_v^*), \quad \mathcal{P}_\Gamma F := i_\Gamma dd_J F. \quad (3.2)$$

A (2.36) lokális alakból is látható, hogy (3.2) egy másodrendű differenciáloperátor. A (3.1) rendszer vizsgálatát egyszerűsíti az alábbi

3.0.1. Lemma. A (3.1) és a

$$\mathcal{P}_2 = (\mathcal{P}_\Gamma, \mathcal{P}_C) \quad (3.3)$$

differenciáloperátor ekvivalens: a két rendszer megoldáshalmaza megegyezik.

Bizonyítás. Mivel (3.1) egyenletei speciálisan tartalmazzák a (3.3) egyenleteit is, így világos, hogy a (3.1) megoldásai egyben a (3.3) megoldásai is. A fordított irányhoz tegyük fel, hogy F egy megoldása (3.3)-nak. Ekkor F egy 1-homogén Lagrange-függvény, és

$$\mathcal{P}_S F(X) = i_S dd_J F(X) = dd_J F(S, hX) = \frac{1}{2} i_\Gamma dd_J F(S, hX) = \mathcal{P}_\Gamma F(S, hX) = 0$$

teljesül minden $X \in TM$ -re. Tehát F egy megoldása $\mathcal{P}_S$ -nek. $\square$

3.0.2. Definíció. A (3.3)-mal definiált $\mathcal{P}_2$ -höz tartozó parciális differenciálegyenlet-rendszert *kibővített Rapcsák-rendszernek* nevezzük.

3.0.3. Megjegyzés. A 3.0.1. Lemma alapján egy függvény pontosan akkor megoldása a Rapcsák-rendszernek, ha megoldása a kibővített Rapcsák-rendszernek.

Ahogy azt az előző fejezetben láttuk, a $2 \leq \dim M$ esetben a Rapcsák-rendszer nemtriviális integrálhatósági feltételei miatt a rendszer nem integrálható. A projektív metrizálhatóság kérdése ekkor a kibővített Rapcsák-rendszer vizsgálatára vezet. Ebben a fejezetben ennek a rendszernek az integrálhatóságát tanulmányozzuk.

3.1. Kompatibilitási feltételek

3.1.1. Állítás ([34]). *A $\mathcal{P}_2 = (\mathcal{P}_\Gamma, \mathcal{P}_C)$ rendszer egy másodrendű $s = j_2(F)_x$ megoldása $x \in \mathcal{TM}$ -ben akkor és csak akkor emelhető fel harmadrendű megoldássá, ha az*

$$(i_R dd_J F)_x = 0, \quad (3.4)$$

integrálhatósági feltétel teljesül, ahol R a sprayhez társított nemlineáris konnexitás görbülete.

Bizonyítás. A integrálhatósági feltételek meghatározásához először kiszámítjuk a $\mathcal{P}_\Gamma$ operátor szimbólumát, majd megadunk egy olyan τ_2 leképezést, amelyre $\text{Im } \sigma_3(\mathcal{P}_2) = \text{Ker } \tau_2$. Ennek segítségével számoljuk ki az obstrukciós egyenleteket.

A $\mathcal{P}_\Gamma$ operátor szimbóluma $\sigma_2(\mathcal{P}_\Gamma): S^2 T^* \rightarrow \Lambda^2 T_v^*$, ahol

$$(\sigma_2(\mathcal{P}_\Gamma) A_2)(Y, Z) = 2(A_2(hY, JZ) - A_2(hZ, JY)), \quad (3.5)$$

és így a $\mathcal{P}_\Gamma$ szimbólumának prolongáltja $\sigma_3(\mathcal{P}_\Gamma): S^3 T^* \rightarrow T^* \otimes \Lambda^2 T_v^*$,

$$(\sigma_3(\mathcal{P}_\Gamma) A_3)(X, Y, Z) = 2(A_3(X, hY, JZ) - A_3(X, hZ, JY)), \quad (3.6)$$

minden $X, Y, Z \in T$, $A_2 \in S^2 T^*$, $A_3 \in S^3 T^*$ esetén. Valóban, az (1.15) alapján legyenek $f_1, f_2 \in C^\infty(\mathcal{TM})$ olyan függvények, hogy $f_1(x) = f_2(x) = 0$. Ekkor

$$\begin{aligned} \sigma_2(\mathcal{P}_\Gamma)(df_1 \odot df_2)(X, Y) &= (i_\Gamma dd_J(f_1 f_2))(X, Y) = i_\Gamma d(d_J f_1 f_2 + f_1 d_J f_2)(X, Y) \\ &= i_\Gamma (dd_J f_1 f_2 + df_2 \wedge d_J f_1 + df_1 \wedge d_J f_2 + f_1 dd_J f_2)(X, Y) \\ &= (df_1 \wedge d_J f_2 - d_J f_1 \wedge df_2)(\Gamma X, Y) \\ &\quad + (df_1 \wedge d_J f_2 - d_J f_1 \wedge df_2)(X, \Gamma Y) \\ &= df_1(\Gamma X) d_J f_2(Y) - df_1(Y) d_J f_2(\Gamma X) - d_J f_1(\Gamma X) df_2(Y) \\ &\quad + d_J f_1(Y) df_2(\Gamma X) + df_1(X) d_J f_2(\Gamma Y) - df_1(\Gamma Y) d_J f_2(X) \\ &\quad - d_J f_1(X) df_2(\Gamma Y) + d_J f_1(\Gamma Y) df_2(X) \\ &= (df_1 \odot df_2)(\Gamma X, JY) - (df_1 \odot df_2)(Y, JX) \\ &\quad + (df_1 \odot df_2)(X, JY) - (df_1 \odot df_2)(\Gamma Y, JX). \end{aligned}$$

Használva a h horizontális projekció és a Γ közötti (1.6) kapcsolatot adódik a (3.5) formula.

3.1.2. Lemma. *Tekintsük a következő leképezést:*

$$\tau_2 : (T^* \otimes \Lambda^2 T_v^*) \times S^2 T^* \longrightarrow \text{Im } \tau_2 := K_2, \quad \tau_2 := (\tau_2^1, \tau_2^2, \tau_2^3), \quad (3.7)$$

ahol

$$\tau_2^1(B_\Gamma, B_C)(X, Y, Z) = B_\Gamma(hX, Y, Z) + B_\Gamma(hY, Z, X) + B_\Gamma(hZ, X, Y), \quad (3.8)$$

$$\tau_2^2(B_\Gamma, B_C)(X, Y, Z) = B_\Gamma(JX, Y, Z) + B_\Gamma(JY, Z, X) + B_\Gamma(JZ, X, Y), \quad (3.9)$$

$$\tau_2^3(B_\Gamma, B_C)(X, Y) = \frac{1}{2}B_\Gamma(C, X, Y) - B_C(hX, JY) + B_C(hY, JX), \quad (3.10)$$

továbbá $B_\Gamma \in T^* \otimes \Lambda^2 T_v^*$, $B_C \in S^2 T^*$, $X, Y, Z \in T$. Ekkor az alábbi sorozat egzakt:

$$S^3 T^* \xrightarrow{\sigma_3(\mathcal{P}_2)} (T^* \otimes \Lambda^2 T_v^*) \times S^2 T^* \xrightarrow{\tau_2} K_2 \longrightarrow 0. \quad (3.11)$$

Bizonyítás. Közvetlenül adódik, hogy $\tau_2 \circ \sigma_3(\mathcal{P}_2) = 0$, tehát $\text{Im } \sigma_3(\mathcal{P}_2) \subset \text{Ker } \tau_2$. Megmutatjuk, hogy $\text{Im } (\sigma_3(\mathcal{P}_2))$ és $\text{Ker } \tau_3$ dimenziója megegyezik.

Első lépés: $\text{Im } \sigma_3(\mathcal{P}_2)$ dimenziójának meghatározása.

A (2.25) bázist és a (2.26) jelölést használva adódik, hogy egy $A \in S^3 T^*$ szimmetrikus tenzor akkor és csak akkor eleme $\text{Ker } \sigma_3(\mathcal{P}_2) = \text{Ker } \sigma_3(\mathcal{P}_\Gamma) \cap \text{Ker } \sigma_3(\mathcal{P}_C)$ -nek, ha az A szimmetriáját leíró relációkon túl (2.27) egyenletei, valamint a

$$A \in \text{Ker } \sigma_3(\mathcal{P}_\Gamma) \Leftrightarrow A_{ij\bar{k}} = A_{ik\bar{j}}, \quad A_{ij\bar{k}} = A_{ik\bar{j}}, \quad i, j, k = 1, \dots, n \quad (3.12)$$

egyenletek is teljesülnek. Ekkor (3.12) következtében a tenzorkomponensek minden blokkja (azaz (A_{ijk}) , $(A_{ij\bar{k}})$, $(A_{i\bar{j}k})$ és $(A_{i\bar{j}\bar{k}})$, $i, j, k = 1, \dots, n$) teljesen szimmetrikus és $A_{ijn} = A_{ijn} = A_{ijn} = 0$. Tehát $\mathcal{C}_n^{3,i} = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$ szabad komponens van a (A_{ijk}) blokkban és $\mathcal{C}_{n-1}^{3,i} = \frac{(n-1)n(n+1)}{6}$ szabad komponens az $(A_{ij\bar{k}})$, $(A_{i\bar{j}k})$ és $(A_{i\bar{j}\bar{k}})$ blokkok mindegyikében. Azaz

$$\dim(g_3(\mathcal{P}_2)) = \mathcal{C}_n^{3,i} + 3\mathcal{C}_{n-1}^{3,i} = \frac{4n^3 + 3n^2 - n}{6} \quad (3.13)$$

és

$$\text{rank } \sigma_3(\mathcal{P}_2) = \dim S^3 T^* - \dim(g_3(\mathcal{P}_2)) = \frac{4n^3 + 9n^2 + 5n}{6}. \quad (3.14)$$

Második lépés: $\text{Ker } \tau_1$ dimenziójának meghatározása.

- A $\tau_2^1 = 0$, illetve a $\tau_2^2 = 0$ egyenletek pivot elemei $B_\Gamma(h_i, h_j, h_k)$, illetve $B_\Gamma(v_i, h_j, h_k)$, $i < j < k$. Ezért ezek $\mathcal{C}_n^3 = \binom{n}{3}$ független egyenletet adnak.
- A $\tau_2^3 = 0$ egyenlet pivot elemei $B_\Gamma(v_n, h_i, h_j)$, $i < j$, $i, j = 1 \dots n$, ezért itt $\mathcal{C}_n^2 = \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ független egyenletet kapunk.

Így

$$\dim \text{Ker } \tau_2 = \dim S^2 T^* + \dim(T^* \otimes \Lambda^2 T_v^*) - 2\mathcal{C}_n^3 - \mathcal{C}_n^2 = \frac{4n^3 + 9n^2 + 5n}{6}. \quad (3.15)$$

Végül (3.14) és (3.15) összevetésével azt kapjuk, hogy $\text{rank } \sigma_3(\mathcal{P}_2) = \dim \text{Ker } \tau_2$. Ez pedig azt jelenti, hogy (3.11) egzakt. $\square$

A 3.1.1. Állítás bizonyításának folytatása. A $\mathcal{P}_2$ operátor diagramja:

$$\begin{array}{ccccccc}
 g_3(\mathcal{P}_2) & \longrightarrow & S^3T^* & \xrightarrow{\sigma_3(\mathcal{P}_2)} & (T^* \otimes \Lambda^2T_v^*) \times S^2T^* & \xrightarrow{\tau_2} & K_2 \longrightarrow 0 \\
 \downarrow & & \downarrow \epsilon & & \downarrow \epsilon & & \\
 Sol_3(\mathcal{P}_2) & \xrightarrow{i} & J_3(\mathbb{R}_{TM}) & \xrightarrow{p_3(\mathcal{P}_2)} & J_1(\Lambda^2T_v^*) \times J_2(\mathbb{R}_{TM}) & & \\
 \downarrow \bar{\pi}_2 & & \downarrow \pi_2 & & \downarrow & & \\
 Sol_2(\mathcal{P}_2) & \xrightarrow{i} & J_2(\mathbb{R}_{TM}) & \xrightarrow{p_2(\mathcal{P}_2)} & \Lambda^2T_v^* \times J_1(\mathbb{R}_{TM}) & &
 \end{array}$$

A szaggatott útvonal a $\varphi_2 : Sol_2(\mathcal{P}_2) \rightarrow K_2$ obstrukciós leképezést ábrázolja. Legyen $s = j_2(F)_x \in Sol_2(\mathcal{P}_2)$ másodrendű megoldása $\mathcal{P}_2$ -nek x -ben, azaz $(\mathcal{P}_2F)_x = 0$. Ekkor

$$(i_\Gamma dd_J F)_x = 0, \quad (\mathcal{L}_C F - F)_x = 0, \quad (\nabla(\mathcal{L}_C F - F))_x = 0. \quad (3.16)$$

Az integrálhatósági feltételt a τ_2 leképezés segítségével számíthatjuk ki. Egy $s \in Sol_{2,x}(\mathcal{P}_2)$ másodrendű megoldás akkor és csakis akkor prolongálható harmadrendű megoldássá, ha $\varphi_2(s) = 0$, ahol $\varphi_2(s) = (\tau_2 \nabla \mathcal{P}_2(F))_x$. A következőkben használni fogjuk a $\Omega := dd_J F$ jelölést. A τ_2 leképezés komponensei segítségével az alábbiakat nyerjük:

1. $\tau_2^1(\nabla(\mathcal{P}_2F))_x = d_h(i_\Gamma dd_J F)_x = (d_h i_{2h-I} dd_J F)_x = (2(d_h i_h dd_J F - d_h dd_J F))_x = (2d_h(i_h d - d i_h) d_J F)_x = (2d_h d_h d_J F)_x = (d_R d_J F)_x = (i_R \Omega)_x$.
2. $\tau_2^2(\nabla(\mathcal{P}_2F))_x = d_J(i_\Gamma \Omega)_x \stackrel{(1.6)}{=} (d_J(i_{2h-I} \Omega))_x = (2d_J i_h dd_J F - 2d_J dd_J F)_x = (-2d_J i_h d_J F - 2i_J ddd_J F + 2d i_J dd_J F)_x = -(2d_J(d_J i_h dF + d_J dF))_x = 0$
ahol felhasználtuk, hogy $[d, d_J] = 0$, $[i_h, d_J] = d_{Jh} - i_{[h,J]}$ és $[J, h] = 0$.
3. $\tau_2^3(\nabla \mathcal{P}_2(F))_x(X, Y) = \frac{1}{2} \nabla i_\Gamma \Omega(C, X, Y) - \nabla \mathcal{P}_C F(hX, JY) + \nabla \mathcal{P}_C F(hY, JX) = \frac{1}{2} d_C i_\Gamma \Omega(hX, hY) - \frac{1}{2} i_\Gamma d_C dd_J F(hX, hY) = \frac{1}{2} d_{[C,\Gamma]} \Omega(hX, hY) \stackrel{[C,\Gamma]=0}{=} 0$.

A fenti számolás azt mutatja, hogy $\varphi_2(s) = \tau_2(\nabla \mathcal{P}_2(F))_x = (i_R \Omega_x, 0, 0)$, és ezzel a 3.1.1. Állítást igazoltuk. $\square$

3.2. Involutivitás

3.2.1. Lemma ([34]). *A $\mathcal{P}_2$ operátor szimbóluma involutív.*

Bizonyítás. Használjuk a (2.25) bázist a (2.26) jelöléssel. Az adódik, hogy

$$\begin{aligned}
 g_2(\mathcal{P}_2) &= \text{Ker } \sigma_2(\mathcal{P}_2) = \left\{ A \in S^2T^* \mid A(X, C) = 0, A(hX, JY) = A(hY, JX) \right\} \\
 &= \left\{ A \in S^2T^* \mid A_{ij} = A_{ji}, A_{i\bar{j}} = A_{j\bar{i}}, A_{i\bar{j}} = A_{j\bar{i}}, A_{i\bar{n}} = 0, A_{n\bar{i}} = 0 \right\}.
 \end{aligned}$$

Ennélfogva $\dim(g_2(\mathcal{P}_2)) = \frac{n(n+1)}{2} + 2\frac{(n-1)n}{2}$. Tekintsük az $\hat{\mathcal{E}} = \{\hat{e}_i\}_{i=1}^{2n}$ bázist, ahol

$$\begin{aligned}\hat{e}_i &= h_i + iv_i, & i &= 1, \dots, n-1, \\ \hat{e}_n &= h_n + v_1 + \dots + v_n, \\ \hat{e}_{i+n} &= v_i, & i &= 1, \dots, n.\end{aligned}$$

Az új bázisban az $(\hat{A}_{ij}) = (A_{ij})$ blokk komponensei kifejezhetők az $\hat{A}_{ij}$ komponensek kombinációiként a következőképpen: ha $i \neq j$, akkor $\hat{A}_{ij} = \frac{1}{i-j}(\hat{A}_{ij} - \hat{A}_{ji})$, és ha $i=j$, akkor az adódik, hogy $\hat{A}_{jj} = \hat{A}_{n\bar{j}} - \sum_{k \neq j} \frac{1}{k-j}(\hat{A}_{jk} - \hat{A}_{k\bar{j}})$. Így

$$\dim(g_2(\mathcal{P}_2))_{\hat{e}_1 \dots \hat{e}_k} = \begin{cases} \frac{(n-k+1)(n-k)}{2} + (n-1)(n-k), & \text{if } k \leq n, \\ 0, & \text{if } k > n, \end{cases}$$

és ennél fogva

$$\begin{aligned}\dim(g_2(\mathcal{P}_2)) + \sum_{k=1}^{2n} \dim(g_2(\mathcal{P}_2))_{\hat{e}_1 \dots \hat{e}_k} &= \\ &= \frac{n(n+1)}{2} + 2\frac{(n-1)n}{2} + \sum_{k=1}^n \left(\frac{(n-k+1)(n-k)}{2} + (n-1)(n-k) \right) \\ &\stackrel{(3.13)}{=} \dim(g_3(\mathcal{P}_2)).\end{aligned}$$

Tehát (1.16) alapján az $\hat{\mathcal{E}}$ bázis kvázi-reguláris, ezért $\mathcal{P}_2$ szimbóluma involutív. $\square$

Az eddigi számítások eredményeként kapjuk az alábbi tételt:

3.2.2. Tétel ([34]). *Legyen S egy spray az M sokaságon. A kibővített Rapcsák-rendszer pontosan akkor formálisan integrálható, ha az alábbiak közül az egyik teljesül:*

1. $\dim M = 2$,
2. S lapos spray,
3. S izotróp spray.

Bizonyítás. Mivel a 3.2.1 Lemma alapján a $\mathcal{P}_2$ differenciáloperátor szimbóluma involutív, így a kibővített Rapcsák-rendszernek nincsenek magasabb rendű kompatibilitási feltételei, azaz amennyiben a másodrendű megoldások felemelhetők harmadrendű megoldássá, úgy a Cartan–Kähler-tétel alapján az adódik, hogy minden másodrendű megoldás végtelen rendűvé emelhető fel, tehát a kibővített rendszer formálisan integrálható. Tehát azt kell ellenőrizni, hogy igaz-e hogy minden $j_2(F)_x \in \text{Sol}_2(\mathcal{P}_2)$ másodrendű megoldás esetén teljesül a (3.4) kompatibilitási egyenlet.

1. Ha $\dim M = 2$, akkor a szemi-bázikus 3-formák tere a zérustér, azaz $\Lambda_v^3(TM) = \{0\}$. Ezért bármely $F \in C^\infty(TM)$ esetén $i_R dd_J F \equiv 0$ azaz (3.4) teljesül.
2. Ha S lapos, azaz $\Phi = \lambda J$, akkor $R = d_J \lambda \wedge J$. A vertikális disztribúció integrálhatóságát felhasználva azt kapjuk, hogy

$$i_R dd_J F = d_R d_J F = d_J \lambda d_J^2 F + d_{d_J \lambda} \wedge i_J d_J F = 0$$

és (3.4) teljesül.

3. Izotróp spray görbületi tenzora az alábbi alakú: $R = \alpha \wedge J + \beta \otimes C$, ahol $\alpha \in \Lambda_v^1(TM)$, $\beta \in \Lambda_v^2(TM)$. Ekkor

$$i_R dd_J F = i_{\alpha \wedge J + \beta \otimes C} dd_J F = \alpha \wedge i_J dd_J F + \beta \wedge i_C dd_J F = 0.$$

azaz (3.4) teljesül.

□

3.2.3. Következmény ([34]). *Legyen S egy analitikus spray az M analitikus sokaságon. Ha M 2-dimenziós sokaság, S lapos spray vagy S izotróp görbületű spray, akkor S lokálisan projektív Finsler-metrizálható.*

Valóban, analitikus esetben a formális integrálhatóság maga után vonja a megoldások létezését tetszőleges kezdeti feltétel esetén.

4. fejezet

A görbületi feltétellel kiegészített Rapcsák-rendszer

Amint az előző fejezet eredménye mutatja, a kibővített Rapcsák-rendszer integrálhatósági feltételét a sprayhez társított nemlineáris konnexió görbületével lehet kifejezni. Amennyiben a spray nem izotróp, úgy ez a feltétel nem szükségképpen teljesül minden kezdeti feltételre, tehát ekkor a kibővített rendszer nem formálisan integrálható. Ezért a nem izotróp sprayk projektív metrízálhatóságának tanulmányozásához a (3.4) integrálhatósági feltételt, azaz a

$$i_R dd_J F = 0 \quad (4.1)$$

egyenletet is hozzá kellene venni a kibővített Rapcsák rendszerhez, és az így kapott másodrendű differenciáloperátor integrálhatóságát kellene vizsgálni. A [14] cikk 5. Lemmája alapján viszont a (4.1) integrálhatósági feltétel ekvivalens az

$$i_\Phi dd_J F = 0, \quad (4.2)$$

egyenlettel, illetve az $i_W dd_J F = 0$ egyenlettel, ahol Φ az S -hez társított Jacobi-endomorfizmus, W pedig a Weyl-tenzor. Tehát a (3.4) egyenlet helyettesíthető a (4.2) egyenlettel, így ezzel a feltétellel egészítjük ki a kibővített Rapcsák-rendszert. Vezessük be a $\mathcal{P}_\Phi: C^\infty(TM) \rightarrow \text{Sec}(\Lambda^2 T_v^*)$, differenciáloperátort, ahol $\mathcal{P}_\Phi(F) = i_\Phi dd_J F$, és tekintsük az alábbi rendszert:

$$\mathcal{P}_3 := (\mathcal{P}_\Gamma, \mathcal{P}_C, \mathcal{P}_\Phi). \quad (4.3)$$

Megjegyezzük, hogy (4.2) alapján Φ önadjungált a $\Omega(J\cdot, \cdot)$ szimmetrikus bilineáris formára nézve, tehát diagonalizálható. A továbbiakban a generikus esetet tekintjük, ahol Φ sajátfüggvényei páronként különböznek.

4.1. Másodrendű kompatibilitási feltételek

A differenciáloperátor szimbóluma

A $\mathcal{P}_\Phi$ operátor szimbóluma $\sigma_2(\mathcal{P}_\Phi): S^2 T^* \rightarrow \Lambda^2 T_v^*$, ahol

$$(\sigma_2(\mathcal{P}_\Phi)A_2)(X, Y) = A_2(\Phi X, JY) - A_2(\Phi Y, JX), \quad (4.4)$$

és így a szimbólum prolongáltja $\sigma_3(\mathcal{P}_\Phi) : S^3T^* \longrightarrow T^* \otimes \Lambda^2T_v^*$:

$$(\sigma_3(\mathcal{P}_\Phi)A_3)(X, Y, Z) = A_3(X, \Phi Y, JZ) - A_3(X, \Phi Z, JY), \quad (4.5)$$

ahol $X, Y, Z \in T$, $A_2 \in S^2T^*$, $A_3 \in S^3T^*$. Továbbá a $\mathcal{P}_3$ rendszer szimbóluma:

$$\sigma_3(\mathcal{P}_3) = (\sigma_3(\mathcal{P}_\Gamma), \sigma_3(\mathcal{P}_C), \sigma_3(\mathcal{P}_\Phi)) \quad (4.6)$$

ahol $\sigma_3(\mathcal{P}_3) : S^3T^* \longrightarrow (T^* \otimes \Lambda^2T_v^*) \times S^2T^* \times (T^* \otimes \Lambda^2T_v^*)$.

Jelölje a Jacobi-endomorfizmus sajátértékeit $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, a megfelelő horizontális sajátvektorokat pedig $h_1, \dots, h_n$, ahol legyen $\lambda_n = 0$, és így $h_n = S$. Számításaink során használjuk az

$$e_i := \begin{cases} h_i & i = 1, \dots, n \\ v_i & i = n+1, \dots, 2n \end{cases} \quad (4.7)$$

jelölést, ahol $Jh_i = v_i$, $i = 1, \dots, n$. Ekkor $\mathcal{B}$ egy bázis T_xTM -ben, ahol

$$\mathcal{B} := \{e_1, \dots, e_n, e_{n+1}, \dots, e_{2n}\} \subset T_xTM, \quad (4.8)$$

Megjegyezzük, hogy ekkor $v_n = Jh_n = JS = C$ a Liouville-vektormező.

Tekintsük a

$$\tau_3 := (\tau_2, \tau_3^1, \tau_3^2, \tau_3^3, \tau_3^4, \tau_3^5), \quad (4.9)$$

leképezést, ahol τ_2 a (3.7)-tel adott morfizmus, a τ_3^i , $i = 1, \dots, 5$ pedig a

$$\tau_3^1(B)(X, Y, Z) = B_\Phi(\Phi X, Y, Z) + B_\Phi(\Phi Y, Z, X) + B_\Phi(\Phi Z, X, Y), \quad (4.10a)$$

$$\tau_3^2(B)(X, Y, Z) = B_\Phi(JX, Y, Z) + B_\Phi(JY, Z, X) + B_\Phi(JZ, X, Y), \quad (4.10b)$$

$$\tau_3^3(B)(Y, Z) = B_\Phi(C, Y, Z) - B_C(\Phi Y, JZ) + B_C(\Phi Z, JY), \quad (4.10c)$$

$$\tau_3^4(B)(X, Y) = B_\Phi(X, Y, S) - B_C(X, \Phi Y) \quad (4.10d)$$

$$\tau_3^5(B) = \frac{1}{2}B_\Gamma(v_i, h_j, h_k) + \frac{1}{\lambda_k - \lambda_i}B_\Phi(h_j, h_i, h_k) + \frac{1}{\lambda_i - \lambda_j}B_\Phi(h_k, h_i, h_j), \quad (4.10e)$$

leképezések, ahol $1 \leq i, j, k \leq n$ páronként különbözőek és

$$B = (B_\Gamma, B_C, B_\Phi) \in (T^* \otimes \Lambda^2T_v^*) \times S^2T^* \times (T^* \otimes \Lambda^2T_v^*).$$

Ekkor igaz az alábbi

4.1.1. Lemma. A (4.9)-ben definiált leképezéssel a

$$S^3T^* \xrightarrow{\sigma_3(\mathcal{P}_3)} (T^* \otimes \Lambda^2T_v^*) \times S^2T^* \times (T^* \otimes \Lambda^2T_v^*) \xrightarrow{\tau_3} K_3 := \text{Im } \tau_3 \rightarrow 0. \quad (4.11)$$

sorozat egzakt.

Bizonyítás. Könnyen látható, hogy $\tau_3 \circ \sigma_3(\mathcal{P}_3) = 0$, ezért $\text{Im } \sigma_3(\mathcal{P}_3) \subset \text{Ker } \tau_3$. Megmutatjuk, hogy $\text{Im } (\sigma_3(\mathcal{P}_3))$ és $\text{Ker } \tau_3$ dimenziója megegyezik.

Számoljuk ki elsőként az $\text{Im } \sigma_3(\mathcal{P}_3)$ dimenzióját. A definíció alapján

$$g_3(\mathcal{P}_3) = \text{Ker } \sigma_3(\mathcal{P}_3) = \text{Ker } \sigma_3(\mathcal{P}_\Gamma) \cap \text{Ker } \sigma_3(\mathcal{P}_C) \cap \text{Ker } \sigma_3(\mathcal{P}_\Phi), \quad (4.12)$$

ahol $\sigma_3(\mathcal{P}_C)$ a (2.20)-ban, $\sigma_3(\mathcal{P}_\Gamma)$ pedig a (3.6)-ban adott leképezés. Világos, hogy az $A \in S^3T^*$ szimmetrikus tenzor akkor és csak akkor van $\sigma_3(\mathcal{P}_\Phi)$ magjában, ha

$$A(e_i, \Phi h_j, Jh_k)A(e_i, \Phi h_k, Jh_j) = (\lambda_j \lambda_k)A(e_i, v_j, v_k) = 0,$$

$i = 1 \dots 2n$, $j, k = 1 \dots n$ és $j \neq k$, azaz a (2.26) jelölést használva

$$A \in \text{Ker } \sigma_3(\mathcal{P}_\Phi) \Leftrightarrow A_{\underline{ijk}} = 0, \quad A_{\underline{ikj}} = 0, \quad i, j, k = 1, \dots, n, \quad j \neq k. \quad (4.13)$$

Továbbá (2.27) és (3.12) alapján az adódik, hogy egy $A \in S^3T^*$ tenzor akkor és csak akkor eleme $g_3(\mathcal{P}_3)$ -nak, ha a komponensei eleget tesznek az

$$A \in \text{Ker } \sigma_3(\mathcal{P}_C) \Leftrightarrow A_{\underline{ijn}} = A_{\underline{ijn}} = A_{\underline{ijn}} = 0, \quad i, j = 1, \dots, n, \quad (4.14a)$$

$$A \in \text{Ker } \sigma_3(\mathcal{P}_\Gamma) \Leftrightarrow A_{\underline{ijk}} = A_{\underline{ikj}}, \quad A_{\underline{ijk}} = A_{\underline{ikj}}, \quad i, j, k = 1, \dots, n, \quad (4.14b)$$

$$A \in \text{Ker } \sigma_3(\mathcal{P}_\Phi) \Leftrightarrow A_{\underline{ijk}} = A_{\underline{ijk}} = 0, \quad i, j, k = 1, \dots, n, \quad j \neq k. \quad (4.14c)$$

egyenleteknek. Azt kapjuk, hogy

- az $(A_{\underline{ijk}})$ blokk teljesen szimmetrikus, ezért $\mathcal{C}_n^{3,i}$ szabad komponenst tartalmaz.
- Az $(A_{\underline{ijk}})$ blokk (4.14b) miatt szintén teljesen szimmetrikus. Továbbá (4.14a) alapján az adódik, hogy $A_{\underline{ijn}} = A_{\underline{ijn}} = A_{\underline{ijn}} = 0$. Így összesen $\mathcal{C}_{n-1}^{3,i}$ szabad komponenst nyerünk.
- Az $(A_{\underline{ijk}})$ és az $(A_{\underline{ijk}})$ blokkokra $\mathcal{C}_{n-1}^{1,i}$ szabad komponenst kapunk. Ezek a következők: $A_{\underline{iii}}$ és $A_{\underline{iii}}$, $i = 1, \dots, n-1$.

Ebből az következik, hogy

$$\dim g_3(\mathcal{P}_3) = \mathcal{C}_n^{3,i} + \mathcal{C}_{n-1}^{3,i} + 2\mathcal{C}_{n-1}^{1,i}, \quad (4.15)$$

és így

$$\text{rank } \sigma_3(\mathcal{P}_3) = \dim S^3T^* - \dim g_3(\mathcal{P}_3) = \frac{6n^3 + 9n^2 - 9n + 12}{6}. \quad (4.16)$$

Számoljuk ki most a $\text{Ker } \tau_3$ dimenzióját! Legyen $B = (B_\Gamma, B_C, B_\Phi) \in \text{Ker } \tau_3$, és használjuk a $B_{ijk}^\Gamma := B_\Gamma(h_i, h_j, h_k)$, $B_{ijk}^\Gamma := B_\Gamma(v_i, h_j, h_k)$, stb. jelöléseket (azaz a vertikális komponensekre vonatkozó indexeket aláhúzzuk). Ekkor a

- $\tau_2^1 = 0$ és $\tau_2^2 = 0$ egyenletekben a B_{ijk}^Γ és B_{ijk}^Γ , $i < j < k$ pivot elemek, tehát itt $2\mathcal{C}_n^3$ független egyenletek kapunk.
- $\tau_2^3 = 0$ pivotjai B_{nij}^Γ , $i < j$, ami $\mathcal{C}_n^2$ független egyenletet jelent.
- $\tau_3^1 = 0$ és $\tau_3^2 = 0$ pivot elemei B_{ijk}^Φ , $i < j < k < n$ és B_{ijk}^Φ , $k < i < j < n$. Tehát itt a független egyenletek száma $2\mathcal{C}_{n-1}^3$.

- $\tau_3^3 = 0$ pivot elemei B_{ij}^Φ , $i < j$, ami $\mathcal{C}_n^2$ független egyenletet szolgáltat.
- $\tau_3^4 = 0$ pivotjai B_{ijn}^Φ , $i, j \neq n$ és B_{ijn}^Φ , $j \neq n$. Azaz itt $\mathcal{C}_{n-1}^1 \mathcal{C}_{n-1}^1 + \mathcal{C}_n^1 \mathcal{C}_{n-1}^1$ független egyenletet kapunk.
- A $\tau_3^5 = 0$ egyenletek nem mind függetlenek, mivel tetszőleges i, j, k esetén fennáll a

$$\sum_{cycl} \left(\frac{1}{2} B_{ijk}^\Gamma + \frac{1}{\lambda_k - \lambda_i} B_{jik}^\Phi + \frac{1}{\lambda_i - \lambda_j} B_{kij}^\Phi \right) = 0.$$

összefüggés. Ennélfogva ezeknél az egyenleteknél a pivot elemek B_{kij}^Γ , $i < j < k < n$ és B_{jki}^Γ , $i < j < k$. Ezek pedig $\mathcal{C}_{n-1}^3 + \mathcal{C}_n^3$ független egyenletet nyújtanak.

Tehát a τ_3 magját leíró egyenletek száma

$$\mathcal{E}_3 := 2\mathcal{C}_n^3 + \mathcal{C}_n^2 + 2\mathcal{C}_{n-1}^3 + \mathcal{C}_n^2 + \mathcal{C}_{n-1}^1 \mathcal{C}_{n-1}^1 + \mathcal{C}_n^1 \mathcal{C}_{n-1}^1 + \mathcal{C}_{n-1}^3 + \mathcal{C}_n^3$$

és így a τ_3 magjának dimenziója

$$\dim \text{Ker } \tau_3 = 2 \dim(T^* \otimes \Lambda^2 T_v^*) + \dim S^2 T^* - \mathcal{E}_3 = \frac{6n^3 + 9n^2 - 9n + 12}{6}. \quad (4.17)$$

Végül (4.16) és (4.17) alapján az adódik, hogy

$$\text{Im } \sigma_3(\mathcal{P}_3) = \text{Ker } \tau_3,$$

azaz (4.11) egzakta. □

A lemma segítségével igazolható az alábbi

4.1.2. Állítás ([35]). *A $\mathcal{P}_3$ differenciáloperátor egy $x \in \mathcal{TM}$ -beli másodrendű $s = j_2(F)_x$ megoldása akkor és csakis akkor emelhető fel harmadrendű megoldássá, ha az*

$$i_{[\Phi, \Phi]} \Omega_x = 0, \quad (4.18a)$$

$$\sum_{ijk}^{cycl} (\Omega_x([v_i, h_j], h_k))_x = 0, \quad (4.18b)$$

integrálhatósági feltételek teljesülnek.

A $\mathcal{P}_3$ operátor kommutatív diagramja a megfelelő morfizmusokkal:

$$\begin{array}{ccccccc} g_3(\mathcal{P}_3) & \longrightarrow & S^3 T^* & \xrightarrow{\sigma_3(\mathcal{P}_3)} & (T^* \otimes \Lambda^2 T_v^*) \times S^2 T^* \times (T^* \otimes \Lambda^2 T_v^*) & \xrightarrow{\tau_3} K_3 & \longrightarrow 0 \\ \downarrow & & \downarrow \epsilon & & \updownarrow \epsilon & & \\ Sol_3(\mathcal{P}_3) & \xrightarrow{i} & J_3 \mathbb{R} & \xrightarrow[p_3(\mathcal{P}_3)]{\quad} & J_1(\Lambda^2 T_v^* \times J_2(\mathbb{R}_{TM}) \times \Lambda^2 T_v^*) & & \\ \downarrow \bar{\pi}_2 & & \updownarrow \pi_2 & & \downarrow & & \\ Sol_2(\mathcal{P}_3) & \xrightarrow[p_2(\mathcal{P}_3)]{\quad} & J_2 \mathbb{R} & \xrightarrow[p_2(\mathcal{P}_3)]{\quad} & \Lambda^2 T_v^* \times J_1(\mathbb{R}_{TM}) \times \Lambda^2 T_v^* & & \end{array}$$

A szaggatott útvonal a $\varphi_3 : \text{Sol}_2(\mathcal{P}_3) \rightarrow K_3$ obstrukciós leképezést ábrázolja. Legyen $s = j_2(F)_x \in \text{Sol}_2(\mathcal{P}_3)$ egy másodrendű megoldása $\mathcal{P}_3$ -nak az x pontban, azaz $(\mathcal{P}_3 F)_x = 0$. Tehát

$$(i_\Gamma dd_J F)_x = 0, \quad (\mathcal{L}_C F - F)_x = 0, \quad (\nabla(\mathcal{L}_C F - F))_x = 0, \quad (i_\Phi dd_J F)_x = 0. \quad (4.19)$$

Az 1.2.7. Megjegyzés alapján az integrálhatósági feltétel a $\varphi_3(s) = \tau_3(\nabla \mathcal{P}_3(F))_x$ obstrukciós leképezés segítségével számítható ki, és az s másodrendű megoldás akkor és csak akkor emelhető fel harmadrendűvé, ha $\varphi_3(s) = 0$.

1. Mivel a rendszer tartalmazza a (4.2)-t, ami ekvivalens a (4.1) egyenlettel, így

$$\tau_2(\nabla \mathcal{P}_3 F)_x = i_R dd_J F_x = 0$$

$$2. \quad \tau_3^1(\nabla \mathcal{P}_3 F)_x = (d_\Phi(i_\Phi \Omega))_x = (d_\Phi d_\Phi d_J F + d_\Phi d i_\Phi d_J F)_x = \frac{1}{2} d_{[\Phi, \Phi]} d_J F_x = \frac{1}{2} i_{[\Phi, \Phi]} \Omega_x.$$

3. Az $[i_\Phi, d_J] = d_{J\Phi} - i_{[\Phi, J]}$ azonosság felhasználásával a következő adódik:

$$\tau_3^2(\nabla \mathcal{P}_3 F)_x = (d_J(i_\Phi \Omega))_x = (-i_{[J, \Phi]} \Omega + i_\Phi d_J \Omega)_x = (-3i_R \Omega)_x = 0.$$

4. Legyen $F_c := CF - F$. Ekkor azt kapjuk, hogy

$$i_\Phi dd_J F_c(X, Y)_x = dd_J F_c(\Phi X, Y) - dd_J F_c(\Phi Y, X) = \Phi X(JY F_c) - \Phi Y(JX F_c)$$

és így

$$\begin{aligned} \tau_3^3(\nabla \mathcal{P}_3 F)_x &= (d_C(i_\Phi \Omega) - i_\Phi dd_J F_c)_x = (d_C d_\Phi d_J F - d_\Phi d_J d_C F)_x \\ &= (d_C d_\Phi d_J F - d_\Phi d_C d_J F - d_\Phi d_J F)_x = (d_{[C, \Phi]} d_J F)_x = (i_\Phi \Omega)_x \\ &= 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5. \quad \tau_3^4(\nabla \mathcal{P}_3 F)_x(X, Y) &= X_x(i_\Phi dd_J F(Y, S)) - X_x(\Phi Y(CF - F)) \\ &= X_x(\Phi Y d_J F(S) - d_J F([\Phi Y, S])) - X_x(\Phi Y(CF - F)) \\ &= -X_x(J[\Phi Y, S]F) + X_x(\Phi Y F) = -X_x([J, S](\Phi Y)F) + X_x(\Phi Y F) \\ &= -X_x((2h - I)\Phi Y F) - X_x(\Phi Y F) \\ &= 0. \end{aligned}$$

6. Mivel $i_J \Omega(h_k, h_l) = 0$, $k, l = 1, \dots, n$, ennél fogva $\Omega(v_k, h_l) = \Omega(v_l, h_k)$, és azt írhatjuk, hogy

$$\begin{aligned} i_\Phi \Omega(h_i, h_k) &= \Omega(\Phi h_i, h_k) - \Omega(\Phi h_k, h_i) \\ &= \lambda_i \Omega(v_i, h_k) - \lambda_k \Omega(v_k, h_i) = (\lambda_i - \lambda_k) \Omega(v_i, h_k). \end{aligned}$$

Továbbá tudjuk, hogy $\lambda_i \neq \lambda_j$ és $j_2(F)_x$ egy másodrendű megoldás x -ben (és így $i_\Phi \Omega_x = 0$), azaz $\Omega_x(v_i, h_k) = 0$. Következésképpen,

$$\nabla i_\Phi \Omega(h_j, h_i, h_k)_x = (h_j(i_\Phi \Omega(h_i, h_k)))_x = ((\lambda_i - \lambda_k) h_j \Omega(v_i, h_k))_x,$$

és

$$\begin{aligned}\tau_3^5(\nabla \mathcal{P}_3 F)_x(h_i, h_j, h_k) &= \\ &= \frac{1}{2} \nabla i_\Gamma \Omega(v_i, h_j, h_k)_x + \frac{1}{\lambda_k - \lambda_i} \nabla i_\Phi \Omega(h_j, h_i, h_k)_x + \frac{1}{\lambda_i - \lambda_j} \nabla i_\Phi \Omega(h_k, h_i, h_j)_x \\ &= v_i \Omega(h_j, h_k)_x + h_j \Omega(h_k, v_i)_x + h_k \Omega(v_i, h_j)_x.\end{aligned}$$

Azonban a $d\Omega = 0$ azonosság alapján $\sum_{ijl}^{cycl} v_i \Omega(h_j, h_k) - \Omega([v_i, h_j], h_k) = 0$, és

$$\tau_3^5(\nabla \mathcal{P}_3(F))_x = \Omega_x([v_i, h_j], h_k) + \Omega_x([h_j, h_k], v_i) + \Omega_x([h_k, v_i], h_j).$$

Összesítve az 1.–6. pontokban elvégzett számítások eredményeit az adódik, hogy

$$\varphi_3(s)_x = \tau_3(\nabla \mathcal{P}_3 F)_x = \left(0, \frac{1}{2} i_{[\Phi, \Phi]} \Omega, 0, 0, 0, \sum_{ijk}^{cycl} \Omega([v_i, h_j], h_k)\right)_x,$$

ami azt mutatja, hogy $\varphi_3(s)_x = 0$ pontosan akkor teljesül, ha a 4.1.2 Állítás feltételei teljesülnek. Így az állítás igazolását befejeztük. $\square$

4.2. Spencer-kohomológia és 2-aciklikusság

A 4.1.2. Állításban meghatároztuk azokat az integrálhatósági feltételeket, melyek teljesülése esetén $\mathcal{P}_3$ másodrendű megoldásai harmadrendűekké emelhetők fel. A rendszer további vizsgálata azt mutatja, hogy $\mathcal{P}_3$ -nak nem létezik kvázi-reguláris bázisa, azaz a szimbóluma nem involutív. Így a Cartan–Kähler-tétel feltételei nem teljesülnek, ami arra utal, hogy magasabb rendű kompatibilitási feltételek megjelenésére számíthatunk. Az involutivitás hiánya nem ad arra vonatkozó információt, hogy hányad rendű prolongáltnál lépnek fel az extra kompatibilitási feltételek. Erről pontosabb képet kaphatunk a szimbólum 2-aciklikusságának vizsgálatával. Továbbá a Spencer-féle kohomológia csoportok segítségével az is meghatározható, hogy milyen szinten és hány magasabb rendű feltétel adódik. A következő tételt igazoljuk:

4.2.1. Állítás ([34]). *A $\mathcal{P}_3$ operátor szimbóluma nem 2-aciklikus: a Spencer-féle kohomológia csoportok közül a $H^{2,2}(\mathcal{P}_3)$ nemtriviális és*

$$\dim H^{2,2}(\mathcal{P}_3) = \frac{(n-1)(n-2)}{2}.$$

4.2.2. Megjegyzés. A 4.2.1. Állításból következik, hogy a $\mathcal{P}_3$ szimbóluma nem involutív, ugyanis ebben az esetben minden Spencer-féle kohomológia csoport triviális lenne.

Bizonyítás. A $\mathcal{P}_\Phi$ differenciáloperátor szimbóluma

$$(\sigma_2(\mathcal{P}_\Phi)A)(X_1, X_2) = A(\Phi X_1, X_2) - A(\Phi X_2, X_1), \quad (4.20)$$

minden $X_1, X_2 \in T$ -re és $A \in S^2 T^*$ -ra. Tehát a szimbólum $(m-2)$ -ed rendű prolongáltja

$$(\sigma_m(\mathcal{P}_\Phi)A)(\dots X_{m-1}, X_m) = A(\dots \Phi X_{m-1}, JX_m)A(\dots \Phi X_m, JX_{m-1}), \quad (4.21)$$

$X_i \in T$, $A \in S^m T^*$, $m \geq 2$. A számolásunk során a (4.8) bázist fogjuk használni. Azt kapjuk, hogy

$$A \in \text{Ker } \sigma_2(\mathcal{P}_\Phi) \Leftrightarrow A(\Phi h_j, Jh_k)A(\Phi h_k, Jh_j) = (\lambda_j \lambda_k)A(v_j, v_k) = 0.$$

Általánosabban, egy m -ed rendű $A \in S^m T^*$ szimmetrikus tenzor esetén (4.21) alapján

$$A \in \text{Ker } \sigma_m(\mathcal{P}_\Phi) \Leftrightarrow A(e_{i_1}, \dots, e_{i_{m-2}}, v_j, v_k) = 0 \Leftrightarrow A_{\dots \underline{j}k} = 0, \quad j \neq k, \quad (4.22)$$

ahol $1 \leq i_s \leq 2n$, $1 \leq s \leq m-2$, $1 \leq j, k \leq n$. Speciálisan

$$A \in \text{Ker } \sigma_3(\mathcal{P}_\Phi) \Leftrightarrow A_{\underline{ijk}} = A_{\underline{ikj}} = 0, \quad i, j, k = 1, \dots, n, \quad j \neq k, \quad (4.23)$$

$$A \in \text{Ker } \sigma_4(\mathcal{P}_\Phi) \Leftrightarrow A_{\underline{iljk}} = A_{\underline{ilkj}} = A_{\underline{iljk}} = 0, \quad i, l, j, k = 1, \dots, n, \quad j \neq k. \quad (4.24)$$

Tekintsük az $m = 2$ -höz tartozó Spencer-komplexust:

$$0 \longrightarrow g_4(\mathcal{P}_3) \xrightarrow{\delta_0^2} T^* \otimes g_3(\mathcal{P}_3) \xrightarrow{\delta_1^2} \Lambda^2 T^* \otimes g_2(\mathcal{P}_3) \xrightarrow{\delta_2^2} \Lambda^3 T^* \otimes g_1(\mathcal{P}_3) \longrightarrow \dots \quad (4.25)$$

ahol δ_0^2 a kanonikus inklúzió. Megmutatjuk, hogy ez a sorozat nem egzakt, azaz $\text{rang } \delta_1^2 \neq \dim \text{Ker } \delta_2^2$, így a szimbólum nem 2-aciklikus. Pontosabban, azt fogjuk igazolni, hogy

$$\text{rang } \delta_1^2 + \frac{(n-1)(n-2)}{2} = \dim \text{Ker } \delta_2^2.$$

Határozzuk meg elsőként a δ_1^2 rangját. Mivel δ_0^2 injektív és $\mathcal{P}_3$ szimbóluma mindig 1-aciklikus, azaz minden $m \geq 2$ -re fenáll, hogy $H^{m,1} = 0$, ezért (4.25) egzakt az első két tagjában. Így

$$\text{rang } \delta_1^2 = \dim(T^* \otimes g_3(\mathcal{P}_3)) - \dim(g_4(\mathcal{P}_3)). \quad (4.26)$$

Tehát a rang meghatározásához ki kell számítanunk $g_3(\mathcal{P}_3)$ valamint $g_4(\mathcal{P}_3)$ dimenzióját. A $\mathcal{P}_3$ operátor szimbóluma és a szimbólumának prolongáltjai:

$$\sigma_m(\mathcal{P}_3) = (\sigma_m(\mathcal{P}_\Gamma), \sigma_m(\mathcal{P}_C), \sigma_m(\mathcal{P}_\Phi)). \quad (4.27)$$

Definíció szerint

$$g_m(\mathcal{P}_3) = \text{Ker } \sigma_m(\mathcal{P}_3) = \text{Ker } \sigma_m(\mathcal{P}_\Gamma) \cap \text{Ker } \sigma_m(\mathcal{P}_C) \cap \text{Ker } \sigma_m(\mathcal{P}_\Phi), \quad (4.28)$$

minden $m \geq 2$ -re. Korábban már kiszámítottuk $g_3(\mathcal{P}_3)$ dimenzióját (4.15). Tejlesen analóg számolás mutatja, hogy

$$\dim g_4(\mathcal{P}_3) = \mathcal{C}_n^{4,i} + \mathcal{C}_{n-1}^{4,i} + 3\mathcal{C}_{n-1}^{1,i},$$

ezért (4.26)-ból adódik, hogy

$$\text{rang } \delta_1^2 = \frac{7n^4}{12} + \frac{2n^3}{3} + \frac{47n^2}{12} - \frac{43n}{6} + 3. \quad (4.29)$$

Számítsuk ki most a $\text{Ker } \delta_2^2$ dimenzióját. Elsőként a $D \in \text{Ker } \delta_2^2$ tisztán horizontális komponensei közötti kapcsolatokat vizsgáljuk meg: meghatározzuk azon független tenzorkomponensek számát, melyek karakterizálják egy $D \in \text{Ker } \delta_2^2$ tenzor horizontális részét. Vegyük észre, hogy $2 \leq m$ esetén $g_m(\mathcal{P}_3) \cap S^m T_v^* = S^m T_v^*$, azaz nincs semmi megszorítás $g_m(\mathcal{P}_3)$ elemeinek tisztán horizontális részére vonatkozóan. Ennélfogva használhatjuk, hogy a

$$0 \longrightarrow S^4 T_v^* \xrightarrow{i} T_v^* \otimes S^3 T_v^* \xrightarrow{\delta_{1,v}^2} \Lambda^2 T_v^* \otimes S^2 T_v^* \xrightarrow{\delta_{2,v}^2} \Lambda^3 T_v^* \otimes T_v^* \longrightarrow \dots \quad (4.30)$$

(kanonikus) sorozat egzakt, ahol $\delta_{1,v}^2$ és $\delta_{2,v}^2$ jelöli a δ_1^2 és δ_2^2 leképezések megszorítását $T_v^* \otimes S^3 T_v^*$, illetve $\Lambda^2 T_v^* \otimes S^2 T_v^*$ terekre. Azt kapjuk, hogy (4.30) egzaktága miatt

$$\dim \text{Ker } \delta_{2,v}^2 = \dim(T_v^* \otimes S^3 T_v^*) - \dim(S^4 T_v^*) = n \mathcal{C}_n^{3,i} - \mathcal{C}_n^{4,i},$$

tehát a $\text{Ker } \delta_{2,v}^2$ -t karakterizáló független egyenletek száma

$$N_0 = \dim(\Lambda^2 T_v^* \otimes S^2 T_v^*) - \dim \text{Ker } \delta_{2,v}^2 = (\mathcal{C}_n^2 \cdot \mathcal{C}_n^{2,i}) - (n \mathcal{C}_n^{3,i} - \mathcal{C}_n^{4,i}). \quad (4.31)$$

A továbbiakban vizsgáljuk meg a $D \in \text{Ker } \delta_2^2$ olyan komponenseit, melyek legalább egy vertikális komponenst tartalmaznak. A számításaink során használjuk a (4.8) bázist és a (2.26) jelöléseket. Az adódik, hogy

$$D \in \Lambda^2 T^* \otimes g_2(\mathcal{P}_3) \quad \Leftrightarrow \quad i_{e_\alpha} i_{e_\beta} D := D(e_\alpha, e_\beta, \cdot, \cdot) \in g_2(\mathcal{P}_3),$$

azaz (2.18), (3.5) és (4.4) miatt az adódik, hogy

$$D(e_\alpha, e_\beta, e_\gamma, v_n) = 0, \quad (\Leftrightarrow \quad D_{\alpha\beta\gamma n} = 0) \quad (4.32)$$

$$D(e_\alpha, e_\beta, v_k, v_l) = 0, \quad (\Leftrightarrow \quad D_{\alpha\beta k l} = 0) \quad k \neq l \quad (4.33)$$

$$D(e_\alpha, e_\beta, h_n, v_k) = 0, \quad (\Leftrightarrow \quad D_{\alpha\beta n k} = 0) \quad (4.34)$$

$$D(e_\alpha, e_\beta, h_k, v_l) - D(e_\alpha, e_\beta, h_l, v_k) = 0, \quad (\Leftrightarrow \quad D_{\alpha\beta k l} - D_{\alpha\beta l k} = 0) \quad (4.35)$$

ahol a görög betűk indexeket jelölnek 1-től $2n$ -ig, a latin betűk pedig 1-től n -ig. Az egyszerűbb írásmód érdekében vezessük be a következő jelöléseket:

$$\mathcal{E}_{\underline{ijkl}} = \sum_{ijk}^{cycl} D_{\underline{ijkl}}, \quad \mathcal{E}_{\underline{ijkl}} = \sum_{ijk}^{cycl} D_{\underline{ijkl}}, \quad \dots \quad \mathcal{E}_{\underline{ijkl}} = \sum_{ijk}^{cycl} D_{\underline{ijkl}}.$$

Így a δ_2^2 magjának vertikális komponenseket is tartalmazó egyenletei a következők:

$$\left\{ \mathcal{E}_{\underline{ijkl}} = 0, \mathcal{E}_{\underline{ijkl}} = 0, \mathcal{E}_{\underline{ijkl}} = 0, \mathcal{E}_{\underline{ijkl}} = 0, \mathcal{E}_{\underline{ijkl}} = 0, \mathcal{E}_{\underline{ijkl}} = 0, \mathcal{E}_{\underline{ijkl}} = 0 \right\}. \quad (4.36)$$

A (4.32), (4.33), (4.34) és a (4.35) összefüggések felhasználásával meghatározzuk a (4.36) rendszer független egyenleteinek számát. Az egyes egyenletekre a következőket kapjuk:

$\mathcal{E}_{ijkl} = 0$: Ha $i, j, k, l \neq n$ páronként különbözők, akkor $\mathcal{E}_{ijkl} = 0$ triviálisan teljesül, azaz minden tagja azonosan zérus. A többi egyenlet független. A pivot elemek az alábbiak:

- az (i, j) indexekre, ha $i < j < n$: D_{jnii} , D_{nijj} ,
- az (i, j, k) indexekre, ha $i < j < k < n$: D_{ijkk} , D_{jkii} , D_{kijj} ,

és ez $N_1 = 2\mathcal{C}_{n-1}^2 + 3\mathcal{C}_{n-1}^3$ független egyenletet ad.

$\mathcal{E}_{ijkl} = 0$: Az $\mathcal{E}_{nij\bar{k}} = 0$ triviálisan teljesül $i < j$ -re, ha i, j, k páronként különbözők. Továbbá, ha $i < \bar{l} < n$, $j < k$, i, j, k, l páronként különbözők, akkor a fennáll az alábbi reláció:

$$\mathcal{E}_{ijkl} = D_{ijkl} + D_{kijl} + D_{jkil} \stackrel{(4.33, 4.35)}{=} D_{jkl\bar{i}} + D_{ljk\bar{i}} + D_{klj\bar{i}} = \mathcal{E}_{ljk\bar{i}}.$$

Az összefüggések száma így $\mathcal{C}_{n-2}^2 \cdot \mathcal{C}_{n-1}^2$. A többi egyenlet független. A pivot elemek a következők:

- az i -indexre, ha $i < n$: D_{nnii} , D_{niii} ,
- az (i, j) indexekre, ha $i < j < n$: D_{nijj} , D_{njii} , D_{jijj} , D_{iijj} , D_{inij} , D_{jnji} , D_{injj} , D_{jnii} , $D_{nii\bar{j}}$, D_{jnii} , D_{jiii} ,
- az (i, j, k) páronként különböző indexekre, ha $i, j, k < n$, $i < j$: D_{ijik} , D_{ijjk} , D_{ijkk} , D_{kijj} , D_{kkii} ,
- az (i, j, k, l) páronként különböző indexekre, ha $i < l < n$, $j < k$: $D_{jkl\bar{i}}$,

ennélfogva ebben a blokkban $N_2 = 2\mathcal{C}_{n-1}^1 + 12\mathcal{C}_{n-1}^2 + 5\mathcal{C}_{n-1}^2\mathcal{C}_{n-3}^1 + \mathcal{C}_{n-1}^2\mathcal{C}_{n-2}^2$ független egyenlet tartozik.

$\mathcal{E}_{ijkl} = 0$: Ha i, j, k páronként különbözők, $i, k \neq n$, $i < k$, akkor fennáll az alábbi összefüggés: $\mathcal{E}_{injk} = \mathcal{E}_{knji}$. Továbbá ha $i < j < l < n$, $i, j, k \neq l$, akkor azt kapjuk, hogy $\mathcal{E}_{ijkl} = \mathcal{E}_{ilkj} - \mathcal{E}_{jlk\bar{i}}$. Ennélfogva $\mathcal{C}_{n-1}^2\mathcal{C}_{n-2}^1 + \mathcal{C}_{n-1}^3\mathcal{C}_{n-3}^1$ számú összefüggést kapunk ezen blokk egyenletei között. A többi egyenlet független. A pivotok a következők:

- az i -indexre, ha $i < n$: D_{nnii} , D_{inii} ,
- az (i, j) indexekre, ha $i < j < n$: $D_{nii\bar{j}}$, D_{njji} , D_{nijj} , $D_{njj\bar{i}}$, D_{jnii} , $D_{nii\bar{j}}$, D_{injj} , D_{jnii} , D_{iijj} , D_{ijji} , D_{ijjj} , D_{ijii} , D_{nnij} ,
- az (i, j, k) páronként különböző indexekre, ha $i, j, k < n$, $i < j$: D_{jkii} , D_{kijj} , D_{ijkk} , D_{iijk} , D_{jijk} , D_{nkji} ,
- az (i, j, k, l) páronként különböző indexekre, ha $i < j < k < n$: $D_{ljk\bar{i}}$, $D_{lik\bar{j}}$,

ennélfogva ebben a blokkban $N_3 = 2\mathcal{C}_{n-1}^1 + 13\mathcal{C}_{n-1}^2 + 6\mathcal{C}_{n-1}^2\mathcal{C}_{n-3}^1 + 2\mathcal{C}_{n-1}^3\mathcal{C}_{n-3}^1$ független egyenletet kapunk.

$\mathcal{E}_{ijkl} = 0$: A következő összefüggések állnak fenn ezen blokk egyenletei között: ha $i < j < k < n$, akkor $\mathcal{E}_{ijn\bar{k}} = \mathcal{E}_{ikn\bar{j}} + \mathcal{E}_{kjni}$, valamint $\mathcal{E}_{ijkl} = \mathcal{E}_{ijlk} + \mathcal{E}_{jkl\bar{i}} - \mathcal{E}_{iklj}$, ha $k, l \neq n$, $i < j < k < l$. Ez $\mathcal{C}_n^3 + \mathcal{C}_{n-1}^4$ összefüggés. A további egyenletek függetlenek. A pivot elemek az alábbiak:

- az (i, j) indexekre, ha $i < j < n$: D_{jnii} , D_{nijj} ,

- az (i, j, k) indexekre, ha $i < j < k < n$: $D_{j\bar{k}i\bar{i}}, D_{kij\bar{j}}, D_{ij\bar{k}k}, D_{nik\bar{j}}, D_{nkj\bar{i}},$
- az (i, j, k, l) indexekre, ha $i < j < k < l < n$: $D_{ij\bar{l}k}, D_{jkl\bar{i}}, D_{ijk\bar{l}}.$

Tehát ehhez a blokkhoz $N_4 = 2\mathcal{C}_{n-1}^2 + 5\mathcal{C}_{n-1}^3 + 3\mathcal{C}_{n-1}^3$ független egyenlet tartozik.

$\mathcal{E}_{ij\bar{k}l} = 0$: a következő relációkat kapjuk $i < j < k$ esetén: $\mathcal{E}_{ij\bar{l}k} = \mathcal{E}_{ik\bar{l}j} - \mathcal{E}_{jkl\bar{i}} + \mathcal{E}_{ijk\bar{l}}.$ A további egyenletek függetlenek. A pivotok az alábbiak:

- az (i, j, k) indexekre, ha $i < j$: $D_{j\bar{k}i\bar{i}}, D_{kij\bar{j}},$
- az (i, j, k, l) indexekre, ha $i < j < k$: $D_{lik\bar{j}}, D_{ljk\bar{i}}.$

így ez a blokk $N_5 = 2\mathcal{C}_n^2\mathcal{C}_n^1 + 2\mathcal{C}_n^3\mathcal{C}_n^1$ független egyenletet tartalmaz.

$\mathcal{E}_{ij\bar{k}l} = 0$: ezek az egyenletek és a fentebb vizsgált $\mathcal{E}_{ij\bar{k}l} = 0$ típusú egyenletek között a következő összefüggés adódik: ha $j < k$ és $i \neq l$, akkor azt kapjuk, hogy $\mathcal{E}_{ij\bar{k}l} = \mathcal{E}_{ljk\bar{i}} + \mathcal{E}_{ilk\bar{j}} - \mathcal{E}_{iljk}.$ A pivot elemek az alábbiak:

- az (i, j, k) indexekre, ha $i < j$: $D_{j\bar{k}i\bar{i}},$
- az (i, j, k, l) indexekre, ha $i < j, k < l$: $D_{kl\bar{i}j}$

ennélfogva ehhez a blokkhoz $N_6 = \mathcal{C}_n^2\mathcal{C}_n^1 + \mathcal{C}_n^2\mathcal{C}_n^2$ független egyenlet tartozik.

$\mathcal{E}_{ij\bar{k}l} = 0$: Ezek az egyenletek mind kifejezhetőek az $\mathcal{E}_{ij\bar{k}l} = 0$ típusú egyenletekkel, mivel $\mathcal{E}_{ij\bar{k}l} = \mathcal{E}_{lij\bar{k}} + \mathcal{E}_{lki\bar{j}} + \mathcal{E}_{ljk\bar{i}}.$

A fenti számolás azt mutatja, hogy a (4.36) rendszer

$$N = \sum_{i=1}^6 N_i = \frac{31}{24}n^4 + \frac{7}{12}n^3 - \frac{175}{24}n^2 + \frac{113}{12}n - 4 \quad (4.37)$$

független egyenletet tartalmaz, így (4.31) és (4.37) alapján

$$\dim \text{Ker} \delta_2^2 = \dim(\Lambda^2 T^* \otimes g_2(\mathcal{P}_3)) - (N_0 + N) = \frac{7}{12}n^4 + \frac{2}{3}n^3 + \frac{53}{12}n^2 - \frac{26}{3}n + 4. \quad (4.38)$$

(4.29) és (4.38) összevetésével adódik, hogy $\text{rang } \delta_1^2 < \dim \text{Ker } \delta_2^2$. Pontosabban

$$\dim H^{2,2}(\mathcal{P}_3) = \dim \left(\text{Ker } \delta_2^2 / \text{Im } \delta_1^2 \right) = \frac{(n-1)(n-2)}{2}, \quad (4.39)$$

amivel a 4.2.1. Tétel bizonyítását befejeztük. □

4.3. Harmadrendű kompatibilitási feltételek

A 4.2.1 Tétel alapján $\mathcal{P}_3$ differenciáloperátor szimbóluma nem 2-aciklikus, ugyanis a $H^{2,2}$ Spencer-féle kohomológia csoport nemzérus. Ennek következtében a $\mathcal{P}_3$ prolongáltjának kompatibilitási feltételei nem egyeznek meg $\mathcal{P}_3$ integrálhatósági feltételeinek prolongáltjaival, hanem $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ további harmadrendű obstrukció jelenik meg a harmadrendű megoldások negyedrendűvé emelésének feltételeként. Ebben az alfejezetben kiszámítjuk ezeket az extra feltételeket és belátjuk az alábbi állítást:

4.3.1. Állítás ([35]). *A $\mathcal{P}_3$ differenciáloperátor valamely $j_3(F)_x \in \text{Sol}_3(\mathcal{P}_3)$ harmadrendű megoldása pontosan akkor emelhető fel negyedrendű megoldássá, ha a másodrendű (4.18a), (4.18b) kompatibilitási feltételek prolongáltjai zérusok, továbbá tetszőleges $X, Y \in T_x$ -re*

$$\begin{aligned} & [hX, \Phi X]\Omega(JY, Y) - [hY, \Phi Y]\Omega(X, JX) = \\ & + \Phi X \left(\sum_{cycl} \Omega([JY, hX], hY) \right) - hX \left(\sum_{cycl} \Omega([JY, \Phi X], hY) - \Omega([JY, \Phi Y], X) \right) \\ & - \Phi Y \left(\sum_{cycl} \Omega([JX, hX], hY) \right) + hY \left(\sum_{cycl} \Omega([JX, \Phi X], Y) - \Omega([JX, \Phi Y], X) \right). \end{aligned} \quad (4.40)$$

Bizonyítás. Legyen $\sigma_4(\mathcal{P}_3) = id \otimes \sigma_3(\mathcal{P}_3)$ a $\mathcal{P}_3$ operátor szimbólumának prolongáltja, $\hat{\tau} := (id \otimes \tau_3, \tau_h)$, ahol

$$\begin{aligned} \tau_h(D)(X, Y) &:= \frac{1}{2} (D_\Gamma(\Phi X, JY, X, Y) - D_\Gamma(\Phi Y, JX, X, Y)) \\ &+ D_\Phi(hY, JX, X, Y) - D_\Phi(hX, JY, X, Y), \end{aligned} \quad (4.41)$$

ahol $D := (D_\Gamma, D_C, D_\Phi) \in (S^2T^* \otimes \Lambda^2T_v^*) \times S^3T^* \times (S^2T^* \otimes \Lambda^2T_v^*)$, $X, Y \in T$. Ekkor $\text{Im } \hat{\tau} = \widehat{K}$ jelöléssel a

$$S^4T^* \xrightarrow{\sigma_4(\mathcal{P}_3)} (S^2T^* \otimes \Lambda^2T_v^*) \times (S^3T^*) \times (S^2T^* \otimes \Lambda^2T_v^*) \xrightarrow{\hat{\tau}} \widehat{K} \longrightarrow 0 \quad (4.42)$$

sorozat egzakt, mert a $\text{Ker } \tau_h$ pontosan $\mathcal{C}_n^2$ olyan egyenletet ad, melyek függetlenek a $\text{Ker } \tau_3$ rendszer egyenleteitől. Így ezek együttesen karakterizálják a $\sigma_4(\mathcal{P}_3)$ képterét. Számoljuk ki a τ_h obstrukciós leképezésből adódó integrálhatósági feltételt. Legyen $j_3(F)_x$ egy harmadrendű megoldása $\mathcal{P}_3$ -nak az $x \in \mathcal{T}M$ pontban. A kompatibilitási feltétel akkor és csakis akkor teljesül, ha a másodrendű integrálhatósági feltételek prolongáltjai mellett a

$$\tau_h(\nabla \nabla \mathcal{P}_3 F)_x = 0 \quad (4.43)$$

kompatibilitási feltétel is teljesül. Ekkor (a második prolongált miatt két deriválást alkalmazva)

$$\begin{aligned} \tau_h(\nabla \nabla \mathcal{P}_3 F)_x(X, Y) &= \frac{1}{2} \left(\nabla^2 i_\Gamma \Omega(\Phi X, JY, X, Y) - \nabla^2 i_\Gamma \Omega(\Phi Y, JX, X, Y) \right) \\ &+ \nabla^2 i_\Phi \Omega(hY, JX, X, Y) - \nabla^2 i_\Phi \Omega(hX, JY, X, Y) \\ &= \Phi X(JY i_\Gamma \Omega(X, Y)) - \Phi Y(JX i_\Gamma \Omega(X, Y)) \\ &+ hY(JX i_\Phi \Omega(X, Y)) - hX(JY i_\Phi \Omega(X, Y)). \end{aligned}$$

A fenti formulában az Ω másodrendű deriváltjai (és ennél fogva az F függvény negyedrendű deriváltjai) is megjelennek. Azonban mivel $\Omega = dd_J F$ a vertikális altéren azonosan zérus, továbbá

$$i_J \Omega = d_J d_J F = \frac{1}{2} d_{[J, J]} F = 0, \quad d\Omega = d(dd_J F) = d^2 d_J F = 0,$$

így Ω második deriváltjai kifejezhetőek az Ω első deriváltjaival, és azt kapjuk, hogy

$$\tau_h(\nabla \nabla \mathcal{P}_3 F)_x(X, Y) = [hY, \Phi Y]\Omega(X, JX) - [hX, \Phi X]\Omega(JY, Y)$$

$$\begin{aligned}
& + \Phi X \left(\sum_{cycl} \Omega([JY, hX], hY) \right) - hX \left(\sum_{cycl} \Omega([JY, \Phi X], hY) - \Omega([JY, \Phi Y], X) \right) \\
& - \Phi Y \left(\sum_{cycl} \Omega([JX, hX], hY) \right) + hY \left(\sum_{cycl} \Omega([JX, \Phi X], Y) - \Omega([JX, \Phi Y], X) \right).
\end{aligned}$$

Tehát a (4.43) kompatibilitási feltétel akkor és csakis akkor teljesül, ha a másodrendű integrálhatósági feltételek prolongáltjai mellet a (4.40) is teljesül. $\square$

4.3.2. Megjegyzés. A (4.8)-ban definiált adaptált bázisban

$$i_\Gamma \Omega = 0 \iff \Omega(h_i, h_j) = 0, \quad 1 \leq i, j \leq n, \quad (4.44a)$$

$$i_\Phi \Omega = 0 \iff \Omega(v_i, h_j) = 0, \quad 1 \leq i, j \leq n, \quad i \neq j, \quad (4.44b)$$

$$i_S \Omega = 0 \iff \Omega(v_i, h_n) = \Omega(h_i, h_n) = 0, \quad 1 \leq i \leq n, \quad (4.44c)$$

így az Ω nemzérus komponensei a következők lehetnek:

$$a_{ii} = \Omega(v_i, h_i), \quad i = 1, \dots, n-1. \quad (4.45)$$

Továbbá, ha F egy Finsler-függvény, akkor a Hesse-mátrixa pozitív kvázi-definit, így teljesülnie kell a $a_{ii} > 0$, $i = 1, \dots, n-1$ feltételnek.

4.3.3. Következmény ([35]). Az (4.8)-ban definiált adaptált bázisra vonatkozóan a (4.40) integrálhatósági feltétel az összegzési konvenciót nem alkalmazva az alábbi formába írható:

$$\beta_{ij}^i(\mathcal{L}_{v_i} a_{ii}) + \beta_{ij}^j(\mathcal{L}_{v_j} a_{jj}) + \gamma_{ij}^i(\mathcal{L}_{h_i} a_{ii}) + \gamma_{ij}^j(\mathcal{L}_{h_j} a_{jj}) + \sum_{k=1}^n \alpha_{ij}^k a_{kk} = 0, \quad (4.46)$$

ahol $1 \leq i, j \leq n$, $a_{ij} = \Omega(v_i, h_j)$ és az α_{ij}^k , β_{ij}^k és γ_{ij}^k függvények a spray ismeretében meghatározhatók.

Bizonyítás. Legyen $\{\xi^i, \nu^i\}_{1 \leq i \leq n}$ a (4.8) bázis duális bázisa. Ekkor $X = \xi_X^i h_i + \nu_X^i v_i$, és figyelembe véve, hogy $d\Omega = 0$, továbbá használva a (4.44a)–(4.44c) azonosságokat, azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{v_i} a_{jj} &= \Omega([v_i, v_j], h_j) + \Omega([v_j, h_j], v_i) + \Omega([h_j, v_i], v_j) = \xi_{[h_j, v_j]}^i a_{ii} + \left(\nu_{[v_i, v_j]}^j + \xi_{[v_i, h_j]}^j \right) a_{jj}, \\
\mathcal{L}_{h_i} a_{jj} &= \Omega([h_i, h_j], v_j) + \Omega([h_j, v_j], h_i) + \Omega([v_j, h_i], h_j) = \nu_{[h_j, v_j]}^i a_{ii} + \left(\xi_{[h_j, h_i]}^j + \nu_{[v_j, h_i]}^j \right) a_{jj},
\end{aligned}$$

ahol $i, j \in \{1, \dots, n\}$. Ekkor a harmadrendű integrálhatósági feltétel kifejezhető a következőképpen:

$$\kappa_{ij}^i a_{ii} + \kappa_{ij}^j a_{jj} + \sum_{k=1}^n \theta_{ij}^k a_{kk} + (\lambda_j - \lambda_i) \left(\mathcal{L}_{[h_j, v_j]} a_{ii} - \mathcal{L}_{[h_i, v_i]} a_{jj} \right) = 0,$$

ahol a $\kappa_{ij}^i = -\kappa_{ji}^j$ és a θ_{ij}^k függvények az alábbiak

$$\begin{aligned}
\kappa_{ij}^i &= \lambda_j \left(\mathcal{L}_{v_j} \xi_{[h_i, h_j]}^i - \mathcal{L}_{v_j} \nu_{[h_j, v_i]}^i - \mathcal{L}_{h_j} \nu_{[v_i, v_j]}^i + \mathcal{L}_{h_j} \xi_{[v_j, h_i]}^i \right) + \lambda_i \left(\nu_{[v_i, [h_j, v_j]]}^i \right. \\
&\quad \left. - \xi_{[h_j, v_j], h_i]}^i - \nu_{[v_j, h_i]}^j \xi_{[v_j, h_j]}^i - \xi_{[h_i, h_j]}^j \xi_{[h_j, v_j]}^i - \nu_{[v_j, v_i]}^j \nu_{[v_j, h_j]}^i - \xi_{[v_i, h_j]}^j \nu_{[h_j, v_j]}^i \right),
\end{aligned} \quad (4.47a)$$

$$\theta_{ij}^k = (\lambda_i - \lambda_j) \left(\xi_{[h_j, v_j]}^k \nu_{[h_i, v_i]}^k - \xi_{[h_i, v_i]}^k \nu_{[h_j, v_j]}^k \right), \quad (4.47b)$$

$1 \leq i, j, k \leq n$, és a harmadrendű tagok együttthatófüggvényei a következők:

$$\beta_{ij}^i = \lambda_j \nu_{[v_j, h_j]}^i, \quad \gamma_{ij}^i = \lambda_j \xi_{[v_j, h_j]}^i. \quad (4.48)$$

□

Az α_{ij}^k , β_{ij}^k és γ_{ij}^k függvények explicit kifejezése meglehetősen bonyolult, így ezek felírásától eltekintünk.

4.3.4. Definíció. Azt mondjuk, hogy a $\mathcal{P}_3$ rendszer reducibilis, ha a β_{ij}^i , γ_{ij}^i együttthatófüggvények azonosan zérusok.

4.3.5. Megjegyzés. A reducibilis esetben a harmadrendű feltétel vagy azonosan zérus, vagy egy másodrendű kompatibilitási feltételre egyszerűsödik. A (4.48) alapján világos, hogy ha a spray Jacobi-endomorfizmusának sajátértékei különbözőek, akkor a magasabbrendű kompatibilitási feltétel akkor és csakis akkor reducibilis, ha a $\mathcal{D}_i := \text{Span}\{h_i, v_i\}$, $1 \leq i \leq n$ sajátdisztribúciók involutivak.

5. fejezet

A háromdimenziós eset

Az előző fejezetekben megvizsgáltuk a görbületi feltétellel kiegészített Rapcsák-rendszer integrálhatósági feltételeit. Kiszámítottuk a másodrendű integrálhatósági feltételeket (4.1.2 Állítás) és a harmadrendű integrálhatósági feltételt (4.3.1 Állítás). Ebben a fejezetben arra az esetre korlátozzuk a projektív metrizálhatósági vizsgálatainkat, amikor az M egy 3-dimenziós sokaság és S egy nem izotróp spray generikus görbületi tenzorral, azaz a Jacobi-endomorfizmus sajátfüggvényei páronként különböznek. Ekkor érdekes jelenséggel találkozunk: ahogy azt a 4.2.1 Tételből már tudjuk, a Spencer-féle kohomológia csoportok közül a $H^{2,2}(\mathcal{P}_3)$ nemtriviális, ugyanakkor ahogy azt ebben a fejezetben látni fogjuk (5.2.1 Állítás) a magasabb rendű Spencer-féle kohomológia csoportok mind eltűnnek, ami azt mutatja, hogy a rendszernek további magasabb rendű kompatibilitási feltételei nincsenek.

5.1. Első kompatibilitási feltételek

Legyen S egy nem izotróp spray a háromdimenziós M sokaságon. Mint ahogy azt az előző fejezetekben láttuk, az S projektív metrizálhatóságának a vizsgálata a görbületi feltételt is tartalmazó (4.3) differenciáloperátor integrálhatóságának a vizsgálatára vezethető vissza. Tekintsük a (4.8)-nak megfelelő

$$\mathcal{B} = \{h_1, h_2, h_3, v_1, v_2, v_3\} \quad (5.1)$$

adaptált bázist, ahol h_1, h_2 és $h_3 := S$ a Jacobi-endomorfizmus sajátvektormezői, továbbá $v_1 = Jh_1, v_2 = Jh_2, v_3 = Jh_3 = C$. Amint azt a 4.3.1 Állításban láttuk, a $\mathcal{P}_3$ egy másodrendű megoldása akkor és csakis akkor emelhető fel harmadrendűvé, ha a (4.18a) és a (4.18b) egyenletek teljesülnek.

5.1.1. Állítás ([35]). *Ha $\dim M = 3$, akkor a (4.18a) kompatibilitási feltétel, azaz a $i_{[\Phi, \Phi]}\Omega = 0$ egyenlet azonosan teljesül.*

Bizonyítás. Mivel Φ szemibázikus továbbá $i_S\Phi = R(S, S) \equiv 0$, így a

$$i_S[\Phi, \Phi] \equiv 0$$

egyenlet azonosan teljesül. Figyelembe véve, hogy $i_{[\Phi, \Phi]}\Omega$ egy szemibázikus 3-forma a következő adódik:

$$i_{[\Phi, \Phi]}\Omega(h_1, h_2, h_3) = \sum_{123}^{cycl} \Omega([\Phi, \Phi](h_1, h_2), h_3) = i_S\Omega([\Phi, \Phi](h_1, h_2)) = 0.$$

□

Legyen

$$\Phi' := v \circ [S, \Phi] \circ h$$

a Φ tenzormező S -menti dinamikus kovariáns deriváltja [43]. Ekkor

5.1.2. Állítás ([35]). *A (4.18b) integrálhatósági feltétel ekvivalens az*

$$i_{\Phi'}\Omega = 0. \quad (5.2)$$

egyenlettel.

Bizonyítás. Mivel

$$\Phi'(S) = v[S, \Phi]S = v[S, \Phi S] - \Phi([S, S]) = 0,$$

így (5.2) akkor és csak akkor teljesül, ha $i_{\Phi'}\Omega(h_1, h_2) = 0$. Másrészt, ha $j_2(F)_x$ egy másodrendű megoldása (4.3)-nak, akkor teljesülnek a (4.19) egyenletek, és így speciálisan az

$$\Omega([v_1, h_2], S)_x = 0, \quad \Omega(h_1, h_2)_x = 0$$

egyenletek is. A $h_i = [J, S]h_i = [v_i, S] - J[h_i, S]$, $i = 1, 2$ és a $h_3 = S$ összefüggések felhasználásával azt kapjuk, hogy a (4.18b) feltétel a következő:

$$\begin{aligned} (4.18b) &= \Omega([v_1, h_2], S) + \Omega([h_2, S], v_1) + \Omega([S, v_1], h_2) \\ &= \Omega([h_2, S], v_1) - \Omega(J[h_1, S], h_2) = \Omega([h_2, S], v_1) - \Omega(v_2, [h_1, S]). \end{aligned} \quad (5.3)$$

Másrészt az $i_{\Phi'}\Omega = 0$ egyenlet alapján

$$\Omega(\Phi[h_i, S], h_j) = \Omega(\Phi h_j, [h_i, S]) = \lambda_j \Omega(v_j, [h_i, S]), \quad i, j = 1, 2, \quad i \neq j, \quad (5.4)$$

és így

$$\begin{aligned} i_{\Phi'}\Omega(h_1, h_2) &= \Omega(\Phi'(h_1), h_2) - \Omega(\Phi'(h_2), h_1) \\ &= \Omega([\Phi h_1, S] - \Phi[h_1, S], h_2) - \Omega([\Phi h_2, S] - \Phi[h_2, S], h_1) \stackrel{(5.4)}{=} \\ &= \lambda_1 \Omega(J[h_1, S], h_2) - \lambda_2 \Omega(v_2, [h_1, S]) - \lambda_2 \Omega(J[h_2, S], h_1) + \lambda_1 \Omega(v_1, [h_2, S]) \\ &= \lambda_1 \Omega(v_2, [h_1, S]) - \lambda_2 \Omega(v_2, [h_1, S]) - \lambda_2 \Omega(v_1, [h_2, S]) + \lambda_1 \Omega(v_1, [h_2, S]) \\ &= (\lambda_1 - \lambda_2)(\Omega(v_2, [h_1, S]) + \Omega(v_1, [h_2, S])). \end{aligned}$$

Az eredményt az (5.3)-ban kapottal összevetve adódik az állítás. □

5.2. Magasabb rendű kompatibilitási feltételek

Az 4.2.1 Tételben kiszámítottuk a $H^{2,2}$ Spencer-féle kohomológia csoport dimenzióját. Mivel $H^{2,2}$ nemtriviális, így harmadrendű kompatibilitási feltételek jelennek meg $\mathcal{P}_3$ prolongáltjának szintjén. Az adódó harmadrendű integrálhatósági feltételt a 4.3.1 Állításban határoztuk meg. Ebben a fejezetben igazoljuk a magasabb rendű Spencer-kohomológia csoportokra a következőt:

5.2.1. Állítás ([35]). *A $H^{m,2}$ Spencer-féle kohomológia csoport minden $m \geq 3$ esetén triviális, így $\mathcal{P}_3$ prolongáltjának szimbóluma 2-aciklikus.*

Bizonyítás. Tekintsük a következő Spencer-komplexust:

$$0 \rightarrow g_{m+2} \xrightarrow{i} T^* \otimes g_{m+1} \xrightarrow{\delta_1^m} \Lambda^2 T^* \otimes g_m \xrightarrow{\delta_2^m} \Lambda^3 T^* \otimes g_{m-1} \rightarrow \dots \quad (5.5)$$

ahol i az inklúzió, δ_1^m és δ_2^m pedig az első kettő, illetve az első három változóban antiszimmetrizáló Spencer-operátorok. A lemma igazolásához azt kell belátnunk, hogy $H^{m,2} = \text{Ker } \delta_2^m / \text{Im } \delta_1^m = 0$, azaz hogy

$$\text{Ker } \delta_2^m = \text{Im } \delta_1^m, \quad m \geq 3. \quad (5.6)$$

Triviális számítással adódik, hogy $\text{Im } \delta_1^m \subset \text{Ker } \delta_2^m$, így elegendő azt megmutatni, hogy a két tér dimenziója megegyezik. Mivel az (5.5) sorozat mindig egzakt az első két tagban, így az adódik, hogy

$$\text{rank } \delta_1^m = \dim(T^* \otimes g_{m+1}) - \dim(g_{m+2}). \quad (5.7)$$

Vizsgáljuk meg most $g_m(\mathcal{P}_3) = \text{Ker } \sigma_m(\mathcal{P}_3)$ dimenzióját. Egy $A \in S^m T^*$ tenzor akkor és csakis akkor tartozik $\text{Ker } \sigma_m(\mathcal{P}_3)$ -hoz, ha a következő egyenletek teljesülnek:

$$A(\dots, v_3) = 0, \quad (5.8)$$

$$A(\dots, v_k, v_l) = 0, \quad k, l = 1, 2, 3, \quad k \neq l. \quad (5.9)$$

$$A(\dots, h_k, v_l) - A(\dots, h_l, v_k) = 0, \quad k, l = 1, 2, 3, \quad k \neq l. \quad (5.10)$$

Mivel az A tenzor szimmetrikus, az $(A(h_{i_1}, \dots, h_{i_m}))$ -ből adódó tisztán horizontális irányokra vonatkozó komponenseiből álló blokk teljesen szimmetrikus, így ez összesen $\mathcal{C}_m^{3,i}$ szabad komponenset tartalmaz. Az (5.10) miatt az $(A(h_{i_1}, \dots, h_{i_{m-1}}, v_m))$ blokk is teljesen szimmetrikus, valamint $A(h_{i_1}, \dots, h_{i_{m-1}}, v_m) = 0$, ha a kifejezésben valamelyik index egyenlő 3-mal. Tehát a szabad komponensek száma ebben a blokkban $\mathcal{C}_m^{2,i}$. Végül azokban a blokkokban, melyek legalább két vertikális vektort tartalmaznak csupán az $A(h_i^k, v_i^{m-k})$, $i = 1, 2$, $k = 0, \dots, m-2$ komponensek szabadok, ahol a felső index a vektor multiplicitását jelöli:

$$A(\dots v_i^m \dots) := A(\dots \underbrace{v_i, \dots, v_i}_m, \dots). \quad (5.11)$$

A szabad komponensek számát összeadva a következőt kapjuk:

$$\dim g_m(\mathcal{P}_3) = \mathcal{C}_m^{3,i} + \mathcal{C}_m^{2,i} + (m-1)\mathcal{C}_m^{1,i}.$$

Tehát (5.7) alapján

$$\text{rank } \delta_1^m = 2n \cdot \dim g_{m+1} - \dim g_{m+2} = \frac{5m^2 + 53m + 38}{2}. \quad (5.12)$$

Számoljuk most ki a $\text{Ker } \delta_2^m$ dimenzióját. A számítás során meghatározzuk hány független tenzorkomponens karakterizálja $\text{Ker } \delta_2^m$ egy B elemét $\Lambda^2 T^* \otimes S^m T^*$ -ban.

Mivel a horizontális $g_m(\mathcal{P}_3)$ blokkokra nincs semmiféle megszorítás, így a következő sorozat egzakt:

$$0 \longrightarrow S^{m+2}T_v^* \xrightarrow{i} T_v^* \otimes S^{m+1}T_v^* \xrightarrow{\delta_{1,v}^m} \Lambda^2 T_v^* \otimes S^m T_v^* \xrightarrow{\delta_{2,v}^m} \Lambda^3 T_v^* \otimes S^{m-1}T_v^* \longrightarrow \dots$$

ahol $\delta_{1,v}^m$ és $\delta_{2,v}^m$ a δ_1^m és a δ_2^m leképezések megszorításait jelölik a megfelelő alterekre. Innen azt kapjuk, hogy

$$\text{nul } \delta_{2,v}^m = \text{rank } \delta_{1,v}^m = \dim(T_v^* \otimes S^{m+1}T_v^*) - \dim(S^{m+2}T_v^*) = \mathcal{C}_3^2 \mathcal{C}_{m+1}^{3,i} - \mathcal{C}_{m+2}^{3,i}.$$

Tehát azon független egyenletek száma, melyek B horizontális komponenseit meghatározzák $\Lambda^2 T^* \otimes S^m T^*$ -ban:

$$N_0 = \dim(\Lambda^2 T_v^* \otimes S^m T_v^*) - \text{nul } \delta_{2,v}^m = \mathcal{C}_3^2 \mathcal{C}_m^{3,i} - (\mathcal{C}_3^2 \mathcal{C}_{m+1}^{3,i} - \mathcal{C}_{m+2}^{3,i}) = \frac{m^2 + m}{2}. \quad (5.13)$$

A számolás további részében meghatározzuk, hogy hány független paraméter határozza meg egy B tenzor azon komponenseit, melyek legalább egy vertikális argumentumot tartalmaznak. A (4.7) mintájára használjuk az alábbi bázist:

$$\{e_1, \dots, e_6\} = \{h_1, h_2, h_3, v_1, v_2, v_3\}, \quad (5.14)$$

ahol speciálisan $S = h_3 = e_3$ és $C = v_3 = e_6$.

Egy $B \in \Lambda^2 T^* \otimes g_m$ tenzor antiszimmetrikus az első két változójában és szimmetrikus a hátsó m változóban, továbbá (5.8) – (5.9) alapján tetszőleges $1 \leq i, j \leq 6$ -ra

$$B(e_i, e_j, \dots, e_6) = 0, \quad (5.15a)$$

$$B(e_i, e_j, \dots, e_1, e_5) - B(e_i, e_j, \dots, e_2, e_4) = 0, \quad (5.15b)$$

$$B(e_i, e_j, \dots, e_3, e_4) = B(e_i, e_j, \dots, e_3, e_5) = B(e_i, e_j, \dots, e_4, e_5) = 0. \quad (5.15c)$$

A számítások további egyszerűsítése céljából az (5.11) konvenciót használva vezessük be a következő jelöléseket:

$$\mathcal{E}_{ijk}(e_{l_1}^{r_1} \dots e_{l_s}^{r_s}) := \mathcal{E}(e_i, e_j, e_k, e_{l_1}^{r_1} \dots e_{l_s}^{r_s}) = \sum_{ijk}^{cycl} B(e_i, e_j, e_k, e_{l_1}^{r_1} \dots e_{l_s}^{r_s}).$$

Ekkor $\mathcal{E}$ ferdeszimmetrikus az első három változójában és szimmetrikus az utolsó $m-1$ -ben. A δ_2^r magját karakterizáló egyenletek:

$$\mathcal{E}_{ijk}(e_{l_1}^{r_1} \dots e_{l_s}^{r_s}) = 0, \quad r_1 + \dots + r_s = m. \quad (5.16)$$

A továbbiakban csak azokat az egyenleteket tekintjük, amelyek legalább egy vertikális komponenset tartalmaznak. Az (5.16) egyenletei közül néhány triviálisan teljesül, mivel az (5.15a)–(5.15c) összefüggések végett minden tagjuk zérus. A nem azonosan zérus egyenleteket kell megvizsgálnunk, amelyek teljes listája:

$$\mathcal{E}(e_i, e_j, e_k, v_1^{m-1}) = 0, \quad (5.17a)$$

$$\mathcal{E}(e_i, e_j, e_k, v_2^{m-1}) = 0, \quad (5.17b)$$

$$\mathcal{E}(e_i, e_j, e_k, h_1^{m-l-1}, v_1^l) = 0, \quad l \geq 2, \quad (5.17c)$$

$$\mathcal{E}(e_i, e_j, e_k, h_1^{m-2}, v_1) = 0, \quad (5.17d)$$

$$\mathcal{E}(e_i, e_j, e_k, h_2^{m-l-1}, v_2^l) = 0, \quad l \geq 2, \quad (5.17e)$$

$$\mathcal{E}(e_i, e_j, e_k, h_2^{m-2}, v_2) = 0, \quad (5.17f)$$

$$\mathcal{E}(e_i, e_j, e_k, h_1^l, h_2^{m-l-2}, v_2) = 0, \quad l \geq 1, \quad (5.17g)$$

$$\mathcal{E}(e_i, e_j, e_k, h_1^{m-2}, v_2) = 0, \quad (5.17h)$$

$$\mathcal{E}(h_i, v_j, v_k, h_1^l, h_2^s, h_3^{m-(l+s+1)}) = 0, \quad s, l \geq 0, \quad (5.17i)$$

$$\mathcal{E}(h_i, h_j, v_k, h_1^l, h_2^s, h_3^{m-(l+s+1)}) = 0. \quad (5.17j)$$

Meghatározzuk a független egyenletek számát (5.17) egyenletei között. A jelölések további egyszerűsítése érdekében legyen $K \subset \{1, \dots, 6\}$ esetén K^c az K halmaz $\{1, \dots, 6\}$ -ra vonatkozó komplementere:

$$K^c := \{1, \dots, 6\} \setminus K,$$

továbbá, ha p megjelenik a lenti formulák felső indexében, akkor az $m-1$ -re egészíti ki a felső indexek összegét. Ekkor

1. az $\mathcal{E}(e_i, e_j, e_k, v_1^{m-1}) = 0$ egyenletek: Triviálisan teljesülnek, ha $i, j, k \in \{1, 4\}^c$. A további egyenletek lineárisan függetlenek: a pivot tenzorkomponensek a következők: $B(e_i, e_j, e_1, e_4^{m-1})$, $i < j$, $i, j \neq 4$ és $B(e_i, e_j, e_4^m)$, $i < j$, $i, j \in \{1, 4\}^c$. Ennélfogva ebben a blokkban $N_1 = 16$ független egyenletet kapunk.
2. Az $\mathcal{E}(e_i, e_j, e_k, v_2^{m-1}) = 0$ egyenletek: Az egyenletek triviálisan teljesülnek, ha $i, j, k \in \{2, 5\}^c$. A többi egyenlet lineárisan független, a pivot tenzorkomponensek az alábbiak: $B(e_i, e_j, e_5^m)$, $i < j$, $i, j \neq 5$ és $B(e_i, e_j, e_2, e_5^{m-1})$, $i < j$, $i, j \in \{2, 5\}^c$. Így a független egyenletek száma $N_2 = 16$.
3. Az $\mathcal{E}(e_i, e_j, e_k, h_1^{m-l-1}, v_1^l) = 0$, $l \geq 2$ egyenletek: Minden fix $l \geq 2$ esetén négy egyenlet triviálisan teljesül, mégpedig, ha $i, j, k \in \{1, 4\}^c$. Továbbá fennáll a következő hat nemtriviális reláció:

$$\mathcal{E}_{1ij}(e_1^p, e_4^l) = \mathcal{E}_{4ij}(e_1^{p+1}, e_4^{l-1}), \quad i < j, \quad i, j \in \{1, 4\}^c, \quad (5.18)$$

Végül azok az egyenletek melyek l , illetve $(l-1)$ darab e_4 komponenst tartalmaznak összefüggenek. Tehát a független egyenletek csupán az alábbiak: $\mathcal{E}_{1jk}(e_1^{m-l}, e_4^{l-1}) = 0$, ahol $i < j$, $2 \leq l$. Ennélfogva a független egyenletek száma itt $N_3 = \mathcal{C}_5^2 \mathcal{C}_{m-4}^{2,i}$.

4. Az $\mathcal{E}(e_i, e_j, e_k, h_2^{m-l-1}, v_2^l) = 0$, $l \geq 2$ egyenletek: Teljesen analóg az előző esethez. Minden fix $l \geq 2$ -re négy triviálisan teljesülő egyenletet kapunk, mégpedig ha $i, j, k \in \{2, 5\}^c$. Továbbá fennáll az alábbi hat nemtriviális reláció az egyenletek között:

$$\mathcal{E}_{2ij}(e_2^p, e_5^l) = \mathcal{E}_{5ij}(e_2^{p+1}, e_5^{l-1}), \quad i < j, \quad i, j \in \{2, 5\}^c. \quad (5.19)$$

Továbbá azok az egyenletek melyek l darab, illetve $(l-1)$ darab e_5 komponenst tartalmaznak összefüggenek. A független egyenletek az alábbiak: $\mathcal{E}_{2jk}(e_2^{m-l}, e_5^{l-1})$, ahol $i < j$, $2 \leq l$. Tehát itt $N_4 = \mathcal{C}_5^2 \mathcal{C}_{m-4}^{2,i}$ független egyenletet kapunk.

5. Az $\mathcal{E}(e_i, e_j, e_k, h_1^{m-2}, v_1) = 0$ és az $\mathcal{E}(e_i, e_j, e_k, h_2^{m-2}, v_2) = 0$ egyenletek közül az $\mathcal{E}_{ijk}(e_1^{m-2}, e_4)$ és az $\mathcal{E}_{ijk}(e_1^{m-2}, e_4)$ egyenletek függetlenek, ahol $1 \leq i \leq 2, i < j < k$. Tehát $N_5 = 32$ független egyenletet kapunk.

6. Az $\mathcal{E}(e_i, e_j, e_k, h_1^l, h_2^{m-l-2}, v_2) = 0, l \geq 1$ egyenletek: ha $i, j, k \in \{1, 2\}^c$, akkor az egyenletek triviálisan teljesülnek. Továbbá hat nemtriviális relációt kapunk:

$$\mathcal{E}_{1jk}(e_1^l, e_2^p, e_5) = \mathcal{E}_{2jk}(e_1^{l+1}, e_2^{p-1}, e_5), \quad j < k, j, k \in \{1, 2\}^c. \quad (5.20)$$

A független egyenletek: $\mathcal{E}_{1jk}(h_1^{l+1}, h_2^p, v_2)$, ahol $1 < j < k, 1 < l$. Ennélfogva itt $N_6 = \mathcal{C}_5^2 \cdot \mathcal{C}_{m-4}^{2,i}$ független egyenletet adódik.

7. Az $\mathcal{E}(e_i, e_j, e_k, h_1^{m-2}, v_2) = 0$ egyenletek: Az előző esettel analóg módon négy egyenlet triviálisan teljesül és hat nemtriviális összefüggés adódik. Ezen felül (5.15b) segítségével további összefüggéseket kapunk:

$$\mathcal{E}_{1jk}(e_1^{m-3}, e_2, e_4) = \mathcal{E}_{2jk}(e_1^{m-2}, e_4), \quad j < k, j, k \in \{1, 2\}^c$$

Így itt csupán a következő egyenletek függetlenek: $\mathcal{E}_{12k}(e_1^{m-2}, e_5), 3 \leq k \leq 6$. Azaz a független egyenletek száma $N_7 = 4$.

8. Az $\mathcal{E}(h_i, v_j, v_k, h_1^l, h_2^s, h_3^{m-(l+s)-1}) = 0, s, l \geq 0$ egyenletek: A következő összefüggéseket kapjuk $0 \leq l \leq m-1$ (illetve $0 \leq l, s \leq m-1$) esetén:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{1jk}(h_1^l, h_2^p) &= \mathcal{E}_{2jk}(h_1^{l+1}, h_2^{p-1}) + \mathcal{E}_{12k}(e_1^l, e_2^{p-1}, e_j), & j, k \geq 4, \\ \mathcal{E}_{1jk}(h_1^l, h_2^s, h_3^p) &= \mathcal{E}_{3jk}(h_1^{l+1}, h_2^s, h_3^{p-1}), & j, k \geq 4, \\ \mathcal{E}_{2jk}(h_1^l, h_2^s, h_3^p) &= \mathcal{E}_{3jk}(h_1^l, h_2^{s+1}, h_3^{p-1}), & j, k \geq 4, \\ \mathcal{E}_{1j6}(h_1^l, h_2^p, h_3) &= \mathcal{E}_{3j6}(h_1^{l+1}, h_2^p) + \mathcal{E}_{136}(h_1^l, h_2^p, v_j) & j = 4, 5, \\ \mathcal{E}_{2j6}(h_1^l, h_2^p, h_3) &= \mathcal{E}_{3j6}(h_1^l, h_2^{p+1}) + \mathcal{E}_{136}(h_1^{l-1}, h_2^{p+1}, v_j), & j = 4, 5. \end{aligned}$$

A független egyenletek a következők: $\mathcal{E}_{1jk}(h_1^{m-1}), \mathcal{E}_{3jk}(h_1^l, h_2^s, h_3^p), \mathcal{E}_{2jk}(h_1^l, h_2^p), 4 \leq j < k \leq 6, l, s \geq 0$. Így itt $N_8 = \mathcal{C}_3^2 + \mathcal{C}_3^2 \mathcal{C}_{m-1}^{3,i} + \mathcal{C}_3^2 \mathcal{C}_{m-1}^{2,i}$ független egyenletet kapunk.

9. Az $\mathcal{E}(h_i, h_j, v_k, h_1^l, h_2^s, h_3^{m-(l+s)-1}) = 0$ egyenletek: A következő összefüggések adódnak $0 \leq l, s, p \leq m-1, l+s+p = m-1$ esetén:

$$\mathcal{E}_{12i}(h_1^l, h_2^s, h_3^p) = \mathcal{E}_{13i}(h_1^l, h_2^{s+1}, h_3^{p-1}) - \mathcal{E}_{23i}(h_1^{l+1}, h_2^s, h_3^{p-1}), \quad i = 4, 5, 6,$$

ahol felhasználtuk, hogy $\mathcal{E}_{123}(h_1^l, h_2^s, h_3^{p-1}, v_i) = 0$. A független egyenletek itt $\mathcal{E}_{12i}(h_1^l, h_2^p), \mathcal{E}_{13i}(h_1^l, h_2^s, h_3^p)$ és $\mathcal{E}_{23i}(h_1^s, h_2^l, h_3^p)$, ahol $0 \leq l, 1 \leq s, l+s+p+1 \leq m, 4 \leq i \leq 6$. Azaz a független egyenletek száma $N_9 = \mathcal{C}_3^1 \mathcal{C}_{m-1}^{2,i} + 2 \mathcal{C}_3^1 \mathcal{C}_{m-1}^{3,i}$.

A számolás eredményeit összegezve az adódik, hogy

$$\dim \text{Ker} \delta_2^m = \dim(\Lambda^2 T^* \otimes g_m(\mathcal{P}_3)) - \sum_{i=0}^9 N_i = \frac{5m^2 + 53m + 38}{2}. \quad (5.21)$$

és így (5.7) és (5.21) következtében $\text{rank}(\delta_1^m) = \text{nul}(\delta_2^m)$. Ennélfogva (5.6) teljesül, és $H^{m,2} = 0, m \geq 3$ adódik a 2-aciklikusság Spencer-féle kohomológia csoportjaira.

□

5.2.2. Tétel ([35]). *Legyen S egy nem izotróp spray egy 3-dimenziós M sokaságon, és tegyük fel, hogy az S Jacobi-endomorfizmusának sajátfüggvényei páronként különböznek. Ekkor a $\mathcal{P}_3$ differenciáloperátor akkor és csakis akkor formálisan integrálható, ha*

1. $\Phi' \in \text{Span}\{J, \Phi\}$, valamint
2. a (4.40) kompatibilitási feltétel azonosan zérus.

Bizonyítás. Az első feltétel teljesülése biztosítja azt, hogy minden másodrendű megoldás felemelhető harmadrendűvé, a másodiké pedig azt, hogy minden harmadrendű megoldás felemelhető negyedrendűvé. A $H^{m,2}$ Spencer-féle kohomológia csoportok eltűnése miatt $\mathcal{P}_3$ -nak nincsenek magasabb rendű kompatibilitási feltételei, azaz $m \geq 4$ -re minden m -edrendű megoldás $(m+1)$ -edrendű megoldássá prolongálható. Ennélfogva az operátor formálisan integrálható. $\square$

5.2.3. Következmény ([35]). *Legyen S egy nem izotróp analitikus spray egy 3-dimenziós analitikus sokaságon, továbbá tegyük fel, hogy az S Jacobi-endomorfizmusának sajátfüggvényei különböznek. Ha a magasabb rendű kompatibilitási feltétel reducibilis és a 5.2.2 Tétel feltételei teljesülnek, akkor S lokálisan projektív metrizable.*

Bizonyítás. Mivel a tétel feltételei esetén $\mathcal{P}_3$ formálisan integrálható, így az analitikus esetben tetszőleges másodrendű megoldás lokálisan analitikus megoldássá terjeszthető ki. Így egy pozitív kvázi-regularitási feltételnek eleget tevő $j_2(F)_x$ ($x \in \mathcal{T}M$) másodrendű megoldást választva, ez egy olyan F analitikus megoldással terjeszthető ki, hogy F^2 Hesse-mátrixa lokálisan pozitív definit. Ekkor az F Finsler-függvényhez társított spray projektív ekvivalens S -sel. $\square$

5.3. A reducibilis eset vizsgálata

Az előző alfejezetben megvizsgáltuk a görbületi feltétellel kiegészített Rapcsák-rendszer integrálhatósági feltételeit. Amennyiben az 5.2.2. Tétel első vagy második feltétele nem teljesül, úgy a projektív metrizable $\mathcal{P}_3$ differenciáloperátora nem integrálható. Ekkor a $\mathcal{P}_3$ rendszert a szokásos módon ki kell egészíteni a kompatibilitási feltétellel, és megvizsgálni az így adódó parciális differenciáloperátort. Ebben a fejezetben azt az esetet vizsgáljuk meg, amikor a $\mathcal{P}_3$ operátort másodrendű integrálhatósági feltétellel egészítjük ki. Ez a másodrendű feltétel származhat abból, hogy $\Phi' \notin \text{Span}\{J, \Phi\}$, így az (5.2) feltétel nem teljesül, valamint abból, hogy az extra harmadrendű integrálhatósági feltétel reducibilis.

A görbületi feltétellel kiegészített Rapcsák-rendszer az $\Omega = dd_J F$ differenciál 2-forma komponenseire vonatkozó egyenleteket tartalmaz. Ezek közül a nem feltétlenül zérus komponenseket a (4.45)-ben soroltuk fel. A 3-dimenziós esetben csupán két ilyen komponens fordul elő: az $a_{11} = \Omega(v_1, h_1)$ és az $a_{22} = \Omega(v_2, h_2)$. Amennyiben $\Phi' \notin \text{Span}\{J, \Phi\}$, úgy az $i_{\Phi} \Omega = 0$ másodrendű feltétel az (5.1) bázisra vonatkozóan (5.3) alapján a

$$\xi_{h_1}^{[S, h_2]} \Omega(v_1, h_1) + \xi_{v_2}^{[S, v_1]} \Omega(v_2, h_2) = 0 \quad (5.22)$$

alakba írható. Továbbá reducibilis esetben az extra harmadrendű integrálhatósági feltétel a (4.46) alapján

$$\alpha_{12}^1 \Omega(v_1, h_1) + \alpha_{12}^2 \Omega(v_1, h_1) = 0 \quad (5.23)$$

alakú.

5.3.1. Megjegyzés. Az (5.22) és az (5.23) kompatibilitási feltételek egy homogén lineáris egyenletrendszert alkotnak. Az egyenletrendszer együtthatói felhasználásával tekintsük az

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} \xi_{h_1}^{[S, h_2]} & \xi_{v_2}^{[S, v_1]} \\ \alpha_{12}^1 & \alpha_{12}^2 \end{pmatrix}.$$

mátrixot. Amennyiben $\mathcal{M}$ rangja 2, úgy a rendszer egyedüli megoldása a triviális $\Omega(v_1, h_1) = 0$, $\Omega(v_2, h_2) = 0$ megoldás, és a spray nem projektív metrizálható. Ezért a továbbiakban elegendő azt az esetet vizsgálni, amikor $\mathcal{M}$ rangja 1. Ekkor a $\mathcal{P}_3$ rendszert egy másodrendű

$$\eta_1 \Omega(v_1, h_1) + \eta_2 \Omega(v_2, h_2) = 0 \quad (5.24)$$

alakú integrálhatósági feltétellel kell kibővíteni, ahol η_1 és η_2 a $\mathcal{TM}$ -en értelmezett S spray által meghatározott függvények.

5.3.2. Megjegyzés. Ha (5.24) nemtriviális, de az itt szereplő η_1 és η_2 közül az egyik zérus, akkor $a_{11} = \Omega(v_1, h_1)$ vagy $a_{22} = \Omega(v_2, h_2)$ szükségképpen zérus, így nem létezik pozitív kvázi-definit megoldása $\mathcal{P}_4$ -nek, így a spray nem projektív metrizálható. A következőkben ezért feltesszük, hogy

$$\eta_1 \neq 0, \quad \eta_2 \neq 0. \quad (5.25)$$

Az (5.24) kompatibilitási feltételnek megfelelő másodrendű parciális differenciál-operátor a $\mathcal{P}_\Psi : C^\infty(\mathcal{TM}) \rightarrow C^\infty(\mathcal{TM})$, ahol

$$\mathcal{P}_\Psi(F) = \eta_1 \Omega(v_1, h_1) + \eta_2 \Omega(v_2, h_2),$$

és a kompatibilitási feltétellel kiegészített parciális differenciáloperátor

$$\mathcal{P}_4 = (\mathcal{P}_\Gamma, \mathcal{P}_C, \mathcal{P}_\Phi, \mathcal{P}_\Psi). \quad (5.26)$$

5.3.3. Lemma ([35]). *Ha $j_2(F)_x$ megoldása $\mathcal{P}_4$ -nek az $x \in \mathcal{TM}$ pontban, akkor tetszőleges $k \in \mathbb{N}$ -re az Ω forma k -adrendű Lie-deriváltja algebrailag kiszámítható Ω -ból.*

Bizonyítás. A 4.3.2 Megjegyzés alapján az Ω forma lehetséges nemzérus komponensei $a_{11} = \Omega(v_1, h_1)$ és $a_{22} = \Omega(v_2, h_2)$. A $d\Omega = 0$ azonosság, továbbá a (4.44) és a (5.24) egyenletek felhasználásával a következőket kapjuk az a_{11} Lie-deriváltjaira:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{h_2} a_{11} &= h_2 \Omega(v_1, h_1) = \Omega([h_2, v_1], h_1) + \Omega([v_1, h_1], h_2) + \Omega([h_1, h_2], v_2), \\ \mathcal{L}_{v_2} a_{11} &= v_2 \Omega(v_1, h_1) = \Omega([v_2, v_1], h_1) + \Omega([v_1, h_1], v_2) + \Omega([h_1, v_2], v_1), \\ \mathcal{L}_{h_1} a_{11} &= h_1 \Omega(v_1, h_1) = h_1 \left(\frac{\eta_2}{\eta_1} \Omega(v_2, h_2) \right) = h_1 \left(\frac{\eta_2}{\eta_1} \right) \Omega(v_2, h_2) + \frac{\eta_2}{\eta_1} h_1 \Omega(v_2, h_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= h_1 \left(\frac{\eta_2}{\eta_1} \right) \Omega(v_2, h_2) + \frac{\eta_2}{\eta_1} \left(\Omega([h_1, v_2], h_2) + \Omega([v_2, h_2], h_1) + \Omega([h_2, h_1], v_2) \right), \\
\mathcal{L}_{v_1} a_{11} &= v_1 \Omega(v_1, h_1) = v_1 \left(\frac{\eta_2}{\eta_1} \Omega(v_2, h_2) \right) = v_1 \left(\frac{\eta_2}{\eta_1} \right) \Omega(v_2, h_2) + \frac{\eta_2}{\eta_1} v_1 \Omega(v_2, h_2) \\
&= v_1 \left(\frac{\eta_2}{\eta_1} \right) \Omega(v_2, h_2) + \frac{\eta_2}{\eta_1} \left(\Omega([v_1, v_2], h_2) + \Omega([v_2, h_2], v_1) + \Omega([h_2, v_1], v_2) \right).
\end{aligned}$$

A fenti formulák jobb oldalán csupa olyan kifejezések találhatók, melyek nem tartalmazzák Ω deriváltjait, így ezek kifejezhetők az a_{11} és az a_{22} lineáris kombinációjaként. Az a_{22} deriváltjaira vonatkozó formulákat úgy kaphatjuk meg, hogy végrehajtjuk az $1 \leftrightarrow 2$ indexcserét. A magasabb rendű Lie-deriváltakat hasonlóan számíthatjuk ki. $\square$

5.3.4. Következmény ([35]). $A \mathcal{P}_4$ rendszer teljes abban az értelemben, hogy

1. vagy az összes kompatibilitási feltétel teljesül, és ekkor a spray lokálisan projektív metrizálható,
2. vagy a spray nem projektív metrizálható.

Bizonyítás. Valóban, ha a $\mathcal{P}_4$ -nek van nemtriviális kompatibilitási feltétele, akkor ez az 5.3.3. Lemma alapján algebrailag kifejezhető Ω -val, így egy új, (5.24)-től független homogén lineáris egyenletet kapunk a_{11} -re és a_{22} -re. Ekkor viszont a rendszernek csak a triviális megoldása ($a_{11} = 0$, $a_{22} = 0$) létezik, így $\mathcal{P}_4$ nem projektív metrizálható. $\square$

Kompatibilitási feltételek

A $\mathcal{P}_4$ operátorban szereplő $\mathcal{P}_\Gamma$, $\mathcal{P}_C$, illetve $\mathcal{P}_\Phi$ tagok szimbólumai (3.5), (2.18) és (4.4). A $\mathcal{P}_\Psi$ operátor szimbóluma és a szimbólumának prolongáltjai pedig a következők:

$$\begin{aligned}
\sigma_2(\mathcal{P}_\Psi) : S^2 T^* &\longrightarrow \mathbb{R}, & (\sigma_2(\mathcal{P}_\Psi) A^2) &= \eta_1 A^2(v_1, v_1) + \eta_2 A^2(v_2, v_2), \\
\sigma_3(\mathcal{P}_\Psi) : S^3 T^* &\longrightarrow T^*, & (\sigma_3(\mathcal{P}_\Psi) A^3)(X) &= \eta_1 A^3(X, v_1, v_1) + \eta_2 A^3(X, v_2, v_2), \\
\sigma_4(\mathcal{P}_\Psi) : S^4 T^* &\longrightarrow S^2 T^*, & (\sigma_4(\mathcal{P}_\Psi) A^4)(X, Y) &= \eta_1 A^4(X, Y, v_1, v_1) + \eta_2 A^4(X, Y, v_2, v_2),
\end{aligned}$$

$A^k \in S^k T^*$ és $X, Y \in T$. Legyen

$$\tau_4 := (\tau_3, \tau_4^1, \tau_4^2)$$

ahol a τ_3 a (4.9)-ben értelmezett leképezés és

$$\begin{aligned}
\tau_4^1(B) &= B_\Psi(C) - \eta_1 B_C(v_1, v_1) - \eta_2 B_C(v_2, v_2), \\
\tau_4^2(B) &= B_\Psi(S) - \frac{\eta_1}{2} B_\Gamma(v_1, S, h_1) - \frac{\eta_2}{2} B_\Gamma(v_2, S, h_2) - \frac{\eta_1}{\lambda_1} B_\Phi(h_1, h_1, S) - \frac{\eta_2}{\lambda_2} B_\Phi(h_2, h_2, S),
\end{aligned}$$

ahol $B = (B_\Gamma, B_C, B_\Phi, B_\Psi) \in T^* \otimes (\Lambda^2 T_v^* \times T^* \times \Lambda^2 T_v^* \times T^*)$. Ekkor igaz a következő

5.3.5. Lemma. Legyen $K_4 := \text{Im} \tau_4$. Ekkor a

$$S^3 T^* \xrightarrow{\sigma_3(\mathcal{P}_4)} (T^* \otimes \Lambda^2 T_v^*) \times S^2 T^* \times (T^* \otimes \Lambda^2 T_v^*) \times T^* \xrightarrow{\tau_4} K_4 \longrightarrow 0 \quad (5.27)$$

sorozat egzakt.

Bizonyítás. A szokásos módon járunk el. Mivel $\sigma_3(\mathcal{P}_4) \subset \text{Ker } \tau_4$, így elegendő ezek dimenzióját összehasonlítani. Egy $A \in S^3T^*$ szimmetrikus tenzor akkor és csak akkor van $\sigma_3(\mathcal{P}_4)$ magjában, ha a (4.14a), (4.14b), (4.14c), továbbá az

$$\eta_1 A_{i11} = -\eta_2 A_{i22} \quad (5.28)$$

$i = 1, \dots, 6$ egyenletek teljesülnek. A (2.26) jelölést használva a tenzorkomponensekre az adódik, hogy az (A_{ijk}) blokk teljesen szimmetrikus, így $\mathcal{C}_3^{3,i}$ szabad komponens tartalmaz. Továbbá a (4.14a) és a (4.14b) alapján az (A_{ijk}) blokkhoz $\mathcal{C}_3^{2,i}$ szabad komponens tartozik. Az (A_{ijk}) és (A_{ijk}) blokkok komponensei az (5.28) miatt már determináltak. Ennélfogva

$$\dim(g_3(\mathcal{P}_4)) = 14.$$

Tehát

$$\text{rank } \sigma_3(\mathcal{P}_4) = \dim S^3T^* - \dim(g_3(\mathcal{P}_4)) = 42. \quad (5.29)$$

Másrészt a 4.1.1 Lemma bizonyításában meghatároztuk a $\tau_3 = 0$ pivot elemeit. A háromdimenziós esetben az adódik, hogy a $\tau_3 = 0$ rendszer 19 független egyenletet tartalmaz. Továbbá a $\tau_4^1 = 0$, illetve a $\tau_4^2 = 0$ egyenletek pivot elemei $B_\Psi(C)$ és $B_\Psi(S)$. Tehát

$$\dim \text{Ker } \tau_4 = 2 \dim(T^* \otimes \Lambda^2 T_v^*) + \dim S^2 T^* + \dim T^* - 19 - 2 = 42. \quad (5.30)$$

Összegasonlítva (5.29)-et és (5.30)-at azt kaptuk, hogy (5.27) egzakt. $\square$

5.3.6. Állítás. A $\mathcal{P}_4$ parciális differenciáloperátor szimbóluma nem 2-aciklikus. A $H^{2,2}(\mathcal{P}_4)$ Spencer-ko-homológia csoportra $\dim H^{2,2}(\mathcal{P}_4) = 5$.

Bizonyítás. A számolás analóg a 4.2.1 Tétel számolásához, így itt csak nagy vonalakban ismertetjük. Ha tekintjük a

$$0 \longrightarrow g_4(\mathcal{P}_4) \xrightarrow{\delta_0^2} T^* \otimes g_3(\mathcal{P}_4) \xrightarrow{\delta_1^2} \Lambda^2 T^* \otimes g_2(\mathcal{P}_4) \xrightarrow{\delta_2^2} \Lambda^3 T^* \otimes g_1(\mathcal{P}_4) \longrightarrow \dots$$

Spencer-komplexust, akkor felhasználva, hogy a sorozat az első két tagban egzakt, valamint hogy $\dim(g_3(\mathcal{P}_4)) = 14$ és $\dim(g_4(\mathcal{P}_4)) = 20$ az adódik, hogy

$$\text{rank } \delta_1^2 = \dim(T^* \otimes g_3(\mathcal{P}_4)) - \dim(g_4(\mathcal{P}_4)) = 64. \quad (5.31)$$

A számolás további része teljesen analóg a 4.2.1. Tétel bizonyításával. Az ottani jelölésekkel $N = \sum_{i=0}^6 N_i$ -t kell meghatározni. Változás csupán az N_2 esetén lesz, ugyanis az $\mathcal{E}_{ijkl} = 0$ típusú egyenleteknél a D_{nni} csak az $n = 3$, $i = 1$ esetén pivot, és így $N_2 = 15$. Azt kapjuk, hogy

$$N = \sum_{i=0}^6 N_i = 3 + 2 + 15 + 17 + 2 + 24 + 18 = 81.$$

Tehát

$$\dim \text{Ker } \delta_2^2 = \dim(\Lambda^2 T^* \otimes g_2(\mathcal{P}_4)) - (N_0 + N) = 69. \quad (5.32)$$

Az (5.31) és az (5.32) alapján

$$\dim H^{2,2}(\mathcal{P}_4) = \dim \text{Ker } \delta_2^2 - \dim \text{Im } \delta_1^2 = 5.$$

$\square$

Tehát a $H^{2,2}(\mathcal{P}_4)$ Spencer-féle kohomológia csoport nemtriviális, ami azt jelenti, hogy magasabb rendű obstrukciók lépnek fel, mivel a

$$S^4T^* \xrightarrow{\sigma_4(\mathcal{P}_4)} (S^2T^* \otimes \Lambda^2T_v^*) \times S^3T^* \times (S^2T^* \otimes \Lambda^2T_v^*) \times S^2T^* \xrightarrow{id \otimes \tau_4} K_4^1 \rightarrow 0 \quad (5.33)$$

sorozat, ahol $id \otimes \tau_4$ a τ_4 leképezés prolongáltját jelöli, nem egzaktk. Így a kompatibilitási feltételek meghatározásához a $\nabla \tau_4$ leképezést további obstrukciós leképezésekkel kell kiegészíteni.

Valóban, tekintsük a

$$\tilde{\tau}_4 := (id \otimes \tau_4, \tau_h, \tau_4^3, \tau_4^4, \tau_4^5, \tau_4^6),$$

leképezést, ahol

$$\begin{aligned} \tau_4^3(\tilde{B}) &= \tilde{B}_\Psi(v_1, v_2) - \frac{\eta_1}{\lambda_1 - \lambda_2} \tilde{B}_\Phi(v_1, v_1, h_1, h_2) - \frac{\eta_2}{\lambda_1 - \lambda_2} \tilde{B}_\Phi(v_2, v_2, h_1, h_2), \\ \tau_4^4(\tilde{B}) &= \tilde{B}_\Psi(h_1, h_2) - \frac{\eta_1}{2} \tilde{B}_\Gamma(h_1, v_1, h_2, h_1) - \frac{\eta_2}{2} \tilde{B}_\Gamma(h_2, v_2, h_1, h_2) \\ &\quad - \frac{\eta_1}{\lambda_1 - \lambda_2} \tilde{B}_\Phi(h_1, h_1, h_1, h_2) - \frac{\eta_2}{\lambda_1 - \lambda_2} \tilde{B}_\Phi(h_2, h_2, h_1, h_2), \\ \tau_4^5(\tilde{B}) &= \tilde{B}_\Psi(h_1, v_2) - \frac{\eta_1}{\lambda_1 - \lambda_2} \tilde{B}_\Phi(h_1, v_1, h_1, h_2) \\ &\quad - \frac{\eta_2}{2} \tilde{B}_\Gamma(v_2, v_2, h_1, h_2) - \frac{\eta_2}{\lambda_1 - \lambda_2} \tilde{B}_\Phi(v_2, h_2, h_1, h_2), \\ \tau_4^6(\tilde{B}) &= \tilde{B}_\Psi(v_1, h_2) + \frac{\eta_1}{2} \tilde{B}_\Gamma(v_1, v_1, h_1, h_2) \\ &\quad - \frac{\eta_1}{\lambda_1 - \lambda_2} \tilde{B}_\Phi(h_1, v_1, h_1, h_2) - \frac{\eta_2}{\lambda_1 - \lambda_2} \tilde{B}_\Phi(h_2, v_2, h_1, h_2) \end{aligned}$$

és $\tilde{B} = (\tilde{B}_C, \tilde{B}_\Gamma, \tilde{B}_\Phi, \tilde{B}_\Psi) \in S^2T^* \otimes (\Lambda^2T_v^* \times T^* \times \Lambda^2T_v^* \times T^*)$. Ekkor a $\tau_h = 0$, $\tau_4^3 = 0$, $\tau_4^4 = 0$, $\tau_4^5 = 0$, illetve a $\tau_4^6 = 0$ öt olyan egyenletet ad, amelyek függetlenek a $\nabla \tau_4 = 0$ egyenleteitől, és így, mivel $\dim H^{2,2}(\mathcal{P}_4) = 5$ az (5.33) sorozatot a $\tilde{\tau}_4$ leképezés egzakttá teszi.

5.3.7. Állítás. *A $\mathcal{P}_4$ parciális differenciáloperátor kompatibilitási feltételei:*

$$\begin{aligned} \tau_4^1(\nabla \mathcal{P}_4 F) &= (\mathcal{L}_C \eta_1) \Omega(v_1, h_1) + (\mathcal{L}_C \eta_2) \Omega(v_2, h_2), \\ \tau_4^2(\nabla \mathcal{P}_4 F) &= 2\eta_1 \Omega([S, v_1], h_1) + 2\eta_2 \Omega([S, v_2], h_2) + (\mathcal{L}_S \eta_1) \Omega(v_1, h_1) + (\mathcal{L}_S \eta_2) \Omega(v_2, h_2), \\ \tau_4^3(\nabla^2 \mathcal{P}_4 F) &= (v_1(v_2 \eta_1)) \Omega(v_1, h_1) + (v_1(v_2 \eta_2)) \Omega(v_2, h_2) + \eta_2[v_1, v_2] \Omega(v_2, h_2) \\ &\quad + (v_2 \eta_1) v_1 \Omega(v_1, h_1) + (v_1 \eta_1) \left(\text{cyc} \sum \Omega([v_2, v_1], h_1) \right) + (v_2 \eta_2) \left(\text{cyc} \sum \Omega([v_1, v_2], h_2) \right) \\ &\quad + (v_1 \eta_2) v_2 \Omega(v_2, h_2) + \eta_1 v_1 \left(\text{cyc} \sum \Omega([v_2, v_1], h_1) \right) - \eta_2 v_2 \left(\text{cyc} \sum \Omega([v_2, v_1], h_2) \right), \\ \tau_4^4(\nabla^2 \mathcal{P}_4 F) &= (h_1(h_2 \eta_1)) \Omega(v_1, h_1) + (h_2 \eta_1) h_1 \Omega(v_1, h_1) + (h_1 \eta_1) h_2 \Omega(v_1, h_1) \\ &\quad + h_1(h_2 \eta_2) \Omega(v_2, h_2) + (h_2 \eta_2) h_1 \Omega(v_2, h_2) + (h_1 \eta_2) h_2 \Omega(v_2, h_2) \\ &\quad + \eta_2[h_1, h_2] \Omega(v_2, h_2) + \eta_1 h_1 \left(\text{cyc} \sum \Omega([h_2, v_1], h_1) \right) - \eta_2 h_2 \left(\text{cyc} \sum \Omega([v_2, h_1], h_2) \right), \\ \tau_4^5(\nabla^2 \mathcal{P}_4 F) &= (h_1(v_2 \eta_1)) \Omega(v_1, h_1) + (v_2 \eta_1) h_1 \Omega(v_1, h_1) + (h_1 \eta_1) v_2 \Omega(v_1, h_1) \\ &\quad + (h_1(v_2 \eta_2)) \Omega(v_2, h_2) + (v_2 \eta_2) h_1 \Omega(v_2, h_2) + \eta_1 h_1 \left(\text{cyc} \sum \Omega([v_2, v_1], h_1) \right) \\ &\quad + (h_1 \eta_1) \Omega(v_2, h_2) + \eta_2[h_1, v_2] \Omega(v_2, h_2) - \eta_2 v_2 \left(\text{cyc} \sum \Omega([v_2, h_1], h_2) \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tau_4^6(\nabla^2 \mathcal{P}_4 F) &= (v_1(h_2\eta_1))\Omega(v_1, h_1) + (h_2\eta_1)v_1\Omega(v_1, h_1) + (v_1\eta_1)h_2\Omega(v_1, h_1) \\ &+ (v_1(h_2\eta_2))\Omega(v_2, h_2) + (h_2\eta_2)v_1\Omega(v_2, h_2) + \eta_1 v_1 \left(\text{cyc} \sum \Omega([h_2, v_1], h_1) \right) \\ &+ (v_1\eta_2)h_2\Omega(v_2, h_2) + \eta_2[v_1, h_2]\Omega(v_2, h_2) - \eta_2 h_2 \left(\text{cyc} \sum \Omega([v_2, v_1], h_2) \right).\end{aligned}$$

Bizonyítás. Legyen $j_3(F)_x$ harmadrendű megoldása $\mathcal{P}_4$ -nek az $x \in \mathcal{TM}$ pontban.

1. A $F_c := CF - F$ jelöléssel azt kapjuk, hogy $v_1 v_1 (CF - F)_x = dd_J F_c(v_1, h_1)_x$. Ezért felhasználva, hogy $d_J d_C - d_C d_J = d_{[J, C]} = d_J$, és így

$$d_C \Omega - dd_J d_C F + dd_J F = d_C dd_J F - dd_C d_J F = d_C dd_J F - d_C dd_J F = 0,$$

az adódik, hogy

$$\begin{aligned}\tau_4^1(\nabla \mathcal{P}_4 F)_x &= (C\eta_1)\Omega(v_1, h_1) + (C\eta_2)\Omega(v_2, h_2) + \eta_1 d_C \Omega(v_1, h_1) + \eta_2 d_C \Omega(v_2, h_2) \\ &- \eta_1 dd_J F_c(v_1, h_1) - \eta_2 dd_J F_c(v_2, h_2) = (C\eta_1)\Omega(v_1, h_1) + (C\eta_2)\Omega(v_2, h_2),\end{aligned}$$

2. Mivel $i_J \Omega = 0$, így $i_J \Omega(h_1, [h_1, S]) = 0$ -ból a $J[h_1, S] = [v_1, S] - h_1$ azonosság alapján következik, hogy

$$\Omega(v_1, [h_1, S]) = \Omega(J[h_1, S], h_1), \quad \Omega(v_1, [h_1, S]) = \Omega([v_1, S], h_1).$$

Ekkor

$$\begin{aligned}\tau_4^2(\nabla \mathcal{P}_4 F)_x &= (S\eta_1)\Omega(v_1, h_1) + \eta_1 S\Omega(v_1, h_1) + (S\eta_2)\Omega(v_2, h_2) + \eta_2 S\Omega(v_2, h_2) \\ &- \eta_1 \nabla i_\Gamma \Omega(v_1, S, h_1) - \eta_2 \nabla i_\Gamma \Omega(v_2, S, h_2) - \frac{\eta_1}{\lambda_1} \nabla i_\Phi \Omega(h_1, h_1, S) - \frac{\eta_2}{\lambda_2} \nabla i_\Phi \Omega(h_2, h_2, S) \\ &= (S\eta_1)\Omega(v_1, h_1) + \eta_1 S\Omega(v_1, h_1) + (S\eta_2)\Omega(v_2, h_2) + \eta_2 S\Omega(v_2, h_2) \\ &- \eta_1 (v_1 \Omega(S, h_1)) - \eta_2 (v_2 \Omega(S, h_2)) - \eta_1 (h_1 \Omega(v_1, S)) - \eta_2 (h_2 \Omega(v_2, S)) \\ &= \eta_1 \sum_{cycl} \Omega([S, v_1], h_1) + \eta_2 \sum_{cycl} \Omega([S, v_2], h_2) + (S\eta_1)\Omega(v_1, h_1) + (S\eta_2)\Omega(v_2, h_2) \\ &= 2\eta_1 \Omega([S, v_1], h_1) + 2\eta_2 \Omega([S, v_2], h_2) + (S\eta_1)\Omega(v_1, h_1) + (S\eta_2)\Omega(v_2, h_2).\end{aligned}$$

3. Mivel $d\Omega(v_j, v_i, h_i) = 0$, $d\Omega(v_i, v_j, h_j) = 0$, $d\Omega(v_j, v_i, h_j) = 0$, az következik, hogy

$$\begin{aligned}\tau_4^3(\nabla^2 \mathcal{P}_4 F)_x &= \nabla^2 \mathcal{P}_\Psi(v_1, v_2) - \frac{\eta_1}{\lambda_1 - \lambda_2} \nabla^2 i_\Phi \Omega(v_1, v_1, h_1, h_2) - \frac{\eta_2}{\lambda_1 - \lambda_2} \nabla^2 i_\Phi \Omega(v_2, v_2, h_1, h_2) \\ &= v_1(v_2(\eta_1 \Omega(v_1, h_1) + \eta_2 \Omega(v_2, h_2))) - v_1 v_1 (\eta_1 \Omega(v_1, h_2)) - v_2 v_2 (\eta_2 \Omega(v_1, h_2)) \\ &= (v_1(v_2\eta_1))\Omega(v_1, h_1) + (v_2\alpha_1)v_1\Omega(v_1, h_1) + (v_1\eta_1) \left(\text{cyc} \sum \Omega([v_2, v_1], h_1) \right) \\ &\quad + \eta_1[v_1, v_2]\Omega(v_1, h_1) + \eta_1 v_2 v_1 \Omega(v_1, h_1) + (v_1(v_2\eta_2))\Omega(v_2, h_2) \\ &\quad + (v_2\eta_2)v_1\Omega(v_2, h_2) + (v_1\eta_2)v_2\Omega(v_2, h_2) + \eta_2[v_1, v_2]\Omega(v_2, h_2) \\ &\quad + \eta_2 v_2 v_1 \Omega(v_2, h_2) - \eta_1 v_1 v_1 \Omega(v_1, h_2) - \eta_2 v_2 v_2 \Omega(v_1, h_2) \\ &= (v_1(v_2\eta_1))\Omega(v_1, h_1) + (v_1(v_2\eta_2))\Omega(v_2, h_2) + \eta_2[v_1, v_2]\Omega(v_2, h_2) \\ &\quad + (v_2\eta_1)v_1\Omega(v_1, h_1) + (v_1\eta_1) \left(\text{cyc} \sum \Omega([v_2, v_1], h_1) \right) + (v_2\eta_2) \left(\text{cyc} \sum \Omega([v_1, v_2], h_2) \right) \\ &\quad + (v_1\eta_2)v_2\Omega(v_2, h_2) + \eta_1 v_1 \left(\text{cyc} \sum \Omega([v_2, v_1], h_1) \right) - \eta_2 v_2 \left(\text{cyc} \sum \Omega([v_2, v_1], h_2) \right),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
4. \quad \tau_4^4(\nabla^2 \mathcal{P}_4 F)_x &= \nabla^2 \mathcal{P}_\Psi(h_1, h_2) - \frac{\eta_1}{2} \nabla^2 i_\Gamma \Omega(h_1, v_1, h_2, h_1) - \frac{\eta_2}{2} \nabla^2 i_\Gamma \Omega(h_2, v_2, h_1, h_2) \\
&\quad - \frac{\eta_1}{\lambda_1 - \lambda_2} \nabla^2 i_\Phi \Omega(h_1, h_1, h_1, h_2) - \frac{\eta_2}{\lambda_1 - \lambda_2} \nabla^2 i_\Phi \Omega(h_2, h_2, h_1, h_2) \\
&= (h_1(h_2 \eta_1)) \Omega(v_1, h_1) + (h_2 \eta_1) h_1 \Omega(v_1, h_1) + (h_1 \eta_1) h_2 \Omega(v_1, h_1) \\
&\quad + h_1(h_2 \eta_2) \Omega(v_2, h_2) + (h_2 \eta_2) h_1 \Omega(v_2, h_2) + (h_1 \eta_2) h_2 \Omega(v_2, h_2) \\
&\quad + \eta_2 [h_1, h_2] \Omega(v_2, h_2) + \eta_1 h_1 (\text{cyc} \sum \Omega([h_2, v_1], h_1)) - \eta_2 h_2 (\text{cyc} \sum \Omega([v_2, h_1], h_2)), \\
5. \quad \tau_4^5(\nabla^2 \mathcal{P}_4 F)_x &= \nabla^2 \mathcal{P}_\Psi(h_1, v_2) - \frac{\eta_1}{\lambda_1 - \lambda_2} \nabla^2 i_\Phi \Omega(h_1, v_1, h_1, h_2) \\
&\quad - \frac{\eta_2}{2} \nabla^2 i_\Gamma \Omega(v_2, v_2, h_1, h_2) - \frac{\eta_2}{\lambda_1 - \lambda_2} \nabla^2 i_\Phi \Omega(v_2, h_2, h_1, h_2) \\
&= (h_1(v_2 \eta_1)) \Omega(v_1, h_1) + (v_2 \eta_1) h_1 \Omega(v_1, h_1) + (h_1 \eta_1) v_2 \Omega(v_1, h_1) \\
&\quad + (h_1(v_2 \eta_2)) \Omega(v_2, h_2) + (v_2 \eta_2) h_1 \Omega(v_2, h_2) + \eta_1 h_1 (\text{cyc} \sum \Omega([v_2, v_1], h_1)) \\
&\quad + (h_1 \eta_1) \Omega(v_2, h_2) + \eta_2 [h_1, v_2] \Omega(v_2, h_2) - \eta_2 v_2 (\text{cyc} \sum \Omega([v_2, h_1], h_2)), \\
6. \quad \tau_4^6(\nabla^2 \mathcal{P}_4 F)_x &= \nabla^2 \mathcal{P}_\Psi(v_1, h_2) + \frac{\eta_1}{2} \nabla^2 i_\Gamma \Omega(v_1, v_1, h_1, h_2) \\
&\quad - \frac{\eta_1}{\lambda_1 - \lambda_2} \nabla^2 i_\Phi \Omega(h_1, v_1, h_1, h_2) - \frac{\eta_2}{\lambda_1 - \lambda_2} \nabla^2 i_\Phi \Omega(h_2, v_2, h_1, h_2) \\
&= (v_1(h_2 \eta_1)) \Omega(v_1, h_1) + (h_2 \eta_1) v_1 \Omega(v_1, h_1) + (v_1 \eta_1) h_2 \Omega(v_1, h_1) \\
&\quad + (v_1(h_2 \eta_2)) \Omega(v_2, h_2) + (h_2 \eta_2) v_1 \Omega(v_2, h_2) + \eta_1 v_1 (\text{cyc} \sum \Omega([h_2, v_1], h_1)) \\
&\quad + (v_1 \eta_2) h_2 \Omega(v_2, h_2) + \eta_2 [v_1, h_2] \Omega(v_2, h_2) - \eta_2 h_2 (\text{cyc} \sum \Omega([v_2, v_1], h_2)).
\end{aligned}$$

□

5.3.8. Következmény. Az 5.3.3. Lemma alapján meghatározhatók azok az η_i^k függvények $\mathcal{TM}$ -en, melyekkel

$$\begin{aligned}
\tau_4^i(\nabla \mathcal{P}_4 F) &= \eta_1^i \Omega(v_1, h_1) + \eta_2^i \Omega(v_2, h_2) \quad i = 1, 2, \\
\tau_4^j(\nabla^2 \mathcal{P}_4 F) &= \eta_1^j \Omega(v_1, h_1) + \eta_2^j \Omega(v_2, h_2) \quad j = 3, 4, 5, 6.
\end{aligned} \tag{5.34}$$

Tekintsük a következő mátrixot:

$$\Theta = \begin{pmatrix} \eta_1 & \eta_1^1 & \dots & \eta_1^6 \\ \eta_2 & \eta_2^1 & \dots & \eta_2^6 \end{pmatrix}.$$

Ekkor az alábbi állítást kapjuk:

5.3.9. Állítás ([35]). *A $\mathcal{P}_4$ operátor akkor és csak akkor formálisan integrálható, ha*

$$\text{rank } \Theta = 1. \tag{5.35}$$

Bizonyítás. A $\mathcal{P}_4$ egy $j_2(F)_x$ másodrendű megoldása akkor és csakis akkor emelhető fel harmadrendűvé, ha $\tau_4^i(\nabla \mathcal{P}_4 F) = 0$, $i = 1, 2$, és egy harmadrendű megoldás akkor és csakis akkor emelhető negyedrendűvé, ha $\tau_4^j(\nabla^2 \mathcal{P}_4 F) = 0$, $j = 3, 4, 5, 6$. Az (5.34)-ben szereplő kifejezések jobb oldalát nullával téve egyenlővé, a kompatibilitási feltételek egy homogén lineáris egyenletrendszer alkotnak. Ezek az egyenletek akkor és csak akkor teljesülnek identikusan, ha (5.24) többszörösei, azaz amennyiben (5.35) teljesül. Továbbá könnyen belátható, hogy (4.8) egy kvázi-reguláris bázis, tehát a $\mathcal{P}_4$ szimbóluma invoutív. Így a Cartan–Kähler-tétel feltételei teljesülnek és $\mathcal{P}_4$ formálisan integrálható. □

Az 5.3.2. Megjegyzés és az 5.3.9. Állítás alapján adódik az alábbi

5.3.10. Tétel ([35]). *Legyen S egy nem izotróp analitikus spray egy 3-dimenziós analitikus sokaságon, melynek Jacobi-endomorfizmusa generikus, azaz a sajátértékei minden $x \in TM$ pontban különböznek.*

1. *Ha $\Phi' \in \text{Span}\{J, \Phi\}$ és a (4.40) kompatibilitási feltétel azonosan zérus, akkor az S spray projektív metrizálható.*
2. *Ha $\Phi' \notin \text{Span}\{J, \Phi\}$ vagy a (4.40) kompatibilitási feltétel reducibilis de nem azonosan zérus, akkor a spray akkor és csak akkor lokálisan projektív metrizálható, ha $\eta_1 \cdot \eta_2 < 0$ és $\text{rank } \Theta = 1$.*

Bizonyítás. Az 5. fejezet eredményei alapján, ha az 1. pont feltételei teljesülnek, akkor a $\mathcal{P}_3$ differenciáloperátor formálisan integrálható és létezik pozitív kvázi-definit analitikus megoldása, ami egyben megoldása lesz a projektív metrizálhatósági problémának.

Ha a 2. pont feltételei teljesülnek, akkor a $\mathcal{P}_4$ operátor formálisan integrálható, így tetszőleges $x \in TM$ -beli $j_2(F)_x$ másodrendű megoldás, amely eleget tesz az $a_{11} > 0$ és az $a_{22} > 0$ feltételeknek lokálisan kiterjeszthető egy analitikus, pozitív kvázi-definit megoldássá, ami megoldása lesz a projektív metrizálhatósági problémának, azaz a spray lokálisan projektív metrizálható. $\square$

Példa

Legyen S spray lokálisan a következő másodrendű differenciálegyenlet-rendszerrel adott:

$$\ddot{x}_1 = f^1\left(x_1, x_3, \frac{\dot{x}_1}{\dot{x}_3}\right) \cdot \dot{x}_3^2, \quad \ddot{x}_2 = f^2\left(x_2, x_3, \frac{\dot{x}_2}{\dot{x}_3}\right) \cdot \dot{x}_3^2, \quad \ddot{x}_3 = f^3(x_3) \cdot \dot{x}_3^2, \quad (5.36)$$

ahol f^1 , f^2 és f^3 analitikus függvények. A nemzérus $\Gamma_j^i = -\frac{1}{2} \frac{\partial f^i}{\partial y^j}$ konnexió koefficiensek

$$\begin{aligned} \Gamma_1^1 &= -\frac{1}{2} \partial_3 f^1 \cdot y_3, & \Gamma_2^2 &= -\frac{1}{2} \partial_3 f^2 \cdot y_3, \\ \Gamma_3^1 &= \frac{1}{2} \partial_3 f^1 \cdot y_1 - f^1 \cdot y_3, & \Gamma_3^2 &= \frac{1}{2} \partial_3 f^2 \cdot y_2 - f^2 \cdot y_3, & \Gamma_3^3 &= -f^3 \cdot y_3. \end{aligned}$$

A Jacobi-endomorfizmus komponensei a (1.10) formula alapján számíthatóak ki. Ekkor a $(\Phi_j^i) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \star \\ 0 & \lambda_2 & \star \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ felső háromszögmátrix sajátfüggvényei

$$\lambda_i = \frac{1}{2} \left(\partial_{13} f^i - f^3 \partial_{33} f^i \right) y_1 y_3 + \frac{1}{2} \left(\partial_{23} f^i + f^i \partial_{33} f^i + f^3 \partial_3 f^i - 2 \partial_1 f^i - \frac{1}{2} (\partial_3 f^i)^2 \right) y_3^2,$$

$i = 1, 2$ és $\lambda_3 = 0$. A Jacobi-endomorfizmus h_1 , h_2 , h_3 sajátvektormezőit, illetve a $v_i = Jh_i$, ($i = 1, 2, 3$) vektormezők a következők:

$$h_1 = \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{1}{2} y_3 \partial_3 f^1 \frac{\partial}{\partial y_1}, \quad v_1 = \frac{\partial}{\partial y_1},$$

$$\begin{aligned}
h_2 &= \frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{1}{2} y_3 \partial_3 f^2 \frac{\partial}{\partial y_2}, & v_2 &= \frac{\partial}{\partial y_2}, \\
h_3 &= \sum_{i=1}^3 y_i \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^3 y_3^2 f^i \frac{\partial}{\partial y_i}, & v_3 &= \sum_{i=1}^3 y^i \frac{\partial}{\partial y_i},
\end{aligned}$$

ahol $h_3 = S$ az (5.36)-nak megfelelő spray és $v_3 = C$.

Ha λ_1, λ_2 nullák, vagy λ_1, λ_2 nemnullák és $\lambda_1 = \lambda_2$, akkor a spray lapos vagy izotróp, ezért a 3.2.3. Következmény alapján projektív metrizálható. Ha λ_1, λ_2 nemnullák és $\lambda_1 \neq \lambda_2$, akkor a spray nem izotróp. A Jacobi-endomorfizmus szemibázikus kovariáns deriváltja $\Phi'(h_i) = v[h_i, S] = \mu_i v_i$, ($i = 1, 2, 3$) ahol

$$\mu_i = \frac{1}{4} \left(y^3 y^3 \left((\partial_3 f^i)^2 + 4 \partial_1 f^i - 2 f^i \partial_{33} f^i - 2 f^3 \partial_3 f^i \right) + 2 y^i y^3 f^3 \partial_{33} f^i \right), \quad i = 1, 2$$

és $\mu_3 = 0$. Ennélfogva $\Phi' = A\Phi + BJ$, ahol $A = (\mu_1 - \mu_2)/(\lambda_1 - \lambda_2)$ és $B = (\lambda_1 \mu_2 - \lambda_2 \mu_1)/(\lambda_1 - \lambda_2)$. Azaz $\Phi' \in \text{Span}\{\Phi, J\}$. Továbbá

$$[v_1, h_2] = 0, \quad [v_2, h_1] = 0, \quad [h_1, h_2] = 0, \quad [v_1, h_1] \in \text{Span}(v_1), \quad [v_2, h_2] \in \text{Span}(v_2),$$

így a $\kappa_{ij}^i, \theta_{ij}^i, \beta_{ij}^i, \gamma_{ij}^i$ függvények (4.47a)-ban, (4.47b)-ben és (4.48)-ban eltűnnek. Ezért (4.46) fennáll és a 4.3.3. Következmény alapján a harmadrendű (4.40) kompatibilitási feltétel teljesül. Az 5.2.2. Tétel alapján $\mathcal{P}_3$ formálisan integrálható, és így az 5.2.3. Következmény szerint lokálisan projektív metrizálható.

6. fejezet

Kanonikus sprayk invariáns projektív metrizálhatósága

Mivel minden Riemann-sokaság speciálisan Finsler-sokaság is, így ha az S spray Riemann-metrizálható, akkor Finsler-metrizálható is, valamint, ha az S projektív Riemann-metrizálható, akkor projektív Finsler-metrizálható is.

A megfordítások általában nem teljesülnek. Viszont ha az S spray kvadratikus, akkor Szabó Zoltán tétele szerint [44, 52] a Finsler metrizálhatóságból következik a Riemann-metrizálhatóság is, azaz a Riemann- és a Finsler-metrizálhatóság problémája egybeesik. Valóban, minden Berwald-metrikához (azaz olyan Finsler-metrikához, melynek a kanonikus sprayje kvadratikus) létezik egy olyan Riemann-metrika, melynek a geodetikusai megegyeznek a Finsler metrika geodetikusaival. Megjegyezzük azonban, hogy a projektív Finsler-metrizálható sprayk osztálya még a kvadratikus esetben is effektíve nagyobb a projektív Riemann-metrizálhatóakénál. Ez következik abból, hogy nem lineáris projektív faktort használva egy kvadratikus spray projektív ekvivalens lehet egy nem kvadratikkussal, ez utóbbi pedig nyilván nem lehet Riemann-metrizálható. A két probléma közötti különbséget érzékelteti az is, hogy amíg minden 2-dimenziós sokaságon adott spray lokálisan projektív Finsler-metrizálható, addig a kvadratikus sprayk általában nem Riemann-metrizálhatóak. A projektív Riemann-metrizálhatóság problémája még a kétdimenziós esetben is igen bonyolult számoláshoz vezet [10].

A 6.1. alfejezetben megvizsgáljuk azt az esetet, amikor a sokaság egy Lie-csoport. Igazoljuk, hogy amennyiben S a Lie-csoport kanonikus sprayje, akkor S akkor és csak akkor balinvariáns Riemann-metrizálható, ha balinvariáns projektív Finsler-metrizálható. A 6.2. alfejezetben pedig bizonyítjuk az állítás megfelelőjét homogén terek geodetikus orbitstruktúrájára.

6.1. Lie-csoporhoz tartozó kanonikus spray

Egy G Lie-csoporton három természetes konnexió adható meg, ezeket tradicionálisan ∇^+ , ∇^- és ∇^0 jelöli. Ezeket a konnexiókat a következőképpen definiálhatjuk: ha X, Y balinvariáns vektormezők, akkor legyen

$$\nabla_X^+ Y := [X, Y], \quad \nabla_X^- Y := 0, \quad \nabla_X^0 Y := \frac{1}{2}[X, Y].$$

Ezek a relációk már meghatározzák a konnexitásokat, hiszen definíciójukat tetszőleges vektormezőkre kiterjeszthetjük annak megkövetelésével, hogy az X változóban legyenek additívak és függvénylineárisak, az Y változóban pedig legyenek additívak és tegyenek eleget a Leibnitz-szabálynak.

Megjegyezzük, hogy mindhárom konnexitó lineáris, és mindhárom konnexitó geodetikus-serege megegyezik: a Lie-csoport 1-paraméteres részcsoporthai és ezek eltoltjai. Ezt a geodetikus struktúrát a Lie-csoport kanonikus geodetikus struktúrájának nevezzük. A kanonikus geodetikus struktúrához tartozó másodrendű differenciálegyenlet-rendszert, illetve sprayt a Lie-csoport kanonikus másodrendű differenciálegyenlet-rendszerének, illetve kanonikus sprayének nevezzük. Ebben a fejezetben a célunk az, hogy megvizsgáljuk ezen kanonikus spray metrizálhatóságát, illetve projektív metrizálhatóságát.

Invariáns koordinátarendszer az érintőtéren

Legyen G egy véges dimenziós Lie-csoport, $\mathfrak{g}$ pedig a Lie-algebrája. Jelölje

$$\lambda_g: G \rightarrow G, \quad \lambda_g(h) = gh \quad (6.1)$$

a $g \in G$ elemmel való baleltolást. Mivel balinvariáns struktúrákat vizsgálunk TG -n, így kézenfekvő bevezetni egy „invariáns” koordinátarendszert a $TG \cong G \times \mathfrak{g}$ trivializációt használva. Minden $g \in G$ -re a $T_g G$ érintőtér izomorf $\mathfrak{g}$ -vel, ahol az izomorfizmust a baleltolás $(\lambda_g^{-1})_*: T_g G \rightarrow \mathfrak{g} \cong T_e G$ érintőleképezése szolgáltatja. Ennélfogva bevezethető egy balinvariáns, $\mathfrak{g}$ értékű $\theta: TG \rightarrow \mathfrak{g}$ differenciálforma, amit a következőképpen definiálunk: $\theta = (\lambda_g^{-1})_* dg$. Ezt a formát Maurer–Cartan-formának nevezzük. Ekkor a megfelelő invariáns koordinátarendszer (x^i, α^i) , ahol $\alpha^i = (\lambda_{x,*}^{-1})^i_j dx^j$. Ez a (x, α) balinvariáns koordinátarendszer a TTG második érintőnyalábon is koordinátákat származtat. Ezeket a következőképpen jelöljük

$$(x^i, \alpha^i, X^i, A^i) \cong X^i \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_{(x, \alpha)} + A^i \frac{\partial}{\partial \alpha^i} \Big|_{(x, \alpha)}. \quad (6.2)$$

Használjuk az egyszerűsített

$$(x^i, \alpha^i, X^i, A^i) \cong (x, \alpha, X, A) \cong X \frac{\partial}{\partial x} \Big|_{(x, \alpha)} + A \frac{\partial}{\partial \alpha} \Big|_{(x, \alpha)}. \quad (6.3)$$

jelöléseket. Mivel az x koordináták nem invariánsak, így az X koordináták sem. Viszont $\alpha = (\alpha^i)$ és ennélfogva $A = (A^i)$ azok: a g csoportelemmel történő baleltolás a következő hatást indukálja TTG -n:

$$(\lambda_g)_*(x, \alpha, X, A) = (\lambda_g x, \alpha, \lambda_{g*} X, A) \cong gX \frac{\partial}{\partial x} \Big|_{(gx, \alpha)} + A \frac{\partial}{\partial \alpha} \Big|_{(gx, \alpha)}.$$

6.1.1. Definíció. Az $X \in \mathfrak{X}(G)$ vektormező balinvariáns, ha $(\lambda_g)_* X = X$ minden $g \in G$ esetén. Hasonlóan egy $L: TG \rightarrow \mathbb{R}$ függvény balinvariáns, ha $L \circ (\lambda_g)_* = L$ minden $g \in G$ esetén.

Invariáns vektormezőn, függvényen, metrikán mostantól balinvariáns vektormezőt, függvényt, metrikát értünk.

6.1.2. Megjegyzés. Az (x^i, α^i) invariáns koordináta rendszert használva egy $L : TG \rightarrow \mathbb{R}$ függvény akkor és csakis akkor invariáns, ha nem függ az x koordinátától, azaz

$$\frac{\partial L}{\partial x^i} \equiv 0, \quad i = 1, \dots, n. \quad (6.4)$$

A kanonikus geodetikus struktúra

A kanonikus geodetikus struktúrához társított fő geometriai mennyiségekről (spray, horizontális és vertikális endomorfizmus stb.) részletesebben olvashatunk a következő munkákban: [36, 38]. Itt csupán a dolgozat szempontjából legfontosabb eredményeket ismertetjük.

Használva a $G \rightarrow GL(n, \mathbb{R})$, $x \rightarrow M_x$ mátrixreprezentációt, a kanonikus másodrendű differenciálegyenlet-rendszer (x, y) standard koordinátarendszerbeli alakja

$$\ddot{M}_t = \dot{M}_t M_t^{-1} \dot{M}_t, \quad (6.5)$$

ahol $M_t := M_{x_t}$. A (6.5)-nek megfelelő $S \in \mathfrak{X}(TG)$ kanonikus spray

$$S_{(x,\alpha)} = (x, \alpha, \lambda_x \alpha, 0) \cong \lambda_x \alpha \frac{\partial}{\partial x} \Big|_{(x,\alpha)}. \quad (6.6)$$

A vertikális, illetve horizontális projektorok pedig a következő formába írhatóak:

$$v \left(\lambda_x a \frac{\partial}{\partial x} \Big|_{(x,\alpha)} + b \frac{\partial}{\partial \alpha} \Big|_{(x,\alpha)} \right) = \left(\frac{1}{2} [a, \alpha] + b \right) \frac{\partial}{\partial \alpha} \Big|_{(x,\alpha)}, \quad (6.7)$$

$$h \left(\lambda_x a \frac{\partial}{\partial x} \Big|_{(x,\alpha)} + b \frac{\partial}{\partial \alpha} \Big|_{(x,\alpha)} \right) = \lambda_x a \frac{\partial}{\partial x} \Big|_{(x,\alpha)} - \frac{1}{2} [a, \alpha] \frac{\partial}{\partial \alpha} \Big|_{(x,\alpha)} \quad (6.8)$$

vagy a (6.3) jelölésekkel

$$v(x, \alpha, \lambda_x a, b) = (x, \alpha, 0, \frac{1}{2} [a, \alpha] + b)$$

$$h(x, \alpha, \lambda_x a, b) = (x, \alpha, \lambda_x a, -\frac{1}{2} [a, \alpha]).$$

Metrizálhatóság és projektív metrizálhatóság

Ahogy azt a 1. fejezetben részletesen leírtuk, a metrizálhatóság és projektív metrizálhatóság szempontjából központi jelentőségű az Euler–Lagrange-egyenlet megoldhatósága. Erre vonatkozik az alábbi

6.1.3. Állítás ([8]). Egy $L : TG \rightarrow \mathbb{R}$ Lagrange-függvény akkor és csakis akkor invariáns megoldása a Lie-csoport kanonikus sprayéhez tartozó Euler–Lagrange-egyenletnek, ha teljesülnek a

$$\frac{\partial L}{\partial x^i} = 0, \quad (6.9a)$$

$$[a, \alpha]^i \frac{\partial L}{\partial \alpha^i} = 0, \quad (6.9b)$$

egyenletek minden $i = 1, \dots, n$ -re, illetve minden $a \in \mathfrak{g}$ -re.

Bizonyítás. A (6.9a) egyenlet az L függvény invarianciáját fejezi ki. Továbbá a kanonikus spray (6.6) kifejezése alapján világos, hogy ha L invariáns, akkor

$$d_S L = 0. \quad (6.10)$$

Mivel a 2.1.7 Állítás alapján az Euler–Lagrange-egyenlet akkor és csakis akkor teljesül, ha $d_h L = 0$, így (6.8)-ból azt kapjuk, hogy

$$d_h L = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda_x a \frac{\partial L}{\partial x} - \frac{1}{2} [a, \alpha] \frac{\partial L}{\partial \alpha} = 0, \quad a \in \mathfrak{g},$$

és a invarianciát felhasználva látszik, hogy az utóbbi egyenlet akkor és csakis akkor azonosan zérus, ha (6.9b) teljesül. $\square$

6.1.4. Állítás ([8]). Egy Lie-csoport kanonikus spray-je

1. pontosan akkor invariáns projektív Riemann-metrizálható, ha invariáns Riemann-metrizálható,
2. pontosan akkor invariáns projektív Finsler-metrizálható, ha invariáns Finsler-metrizálható.

Bizonyítás. 1.) Világos, hogy ha S Riemann-metrizálható, akkor projektív Riemann-metrizálható is. A fordított irány bizonyításához tegyük fel, hogy S projektív Riemann-metrizálható. Ekkor létezik egy invariáns kvadratikus $E: TG \rightarrow \mathbb{R}$ függvény úgy, hogy $\frac{\partial^2 E}{\partial \alpha^i \partial \alpha^j}$ mátrix pozitív definit $\mathcal{TM}$ -en, és az $F := \sqrt{E}$ függvény megoldása az S -hez tartozó Euler–Lagrange-egyenletnek. Az invariancia miatt azt kapjuk, hogy $d_S F = 0$, így a 2.1.8 Következmény miatt $E := F^2$ is egy megoldása az S -hez tartozó Euler–Lagrange-egyenletnek. Így az adott E függvény egy Riemann-metrika energiafüggvénye, azaz S Riemann-metrizálható.

2.) Hasonlóan a fenti gondolatmenethez, amennyiben az S spray Finsler-metrizálható, úgy nyilván projektív Finsler-metrizálható is. Fordítva, tegyük fel, hogy az S projektív Finsler-metrizálható. Ekkor létezik egy 2-homogén $E: TG \rightarrow \mathbb{R}$ függvény úgy, hogy a $\frac{\partial^2 E}{\partial \alpha^i \partial \alpha^j}$ mátrix pozitív definit $\mathcal{TM}$ -en és az $F := \sqrt{E}$ függvény megoldása az S -hez tartozó Euler–Lagrange-egyenletnek. Mivel $d_S F = 0$, így a 2.1.8. Következmény alapján $E := \frac{1}{2} F^2$ is megoldása az S -hez tartozó Euler–Lagrange-egyenletnek. Tehát E egy Finsler-metrika energiafüggvénye, így S Finsler-metrizálható. $\square$

6.1.5. Tétel ([8]). Egy Lie-csoportoz tartozó kanonikus spray akkor és csakis akkor invariáns projektív Finsler-metrizálható, ha invariáns Riemann-metrizálható.

Bizonyítás. Mivel egy Riemann-metrika nem más, mint egy kvadratikus Finsler-metrika, így ha a kanonikus spray Riemann-metrizálható, akkor nyilván Finsler-metrizálható, és így projektív Finsler-metrizálható is.

Fordítva, tegyük fel, hogy az S kanonikus spray projektív Finsler-metrizálható.

Ekkor a 6.1.4. Állítás miatt Finsler-metrizálható is. Mivel az S sprayhez tartozó konnexitó lineáris, így a Finsler-metrika ténylegesen egy Berwald-metrika. Szabó Zoltán eredménye alapján pedig a Berwald-metrika létezése egy olyan Riemann-metrika létezését is maga után vonja, melynek a kanonikus konnexitója (és így a geodetikus rendszere) is megegyezik a Berwald-metrikáéval [44]. Tehát így azt kapjuk, hogy a kanonikus spray Riemann-metrizálható. $\square$

6.1.6. Következmény ([8]). *Egy Lie-csoport kanonikus spraye akkor és csakis akkor invariáns Riemann-, Finsler-, projektív Riemann- illetve projektív Finsler-metrizálható, ha létezik egy $\langle \cdot, \cdot \rangle$ skaláris szorzat $\mathfrak{g}$ -n, melyre*

$$\langle [a, \alpha], \alpha \rangle = 0, \quad (6.11)$$

minden $a, \alpha \in \mathfrak{g}$ -re.

Bizonyítás. A 6.1.5 Tétel értelmében a fenti metrizálhatósági esetek ekvivalensek, hiszen bármelyik maga után vonja a „legerősebb”, azaz az invariáns Riemann-metrizálhatósági tulajdonságot. Egy invariáns Riemann-metrika pedig egy $\langle \cdot, \cdot \rangle$ skaláris szorzatot indukál a $\mathfrak{g}$ Lie-algebrán. Az (x, α) koordinátarendszert használva $TG \cong G \times \mathfrak{g}$ -n, a társított energiafüggvény $E : G \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{R}$, ahol $E(x, \alpha) = \langle \alpha, \alpha \rangle$. Ekkor a (6.9b) egyenletből következik (6.11). $\square$

6.1.7. Megjegyzés. Annak ellenére, hogy a kanonikus spray és minden belőle származó geometriai struktúra invariáns a baltolással szemben, továbbá az Euler–Lagrange-egyenlet örökli a Lagrange-függvény szimmetriáit, nem igaz, hogy a metrizálhatóság automatikusan invariáns metrikával való metrizálhatóságot jelent. Tekintjük példaként a háromdimenziós $\mathbb{H}_3$ Heisenberg-csoportot! A $\mathbb{H}_3$ csoport egy mátrix reprezentációja megadható a

$$\mathbb{H}_3 := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x & y \\ 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid x, y, z \in \mathbb{R} \right\}$$

formában. A megfelelő Lie-algebrát a

$$\mathfrak{h}_3 := \left\{ \begin{pmatrix} 0 & x & y \\ 0 & 0 & z \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mid x, y, z \in \mathbb{R} \right\}$$

alakú mátrixok adják. Ennek a Lie-algebrának egy bázisa az $\{e_1, e_2, e_3\}$, ahol

$$e_1 := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_3 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ha (a_1, a_2, a_3) , illetve $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ jelölik a , illetve α koordinátáit erre a bázisra vonatkozóan, akkor $[a, \alpha] = (a_1\alpha_2 - a_2\alpha_1)e_3$. Ekkor (6.11)-ből azt kapjuk, hogy $\langle e_3, e_3 \rangle = 0$ ami skaláris szorzat esetén lehetetlen. Ennélfogva $\mathbb{H}_3$ nem metrizálható, illetve projektív metrizálható invariáns Riemann- vagy Finsler-metrikával. Azonban a Heisenberg-algebra görbületi tenzora eltűnik, ennélfogva a kanonikus spray metrizálható. A megfelelő (nem invariáns) Riemann-metrika a

$$g = dx^2 + dy^2 + \left(dz - \frac{y}{2}dx - \frac{x}{2}dy\right)^2$$

formulával definiálható (lásd [22]).

6.2. Homogén terek geodetikus orbitstruktúrája

Legyen M egy összefüggő differenciálható sokaság, melyen a G Lie-csoport tranzitíven hat. A G csoport M -en való hatását a következő leképezés határozza meg:

$$\lambda : (g, m) \mapsto \lambda_g m = g \cdot m : G \times M \rightarrow M. \quad (6.12)$$

Rögzítsünk egy $o \in M$ pontot és jelöljük H -val $o \in M$ stabilizátorát a G csoportban

$$H := \{ h \in G \mid h \cdot o = o \}.$$

Jelölje $\pi : G \rightarrow G/H$ a természetes projekciót. Ekkor az M izomorf a G/H faktortérrel: a

$$G/H \longrightarrow M, \quad [g] \longrightarrow \lambda_g o \quad (6.13)$$

leképezés egy izomorfizmus. A H csoportot a G/H homogén tér o ponthoz tartozó izotrópia csoportjának nevezzük. A (6.13) egy izomorfizmust indukál az $o \in M \cong G/H$ -beli érintőtér és a $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ között, ahol $\mathfrak{g}$ és $\mathfrak{h}$ a G , illetve a H Lie-csoportok Lie-algebrái.

Geodetikus struktúrákat, sprayket, metrikákat, és Lagrange-függvényeket invariánsnak nevezünk M -en, ha invariánsak G -nek (6.12) hatásával szemben. Világos, hogy invariáns sprayk, metrikák és Lagrange-függvények karakterizálhatóak a $T_o M$ -en felvett értékekkel.

6.2.1. Definíció. A $M \cong G/H$ sokaság $o \in M$ origójából induló $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M$ geodetikus homogén, ha létezik olyan $X_\gamma \in \mathfrak{g}$ vektor, hogy

$$\gamma(t) = \lambda_{\exp t X_\gamma} o = (\exp t X_\gamma) \cdot o, \quad (6.14)$$

Az $X_\gamma \in \mathfrak{g}$ elemet a $\dot{\gamma}(0) \in T_o M$ irányhoz társított geodetikus vektornak nevezzük.

A definíció alapján az o -ból induló γ geodetikus homogén, ha a G csoport 1-paraméteres részcsoportjának a pályája.

6.2.2. Definíció. Egy invariáns geodetikus struktúrát az $M \cong G/H$ homogén téren geodetikus orbit struktúrának (vagy g.o. struktúrának) mondunk, ha az $o \in M$ origóból induló tetszőleges geodetikus homogén. Egy g.o. struktúrához tartozó sprayt geodetikus orbitspraynek (vagy röviden g.o. spraynek) nevezünk.

Invariáns geodetikus struktúrát megadhatunk sima homogén lift segítségével [37]:

6.2.3. Definíció. Legyen $M \cong G/H$ egy homogén tér, $o \in M$ az origó. Azt mondjuk, hogy a $\sigma : T_o M \rightarrow \mathfrak{g}$ leképezés egy *homogén lift*, ha teljesülnek a következő feltételek:

1. $\pi_* \circ \sigma = id_{T_o M}$,
2. a σ leképezés pozitív 1-homogén, azaz $\sigma(\kappa \cdot v) = \kappa \sigma(v)$ minden $v \in T_o M$ -re és $\kappa \in \mathbb{R}$ -re ahol $\kappa > 0$,
3. a σ leképezés $\text{Ad}(H)$ invariáns, azaz $\sigma(\lambda_{h*} v) = \text{Ad}_h \sigma(v)$, minden $h \in H$ -ra és $v \in T_o M$ -re.

A $\sigma : T_o M \rightarrow \mathfrak{g}$ homogén liftet simának mondjuk, ha folytonos $T_o M$ -en és C^∞ -differentiálható $T_o M \setminus \{0\}$ -n.

Megjegyezzük, hogy minden geodetikus orbit struktúra (g.o. spray) meghatároz egy sima homogén liftet (a $v \in T_o M$ -hez rendeljük a $\sigma(v) := X \in \mathfrak{g}$ geodetikus vektort) és fordítva, minden homogén lift meghatároz egy geodetikus orbit struktúrát (g.o. sprayt) baleltolásokkal vett kiterjesztés révén.

6.2.4. Lemma ([8]). *Ha $L : TM \rightarrow \mathbb{R}$ egy G -invariáns Lagrange-függvény M -en, akkor L konstans a g.o. spray geodetikusai mentén.*

Bizonyítás. Az L függvény invarianciája miatt vizsgálatainkat elegendő az $o \in M$ origóból kiinduló geodetikusokra korlátoznunk. Legyen S az $M = G/H$ homogén téren adott g.o. spray. Ekkor az $o \in M$ origóból induló tetszőleges $\gamma(t)$ geodetikushoz létezik egy $X_\gamma \in \mathfrak{g}$ geodetikus vektor. Így (6.14) alapján

$$\gamma(t_0 + t) = \lambda_{\exp(t_0+t)X_\gamma} o = \lambda_{\exp t_0 X_\gamma} \lambda_{\exp t X_\gamma} o, \quad (6.15)$$

és azt kapjuk, hogy

$$\dot{\gamma}(t_0) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \gamma(t_0 + t) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \lambda_{\exp t_0 X_\gamma} \lambda_{\exp t X_\gamma} o = (\lambda_{\exp(t_0 X_\gamma)})_* \dot{\gamma}(0). \quad (6.16)$$

Ha $L : TM \rightarrow \mathbb{R}$ egy G -invariáns Lagrange-függvény, akkor tetszőleges $p \in M$ -re, $v \in T_p M$ -re és $g \in G$ -re

$$L(v) = L(\lambda_{g,*} v).$$

Ezt alkalmazva $v = \dot{\gamma}(0)$ -val és $g = \exp t_0 X_\gamma$ -val (6.16)-ból azt kapjuk, hogy $L(\dot{\gamma}(t_0)) = L(\dot{\gamma}(0))$, azaz L konstans a geodetikusok mentén. $\square$

Az alábbi állítás a 6.1.4 Állítás átalánosítása:

6.2.5. Állítás ([8]). *Egy g.o. spray*

1. *pontosan akkor invariáns projektív Riemann-metrizálható, ha invariáns Riemann-metrizálható,*
2. *pontosan akkor invariáns projektív Finsler-metrizálható, ha invariáns Finsler-metrizálható.*

Bizonyítás. Legyen S egy g.o. spray. A 6.2.4 Lemma alapján, ha $L : TM \rightarrow \mathbb{R}$ egy G -invariáns Lagrange-függvény, akkor L konstans a geodetikusok, azaz S integrálgörbéi mentén. Ennélfogva $d_S L = 0$. Használva a 2.1.8 Következmenyt és alkalmazva a 6.1.4 Állításnál megismert gondolatmenetet, következik az állítás. $\square$

Mivel egy g.o. spray által meghatározott konnexió nem szükségképpen lineáris, így általában nem igaz, hogy a Finsler-metrizálhatóság maga után vonja a Riemann-metrizálhatóságot. Azonban, ha a g.o. spray kvadratikus, akkor a társított konnexió lineáris. Ezért Szabó-tétele miatt a következőt kapjuk:

6.2.6. Tétel ([8]). *Egy kvadratikus g.o. spray akkor és csakis akkor invariáns projektív Finsler-metrizálható, ha invariáns Riemann-metrizálható.*

Megjegyezzük, hogy A. Deng és Z. Hou a [16] cikkben már vizsgálták a homogén terek metrizálhatóságát: a szerzők akkor neveznek egy G/H struktúrát invariáns metrizálhatónak, ha létezik rajta invariáns metrika. A g.o. struktúrák invariáns metrizálhatósága esetén azonban nemcsak a G/H homogén tér, hanem a geodetikus struktúra is rögzített és olyan Riemann, illetve Finsler-metrikát keresünk, melynek geodetikusai az előre adott és rögzített görbesereg. Ez tehát [16]-hoz képest egy megszorítást jelent, így elképzelhető, hogy a G/H homogén tér invariáns metrizálható, de a rajta adott g.o. struktúra nem. Ezt illusztrálja a következő példa.

Példa. Tekintsük $\mathbb{R}^2$ síkot úgy, mint $\mathbb{R}^2 \cong G/H$ homogén teret, ahol $G = ASO(2)$ az euklideszi-csoport és $H = SO(2)$ a forgatások részcsoportha. Ekkor H az $o = (0, 0) \in \mathbb{R}^2$ pont stabilizátora. A mátrixreprezentációk a következők:

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t & x_1 \\ \sin t & \cos t & x_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid t, x_1, x_2 \in \mathbb{R} \right\}, \quad H = \left\{ \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t & 0 \\ \sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\},$$

a megfelelő Lie-algebrák pedig

$$\mathfrak{g} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & -\tau & a_1 \\ \tau & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mid \tau, a_1, a_2 \in \mathbb{R} \right\}, \quad \mathfrak{h} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & -\tau & 0 \\ \tau & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mid \tau \in \mathbb{R} \right\}.$$

Azt kapjuk, hogy $G/H \cong \mathbb{R}^2$ és a természetes projekció

$$\pi : G \longrightarrow G/H \cong \mathbb{R}^2, \quad \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t & x_1 \\ \sin t & \cos t & x_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\pi} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{pmatrix} \sim (x_1, x_2). \quad (6.17)$$

Használva a (6.17)-ben megjelenő „ $\sim$ ” azonosítást G hatását mint a $\lambda_g \hat{x} = g \cdot \hat{x}$ mátrixszorzást értelmezhetjük.

Tekintsünk most a $\mathbb{R}^2 \cong G/H$ homogén téren egy $\sigma : T_o \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathfrak{g}$ sima homogén liftet. A definíció értelmében ennek egy forgásinvariáns 1-homogén függvénynek kell lennie, így létezik egy olyan $\kappa \in \mathbb{R}$, amivel $\sigma = \sigma_\kappa$ ahol

$$\sigma_\kappa : T_o \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathfrak{g}, \quad (v_1, v_2) \xrightarrow{\sigma_\kappa} \begin{pmatrix} 0 & -\kappa \sqrt{v_1^2 + v_2^2} & v_1 \\ \kappa \sqrt{v_1^2 + v_2^2} & 0 & v_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (6.18)$$

Határozzuk meg a (6.18) sima homogén lift által származtatott geodetikus orbit struktúra geodetikusait: legyen $\gamma(t)$ geodetikus a $v \in T_o M$ irányban és $X = \sigma_\kappa(v)$ a v -nek megfelelő geodetikus vektor. Mátrixreprezentációt használva $\gamma(t) = e^{t\sigma_\kappa(v)} o$, és így

$$\ddot{\gamma}(t) = \sigma_\kappa(v) \sigma_\kappa(v) e^{t\sigma_\kappa(v)} o = \sigma_\kappa(v) \dot{\gamma}(t).$$

Mivel $v = \dot{\gamma}(t)$, továbbá az érintővektorok eltolásinvariánsak, így

$$\ddot{\gamma} = \sigma_\kappa(\dot{\gamma}) \dot{\gamma}. \quad (6.19)$$

Ennek alapján a (6.18) által származtatott geodetikusok egyenlete a következő:

$$\ddot{x}_1 = -\kappa \sqrt{\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2} \dot{x}_2, \quad (6.20a)$$

$$\ddot{x}_2 = \kappa \sqrt{\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2} \dot{x}_1, \quad (6.20b)$$

és a (6.20)-nak megfelelő g.o. spray:

$$S = y^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + y^2 \frac{\partial}{\partial x^2} + \kappa \sqrt{(y^1)^2 + (y^2)^2} \left(-y^2 \frac{\partial}{\partial y^1} + y^1 \frac{\partial}{\partial y^2} \right) \quad (6.21)$$

Vizsgáljuk meg a lehetséges eseteket.

1.) Ha $\kappa = 0$, akkor a görbületi tenzor zérus és a geodetikusok egyenesek. Ekkor a megfelelő g.o. struktúra természetesen metrizable: a standard euklideszi-metrika ($g_{ij} = \delta_{ij}$) metrizableja.

2.) Ha $\kappa \neq 0$, akkor a geodetikusok nem reverzibilisek (azaz $\gamma_{p,-v}(t) \neq \gamma_{p,v}(-t)$) és az R görbületi tenzor nemzérus:

$$R \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2} \right) = -\kappa^2 y_2 \frac{\partial}{\partial y_1} + \kappa^2 y_1 \frac{\partial}{\partial y_2}.$$

Használva a szakirodalomban található metrizableósági feltételeket megmutatható, hogy a (6.21) spray nem metrizable: a [7] 3.1-es tételének 3. feltétele nem teljesül.

Ez a példa illusztrálja a különbséget a G/H és a g.o. struktúrák metrizableósága között. Az $\mathbb{R}^2 = ASO(2)/SO(2)$ homogén tér invariáns metrizableó (például egy invariáns metrika rajta a standard euklideszi-metrika), azonban a (6.18) homogén lift által meghatározott g.o. struktúra a $\kappa \neq 0$ esetben nem metrizableó.

7. fejezet

Magyar nyelvű összefoglaló

Előzmények

Egy n -dimenziós M sokaság érintőnyalábját TM -mel, hasított érintőnyalábját pedig $\mathcal{T}M$ -mel jelöljük. A koordinátákat M -en (x^i) , az indukált koordinátákat TM -en (x^i, y^i) jelöli.

Sprayn a sokaság hasított érintőnyalábján adott olyan S vektormezőt értünk, amelyre fennállnak a következők: $JS = C$ és $[C, S] = S$, ahol

$$J = dx^i \otimes \frac{\partial}{\partial y^i}, \quad C = y^i \frac{\partial}{\partial y^i}$$

a vertikális endomorfizmus, illetve a Liouville-vektormező. Az S spray lokális koordinátarendszerbeli alakja:

$$S = y^i \frac{\partial}{\partial x^i} + f^i(x, y) \frac{\partial}{\partial y^i}.$$

Egy S spray geodetikusan olyan $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M$ reguláris görbét értünk, melyre teljesül, hogy $S \circ \dot{\gamma} = \ddot{\gamma}$. Tetszőleges S spray esetén $\Gamma = [J, S]$ egy vektorértékű 1-forma, amelyet a sprayhez társított konnexiónak nevezünk. Ekkor $\Gamma^2 = \text{Id}$, ezért Γ -nak két sajátértéke van: a 1 és a -1 . A $+1$ sajátértékhez tartozó sajátalteret a VTM vertikális résznyaláb, a -1 sajátértékhez tartozó sajátalteret pedig HTM -mel jelöljük, és horizontális résznyalábnak nevezzük. Ekkor $T_v TM = V_v TM \oplus H_v TM$, $v \in TM$. A Γ konnexióhoz társított $h : TTM \rightarrow HTM$ horizontális és a $v : TTM \rightarrow VTM$ vertikális projektorokat a következőképpen definiáljuk:

$$h := \frac{1}{2}(\text{Id} + \Gamma) \quad \text{és} \quad v := \frac{1}{2}(\text{Id} - \Gamma).$$

A nemlineáris konnexió görbülete az alábbi vektorértékű 2-forma:

$$R = \frac{1}{2}[h, h] \in \Psi^2(TM),$$

Jacobi-endomorfizmuson pedig a a következő vektorértékű, szemibázikus 1-formát értjük:

$$\Phi := i_S R$$

Az S sprayt laposnak nevezzük, ha a Jacobi-endomorfizmusa $\Phi = \lambda J$ alakú, ahol $\lambda \in C^\infty(\mathcal{T}M)$. Továbbá S izotróp, ha $\Phi = \lambda J - \alpha \otimes C$, ahol $\lambda \in C^\infty(\mathcal{T}M)$, α pedig egy szemibázikus 1-forma.

Formális integrálhatóság

Legyen (B, π, M) egy vektornyaláb az M sokaság fölött $\pi : B \rightarrow M$ projekcióval. Legyen s_1, s_2 két metszése a $\text{Sec}(B)$ nyalábnak. Azt mondjuk, hogy az s_1 és az s_2 ugyanazt a k -jetet határozza meg x -ben, ha Taylor-soraik k -adrendig megegyeznek x -ben. Az $s \in \text{Sec}(B)$ által meghatározott ekvivalencia osztályt jelölje $j_k(s)_x$, az összes k -jetek halmazát pedig $J_k(B)$.

Legyenek B_1 és B_2 vektornyalábok ugyanazon M sokaság fölött. Ekkor egy $\mathcal{P} : \text{Sec}(B_1) \rightarrow \text{Sec}(B_2)$ lineáris, k -adrendű differenciáloperátor azonosítható a $p_k(\mathcal{P}) : J_k(B_1) \rightarrow B_2$ leképezéssel. Egy $s \in \text{Sec}(B_1)$ metszés megoldása $\mathcal{P}$ -nek, ha $\mathcal{P}s \equiv 0$. Az l -ed rendű formális megoldások terét $x \in M$ -ben $\text{Sol}_{k+l,x}(\mathcal{P}) := \text{Ker } p_{k+l,x}(\mathcal{P})$ fogja jelölni.

A k -adrendű $\mathcal{P}$ differenciáloperátor formálisan integrálható, ha $\text{Sol}_l(\mathcal{P})$ vektornyaláb M felett minden $l \geq k$ -ra és a $\bar{\pi}_{l,x} : \text{Sol}_{l+1,x}(\mathcal{P}) \rightarrow \text{Sol}_{l,x}(\mathcal{P})_x$ leképezés szürjektív minden $l \geq k$ -ra.

Egy k -adrendű differenciáloperátor $\sigma_k(\mathcal{P}) : S^k T^*M \otimes B_1 \rightarrow B_2$ szimbólumát úgy kapjuk, hogy csak a k -adrendű tagokon vizsgáljuk a hatását. Ha $\mathcal{E} = \{e_1 \dots e_n\}$ a $T_x M$ egy bázisa, akkor legyen

$$\begin{aligned} g_{k,x}(\mathcal{P}) &= \text{Ker } \sigma_{k,x}(\mathcal{P}), \\ g_{k,x}(\mathcal{P})_{e_1 \dots e_j} &= \left\{ A \in g_{k,x}(\mathcal{P}) \mid i_{e_1} A = \dots = i_{e_j} A = 0 \right\}, \quad j = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Az $\mathcal{E}$ bázis kvázi-reguláris, ha teljesül a következő feltétel:

$$\dim g_{k+1,x}(\mathcal{P}) = \dim g_{k,x}(\mathcal{P}) + \sum_{j=1}^n \dim g_{k,x}(\mathcal{P})_{e_1 \dots e_j}.$$

Ha minden $x \in M$ -re létezik kvázi-reguláris bázisa $T_x M$ -nek, akkor a $\mathcal{P}$ szimbólumát involutivnak hívjuk.

A Rapcsák-rendszer formális integrálhatóságának tanulmányozásához a Cartan–Kähler-tételt és a Goldschmidt-tételt fogjuk használni.

1.2.3. Tétel (Cartan–Kähler). *Legyen $\mathcal{P}$ egy k -adrendű reguláris lineáris parciális differenciáloperátor. Ha a $\bar{\pi}_k : \text{Sol}_{k+1}(\mathcal{P}) \rightarrow \text{Sol}_k(\mathcal{P})$ leképezés szürjektív és a $\mathcal{P}$ szimbóluma involutív, akkor $\mathcal{P}$ formálisan integrálható.*

A Spencer–Goldschmidt-tétel megfogalmazásához tekintsük a következő Spencer-komplexust:

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow g_{m+k}(\mathcal{P}) &\xrightarrow{\delta_0^m} T^*M \otimes g_{m-1+k}(\mathcal{P}) \xrightarrow{\delta_1^m} \Lambda^2 T^*M \otimes g_{m-2+k}(\mathcal{P}) \xrightarrow{\delta_2^m} \\ &\xrightarrow{\delta_2^m} \Lambda^3 T^*M \otimes g_{m-3+k}(\mathcal{P}) \xrightarrow{\delta_3^m} \dots \xrightarrow{\delta_{n-1}^m} \Lambda^n T^*M \otimes g_{m-n+k}(\mathcal{P}) \rightarrow 0, \end{aligned}$$

ahol

$$\delta_i^m : \Lambda^i T^*M \otimes g_m(\mathcal{P}) \rightarrow \Lambda^{i+1} T^*M \otimes g_{m-1}(\mathcal{P}).$$

A $H^{m,i}$ Spencer-féle kohomológia csoportot a következőképpen definiáljuk:

$$H^{m,i} = \text{Ker } \delta_i^m / \text{Im } \delta_{i-1}^m.$$

Egy k -adrendű differenciáloperátor szimbóluma r -aciklikus, ha $H^{m,i} = 0$, $0 \leq i \leq r$, $\forall m \geq k$.

1.2.4. Tétel (Spencer–Goldschmidt). *Legyen $\mathcal{P}$ egy k -adrendű reguláris parciális differenciáloperátor. Ha a $\pi_k : \text{Sol}_{k+1}(\mathcal{P}) \rightarrow \text{Sol}_k(\mathcal{P})$ leképezés szürjektív és az operátor szimbóluma 2-aciklikus, akkor $\mathcal{P}$ formálisan integrálható.*

Metrizálhatóság és projektív metrizálhatóság

Egy M sokaságon adott Finsler-függvényen egy nemnegatív, folytonos $F : TM \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt értünk a sokaság TM érintőnyalábján, amely sima $\mathcal{TM}$ -en, fibrumonként elsőfokú pozitív homogén, továbbá a $(g_{ij}(x, y)) = \left(\frac{\partial^2 E}{\partial y^i \partial y^j} \right)$ mátrix minden $(x, y) \in \mathcal{TM}$ esetén pozitív definit, ahol $E = \frac{1}{2}F^2$ az energiafüggvény. Finsler sokaságon egy (M, F) párt értünk.

Ha (M, F) egy Finsler sokaság, akkor egyértelműen létezik egy S spray, az úgynevezett kanonikus spray, melyre $i_S dd_J E = -dE$, ahol i_S az S vektormezővel való helyettesítés operátora, d a külső deriválás és $d_J := [i_J, d]$.

Egy M sokaságon adott S spray Finsler- (illetve Riemann-) metrizálható, ha létezik olyan Finsler- (illetve Riemann-) metrika M -en, melynek kanonikus spraye S .

Azt mondjuk, hogy az S és $\tilde{S}$ sprayk projektív ekvivalensek, ha geodetikusaik egy irányításörző átparaméterezéstől eltekintve megegyeznek. Egy M sokaságon adott S spray projektív Finsler- (illetve Riemann) metrizálható, ha létezik egy olyan M -en adott Finsler- (illetve Riemann-) metrika, melynek kanonikus spraye projektív ekvivalens S -sel.

2.1.4. Tétel. *Legyen S egy spray az M sokaságon. Ekkor M akkor és csakis akkor projektív Finsler- (illetve Riemann-) metrizálható, ha létezik egy $F : TM \rightarrow \mathbb{R}$ Lagrange-függvény, melyhez asszociált $E = \frac{1}{2}F^2$ energiafüggvény 2-homogén (illetve kvadratikus), $\frac{\partial^2 E}{\partial y^i \partial y^j}$ pozitív definit $\mathcal{TM}$ -en és teljesül az $i_S dd_J F = 0$ egyenlet.*

Jelölje $\mathcal{P}_S F := i_S \Omega = 0$ a Rapcsák-egyenletet, ahol $\Omega = dd_J F$, és az F függvény egy 1-homogén függvény, azaz $\mathcal{P}_C F := \mathcal{L}_C F - F = 0$. Az $\{i_S \Omega = 0, \mathcal{L}_C F - F = 0\}$ rendszert Rapcsák-rendszernek nevezzük. Tehát a projektív metrizálhatóság problémája a $\mathcal{P}_1 = (\mathcal{P}_S, \mathcal{P}_C)$ parciális differenciáloperátor integrálhatóságának vizsgálatára vezethető vissza. Bizonyítjuk a következő állítást:

2.2.1. Állítás. *A $\mathcal{P}_1$ rendszer egy másodrendű $s = j_2(F)_x$ megoldása $x \in \mathcal{TM}$ -ben akkor és csak akkor emelhető fel harmadrendű megoldássá, ha az*

$$(i_\Gamma dd_J F)_x = 0,$$

integrálhatósági feltétel teljesül, ahol $\Gamma = [J, S]$ az S -hez társított nemlineáris konexió.

Továbbá a 2.2.3. Állításban igazoljuk, hogy a $\mathcal{P}_1 = (\mathcal{P}_S, \mathcal{P}_C)$ differenciáloperátor szimbóluma involutív. Így a Cartan–Kähler-tétel alapján következik, hogy az $i_\Gamma dd_J F = 0$ egyenlet teljesülése esetén $\mathcal{P}_1$ minden másodrendű megoldása felemelhető végtelen rendű megoldássá, azaz a differenciáloperátor formálisan integrálható.

2.2.4. Tétel. *Legyen S egy spray az M sokaságon. Az S -hez társított Rapcsák-rendszer akkor és csakis akkor formálisan integrálható, ha bármely $s = j_2(F)_x$ másodrendű megoldásra teljesül az $(i_\Gamma dd_J F)_x = 0$ egyenlet.*

A kibővített Rapcsák-rendszer

Ha $\dim M \geq 2$, akkor a $\mathcal{P}_1$ differenciáloperátor $\mathcal{P}_\Gamma F := i_\Gamma dd_J F = 0$ kompatibilitási feltétele nem teljesül minden másodrendű megoldásra, így nem minden másodrendű megoldás emelhető fel harmadrendűvé. Ez azt jelenti, hogy a Rapcsák rendszer ebben az esetben nem lesz formálisan integrálható. A kompatibilitási feltételt a rendszerhez adva redukálhatjuk a kezdeti értékek halmazát. Tehát a továbbiakban az integrálhatósági feltétellel bővített $(\mathcal{P}_S, \mathcal{P}_C, \mathcal{P}_\Gamma)$ rendszert vizsgáljuk. Igazoljuk, hogy

3.0.1. Lemma. *A $(\mathcal{P}_S, \mathcal{P}_C, \mathcal{P}_\Gamma)$ és a $\mathcal{P}_2 = (\mathcal{P}_\Gamma, \mathcal{P}_C)$ differenciáloperátor ekvivalens: a két rendszer megoldáshalmaza megegyezik.*

Így a $\mathcal{P}_S$ operátor el is hagyható a rendszerből, és elegendő a $\mathcal{P}_2 = (\mathcal{P}_\Gamma, \mathcal{P}_C)$ kibővített Rapcsák-rendszert vizsgálni. Bizonyítjuk az alábbi állítást:

3.1.1. Állítás. *A $\mathcal{P}_2 = (\mathcal{P}_\Gamma, \mathcal{P}_C)$ rendszer egy másodrendű $s = j_2(F)_x$ megoldása $x \in TM$ -ben akkor és csakis akkor emelhető fel harmadrendű megoldássá, ha az*

$$(i_R dd_J F)_x = 0,$$

integrálhatósági feltétel teljesül, ahol R a sprayhez társított nemlineáris konnexió görbülete.

Továbbá belátjuk, hogy a $\mathcal{P}_2$ operátor szimbóluma involutív. Mivel 2-dimenziós sokaságok, lapos és izotróp sprayk esetén az $i_R dd_J F = 0$ feltétel automatikusan teljesül, így ezekben az esetekben a $\mathcal{P}_2$ operátor formálisan integrálható:

3.2.2. Tétel. *Legyen S egy spray az M sokaságon. A kibővített Rapcsák-rendszer pontosan akkor formálisan integrálható, ha az alábbiak közül az egyik teljesül:*

1. $\dim M = 2$,
2. S lapos spray,
3. S izotróp spray.

3.2.3. Következmény. *Legyen S egy analitikus spray az M analitikus sokaságon. Ha M 2-dimenziós sokaság, S lapos spray vagy S izotróp görbületű spray, akkor S lokálisan projektív Finsler-metrizálható.*

A görbületi feltétellel kiegészített Rapcsák-rendszer

Nem izotróp sprayk esetén a kibővített Rapcsák-rendszer integrálhatósági feltételeként kapott $i_R\Omega = 0$ egyenlet nem szükségképpen teljesül minden kezdeti feltételre, tehát ekkor a kiterjesztett rendszer nem formálisan integrálható. Ezért a nem izotróp sprayk projektív metrizálhatóságának tanulmányozásához az $\mathcal{P}_R F = i_R\Omega = 0$ integrálhatósági feltételt is hozzá kell venni a vizsgált parciális differenciálegyenlet-rendszerhez, és a görbületi feltételeket is tartalmazó $(\mathcal{P}_\Gamma, \mathcal{P}_C, \mathcal{P}_R)$ differenciáloperátor integrálhatóságát kell vizsgálni. Viszont az $i_R\Omega = 0$ egyenletet helyettesíthető a következő ekvivalens feltétellel: $\mathcal{P}_\Phi F := i_\Phi dd_J F = 0$, ahol Φ a Jacobi-endomorfizmus. Ebben a fejezetben a $\mathcal{P}_3 := (\mathcal{P}_\Gamma, \mathcal{P}_C, \mathcal{P}_\Phi)$ rendszer integrálhatósági feltételeit tanulmányozzuk abban az esetben, amikor a Jacobi-endomorfizmus sajátfüggvényei páronként különböznek.

Az alábbi „adaptált” bázist fogjuk számításainkban használni:

$$\mathcal{B} := \{h_1, \dots, h_n, v_1, \dots, v_n\} \subset T_x TM, \quad (7.1)$$

ahol a h_i vektormezők a Jacobi-endomorfizmus horizontális sajátvektorai, $h_n = S$, valamint $Jh_i = v_i$, $i = 1, \dots, n$ (és így $v_n = C$).

4.1.2. Állítás. *A $\mathcal{P}_3$ differenciáloperátor egy $x \in TM$ -beli másodrendű $s = j_2(F)_x$ megoldása akkor és csak akkor emelhető fel harmadrendű megoldássá, ha az*

$$\begin{aligned} i_{[\Phi, \Phi]} \Omega_x &= 0, \\ \sum_{\substack{cycl \\ ijk}} (\Omega_x([v_i, h_j], h_k))_x &= 0, \end{aligned}$$

integrálhatósági feltételek teljesülnek.

A nem izotróp eset további vizsgálata igen bonyolulttá válik, mivel a $\mathcal{P}_3$ szimbóluma nem 2-aciklikus, és egy nehezen kezelhető harmadrendű integrálhatósági feltétel jelenik meg a rendszer prolongálása során. Pontosabban a következőt igazoljuk:

4.2.1. Állítás. *A $\mathcal{P}_3$ operátor szimbóluma nem 2-aciklikus: a Spencer-féle kohomológia csoportok közül a $H^{2,2}(\mathcal{P}_3)$ nemtriviális és*

$$\dim H^{2,2}(\mathcal{P}_3) = \frac{(n-1)(n-2)}{2}.$$

Ez azt jelenti, hogy a $\mathcal{P}_3$ prolongáltjának integrálhatósági feltételei nem $\mathcal{P}_3$ integrálhatósági feltételeinek prolongáltjai, hanem $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ extra harmadrendű obstrukció jelenik meg a harmadrendű megoldások negyedrendűvé emelésekor. Azt kapjuk, hogy

4.3.1. Állítás. *A $\mathcal{P}_3$ differenciáloperátor valamely $j_3(F)_x \in \text{Sol}_3(\mathcal{P}_3)$ harmadrendű megoldása pontosan akkor emelhető fel negyedrendű megoldássá, ha a másodrendű*

kompatibilitási feltételek első prolongáltjai zérusok, továbbá tetszőleges $X, Y \in T_x$ -re teljesül az alábbi egyenlet:

$$\begin{aligned} & [hX, \Phi X]\Omega(JY, Y) - [hY, \Phi Y]\Omega(X, JX) = \\ & + \Phi X \left(\sum_{cycl} \Omega([JY, hX], hY) \right) - hX \left(\sum_{cycl} \Omega([JY, \Phi X], hY) - \Omega([JY, \Phi Y], X) \right) \quad (7.3) \\ & - \Phi Y \left(\sum_{cycl} \Omega([JX, hX], hY) \right) + hY \left(\sum_{cycl} \Omega([JX, \Phi X], Y) - \Omega([JX, \Phi Y], X) \right). \end{aligned}$$

4.3.3. Következmény. A (7.1)-ben definiált adaptált bázisra vonatkozóan a (7.3) integrálhatósági feltétel az összegzési konvenciót nem alkalmazva az alábbi formába írható:

$$\beta_{ij}^i(\mathcal{L}_{v_i}a_{ii}) + \beta_{ij}^j(\mathcal{L}_{v_j}a_{jj}) + \gamma_{ij}^i(\mathcal{L}_{h_i}a_{ii}) + \gamma_{ij}^j(\mathcal{L}_{h_j}a_{jj}) + \sum_{k=1}^n \alpha_{ij}^k a_{kk} = 0,$$

ahol $1 \leq i, j \leq n$, $a_{ij} = \Omega(v_i, h_j)$ és az α_{ij}^k , β_{ij}^k és γ_{ij}^k függvények a spray ismeretében meghatározhatók.

A háromdimenziós eset

Legyen S egy nem izotróp spray egy háromdimenziós M sokaságon. Ekkor vizsgáljuk meg a $\mathcal{P}_3$ másodrendű integrálhatósági feltételeit. Az alábbi eredményeket kapjuk:

5.1.1. Állítás. Az $i_{[\Phi, \Phi]}\Omega = 0$ egyenlet azonosan teljesül.

5.1.2. Állítás. A $\sum_{ijk}^{cycl} (\Omega_x([v_i, h_j], h_k))_x = 0$ integrálhatósági feltétel ekvivalens az $i_{\Phi}\Omega = 0$ egyenlettel, ahol Φ' a Jacobi-endomorfizmus dinamikus kovariáns deriváltja.

5.2.1. Állítás. A $H^{m,2}$ Spencer-féle kohomológia csoport minden $m \geq 3$ esetén triviális, így $\mathcal{P}_3$ prolongáltjának szimbóluma 2-aciklikus.

5.2.2. Tétel. Legyen S egy nem izotróp spray egy 3-dimenziós M sokaságon, és tegyük fel, hogy az S Jacobi-endomorfizmusának sajátfüggvényei különböznek. Ekkor a $\mathcal{P}_3$ differenciáloperátor akkor és csakis akkor formálisan integrálható, ha

1. $\Phi' \in \text{Span}\{J, \Phi\}$.
2. A (7.3) kompatibilitási feltétel azonosan zérus.

5.2.3. Következmény. Legyen S egy nem izotróp analitikus spray egy 3-dimenziós analitikus sokaságon, továbbá tegyük fel, hogy az S Jacobi-endomorfizmusának sajátfüggvényei különböznek. Ha a magasabb rendű kompatibilitási feltétel reducibilis és a 5.2.2. Tétel feltételei a teljesülnek, akkor S lokálisan projektív metrizableható.

Reducibilis eset

Ebben az alfejezetben a $\mathcal{P}_4 = (\mathcal{P}_3, \mathcal{P}_\Psi)$ differenciáloperátor integrálhatósági feltételeit határozzuk meg, ahol

$$\mathcal{P}_\Psi F = \eta_1 \Omega(v_1, h_1) + \eta_2 \Omega(v_2, h_2),$$

ahol η_1 és η_2 a $\mathcal{TM}$ -en értelmezett S spray által meghatározott függvények. A $\mathcal{P}_\Psi$ másodrendű feltétel származhat abból, hogy $\Phi' \notin \text{Span}\{J, \Phi\}$, így $\mathcal{P}_3$ másodrendű kompatibilitási feltétele nem teljesül (és így a $\mathcal{P}_3$ operátort a szokásos módon bővíteni kell vele), valamint abból, hogy az extra harmadrendű integrálhatósági feltétel reducibilis. Megmutatjuk, hogy

5.3.4. Következmény. *A $\mathcal{P}_4$ rendszer teljes abban az értelemben, hogy*

1. *vagy az összes kompatibilitási feltétel teljesül, és ekkor a spray lokálisan projektív metrizálható,*
2. *vagy a spray nem projektív metrizálható.*

Meghatározzuk a $\mathcal{P}_4$ kompatibilitási feltételeit is. Ezek a következő alakba írhatóak (5.3.8. Következmény):

$$\begin{aligned} \tau_4^i(\nabla \mathcal{P}_4 F) &= \eta_1^i \Omega(v_1, h_1) + \eta_2^i \Omega(v_2, h_2) \quad i = 1, 2, \\ \tau_4^j(\nabla^2 \mathcal{P}_4 F) &= \eta_1^j \Omega(v_1, h_1) + \eta_2^j \Omega(v_2, h_2) \quad j = 3, 4, 5, 6. \end{aligned}$$

ahol az η_i^k -k függvények $\mathcal{TM}$ -en. Legyen

$$\Theta = \begin{pmatrix} \eta_1 & \eta_1^1 & \dots & \eta_1^6 \\ \eta_2 & \eta_2^1 & \dots & \eta_2^6 \end{pmatrix}.$$

5.3.9. Állítás. *A $\mathcal{P}_4$ operátor akkor és csak akkor formálisan integrálható, ha*

$$\text{rank } \Theta = 1.$$

5.3.10. Tétel. *Legyen S egy nem izotróp analitikus spray egy 3-dimenziós analitikus sokaságon, melynek Jacobi-endomorfizmusa generikus, azaz a sajátértékei minden $x \in \mathcal{TM}$ pontban különböznek.*

1. *Ha $\Phi' \in \text{Span}\{J, \Phi\}$ és a (7.3) kompatibilitási feltétel azonosan zérus, akkor az S spray projektív metrizálható.*
2. *Ha $\Phi' \notin \text{Span}\{J, \Phi\}$ vagy a (7.3) kompatibilitási feltétel reducibilis de nem azonosan zérus, akkor a spray akkor és csak akkor lokálisan projektív metrizálható, ha $\eta_1 \cdot \eta_2 < 0$ és $\text{rank } \Theta = 1$.*

Kanonikus sprayk invariáns projektív metrizálhatósága

Egy Lie-csoporton háromféle kanonikus konnexió adható meg: ha X, Y balinvariáns vektormezők, akkor ezeket a következőképpen definiálhatjuk:

$$\nabla_X^+ Y := [X, Y], \quad \nabla_X^- Y := 0, \quad \nabla_X^0 Y := \frac{1}{2}[X, Y].$$

Mindhárom konnexió lineáris, és mindhárom konnexiónak ugyanazok a geodetikusai: a Lie-csoport 1-paraméteres részcsoporthai és ezek eltoltjai. Ehhez a geodetikus struktúrához tartozó sprayt hívjuk a Lie-csoport kanonikus sprayének.

6.1.4. Állítás. *Egy Lie-csoport kanonikus spray-je*

1. *pontosan akkor invariáns projektív Riemann-metrizálható, ha invariáns Riemann-metrizálható,*
2. *pontosan akkor invariáns projektív Finsler-metrizálható, ha invariáns Finsler-metrizálható.*

6.1.5. Tétel. *Egy Lie-csoportoz tartozó kanonikus spray akkor és csakis akkor invariáns projektív Finsler-metrizálható, ha invariáns Riemann-metrizálható.*

6.1.6. Következmény. *Egy Lie-csoport kanonikus spraye akkor és csakis akkor invariáns Riemann-, Finsler-, projektív Riemann- illetve projektív Finsler-metrizálható, ha létezik egy $\langle \cdot, \cdot \rangle$ skaláris szorzat $\mathfrak{g}$ -n, melyre*

$$\langle [a, \alpha], \alpha \rangle = 0,$$

minden $a, \alpha \in \mathfrak{g}$ -re.

Egy invariáns geodetikus struktúrát az $M \cong G/H$ homogén téren geodetikus orbit struktúrának (vagy g.o. struktúrának) mondunk, ha az $o \in M$ origóból induló tetszőleges geodetikus homogén. Egy g.o. struktúrához tartozó sprayt geodetikus orbit spraynek (vagy röviden g.o. spraynek) nevezünk.

6.2.5. Állítás. *Egy g.o. spray*

1. *pontosan akkor invariáns projektív Riemann-metrizálható, ha invariáns Riemann-metrizálható,*
2. *pontosan akkor invariáns projektív Finsler-metrizálható, ha invariáns Finsler-metrizálható.*

6.2.6. Tétel. *Egy kvadratikus g.o. spray akkor és csakis akkor invariáns projektív Finsler-metrizálható, ha invariáns Riemann-metrizálható.*

8. fejezet

Summary

Preliminaries

Let M be an n -dimensional smooth manifold. TM will denote the tangent bundle of M , and $\mathcal{T}M = TM \setminus \{0\}$ the slit tangent bundle of M . We denote the local coordinates on M by (x^i) and the induced coordinates on TM by (x^i, y^i) .

A spray is a vector field S on $\mathcal{T}M$ satisfying the relations $JS = C$ and $[C, S] = S$, where

$$J = dx^i \otimes \frac{\partial}{\partial y^i}, \quad C = y^i \frac{\partial}{\partial y^i},$$

are the vertical endomorphism and the Liouville vector field. The coordinate representation of a spray S takes the form

$$S = y^i \frac{\partial}{\partial x^i} + f^i(x, y) \frac{\partial}{\partial y^i}.$$

The geodesics of a spray S are regular curves $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M$ such that $S \circ \dot{\gamma} = \ddot{\gamma}$.

To every spray S a connection $\Gamma := [J, S]$ can be associated. We have the property $\Gamma^2 = \text{Id}$, the identity map of TM . The eigenspace of Γ corresponding to the eigenvalue -1 is the *vertical space* VTM , and the eigenspace corresponding to $+1$ is called the *horizontal space*. For any $v \in \mathcal{T}M$ we have $T_v TM = V_v TM \oplus H_v TM$. The $h : TTM \rightarrow HTM$ horizontal and the $v : TTM \rightarrow VTM$ vertical projectors associated to the connection are

$$h := \frac{1}{2}(\text{Id} + \Gamma) \quad \text{and} \quad v := \frac{1}{2}(\text{Id} - \Gamma).$$

The curvature of the connection Γ is the Nijenhuis torsion of the associated horizontal projection h :

$$R = \frac{1}{2}[h, h] \in \Psi^2(TM).$$

The Jacobi endomorphism is the vector valued semi-basic 1-form:

$$\Phi := i_S R.$$

The spray S is called flat if its Jacobi endomorphism has the form $\Phi = \lambda J$ and isotropic if $\Phi = \lambda J - \alpha \otimes C$, where $\lambda \in C^\infty(\mathcal{T}M)$ and α is a semi-basic 1-form.

Formal integrability

Let (B, π, M) be a vector bundle over the manifold M with the projection $\pi : B \rightarrow M$. Let s_1, s_2 be two sections of the bundle $\text{Sec}(B)$. We say that s_1 and s_2 determine the same k^{th} order jet at x , if they are coincide at x up to order k . The class determined by the section $s \in \text{Sec}(B)$ at $x \in M$ is $j_k(s)_x$, and the set of all k -jets is denoted by $J_k(B)$.

Let B_1 and B_2 be vector bundles over the same base manifold M . Then a linear k^{th} order partial differential operator $\mathcal{P} : \text{Sec}(B_1) \rightarrow \text{Sec}(B_2)$ can be identified with the map $p_k(\mathcal{P}) : J_k(B_1) \rightarrow B_2$. An $s \in \text{Sec}(B_1)$ is a solution to $\mathcal{P}$ -if $\mathcal{P}s \equiv 0$. $\text{Sol}_{k+l,x}(\mathcal{P}) := \text{Ker } p_{k+l,x}(\mathcal{P})$ denotes the set of formal solutions of order l at $x \in M$.

The k^{th} order differential operator $\mathcal{P}$ is called formally integrable if $\text{Sol}_l(\mathcal{P})$ is a vector bundle over M for all $l \geq k$, and the map $\bar{\pi}_{l,x} : \text{Sol}_{l+1,x}(\mathcal{P}) \rightarrow \text{Sol}_{l,x}(\mathcal{P})$ is onto for every $\forall l \geq k$.

Let $\sigma_k(\mathcal{P})$ denote the symbol of $\mathcal{P}$ determined by the highest order terms of the operator. It can be interpreted as a map $\sigma_k(\mathcal{P}) : S^k T^*M \otimes B_1 \rightarrow B_2$. If $\mathcal{E} = \{e_1 \dots e_n\}$ a basis of $T_x M$, we set

$$\begin{aligned} g_{k,x}(\mathcal{P}) &= \text{Ker } \sigma_{k,x}(\mathcal{P}), \\ g_{k,x}(\mathcal{P})_{e_1 \dots e_j} &= \left\{ A \in g_{k,x}(\mathcal{P}) \mid i_{e_1} A = \dots = i_{e_j} A = 0 \right\}, \quad j = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

The basis $\mathcal{E}$ is called quasi-regular if one has

$$\dim g_{k+1,x}(\mathcal{P}) = \dim g_{k,x}(\mathcal{P}) + \sum_{j=1}^n \dim g_{k,x}(\mathcal{P})_{e_1 \dots e_j}.$$

The symbol of $\mathcal{P}$ is called involutive if there exists at any $x \in M$ a quasi-regular basis of $T_x M$.

1.2.3. Theorem (Cartan–Kähler). *Let $\mathcal{P}$ be a k^{th} order regular linear partial differential operator. If the map $\bar{\pi}_k : \text{Sol}_{k+1}(\mathcal{P}) \rightarrow \text{Sol}_k(\mathcal{P})$ is surjective and the symbol of $\mathcal{P}$ is involutive, then $\mathcal{P}$ is formally integrable.*

Let us consider the following Spencer complex

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow g_{m+k}(\mathcal{P}) &\xrightarrow{\delta_0^m} T^*M \otimes g_{m-1+k}(\mathcal{P}) \xrightarrow{\delta_1^m} \Lambda^2 T^*M \otimes g_{m-2+k}(\mathcal{P}) \xrightarrow{\delta_2^m} \\ &\xrightarrow{\delta_3^m} \Lambda^3 T^*M \otimes g_{m-3+k}(\mathcal{P}) \xrightarrow{\delta_4^m} \dots \xrightarrow{\delta_{n-1}^m} \Lambda^n T^*M \otimes g_{m-n+k}(\mathcal{P}) \rightarrow 0, \end{aligned}$$

where

$$\delta_i^m : \Lambda^i T^*M \otimes g_m(\mathcal{P}) \rightarrow \Lambda^{i+1} T^*M \otimes g_{m-1}(\mathcal{P}).$$

The $H^{m,i}$ Spencer cohomology group is defined as

$$H^{m,i} = \text{Ker } \delta_i^m / \text{Im } \delta_{i-1}^m.$$

The symbol of a k^{th} order linear differential operator is r -acyclic if $H^{m,i} = 0$, $0 \leq i \leq r$, $\forall m \geq k$.

1.2.4. Theorem (Spencer–Goldschmidt). *Let $\mathcal{P}$ be k^{th} order regular linear partial differential operator. If $\bar{\pi}_k : \text{Sol}_{k+1}(\mathcal{P}) \rightarrow \text{Sol}_k(\mathcal{P})$ is onto and the symbol of the operator is 2-acyclic then $\mathcal{P}$ is formally integrable.*

Metrizability and projective metrizability

A Finsler function on a manifold M is a continuous function $F: TM \rightarrow \mathbb{R}$, smooth and positive away from the zero section, positively homogeneous of degree 1, and the matrix $g_{ij} = \frac{\partial^2 E}{\partial y^i \partial y^j}$ is positive definite for all $(x, y) \in TM$, where $E = \frac{1}{2}F^2$ is the energy function. The pair (M, F) is called Finsler manifold.

If (M, F) is a Finsler-manifold, then there exists a unique spray S over TM (the so called canonical spray) such that $i_S dd_J E = -dE$, where i_S is the substitution operator, d is the exterior derivative and $d_J := [i_J, d] = i_J d - di_J$.

A spray S is called Finsler (resp. Riemann) metrizable if there exist a Finsler (resp. Riemann) metric F whose canonical spray is S .

Two sprays S and $\tilde{S}$ are called projective equivalent, if their geodesics coincide up to an orientation preserving reparametrization. A spray S is called projective Finsler (resp. Riemann) metrizable if there exist a Finsler (resp. Riemann) metric whose canonical spray is projectively equivalent to S .

2.1.4. Theorem. *A spray S is projective Finsler (resp. Riemann) metrizable if and only if there exists a Lagrange function $F: TM \rightarrow \mathbb{R}$, such that the energy function $E = \frac{1}{2}F^2$ is 2-homogeneous (resp. quadratic), $\frac{\partial^2 E}{\partial y^i \partial y^j}$ is positive definite on TM and the equation $i_S dd_J F = 0$ holds.*

Let us introduce the notation $\Omega = dd_J F$. According to Theorem 2.1.4, in order to solve the projective metrizability problem, we have to consider and investigate the integrability of the Rapcsák system: $\{i_S \Omega = 0, \mathcal{L}_C F - F = 0\}$. The equation $\mathcal{P}_S F := i_S \Omega = 0$ is called Rapcsák equation, $\mathcal{P}_C F := \mathcal{L}_C F - F = 0$ describes the 1-homogeneity condition. Therefore, the projective metrizability problem leads to the investigation of the partial differential operator $\mathcal{P}_1 = (\mathcal{P}_S, \mathcal{P}_C)$. We prove the following proposition:

2.2.1. Proposition. *A 2^{nd} order solution $s = j_2(F)_x$ at $x \in TM$ of the Rapcsák system can be lifted into a 3^{rd} order solution if, and only if, one has*

$$(i_\Gamma dd_J F)_x = 0, \quad (8.1)$$

where $\Gamma = [J, S]$ is the canonical nonlinear connection associated to S .

Furthermore, in Proposition 2.2.3, we show that the symbol of $\mathcal{P}_1 = (\mathcal{P}_S, \mathcal{P}_C)$ is involutive. Thus, by the Cartan–Kähler theorem, we can conclude that if equation $i_\Gamma dd_J F = 0$ is satisfied, then every second order solution of $\mathcal{P}_1$ can be prolonged into an infinite order solution that is the differential operator is formally integrable.

2.2.4. Theorem. *Let S be a spray on the manifold M . Then the Rapcsák system associated to S is formally integrable if and only if for every second order solution $s = j_2(F)_x$ the equation (8.1) is satisfied.*

Extended Rapcsák system

If $\dim M \geq 2$, then the compatibility condition $\mathcal{P}_\Gamma F := i_\Gamma dd_J F = 0$ of the differential operator $\mathcal{P}_1$ is not satisfied by all second order solutions and therefore the Rapcsák system is not formally integrable in this case. Indeed, the set of initial data is too large, therefore we have to reduce it by including its compatibility condition into the system. This leads us to consider the operator $(\mathcal{P}_S, \mathcal{P}_C, \mathcal{P}_\Gamma)$. We show, that

3.0.1. Lemma. *The differential operators $(\mathcal{P}_S, \mathcal{P}_C, \mathcal{P}_\Gamma)$ and $\mathcal{P}_2 = (\mathcal{P}_\Gamma, \mathcal{P}_C)$ are equivalent: the solution sets of the two system coincide.*

Therefore, we can drop the operator $\mathcal{P}_S$ from the system and consider the extended Rapcsák system simply as: $\mathcal{P}_2 = (\mathcal{P}_\Gamma, \mathcal{P}_C)$.

3.1.1. Proposition. *A 2^{nd} order solution $s = j_2(F)_x$ of the system $\mathcal{P}_2 = (\mathcal{P}_\Gamma, \mathcal{P}_C)$ at $x \in TM$ can be prolonged into a 3^{rd} order solution, if and only if*

$$(i_R dd_J F)_x = 0.$$

Furthermore, we show that the symbol of $\mathcal{P}_2$ is also involutive.

3.2.2. Theorem. *Let S be a spray on a manifold M . The extended Rapcsák system is formally integrable if and only if one of the following conditions are fulfilled:*

1. $\dim M = 2$;
2. the spray S is flat;
3. the spray S is of isotropic curvature.

3.2.3. Corollary. *Let S be an analytic spray on an analytic manifold M . If M is 2-dimensional manifold, the spray S is flat, or of isotropic curvature, then S is locally projective Finsler metrizable.*

Extended Rapcsák system with curvature condition

If the curvature of the spray S is not isotropic, then the integrability condition $i_R dd_J F = 0$ does not hold for every initial condition, therefore, the extended Rapcsák system is not formally integrable. Consequently, in order to investigate the projective metrizability in the non isotropic case we have to add the equation $\mathcal{P}_R F = i_R \Omega = 0$ to the system $(\mathcal{P}_\Gamma, \mathcal{P}_C)$ and discuss the integrability of the enlarged system $(\mathcal{P}_\Gamma, \mathcal{P}_C, \mathcal{P}_R)$. Since the curvature condition $i_R \Omega = 0$ is equivalent with the equation $\mathcal{P}_\Phi := i_\Phi \Omega = 0$, where Φ is the Jacobi endomorphism, we can replace the operator $\mathcal{P}_R$ with $\mathcal{P}_\Phi$ and investigate the integrability of the system represented by the operator $\mathcal{P}_3 := (\mathcal{P}_\Gamma, \mathcal{P}_C, \mathcal{P}_\Phi)$.

In this chapter we investigate the integrability of the system $\mathcal{P}_3$ when the Jacobi endomorphism has distinct eigenvalues. In that case we can consider an adapted base

$$\mathcal{B} := \{h_1, \dots, h_n, v_1, \dots, v_n\} \subset T_x TM, \quad (8.2)$$

where h_i are the horizontal eigenvectors of the Jacobi endomorphism Φ with $h_n := S$, and $Jh_i = v_i$, $i = 1, \dots, n$ (consequently, $v_n = C$).

4.1.2. Proposition. *A 2^{nd} order solution $s = j_2(F)_x$ of $\mathcal{P}_3$ at $x \in \mathcal{TM}$ can be lifted into a 3^{rd} order solution, if and only if*

$$i_{[\Phi, \Phi]} \Omega_x = 0, \quad (8.3)$$

$$\sum_{cycl}^{ijk} (\Omega_x([v_i, h_j], h_k))_x = 0. \quad (8.4)$$

The further analysis of $\mathcal{P}_3$ is complex, because the symbol of the operator is not 2-acyclic and a third order compatibility condition can arise. We proved the following

4.2.1. Proposition. *Let S be a non-isotropic spray on an n -dimensional manifold. Then the first nontrivial Spencer cohomology group is $H^{2,2}(P_3)$ and*

$$\dim H^{2,2}(P_3) = \frac{(n-1)(n-2)}{2}.$$

It follows that the integrability conditions of the prolonged system of $\mathcal{P}_3$ is not the prolongation of the integrability conditions of $\mathcal{P}_3$. More precisely, there are $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ extra obstructions to lift a third order solution into a fourth order solution. With further analysis, we obtained the

4.3.1. Proposition. *If a 3^{rd} order solution F of $\mathcal{P}_3$ at $x \in \mathcal{TM}$ can be lifted into a 4^{th} order solution, if and only if for any horizontal vector fields $X, Y \in HTM$ we have*

$$\begin{aligned} & [hX, \Phi X] \Omega(JY, Y) - [hY, \Phi Y] \Omega(X, JX) = \\ & + \Phi X \left(\sum_{cycl} \Omega([JY, hX], hY) \right) - hX \left(\sum_{cycl} \Omega([JY, \Phi X], hY) - \Omega([JY, \Phi Y], X) \right) \\ & - \Phi Y \left(\sum_{cycl} \Omega([JX, hX], hY) \right) + hY \left(\sum_{cycl} \Omega([JX, \Phi X], Y) - \Omega([JX, \Phi Y], X) \right). \end{aligned} \quad (8.5)$$

at $x \in \mathcal{TM}$.

4.3.3. Corollary. *In an adapted basis (8.2) the compatibility condition (8.5) can be expressed as*

$$\beta_{ij}^i(\mathcal{L}_{v_i} a_{ii}) + \beta_{ij}^j(\mathcal{L}_{v_j} a_{jj}) + \gamma_{ij}^i(\mathcal{L}_{h_i} a_{ii}) + \gamma_{ij}^j(\mathcal{L}_{h_j} a_{jj}) + \sum_{k=1}^n \alpha_{ij}^k a_{kk} = 0,$$

where $1 \leq i, j \leq n$, $a_{ij} = \Omega(v_i, h_j)$ and the summation convention is not applied. The α_{ij}^k , β_{ij}^k , γ_{ij}^k are functions in a neighborhood of $x \in \mathcal{TM}$ determined by the Lie bracket of the elements of the local basis (8.2).

The three dimensional case

Let S be a non-isotropic spray on a three dimensional manifold M . We obtain the following:

5.1.1. Proposition. *The compatibility condition (8.3) is identically satisfied.*

5.1.2. Proposition. *The integrability condition (8.4) can be written as $i_{\Phi'}\Omega = 0$, where Φ' is the dynamical covariant derivative of the Jacobi endomorphism.*

5.2.1. Proposition. *For any $m \geq 3$ the Spencer cohomology group $H^{m,2}$ is trivial, therefore the symbol of the prolongation of $\mathcal{P}_3$ is 2-acyclic.*

5.2.2. Theorem. *Let S be a non-isotropic spray on a 3-dimensional manifold with distinct Jacobi eigenvalues. Then the PDE operator $\mathcal{P}_3$ is formally integrable if and only if the following two conditions are satisfied:*

1. $\Phi' \in \text{Span}\{J, \Phi\}$,
2. *the compatibility condition (8.5) is satisfied.*

5.2.3. Corollary. *Let S be a non-isotropic analytic spray on a 3-dimensional analytic manifold with distinct Jacobi eigenvalues. If the higher order compatibility condition is reducible and the conditions 1 and 2 of Theorem 5.2.2 are satisfied, then S is locally projective metrizable.*

Reducible case

In this subsection we study the differential operator $\mathcal{P}_4 = (\mathcal{P}_3, \mathcal{P}_\Psi)$, where

$$\mathcal{P}_\Psi F = \eta_1 \Omega(v_1, h_1) + \eta_2 \Omega(v_2, h_2), \quad (8.6)$$

and η_1 and η_2 are given functions on $\mathcal{TM}$ determined by the spray S . The motivation of such system comes from the fact that in the case when the dynamical covariant derivative does not satisfies the condition $\Phi' \in \text{Span}\{J, \Phi\}$ or the condition (8.5) is reducible but not identically satisfied, then the extra integrability condition of $\mathcal{P}_3$ has the form (8.6). We have the following

5.2.3. Corollary. *The system $\mathcal{P}_4$ is complete in the sense that either all compatibility conditions are satisfied and the spray is projectively metrizable, or the spray is not projective metrizable.*

As 5.3.8 Corollary shows, the compatibility conditions of the operator $\mathcal{P}_4$ can be expressed as:

$$\begin{aligned}\tau_4^i(\nabla \mathcal{P}_4 F) &= \eta_1^i \Omega(v_1, h_1) + \eta_2^i \Omega(v_2, h_2) \quad i = 1, 2, \\ \tau_4^j(\nabla^2 \mathcal{P}_4 F) &= \eta_1^j \Omega(v_1, h_1) + \eta_2^j \Omega(v_2, h_2) \quad j = 3, 4, 5, 6.\end{aligned}$$

where η_i^k are functions on $\mathcal{TM}$. Let us consider the matrix

$$\Theta = \begin{pmatrix} \eta_1 & \eta_1^1 & \cdots & \eta_1^6 \\ \eta_2 & \eta_2^1 & \cdots & \eta_2^6 \end{pmatrix}.$$

Then we have

5.3.9. Proposition. *The operator $\mathcal{P}_4$ is formally integrable if and only if*

$$\text{rank } \Theta = 1.$$

5.3.10. Theorem. *Let S be a non-isotropic analytic spray on a 3-dimensional analytic manifold with distinct Jacobi eigenvalues.*

1. *If $\Phi' \in \text{Span}\{J, \Phi\}$ and the compatibility condition (8.5) is identically zero, then S is projectively metrizable*
2. *If $\Phi' \notin \text{Span}\{J, \Phi\}$ or the compatibility condition (8.5) is reducible but not identically zero, then the spray is locally projective metrizable if and only if $\eta_1 \cdot \eta_2 < 0$ and $\text{rank } \Theta = 1$.*

Invariant projective metrizability of canonical sprays

There exist three natural connections on a Lie group G : if X, Y are left invariant vector fields then we can define them in the following way:

$$\nabla_X^+ Y := [X, Y], \quad \nabla_X^- Y := 0, \quad \nabla_X^0 Y := \frac{1}{2}[X, Y].$$

All three connections are linear and have the same geodesics: the 1-dimensional subgroups of the Lie group G and their translated images. The spray associated to this geodesic structure is called the canonical spray of the Lie group. We have the following results:

6.1.4. Proposition. *The canonical spray S of a Lie group is*

1. *invariant projectively Riemann metrizable if and only if it is invariant Riemann metrizable,*
2. *invariant projectively Finsler metrizable if and only if it is invariant Finsler metrizable.*

Moreover, we have the following

6.1.5. Theorem. *The canonical spray of a Lie group is invariant projectively Finsler metrizable if and only if it is invariant Riemann metrizable.*

6.1.6. Corollary. *The canonical spray of a Lie group G is invariant (Riemann, Finsler, projectively Riemann or projectively Finsler) metrizable if and only if there exists a scalar product $\langle \cdot, \cdot \rangle$ on $\mathfrak{g}$ such that*

$$\langle [a, \alpha], \alpha \rangle = 0,$$

for every $a, \alpha \in \mathfrak{g}$.

The results on the canonical spray and canonical geodesic structure of Lie groups can be generalized to the geodesic orbit structure of homogeneous spaces. Indeed, an invariant geodesic structure on the homogeneous space $M \cong G/H$ is called geodesic orbit structure (g.o. structure), if any geodesic $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M$ emanated from the origin $o \in M$ is homogeneous, that is

$$\gamma(t) = \lambda_{\exp tX_\gamma} o = (\exp tX_\gamma) \cdot o,$$

with some $X_\gamma \in \mathfrak{g}$, where $\mathfrak{g}$ is the Lie algebra of G . A spray is called geodesic orbit spray (or simply g.o. spray), if it corresponds to a g.o. structure.

Concerning the geodesic orbit sprays we have the following results:

6.2.5. Proposition. *A g.o. spray is*

1. *invariant projectively Riemann metrizable if and only if it is invariant Riemann metrizable.*
2. *invariant projectively Finsler metrizable if and only if it is invariant Finsler metrizable.*

6.2.6. Theorem. *A quadratic g.o. spray is invariant projectively Finsler metrizable if and only if it is invariant Riemann metrizable.*

Jelölések

C ,	Liouville-vektormező, 7
$\mathcal{C}_n^k$,	n elem k -adosztályú kombinációi, 21
$\mathcal{C}_n^{k,i}$,	n elem k -adosztályú ismétléses kombinációi, 21
$g_k(\mathcal{P})$,	$g_k(\mathcal{P}) = \text{Ker } \sigma_k(\mathcal{P})$, 11
h ,	horizontális projektor, 8
J ,	vertikális endomorfizmus, 7
R ,	görbület, 8
S ,	spray, 7
Γ ,	(nemlineáris) konnexió, 8
$\sigma_k(\mathcal{P})$,	$\mathcal{P}$ szimbóluma, 11
Φ ,	Jacobi-endomorfizmus, 8
Φ' ,	A Φ dinamikus kovariáns deriváltja, 46
Ω ,	$\Omega = dd_J F$, 28

Irodalomjegyzék

- [1] J.C. Álvarez Paiva: *Symplectic geometry and Hilbert's fourth problem*, J. Differential Geom., **69** (2005), 353–378.
- [2] S. Bácsó, Z. Szilasi: *On the projective theory of sprays*, Acta Math. Acad. Paed. Nyíregyháziensis, **26** (2010), 171–207.
- [3] I. Bucataru, M.F. Dahl: *Semi basic 1-forms and Helmholtz conditions for the inverse problem of the calculus of variations*, J. Geom. Mech., **1** (2009), 159–180.
- [4] I. Bucataru, Z. Muzsnay: *Projective Metrizability and Formal Integrability*, SIG-MA Symmetry Integrability Geom. Methods Appl., **7** (2011), 114.
- [5] I. Bucataru, Z. Muzsnay: *Projective and Finsler metrizability: parameterization-rigidity of the geodesics*, Internat. J. Math., **23** (2012), 1250099.
- [6] I. Bucataru, Z. Muzsnay: *Sprays metrizable by Finsler functions of constant flag curvature*, Differential Geometry and its Applications, **31** (2013), 405–415.
- [7] I. Bucataru, Z. Muzsnay: *Metrizable isotropic second-order differential equations and Hilbert's fourth problem*, Journal of the Australian Mathematical Society, **97** (2014), 27–47.
- [8] I. Bucataru, T. Milkovszki, Z. Muzsnay: *Invariant metrizability and projective metrizability on Lie groups and homogeneous spaces*, Mediterranean Journal of Mathematics, **13** (2016), Issue 6, 4567–4580.
- [9] R.L. Bryant, S.S. Chern, R.B. Gardner, H.L. Goldschmidt, P.A. Griffiths: *Exterior Differential Systems*, Springer, 1991.
- [10] R.L. Bryant, M. Dunajski, M. Eastwood: *Metrisability of two dimensional projective structures*, J. Diff. Geom., **83** (2009), 465–500.
- [11] M. Crampin: *On the inverse problem for sprays*, Publ. Math. Debrecen, **70** (2007), 319–335.
- [12] M. Crampin: *Isotropic and R-flat sprays*, Houston J. Math., **33** (2007), 451–459.
- [13] M. Crampin: *Some remarks on the Finslerian version of Hilbert's fourth problem*, Houston J. Math., **37** (2011), 369–391.

- [14] M. Crampin, T. Mestdag, D.J. Saunders: *The multiplier approach to the projective Finsler metrizable problem*, Differential Geom. Appl., **30** (2012), 604–621.
- [15] M. Crampin, T. Mestdag, D.J. Saunders: *Hilbert forms for a Finsler metrizable projective class of sprays*, Differential Geom. Appl., **31** (2013), 63–79.
- [16] S. Deng, Z. Hou: *Invariant Finsler metrics on homogeneous manifolds*, J. Phys. A: Math. Gen., **37** (2004), 8245–8253.
- [17] T. Do, G.E. Prince: *New progress in the inverse problem in the calculus of variations*, Differential Geom. Appl., **45** (2016), 148–179.
- [18] M. Eastwood, V.S. Matveev: *Metric connections in projective differential geometry*, The IMA Volumes in Math. and its Appl., **144** (2008), 339–350.
- [19] A. Frölicher, A. Nijenhuis: *Theory of vector-valued differential forms*, Proc. Kon. Ned. Akad. A., **59** (1956), 338–359.
- [20] G.W. Gibbons, C.M. Warnick, M.C. Werner: *Light-bending in Schwarzschild-de-Sitter: projective geometry of the optical metric*, Class. Quant. Grav., **25** (245009), 2008.
- [21] G.W. Gibbons and C.M. Warnick: *Dark energy and projective symmetry*, arXiv:1003.3845v1, 2010.
- [22] R. Ghanam, F. Hindeleh, G. Thompson: *Bi-invariant and noninvariant metrics on Lie groups*, J. Math. Phys., **48** (2007), 112902
- [23] J. Grifone, Z. Muzsnay: *Variational Principles For Second-Order Differential Equations*, World Scientific, 2000.
- [24] G. Hamel: *Über die Geometrien, in denen die Geraden die Kürzesten sind*, Math. Ann., **57** (1903), 231–264.
- [25] J. Klein, A. Voutier: *Formes extérieures génératrices de sprays*, Ann. Inst. Fourier, **18** (1968), 241–260.
- [26] R. Liouville: *Sur les invariants de certaines équations différentielles et sur leurs applications*, Journal de l'École Polytechnique, **59** (1889), 7–76.
- [27] J.M. Lee: *Introduction to Smooth Manifolds* (2nd edition), Springer, 2013.
- [28] M. Matsumoto: *Every path space of dimension two is projectively related to a Finsler space*, Open Systems and Information Dynamics, **3** (1995), 291–303.
- [29] V. Matveev: *Geodesically equivalent metrics in general relativity*, J. Geom. Phys., **62** (2012), 675–691.
- [30] V. Matveev: *On projective equivalence and pointwise projective relation of Randers metrics*, Internat. J. Math., **23** (9) (2012), 1250093.

- [31] V. Matveev: *On projective equivalence and pointwise projective relation of Randers metrics*, Internat. J. Math., **23** (2012), 1250093.
- [32] V. Matveev, V. Kiosak: *There exist no 4-dimensional geodesically equivalent metrics with the same stress-energy tensor*, J. Geom. Phys., **78** (2014) 1–11.
- [33] T. Mestdag: *Finsler geodesics of Lagrangian systems through Routh reduction*, Mediterranean Journal of Mathematics, **13** (2016), Issue 2, 825–839.
- [34] T. Milkovszki, Z. Muzsnay: *On the projective Finsler metrizability and the integrability of Rapcsák equation*, Czechoslovak Mathematical Journal, **67** (2017), no. 2, 469–495.
- [35] T. Milkovszki, Z. Muzsnay: *About the projective Finsler metrizability: First steps in the non-isotropic case*, <https://arxiv.org/abs/1705.07271>, benyújtva.
- [36] Z. Muzsnay: *An invariant variational principle for canonical flows on Lie groups*, J. Math. Phys., **46** (2005), 112902, 11 pp.
- [37] Z. Muzsnay, P.T. Nagy: *Invariant Shen connections and geodesic orbit spaces*, Period. Math. Hungar., **51** (2005), no. 1, 37–51.,
- [38] Z. Muzsnay, G. Thompson: *Inverse problem of the calculus of variations on Lie groups*, Differential Geom. Appl., **23** (2005), 257–281.
- [39] Z. Muzsnay: *The Euler–Lagrange PDE and Finsler metrizability*, Houston J. Math., **32** (2006), 79–98.
- [40] P. Nurowski: *Is Dark Energy Meaningless?*, arXiv:1003.1503, 2010.
- [41] A. Rapcsák: *Über die bahntreuen Abbildungen metrischer Räume*, Publ. Math. Debrecen, **8** (1961), 285–290.
- [42] A. Rapcsák: *Die Bestimmung der Grundfunktionen projektiv-ebener metrischer Räume*, Publ. Math. Debrecen, **9** (1962), 164–167.
- [43] W. Sarlet, G. Thompson, G.E. Prince: *The inverse problem of the calculus of variations: the use of geometrical calculus in Douglas’s analysis*, Trans. Amer. Math. Soc., **354** (2002), 2897–2919.
- [44] Z. Szabó: *Positive definite Berwald spaces*, Tensor, New Ser., **35** (1981), 25–39.
- [45] J. Szilasi, Sz. Vattamány: *Erratum to: On the projective geometry of sprays*, Differential Geom. Appl., **13** (2000).
- [46] J. Szilasi, Sz. Vattamány: *On the Finsler-metrizabilities of spray manifolds*, Period. Math. Hungar., **44** (2002), 81–100.
- [47] J. Szilasi: *A setting for spray and Finsler geometry. In Handbook of Finsler geometry*, Vol. 1, 2, pages 1183–1426. Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, (2003).

- [48] J. Szilasi: *Calculus along the tangent bundle projection and projective metrizability*, Differential geometry and its applications, World Scientific, (2008), 527–546.
- [49] J. Szilasi, R.L. Lovas, D.Cs. Kertész: *Connections, sprays and Finsler structures*, World Scientific, 2014.
- [50] Z. Shen: *Differential Geometry of Spray and Finsler Spaces*, Kluwer, 2001.
- [51] Z. Shen: *Lectures on Finsler Geometry*, World Scientific Publishing Co., Singapore (2001).
- [52] Cs. Vincze: *A new proof of Szabó's theorem on the riemann metrizability of Berwald manifolds*, Acta Math. Acad. Paedag. Nyíregyh., **21** (2005), 199–204.