



Matematikai modellezés és számítógépes szimuláció

A problémakör néhány didaktikai aspektusa

Doktori (PhD) értekezés

Geda Gábor

Témavezető: Dr. Holovács József

Debreceni Egyetem

Természettudományi Doktori Tanács
Matematika- és Számítástudományok
Doktori Iskola

Debrecen, 2009

Ezen értekezést a Debreceni Egyetem Természettudományi Doktori Tanács Matematika– és Számítástudományok Doktori Iskola Informatika programja keretében készítettem a Debreceni Egyetem természettudományi doktori (PhD) fokozatának elnyerése céljából.

Debrecen, 2009. június 29.

.....
Geda Gábor
jelölt

Tanúsítom, hogy Geda Gábor doktorjelölt 2007 – 2009. között a fent megnevezett Doktori Iskola Informatika programjának keretében irányításommal végezte munkáját. Az értekezésben foglalt eredményekhez a jelölt önálló alkotó tevékenységével meghatározóan hozzájárult. Az értekezés elfogadását javasolom.

Debrecen, 2009. június 29.

.....
Dr. Holovács József
témavezető

Matematikai modellezés és számítógépes szimuláció

A problémakör néhány didaktikai aspektusa

értekezés a doktori (Ph.D.) fokozat megszerzése érdekében a matematika– és
számítástudomány tudományágban

Írta: Geda Gábor, okleveles matematika–kémia–számítástechnika szakos tanár.

Készült a Debreceni Egyetem, Matematika– és Számítástudományok Doktori
Iskolája (Informatika programja) keretében.

Témavezető: Dr. Holovács József

A doktori szigorlati bizottság:

elnök: Dr.
tagok: Dr.
Dr.

A doktori szigorlat időpontja: 2008. január 18.

Az értekezés bírálói:

Dr.
Dr.
Dr.

A bírálóbizottság:

elnök: Dr.
tagok: Dr.
Dr.
Dr.
Dr.

Az értekezés védésének időpontja: 200... .. .

Tartalom

1. Bevezetés	1
1.1. Helyzetelemzés	4
1.2. Irodalmi előzmények, a dolgozat célkitűzései	6
2. Modellezés	9
2.1. A mérés másként	12
2.1.1. Mérés a felvételekről közvetlenül leolvasott értékek alapján	13
2.1.2. Mérés a felvételek számítógépes kiértékelésével	15
2.2. Jelenségtől a modellig	21
2.2.1. A jelenség leírása	22
2.2.2. A matematikai modell	23
2.2.3. A jelenség kémiai magyarázata	24
2.2.4. A modell általánosítása	24
2.2.5. Az általánosított modell kísérleti igazolása	26
2.2.6. További általánosítások	27
3. Matematikai háttér	33
3.1. Néhány differenciálegyenletekkel kapcsolatos fogalom	34
3.2. Kezdetiérték-probléma	39
4. Egy modell gyakorlati alkalmazási lehetőségei	43
4.1. Exponenciális növekedés (Malthus-modell)	44
4.2. Logisztikus növekedés (Verhulst-féle modell)	46

4.3. Populációk közötti interakció	51
4.3.1. Zsákmány-ragadozó modell	54
4.3.2. Két faj versengése	55
4.4. Harci modellek	59
4.5. Rezgőmozgás	63
5. Néhány közelítő megoldás geometriai szemléltetése	67
5.1. Iránymező	67
5.2. Egylépéses módszerek	69
5.2.1. Explicit Euler-módszer	70
5.2.2. Javított Euler-módszer	71
5.2.3. Runge–Kutta-módszer	73
5.3. Közelítő módszerek hibája	74
5.4. Prediktor-korrektor-módszerek	80
6. További geometriai megfontolások	85
6.1. OCM, avagy közelítés érintő körrel	86
6.1.1. Az OCM általánosítása egyenletrendszerekre	87
6.1.2. Az OCM hibája	91
6.2. Az OCM mint korrektor-módszer	92
7. Módszertani kiegészítések	97
7.1. Modellezési és szimulációs példák	98
7.1.1. További jelenségek	98
7.1.2. Egy modell számítógépes realizációi	103
7.2. Az OCM alkalmazása a szemléltetésben	106
Összefoglalás	109
Summary	112
Jelölések	115
Irodalmi hivatkozások	116

1. Fejezet

Bevezetés

*„Modellen olyan matematikai konstrukciót értünk,
amely – bizonyos szóbeli értelmezést hozzáadva – leírja
a megfigyelt jelenséget.
Az ilyen matematikai konstrukciót kizárólag és
pontosan az igazolja, hogy működik.”*

NEUMANN JÁNOS

Világszerte tapasztalható jelenség a természettudományok iránti tanulói érdeklődés csökkenése. A legutóbbi PISA¹ felmérés összehasonlításokat tesz lehetővé a magyar természettudományos nevelés eredményességével kapcsolatban [40]. A felmérés szerint 15 éves tanulóink teljesítménye nem tért el szignifikánsan az átlagtól. Ez további visszaesést jelent a korábbi nemzetközi összehasonlító vizsgálatokkal összevetve (például az 1995-ös TIMSS² vizsgálat), így a fentiek ismeretében a hazai természettudományos nevelést már nem tekinthetjük kiemelkedőnek. Elsősorban a fizika, kémia és a matematika népszerűségének csökkenése figyelhető meg az oktatás különböző szintjein. Ennek következtében már az érdeklődő, tehetséges diákok közül is egyre kevesebben választanak természettudományos vagy műszaki pályát. A legnagyobb mértékben talán a természettudományos tanárszakok iránti érdeklődés hiánya ad okot aggodalomra. Vannak felsőoktatási intézmények, amelyek kellő számú jelentkező hiányában esetleg nem, vagy csak

¹Programme for International Student Assessment

²Trends in International Mathematics and Science Study

nagyon alacsony létszámmal tudtak évfolyamokat indítani az említett szakokon. A már napjainkban is tapasztalható színvonalbeli változások hosszú távon a közoktatás jövőjét fenyegetik. Gondoljuk csak el – figyelembe véve a közoktatás társadalmi szerepét – milyen jövőt vetít elénk a jelenlegi helyzet? Képzeljünk el egy olyan világot, amelyet minden részletében egyre jobban átszö a technika, egyre nagyobb szerephez jutnak a különböző technikai eszközök a mindennapokban, ugyanakkor a lakói nem ismerik a legalapvetőbb szabályokat, amelyek szerint működnek.

Már a 80-as évek végén, kémiatanári konferenciákon tapasztalt kollégák számoltak be arról a szélsőségről, hogy míg hazai és nemzetközi versenyeken tanulóink szép sikereket érnek el, ugyanakkor az oktatás mindennapjaiban milyen tanulói ellenállásba ütközik a szaktanár. Az oktatás egészére vonatkozóan a helyzet ennél lényegesen szomorúbb, hiszen a kémia sajnos nincs egyedül ezen a téren. Azóta számtalan felmérés igazolta, hogy a kémián kívül a matematika és a fizika sem tartoznak a tanulók kedvencei közé. Mi okozhatja a problémát, hiszen a természet megismerésének igénye az ember veleszületett tulajdonsága, és ez a legfőbb mozgatója az emberiség fejlődésének?

Nem nehéz látni az oktatás különböző szintjei és a társadalom egésze közötti összefüggéseket. Ha a közoktatásból valamiféle kontraszelekció eredményeként motiválatlan fiatalok kerülnek a felsőoktatási intézményekbe, akikből aztán a jövő mérnökei, pedagógusai lesznek, akkor a műszaki fejlődés lelassulása és a társadalom egyféle kiszolgáltatottsága várható. Ennek az esetleges önmagát erősítő folyamatnak beláthatatlan következményei lehetnek. Természetesen nem csak a műszaki elit gyengülése jelenti az egyedüli veszélyt. Az egyén is hatalmas károkat okozhat önmagának és a természeti környezetnek csupán a tájékozatlanságából adódó felelőtlen magatartásával. Hogyan is tudnának megfelelni például a környezetvédelem *„Gondolkodj globálisan, cselekedj lokálisan!”* elvének a természet törvényeit csak felületesen ismerő, ezért tetteik következményeit hibásan megítélő emberek? Ebből a tájékozatlanságból fakad az egyre gyakrabban hallható vélekedés a globális felmelegedéssel kapcsolatban: *„Engem nem zavar, ha néhány fokkal melegebb lesz...”. Mintha azt gondolhatnánk, hogy a környezeti változások ellenére mindennapjainkban semmiféle változás nem következik be, csak kisebb lesz a gázszámlánk.*

Az alábbi hasonlat talán segít rávilágítani a lehetséges okokra, és esetleg sejtethet lehetséges megoldásokat is³.

³A probléma okai természetesen nagyon szövevényesek, hiszen több évtizedes folyamat eredményeként jött létre a jelenlegi állapot. Ez a dolgozat – sem terjedelménél, sem pedig témájánál fogva – nem vállalkozhat a jelenség esetleges társadalmi, gazdasági hátterének vizsgálatára.

A problémával kapcsolatban némi analógiát mutat a sport helyzete hazánkban. Élsportolóink kiváló teljesítményt nyújtanak, ellenben a tömegsport terén volna még mit tennünk. Erre persze lehet az a mentségünk, hogy nem születet mindenki olyan adottságokkal, mint úszóink, vízilabdázóink és még sorolhatnánk. Említhetnénk azonban néhány olyan sportágat is, amelyben nem „szoktunk” jó eredményeket elérni. Ezeknek egyszerűen nincsen hagyománya, olyan a szélesebb körű megítélésük, hogy az nem teszi lehetővé a népszerűvé válásukat. Hasonló módon viszonyulunk a tantárgyakhoz is. Köztudott, hogy például Japánban, ahol nagy az elismertsége a matematikai tudásnak, a gyerekek nagyobb sikereket érnek el matematikatanulásban és problémamegoldásban. Ezt feltehetően a nagyobb társadalmi elfogadottság és az ennek megfelelő magasabb iskolai óraszám magyarázza. Joggal feltételezhetjük, hogy a hazai érettségi vizsgák kötelező tárgyainak rendszere a tudományterületek társadalmi megítélését tükrözi, ami sajnos a természettudományos és a humán tárgyak vonatkozásában elég aránytalan képet mutat.

Természetesen Japánban sem szeretne mindenki matematikus lenni. Ha ez így volna, pontosan olyan szélsőséget jelentene, mint a tárgy elutasítása azok részéről, akik nem tudnak kimagasló teljesítményt nyújtani ezen a területen. Az a tény, hogy ez nálunk tömeges jelenség, arra figyelmeztet, hogy foglalkozni kell a problémával, de a példa azt is jelzi, hogy nem törvényszerű, hogy így legyen. Az előző sporttal vont párhuzam, és az azzal kapcsolatos tapasztalatok alapján mondhatjuk, hogy szinte mindenkit meg lehet tanítani úszni, de csak kevesekből válik élsportoló. Akik mégsem tudják ilyen szinten művelni ezt a sportot (vagy mást), azok is szeretik és tudják, hogy az épülésüket szolgálja.

Azt kellene tehát elérni a természettudományos tárgyak oktatásában is, hogy az egyén elfogadja, hogy személyisége ezekkel az ismeretekkel csak teljesebbé válik.

Az elért eredmények, sikerek a tehetségen túl a motiváltságtól és a ráfordított erőforrásoktól is függ. *David C. Geary (1994)* kategóriái szerint a matematikai képességek biológiailag első- és másodrendűek lehetnek. Elmélete alapján a biológiailag másodrendű matematikai képességeket a szülőktől vagy a hivatalos iskolai oktatás rendszerében tanult ismeretek, készségek és az ezekhez köthető számolási tevékenységek határozzák meg. Szerinte, a matematikai teljesítmények terén tapasztalható nemzetközi különbségeket elsősorban a biológiailag másodrendű képességek okozzák.

A probléma oka nyilvánvalóan magában az oktatás gyakorlatában is lehet, hiszen a kezdetben a természet minden jelensége iránt érdeklődő, nyitott kisiskolások jelentős részéből az említett területekkel szemben közömbös érettségizők válnak.

1.1. Helyzetelemzés

Az Eötvös Loránd Fizikai Társulat munkabizottsága 1995-ben vizsgálta a felsőfokú fizikaoktatás helyzetét. Ennek következményeként a következő évben végzett általános iskolai felmérés kimutatta, hogy a fizika és a kémia a legkevésbé kedvelt tantárgyak a 7. és a 8. osztályokban [14].

Egy a pályaválasztást motiváló tényezőket elemző, a József Attila Tudományegyetemen készült felmérés [20] alapján ebben a vonatkozásban szintén kedvezőtlen képet alkothatunk. A szerzők egy másik felmérés [27] során a fizikával kapcsolatos attitűdöt vizsgálták, hasonló tapasztalatokkal. Az említettekén túl, jónéhány további tanulmány jutott hasonló eredményre. Mintegy ezek összefoglalásaként kimutatták [8], hogy az általános iskolában az átlagosnál jobban romlik a fizika, a matematika és a kémia tárgyak megítélése. Ugyanakkor a középiskola évei során ez a kedvezőtlen helyzet a többi tárgyhoz képest már jelentősen nem változik. A tanulmányok szerint az attitűdöt legjelentősebben a tanár személye és az osztályzatok befolyásolják, és azt elsősorban a tanulók által végzett kísérletek javíthatják. A tárgyak kedvezőtlen tanulói megítélését erősíti, hogy a jelenlegi tananyag sok esetben nem kötődik kellő módon a mindennapi élethez.

A személyes, gyakorlathoz köthető tapasztalatok arányának növelése mellett szükségesnek tűnik a tananyag tartalmának korszerűsítése is. A jelenlegi állapot – melyre a tanulók többségének motivátlansága jellemző – kialakulásának talán az lehet az egyik oka, hogy az utóbbi 20-30 év technikai fejlődését nem követék megfelelően a tananyag tartalmi változásai. Lényegében kisebb változtatásoktól, belső átcsoportosításoktól eltekintve ezek a tárgyak tartalmi és módszertani szempontból is a két világháború közötti állapotokat tükrözik. Az eltelt csaknem 100 év alatt a mindennapjainkat is jelentősen megváltoztató technikai fejlődésen túl jelentősen megváltozott az iskolázottsággal kapcsolatos egyéni és társadalmi igény is. Joggal érheti kritika a tananyagot abból a szempontból, hogy nem fordít kellő figyelmet az aktuális problémákra. Érthető módon motivátlansághoz vezet, hogy szinte kizárólag csak a klasszikus, lineáris összefüggésekkel leírható területek szerepelnek mindhárom tárgy esetében. Ezt általában a magasabb matematikai ismeretek hiányával indokolják, amelyekkel ezek a jelenségek leírhatók volnának.

A másik jelentős problémát az okozza, hogy időközben az érettségi vizsgával záruló képzések tömegessé válását nem követte az oktatás ezekhez alkalmazkodó reformja, hiszen ma többé-kevésbé azokat az ismereteket követeljük meg – a tananyag szerint – az adott korosztály 70-80%-ától, amelyeket a XX. század első felében a 10%-a számára írtak elő. Ismert statisztikai tapasztalatok alapján nyilvánvaló, hogy az adott populáció „legjobb” 10%-ához képest a hasonló elvek alapján

kiválasztott „legjobb” 80% nagyobb differenciáltságot mutat. Ezt a problémát a mai magyar oktatási rendszer sem regionálisan, vagy országosan, sem az egyes iskolák szintjén nem képes hatékonyan kezelni.

A vázolt két jelenség ellentétes megoldásokat sugall. Ha szeretnénk eleget tenni annak, hogy korszerű ismereteket közvetítsen az iskola, amely lehetővé teszi a tanuló számára, hogy jobban el tudjon igazodni akár a hétköznapi világában, akkor kétség kívül új elemeket kell bevennünk a tananyagba, esetleg olyanokat, amelyeknek a matematikai megalapozottsága nem megoldott az adott szinten. Ha azonban figyelembe vesszük a középiskolások korábbinál differenciáltabb összetételét és azt szeretnénk elérni, hogy eredményesebben eleget tudjanak tenni a követelményeknek, akkor ésszerűnek tűnik a tananyag mennyiségének és színvonalának csökkentése. Talán ennek a kettősségnek az eredményeként került sor olyan változtatásokra, amelyeknek eredményeként a differenciál- és integrálszámítás témaköre a 80-as évekre kikerült a középiskolás matematika tananyagból, ugyanakkor az általános iskolai kémia tananyag talán túlságosan is elszakadt a gyakorlattól például az anyagszerkezet tárgyalásmódjának köszönhetően a világszerte elterjedt tartalomközpontú tantervfejlesztési irányzatnak megfelelően. Általában sokat rontott a helyzeten (ahogyan ezt az említett tanulmányok is megállapították), hogy drasztikusan csökkent a tanulói, de a demonstrációs kísérletek száma is, aminek következtében szintén a közvetlen tapasztalatszerzés útján átadott ismeretek aránya csökkent.

A fentiek tartalmi és módszertani változtatások szükségességét vetik föl elsősorban a 7. és 8. osztály tananyagával kapcsolatban. A tanulók passzív befogadó szerepét nagyobb mértékben föl kellene váltani a korosztály számára jobban elfogadható, az új ismeretek megszerzésében nagyobb hatékonyságot mutató konstruktivizmusnak.

A természettudományok oktatásának átformálása csak minden részletében körültekintő, összehangolt változásokon keresztül valósítható meg. A tényfeltárás mellett fontos tényező az oktatással szemben megfogalmazott hivatalos társadalmi elvárás vizsgálata is.

A Nemzeti alaptanterv [26] ma az egyik alapidokumentuma a magyar közoktatásnak. „A Nat az iskolában elsajátítandó műveltség alapjait határozza meg, megteremtve ezzel a közoktatás egységét.” Nem az a célja, hogy konkrét útmutatást adjon, de fontos irányadó szerepe van módszertani és tartalmi szempontból egyaránt. Ugyanakkor, ebből kifolyólag nem motivál kellőképpen a szükséges változtatásokra, illetve nyitva hagyja „változatlanság” lehetőségét is. Ebből a szempontból jelent pozitív irányú elmozdulást a 2007-es módosítás, amely a kompeten-

cia alapú oktatás szemléletével elősegíti a gyakorlati ismeretek arányának kedvező változását.

Az átfogó reformok hiánya miatt a tanulók idővel valóban túlterheltté váltak, mivel bizonyos új elemekkel (például a fizika és a kémia esetében az anyagszerkezet [10]) bővült a tananyag. A túlterheltség érzetét tovább erősítette a középfokú oktatás már említett tömegessé válása. A Nat – jellegénél fogva – nem alkalmas a tananyag pontos behatárolására, ugyanakkor a probléma kezelése érdekében az órakereteket jelentősen megváltoztatták. A szaktanárok általában nincsenek főkészítve, és talán motiválva sem olyan változtatásokra, amelyekkel a tananyagot a csökkentett óraszámokhoz igazíthatnák tartalmilag és módszertanilag. A felmérések alapján úgy érzékelik, hogy változatlan tematikát kell teljesíteniük rövidebb idő alatt [34]. Ezek a problémák fölvetik a tanárképzés és a továbbképzések tartalmi átalakításának szükségességét is.

1.2. Irodalmi előzmények, a dolgozat célkitűzései

Abból a feltevésből indulunk ki, hogy új, hatékonyabb tárgyalásmód alkalmazása esetén az ismeretanyag csökkentése nem feltétlen szükséges olyan mértékben, ahogyan azt a tanulói túlterhelés csökkentése érdekében gondolnánk változatlan módszerek mellett. A dolgozat célja tehát, annak vizsgálata, hogyan lehetne a számítógépek és más informatikai eszközök bevonásával hatékonyabbá, élményszerűbbé tenni az oktatást az átadó és a befogadó számára egyaránt az oktatás különböző szintjein. Ennek szellemében a dolgozat sok esetben részesíti előnyben a hétköznapi szemléletességet a matematikai precizitással szemben.

Napjainkra az iskolák számítógépekkel és más informatikai eszközökkel való ellátottsága általánossá vált, és ezeknek az eszközöknek a teljesítménye is elérte azt a szintet, hogy az oktatás egyes területein alapozni lehet rájuk. Felmérések bizonyítják [34], hogy ennek ellenére a szaktanárok körében a számítógépek használata mégsem általános a fizika, kémia és matematika tárgyak óráin. A tapasztalataink azt mutatják, hogy bizonyos esetekben, megfelelő alkalmazásuk a korábbiaknál hatékonyabb megoldást jelenthetne néhány demonstrációs, vagy akár tanulói mérőkísérlet során. Segítségükkel olyan méréseket is demonstrálhatunk, amelyek korábban nem, vagy csak időigényes előkészítő munkával voltak lehetségesek. Ilyen alternatívákat mutat be a 2.1. bekezdés az [50], [53], [54] és a [64] alapján. Törekedtünk arra, hogy ezeket az eredményeket a szaktanárok is megismerjék [62], [63].

Az emberiség fejlődése során a felhalmozódott ismeretek rendszerezése újabb és újabb tudományterület létrejöttét generálta. A XX. század elejére, a több évszázados formálódás után az ókori görög szemlélethez képest a tudományterületek jóval szerteágazóbb képet mutattak, és specializációjuk révén egyre inkább eltávolodtak, elszigetelődtek egymástól. Később azonban olyan kapcsolatokat fedeztek föl az egymástól távoli területek kutatási eredményei között is, amelyek megszüntették az addigi szigorú határokat. Ezeknek az egyetemes összefüggéseknek a fölismerése alapozta meg a rendszerelmélet létrejöttét. Ez a tudományterület a problémák specialitásaitól elvonatkoztatva a matematika eszközeivel teszi lehetővé azok általánosabb módon való leírását és megoldását. Ezt egyszerű példákon keresztül a 2.2. bekezdés, a 4. fejezet és a 7.1.1. bekezdés mutatja be különböző megközelítésekben a [44] és a [45] alapján. Az oktatás szempontjából a különféle jelenségek matematikai eszközökkel történő leírásának, azaz a matematikai modellezésnek a számítógépes szimuláció szempontjából van jelentősége. Ez azért is fontos, mert a mérés mellett napjainkra a megismerés fontos módszerévé vált, ezért a természettudományok oktatásában is helye van.

A differenciálegyenletek a rendszerelmélet nagyon hasznos eszközének bizonyultak. Bár az utóbbi években ez a terület helyenként a felsőoktatásban is kevesebb hangsúlyt kap, a témával kapcsolatos fogalmi és alkalmazás szintű ismereteket fontosnak tartjuk. Ezt a meggyőződést erősíti meg a [15], amelyben a szerzők a témát az elmélet oldaláról közelítik meg, de nagy figyelmet fordítanak a szemléletességre. A dolgozatban a kapcsolódó elmélet a 3. fejezetben kapott helyet. Itt csak a későbbiekhez föltétlen szükséges, legfontosabb fogalmakról és összefüggésekről olvashatunk, hiszen a differenciálegyenletek elméletéről számtalan kitűnő hazai és külföldi irodalom érhető el.

Célszerűnek tűnik annak vizsgálata, hogy a számítástechnika eszközeinek segítségével, milyen lehetőségek kínálkoznak a jelenségek szemléletre épülő, rendszer-szemponthú megközelítésére. Ennek érdekében a 4. fejezetben megadunk egy közönséges, nem lineáris, konstansgyűthetős differenciálegyenlet-rendszert, amely az egyűthetők és a kezdeti feltételek választásától függően alkalmas lehet az egyszerű exponenciális növekedési folyamatoktól kezdve a periodikus jelenségeken át, olyan különféle változások és jelenségek leírására, amelyek az oktatás szempontjából is jelentősek lehetnek. Ennek alapjául elsősorban [45] szolgált. A 7.1.1. bekezdést tekinthetjük az előzők kiegészítéseként is, mivel az itt megfogalmazott problémák – megfelelő paraméterezés esetén – szintén a 4. fejezetben megadott modellel írhatók le.

A most említett modell megadásával az volt a cél, hogy az alapul szolgáljon különböző rendszerek számítógépes szimulációjához. A belőle megfelelő paraméte-

rezések útján előálló konkrét modellek egységes módon való kezelhetőségét a szimuláció során a differenciálegyenletek közelítő módszereivel oldhatjuk meg. Az 5. fejezet néhány ilyen egyszerű módszer algoritmusát értelmezi a geometria szemléletességével. A fejezet előzményéül a [47], az [51] és az [52] szolgálnak.

A 6. fejezet egy új közelítő módszert mutat be a [46] és a [47] alapján. Segítségével más megközelítésben értelmezhetjük a differenciálegyenletek numerikus módszereit.

Az egyes résztémák tárgyalásmódja a dolgozat sokszínűsége miatt sem lehet teljes. Így további kutatás tárgyát képezik majd a sztochasztikus szimulációkkal kapcsolatos lehetőségek. Ennek kezdetét jelzik a [49] és a [48]. Ezen túlmenően a dolgozatban tárgyalt OCM-módszer matematikai vizsgálata sem tekinthető teljesnek, magában hordozza a további kutatások lehetőségét.

2. Fejezet

Modellezés

*„Jósolni nagyon nehéz,
különösen, ha a jövőről van szó.”*

NIELS BOHR

A tudományos megismerést – melynek mára egyik eszközévé vált a modellezés – a minden részletre kiterjedő alaposság és a tervszerűség jellemzi. Ebben – meglehetősen hosszú idő óta – a legkülönbözőbb tudományterületeken a mérésnek jelentős szerepe van. Hamar fölismerték, hogy ez az a módszer, amivel biztosítani lehet a tudományos munkában elengedhetetlenül szükséges tárgyilagosságot. Bár az egyes tudományágak mérési gyakorlata, módszerei egyre specializálódtak, ugyanakkor az is megfigyelhető, hogy a mérési eredmények feldolgozásához egyre általánosabban alkalmazható elméleti háttér áll rendelkezésre.

Ha feltételezzük, hogy a világ jelenségei mögött matematikai eszközökkel leírható összefüggések, törvények állnak és azok megismerhetők, akkor megfigyelések és mérések útján gyűjtött adatokból a törvények kikövetkeztethetők. Erre a matematikában egyre kifinomultabb eszközök alakultak ki. Az egyik, talán legalapvetőbb ilyen fogalom a mérési eredmények közötti hozzárendelési szabály megadására alkalmas függvény. Az elvonatkoztatásnak ezen a szintjén szükségtelen a vizsgálat tárgyának pontos ismerete. Sőt – ahogyan ezt látni fogjuk – két, jellegében merőben különböző dolog matematikai leírása is lehet teljesen azonos. Hasonló felismerések és ezeknek az egységbe foglalása vezetett a XX. század első

felében a mára a matematikai modellalkotás eszközéül szolgáló rendszerelmélet¹ kialakulásához.

A rendszerelmélet fogalmi nem csak a különböző tudományok szóhasználatában lelhetők fel, hanem a köznyelvben is. Ilyen maga a rendszer szó is. Különböző szókapcsolatokban (iskolarendszer, rendszerváltás, követelmény rendszer, stb.) napjainkra használata megszokottá vált.

A rendszer működése változói segítségével írható le. A bemenő és kimenő változók megadásával tudjuk a rendszert úgy megadni, hogy ne legyen független a külvilágtól. Ha a rendszer megadásakor nem adunk meg sem bemenő sem kimenő változót, akkor a modell létrehozásakor elhanyagoljuk a rendszer külvilággal való kapcsolatát. Ekkor úgyanevezett zárt rendszert hozunk létre. Nyílt rendszerről akkor beszélünk, ha bemenő és/vagy kimenő változója van. Ha a vizsgálat tárgya nem csak kezdő és/vagy végállapottal jellemezhető, hanem van értelme beszélni a rendszer jellemzőinek változásáról is valamely mennyiség(ek) függvényében, akkor ezt az állapotváltozók megadásával vehetjük figyelembe a modellezés során.

A rendszerelmélet fogalmi tehát lehetővé teszi a merőben különböző jelenségek egységes módon való leírását. Minden rendszer leírása során megadjuk annak elemeit és azok egymással való kapcsolatait. Természetesen az adott rendszer minden eleme is tekinthető egy (al)rendszernek, ahogy az éppen szóban forgó rendszer is lehet eleme egy „nagyobb” rendszernek.

A szeparáció és a szelekció azok a műveletek, amelyek révén a valós rendszerből „kiemelhetjük” a modellezés szempontjából fontosnak tartott elemeket és kiválasztjuk a közöttük működő kölcsönhatások közül azokat, amelyek lényegesek a modellezési cél szempontjából.

A tudomány története során számtalanszor megfigyelhető volt, hogy a mérési módszerek egyre pontosabbá válásával – azaz egyre több és egyre pontosabb adatok birtokában – „csiszolódtak”, váltak pontosabbá a jelenségeket leíró elméletek is. Elegendő, ha csak az anyag szerkezetével kapcsolatos elképzelésekre gondolunk. A Démokritosz-féle oszthatatlan atomoktól Thomson „mazsolás kalácsán”, Rutherford bolygórendszer-szerű és Bohr atommodelljén keresztül a kvantummechanikához vezetett az út. De hasonló változások figyelhetők meg azoknak az elméleteknek a fejlődésében is, amelyek nem az anyag szerkezetét, hanem az abból fölépülő anyagi halmazok tulajdonságait igyekeztek magyarázni. A kezdetben laposnak gondolt Föld, a Föld körül keringő Nap, a Nap körül óramű pontossággal mozgó égitestek mind fontos állomásai voltak az egyre pontosabbá váló tudományos megismerésnek.

¹Az elmélet kidolgozása Ludvig von Bertalanffy magyar származású osztrák biológus munkásságával kezdődött.

Az itt felsorolt elméletek bizonyos értelemben egymásra épülnek. Az újabbak létrejöttét a korábbiak hiányosságai tették szükségessé. Ezekre a hiányosságokra mindig egy-egy olyan jelenség hívta föl a figyelmet, amit a korábbi modellel már nem lehetett magyarázni².

Az induktív modellalkotás esetében jellemző módon a már fölhalmozott tapasztalatokra, adatokra építve áll elő egy új hipotézis.

Az induktív út esetében a tapasztalat szolgáltat alapot az elmélethez, a dedukció esetében pedig a tapasztalat segít igazolni vagy cáfolni az elméletet. Ennek megfelelően tehát a tudományos elméletek indukciós és dedukciós lépések egymásutánjaként finomodnak. A modellalkotás tisztán induktív vagy deduktív módjai határesetnek tekinthetők. A gyakorlatban megvalósuló modellezési folyamatokban általában mindkettő jelen van.

A fejezet nagyon egyszerű példái megkísérelnek rávilágítani arra, hogy a minket körül vevő világban zajló változások – függetlenül attól, hogy azok a természet vagy a társadalom jelenségei – leírhatók a matematika eszközeivel. Valójában ez a matematika feladata. A fejezet azt is sejtetni engedi, hogy ezekkel az eszközökkel lehetőségünk van a múltbéli történések alapján a jövőre vonatkozólag bizonyos következtetések levonására. Ez csak úgy lehetséges, ha megfigyeléseken, kísérleteken alapuló mérésekre támaszkodva először meghatározzuk a vizsgált rendszer fejlődéstörvényét.

Sok esetben a felismert törvények összefüggéseket fogalmaznak meg a rendszer állapotának leírására alkalmas mennyiségek időbeli és/vagy térbeli változására vonatkozóan, azaz a rendszer pillanatnyi állapotában, annak függvényében milyen irányú és nagyságú változások következnek be. Az ilyen rendszerek absztrakt matematikai modellje a differenciálegyenlet.

Az előzőekből következik, hogy ezeknek az egyenleteknek – az algebrai egyenletekkel szemben – a megoldásai (ha léteznek) olyan függvények, amelyek egy adott időponthoz vagy térbeli helyhez hozzárendelik a rendszer állapotváltozóinak megfelelő értékeit.

²Például a katódsugárcső működését, hogy a légüres térben elektronok áramlása indul meg a katód felületéről, jól lehetett magyarázni pozitív töltésű, nagy méretű atomokkal, amelyekben elszórtan – mint a kalácsban a mazsolaszemek – negatív elektronok helyezkednek el szabálytalanul. Ugyanakkor az ilyen felépítésű atomokból álló anyagon még részben sem hatolhatna át nagy tömegű, pozitív töltésű részecskéket tartalmazó α -sugárzás, ahogyan azt Rutherford tapasztalta ismert kísérlete során.

2.1. A mérés másként

A modellalkotás célja az adott rendszer vagy jelenség megismerése. Ehhez azonban kellő mennyiségű információt szükséges összegyűjtenünk a modellezni kívánt jelenségről illetve rendszerről, amit annak megfigyelése során megfelelő pontosságú méréssel tehetünk meg.

Kézenfekvő a számítógépek bevonása a mérési eredmények kiértékelésén túl az adatok összegyűjtésébe is, ami a korábbinál jóval gyorsabb és pontosabb méréseket tesz lehetővé. Ez olyan eszközöket feltételez, amelyek a mérési eredményeket digitális formában képesek eljuttatni a számítógépbe. Az alkalmazott szenzorok paraméterei is jelentősen befolyásolják a mérés pontosságát. Elsősorban demonstrációs céllal kínál aránylag könnyen elérhető lehetőséget a Lego cég által forgalmazott NXT robot. (A gyári csomagnak része egy ultrahangszensor, amivel 2 méteren belül megközelítőleg 1 cm pontossággal lehet távolságot mérni.)

A vizsgált rendszerek, jelenségek esetében gyakran jellemzőiknek időbeli változását szeretnénk tanulmányozni; erre utal különböző tudományok nyelvhasználata is, amikor bizonyos mennyiségek megnevezése előtt a *pillanatnyi* jelzőt látjuk, mint például a fizika területén a *pillanatnyi sebesség*, *pillanatnyi gyorsulás*, *pillanatnyi szögsebesség*, *pillanatnyi feszültség*, kémiában *pillanatnyi reakciósebesség*, *pillanatnyi koncentráció*, *pillanatnyi konformáció*, *pillanatnyi polarizáció* esetében. De szoktunk egyszerűen a rendszer pillanatnyi állapotáról is beszélni, ami kifejezi a különféle, az állapotának leírására alkalmas jellemzők, állapotváltozók értékének időbeli változását. Ilyen vizsgálatok során tehát fontos az idő megfelelő pontossággal való mérése. Ezt általában annál nehezebb megvalósítani, minél gyorsabb a változás, amit a mérés során szeretnénk nyomon követni. A technika fejlődésével egyre bővül az ilyen céllal fölhasználható eszközrendszer.

Mivel minden szabályos, periodikus „jelenség” alkalmas lehet az idő mérésére, ezért talán nem meglepő, hogy bizonyos esetekben a mozgóképek rögzítése is megfelel ebből a célból. Ez természetesen attól is függ, hogy milyen a képrögzítés sebessége a változás sebességéhez képest. A képrögzítés sebessége a mozgóképek egy igen fontos jellemzője. Azt fejezi ki, hogy a felvétel során másodpercenként hány állóképet rögzítenek. Például az általánosan ismert 25 frame per másodperces³ rögzítési sebesség a mi szempontunkból azt jelenti, hogy 0,04 másodpercenként nyerünk új információt a vizsgált rendszer állapotáról. (Más megközelítésben pedig azt mondhatjuk, hogy természetes módon hozzárendeljük a mérés időpontját az egyes képkockákhoz a felvétel készítése során.) Ez a megoldás sok olyan esetben megfelelő lehet, amikor a változásokat szemmel nem tudjuk követni. (A 25 fps-

³angol rövidítése: fps=frames per second

os rögzítési sebesség, mint szabvány az emberi szem tehetetlenségének figyelembevételével jött létre.) Jegyezzük meg, hogy napjainkban már nem elérhetetlenek akár 80 fps-os sebességű kamerák sem, amelyek természetesen még gyorsabb változások megfigyelését és a hozzájuk kapcsolódó méréseket tesznek lehetővé.

A rögzített állóképek sorozata, amelyek a mozgóképet alkotják, különböző módon dolgozható föl a mérés szempontjából. Ha nem kell túlságosan sok leolvasást végezni, és a jelenség természetéből adódóan megoldható, hogy a képeken megfelelő markereket helyezünk el (akár utólag, a mozgókép szerkesztése során), akkor a leolvasások a felvétel kockázásával akár manuálisan is elvégezhetők. Ez a megoldás elsősorban olyankor vehető számításba, amikor az elmozdulás mérése a cél, vagy a mérés erre visszavezethető. (Sok esetben a kísérlet megfelelő tervezésével ez megvalósítható, hiszen a digitális kijelzésű mérőműszerek elterjedése előtti szerkezetek pontosan ilyen elven működtek.)

Egy másik számba vehető megoldás, amely lényegesen több lehetőséget hordoz magában, az egymást követő képkockák számítógépes kiértékelésében rejlik. Természetesen itt előtérbe kerül az optika okozta torzulás korrekciójának kérdése, hiszen ez a tényező jelentősen befolyásolhatja a mérés pontosságát.

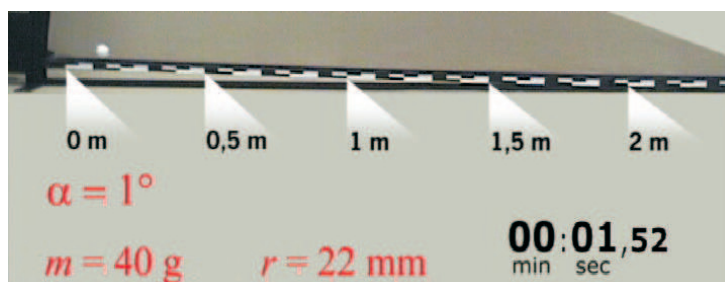
2.1.1. Mérés a felvételekről közvetlenül leolvasott értékek alapján

Az első példában egy a fizika területéről jól ismert mozgásformához, a lejtőn legördülő golyó egyenesvonalú egyenletesen gyorsuló mozgásához kapcsolódó kísérleti mérést vizsgálunk meg. A test egy állítható hajlásszögű pályán mozog, amelyet megfelelő beosztású skálával láttunk el (2.1. ábra). Ez teszi lehetővé a megtett út leolvasását. Az egyszerűbb leolvasást segíti a képek utólagos, a felvétel szerkesztése során történő fölíratozása. Ekkor kerültek a képekre az adott kísérlet további jellemzői is (lejtő hajlásszöge, golyó tömege és sugara), valamint az egyes képkockákhoz rendelhető, a golyó mozgásának kezdete óta eltelt idő is.

A különböző hajlásszögekkel készült felvételek „kockázásával” leolvashatók az azonos nagyságú utak megtételéhez szükséges részhidok. Ezeket az adatokat a 2.1. táblázat tartalmazza. A leolvasott értékeket és a mérési pontokhoz illesztett parabola-ívet a 2.2. ábra mutatja be.

Jelölje α a lejtő hajlásszögét G pedig a mozgó test súlyát. A test egyenletesen gyorsuló mozgást végez egy a lejtő irányában ható állandó F erő hatására, amely arányos a test súlyával és $\sin \alpha$ -val:

$$F = G \sin \alpha.$$



2.1. ábra.
1°-os lejtőn legördülő golyó.

s [m]	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
$t_{(\alpha=1^\circ)}$ [s]	0,00	1,28	1,85	2,30	2,66	2,98	3,26	3,54	3,78	4,02
$t_{(\alpha=2^\circ)}$ [s]	0,00	0,88	1,24	1,56	1,80	2,02	2,22	2,40	2,56	2,72
$t_{(\alpha=3^\circ)}$ [s]	0,00	0,72	1,04	1,27	1,48	1,65	1,80	1,97	2,09	2,22
$t_{(\alpha=4^\circ)}$ [s]	0,00	0,58	0,86	1,07	1,24	1,39	1,52	1,66	1,78	1,89
$t_{(\alpha=5^\circ)}$ [s]	0,00	0,52	0,76	0,96	1,12	1,25	1,38	1,49	1,60	1,70

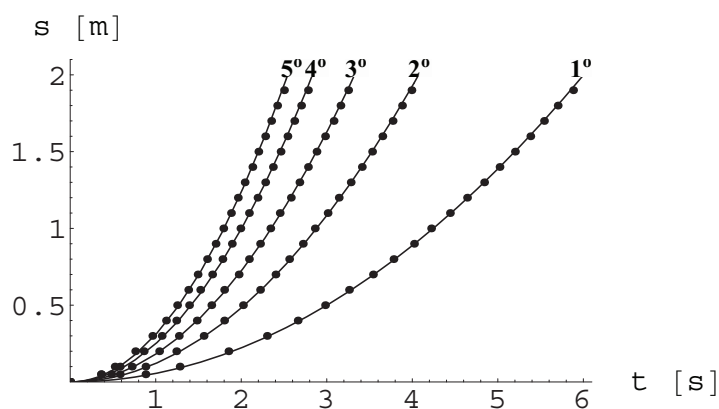
s [m]	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9
$t_{(\alpha=1^\circ)}$ [s]	4,22	4,44	4,64	4,84	5,02	5,20	5,38	5,54	5,70	5,88
$t_{(\alpha=2^\circ)}$ [s]	2,86	3,01	3,14	3,28	3,41	3,53	3,65	3,77	3,88	3,99
$t_{(\alpha=3^\circ)}$ [s]	2,34	2,45	2,58	2,68	2,78	2,88	2,98	3,08	3,16	3,25
$t_{(\alpha=4^\circ)}$ [s]	1,99	2,09	2,19	2,28	2,37	2,46	2,54	2,62	2,70	2,78
$t_{(\alpha=5^\circ)}$ [s]	1,79	1,88	1,96	2,04	2,13	2,20	2,28	2,35	2,42	2,50

2.1. táblázat.

A lejtőn legördülő golyó számára azonos utak megtételéhez szükséges idő különböző hajlásszögek esetén.

A várakozásnak megfelelően a mérési pontok olyan parabolaívekből álló görbesereg sereggörbéire illeszkednek, amelyekhez a lejtő különböző hajlásszögei tartoznak.

A szilárd anyagok kristályosodása során azt figyelhetjük meg, hogyan a folyadék fázis részecskéi a szilárd fázisba beépülve a szilárd–folyadék határfelület elmozdulását eredményezik. Lényegében tehát ez a változás is tekinthető mozgásnak,



2.2. ábra.

Különböző hajlásszögű ($\alpha = 1^\circ, 2^\circ, 3^\circ, 4^\circ, 5^\circ$) lejtőkön legördülő golyó által megtett út az idő függvényében.

ahogyan azt a 2.3. ábra is mutatja. A számszerű értékek leolvasását a kémcső mellé helyezett térfogat-skála biztosítja. (A mozgókép szerkesztése során, a 2.1. ábrához hasonlóan, ennél a felvételnél is felkerültek az egyes képkockákra a folyamat kezdete óta eltelt időértékek is.) A leolvasott értékeket a 2.2. táblázat tartalmazza. A 2.4. ábra mutatja, hogy ezek az értékek jól illeszkednek egy egyeneshez, tehát a határfelület vándorlása egyenletes sebességgel történt.

A fentiekhez hasonló módon, két különböző fázis határfelületének vándorlása figyelhető meg és a hozzá kapcsolódó mérés végezhető el gázfejlődéssel járó kémiai reakciók esetében, ahol a gázbürettából a keletkező gáz kiszorítja a folyadékot. A készüléket megfelelő skálával ellátva nyomonkövethetjük a reakció során keletkező gáz térfogatának növekedését.

2.1.2. Mérés a felvételek számítógépes kiértékelésével

A számítógépes képfeldolgozás során az egyik első lépés a háttér hasznos információktól való elkülönítése. Esetünkben a háttér alatt olyan képpontokat értünk,



2.3. ábra.

Nátrium-acetát kristályosodása kémcsőben. Jól megfigyelhető a határfelület „vándorlása” az egymást követő felvételeken.

A felvételek 3 másodperces (azonos) időközökkel készültek.

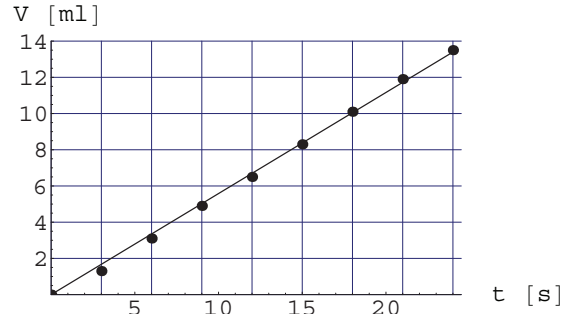
$t_i [sec]$	0,0	3,0	6,0	9,0	12,0	15,0	18,0	21,0	24,0
$V_i [cm^3]$	0,0	1,3	3,1	4,9	6,5	8,3	10,1	11,9	13,5
$\Delta V_i [cm^3]$	1,3	1,8	1,8	1,6	1,8	1,8	1,8	1,6	-

2.2. táblázat.

A növekedő kristály térfogata az idő függvényében, $\Delta V_i = V_{i+1} - V_i$ ($i = 0..7$).

amelyek nem mozdulnak el a felvétel során, tehát nem tartoznak a követni kívánt objektumhoz. A probléma jellegéből adódóan a legegyszerűbb háttérmodell alkalmazható, amikor feltételezhetjük, hogy a képpontok fényessége a mozgástól függetlenül, csak a kamerába épített CCD⁴-re jellemző módon, a mérési eredményekhez hasonlóan normális eloszlásnak megfelelően változik. Ha tehát egy képpont fényessége jelentősen eltér az egymást követő néhány képkocka (frame) megfelelő képpontjait jellemző fényességértékek átlagától, akkor azt a képpontot nem tekintjük háttérpontnak, hanem azt mondjuk, hogy a mozgó objektumhoz tartozik.

⁴Charge-coupled Device, azaz töltés-csatolt eszköz, amelyből külső áramkör segítségével kiolvasható a felületére optikailag vetített teljes kép azáltal, hogy minden, az egyes képpontoknak megfelelő kondenzátor képes átadni a töltését a szomszédjának.



2.4. ábra.

Nátrium-acetát kristályosodása.

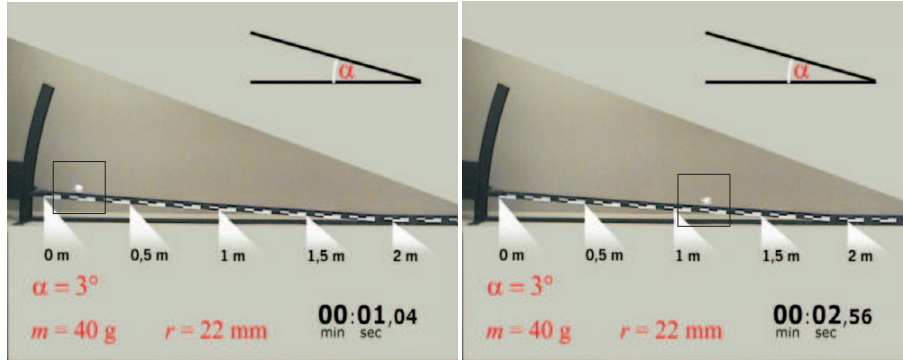
A kristály térfogatának változása az idő függvényében.

(A 2.2. táblázat adatai és a mért adatokhoz illesztett egyenes.)

A képpontok fényességének időbeli és térbeli változását ($I(x, y, t)$) az optikai áramlás (optical flow) elméletével írhatjuk le. Bár ez az eljárás a mi esetünknel lényegesen összetettebb probléma (mozgó objektum és mozgó háttér) megoldásában is eredményesen alkalmazható, ugyanakkor ebből adódóan meglehetősen nagy lehet a számítási igénye is.

A képek kiértékeléséhez a felvételeknek azt a speciális tulajdonságát használjuk föl, hogy a vizsgált objektum egy lényegében változatlan háttér előtt mozog, ahogyan ez a 2.5. ábrán is megfigyelhető. Ezt a körülményt figyelembe véve a probléma elég könnyen kezelhetővé válik. Mivel ezeknél a képeknek az egyes képpontokat a színek kódjuk alapján tároljuk a memóriában, minden képhez egy-egy mátrix rendelhető.

Ha tehát az egymást követő, feldolgozandó képek n sorból és soronként m képpontból állnak, minden képnek megfelel egy olyan $n \cdot m$ típusú mátrix, amelyben i -edik sorának j -edik eleme tárolja a megfelelő kép i -edik sorának j -edik képpontjáról a szükséges információt. A probléma szempontjából elegendő a képpontok fényességét, szűrkeségi fokát tárolnunk a mátrixokban. Legyenek $\mathbf{A} = (a)_{nm}$ és $\mathbf{B} = (b)_{nm}$ a két feldolgozandó kép szürkeárnyaltos mátrixai. Most képezzük a



2.5. ábra.

3°-os lejtőn legördülő golyó a mozgás két különböző pillanatában
(a megtett út 0,2 m és 1,2 m).

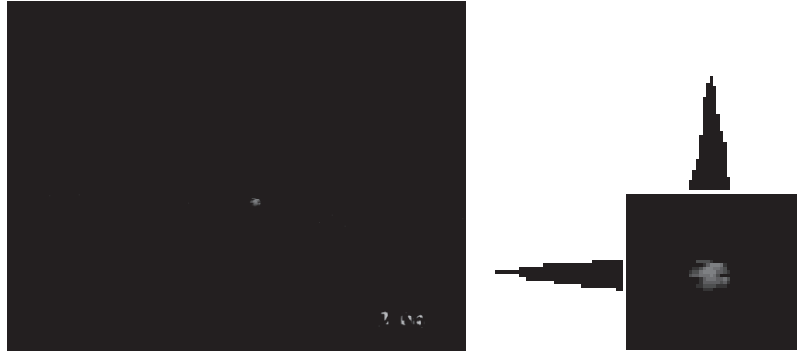
két képnek megfelelő **A** és **B** mátrixokból a

$$c_{ij} = \begin{cases} b_{ij} - a_{i,j} & \text{ha } b_{ij} \geq a_{ij} \\ 0 & \text{ha } b_{ij} < a_{ij} \end{cases}$$

szabály alapján a **C** mátrix⁵ elemeit. **C**-ben a változatlan háttér pontjainak megfelelő elemek nullához közeli értéket kapnak, és csak azok az elemek térnek el jelentősen nullától, ahol a két kép is jelentősen különbözik, azaz a mozgó objektumnak megfelelő részletekben (2.6. ábra).

A probléma szempontjából tehát a képpontok két csoportba sorolhatók. A háttér pontjai számunkra lényegtelenek, és ezekhez képest szeretnénk kiemelni a feladat szempontjából az információt hordozó pontokat, a mozgó objektumok pontjait. A valóságban nehéz megoldani, hogy a két kép egymásnak megfelelő pontjaihoz azonos intenzitásérték tartozzék, de különbségük lehet elegendően kicsi, ha a színeket alkalmas módon választjuk meg (sötét háttér, világos objektum). Jobban elkülönülnek a két csoport pontjai, ha a c_{ij} elemek alacsony értékű bitjeit egyszerűen elhagyjuk. Ráadásul ez a megoldás a kép későbbi kiértékelését is egyszerűbbé teheti.

⁵ $\mathbf{C} = (\mathbf{B} - \mathbf{A})_+$



2.6. ábra.

A 2.5. ábra képeinek „pozitív különbsége”, valamint a golyó egy környezetének kinagyított részlete az intenzitásértékek alapján rajzolt hisztogramokkal.

A további feladat a mozgó objektum helyének meghatározása. Ha a $\mathbf{C}$ mátrix minden oszlopához hozzárendelnénk az oszlopbeli elemek összegét, azt tapasztalnánk, hogy azokhoz az oszlopokhoz tartozik nagyobb összeg, amelyekben több világos képpont tartozik a képen, amelyek a mozgó objektumot írják le. A sorok elemeinek összegzésével hasonló eredményre jutunk (2.6. ábra). Ez a fölismerés alkalmas lehet a golyó helyének meghatározására a képen. Legyenek tehát az n elemű $\mathbf{V}$ vektor valamint az m elemű $\mathbf{W}$ vektor elemei

$$v_i = \sum_{j=1}^m c_{ij}, \quad w_j = \sum_{i=1}^n c_{ij}$$

módon megadva.

Az objektum pozíciójának közelítéséhez számítsuk az oszloppozícióknak az oszlop elemeinek összegével súlyozott $\bar{j}$ átlagát, valamint a sorpozícióknak a sor elemeinek összegével súlyozott $\bar{i}$ átlagát:

$$\bar{j} = \frac{\sum_{j=1}^m (j \cdot w_j)}{\sum_{j=1}^m w_j}; \quad \bar{i} = \frac{\sum_{i=1}^n (i \cdot v_i)}{\sum_{i=1}^n v_i}.$$

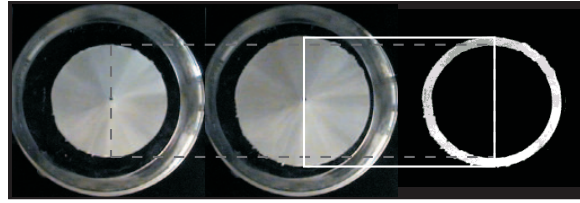
Megjegyezzük, hogy adott esetben – a kiértékeléshez szükséges idő csökkentése,

és a kép esetleges zavaró részleteinek⁶ kiküszöbölése érdekében – célszerű lehet kijelölnünk a $\mathbf{C}$ mátrixon egy olyan almátrixot, amely megfelel a kép azon részének, ahol a golyó mozgása során elhaladhat. Mindezt figyelembe véve $\bar{j}$ és $\bar{i}$ számítása az alábbiak szerint módosul:

$$\bar{j} = \frac{\sum_{j=g}^h \left(j \cdot \sum_{i=k}^l c_{ij} \right)}{\sum_{j=g}^h \sum_{i=k}^l c_{ij}}; \quad \bar{i} = \frac{\sum_{i=k}^l \left(i \cdot \sum_{j=g}^h c_{ij} \right)}{\sum_{i=k}^l \sum_{j=g}^h c_{ij}}$$

(ahol $1 \leq k \leq i \leq l \leq n$ valamint $1 \leq g \leq j \leq h \leq m$).

A fentebb ismertetett eljárást más kísérletek képeire alkalmazva esetleg más módot kell találnunk a szükséges információ $\mathbf{C}$ mátrixból történő kinyeréséhez. Nátrium-acetát-kristály síkban való növekedésének két fázisát, és a fenti eljárás



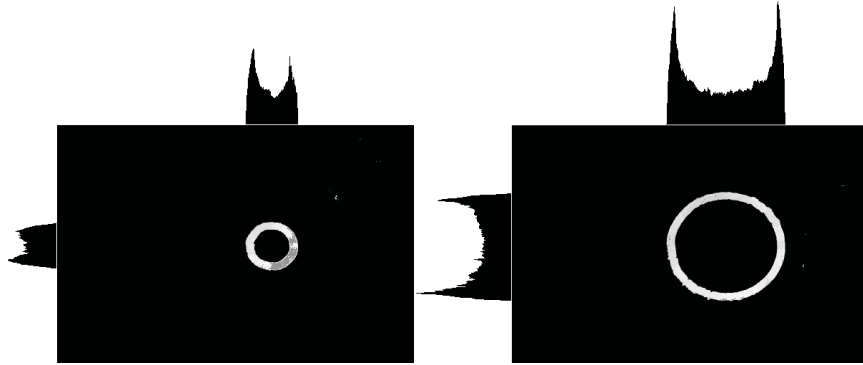
2.7. ábra.

Nátrium-acetát kristályosodásának 6. és 7. másodpercében készült felvétel, valamint a két felvétel „pozitív különbsége”.

alkalmazásának eredményét mutatja be a 2.7. ábra. Az így keletkezett körgyűrű jól szemlélteti az 1 másodperc alatt bekövetkezett növekedést. Ebben az esetben megadható olyan $\delta > 0$ konstans, amelynél nagyobb $\mathbf{C}$ beli elemek száma hordozza a megfelelő információt. A körgyűrűt alkotó pixelek száma arányos az adott idő alatt kivált anyag mennyiségével.

Ha azonban képezzük a $\mathbf{V}$ és $\mathbf{W}$ vektorokat is (a 2.8. ábra szemlélteti a vektorok elemeinek értékeit), azok feldolgozásával következtethetünk a körgyűrűk át-

⁶Mivel az eljárás az egymást követő képek minden változására érzékeny, ilyen zavaró részlet a 2.5. ábra képein a jobb alsó sarokban kijelzett idő is, ami természetesen kockáról kockára változik. Ez a változás „nyomot hagyott” a 2.6. ábrán is.



2.8. ábra.

Nátrium-acetát kristályosodásának 2. és 3., valamint a 6. és 7. másodpercében készült felvételek „pozitív különbségei”.

mérőjére⁷, amiből aztán az anyagmennyiség számolható.

Ha most a $\mathbf{C}$ mátrix elemeinek előállítására a

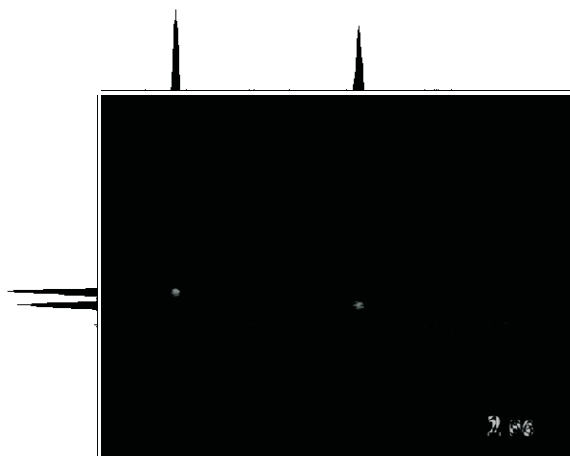
$$c_{ij} = |b_{ij} - a_{ij}|$$

összefüggés alapján történik, a művelet szimmetriája miatt a mozgó objektum helye mindkét fázisban láthatóvá válik a $\mathbf{C}$ mátrix alapján készült 2.9. ábrán. Ebből előállítva a $\mathbf{V}$ és $\mathbf{W}$ vektorokat, adott esetben két-két kiugró értékcsoportot találhatunk a vektorok elemei között. A pozíciók becslése csak akkor történhet a korábban ismertetett módon, ha előtte megtörténik azok elszeparálása.

2.2. Jelenségtől a modellig

A differenciálegyenletek tanulmányozásával, felállításával és a differenciálegyenletes modellek vizsgálatával foglalkozó források szerzői motivációként a legkülönbözőbb példákat említnek: baktériumok szaporodása, radioaktív bomlás (exponenciális növekedés), fertőző betegségek okozta járványok lefolyása, információ ter-

⁷Tanulságos megfigyelni az így keletkezett körgyűrűk szélességét.



2.9. ábra.

A 2.5. ábra képeinek „abszolút különbsége”.

jedése (logisztikus növekedés). Ugyanakkor kevés példát láthatunk, amely alkalmas a modellalkotás kezdeti szakaszának bemutatására. Ezekben a példákban általában nem kap kellő hangsúlyt az, hogy a modellezni kívánt rendszer megismeréséhez méréseket kell végezni, hogy a törvényszerűségek alapjául, amelyek segítségével leírhatjuk a változásokat, ezek a mérések szolgálnak. Bizonyos esetekben indokolt lehet olyan jelenség választása, ami kísérleti mérésekkel könnyebben alátámasztható és még a felsoroltaknál is egyszerűbben modellezhető.

A szilárd anyagok egyik csoportját a kristályos anyagok alkotják. A fentiekén túl ennek gyakorlati jelentősége is indokolhatja a kristályosodás folyamatának vizsgálatát.

2.2.1. A jelenség leírása

Bizonyos tulajdonságai miatt a nátrium-acetát különösen alkalmas a folyamattal kapcsolatos mérések elvégzésére, a modellezés alapjául szolgáló összefüggések megállapítására.

Egy kémcsőbe nátrium-acetát túltelített oldatát töltjük. Az anyag egy kristályának behelyezésével elindítjuk a kristályosodás folyamatát. Az átalakulás sebessége ideális (nem túl gyors vagy kivárthatatlanul lassú) és az átalakulás jól figyelemmel kísérhető (2.3. ábra). Ugyanakkor a kísérletnek olyan csekély az eszköz- és anyagigénye, hogy akár „házi” körülmények között is elvégezhető. Ezek együttesen teszik lehetővé a szükséges pontosságú mérések egyszerű eszközökkel való végrehajtását.

2.2.2. A matematikai modell

Mivel a kristályosodás folyamatát kívánjuk modellezni, természetesnek tűnik, hogy a kristály (szilárd fázis) $X(t)$ anyagmennyiségét tekintjük állapotváltozónak. A kísérleti mérések alapján feltételezzük, hogy az időegység alatt a szilárd fázisba kerülő α anyagmennyiség független a már kivált anyag mennyiségétől és a t időponttól:

$$X(t+1) - X(t) = \alpha \quad (t \geq 0). \quad (2.1)$$

A következő időpillanatra tehát a szilárd fázis anyagmennyisége α -val nő. Jelöljük a két állapot között eltelt időt h -val, hogy a problémát általánosabban tudjuk leírni. Ha nagyobbak választjuk az időintervallumot, akkor több anyag válik ki, ha kisebbnek, akkor kevesebb, tehát α függ h -tól: $\alpha(h)$.

Tehát a (2.1) egyenlet

$$X(t+h) - X(t) = \alpha(h) \quad (t \geq 0) \quad (2.2)$$

alakban írható fel.

A tapasztalat alapján az is nyilvánvaló, hogy

$$\lim_{h \rightarrow 0} \alpha(h) = 0. \quad (2.3)$$

A 2.2. táblázat és a táblázat adatainak felhasználásával készült 2.4. ábra alapján feltételezhetjük, hogy h és a növekedés közötti összefüggés az egyenes arányosság. Ha tehát nagyobbak választjuk h -t, vele arányosan nő az ez idő alatt keletkező szilárd anyag mennyisége is. Így $\exists \lambda_1 \in \mathbb{R}$ ($\lambda_1 > 0$), hogy $\alpha(h) = \lambda_1 h$ (ahol λ_1 t -től és h -től független, csupán a rendszerre jellemző állandó):

$$X(t+h) - X(t) = \alpha(h) = \lambda_1 h \quad (2.4)$$

A (2.4) összefüggést osszuk el h -val és h -val tartsunk 0-hoz:

$$\frac{dX(t)}{dt} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{X(t+h) - X(t)}{h} = \lambda_1. \quad (2.5)$$

Tehát a kísérlettel bemutatott jelenség a következő differenciálegyenlettel írható le:

$$\frac{dX(t)}{dt} = \lambda_1 \quad (0 < \lambda_1) \quad (2.6)$$

2.2.3. A jelenség kémiai magyarázata

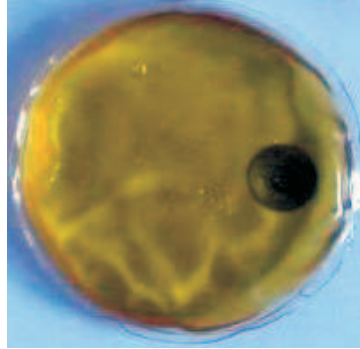
Fontos megjegyeznünk, hogy a kristály növekedésének sebessége (a szilárd fázis anyagmennyiségének növekedése időegység alatt) változatlan körülmények között a kristály felületének nagyságától és az oldat pillanatnyi koncentrációjától függ. A kísérlet során nátrium-acetát (NaAc) túltelített oldatát állítottuk elő. A NaAc, mint az ionkristályos anyagok, a kristályrácsukban vizet (úgynevezett kristályvizet) kötnek meg. A megkötött víz mennyisége jól jellemzi az adott ionkristályt. A NaAc trihidrát esetében 1 mól NaAc-ra 3 mól víz jut ($\text{NaAc} \cdot 3\text{H}_2\text{O}$). A só kristályhidrát tartalma a melegítés során távozik a rácsból és a nátrium-acetát oldott állapotban marad az edényben. Mivel a kristályok lényegében saját kristályvizükben oldódtak fel, a túltelített oldat is természetesen abban a (mól-) arányban (1:3) tartalmazza az összetevőket, mint a kristályos állapotú anyag.

A kristályosodás megindulását az oldatba helyezett kristály biztosítja. A teljes kristályosodási folyamat során, a rácsba beépülő anyagmennyiségek aránya is ugyanez lesz, tehát az oldat koncentrációja mindvégig állandó marad. A folyamat kezdeti (rövid) szakaszától eltekintve a növekedő kristálynak az oldattal érintkező felülete szintén változatlan. A fenti két körülményből az következik, hogy a határ-felület időben egyenletesen halad előre.

2.2.4. A modell általánosítása

Kémiai szempontból valójában ugyanezek a változások mennek végbe a jól ismert melegítő párnácska (2.10. ábra) használata⁸ során is. Alkalmazásakor lényegében a melegítéskor elraktározott hőt nyerjük vissza.

⁸Melegítés hatására felbomlik az ionkristály, létrejön a NaAc túltelített oldata. A kristályosodás megindulását pedig az a mechanikai hatás okozza, amit a benne található rozsdamentes lapocskára „megpattintásával” hozhatunk létre.



2.10. ábra.

Nátrium-acetát-oldatot tartalmazó melegítő párna.

Ebben az esetben, ha a párnácskát elég vékonynak képzeljük, idealizálhatjuk a jelenséget úgy, hogy a kristályok növekedése egy pontból kiindulva a sík minden irányában, körkörösén játszódik le, hiszen ahol a kristály az „edény” falával érintkezik, nem növekedhet tovább, mert a növekedés csak a kristály és az oldat határfelületén mehet végbe. Tudjuk, hogy a növekedési folyamat sebessége függ a kristály felületének nagyságától. Modellünkben ez arányos a kör

$$K(t) = 2\pi R(t) \quad (2.7)$$

kerületével.

A kísérlet tapasztalatait úgy is értékelhetjük, hogy a határfelület egyenletes sebességgel halad, melynek $R(t)$ elmozdulása egyenesen arányos az eltelt idővel. A határfelület, a tér egy adott irányába való elmozdulása:

$$R(t) = \varrho t. \quad (2.8)$$

A szilárd fázisba beépülő anyagmennyiséget a kör sugara határozza meg a h időtartam alatt:

$$\alpha(h) = X(t+h) - X(t) = \beta K(t)h. \quad (2.9)$$

(A valóságban a kristály formája körhengerrel közelíthető. Palástjának területe a magasság és a $K(t)$ kerület szorzata. A magasságot a $\beta \in \mathbb{R}$ konstans alkalmas megválasztásával vehetjük figyelembe.)

A (2.7) és (2.8) összefüggések alapján látható, hogy (rögzített h esetén) $\alpha(h)$ arányos az eddig eltelt idővel minden időpillanatban:

$$\alpha(h) = X(t+h) - X(t) = \lambda_2 th \quad (\lambda_2 = 2\beta\pi). \quad (2.10)$$

A (2.10) összefüggést elosztva h -val és h -val tartva 0-hoz:

$$\frac{dX(t)}{dt} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{X(t+h) - X(t)}{h} = \lambda_2 t. \quad (2.11)$$

Tehát a NaAc-kristály 2-dimenziós növekedése a

$$\frac{dX(t)}{dt} = \lambda_2 t \quad (0 < \lambda_2) \quad (2.12)$$

differentiálegyenlettel írható le.

Ha a kristály növekedésének semmiféle mechanikai akadályja nincs, és szabadon növekedhet a tér minden irányában, akkor a növekedő kristályt gömbszimmetrikusnak tekinthetjük és a növekedés sebessége a gömb

$$F(t) = 4\pi R^2(t) \quad (2.13)$$

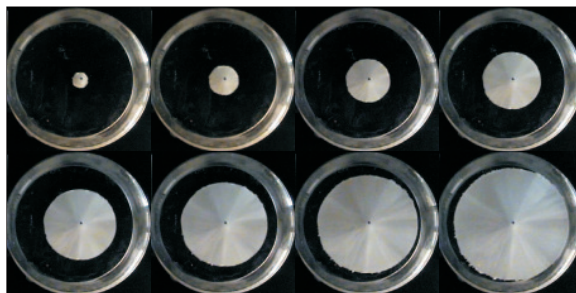
felületével lesz arányos. Az előzőhöz hasonló gondolatmenet alapján az alábbi differenciálegyenlethez jutunk:

$$\frac{dX(t)}{dt} = \lambda_3 t^2 \quad (0 < \lambda_3) \quad (2.14)$$

2.2.5. Az általánosított modell kísérleti igazolása

A kristályosítás körülményeinek megváltoztatásával valóban egészen más eredményre juthatunk a jelenség megfigyelése során. A kísérletet egy kristályosító tálkában elvégezve a kristály növekedése kevésbé van korlátozva. Így a határfelület az oldat felületével párhuzamosan, egy közös kiindulópontból a sík minden irányában egyenletesen halad előre, ahogyan ez a 2.11. ábrán is megfigyelhető. Ennek megfelelően a kristály alakja – a növekedés minden pillanatában – jól közelíthető egy-egy megfelelő átmérőjű körlappal. A keletkezett szilárd anyag mennyisége tehát jól jellemezhető ezen körök átmérőjével vagy területével a kristályosodás minden pillanatában. A 2.3. táblázat ezeket az értékeket tartalmazza a folyamat első 10 másodpercében másodpercenként.

Az átmérő változása lényegében a határfelület középponttól való távolodását fejezi ki, így nem meglepő a 2.4. és a 2.12. ábrák közötti hasonlóság, hiszen



2.11. ábra.

Nátrium-acetát kristályosodása a folyamat első 8 másodpercében.
(A felvételek másodpercenként készültek.)

$t [s]$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$d [cm]$	0,9	1,7	2,5	3,4	4,1	4,9	5,7	6,5	7,2	8,1
$T [cm^2]$	0,64	2,27	4,91	9,07	13,5	19,2	25,5	33,2	41,3	51,5

2.3. táblázat.

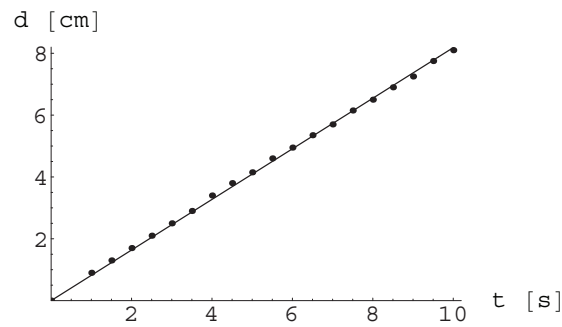
A növekedő kristály átmérője (d) és vetületének területe (T) az idő függvényében.

mindkettő a határfelület elmozdulását írja le.

Tudjuk, hogy egy kör területe sugarának négyzetével arányos. Ha tehát a sugár az időben lineárisan változik, akkor a terület nagysága – ami arányos a kristály anyagmennyiségével – az eltelt idő négyzetével arányos. Ezt szemlélteti a 2.13. ábra.

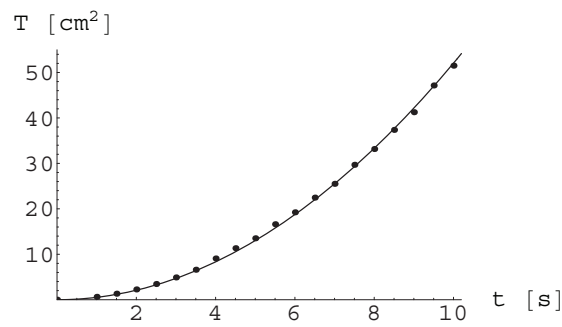
2.2.6. További általánosítások

A matematika történetében a XVII. század talán legnagyobb fölfedezéseit a differenciál- és integrálszámítás és a hozzá kapcsolódó eredmények jelentették. Mindezek aztán nagy lendületet adtak a többi tudományterület fejlődésének is, lehetővé téve ezzel a legkülönbözőbb jelenségek matematikai eszközökkel való leírását. Talán a kor technikai színvonalának köszönhetően elsők között a fizika volt, ahol eredményesen alkalmazták ezeket a hatékony matematikai eszközöket. A dif-



2.12. ábra.

A grafikon a növekedő kristály átmérőjének változását mutatja az idő függvényében.



2.13. ábra.

A síkban növekedő kristály felületének változása az idő függvényében.

ferenciálhányados ismerete tette lehetővé jónéhány alapvető, napjainkra közkeletűvé vált fogalom definiálását is.

A mechanika a fizikának az a területe, melynek alapvető feladata az anyagi pontok és a merev testek mozgására vonatkozó törvények, összefüggések megfogal-

mazása. Alkalmas koordináta-rendszerben vektorok segítségével tudjuk magadni egy anyagi pont helyzetét az idő függvényében:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t).$$

Az $\mathbf{r}(t)$ tehát matematikai értelemben nem más, mint egy a valós számok halmazán értelmezett, vektor értékű függvény, amely által leírt helyvektor végpontja „megrajzolja” a mozgó pont pályáját. A pont helyét a t időpontban a

$$r_x(t), r_y(t) \text{ és } r_z(t)$$

koordinátákkal adhatjuk meg.

Önmagában már az is jelentős eredmény, hogy így meg tudunk adni néhány, a pont elmozdulását leíró mennyiséget, de fontos lenne ismerni további, a pálya szempontjából pontbeli jellemzőket is. Mivel az adott időpillanat meghatározza a pont helyzetét a pályán, ezek a jellemzők azzal is megadhatók, hogy a mozgás mely időpillanatát vizsgáljuk. A mozgó pont pillanatnyi sebessége a mozgásállapot megváltozását fejezi ki, és a helyvektor idő szerinti differenciáhánydosaként definiálható:

$$\mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt}. \quad (2.15)$$

A mennyiség vektorjellege miatt

$$v_x(t) = \frac{dx(t)}{dt}; \quad v_y(t) = \frac{dy(t)}{dt}; \quad v_z(t) = \frac{dz(t)}{dt}$$

alakban is megadhatjuk azt⁹, ahol $v_x(t)$, $v_y(t)$ és $v_z(t)$ a $\mathbf{v}(t)$ vektor x -, y - és z -tengelyekkel párhuzamos összetevőit jelöli. Ha vizsgálatainkat korlátozzuk az egyenes vonalú mozgások körére, a koordináta-rendszer megfelelő megválasztása után az írásmód leegyszerűsíthető:

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt}.$$

Egyenes vonalú egyenletes mozgás esetében tehát $v(t)$ értéke állandó, ami

$$\frac{dx(t)}{dt} = \mu_1 \quad (2.16)$$

alakban írható.

⁹Egy anyagi pont legáltalánosabb térbeli mozgása előállítható három egyenes vonalú mozgás összetételével, és a továbbiakban $v(t)$ alatt a sebesség x -irányú összetevőjét, $v_x(t)$ -t értjük.

A mozgás egy másik fontos jellemzőjeként a gyorsulás fogalmának definícióját adjuk meg. Mivel a gyorsulás olyan vektormennyiség, amely a sebesség megváltozását fejezi ki, azt egyenes vonalú mozgások esetében

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = \frac{d^2x(t)}{dt^2}$$

alakban írhatjuk le. Egyenes vonalú egyenletesen gyorsuló mozgásról akkor beszélhetünk, ha

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = \mu_2.$$

(Ahol μ_2 a mozgásra jellemző valós konstans.) Ebből azonban

$$\frac{dx(t)}{dt} = \mu_2 t \quad (2.17)$$

teljesülése is következik, ha a mozgó pont kezdetben nyugalomban volt. A (2.17) összefüggés kifejezi, hogy a sebesség értéke egyenesen arányos az eltelt idővel.

Folytatva a korábbi gondolatmenetet, amelyben az út-függvény első, majd második deriváltjainak adtunk fizikai jelentést, jogosan merülhet föl a kérdés, hogy vajon létezik-e olyan mozgásforma, amelyre a

$$\frac{da(t)}{dt} = \frac{d^3x(t)}{dt^3} = \mu_3 \quad (2.18)$$

összefüggés teljesül? (Ahol μ_3 valós konstans.) Ez ugyanis azt fejezi ki, hogy a gyorsulás értéke egyenletesen változik az idővel a mozgás során. Ugyanakkor, ha a mozgás nyugalmi helyzetből indul, akkor a sebességét az alábbiak szerint írhatnánk le:

$$\frac{dx(t)}{dt} = \mu_3 t^2 \quad (2.19)$$

Ilyen mozgás valósulna meg például egy függőlegesen fölfelé indított rakéta esetében, ha a hajtóanyag csökkenéséből és az indítás helyétől való távolodásból adódó gravitációs erő csökkenés figyelembe vételével adagolnánk az üzemanyagot úgy, hogy a gyorsító erő egyenletesen növekedjen.

Másik lehetőség az egyenes vonalú, egyenletesen változó gyorsulú mozgás megvalósítására, ha egy test olyan α hajlásszögű lejtőn csúszik le, ahol a surlódási együttható a megtett úttal lineárisan csökken. A lejtőn való mozgás esetében ugyanis a gyorsító erő a surlódási erő és a gravitációs erő lejtővel párhuzamos összetevőjének eredőjeként áll elő.

Összevetve a fenti (2.16), (2.17), (2.19) egyenleteket a korábbi (2.6), (2.12) és (2.14) egyenletekkel szembeötlő az egyezőség annak ellenére, hogy merőben más jelenségeket írhatunk le velük.

3. Fejezet

Matematikai háttér

*„A matematika hozzászoktatja a szemünket ahhoz,
hogy tisztán és világosan lássa az igazságot”*

RENÉ DESCARTES

Számtalan kiváló szakirodalom foglalkozik a különféle differenciálegyenletek csoportosításával és matematikai megoldásaival. Itt csupán a téma pontosabb behatárolása céljából érintünk néhány fontos kapcsolódó fogalmat.

Lényegében differenciálegyenleteket adtunk meg az előző fejezetben is (kristályosodás és különböző egyenes vonalú mozgások leírása során), mikor arra kerestünk választ, hogyan növekszik a szilárd anyag mennyisége az idő előre haladtával, vagy hogyan változik egy mozgást végző test által megtett út az idő függvényében. Már ott fölmerült annak szükségessége, hogy az állapotváltozó értékét előállító függvény (a szilárd anyag mennyisége, a megtett út) különböző deriváltjaira hivatkozzunk. Említettük már, hogy a differenciálegyenletek megoldásait ilyen függvények jelentik. Szolgáljon alapjául most ez néhány alapvető fogalom bevezetéséhez.

A jelenségek természeténél fogva gyakran azok időbeli változását vizsgáljuk. Ezért és történeti szempontból is fontos az időbeli változások leírása. Időben lejátszódó folyamatok például egy baktériumtenyészet növekedése, valamely termék keletkezése adott kémiai reakcióban, vagy akár a mobiltelefont használók számának változása az országban¹.

¹Természetesen más összefüggésben lehet értelme ezek térbeli alakulását is vizsgálni.

Ha azonban csak az időbeli változásokra szorítkozunk, vagy a tér egy kitüntetett irányában haladva vizsgáljuk a változásokat², vagy még általánosabban; valamely változó mennyiség – például a hőmérséklet – hogyan befolyásolja a rendszer állapotváltozójának – például a vízben oldott oxigén koncentrációját – értékét, (vagy a nyomás változtatása a reakciótérben milyen hatással van az átalakulás sebességére), akkor az ilyen differenciálegyenletek megoldásai mindig a valós számok halmazán értelmezett függvények lesznek. Ilyen esetekben *közönséges* differenciálegyenletekről vagy egyenletrendszerekről beszélünk.

Azokat az egyenleteket, amelyeknek többváltozós függvények a megoldásai, és ezeknek függvényeknek különböző változóik szerinti parciális deriváltjai is szerepelnek az egyenletekben, *parciális* differenciálegyenleteknek nevezzük. Nagyon fontos jelenségek (hővezetés, hullámok terjedése, rezgő húr illetve membrán viselkedése) matematikai leírásában fontos szerepet játszanak.

3.1. Néhány differenciálegyenlettel kapcsolatos fogalom

Jejölje y azt a függvényt, amelynek a helyettesítési értéke az x helyen $y(x)$. Ez azt jelenti, hogy egy $P(x, y)$ pont esetében, csak az y függvény pontos ismeretében tudjuk megmondani, hogy a síkon hol is van valójában a P .

Legyen például $y(x) = x^2$ ($\forall x \in \mathbb{R}$).

Most már tudjuk, hogy az összes ilyen pontok halmaza egy az origón áthaladó parabolát ír le. Az $y(x)$ teljes értelmezési tartományán igaz, hogy

$$y'(x) = 2x. \quad (3.1)$$

Formálisan valójában egy differenciálegyenletet kaptunk. Az ismert deriválási szabályok alapján azonban azt is tudjuk, nem csak a fent bevezetett $y(x) = x^2$ megoldása ennek az egyenletnek, hanem az összes

$$\hat{y}(x) = x^2 + c$$

alakú függvény is ($\forall c \in \mathbb{R}$). Ezek alapján azt is mondhatjuk, hogy végtelen sok megoldást találtunk, és ezeknek a képei az y -tengely mentén való alkalmas eltolásokkal átvihetők egymásba. Tehát az egyes parabolák a c értékével jellemezhetők, azaz c rögzítésével kiválaszthatunk egy parabolát. Ugyanakkor azt is

²Ahogy a neutrális szál alakját írja le a (7.5) egyenlet.

könnyű látni, mivel c tetszőleges valós szám lehet, a sík minden P pontjához található parabola, amely áthalad azon. Az ehhez tartozó függvény esetében képezve a $\hat{y}'(x) = (x^2 + c)'$ differenciálhányadost, geometriai értelemben a sík minden pontjához hozzárendeltük a ponton áthaladó görbe érintőjének meredekségét.

A differenciálegyenleteknek ezt a tulajdonságát szemléletesebbé tehetjük, ha az $y(x)$ értelmezési tartományából elhagyjuk az $x = 0$ helyet, és (3.1)-et az alábbiak szerint alakítjuk át:

$$y'(x) = 2\frac{x^2}{x}, \quad \text{azaz} \quad y'(x) = 2\frac{y(x)}{x}. \quad (3.2)$$

Bár így egy másik differenciálegyenletet nyertünk, és az eredeti függvény ennek is csak egy megoldása lesz, fentiek mégis alapjául szolgálhatnak a következő általánosításnak.

Legyen $T \subset \mathbb{R}^2$ tartomány és $f : T \rightarrow \mathbb{R}$, ekkor az

$$y'(x) = f(x, y(x)) \quad (3.3)$$

egyenlet a (2.6), (2.12), (2.14), (2.16), (2.17), (2.19), (3.1) és a (3.2) egyenletek általánosításaként tekinthető³.

A (3.3) egyenlethez hasonló egyenleteket elsőrendű közönséges explicit differenciálegyenleteknek nevezzük.

További általánosítás eredményeként nyert

$$y^{(n)}(x) = f(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x)) \quad (3.4)$$

egyenletet n -edrendű közönséges explicit differenciálegyenletnek⁴ nevezzük (ahol $T \subset \mathbb{R}^{n+1}$ és $f : T \rightarrow \mathbb{R}$), ugyanis (3.4)-ből $n = 1$ esetén (3.3)-at kapjuk.

Az $y : I \rightarrow \mathbb{R}$ ($I \subset \mathbb{R}$ intervallum) függvény akkor megoldása (3.4)-nek, ha

- y n -szer differenciálható,
- $(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x)) \in T$,
- $y^{(n)}(x) = f(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x))$

³A későbbi fejezetek (4.2), (4.4), (7.1) és (7.2) egyenletei is ilyen alakúak.

⁴Néhány további másodrendű egyenlet: (4.16), (7.3), (7.5), (7.6), (7.9), (7.10) és (7.11).

teljesül $(\forall x \in I)$.

Most legyen $\mathbf{y}(x) = (y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x))$ $(i = 1, \dots, n)$ vektorfüggvény. Ekkor az

$$y'_i(x) = f_i(x, y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)) \quad (i = 1, \dots, n) \quad (3.5)$$

egyenletekből álló elsőrendű közönséges explicit differenciálegyenlet-rendszerhez⁵ jutunk (ahol $T \subset \mathbb{R}^{n+1}$ és $f_i : T \rightarrow \mathbb{R}$), ugyanis (3.5)-ből $n = 1$ esetén (3.3)-at kapjuk.

Az $\mathbf{y} : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ ($I \subset \mathbb{R}$) függvény akkor megoldása (3.5)-nek, ha

- (1) $\mathbf{y}$ n -szer differenciálható,
- (2) $(x, y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)) \in T$,
- (3) $y_i(x) = f_i(x, y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x))$

teljesül $(\forall x \in I)$.

A korábbiakban már láttuk, hogy egy differenciálegyenlet megadása bizonyos értelemben ekvivalens egy görbesereg megadásával.

Most járjunk el fordítva: definiáljuk a görbéket, és keressük meg hozzájuk azt a differenciálegyenletet, amelynek megoldásait az adott görbéket leíró függvények jelentik.

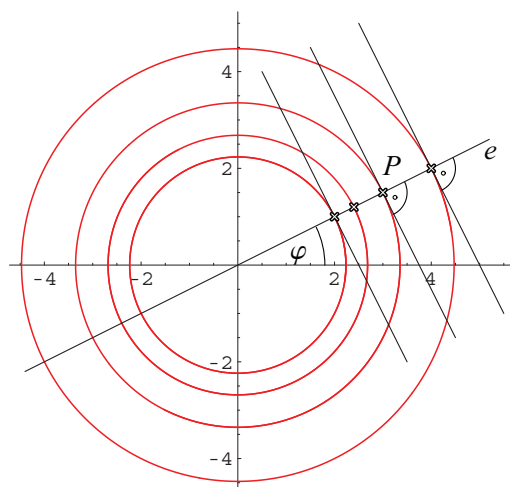
Adjuk meg az origó középpontú köröket leíró differenciálegyenletet. Az ilyen koncentrikus körök esetében teljesül, hogy a közös középponton áthaladó – az x -tengellyel φ szöget bezáró – e egyenesre illeszkedő $P(x, y)$ pontjaik esetében

$$\frac{y}{x} = c \quad (x \neq 0).$$

Tehát c értéke független a sugártól, csupán a φ megválasztásától függ, és rögzített φ esetén e minden pontjában⁶ teljesül (ld. a 3.1. ábrát). Ez a hányados – a φ tangense – alkalmas az e egyenes irányának jellemzésére. Tudjuk, hogy a P -n áthaladó kör érintője merőleges az e egyenesre P -ben, hiszen e áthalad a kör középpontján. Az érintők iránya $-c^{-1}$ értékével adható meg a merőlegesség miatt.

⁵Néhány elsőrendű egyenletrendszer: (4.1), (4.7), (4.11), (4.12), (4.14), (7.12) és (7.13).

⁶Természetesen az origót kivéve, de ezt az $(x \neq 0)$ feltétel is kizárja.



3.1. ábra.
Origó középpontú koncentrikus körök.

Ha tehát egy körvonal valamely P pontjának második koordinátáját $y(x)$ függvény segítségével adhatjuk meg, akkor az $y'(x)$ alkalmas a kör érintőjét jellemző irány megadására a P -ben. Az

$$y'(x) = -\frac{x}{y(x)}$$

differenciálegyenlet pedig pontosan ezeket a köröket írja le a differenciálhányados geometriai jelentése alapján.

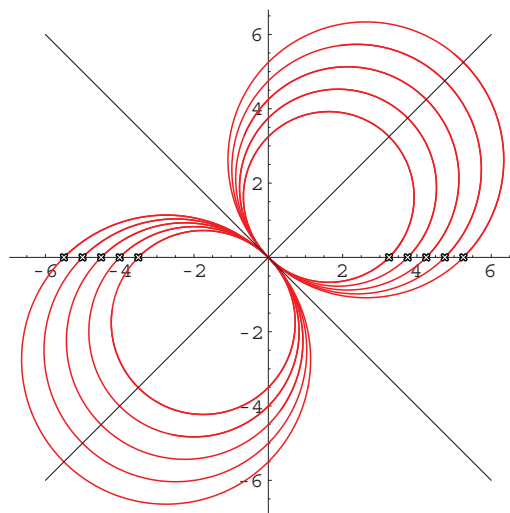
Most adjuk meg azoknak a köröknek a differenciálegyenletét, amelyek egymást és az $y = -x$ egyenest az origóban érintik. Geometriai ismereteink alapján az ilyen körök középpontjai a koordináta-rendszer I. és III. negyedébe esnek és illeszkednek az $y = x$ egyenesre, ahogyan ez a 3.2. ábrán is látható.

Jelölje $O(u, u)$ tehát egy ilyen kör középpontját. Ekkor a kör egyenlete

$$(x - u)^2 + (y - u)^2 = 2u^2$$

alakban írható. A hatványozás és egyszerűbb átalakítások után

$$x^2 + y^2 - 2u(x + y) = 0$$



3.2. ábra.

Az $y = -x$ egyenest origóban érintő, az x -tengely adott pontjain áthaladó körök.

formában kapjuk meg a kör egyenletét. Ezt x szerint deriválva az egyenlőségből kifejezhető az u :

$$u = \frac{x + yy'}{1 + y'}.$$

Az u -ra így kapott kifejezést a kör egyenletébe visszahelyettesítve az a következő alakra hozható:

$$x^2 + y^2 - 2 \frac{x^2 + xyy' + xy + y^2y'}{1 + y'} = 0 \quad (3.6)$$

Látható módon (3.6) csupán azonos átalakításokkal nem hozható (3.3) alakúra. Ez csak azt jelenti, hogy az egyenletnek ebben a formájában nem tudunk geometriai jelentést tulajdonítani, és az egyszerűbb írásmód érdekében célszerű bevezetni az

$$F(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0 \quad (3.7)$$

általános alakban írható n -edrendű közönséges implicit differenciálegyenlet fogalmát. Ahol $F : D \subset \mathbb{R}^{n+2} \rightarrow \mathbb{R}$ adott folytonos függvény.

Az $y : I \rightarrow \mathbb{R}$ ($I \subset \mathbb{R}$) függvény akkor megoldása (3.7) differenciálegyenletnek, ha

- (1) y n -szer differenciálható,
- (2) $(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x), y^{(n)}(x)) \in D$,
- (3) $F(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x), y^{(n)}(x)) = 0$

teljesül $(\forall x \in I)$.

(Az (3.7) alakú egyenletek általában több explicit egyenlet megadása mellett oldhatók meg.)

3.2. Kezdetiérték-probléma

Ahogy az már a korábbiakban láthattuk, gyakran a differenciálegyenletekkel bizonyos jellemzők időbeli változásait kívánjuk leírni. Ilyen esetekben célszerűnek látszik a függvények idő szerinti deriváltjának ismert jelölését alkalmaznunk. Ennek megfelelően például a sebesség definíciójakor megadott (2.15) összefüggést

$$\mathbf{v}(t) = \dot{\mathbf{r}}(t)$$

alakban is írhatnánk.

Az algebrai egyenletekhez hasonlóan egy differenciálegyenlettel kapcsolatban is fölmerülnek a kérdések: Létezik-e megoldása? Hány megoldása van?

Differenciálegyenletes modellek esetében gyakran adódik olyan körülmény, amikor keressük az

$$\dot{X}(t) = f(t, X(t)) \quad (3.8)$$

egyenlet olyan megoldását, ahol

$$X(t_0) = X_0 \quad (3.9)$$

teljesül, azaz a megoldásgörbe áthalad a $P_0(t_0, X_0)$ adott ponton. Az ilyen problémákat kezdetiérték (Cauchy-féle) feladatoknak nevezzük.

Ha például időbeli változásokat vizsgálunk, ez azt jelenti, hogy ismerjük a rendszer állapotát egy adott időpillanatban, és annak fejlődéséről szeretnénk többet megtudni. Ez egyszersmind azt is jelenti, hogy ilyen esetekben nincs szükségünk a (3.8) egyenlet összes megoldására. Ha tehát egy rendszert vagy jelenséget differenciálegyenlettel írunk le, és a „működését” szeretnénk vizsgálni annak egy adott állapotából kiindulva, akkor lényegében csak az adott feltételeknek megfelelő

megoldás ismerete szükséges számunkra. Ilyenkor a modellek alkalmazása során lényegében kezdetiérték feladatot kell megoldanunk. Geometriai értelemben pedig a sok görbe közül csak azt kell meghatároznunk, amely áthalad $P_0(t_0, X_0)$ ponton. A helyzet még ennél is kedvezőbb, hiszen a gyakorlat szempontjából a legtöbb esetben elegendő, ha a megoldásokat „csak” tetszőleges pontossággal⁷ tudjuk előállítani. Ez a gondolat elvezet minket a konvergencia fogalmának fölhasználásához ezekben a megoldási módszerekben.

A fentiek általános formában való leírásához legyen adott $T \subset \mathbb{R}^{n+1}$ tartomány, $f : T \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos függvény és a rögzített $(x_0, y_{01}, \dots, y_{0n}) \in T$.

Az

$$\begin{aligned} y^{(n)}(x) &= f(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x)), \\ y^{(i)}(x_0) &= y_{0i+1}, \quad (i = 0, \dots, n-1) \end{aligned} \quad (3.10)$$

feladatot egy n -edrendű közönséges explicit differenciálegyenletre vonatkozó kezdetiérték-problémának nevezzük (ami $n = 1$ esetén (3.8)-nak megfelelően $y' = f(x, y)$ alakban írható.)

Ahol az

$$y^{(i)}(x_0) = y_{0i+1}, \quad (i = 0, \dots, n-1)$$

kikötéseket kezdeti feltételeknek nevezzük.

Az $y : I \rightarrow \mathbb{R}$ ($I \subset \mathbb{R}$) függvény akkor megoldása (3.10)-nek, ha

- (1) y n -szer differenciálható,
- (2) $(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x)) \in T$,
- (3) $y^{(n)}(x) = f(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x))$
- (4) $y^{(i)}(x_0) = y_{0i+1} \quad (i = 0, \dots, n-1)$

teljesül $(\forall x \in I)$.

Vélhető módon az n -ed rendű differenciálegyenletek esetében a kezdeti feltételek megadása szűkíti a lehetséges megoldások körét. Ez szemléletesen azt jelenti, hogy csak olyan megoldást fogadunk el, amely „áthalad” a T tartomány

$$(x_0, y_{01}, \dots, y_{0n})$$

⁷Ez azt jelenti, hogy nagyobb idő, munka, energia vagy más erőforrás igénybevételével a pontosság tovább növelhető, ha arra van szükség. Ahhoz hasonlóan, ahogyan a műszaki számítások szempontjából nélkülözhetetlen π – ami köztudottan végtelen tizedestört – értékét is csak a szükséges pontossággal vesszük figyelembe.

pontján.

Most tekintsünk egy olyan rendszert, amelynek állapotát több változójával jellemezzük például az idő függvényében. Az ilyen rendszerek modellje egy alkalmas differenciálegyenlet-rendszer lehet. Például egy kémiai egyensúlyi rendszerben más-más változások történnek attól függően, hogy a rendszer állapotát jellemző, egymással reagáló anyagok milyen arányban vannak jelen. Ilyen reakciót ír le a (7.13) egyenlet is.

Ezek alapján azt mondhatjuk, hogy differenciálegyenlet-rendszerek esetében is van értelme a megoldást bizonyos kezdeti feltételek mellett keresni.

Most legyen

$$\mathbf{y}(x) = (y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)) : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$$

vektorfüggvény és az $\mathbf{y}'(x) = \mathbf{f}(x, \mathbf{y}(x))$ differenciálegyenlet-rendszer, ahol

$$\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_n) : T \subset \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n.$$

Keressük a megoldását a

$$\mathbf{y}'(x) = \mathbf{f}(x, \mathbf{y}(x)), \quad \mathbf{y}(x_0) = \mathbf{y}_0 \quad (\text{rögzített}) \quad (3.11)$$

feladatnak.

Ezt a problémát differenciálegyenlet-rendszerre vonatkozó kezdetiérték feladatnak⁸ nevezzük.

Az $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n) : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ függvény megoldása a (3.11) kezdetiérték feladatnak, ha

- (1) $\mathbf{y}$ n -szer differenciálható,
- (2) $(x, y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)) \in T$,
- (3) $y'_i(x) = f_i(x, y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x))$
- (4) $\mathbf{y}(x_0) = \mathbf{y}_0$

teljesül $(\forall x \in I)$.

⁸Cauchy-feladat

Az utóbbi két fogalom (n -edrendű explicit közösleges differenciálegyenletre és n egyenletből álló differenciálegyenlet-rendszerre vonatkozó kezdetiérték feladat) között teremt kapcsolatot a következő állítás, az átviteli-elv⁹.

Legyen $T \subset \mathbb{R}^{n+1}$ tartomány, $f : T \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos függvény,
 $(x_0, y_{01}, \dots, y_{0n}) = (x_0, \mathbf{y}_0) \in T$ (rögzített).
 Az $y : I \rightarrow \mathbb{R}$ függvény akkor és csak akkor megoldása (3.10)-nek I -n, ha az $(y, y', \dots, y^{(n-1)})$ függvény n -es megoldása a

$$\begin{cases} y_1' &= y_2 \\ &\vdots \\ y_{n-1}' &= y_n \\ y_n' &= f(x, y_1, \dots, y_n) \end{cases} \quad y_i(x_0) = y_{0i} \quad (i = 1, \dots, n)$$

differenciálegyenlet-rendszerre vonatkoztatott kezdetiérték feladatnak az I intervallumon.

⁹Az átviteli-elv alkalmazása lehetővé teszi, hogy az n -edrendű explicit közösleges differenciálegyenletre vonatkozó kezdetiérték-problémák vizsgálatát differenciálegyenlet-rendszerre vonatkozó kezdetiérték feladatok megoldására vezessük vissza.

4. Fejezet

Egy modell gyakorlati alkalmazási lehetőségei

*„Ez mindig megdöbbentő élmény.
Az embert meglepi, hogy elmeszüleménye csakugyan
megvalósulhat odakint, a tényleges világban.
Nagy megrázkódtatás és nagy-nagy öröm.”*

LEO KADANOFF

Az előzőekben tárgyalt valamennyi jelenség esetében csupán egy jellemzőjüket figyelembe véve írtuk le az állapotuk változását. Bonyolultabb rendszerek megfelelő leírásához általában több mindent kell számításba venni. Legyenek

$$X_1(t), X_2(t), \dots, X_n(t)$$

azok a változó értékek, amelyekkel az adott rendszer állapotát jellemezni tudjuk a t időpontban. Az $X_i(t)$ -k tekinthetők az $\mathbf{X}(t)$, a valós számok halmazán értelmezett vektor értékű függvény komponenseiként is. A rendszer változását kifejező differenciálegyenlet tehát az $\mathbf{X}(t)$ függvény változását írja le a következő általános formában:

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{X}(t)).$$

A további vizsgálódás céljából tekintsük a

$$\begin{aligned}\dot{X}_1(t) &= \left(b_1 + a_{11}X_1(t) + a_{12}X_2(t)\right)X_1(t) + c_1X_2(t) + e_1 \\ \dot{X}_2(t) &= \left(b_2 + a_{21}X_1(t) + a_{22}X_2(t)\right)X_2(t) + c_2X_1(t) + e_2\end{aligned}\tag{4.1}$$

differenciálegyenleteket (ahol a_{11} , a_{12} , b_1 , c_1 , e_1 , a_{21} , a_{22} , b_2 , c_2 , e_2 valós konstansok, $X_1(t)$, $X_2(t)$ pedig a valós számok halmazán értelmezett valós értékű függvények). Nem titkolt célunk, hogy a (4.1) egyenletekkel valamely rendszer két jellemzőjének változását írjuk le. Nyilvánvaló, hogy

$$a_{12} = 0, \quad c_1 = 0, \quad a_{21} = 0, \quad c_2 = 0$$

esetén az $X_1(t)$ állapotváltozó értéke nincs hatással $X_2(t)$ változására és fordítva, $X_1(t)$ sem függ $X_2(t)$ értékétől. Ebben az esetben két független rendszerként is tekinthetjük azokat. A továbbiakban megvizsgáljuk, hogy a (4.1) egyenletek milyen feltételek mellett felelnek meg valamely jól ismert modellnek.

4.1. Exponenciális növekedés (Malthus-modell)

Az angol nemesi családból származó *Thomas Robert Malthus (1766–1834)* az elsők között foglalkozott a populációdinamika kérdéseivel. Modelljét arra az egyszerű felismerésre alapozta, hogy a tapasztalatok alapján nagyobb létszámú „közösségekben” több utód születik. *An Essay on the Principle of Population (1798)* című munkájában egy az

$$\dot{N}(t) = kN(t)\tag{4.2}$$

egyenlethez hasonló egyenletet javasolt a populáció változásának leírására. (Ahol $N(t)$ jelenti a populáció nagyságát a t időpontban, és a $k \in \mathbb{R}$ növekedési ráta határozza meg a változás ütemét és irányát.)

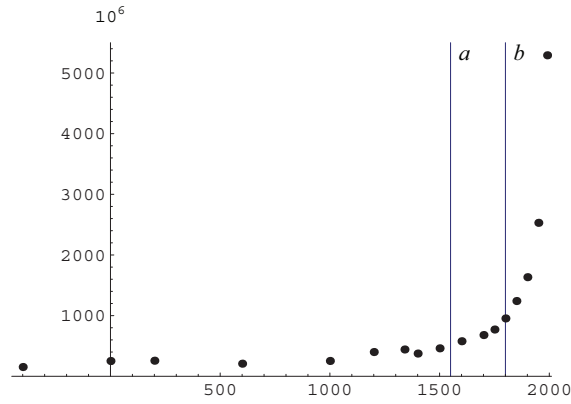
Malthus elképzelésének megfelelően az egyenlet tehát azt fejezi ki, hogy a populáció nagyságának megváltozása arányos annak pillanatnyi nagyságával.

Modellje segítségével egy akkoriban meglepő, váratlan megállapítást tett. Aból a tapasztalatból, hogy míg a létfenntartáshoz szükséges javak, mint például az

¹Forrás:

BIRABEN, N.J., *Essai sur l'évolution du nombre des hommes*, Population (1979)

LIVI BACCI, M., *A Concise History of World Population: An Introduction to Population Processes*, Blackwell Publishing (2001)



4.1. ábra.

A Föld népességének alakulása ie. 400-tól 2000-ig¹.

A XVI. századot megelőző időre vonatkozólag csupán következtetés és becslés útján előállított adatok állnak rendelkezésre, ezért Malthus csak az a -val és b -vel jelzett időpontok közötti időszakhoz tartozó adatokra alapozhatta elméletét.

élelmiszer előállításának növekedése lineáris, addig (modellje szerint) a népesség exponenciálisan növekszik², arra a következtetésre jutott, hogy a Föld eltartó képessége korántsem végtelen. Figyelemre méltó, hogy már több mint két évszázaddal korábban, a XVIII. század végén felismerte valaki, ezt a napjainkra igencsak aktuálissá váló problémát. Népesedési elmélete a demográfia, a politika és a közgazdaságtan fejlődésén túl jelentős hatással volt *Charles Darwin*ra is evolúciós elméletének megalkotásában.

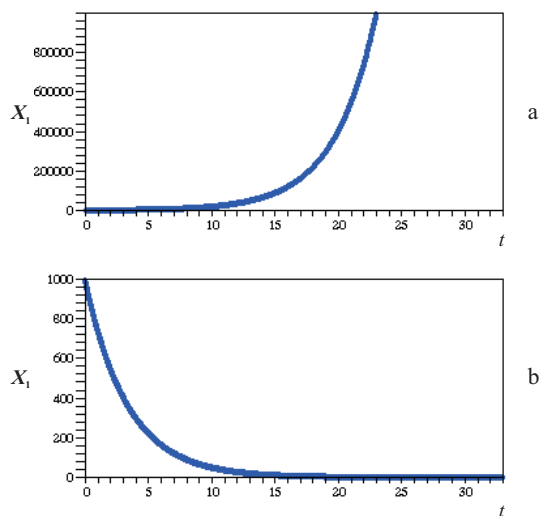
Megfelelő együtthatókat helyettesítve a (4.1) egyenletekbe és alkalmas kezdő értékeket választva

$$\dot{X}_1(t) = b_1 X_1(t) \quad (4.3)$$

alakban, a Malthus-féle egyenlethez hasonló formára hozhatók, ahol

$$\begin{array}{ccccc} b_1 > 0, & a_{11} = 0, & a_{12} = 0, & c_1 = 0, & e_1 = 0 \\ b_2 \in \mathbb{R}, & a_{21} \in \mathbb{R}, & a_{22} \in \mathbb{R}, & c_2 = 0, & e_2 = 0 \end{array}$$

²„Az állat- és növényvilágban a természet bőkezűen szórja az élet magvait, de annál szűkmarkúbban a táplálékot és a teret, melyen ez az élet tenyészhet. Ha a földi élet csírái adakálytalanul fejlődhetnének, pár ezer év alatt a világok millióit népesíthetnék be.”



4.2. ábra.

Az exponenciális változás jellegzetes görbéi.

$$\begin{array}{lll} \text{a: } b_1 = +0,3 & X_1(0) = 10000 & X_2(0) = 0 \\ \text{b: } b_1 = -0,3 & X_1(0) = 10000 & X_2(0) = 0 \end{array}$$

és $X_1(0) > 0$, $X_2(0) = 0$. A 4.2. ábra grafikonjai ezek figyelembe vételével készültek. A Malthus-féle modell alkalmas a populáció növekvő és csökkenő változásának leírására egyaránt, különösen a növekedés kezdeti szakaszában, ugyanakkor pontosan az általa fölvetett növekedési korlátokat nem képes kezelni.

4.2. Logisztikus növekedés (Verhulst-féle modell)

Pierre-François Verhulst (1804–1849) belga matematikus 1838-ban tovább fejlesztette Malthus modelljét, amely lehetővé teszi, hogy figyelembe vegyük a populáció egyedei közötti erőforrásokért folytatott belső versenyt. A növekedés zárt környezetben, korlátozott erőforrások mellett folyik, amely visszahat a növekedésre és akadályozza azt. Az adott rendszer tehát jól jellemezhető a környezet eltartóké-

pességével:

$$\dot{N}(t) = rN(t)\left(1 - \frac{N(t)}{K}\right). \quad (4.4)$$

Ahol r a növekedési ráta (Maltus-féle paraméter), K a környezet eltartóképessége, $N(t) > 0$ pedig jelenti a populáció méretét a t időpontba ($r, K \in \mathbb{R}^+$).

Az együtthatók alkalmas megválasztásával a (4.1) egyenlet (4.4)-hez hasonló formára hozható:

$$\dot{X}_1(t) = \left(b_1 + a_{11}X_1(t)\right)X_1(t), \quad (4.5)$$

ahol

$$\begin{array}{ccccc} b_1 > 0, & a_{11} < 0, & a_{12} = 0, & c_1 = 0, & e_1 = 0 \\ b_2 \in \mathbb{R}, & a_{21} \in \mathbb{R}, & a_{22} \in \mathbb{R}, & c_2 = 0, & e_2 = 0 \end{array}$$

$$\text{és } X_1(0) > 0, \quad X_2(0) = 0.$$

A (4.5)-ös egyenletben elvégezve a

$$b_1 = r, \quad a_{11} = -\frac{r}{K} \quad \text{és} \quad X_1(t) = N(t)$$

helyettesítéseket ez könnyen látható.

Verhulst elgondolása szerint, a populáció méretének növekedésével csökkennie kell a növekedési rátának. Lényegében a Malthus-féle modellt – amelyben a növekedést a növekedési ráta és a populáció méretének szorzata határozza meg – kiegészítette egy olyan szorzótényezővel, melynek értéke 0-hoz tart, ha $t \rightarrow \infty$.

Ha az eltartóképességnél kisebbnek választjuk a populáció kezdeti $N(t_0)$ méretét, akkor

$$0 < \frac{N(t_0)}{K} < 1$$

teljesül, azaz az

$$1 > 1 - \frac{N(t_0)}{K} > 0,$$

ami nem változtatja meg (4.4) jobboldalának előjelét, ugyanakkor

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{N(t)}{K}\right) = 0.$$

Ellenkező esetben, ha a $N(t_0) > K$, akkor

$$\frac{N(t_0)}{K} > 1,$$

tehát

$$1 - \frac{N(t_0)}{K} < 0,$$

és

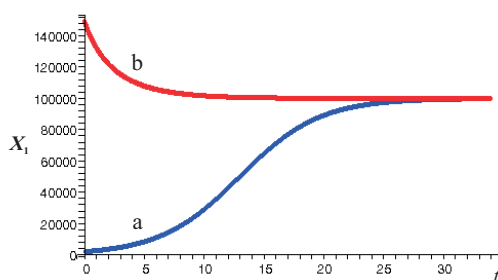
$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{N(t)}{K}\right) = 0$$

szintén teljesül. Ahogyan $N(t)$ értéke megközeledti az eltartóképességet, az

$$\frac{N(t)}{K}$$

tört értéke 1-hez közeli érték lesz. Ezt a korlátozó szerepet szemlélteti a 4.3. ábra:

- a: $N(t_0) < K$,
- b: $N(t_0) > K$.



4.3. ábra.

Logisztikus növekedés.

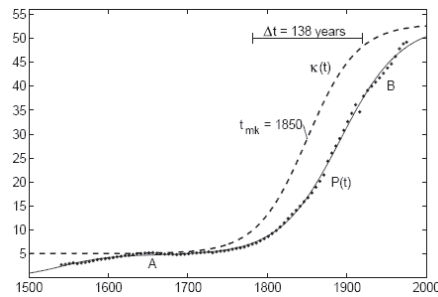
a: $b_1 = 0,3$	$a_{11} = -3 \cdot 10^{-6}$	$X_1(0) = 2,0 \cdot 10^3$	$X_2(0) = 0$
b: $b_1 = 0,3$	$a_{11} = -3 \cdot 10^{-6}$	$X_1(0) = 1,5 \cdot 10^5$	$X_2(0) = 0$

A (4.5) egyenlet a logisztikus növekedés jellegzetes, a 4.3/a. ábra szigmoid görbáját eredményezi, ha $b_1 + a_{11}X_1(0) > 0$ teljesül. Kezdeti szakaszában lassú növekedés jellemzi, ami később felgyorsul, de ahogyan $X_1(t)$ értéke egyre jobban megközelíti

$$-\frac{b_1}{a_{11}}$$

értékét, a növekedés ismét egyre lassúbbá válik.

Ezzel a modellel jobban közelíthetők a valódi rendszerek változásai függetlenül azok jellegétől. A tapasztalatok alapján alkalmas számos természeti, társadalmi vagy akár gazdasági változás leírására is. Ezt alátámaszthatjuk valós statisztikai illetve kísérleti adatokkal is. A 4.4. ábra tanúsága szerint az 1990-es évek második



4.4. ábra.

Anglia népességének változása 1500-tól 2000-ig³.

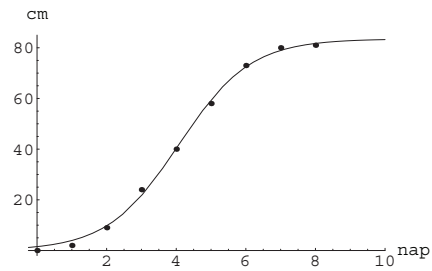
felére jól láthatóvá vált a népesség növekedési ütemének lassulása, ami a (4.4) modell szerint az ország korlátozott lehetőségeivel is magyarázható volna.

Továbbá az ábrán az is megfigyelhető, hogy a XVII–XVIII. század fordulóján szintén előfordult egy enyhébb növekedést követő telítési szakasz. Ekkor feltehetően a népesség szintén elérhette a környezet eltartóképességét. Ezt követően, valószínűleg az ipari forradalom (1769–1850) biztosította lehetőségeknek is köszönhetően ismét megindulhatott a népesség növekedése.

A különféle növények mérete fajra jellemző tulajdonság. Az ettől való lényeges eltérés általában ritkán fordul elő. A 4.5. ábra a bab példáján mutatja be, milyen növekedési folyamat eredményeként éri el egy növény a végleges méretét.

³Forrás:

MEYER P.S., AUSUBEL J.H., *Carrying Capacity: A Model with Logistically Varying Limits*, Technological Forecasting and Social Change, (1999)



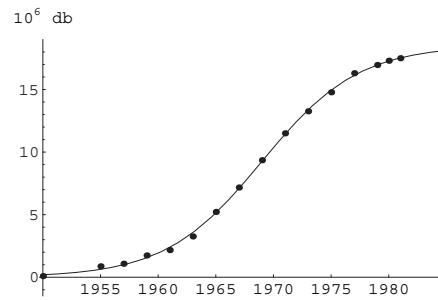
4.5. ábra.

Babszár hosszának változása 8 napon át.

A mért értékek és az azokhoz illesztett logisztikus görbe.

$$(N_0 = 1,53008 \quad r = 0,977361 \quad K = 83,4772)$$

A kereskedelemben a piac telítődése felel meg a populációs modellekben előforduló eltartó képesség fogalmának. Ezt szemlélteti a 4.6. ábra.



4.6. ábra.

Autók száma Olaszországban.

Statisztikai adatok és az azokhoz illeszkedő logisztikus görbe.

$$(N_0 = 0,194123 \cdot 10^6 \quad r = 0,239318 \quad K = 18,516 \cdot 10^6)$$

4.3. Populációk közötti interakció

A legtöbb rendszer esetében, például egy ökoszisztémában, nem hanyagolhatjuk el az ott élő fajok kölcsönös kapcsolatát, ha törekszünk a változások pontosabb leírására. Nagyban meghatározza az exponenciális és a logisztikus növekedési modell alkalmazhatóságát ez a körülmény. A Verhulst modellje ugyan számol a vizsgált populáció egyedei közötti versengéssel, de alkalmatlan az interspecifikus kölcsönhatások figyelembevételére. Tehát az egy faj populációnövekedését leíró modellekben más fajok egyedeit csupán a külvilág részeként, a többi befolyásoló tényezőtől megkülönböztethetetlenül vehetjük csak figyelembe.

Legyenek n különböző faj $P_1, P_2, \dots, P_n$ populációinak $N_1(t), N_2(t), \dots, N_n(t)$ egyedszámai⁴ a t időpillanatban. Az általános formában megadott

$$\begin{aligned}\dot{N}_1(t) &= f_1(t, N_1(t), N_2(t), \dots, N_n(t)) \\ \dot{N}_2(t) &= f_2(t, N_1(t), N_2(t), \dots, N_n(t)) \\ &\vdots \\ \dot{N}_n(t) &= f_n(t, N_1(t), N_2(t), \dots, N_n(t))\end{aligned}\tag{4.6}$$

egyenletrendszer kifejezi az egyes populációk változását, amelyre a többi faj is hatással van.

A *Lotka–Volterra*-egyenletek⁵ jelentik a nem lineáris differenciál-egyenletek egyik történeti szempontból is érdekes alkalmazását.

Vito Volterra korának ismert római professzora volt. Ökológiai jelenségek matematikai leírásával veje, a biológus *Umberto D’Ancona* megfigyelései kapcsán kezdett foglalkozni. A fiatal biológus az Adriai-tenger halászati adatainak elemzése során arra a megállapításra jutott, hogy az I. világháború idején, amikor a hadi

⁴Természetesen az egyedszámot nem tekinthetjük folytonos mennyiségnek, de ha az egyedszám elegendően nagy, nem követünk el túlságosan nagy hibát, ha az adott populáció által képviselt biomassa nagyságát az egyedszámmal jellemezzük.

⁵Bár eredetileg két populáció (zsákmány–ragadozó) kölcsönhatásait, és a kölcsönhatásoknak a populációk méretére gyakorolt hatását modellezték vele, később sikeresen alkalmazták más területeken is, például az oszcilláló kémiai reakciók esetében egy lehetséges modellként tartják számon. Bár konkrét autokatalitikus reakciót még nem ismerünk, melynek mechanizmusát le tudnánk írni vele, ugyanakkor alapjául szolgált más modellek létrehozásához. Ez a tény arra enged következtetni, hogy talán a populáció fogalmát értelmezhetjük a szokásostól általánosabban is. Ennek megfelelően a későbbiekben populáció alatt nem föltétlen valamely biológiai sokaságot fogunk érteni.

események és körülmények erősen korlátozták a halászatot, a korábbiakhoz képest jelentősen megváltozott a lehalászott halfajok aránya. Bizonyos ragadozó halak gyakrabban kerültek a halászok hálóiába, ugyanakkor a táplálékukat képező fajok aránya lecsökkent. Fölfigyelt arra is, hogy a kifogott ragadozó és a zsákmány halak száma és aránya ciklikusan változik. Ebből a halpopulációk nagyságának periódikus változására következtetett. Volterra a megfigyelt változások leírására az

$$\begin{aligned}\dot{N}_1(t) &= \beta_1 N_1(t) - \alpha_1 N_1(t) N_2(t) \\ \dot{N}_2(t) &= -\beta_2 N_2(t) + \alpha_2 N_1(t) N_2(t)\end{aligned}\tag{4.7}$$

egyenletrendszerhez hasonló kétváltozós közönséges differenciálegyenlet-rendszert javasolt, ahol $N_1(t)$ a zsákmány, $N_2(t)$ pedig a ragadozó populáció nagysága a t időpontban, α_i és β_i ($i = 1, 2$) pedig a rendszerre jellemző pozitív valós konstansok.

A (4.7) egyenlet alapján a zsákmány populáció nagyságának változását ($\dot{N}_1(t)$) két dolog határozza meg. A populáció szaporulata csak a populáció pillanatnyi nagyságától függ míg az populáció egyedeinek pusztulása a populáció nagyságán túl függ még a ragadozók számától is. Hasonló összefüggés figyelhető meg a ragadozó populáció változásának ($\dot{N}_2(t)$) vonatkozásában is.

Ha tehát tekintünk egy olyan rendszert, amelyben P_2 populáció egyedeinek kizárólagos táplálékát a P_1 populáció egyedei jelentik, nyilvánvaló, hogy a két faj egyedszámának változása azon túl, hogy függ az egyes populációk nagyságától, nem lehet független egymástól sem. Eredményeit 1926-ban publikálta olasz nyelven. Szinte ezzel egyidőben, Volterrától függetlenül az amerikai *Alfred J. Lotka* az *Elements of Physical Biology* című könyvében hasonló eredményekről számolt be. Bár egyikük egy a gyakorlatban fölmerülő probléma révén jutott el az általánosabb elméleti kérdések matematikai megfogalmazásáig, másikuk alapvetően azzal a szándékkal fordult ökológiai problémák felé, hogy matematikai modellt találjon bizonyos jelenségek leírásához, eredményeik túl mutattak az ökológia tudományán, hiszen a későbbiekben más tudományterületekhez köthető problémákkal kapcsolatban is sikeresen alkalmazták azokat.

A (4.7) egyenletekben a két faj kölcsönhatásának az adott i -edik populációra gyakorolt hatását az $\alpha_i N_1(t) N_2(t)$ szorzatokkal vehetjük figyelembe. A hatás nagysága a szorzótényezők abszolútértékétől függ, és aszerint *kedvező*, *kedvezőtlen* illetve *közömbös*, hogy

$$\alpha_i > 0, \quad \alpha_i < 0 \quad \text{illetve} \quad \alpha_i = 0.$$

A szorzat előjelét tehát α_i előjele határozza meg, ugyanis a probléma szempontjából $N_i(t) \leq 0$ értékek⁶ értelmetlenek volnának. Ha most a (4.1) modellben az $X_i(t)$ -knek tulajdonítjuk azt a jelentést, mint (4.7)-ben az $N_i(t)$ -knek, akkor az α_1 -nek a_{12} , α_2 -nek pedig a_{21} felel meg.

A fenti megállapítás alapján kézenfekvő az a gondolat, hogyha az a_{ij} együttműködőket ($i \neq j$) előjelüket tekintve az összes lehetséges módon megválasztjuk, akkor ezzel a Lotka–Volterra-modell olyan általánosítását kapjuk, amellyel (a modell adta korlátok mellett) a két populáció között működő kölcsönhatás minden lehetséges típusát le tudjuk írni. Az ilyen módon leírható eseteket a 4.1. táblázat foglalja össze.

a_{12}	a_{21}	Interrakció típusa
+	+	szimbiózis
+	−	zsákmányszerzés ⁷
+	0	asztalközösség
−	−	fajok közötti versengés
−	0	amenzalizmus, antibiózis
0	0	neutrális kölcsönhatás

4.1. táblázat.

Két faj lehetséges kölcsönhatása a_{12} , a_{21} együttműködő értékeivel kifejezve.

Amint láttuk, a (4.4) logisztikus modell lényegében kifejezi az adott populáció egyedei közötti versengést is. Természetesen hasonló tényezővel abban az esetben is számolni kell, ha két különböző populáció egyedei azonos erőforrásokért küzdenek. Ez jelenthet egy másik lehetőséget a két különböző populáció egyedeinek interakciójára. Ugyanakkor az is megfigyelhető, hogy a fajok kölcsönhatása mindkét fél számára kedvező, vagy kedvezőtlen, esetleg az egyik számára közömbös. A

⁶A populáció mérete nem írható le negatív számmal, ugyanakkor $N_i(t) = 0$ pedig a kölcsönhatás szempontjából volna értelmetlen.

⁷Elméletalkotások céljából az ökológusok a zsákmányszerzés fogalmát a lehető legáltalánosabban adták meg: élő szervezetek elfogyasztása függetlenül attól, hogy milyen szervezetről van szó. Tehát ebbe a fogalomkörbe tartozik a növényevés, a húsevés, a parazitizmus és a parazita életmód is.

4.1. táblázat tanúsága szerint az említett lehetséges kölcsönhatásoknak ökológiai rendszerekben léteznek valódi megfelelői.

Mivel nem lehet cél ezek részletes tárgyalása, a lehetséges kölcsönhatások sorából csak kettőt kiemelve mutatjuk be, hogy a (4.1) rendszer alkalmas az adott interakció modellezésére.

4.3.1. Zsákmány-ragadozó modell

A modell részletesebb vizsgálatát történeti jelentőségén túl ismertsége is indokolja. Ugyanakkor elengethetetlenül szükséges olyan fontos ökológiai fogalmak szemléltetéséhez, mint például a tápláléklánc.

Megfelelő kezdeti feltétel ($X_1(0) \gg 1$, $X_2(0) \gg 1$) és a paraméterek alkalmas

$$\begin{array}{ccccc} b_1 > 0, & a_{11} = 0, & a_{12} < 0, & c_1 = 0, & e_1 = 0, \\ b_2 < 0, & a_{21} > 0, & a_{22} = 0, & c_2 = 0, & e_2 = 0 \end{array}$$

megválasztása esetén a (4.1) egyenletek a Volterra általt javasolt

$$\begin{aligned} \dot{X}_1(t) &= (b_1 + a_{12}X_2(t))X_1(t) \\ \dot{X}_2(t) &= (b_2 + a_{21}X_1(t))X_2(t) \end{aligned} \tag{4.8}$$

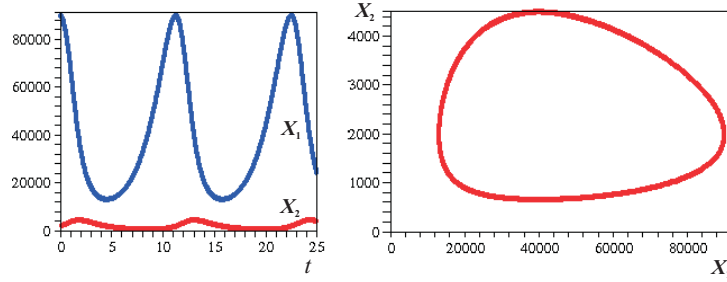
alakra hozhatók.

A 4.7. ábra a (4.8) egyenletek egy konkrét paraméterezésével készült. A rendszer trajektóriája egy egyensúlyi állapot körül rajzolható meg.

A tapasztalat alapján nem hagyható figyelmen kívül a populációk önszabályozása sem, amely annál jobban érvényesül, minél nagyobb a populáció mérete, és annak további növekedése ellen hat.

Válasszuk meg most (4.1) egyenletek paramétereit úgy, hogy eleget tegyenek az alábbi feltételeknek:

$$\begin{array}{ccccc} b_1 > 0, & a_{11} \leq 0, & a_{12} < 0, & c_1 = 0, & e_1 = 0, \\ b_2 < 0, & a_{21} > 0, & a_{22} \leq 0, & c_2 = 0, & e_2 = 0 \end{array}$$



4.7. ábra.

Zsákmány-ragadozó modell.

(A két populáció mérete az idő függvényében és a rendszer trajektóriája.)

$$\begin{aligned} X_1(0) &= 90000 & b_1 &= +0,6 & a_{12} &= -0,3 \cdot 10^{-4} \\ X_2(0) &= 2000 & b_2 &= -0,6 & a_{21} &= +1,5 \cdot 10^{-5} \end{aligned}$$

Az így nyert

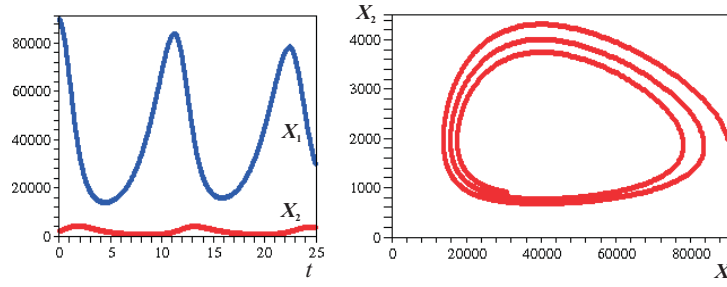
$$\begin{aligned} \dot{X}_1(t) &= (b_1 + a_{11}X_1(t) + a_{12}X_2(t))X_1(t) \\ \dot{X}_2(t) &= (b_2 + a_{21}X_1(t) + a_{22}X_2(t))X_2(t) \end{aligned} \quad (4.9)$$

egyenletek a_{ii} ($i = 1, 2$) paramétereik révén alkalmasak az egyes populációkon belüli versengés leírására is. Ahogyan ez a 4.8. ábrán is látható ennek a rendszer szempontjából stabilizáló szerepe van.

4.3.2. Két faj versengése

A versengés fogalma, azaz a közös, létfontosságú erőforrások megszerzésére irányuló tevékenység fogalma már a (4.9) modell kapcsán is fölvetődött. Az ott leírt fajon belüli versengés azonban „mellékes” szerepet játszott a két populáció zsákmány-ragadozó kölcsönhatáshoz képest. A

$$\begin{aligned} \dot{N}_1(t) &= r_1 N_1(t) \frac{K_1 - N_1(t) - \kappa_2 N_2(t)}{K_1} \\ \dot{N}_2(t) &= r_2 N_2(t) \frac{K_2 - N_2(t) - \kappa_1 N_1(t)}{K_2} \end{aligned} \quad (4.10)$$



4.8. ábra.

Zsákmány-ragadozó modell interspecifikus versengés figyelembe vételével.

$$\begin{aligned} X_1(0) &= 90000 & b_1 &= +0,6 & a_{11} &= -0,5 \cdot 10^{-7} & a_{12} &= -0,3 \cdot 10^{-4} \\ X_2(0) &= 2000 & b_2 &= -0,6 & a_{21} &= +1,5 \cdot 10^{-5} \end{aligned}$$

egyenletekkel leírható modell azonban két különböző faj egyedei által alkotott populációk hasonló kölcsönhatásának leírására alkalmas, ahol

- K_i : a környezet eltartóképessége az i -edik fajra vonatkozóan,
- r_i : az i -edik faj növekedési rátája,
- κ_i : kompetíciós koefficiens azt fejezi ki, hogy az i -edik faj, milyen mértékben csökkenti a másik faj lehetőségeit. ($i = 1, 2$)

A (4.10) egyenletek gyakorlati jelentőségét növeli az a sok-sok szomorú tapasztalat, hogy adott ökoszisztémába betelepített, behurcolt fajok sokszor olyan durva beavatkozást jelenthetnek, hogy az őshonos fajok teljes eltűnését is eredményezhetik. Hasonló esetekben, a várható következmények megítélése szempontjából fontos a rendszer lehetséges egyensúlyi állapotainak vizsgálata.

A rendszer akkor van egyensúlyban, ha N_1 és N_2 állandó, azaz

$$\dot{N}_i(t) = 0, \quad (i = 1, 2).$$

(4.10) alapján látható, hogy attól a triviális esettől eltekintve, hogy

$$r_i N_i(t) = 0,$$

ez csak akkor teljesülhet, ha

$$K_1 - N_1(t) - \kappa_2 N_2(t) = 0$$

és

$$K_2 - N_2(t) - \kappa_1 N_1(t) = 0.$$

A fázistérben ezek az egyenletek két egyenest határoznak meg. Ezek kölcsönös helyzete és a kezdeti feltétel ezekhez képest történő megválasztása alapján megadható a várható egyensúlyi állapot jellege.

Válasszuk most (4.1) egyenletek paramétereit úgy, hogy eleget tegyenek az alábbi feltételeknek

$$\begin{array}{lllll} b_1 > 0, & a_{11} < 0, & a_{12} < 0, & c_1 = 0, & e_1 = 0, \\ b_2 > 0, & a_{21} < 0, & a_{22} < 0, & c_2 = 0, & e_2 = 0 \end{array}$$

és abban a

$$\begin{array}{lll} b_1 = r_1, & a_{11} = -\frac{r_1}{K_1}, & a_{12} = -\frac{r_1 \kappa_2}{K_1}, \\ b_2 = r_2, & a_{21} = -\frac{r_2 \kappa_1}{K_2}, & a_{22} = -\frac{r_2}{K_2} \end{array}$$

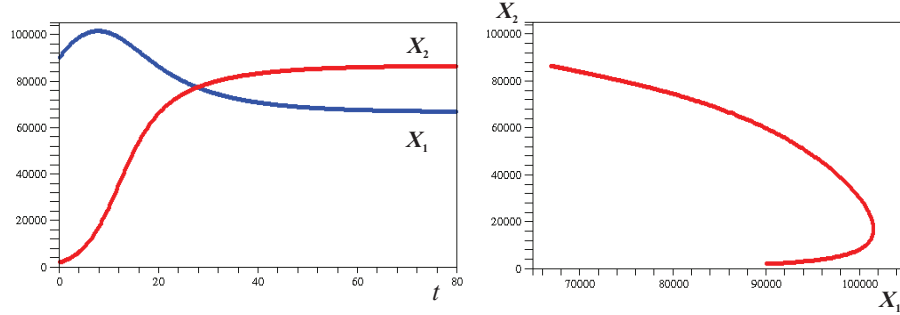
helyettesítéseket alkalmazva, a (4.1) egyenletekből az (4.10) egyenleteket kapjuk.

A 4.9. ábra egy olyan kivételes esetet szemléltet, amelyben a jóval kisebb kezdeti nagysággal rendelkező P_2 populáció egyedeinek jobban kedveztek a feltételek, de ennek ellenére olyan egyensúly alakulhatott ki, amely nem eredményezte egyik populáció eltűnését sem.

A Lotka–Volterra-modell általánosításának másik lehetősége lehetne, hogy tegyük alkalmassá kettőnél több faj kölcsönhatásának leírására. Mivel a rendszer állapotváltozóit az egyes populációk mérete jelenti, ezért az egyenletrendszer újabb egyenletekkel való bővítése szükséges, amelyek alkalmasak egy-egy populáció egyedszámváltozásainak leírására. Ugyanakkor az egyes egyenleteket alkalmassá kell tenni bármely két faj egyedei közötti kölcsönhatás leírására is. Az ilyen egyenletrendszerek (4.6)-hoz hasonló alakban írhatók le. Három faj kölcsönhatásait figyelembe véve erre ad példát a *R.M. May* és *W.J. Leonard* által vizsgált

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= (1 - x_1(t) - \alpha_1 x_2(t) - \beta_1 x_3(t)) x_1(t) \\ \dot{x}_2(t) &= (1 - \beta_2 x_1(t) - x_2(t) - \alpha_2 x_3(t)) x_2(t) \\ \dot{x}_3(t) &= (1 - \alpha_3 x_1(t) - \beta_3 x_2(t) - x_3(t)) x_3(t) \end{aligned} \quad (4.11)$$

háromdimenziós ragadozó-zsákmány rendszer, ahol α_i és β_i ($i = 1 \dots 3$) a rendszerre jellemző valós konstansok. A modell leírja a három populáció méretével



4.9. ábra.

Két faj versengése.

(A két populáció mérete az idő függvényében és a rendszer trajektóriája.)

$$X_1(0) = 90000; \quad b_1 = 0,2; \quad a_{11} = -1,82 \cdot 10^{-6}; \quad a_{12} = -9,09 \cdot 10^{-7}$$

$$X_2(0) = 2000; \quad b_2 = 0,6; \quad a_{21} = -3,00 \cdot 10^{-6}; \quad a_{22} = -4,62 \cdot 10^{-6}$$

jellemezhető rendszer változását. A korábbiak általánosítását⁸ jelenti a

$$\dot{X}_i(t) = r_i \cdot X_i(t) \left(1 + \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} \cdot X_j(t) \right) \quad (4.12)$$

$$(i = 1, \dots, n)$$

alakú egyenletrendszer. Segítségével leírhatjuk az n faj populációiból álló rendszereket, ahol r_i az i -edik faj növekedési rátáját jelenti, α_{ij} pedig kifejezi, hogy j -edik faj milyen hatással van az i -edik növekedésére.

Ez azt jelenti, hogy szemléltethetjük a rendszert egy olyan n csomópontból álló gráffal, amelyben a csomópontok az egyes populációknak felelnek meg, míg az élek

⁸Könnyen belátható, hogy (4.12)

$n = 1$ esetén a logisztikus növekedési modellt,

$n = 2$ esetén a Lotka–Volterra-modellt, míg

$n = 3$ esetén a May–Leonard-modellt eredményezi.

a populációk közötti viszonyt jelenítik meg. Az 4.12 egyenlet α_{ij} együtthatóit egy

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$$

mátrixba rendezhetjük. Ha tehát

$$\alpha_{ij} = 0,$$

az azt fejezi ki, hogy i -edik fajjal a j -edik nincs semmiféle interakcióban.

4.4. Harci modellek

A differenciálegyenletek alkalmazásának lehetősége fölmerült a háborúban szemben álló felek analízise során is (jelölje $X_1(t)$ és $X_2(t)$ a két haderő (I és II) harcosainak a számát a t időpillanatban). Ezen a területen való alkalmazás *Frederick W. Lanchester* nevéhez fűződik, aki az első világháború idején harci modellt alkalmazott a háborús események kimenetelének előre jelzésében.

A modellben $\dot{X}_1(t)$ és $\dot{X}_2(t)$ jelöli a felek haderejének változását. A probléma szempontjából meg kell különböztetnünk az ellenség által közvetlenül okozott úgynevezett harci veszteséget, és a betegségek, balesetek (harc cselekményekhez nem köthető események) miatt bekövetkező működési veszteségeket. Bár a valóságban utánpótlás és csapatkivonás is történhet, amit a (4.1) modellben e_i -k értékével vehetünk figyelembe ($e_i > 0$: utánpótlás; $e_i < 0$: csapatkivonás), a későbbiek folyamán a modellnek ezt a lehetőségét nem fogjuk kihasználni. A továbbiakban a szemben álló felek stratégiáitól függő három modellt vizsgálunk meg.

A (4.1) egyenletben a b_i paraméterek megválasztásával az i -edik haderő működési veszteségét, míg az a_{ij} ($i \neq j$) és a c_j értékekkel a harci veszteség mértékét befolyásolhatjuk. Kezdeti feltételként

$$X_1(0) > 0 \text{ és } X_2(0) > 0$$

értékek adhatók meg.

Hagyományos harc

Ez a modell akkor alkalmazható, ha a szemben álló felek hagyományos módon küzdenek egymás ellen, azaz a két haderő harcosai láthatók egymás számára. A (4.1) egyenletrendszer esetében a

$$\begin{array}{ccccc} b_1 < 0, & a_{11} = 0, & a_{12} = 0, & c_1 < 0, & e_1 = 0, \\ b_2 < 0, & a_{21} = 0, & a_{22} = 0, & c_2 < 0, & e_2 = 0 \end{array}$$

paramétereket alkalmazva az

$$\begin{aligned} \dot{X}_1(t) &= b_1 X_1(t) + c_1 X_2(t) \\ \dot{X}_2(t) &= b_2 X_2(t) + c_2 X_1(t) \end{aligned} \tag{4.13}$$

rendszer áll elő, amely kifejezi, hogy az adott tábor vesztesége csak az ellenfél kiképzettségétől és létszámától függ. A 4.10. ábra megfelelő kezdeti feltételek és paraméterek megadása után készült a (4.13) egyenlet alapján.

Gerilla-harc

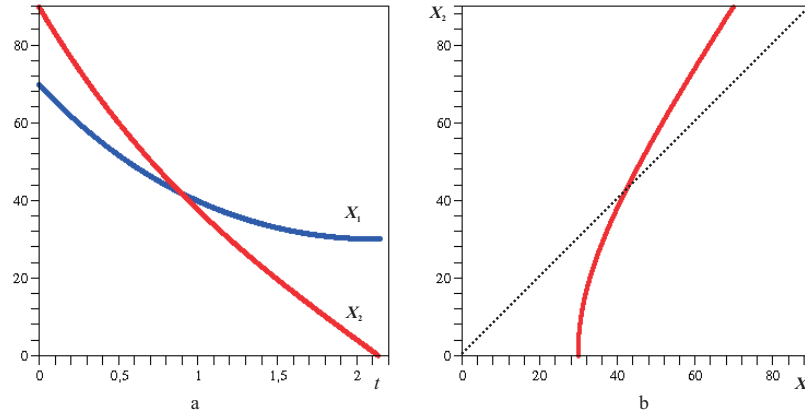
Ebben az esetben mindkét haderő harcosai igyekeznek rejtve maradni az ellenfél harcosai számára. Az ilyen harc alakulásának egy lehetséges leírása az

$$\begin{aligned} \dot{X}_1(t) &= b_1 X_1(t) + a_{12} X_1(t) X_2(t) \\ \dot{X}_2(t) &= b_2 X_2(t) + a_{21} X_2(t) X_1(t). \end{aligned} \tag{4.14}$$

rendszer alkalmas, amely a (4.1) egyenletekből az alábbi paraméterezéssel nyerhető:

$$\begin{array}{ccccc} b_1 < 0, & a_{11} = 0, & a_{12} < 0, & c_1 = 0, & e_1 = 0, \\ b_2 < 0, & a_{21} < 0, & a_{22} = 0, & c_2 = 0, & e_2 = 0 \end{array}$$

Fontos megjegyeznünk, hogy a (4.14) egyenletrendszer formailag megegyezik a Volterra által javasolt (4.7) és a (4.1)-ből származtatott (4.8) egyenletekkel, csupán a paraméterekben van eltérés. A 4.11. ábrán a (4.14) egyenletek egy alkalmazása látható az ott megadott paraméterekkel.



4.10. ábra.

Hagyományos harc.

$$\begin{array}{lll} X_1(0) = 70 & b_1 = -0,01 & c_1 = -0,5 \\ X_2(0) = 90 & b_2 = -0,007 & c_2 = -1 \end{array}$$

Vegyes (gerilla-hagyományos) harc

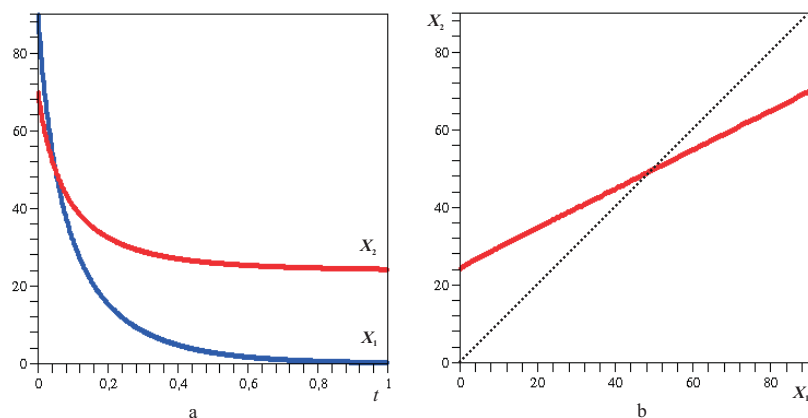
Tegyük fel, hogy az I-es csapatai gerilla harcot folytatnak. Ez azt jelenti, számukra II-es harcosai jó célpontot nyújtanak, például mert I-es lesből támad vagy mert csapataik elsáncolták magukat. Ugyanakkor a II-es csapatai hagyományos harcot kénytelenek folytatni. Az ilyen küzdelem modellezését az

$$\begin{aligned} \dot{X}_1(t) &= b_1 X_1(t) + a_{12} X_1(t) X_2(t) \\ \dot{X}_2(t) &= b_2 X_2(t) + c_2 X_1(t). \end{aligned} \quad (4.15)$$

rendszer

$$\begin{array}{lllll} b_1 < 0, & a_{11} = 0, & a_{12} < 0, & c_1 = 0, & e_1 = 0, \\ b_2 < 0, & a_{21} = 0, & a_{22} = 0, & c_2 < 0, & e_2 = 0 \end{array}$$

paraméterek megadása mellett teszi lehetővé.



4.11. ábra.

Gerilla-harc.

$$\begin{array}{lll} X_1(0) = 90 & b_1 = -0,01 & a_{12} = -0,2 \\ X_2(0) = 70 & b_2 = -0,003 & a_{21} = -0,1 \end{array}$$

A 4.12. ábrán jól látható, hogy a megadott feltételek és paraméterek mellett a gerilla csapatok győztek. Történt ez olyan extrém paraméterezés ellenére, amellyel egyáltalán nem kedveztünk az I-es haderőnek. A működési veszteségeket leíró paraméterek

$$\frac{b_1}{b_2} = 5$$

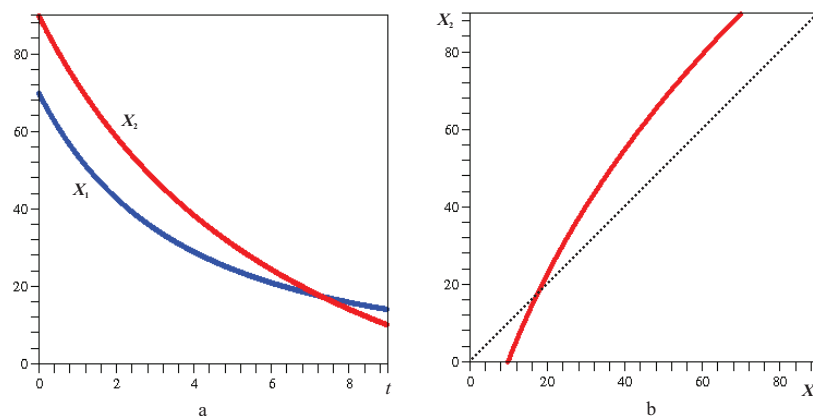
hányadosa igen nagy. Ez azt fejezi ki, hogy a gerillák között ötszörte gyakrabban válnak harcképtelenné az emberek például betegség következtében, mint az ellenség táborában. Mindemellett a küzdelem kezdetekor a hagyományos haderő létszámbeli fölényrel rendelkezik.

A győzelem ennél is látványosabb lett volna, ha a harci veszteségeket jellemző paraméterek értékét realisabban választottuk volna meg. Azonos tűzerőt és találati pontosságot feltételezve a

$$\frac{c_2}{a_{12}}$$

hányados értéke jóval meghaladhatná a 10^2 nagyságrendet is.

Úgy tűnik, hogy ez a stratégia a hagyományos harcot folytató haderő szempon-



4.12. ábra.

Vegyes harc.

$$\begin{array}{llll} X_1(0) = 70 & b_1 = -0,1 & a_{12} = -0,002 & \\ X_2(0) = 90 & b_2 = -0,02 & & c_2 = -0,26 \end{array}$$

tjából igen nagy veszteségekkel, ugyanakkor kevés eredménnyel jár. Ilyen háborút folytatott az USA Vietnámban, amit el is veszített 1968-ban⁹.

4.5. Rezgőmozgás

A mechanikai rezgés jelensége és annak különböző fajtái igen korán ismertté váltak az alkotó ember számára. Mielőtt megismerte volna a jelenség lényegét, nem beszélve annak matematikai modelljéről, különféle módokon húzott hasznos tudása alkalmazásával. Például hangszereket őseink már jóval az előtt készítették, hogy a különféle jelenségeket tudományos igénnyel kezdték volna vizsgálni. Ugyanakkor nem egyszer szenvedtünk hátrányt a jelenségek felületes ismerete miatt.

⁹Ebben a háborúban a gerillák létszáma $2,8 \cdot 10^5$, míg a szemben álló amerikai és szövetséges haderők létszáma $1,68 \cdot 10^6$ volt. Ez hatszoros túlerőt jelentett, mégsem volt elegendő a győzelemhez.

Például 1831-ben az öntöttvasból készült Broughton-híd pusztulását hatvan menetelő katona okozta. Egy másik, gyakran említett példa a Washington állambeli Tacoma híd katasztrófája, amelyet a híd fizikai paramétereinek és a vidékre jellemző erős szellőkések szerencsétlen együttese okozott¹⁰.

Az egyik végén függőlegesen felfüggesztett rugó, és a rugó másik végén rögzített m tömegű test alkotják talán a legegyszerűbb rendszert, amely alkalmas a mechanikai rezgések szemléltetésére. Tekintsük a testet pontszerűnek. A rendszer nyugalmi helyzetében a tömegpontra ható mg súlyerő és a rugó Δl megnyúlásából származó visszatérítő erő van egyensúlyban.

Nyugalmi helyzetéből (függőleges irányban) kimozdítva a testet, majd magára hagyva, a tömegpont mozgása a

$$\ddot{X}(t) = -\frac{c}{m}\dot{X}(t) - \omega_0^2 X(t) \quad (4.16)$$

másodrendű lineáris konstans együtthatós homogén differenciálegyenlettel írható le, amelyben $X(t)$ egy m tömegpont egyensúlyi helyzetétől való pillanatnyi eltérését jelenti. Továbbá a (4.16) egyenletben a $c \geq 0$ surlódási együtthatóval jellemezhetjük a rendszer csillapítását, az $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ pedig a rugó paramétereitől és a mozgó test tömegétől függő állandót, a szögsebességet jelenti.

A rendszer idealizációját jelenti a $c = 0$ választás. Ekkor azt feltételezzük, hogy a mozgó testre semmiféle külső erő nem hat, azaz eltekintünk a valós rendszerekben mindig fellépő surlódásból származó csillapítástól. Bizonyos esetekben, a rendszer kellően rövid ideig történő leírására alkalmas ez a modell.

Az átviteli elvnek megfelelően (4.16) egyenlet az

$$\begin{aligned} \dot{X}_1(t) &= X_2(t) \\ \dot{X}_2(t) &= -\frac{c}{m}X_2(t) - \omega_0^2 X_1(t). \end{aligned} \quad (4.17)$$

differenciálegyenlet-rendszerré alakítható. A (4.17) egyenletrendszerben $X_1(t)$ a tömegpont egyensúlyi helyzettől való előjeles kitérését jelenti, amely függ az időtől, $X_2(t)$ pedig a sebességét jelenti (szintén előjelesen) a t időpillanatban. A (4.17) egyenletrendszerből továbbá az is nyilvánvaló, hogy a tömegpont pillanatnyi gyorsulása ($\ddot{X}_2(t)$) a kitéréstől és a pillanatnyi sebességtől függ.

¹⁰Bár a fent említett esetek a külső erő hatására bekövetkező kényszerrezgés jelenségével magyarázhatók, és ennek szimulációja a (4.1) modell segítségével nem lehetséges, általában a rezgés jelenségének fontossága miatt szükséges említést tenni ezekről.

Harmónikus rezgőmozgás

A (4.1) egyenletrendszer paramétereit

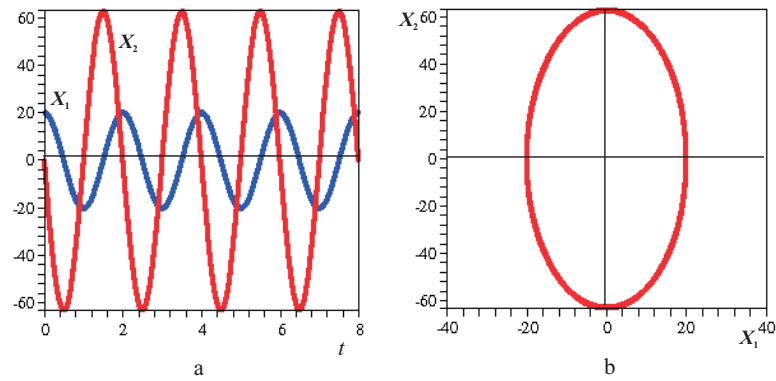
$$\begin{array}{lllll} b_1 = 0, & a_{11} = 0, & a_{12} = 0, & c_1 = 1, & e_1 = 0, \\ b_2 = 0, & a_{21} = 0, & a_{22} = 0, & c_2 = -\omega_0^2, & e_2 = 0 \end{array}$$

módon megválasztva a harmónikus rezgőmozgás leírására alkalmas

$$\begin{aligned} \dot{X}_1(t) &= c_1 X_2(t) \\ \dot{X}_2(t) &= c_2 X_1(t) \end{aligned} \tag{4.18}$$

egyenletrendszert kapjuk.

A kezdeti feltétel megadásakor figyelembe kell venni, hogy az $X_1(0)$ és $X_2(0)$ egyszerre nem lehet 0, mivel az pontosan a rendszer nyugalmi állapotát jellemzi. A fenti értelmezésnek megfelelően a 4.13. ábra azt mutatja be, ahogy a nyugalom-



4.13. ábra.

Harmónikus rezgőmozgást végző tömegpont.

$$\begin{array}{ll} X_1(0) = 20 & c_1 = 1 \\ X_2(0) = 0 & c_2 = -\pi^2 \end{array}$$

ban lévő tömegpontot nyugalmi helyzetéhez képest 20 egységgel kimozdítottuk és magára hagytuk. A mozgást úgy is elindíthattuk volna, hogy a pontot nyugalmi helyzetéből $X_2(0) \neq 0$ kezdősebességgel indítjuk.

Csillapított rezgés (szabad rezgés)

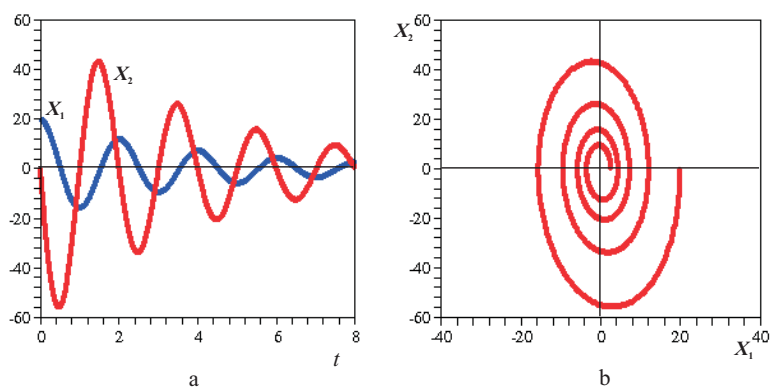
A gyakorlatban egy test mozgását a surlódás vagy a közegellenállás következtében fellépő külső erő mindig gátolja. A

$$\begin{array}{ccccc} b_1 = 0, & a_{11} = 0, & a_{12} = 0, & c_1 = 1, & e_1 = 0, \\ b_2 = -\frac{c}{m}, & a_{21} = 0, & a_{22} = 0, & c_2 = -\omega_0^2, & e_2 = 0 \end{array}$$

paraméterek választásával a (4.1) egyenletrendszert ennek leírására tettük alkalmassá az

$$\begin{aligned} \dot{X}_1(t) &= c_1 X_2(t) \\ \dot{X}_2(t) &= b_2 X_2(t) + c_2 X_1(t) \end{aligned} \quad (4.19)$$

formában. Az $X_1(0)$ és $X_2(0)$ kezdeti feltételek megadásakor a harmonikus rezgő-



4.14. ábra.

Csillapított rezgés.

$$\begin{array}{lll} X_1(0) = & 20 & b_2 = -0,5 \quad c_1 = 1 \\ X_2(0) = & 0 & c_2 = -\pi^2 \end{array}$$

mozgásnál megadott szempontokat itt is figyelembe kell venni.

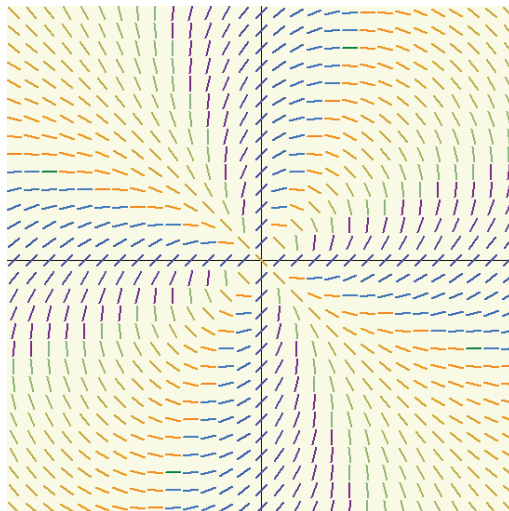
5. Fejezet

Néhány közelítő megoldás geometriai szemléltetése

5.1. Iránymező

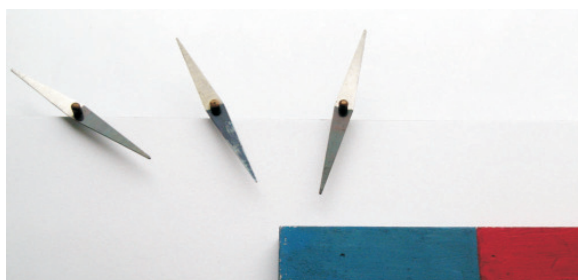
Láthattuk, hogy az explicit differenciálegyenletek rendelkeznek azzal az érdekes és kivételes tulajdonsággal, hogy bár esetenként magáról a megoldásról igen keveset tudunk, de a sík minden pontjában ismerjük a megoldásgörbe érintőjének meredekségét. Kalmár László, volt szegedi professzor, ezt találóan úgy szemléltette, mintha a sík minden pontjában állna egy-egy közlekedési rendőr, akik jeleznék, hogy a ponton áthaladó görbe milyen irányban haladhat. És valóban, bevált gyakorlat a differenciálegyenletek tanulmányozása során, hogy megfelelő pontokban megrajzoljuk az érintők egy darabkáját, azzal a céllal, hogy a megoldások viselkedésére következtethessünk ezek alapján. A 5.1. ábra az $y = x$ és a $y = -x$ egyenesekre tengelyesen, azok metszéspontjára pedig középpontosan szimmetrikus. Az ábrát összevetve a 3.2. ábrával, könnyen látható, hogy ábránk „egyenes-darabkái” egymást és az $y = -x$ egyenest az origóban érintő körök érintői.

A hasonlat annyira találó, hogy bizonyos rendszerek esetében valóban van lehetőség ilyen „közlekedési rendőrök” elhelyezésére. Természetesen inkább csak az indikátor szerepét töltik be, hiszen nem ők mutatják meg, hogy merre „haladhatnak” a görbék, sokkal inkább csak jelzik azok érintőinek irányát az adott pontban.



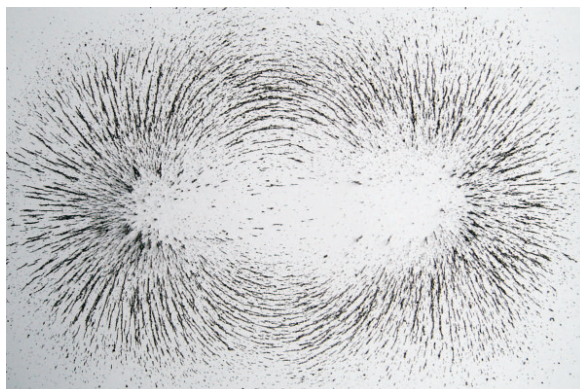
5.1. ábra.

A $\frac{dy}{dx} = \frac{y^2 - x^2 - 2xy}{y^2 - x^2 + 2xy}$ differenciálegyenlet alapján rajzolható iránymező.



5.2. ábra.

A mágnesűk a rúd mágnese erőterében az erővonalak irányát mutatják.



5.3. ábra.

A vasreszelék rajzolata sokkal részletesebben jeleníti meg a mágneses erővonalakat.

Gondoljunk csak a már általános iskolások által is ismert fizikai kísérletekre, amelyek bemutatásakor mágnesűket illetve vasreszeléket helyezünk egy rúd mágnes erőterébe. Az 5.2. ábrán látható iránytűk állásából és az 5.3. ábra vasszemcséinek elrendeződésével létrejövő rajzolatból következtethetünk a mágneses erővonalak irányára.

Az adott rendszer sajátosságaitól függően más és más lehetőséget találhatunk a rendszer jellemzőinek bemutatására. A természetet járva megfigyelhetjük, ahogyan egy patak medrében élő vizinövények szára, levelei legalábbis azt mutatják, hogy milyen kölcsönhatás van az áramló folyadék és a növény részei között. A szélcsatornában végzett áramlástan vizsgálatok esetében sokszor füsttel teszik láthatóvá az áramló levegő útját. (Mintha Kalmár professzor úr közlekedési rendőreit rávettük volna, hogy üljenek motorra és mutassák az utat.) Vajon megadható-e ennek a matematikai megfelelője?

5.2. Egylépéses módszerek

Fölhasználva a kezdetiérték-probléma geometriai jelentésében rejlő lehetőséget, szemléltethetjük néhány közelítő megoldás elvét. Bár a (3.8) egyenlet szolgál

a későbbiek alapjául a (3.9) feltétel mellett, az eljárások általánosítása könnyen elvégezhető (3.11) vonatkozásában is.

Szükséges továbbá még azt is megjegyezni, hogy az alábbiakban csupán néhány úgynevezett diszkrét módszer¹ tárgyalására szorítkozunk, amelyek jellemző módon a megoldás közelítésére csak véges sok pontban adnak lehetőséget, tetszőleges pontossággal. Geometriai értelemben tehát a közelítő megoldások megadása ekvivalens egy $P_0, P_1, \dots, P_n$ pontsorozat megadásával, ahol $P_i \in T$ ($0 \leq i \leq n$) és P_0 megfelel a kezdeti feltételnek. Ennek kapcsán adjunk meg továbbá egy $h \in \mathbb{R}$ pozitív lépésközt, mely kifejezi az egymást követő P_i és P_{i-1} pontok első koordinátáinak különbségét.

Egy diszkrét módszert k -lépéses módszernek nevezünk, ha a következő P_i közelítéshez fölhasználjuk az öt megelőző $P_{i-k}, P_{i-k+1}, \dots, P_{i-1}$ közelítéseket is ($i \geq k$). A továbbiakban néhány egylépéses módszert ($k = 1$) említünk egy lehetséges szemléltetési módra koncentrálnak.

5.2.1. Explicit Euler-módszer

Az Euler-módszer a kezdetiérték feladatok numerikus megoldására alkalmazható legegyszerűbb eljárás. Az alapgondolat az, hogy a feladat (3.8) egyenletéből kiszámítható $\dot{X}(t_0)$, ami a keresett $X(t)$ függvény deriváltjának értéke a t_0 helyen. Ez pontosan a keresett függvény görbéjének $P_0(t_0, X(t_0))$ pontjában rajzolható érintő a egyenes $f(t_0, x_0)^2$ meredeksége. Ezen az egyenesen „keressük meg” azt a P_1 pontot, aminek első koordinátája $t_0 + h$. A pontsorozat következő, P_2 elemének meghatározásában P_1 -nek ugyanaz a szerepe, mint korábban P_0 -nak volt P_1 esetében. Általánosítva az előzőeket tehát $P_{i-1}(t_{i-1}, x_{i-1})$ pont ismeretében a következő, P_i ($i > 0$) közelítő pont koordinátáit

$$\begin{aligned} t_i &= t_{i-1} + h \\ x_i &= x_{i-1} + h k \end{aligned} \tag{5.1}$$

$$\text{ahol } k = f(t_{i-1}, x_{i-1})$$

szerint számíthatjuk.

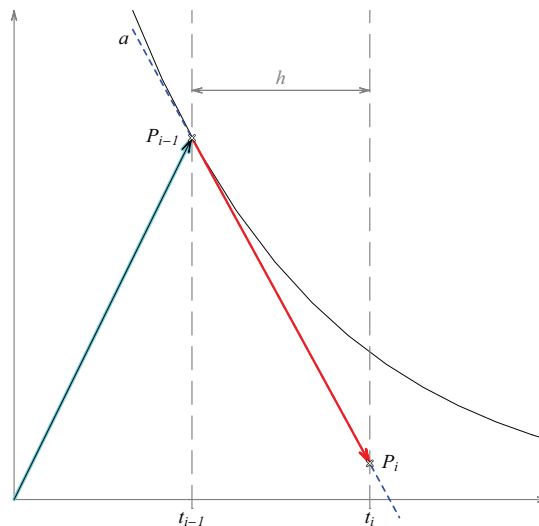
¹Ezekre a továbbiakban az egyszerűség kedvéért „numerikus módszer”-ként fogunk hivatkozni, ott ahol ez nem okoz félreértést.

²A továbbiakban megkülönböztetjük az $X(t)$ függvény t_i helyen vett $X(t_i)$ helyettesítési értékét, a t_i -hez tartozó közelítés x_i értékétől. Erre azért van szükség, mert – az $i = 0$ eset-től eltekintve – általában $x_i \neq X(t_i)$, de $x_0 = X(t_0)$ biztosan teljesül.

A fentieket vektorokkal szemléltetve az 5.4. ábra mutatja be. Ennek alapján P_i helyvektorát megkapjuk, ha P_{i-1} helyvektorához hozzáadunk egy olyan a -val párhuzamos vektort, melynek első koordinátája h . Ennek pontosan megfelel a

$$\overrightarrow{P_{i-1}P_i}(h, hk)$$

vektor.



5.4. ábra.

Euler-módszer egy lépésének szemléltetése vektorokkal.

5.2.2. Javított Euler-módszer

Az Euler-módszernek már egy lépése is – mivel az a egyenes egy pontját választjuk a közelítés következő pontjának – elég jelentősen letérhet a pontos megoldás görbétől. A további lépések során az ebből származó hiba tovább halmozódhat. Az 5.4. ábra alapján következtethetünk arra, hogy a h értékének csökkentésével ez mérsékelhető, ami azonban csökkenti az eljárás hatékonyságát.

Határozzuk meg most a következő, P_i pontot a

$$\begin{aligned} t_i &= t_{i-1} + h \\ x_i &= x_{i-1} + h k_b \end{aligned} \quad (5.2)$$

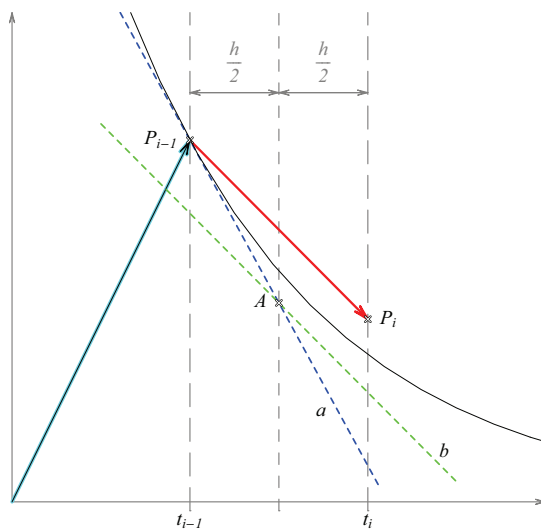
$$\begin{aligned} \text{ahol } k_a &= f(t_{i-1}, x_{i-1}) \\ k_b &= f(t_{i-1} + \frac{h}{2}, x_{i-1} + \frac{h}{2} k_a) \end{aligned}$$

összefüggések alapján. Az eljárás geometriai jelentését az 5.5. ábra szemlélteti.

Először az Euler-módszernek megfelelően keressük meg a $k_a = f(t_{i-1}, x_{i-1})$ meredekségű a egyenesnek azt az A pontját, amelynek első koordinátája

$$t_{i-1} + \frac{h}{2}.$$

Az ábrán b jelöli az A ponton áthaladó görbe érintőjét, melynek meredeksége k_b . Ezt praktikusán úgy nyerjük, hogy A koordinátáit behelyettesítjük az $f(t, X(t))$



5.5. ábra.

Javított Euler-módszer szemléltetése.

függvénybe. A következő lépésben határozzuk meg P_i helyét úgy, hogy

$$b \parallel \overrightarrow{P_{i-1}P_i}$$

teljesüljön és P_i első koordinátája t_i legyen. A szimmetria miatt ez a megoldás általában pontosabb eredményt szolgáltat.

5.2.3. Runge–Kutta-módszer

Ez az eljárás szintén egy lépéses módszer. A

$$\begin{aligned} t_i &= t_{i-1} + h \\ x_i &= x_{i-1} + \frac{h}{6}(k_a + 2k_b + 2k_c + k_d) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ahol} \quad k_a &= f(t_{i-1}, x_{i-1}) \\ k_b &= f(t_{i-1} + \frac{h}{2}, x_{i-1} + \frac{h}{2}k_a) \\ k_c &= f(t_{i-1} + \frac{h}{2}, x_{i-1} + \frac{h}{2}k_b) \\ k_d &= f(t_{i-1} + h, x_{i-1} + hk_c) \end{aligned} \quad (5.3)$$

szabályok a negyed rendű Runge–Kutta-módszer egyik lehetséges megadási módját jelentik.

Összevetve az (5.2) és az (5.3) összefüggéseket látható, hogy k_a és k_b értékét azonos módon származtatják. A javított Euler-módszerhez képest azonban k_b -t – ami az A ponthoz tartozó b érintő egyenes meredeksége – fölhasználjuk a B pont meghatározásához, amelyre teljesül, hogy

$$b \parallel \overrightarrow{P_{i-1}B}$$

és B első koordinátája

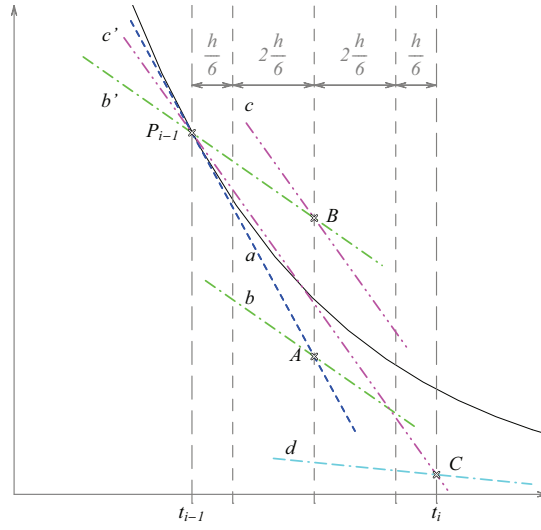
$$t_{i-1} + \frac{h}{2}.$$

Jelölje c a B pontba rajzolható érintőt, amelynek meredeksége (5.3) alapján k_c . Ezt fölhasználjuk a C pont meghatározásához, amelyre teljesül, hogy

$$c \parallel \overrightarrow{P_{i-1}C}$$

és C első koordinátája t_i . Az itt rajzolható d érintő egyenes meredeksége pedig k_d .

A P_{i-1} ponthoz tartozó irányon kívül, a fenti módon meghatározott A, B és C pontokban számítható meredekségeket a 5.7. ábrán látható módon vehetjük figyelembe P_i meghatározásában.



5.6. ábra.

További pontok (A, B, C) kijelölése a negyed rendű Runge–Kutta-módszerben.

Legyen

$$\overrightarrow{P_{i-1}P_i} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 + \mathbf{v}_4$$

ahol

$$a \parallel \mathbf{v}_1; \quad b \parallel \mathbf{v}_2; \quad c \parallel \mathbf{v}_3; \quad d \parallel \mathbf{v}_4$$

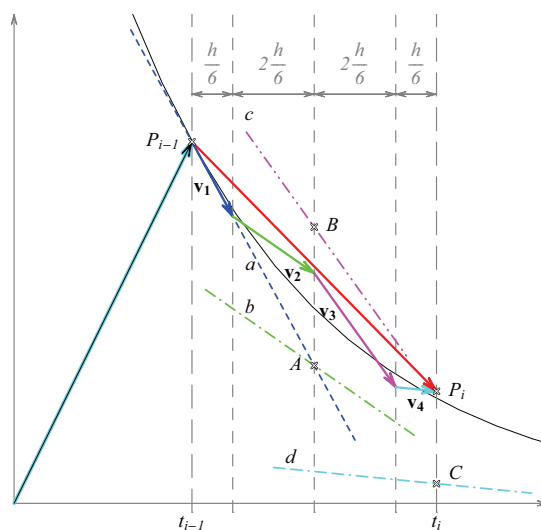
és

$$\mathbf{v}_1 \left(\frac{h}{6}; \frac{h}{6}k_a \right), \quad \mathbf{v}_2 \left(\frac{h}{3}; \frac{h}{3}k_b \right), \quad \mathbf{v}_3 \left(\frac{h}{3}; \frac{h}{3}k_c \right), \quad \mathbf{v}_4 \left(\frac{h}{6}; \frac{h}{6}k_d \right)$$

teljesül.

5.3. Közelítő módszerek hibája

A fenti numerikus módszerek fontos jellemzője, hogy az egymást követő lépések sorozatán keresztül mekkora hibát halmoznak föl. Egy módszer e_n globális hibája



5.7. ábra.

A P_{i-1} és a C pontokban számított meredekséget egyszeres, míg a A és a B -ben számítottakat pedig kétszeres súllyal vettük figyelembe.

azt fejezi ki, hogy n lépés végrehajtása után a módszerrel számított közelítő érték milyen mértékben tér el a függvény pontos értékétől. A továbbiakban a korábban tárgyalt három módszert hasonlítjuk össze ebből a szempontból egy kezdetiérték feladat kapcsán.

Legyen adott az

$$\dot{X}(t) = \lambda X(t); \quad X(0) = 1 \quad (5.4)$$

kezdetiérték feladat és a közelítést a $[0; 1]$ intervallumon végezzük. A feladat megoldása

$$X(t) = e^{\lambda t}$$

alakban adható meg. Ennek ismerete lehetővé teszi azt, hogy a kezdeti feltételnek megfelelően a

$$P_0(0, 1)$$

pontból kiinduló pontos megoldás görbéjéhez az intervallum felső határán tartozó függvényértéket összehasonlítsuk a numerikus módszerek által, a felső határon

szolgáltatott közelítő értékekkel. Ezek alapján számítható az eljárások e_n globális hibája. Az e_n értéke természetesen nem csak a közelítés módjától, hanem a h lépésköz nagyságától is függ. (A h értékét a $[0; 1]$ intervallum n részre történő osztásával állítjuk elő.) Hogy képet alkothassunk a lépésköz változtatásának szerepéről, mindhárom közelítő módszer esetében többször is elvégezzük a közelítéseket úgy, hogy a lépésszámot az előző kétszeresére növeljük, azaz felére csökkentjük a lépésközt.

n	h	$X(t_n)$	X_n	e_n	$\frac{e_n}{e_{\frac{n}{2}}}$
10	$\frac{1}{10}$	0.011109	0.00253295	0.00857604	
20	$\frac{1}{20}$	0.011109	0.0061099	0.0049991	0.582914
40	$\frac{1}{40}$	0.011109	0.00844762	0.00266137	0.532371
80	$\frac{1}{80}$	0.011109	0.00973996	0.00136904	0.51441
160	$\frac{1}{160}$	0.011109	0.0104152	0.000693842	0.506811
320	$\frac{1}{320}$	0.011109	0.0107598	0.000349219	0.503312
640	$\frac{1}{640}$	0.011109	0.0109338	0.00017518	0.501634
1280	$\frac{1}{1280}$	0.011109	0.0110213	0.0000877321	0.500811

5.8. ábra.

Az Euler-módszer globális hibájának változása lépésköz függvényében.

n	h	$X(t_n)$	X_n	e_n	$\frac{e_n}{e_{\frac{n}{2}}}$
10	$\frac{1}{10}$	0.011109	0.0137239	0.0026149	
20	$\frac{1}{20}$	0.011109	0.0116196	0.000510626	0.195276
40	$\frac{1}{40}$	0.011109	0.0112243	0.000115339	0.225878
80	$\frac{1}{80}$	0.011109	0.0111365	0.0000275334	0.238717
160	$\frac{1}{160}$	0.011109	0.0111157	6.73316×10^{-6}	0.244546
320	$\frac{1}{320}$	0.011109	0.0111107	1.66524×10^{-6}	0.247318
640	$\frac{1}{640}$	0.011109	0.0111094	4.14095×10^{-7}	0.24867
1280	$\frac{1}{1280}$	0.011109	0.0111091	1.0325×10^{-7}	0.249338

5.9. ábra.

A javított Euler-módszer globális hibájának változása lépésköz függvényében.

n	h	$X(t_n)$	X_n	e_n	$\frac{e_n}{e_{\frac{n}{2}}}$
10	$\frac{1}{10}$	0.011109	0.0111339	0.0000249291	
20	$\frac{1}{20}$	0.011109	0.0111103	1.28856×10^{-6}	0.0516892
40	$\frac{1}{40}$	0.011109	0.0111091	7.32971×10^{-8}	0.0568828
80	$\frac{1}{80}$	0.011109	0.011109	4.37087×10^{-9}	0.0596322
160	$\frac{1}{160}$	0.011109	0.011109	2.66845×10^{-10}	0.0610507
320	$\frac{1}{320}$	0.011109	0.011109	1.64834×10^{-11}	0.0617715
640	$\frac{1}{640}$	0.011109	0.011109	1.02419×10^{-12}	0.062135
1280	$\frac{1}{1280}$	0.011109	0.011109	6.38361×10^{-14}	0.0623281

5.10. ábra.

A Runge–Kutta-módszer globális hibájának változása a lépésköz függvényében.

Az 5.8., 5.9. és az 5.10. táblázatok rendre az Euler-, a javított Euler- és a Runge–Kutta-módszerek fölhasználásával készültek a (5.4) kezdetiérték feladat közelítő megoldása során ($\lambda = -4, 5$).

A táblázatok – mindhárom módszer esetében – nyolc közelítő számítás eredményeit tartalmazzák, amelyeket a $[0; 1]$ intervallum egyre finomdó felosztásai mellett végeztünk. A közelítéseket mindhárom esetben először $h = \frac{1}{10}$ lépésközzel végeztük ($n = 10$), és a következőben a h értékét felére csökkentettük, azaz az osztópontok számát kétszeresére növeltük. Így a legutolsó számításokat már a $h = \frac{1}{1280}$ értéke mellett végeztük. (Az 5.8., 5.9. és az 5.10. táblázatok első (n) és második (h) oszlopa.)

Az egyes sorok tehát a következőket tartalmazzák :

- n : a közelítő lépések száma,
- h : a lépésköz nagysága az aktuális n lépésszám esetén,
- $X(t_n)$: a pontos függvényérték az intervallum végén ($X(1)$),
- X_n : a közelítő érték az n . lépés után, az intervallum végén,
- e_n : a közelítés globális hibája ($|X(t_n) - X_n|$),
- $\frac{e_n}{e_{\frac{n}{2}}}$: az aktuális és az előző közelítés globális hibáinak hányadosa³.

Mindhárom táblázatban megfigyelhető, hogy az X_n oszlopának értékei egyre jobban közelítenek a pontos $X(1)$ értékhez az n növekedésével. Ez természetesen azt is jelenti, hogy a globális hiba e_n értéke is egyre csökken ezzel együtt.

³Ez a hányados természetesen a táblázatok első soraiban nem értelmezhető.

A továbbiakban a globális hiba csökkenésének mértékére vonatkozóan szeretnénk megállapítást tenni. Érdekes azt is megfigyelni, hogy a fenti táblázatok utolsó oszlopainak $\frac{e_n}{e_{\frac{n}{2}}}$ értékei hogyan változnak az n növekedésével. Ha figyelembe vesszük, hogy az 5.8. táblázatban az $n = 163840$ értéke esetén ebben az oszlopban 0,500006, illetve az 5.9. táblázatban ugyanitt 0,249988 szerepelne, akkor megalapozottnak tűnhet az a feltevés, hogy az egyes táblázatokban az n növelésével az $\frac{e_n}{e_{\frac{n}{2}}}$ értékei 2^{-1} , 2^{-2} és 2^{-4} értékekhez közelítenek.

Egy numerikus módszert konvergensenek nevezünk az adott I intervallumon $(\forall t_n \in I)$, ha

$$\lim_{h \rightarrow 0} x_n = X(t_n),$$

azaz

$$\lim_{h \rightarrow 0} e_n = 0.$$

Az előzőekből is látható, hogy a globális hiba nagyságát a h értéke jelentősen befolyásolja. Ugyanakkor az is nyilvánvaló, hogy a különböző módszerek globális hibái is másként „viselkednek” a h értékének változtatásával. Az mondjuk, hogy a globális hiba p -ed rendű, ha megadható olyan r valós konstans, hogy

$$e_n \leq r \cdot h^p \quad (5.5)$$

teljesül.

Az előzőek lehetőséget adnak a numerikus módszerek jellemzésére is, ugyanis p -ed rendűnek nevezünk egy numerikus módszert, ha globális hibája p -ed rendű.

Jelölje h_n az intervallum adott felosztásához tartozó lépésközt, tehát esetünkben $n \cdot h_n = 1$ teljesül. Ha a numerikus módszer konvergens, akkor a definíció szerint e_n globális hibája 0-hoz tart a felosztás finomításával. Ebből következik, hogy $e_n \leq e_{\frac{n}{2}}$ teljesül (minden n esetén), valamint

$$\frac{e_n}{e_{\frac{n}{2}}}$$

szintén konvergens, ha $n \rightarrow \infty$.

Hozzuk most az (5.5) összefüggést

$$\frac{e_n}{(h_n)^p} \leq r$$

alakúra, ami kifejezi, hogy minden lépésközhöz található olyan r valós szám, amely-nél a fenti hányados nem nagyobb. Érdekes még azt is megfigyelni, hogyan változik

a hányadosok értéke a lépésköz finomításával a különböző numerikus módszerek esetében. Azt mutatja be az 5.1. táblázat és jóval szemléletesebb módon az 5.11. ábra is, hogy nem túlságosan nehéz feladat ilyen r számot találni.

	n	160	320	640	1280
	h	$\frac{1}{160}$	$\frac{1}{320}$	$\frac{1}{640}$	$\frac{1}{1280}$
Euler- módszer	e_n	$6,9384 \cdot 10^{-4}$	$3,4921 \cdot 10^{-4}$	$1,7518 \cdot 10^{-4}$	$0,8773 \cdot 10^{-4}$
	$\frac{e_n}{h}$	$1,1101 \cdot 10^{-1}$	$1,1175 \cdot 10^{-1}$	$1,1212 \cdot 10^{-1}$	$1,1230 \cdot 10^{-1}$
javított Euler- módszer	e_n	$6,7332 \cdot 10^{-6}$	$1,6652 \cdot 10^{-6}$	$0,4141 \cdot 10^{-6}$	$0,1033 \cdot 10^{-6}$
	$\frac{e_n}{h^2}$	$1,7237 \cdot 10^{-1}$	$1,7052 \cdot 10^{-1}$	$1,6961 \cdot 10^{-1}$	$1,6916 \cdot 10^{-1}$
Runge–Kutta- módszer	e_n	$2,6685 \cdot 10^{-10}$	$0,1648 \cdot 10^{-10}$	$0,0102 \cdot 10^{-10}$	$0,0006 \cdot 10^{-10}$
	$\frac{e_n}{h^4}$	$1,7488 \cdot 10^{-1}$	$1,7284 \cdot 10^{-1}$	$1,7183 \cdot 10^{-1}$	$1,7136 \cdot 10^{-1}$

5.1. táblázat.

A $\frac{e_n}{(h_n)^p}$ hányados változása a lépésköz csökkentésével.

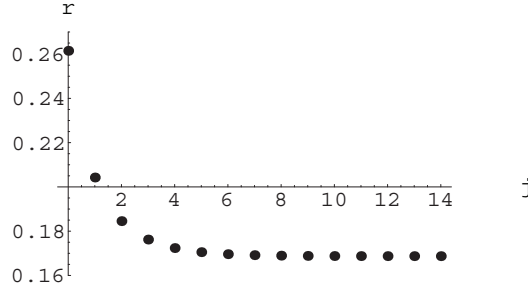
A vizsgálatok során az elsőként alkalmazott lépésköz $h = 10$ volt. Jelölje j annak a közelítő számításnak a sorszámát⁴, amelyben a lépésköz $h_j = \frac{1}{10} \cdot 2^{-j}$ volt. A fentiek alapján a

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{e_{2^j}}{e_{2^{j-1}}} = \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{r \cdot (h_j)^p}{r \cdot (h_{j-1})^p} = \frac{1}{2^p}$$

határérték számítható és így összehasonlíthatóvá válnak a numerikus módszerek a közelítés pontossága szempontjából.

A fentiekkel látható módon összhangban vannak az 5.8., 5.9. és az 5.10. táblázatok utolsó oszlopainak értékei, ha p rendre 1, 2 és 4.

⁴Ez egyben az 5.8., 5.9. és az 5.10. táblázatok soraira értelmezhető sorszámozás is egyben, ha az 0-val kezdődik. Ugyanakkor $n = 10 \cdot 2^j$ is teljesül.



5.11. ábra.

A $\frac{e_n}{(h_n)^2}$ hányados változása a lépésköz csökkentésével Javított Euler-módszer esetében.

5.4. Prediktor-korrektor-módszerek

Az explicit Euler-módszerhez úgy is eljuthatunk, ha a (3.8) egyenlet bal oldalán az $\dot{X}(t)$ deriváltat a megfelelő differencia hányadossal helyettesítjük:

$$\frac{X(t_i) - X(t_{i-1})}{h} \approx \dot{X}(t_{i-1}) = f(t_{i-1}, X(t_{i-1}))$$

Ezt az összefüggést

$$X(t_i) \approx X(t_{i-1}) + hf(t_{i-1}, X(t_{i-1}))$$

alakra hozva t_{i-1} és $X(t_{i-1})$ ismeretében fölhasználhatjuk $X(t_i)$ értékének közelítésére. Lényegében ezt tettük az explicit Euler-módszer minden lépésében.

Ha most a fentiekhez hasonló módon a (3.8) egyenlet segítségével az $\dot{X}(t_i)$ derivált értéket értelmezzük, akkor az

$$\frac{X(t_i) - X(t_{i-1})}{h} \approx \dot{X}(t_i) = f(t_i, X(t_i))$$

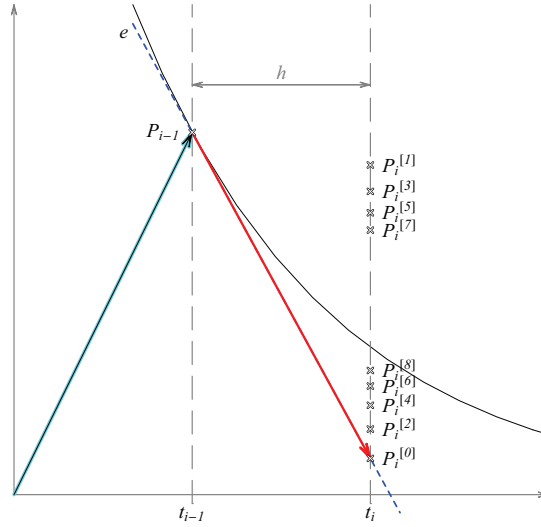
összefüggés átrendezésével

$$X(t_i) \approx X(t_{i-1}) + hf(t_i, X(t_i))$$

nyerhető. A pontos $X(t_i)$, $X(t_{i-1})$ értékek helyébe az x_i , x_{i-1} közelítő értékeket írva, az alábbiak szerint értelmezhetjük az implicit Euler módszert:

$$x_i = x_{i-1} + hf(t_i, x_i).$$

Látható módon az egyenlőség mindkét oldalán szerepel a keresett x_i érték. Ennek kifejezhetőségét és így a módszer közvetlen használhatóságát az f -függvény határozza meg, és általában lineáris rendszerek esetében előnyös.



5.12. ábra.

Implicit Euler-módszer (prediktor-korrektor-módszerben).

Ha azonban a

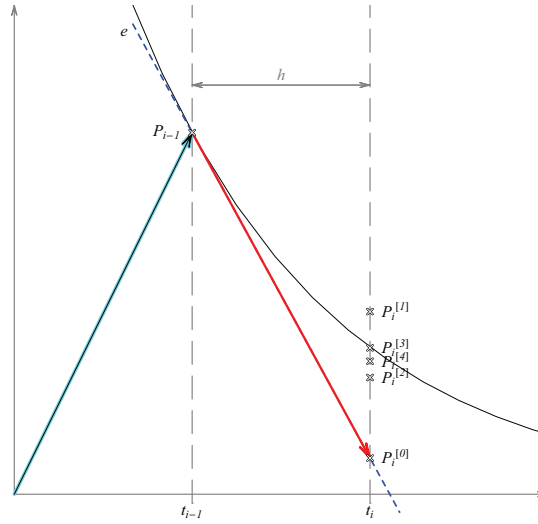
$$\begin{aligned} t_i &= t_{i-1} + h \\ x_i^{[l+1]} &= x_{i-1} + h k \end{aligned} \quad (5.6)$$

ahol $k = f(t_i, x_i^{[l]})$
 $(l = 0, 1, \dots)$ és $x_i^{[0]}$ adott

összefüggésnek megfelelően megadjuk a kezdő, $x_i^{[0]}$ értéket – az 5.12. ábra szerinti módon, explicit Euler-módszerrel – akkor néhány iteráció⁵ után $x_i^{[l]}$ értékére az $X(t_i)$ pontos értékét jobban közelítő értéket kapunk.

Így egy olyan módszert nyertünk, amelyben a következő, x_i közelítő érték meghatározását egy explicit módszer segítségével kiválasztott értéket ($x_i^{[0]}$), egy implicit módszer segítségével teszünk pontosabbá kellő számú iteratív lépés során. Az explicit módszert prediktornak, míg az implicit módszert korrektornak nevezzük.

Ha a numerikus integrálás trapéz formulája alapján a $[t_{i-1}, t_i]$ mindkét végpontjához tartozó meredekség értékeket azonos súllyal vesszük figyelembe a következő P_i közelítő pont meghatározásához, a trapéz-módszer néven ismert implicit módszert kapjuk. Ennek korrektor-módszerként történő alkalmazása a



5.13. ábra.

Trapéz-módszer (prediktor-korrektor-módszerben).

⁵Ez általában 2-3 iterációs lépést jelent.

$$\begin{aligned}
t_i &= t_{i-1} + h \\
x_i^{[l+1]} &= x_{i-1} + \frac{h}{2}k
\end{aligned}
\tag{5.7}$$

ahol $k = f(t_{i-1}, x_{i-1}) + f(t_i, x_i^{[l]})$
 $(l = 0, 1, \dots)$ és $x_i^{[0]}$ adott

szabályok alapján történhet.

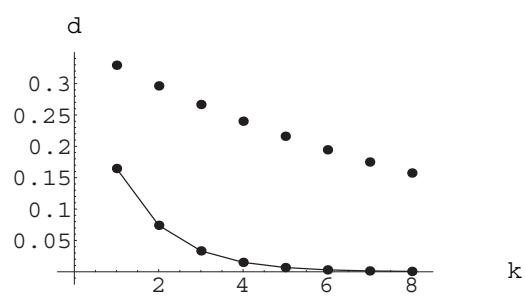
A 5.13. ábrán jól látható, hogy a trapéz-módszer korrektor módszerként való alkalmazása révén kevesebb iterációs lépés szükséges a következő, P_i pont kijelöléséhez közel azonos pontossággal.

k	t_i	implicit Euler-módszer		Trapéz-módszer	
		$x_i^{[k]}$	$d_E(P_i^{[k]}; P_i^{[k-1]})$	$x_i^{[k]}$	$d_t(P_i^{[k]}; P_i^{[k-1]})$
0	0,40	0,040657	—	0,040657	—
1	0,40	0,369978	0,329321	0,205318	0,164661
2	0,40	0,073589	0,296389	0,131220	0,074098
3	0,40	0,340339	0,266749	0,164564	0,033344
4	0,40	0,100264	0,240075	0,149559	0,015005
5	0,40	0,316332	0,216068	0,156312	0,006753
6	0,40	0,121871	0,194461	0,153273	0,003039
7	0,40	0,296886	0,175015	0,154640	0,001367
8	0,40	0,139372	0,157514	0,154025	0,000615

5.2. táblázat.

A két módszerre épülő prediktor-korrektor módszer első néhány iterációjának eredménye.

Erre a 5.2. táblázat adatai szolgálnak magyarázattal. A pontsorozatok konvergenciáját jellemezhetjük az egymást követő pontok távolságainak $d_E(P_i^{[k]}; P_i^{[k-1]})$ és $d_t(P_i^{[k]}; P_i^{[k-1]})$ sorozatával. Látható, hogy az implicit Euler-módszer esetében az egymást követő pontok távolsága közelítőleg lineárisan csökken, míg a Trapéz-módszer esetében a távolságok a következő iterációs lépésben jó közelítéssel megfelelőnek. Ezek az összefüggések még szemléletesebben jelennek meg a táblázat adatai alapján készült 5.14. ábrán. (Az ábrán folytonos vonallal összekötött pontok jelölik a trapéz-módszerhez tartozó, a 5.2. táblázat utolsó oszlopában található adatokat.)



5.14. ábra.

Implicit Euler-módszer és a trapéz-módszer konvergenciája
(prediktor-korrektor-módszerben).

6. Fejezet

További geometriai megfontolások

A korábban tárgyalt explicit módszerekben közös vonás volt, hogy egy adott pont ismeretében határoztuk meg a következő közelítő pontot egy az aktuális ponton áthaladó egyenes mentén. Ezt az egyenest az Euler-módszer esetében egy, míg a javított Euler-módszer és a negyed rendű Runge–Kutta-módszer esetében több ponthoz tartozó érintő irányát figyelembe véve adtuk meg.

Az érintő egyenessel szemben a görbe adott pontjához tartozó simulóköre „jobban” követi a görbét. Vajon alapjául szolgálhat-e ez a felismerés görbe pontjainak közelítésére.

A differenciálgeometria területén ismert a simulókör fogalma. Egy görbe adott P pontbeli simulókörét egy olyan kör határhelyzeteként szoktuk értelmezni, amely a P -n kívül még áthalad a görbe másik két (A és B) pontján is, és közben A -val és B -vel P -hez tartunk¹. Ahogyan az elnevezés is sugallja, a simulókör pontjai az érintési pont egy környezetében elegendően közel helyezkednek el a görbéhez.

Az alapgondolat tehát az, hogy a görbe közelítését, annak egy rövid szakaszán a simulókörének közelítésével oldjuk meg. Az elgondolás alapjául a differenciál-egyenletek geometriai jelentése szolgál, hogy a megoldásgörbe minden pontjához ismerjük az érintő irányát $f(t, X(t))$ formában a (3.8) egyenlet alapján, ami az adott ponthoz tartozó simulókör érintője is egyben.

¹Ha P , A és B nem kollineáris, akkor mindig egyértelműen megadható ilyen kör.

6.1. OCM, avagy közelítés érintő körrel

A továbbiakban tárgyalásra kerülő közelítő módszerre az egyszerűség kedvéért OCM rövidítéssel hivatkozunk (osculating circle method).

Legyen adott a (3.8) egyenlet, a (3.9) feltételnek megfelelő $P_0(t_0, x_0)$ pont, valamint egy kis d távolság. Szeretnénk meghatározni az adott ponton áthaladó, (3.8) megoldását jelentő függvény görbét közelítő töröttvonalat a P_0 pont egy környezetében.

Jelölje $m^P = f(t_0, x_0)$ a P_0 -hoz tartozó érintő egyenes meredekségét. Legyen $\mathbf{p}$ az m^P meredekségű egyenessel párhuzamos vektor és $\|\mathbf{p}\| = d$. Jelöljük ki a $Q(\tilde{t}, \tilde{x})$ pontot úgy, hogy $\overrightarrow{P_0Q} = \mathbf{p}$. A Q -hoz tartozó meredekség, $m^Q = f(\tilde{t}, \tilde{x})$ szintén számítható. Ha d elegendően kicsiny, akkor Q elegendően közel van a kezdetiérték-probléma megoldását jelentő görbéhez, így m^Q jól közelíti egy Q -hoz közeli pontjában az érintő meredekségét. Legyen $\mathbf{q}$ az m^Q meredekségű érintővel párhuzamos vektor úgy, hogy $\mathbf{p}$ és $\mathbf{q}$ szöge legyen egyenlő az m^P és m^Q meredekségű egyenesek hajlásszögével, valamint $\|\mathbf{q}\| = d$.

Ha $m^P \neq m^Q$, akkor P_0 kis környezetében a függvény görbéje jól közelíthető egy megfelelő sugarú körívvel, ami a görbe P_0 -beli simulóköre. Hasonló módon a Q pontban is illeszthetünk egy körívet ahhoz a görbéhez, amelyre Q illeszkedik. A körök P_0 illetve Q pontjaihoz rajzolható érintő egyenesek egyben érintői a görbéknek is. Az érintők P_0 és Q pontjába állított merőlegesek C pontban metszik egymást. Ezzel a ponttal jól közelíthetjük a két kör középpontját, ha d -t elegendően kicsinek választottuk. C ismeretében meghatározhatjuk a C és Q egyenesének azon P_1 pontját a $\overline{CQ}$ szakaszon, hogy $d(P_0C) = d(CP_1)$ teljesüljön. A következő közelítő pont meghatározásához P_1 lesz a kiindulópont, mint korábban a P_0 volt.

Ha $m^P = m^Q$, akkor lényegében P_1 -ként magát Q -t fogadhatjuk el.

Az eljárás egy általános lépését, az i -edik közelítő pont meghatározását az azt megelőző $(i-1)$ -edik alapján a 6.1. ábra mutatja. Az ábra alapján az is látható, hogy az eljárásban Q pont meghatározása lényegében az Euler-módszer szerint történik. Ezek után, a Q és a C ismeretében a P_i helyvektora az alábbiak szerint fejezhető ki:

$$\overrightarrow{OP_i} = \overrightarrow{OP_{i-1}} + \overrightarrow{P_{i-1}C} + \overrightarrow{CP_i}$$

A közelítés pontosságát meghatározza d értékének megválasztása. Ha túlságosan nagyra választjuk, Q túlságosan távol esik a megoldást jelentő függvény görbétől, így C nem jó közelítése a két simuló kör közös középpontjának. Várhatóan a d csökkentésével növelhető a közelítés pontossága.

Jelölje $\mathbf{m}^P$ a görbe P_0 pontbeli érintőjével párhuzamos vektort, és $\mathbf{m}^P$ koordinátái rendre:

$$m_0^p = 1, \quad m_i^p = \dot{X}_i(t_0), \quad (i = 1, \dots, n).$$

Legyen

$$\mathbf{p} = \frac{\mathbf{m}^P}{\|\mathbf{m}^P\|} \cdot d.$$

Adjuk meg a $Q(q_0; q_1; q_2; \dots; q_n)$ pontot úgy, hogy $\overrightarrow{P_0 Q} = \mathbf{p}$.

Itt meghatározható az $\mathbf{m}^Q$ vektor, amely párhuzamos a görbe Q pontbeli érintőjével, és $\mathbf{m}^Q$ koordinátái:

$$m_0^q = 1, \quad m_i^q = \dot{X}_i(q_0), \quad (i = 1, \dots, n).$$

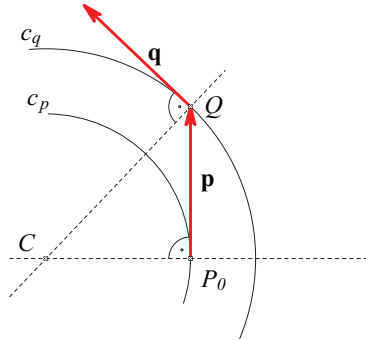
Ebből megadhatjuk a

$$\mathbf{q} = \frac{\mathbf{m}^Q}{\|\mathbf{m}^Q\|} \cdot d$$

vektort.

Ha $\mathbf{m}^P \parallel \mathbf{m}^Q$, akkor Q pontot elfogadjuk a következő, P_1 közelítő pontnak.

Ellenkező esetben $\mathbf{p}$ és $\mathbf{q}$ vektorok egyértelműen meghatároznak egy síkot. Ebben a síkban a P_0 ponton áthaladó, $\mathbf{p}$ vektorra merőleges egyenes, és a Q



6.2. ábra.

A simulókörtöket közelítő c_p és c_q körívek a $\mathbf{p}$ és a $\mathbf{q}$ vektorok síkjában.

ponton áthaladó, $\mathbf{q}$ vektorra merőleges egyenes C pontban metszik egymást a 6.2. ábrán látható módon.

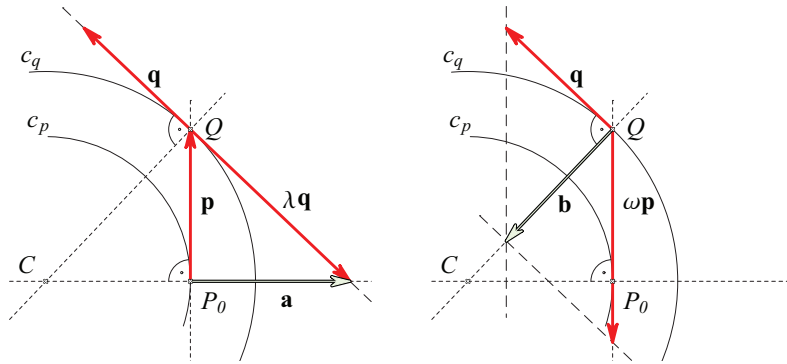
Megadható egy $\mathbf{p}$ -re merőleges $\mathbf{a}$ és egy $\mathbf{q}$ -ra merőleges $\mathbf{b}$ vektor

$$\mathbf{a} = \mathbf{p} + \lambda \mathbf{q}$$

és

$$\mathbf{b} = \mathbf{q} + \omega \mathbf{p}$$

módon a $(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ bázisban úgy, hogy azok a metsző egyenesek irányvektorai legyenek a 6.3. ábrán látottaknak megfelelően.



6.3. ábra.

Felhasználva a vektorok skaláris szorzásának tulajdonságait, és hogy $\mathbf{p}$ és $\mathbf{a}$, valamint $\mathbf{q}$ és $\mathbf{b}$ merőlegesek, a

$$\lambda = -\frac{\langle \mathbf{p}, \mathbf{p} \rangle}{\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle} = -\frac{\sum_{i=0}^n p_i^2}{\sum_{i=0}^n p_i q_i} \quad \text{és} \quad \omega = -\frac{\langle \mathbf{q}, \mathbf{q} \rangle}{\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle} = -\frac{\sum_{i=0}^n q_i^2}{\sum_{i=0}^n p_i q_i}$$

egyenlőségek írhatók.

Az $\overrightarrow{OC}$ helyvektor megadható

$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OP_0} + \varphi \mathbf{a} = \overrightarrow{OP_0} + \varphi \mathbf{p} + \varphi \lambda \mathbf{q} \quad (6.3)$$

és

$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OQ} + \psi \mathbf{b} = \overrightarrow{OQ} + \psi \mathbf{q} + \psi \omega \mathbf{p} \quad (6.4)$$

módokon. Igaz továbbá az

$$\overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP_0} = \mathbf{p} \quad (6.5)$$

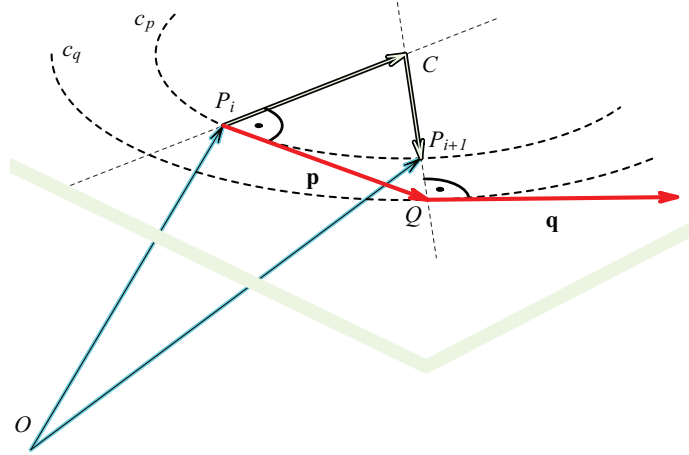
egyenlőség is.

A $(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ bázisban φ és ψ értéke számítható:

$$\varphi = \frac{1}{\lambda\omega - 1}; \quad \psi = \frac{\lambda}{\lambda\omega - 1} \quad (6.6)$$

$$\overrightarrow{OP_1} = \overrightarrow{OP_0} + \overrightarrow{P_0C} + \overrightarrow{CP_1} \quad (6.7)$$

Ekkor a C pont koordinátái is kiszámíthatók mind a $(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ bázisban, mind pedig



6.4. ábra.
Térgörbék közelítése.

az $n + 1$ dimenziós vektortérben. Ennek ismeretében megadhatjuk P_1 pontot úgy,

hogy $\overrightarrow{CP_1}$ legyen egyállású $\overrightarrow{CQ}$ vektorral, valamint $\|\overrightarrow{P_0C}\| = \|\overrightarrow{CP_1}\|$ is teljesüljön. A pontsorozat következő, P_2 elemének meghatározása hasonló módon történik, alapul véve P_1 -et. Ezt szemlélteti a 6.4. ábra a 3 dimenziós térben vektorok segítségével. Itt P_i jelöli azt a pontot, amelyből kiindulva meghatározzuk a P_{i+1} pontot a fentebb ismertetett eljárással.

6.1.2. Az OCM hibája

Egy numerikus módszer használhatóságát annak pontossága jelentősen meghatározza. Az 5.4. fejezetben ebből a szempontból hasonlítottunk össze néhányat a differenciálegyenletek numerikus módszerei közül. A hitelesebb összehasonlíthatóság érdekében a számításokat ugyanazzal a kezdetiérték-feladattal kapcsolatosan végeztük, lehetőség szerint biztosítva minden más feltételt is.

n	h	X(t _n)	X _n	e _n	$\frac{e_n}{e_{\frac{n}{2}}}$
10	$\frac{1}{10}$	0.00726065	0.00953959	0.00227894	
20	$\frac{1}{20}$	0.00920645	0.00967846	0.000472011	0.207118
40	$\frac{1}{40}$	0.0101576	0.0102684	0.000110848	0.234843
80	$\frac{1}{80}$	0.0106328	0.0106597	0.000026993	0.243513
160	$\frac{1}{160}$	0.0108707	0.0108774	6.66691×10^{-6}	0.246986
320	$\frac{1}{320}$	0.0109898	0.0109914	1.65703×10^{-6}	0.248546
640	$\frac{1}{640}$	0.0110494	0.0110498	4.13075×10^{-7}	0.249286
1280	$\frac{1}{1280}$	0.0110792	0.0110793	1.03122×10^{-7}	0.249646
2560	$\frac{1}{2560}$	0.0110941	0.0110941	2.57624×10^{-8}	0.249824
5120	$\frac{1}{5120}$	0.0111015	0.0111015	6.43834×10^{-9}	0.249912
10240	$\frac{1}{10240}$	0.0111053	0.0111053	1.60931×10^{-9}	0.249957
20480	$\frac{1}{20480}$	0.0111071	0.0111071	4.02296×10^{-10}	0.24998
40960	$\frac{1}{40960}$	0.0111081	0.0111081	1.00576×10^{-10}	0.250004
81920	$\frac{1}{81920}$	0.0111085	0.0111085	2.51375×10^{-11}	0.249937
163840	$\frac{1}{163840}$	0.0111088	0.0111088	6.27633×10^{-12}	0.249679

6.5. ábra.

Az OCM globális hibájának változása a lépésköz függvényében.

Az algoritmusok különbözősége miatt ez teljességgel nem volt megoldható, de az OCM első, Euler-lépését mindig szintén h_n értékkel tettük meg. Az egyes közelítések második lépése – amely lényegében a közelítés következő pontját adja meg – ezt általában torzíthatja, ami azt jelenti, hogy a t értéke nem azonos

lépésközzel változik az adott $[0; 1]$ intervallumon. Esetünkben ez általában nagyobb, de a görbe jellegétől függő változó lépésközt jelentett. Az n lépésszám növelésével azonban ez az eltérés egyre jelentéktelenebbé válik.

Ezt támasztja alá a 6.5. táblázat harmadik és negyedik oszlopaiban található pontos $X(t_n)$ és a közelítő x_n értékek összevetése is. Mivel az $X(t_n)$ értékek rendre kisebbek az $t = 1$ helyen fölvetett pontos értéknél, ez igazolja, hogy az n -edik lépésre mindig túlléptünk az intervallum felső határán. Ez azonban azt jelenti, hogy átlagosan nagyobb lépésközzel haladtunk, mint $\frac{1}{n}$. Másrészt megfigyelhető, hogy az n növelésével az $X(t_n)$ pontos érték egyre jobban megközelíti az 5.8., 5.9. és az 5.10. táblázatokban található, az intervallum végpontjához tartozó pontos értéket.

Az 5.4. fejezetben bemutatott empirikus módszer alkalmasnak bizonyult arra, hogy információt adjunk a módszer globális hibájáról. Összevetve a 6.5. és az 5.9. táblázatokat megállapítható, az OCM globális hibája a javított Euler-módszeréhez hasonlóan szintén másodrendű. Erre enged következtetni, hogy a 6.5. táblázat utolsó oszlopának értékei n növekedtével egyre jobban megközelítik 2^{-2} értékét.

6.2. Az OCM mint korrektor-módszer

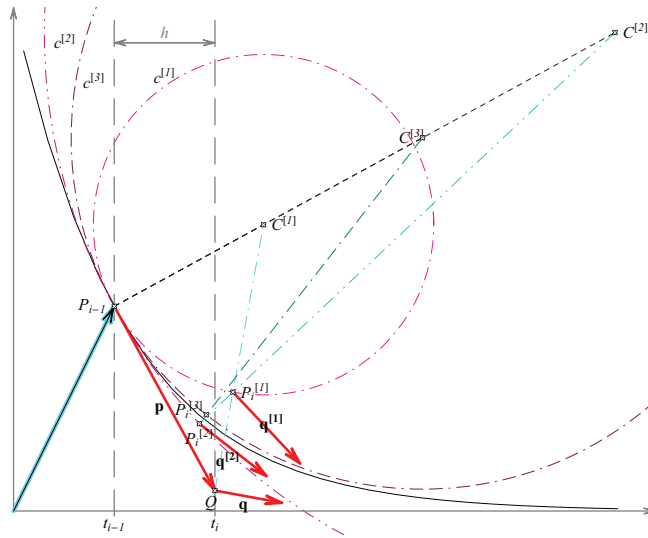
A prediktor-korrektor módszerek esetében az i -edik közelítő pontot először egy explicit módszerrel megbecsüljük, amit aztán néhány iterációs lépésben, egy implicit módszer alkalmazásával pontosítunk. Ez geometriai szempontból azt feltételezi, hogy az iteráció során egy megfelelő határértékkel rendelkező konvergens pontsorozat tagjait kapjuk.

Korábban láthattuk, hogy általános esetben az OCM alkalmazásával a közelítő pontsorozat P_{i-1} elemét alapul véve, hogyan határozhatjuk meg a következő P_i pontot. A 6.1. ábra szemlélteti, hogy elsőként közelítjük a P_{i-1} ponthoz tartozó simulókör C középpontját a P_{i-1} ponthoz tartozó érintő P_{i-1} pontjába állított egyenesen úgy, hogy a $\|\overrightarrow{P_{i-1}C}\| = \|\overrightarrow{CP_i}\|$ valamint $\overrightarrow{CQ}$ és $\overrightarrow{CP_i}$ vektorok egyállásúak legyenek.

Vizsgáljuk meg most azt, hogy milyen eredményre jutunk, ha P_i pont meghatározása után, a P_i -hez tartozó meredekséget arra használjuk föl, hogy újra „becsüljük” a simulókör középpontját. Ennek alapján persze a korábbi gondolatmenetnek megfelelően másik P_i pontot jelölhetünk ki. Ez aztán megint fölhasználható egy új középpont meghatározására. Ezt az eljárást tetszőlegesen folytathatjuk, amelynek első néhány lépését mutatja be a 6.6. ábra. Az ábrán rendre $C^{[1]}, C^{[2]}, \dots$

jelöli az egyes iterációkban nyert középpontokat, míg $P_i^{[1]}, P_i^{[2]}, \dots$ pontokat az i -edik közelítő pont egymást követő finomításainak tekintjük².

Az ábrát tanulmányozva fölfigyelhetünk arra a körülményre is, hogy a $c^{[3]}$ körív, amelyre az utolsó iterációból származó $P_i^{[3]}$ pont illeszkedik, viszonylag hosszú szakaszon „elég” közel van a keresett görbéhez. Ez lehetőséget adhat újabb közelítő pont kijelölésére a P_i pont környezetében a $c^{[3]}$ köríven anélkül, hogy további iterációs lépéseket illetve függvénykiértékeléseket kellene végezni.



6.6. ábra.

OCM alkalmazása prediktor-korrektor-módszerként.

A 5.4. fejezet kísérletet tett az ott ismertetett két korrektor módszer konvergenciájának összehasonlítására és szemléletes bemutatására. Bár ebben az esetben az iterációkor előálló $P_i^{[k]}$ pontok nem egy egyenesre illeszkednek, a pontsorozat egymást követő elemeinek $d(P_i^{[k]}; P_i^{[k-1]})$ távolsága itt is jól jellemzi a sorozat konvergenciáját. A 6.1. táblázat tartalmazza egy ilyen pontsorozat elemeinek kooordinátáit és az azokból számított távolságokat.

²A korábban bemutatott prediktor-korrektor módszerek $P_i^{[0]}$ pontjának itt a Q pont felel meg.

k	$t_i^{[k]}$	$x_i^{[k]}$	$d(P_i^{[k]}; P_i^{[k-1]})$
0	0,4000000000	0,0406569659	
1	0,4357734261	0,2361868108	0,1987753964
2	0,3691023384	0,1734576633	0,0915422301
3	0,3829384697	0,1911835786	0,0224865872
4	0,3784725538	0,1859926216	0,0068476594
5	0,3797309441	0,1874961344	0,0019606368
6	0,3793623546	0,1870592786	0,0005715778
7	0,3794691029	0,1871860932	0,0001657624
8	0,3794380857	0,1871492704	0,0000481454

6.1. táblázat.

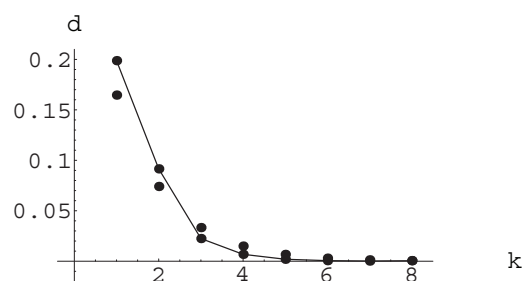
Az OCM módszerrel végzett első néhány iterációjának eredménye.

A trapéz-módszer és az OCM korrektor módszerként való alkalmazhatóságát hasonlíthatjuk össze a 6.7. ábra alapján. Az OCM-hez tartozó, folytonos vonallal összekötött pontok néhány iteráció után a trapéz-módszer pontjai alá kerülnek, ami azt jelenti, hogy az egymást követő elemek közötti távolság gyorsabban csökken.

Bár az ábra azt sugallja, hogy később – kellő számú iteráció után – a két módszerrel nyert távolságok azonos módon viselkednek, ezt azonban csak a kezdeti nagy távolságokhoz mérten későbbi kis értékek miatt látjuk így. Képezzük most az 5.2. és a 6.1. táblázat adataiból a

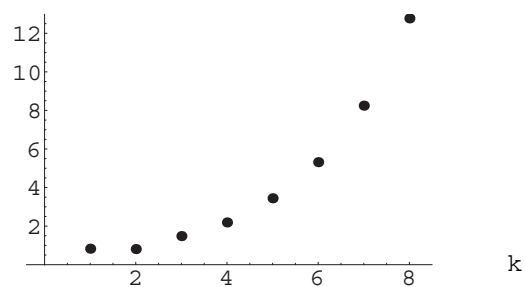
$$\frac{d_t(P_i^{[k]}; P_i^{[k-1]})}{d(P_i^{[k]}; P_i^{[k-1]})}$$

hányadosokat, ahol d_t a trapéz-módszerrel, míg d az OCM-mel végzett iteratív lépések során kapott egymást követő pontok távolsága. A 6.8. ábrán jól látható, hogy a hányadosok értéke a lineárishoz képest gyorsabban nő. Ez csak azzal magyarázható, hogy a nevező értéke gyorsabban csökken a számlálóétól, azaz a trapéz-módszerrel végzett iterációhoz képest az OCM-mel kapott pontsorozat gyorsabban konvergál.



6.7. ábra.

A trapéz-módszer és az OCM korrektor módszerként való alkalmazásának összehasonlítása I.



6.8. ábra.

A trapéz-módszer és az OCM korrektor módszerként való alkalmazásának összehasonlítása II.

7. Fejezet

Módszertani kiegészítések

*„A Természet nagy könyve csak azok előtt áll nyitva,
akik ismerik a nyelvet, amelyen írva van:
a matematika nyelvét.”*

GALILEO GALILEI

A fejezet célja, hogy bemutassa a dolgozatban tárgyalt eredmények további, néhány lehetséges oktatási alkalmazását. A témával kapcsolatosan nehéz feladat teljességre törekedni a terjedelem korlátai miatt, de hiányos lenne ez a dolgozat, ha nem tennénk említést néhány konkrét számítógépes megvalósításról. Ezért ezek bemutatására is itt kerül sor. A korábbiakban a matematikai modellezés és a számítógépes szimuláció – mint a természettudományos tárgyak oktatásában hatékonyan használható eszköz – alkalmazási lehetőségeit vizsgáltuk meg. Az eddigiek az alábbi három fő gondolatkörbe sorolhatók.

Elsőként a kísérleti mérések néhány lehetséges alternatíváját mutattuk be konkrét példákon keresztül, amelyek alapjául szolgálhatnak a matematikai modell fölállításához szükséges adatgyűjtésnek. Ezt követően a megismert jelenségekre és mérési módszerre építve megalkottuk matematikai modelljeiket.

Egy későbbi fejezetben, számítógépes szimuláció céljából megadtunk egy differenciálegyenlet-rendszert, és bemutattunk néhány klasszikusnak mondható, ismert alkalmazási lehetőségét.

Végül, a differenciálegyenletek kezeléséhez, azok néhány numerikus megoldási lehetőségének bemutatásával szerettünk volna hozzájárulni.

7.1. Modellezési és szimulációs példák

7.1.1. További jelenségek

A fejezetben szereplő néhány példa a (4.1) egyenletrendszer további alkalmazási lehetőségeire szeretne rávilágítani. Természetesen csak az lehetett cél, hogy nagyobb hangsúlyt kapjon a matematikai modell szintetizáló szerepe. Ezt a bekezdést tekinthetjük egyféle feladatgyűjteménynek is, ahol az egyes „feladatok” megoldását az jelenti, hogy megadjuk a (4.1) egyenletrendszer olyan paraméterezését, amely által az az adott jelenség modelljévé válik.

Testek hűlése

Egy test T_0 C° hőmérsékletéről T_k C°-os környezeti hőmérséklet mellett kezd el hűlni. A test hőmérsékletének időfüggését a

$$\dot{T}(t) = a(T(t) - T_k) \quad (7.1)$$

egyenlet írja le, ahol a a test anyagi minőségét jellemző állandó.

A logisztikus növekedés pontosítása

A logisztikus növekedést leíró (4.4) modell legnagyobb hibája, hogy feltételezi, hogy a rendszer rendkívül kicsiny $N(t)$ esetében is – ha lassan is – de növekedni fog. Ugyanakkor például az ökológiai rendszerek esetében az a tapasztalat, hogy ilyenkor az egyedszám csökkenésnek indul, mert az ivarérett egyedek nehezebben találnak párt, vagy mert beltenyészetek alakulnak ki, ami viszont a termékenységet csökkenti.

A fentiek miatt célszerű a (4.4) egyenletet úgy módosítani, hogy a populáció növekedése negatívvá váljon, ha az egyedszám egy adott M alsó küszöbnél kisebbé válik. Ez egy újabb szorzó bevezetésével lehetséges:

$$\dot{N}(t) = rN(t) \left(1 - \frac{N(t)}{K}\right) \left(1 - \frac{M}{N(t)}\right). \quad (7.2)$$

Test lecsúszása

Egy test l hosszúságú, α hajlásszögű síklapon csúszik. A felületen a surlódási együttható k . Az

$$\ddot{s}(t) = g(\sin \alpha - k \cos \alpha) \quad (7.3)$$

egyenlet a kezdetben nyugalomban lévő test mozgástörvényét adja.

Függőleges hajítás

Egy testet függőlegesen felfelé v_0 kezdősebességgel mozgásba hozunk. Ha a test mozgásának leírásához csak a nehézségi erőt vesszük figyelembe, azaz elhanyagoljuk a közegellenállást, akkor az az

$$\ddot{s}(t) = -g \quad (7.4)$$

egyenlettel jellemezhető.

Neutrális szál

Egy a két végénél alátámasztott gerendát, mindkét végétől a távolságban P nagyságú erőkkel terhelünk. Ebben az elrendezésben – ha a deformációk nem túlságosan nagyok – igaz, hogy a gerenda alsó részei megnyúlnak, a felső részei összenyomódnak. A két tartomány határa a neutrális szál, melynek hossza változatlan marad. Ennek alakját a

$$\frac{d^2 y(x)}{dx^2} = -\frac{Pa}{EJ} \quad (7.5)$$

egyenlet írja le, ahol E a gerenda rugalmassági együtthatója, J pedig a neutrális szálra vonatkozó keresztmetszet tehetetlenségi nyomatéka.

Visszatérítő erő

Az m tömegű anyagi részecskét az O pont felé, a ponttól mért x távolsággal egyenesen arányos F erő mozgat. Az F hatására megvalósuló mozgást az

$$\ddot{x}(t) + \left(\frac{a}{m}\right)^2 x(t) = 0 \quad (7.6)$$

egyenlet írja le.

Lánc lecsúszása

Egy sima, vízszintes felületről l hosszúságú lecsúszó lánc mozgását az

$$\ddot{x}(t) = \frac{g}{l} x(t) \quad (7.7)$$

egyenlet írja le. (A mozgás kezdetekor a láncnak már a hosszúságú darabja lecsúszott.)

Vagon mozgása szélben

Egy m tömegű vagon mozgásba jön a pálya irányában ható állandó erő hatására és vízszintesen mozog. A vagon ellenállása a mozgással szemben R , a mozgás F erő hatására jött létre, mozgástörvényét az

$$\ddot{x}(t) = \frac{F - R}{m} \quad (7.8)$$

egyenlettel adhatjuk meg.

Függőleges hajítás közegellenállás figyelembe vételével

Egy m tömegű testet v kezdősebességgel mozgásba hozunk függőlegesen lefelé. Ha az esés közben számolunk a közegellenállással, a test mozgását az

$$m\ddot{s}(t) + k\dot{s}(t)^2 - mg = 0 \quad (7.9)$$

egyenlettel írhatjuk le, ahol k a közegellenállást jellemző arányossági tényező, g pedig a gravitációs gyorsulás.

Tengeralattjáró merülése

Egy M tömegű tengeralattjáró egy kis P erő (merülési képesség) hatására merülni kezd. A víz ellenállása arányos a merülés sebességével és a hajótest S vízszintes vetületével. A hajótest merülését az

$$M\ddot{x}(t) + kS\dot{x}(t) - P = 0 \quad (7.10)$$

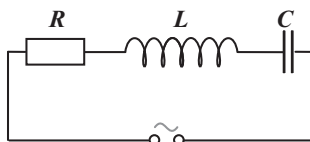
egyenlettel írhatjuk le, ahol k közegellenállásra jellemző arányossági tényező.

Rezgőkör

Az elektronikus alkatrészek kapcsolási lehetősége meglehetősen változatos lehet. Egyik alapvető áramkör a 7.1. ábrán látható R ellenállásból, L induktivitásból és C kapacitásból álló soros kapcsolás, az úgynevezett soros rezgőkör. Az áramkör állapotainak leírására alkalmas a

$$\ddot{q}(t) + \frac{R}{L}\dot{q}(t) + q(t)\frac{1}{LC} = E \quad (7.11)$$

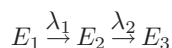
egyenlet. Az egyenletből $E = 0$ esetén a mechanikai rezgéseknél megismert (4.16) homogén egyenlethez hasonlóhoz jutunk. Ez a hasonlóság egyben magyarázattal is szolgál az azonos szóhasználatra a két jelenséggel kapcsolatban.



7.1. ábra.
Soros rezgőkör

Bomlási-sor, sorozatos kémiai reakció

Bizonyos elemek atomjai radioaktív bomlás során más, alacsonyabb rendszámú elemmé alakulnak át, miközben α^+ -, β^- -, illetve γ -részecskéket bocsátanak ki. A jelenséget Becquerel fedezte föl 1896-ban. Sokszor az így keletkezett elem sem stabil izotóp, és egy az előzőhöz hasonló lépés során tovább bomlik, miközben újabb elem keletkezik. Jelölje

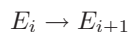


radioaktív anyagoknak azt a bomlási-sorát, amelyben E_1 anyag atomjai először E_2 atomjaivá alakulnak, majd azokból E_3 atomjai keletkeznek.

Az E_i stabilitása, azaz a $E_i \rightarrow E_{i+1}$ átalakulás sebessége a λ_i bomlási együtthatóval jellemezhető. Az

$$\begin{aligned} \dot{n}_1(t) &= -\lambda_1 n_1(t) \\ \dot{n}_2(t) &= -\lambda_2 n_2(t) + \lambda_1 n_1(t) \end{aligned} \quad (7.12)$$

egyenletrendszer az anyagok ilyen módon való átalakulását írja le, ahol n_i az E_i elem atomjainak a száma. λ_i az E_i izotóp atomjainak stabilitását, azaz az



átalakulás sebességét jellemzi.

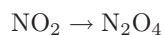
Fontos megemlítenünk, hogy a sorozatos kémiai reakciók is a (7.12) egyenletekhez

hasonló módon írhatók le. De említhetjük még a fertőző betegségek terjedését, lefolyását is, ami szintén leírható ezzel az egyenletrendszerrel. Ebben az esetben E_1 jelenti a fertőzésen még át nem esett egyedek számát, E_2 a fertőzés hatására megbetegedettek száma.

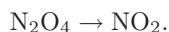
Egyensúlyi reakció

Bizonyos kémiai átalakulásokkal kapcsolatban ismert az a jelenség, hogy a keletkezett termékek a körülmények megfelelő megváltoztatásával visszaalakíthatók kiindulási anyagokká. Az ilyen átalakulásokat megfordítható kémiai reakcióknak nevezzük. Közismert reakció a szén-dioxid vízben való oldása (így készülnek a szénsavas italok). Ugyanakkor azt is tudjuk, hogy a pohárba kitöltött ásványvízből „megszökik” a szén-dioxid, de egy zárt palackban nem tapasztalunk szemmel látható változást. Ekkor a két átalakulás egyensúlyban van.

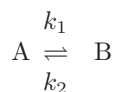
Hasonló reakciók a vöröses-barna nitrogén-dioxid színtelen dinitrogén-tetraoxiddá való alakulása is, amely hőmérséklet növelés vagy nyomás csökkentés hatására visszafelé játszódik le:



és



Hasonló folyamatok általános formában az



egyenlettel írhatók le.

Egyensúlyi állapot akkor alakul ki, amikor a kiindulási anyag [A] koncentrációja és a termék [B] koncentrációja már nem változik. Ez az átalakulás a

$$\begin{aligned} \frac{d[\text{A}]}{dt} &= -k_1[\text{A}] + k_2[\text{B}] \\ \frac{d[\text{B}]}{dt} &= -k_2[\text{B}] + k_1[\text{A}] \end{aligned} \tag{7.13}$$

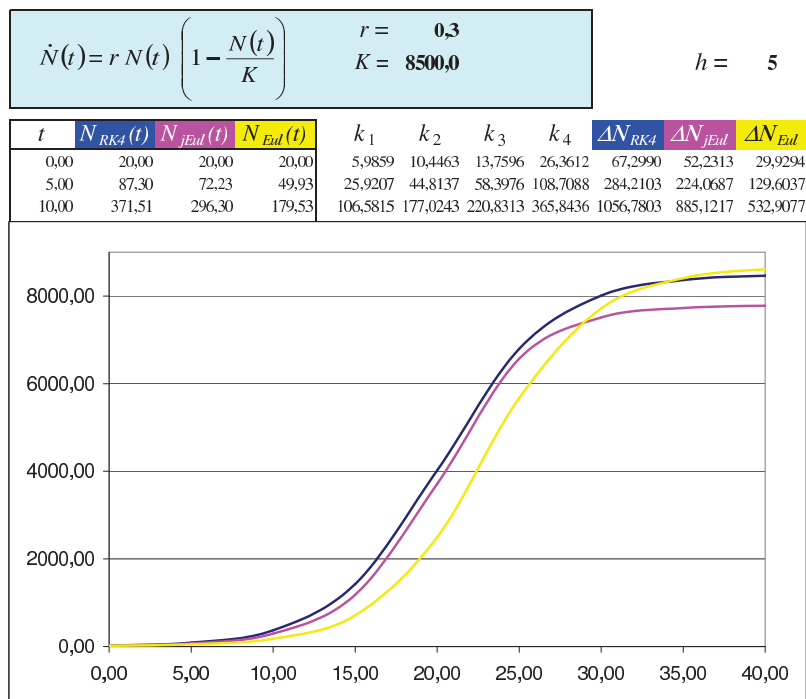
egyenletrendszerrel írható le, ahol k_1 és k_2 az oda- és visszaalakulás sebességét jellemző állandók.

7.1.2. Egy modell számítógépes realizációi

Természetesen foglalkoznunk kell azzal is, hogy a már ismertetett eredmények alkalmazására milyen lehetőségek kínálóznak. Ennek megfelelően, a dolgozathoz kapcsolódó munkák során célszerű volt számba venni a lehetséges szoftvereket, amelyeket oktatási céllal fölhasználhatunk. A teljesség igénye nélkül most ezekről teszünk említést.

A táblázatkezelők ilyen céllal történő alkalmazásának kétségtelen előnyei, hogy a szoftver beszerzése, valamint használata általában nem jelent problémát, és alap szintű alkalmazása nem igényel programozási ismereteket, ugyanakkor egyszerű lehetőséget biztosítanak a modellezéshez, a szimulációhoz és a közelítő módszerekhez kapcsolódó ismeretek szemléltetéséhez. Az Excel-tábla, amely alapján a 7.2. ábra készült, a táblázatkezelő alapvető lehetőségeit fölhasználva alkalmas a kiválasztott matematikai modell alapján történő szimulációra, valamint a különböző közelítő módszerek szemléletes összehasonlítására. A táblázat képleteihez az (5.1), az (5.2) és az (5.3) összefüggések szolgáltak alapul. A megvalósításhoz szükséges ismeretek (képletek írása, különböző cella-hivatkozások, diagramok készítése) alapvetőnek számítanak, tehát ez nem jelentheti akadályát annak, hogy a tanulók akár önállóan, vagy a modell jellegétől, és a szükséges matematikai ismeretek mélységétől függően több-kevesebb tanári segítséggel ilyen problémákat tanulmányozzanak, illetve feladatokat oldjanak meg.

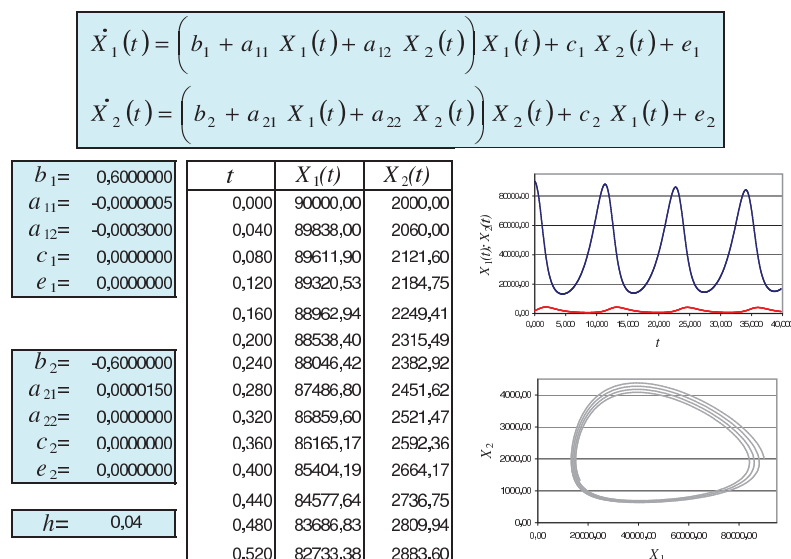
Az előzőtől összetettebb feladat megoldását mutatja be a 7.3 ábra, amely a (4.1) modell fölhasználásával készült. A paraméterek magválasztása a zsákmányragadozó rendszer modelljét eredményezte, de ez az egyszerű táblázat lehetővé teszi a 4. fejezetben tárgyalt rendszerek bemutatását.



7.2. ábra.

Logisztikus növekedés bemutatása MS Excel segítségével.

Lényegesen magasabb színvonalú, pontosabb és nem utolsó sorban a számításokhoz több segítséget biztosító szoftverek a számítógép-algebrai rendszerek. Ezek az eszközök azonban a közoktatás számára nehezen elérhetőek. Hatékony alkalmazásukhoz nem nélkülözhetők a programozási ismeretek. Bár alapvetően tudományos kutatómunkához fejlesztették ki őket, általában kiváló lehetőségeket biztosítanak a szemléltetés terén is. A dolgozat számos ábrájának elkészítését könnyítette meg a Maple 9. és a Mathematica 5.



7.3. ábra.

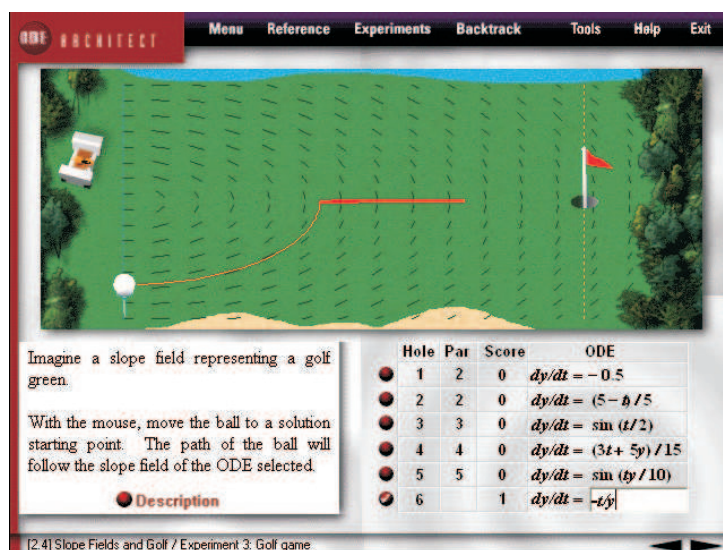
Az egyenletrendszer megfelelő paraméterezése a zsákmány-ragadozó modellt eredményezi.

Természetesen lehet az a cél, hogy egy futtatható állomány formájában állítsunk elő oktatási segédanyagot, ezért a fentiekén kívül történtek fejlesztések a Delphi környezet segítségével is. Ennek a megoldásnak vitathatatlan előnye, hogy a használat során, a továbbiakban már nincs szükség a fejlesztői környezetre, ugyanakkor egy demonstrációs céllal készített, jól átgondolt, megfelelően megvalósított program esetében általában nem okoznak gondot a számítógép-algebrai rendszerekhez képest „szerényebb” számaábrázolási lehetőségek.

Az említett eszközök mindegyike rendelkezik olyan sajátossággal, ami adott esetben igazolja az oktatási célú fölhasználásukat. Így például a világhálón való egyszerű publikálás lehetősége, és a fejlesztés során használható látványos elemek kellő alapot jelentettek egy Macromedia Flash segítségével történő fejlesztéshez.

7.2. Az OCM alkalmazása a szemléltetésben

A témához kapcsolódó, magas színvonalú munkák közé tartozik [6]. A könyv értékét emelik a CD-mellékleten található, sokoldalúan használható segédletek is. A 7.4. ábra jól példázza azt a játékosságot és szemléletességet, ahogy a kiadvány megközelíti ezeket a problémákat. Az ábra szerint egy golfpályára fölrajzolt iránymező mentén kell a fölhasználónak a pálya szélétől a labdát eljuttatnia a lyukhoz, miközben az követi az iránymezőt¹.



7.4. ábra.

Hibásan működő, adott iránymezőhöz görbét illesztő szemléltető program.

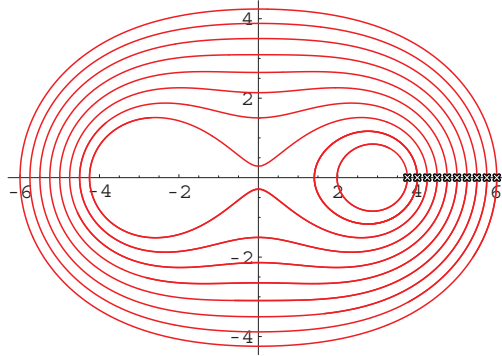
A programban a készítőik előre megadtak öt differenciálegyenletet, és ezzel öt iránymezőt, és biztosították annak lehetőségét is, hogy hatodikként a felhasználó adjon meg egy tetszőleges „pályát”. Az ábra tanúsága szerint a program nem képes

¹Jegyezzük meg, hogy hasonló probléma a valóságban is előfordulhat, ha az adott területen a pályához nem illeszthető vízszintes sík. Ugyanakkor nem elhanyagolható különbség, hogy míg a programban a labda helyét egy függőleges egyenes mentén megváltoztathatjuk, addig a valóságban csak a kezdősebesség irányát (és nagyságát) adhatjuk meg.

követni az ott megadott

$$\frac{dy(t)}{dt} = -\frac{t}{y(t)}$$

egyenlethez tartozó iránymezőt, amelyhez a 3.1. ábráról már ismert origó középpontú koncentrikus körök tartoznak. Ez a programhiba az OCM alkalmazásával egyszerűen kiküszöbölhető.



7.5. ábra.

Az OCM algoritmusa segítségével rajzolt Cassini-féle görbék.

Ennek bemutatására tekintsük a Cassini-féle görbék

$$F(x, y) = (x^2 + y^2)^2 - 2c^2(x^2 - y^2) - a^2 + c^4 = 0 \quad (7.14)$$

egyenletét, ahol a és c valós konstansok változtatásával a görbesereg különböző tagjait kapjuk. A (7.14.) egyenletből a

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y}$$

összefüggés fölhasználásával származtathatjuk a görbesereg megadására alkalmas

$$\frac{dX(t)}{dt} = -\frac{t^3 + tX^2(t) - c^2t}{X^3(t) + t^2X(t) + c^2X(t)} \quad (7.15)$$

egyenletet.

Bizonyos esetekben az iránymezőnél szemléletesebb lehet csupán néhány, előre megadott pontokon áthaladó sereggörbe megrajzolása. Erre ad példát a 7.5., valamint a differenciálegyenletekkel kapcsolatos fogalmak bemutatásánál fölhasznált a 3.1. és a 3.2. ábra, amelyek az OCM algoritmusát alkalmazva, a már korábban is említett Mathematica segítségével készültek.

Összefoglalás

A természet jelenségeinek alaposabb megismerése – nem csak az oktatás folyamatában – a róluk alkotott modellek segítségével is lehetséges. A megismerés mélységét csak a modell hitelessége korlátozza. A dolgozat célkitűzése volt, hogy olyan elemeket vegyen sorra, amelyeknek szemléletformáló szerepe lehet a matematikai modellezés és a számítógépes szimuláció témakörében, ugyanakkor gyakorlati haszna is van az oktatás és a modellezés terén egyaránt.

Számos hazai és nemzetközi felmérés eredményeit értékelő publikáció számolt be a természettudományos – elsősorban a fizika, kémia és a matematika – tárgyak oktatásának egyféle válságáról². A több évtized alatt kialakult helyzet összetettsége miatt a probléma megoldását jelentő változtatások is szerteágazók lehetnek. Vélhetően tartalmi és módszertani változtatásokra lesz szükség az oktatás különböző szintjein, bele értve a tanárképzést és – hogy a változtatások kedvező hatása a lehető leghamarabb érvényesüljön – a tanártovábbképzést is. Alapvető problémaként említettük a tanulók túlterheltségét, az utóbbi évtizedek tudományos eredményeinek alulreprezentáltságát, a kísérletek (különösen a tanulói kísérletek) és általában a szemléltetés szerepének csökkenését.

A számítógép ma már az oktatás különböző szintjein megtalálható, sokoldalúan alkalmazható oktatási eszköz. Az említett problémák mindegyikére megoldást jelenthet az informatikai eszközök célzott használata.

Az első fontos elem a kísérleti mérés, amire alapozhatjuk a vizsgált jelenség belső összefüggéseinek matematikai leírását. Erre láthattunk egy minden tekintetben egyszerű, de mégis szemléletes példát a 2.2. bekezdésben. Azért is van hangsúlyos szerepe ennek a fejezetnek, mert egy újszerű, hatékony alternatívát ismertet a kísérleti mérések vonatkozásában. Az itt modellezett jelenség révén kínálkozott az első alkalom, hogy érzékeltesük a matematika eszközeinek fontosságát és egyetemességét.

A tanulók túlterheltsége jellemezhető az elsajátítandó ismeretek mennyiségével és a tanuláshoz szükséges idővel. Mivel a természettudományok jellemző módon a

²A felmérések eredményei arra engednek következtetni, hogy a probléma lényegesen összetettebb, mint azt a korábbiakban vázoltuk, hiszen a magasabb évfolyamokon lényegében minden tárgy kedveltsége alacsonyabb, mint korábbiakon. Ezen kívül a fent említett három tárggyal együtt a nyelvtan szerepel az utolsó négy helyen [8]. Ugyanakkor például a biológia lényegesen előkelőbb helyet foglal el a sorban. Ebben az összefüggésben a probléma azonban már messze túl mutatna a dolgozat keretein.

minket közül vevő világ jelenségeit tanulmányozzák, elsődlegesnek kell tekintenünk a közvetlen tapasztalatokat. Bizonyos esetekben azonban – a szaktanárok által is megfogalmazott időhiány enyhítésére – hatékonyan alkalmazhatunk számítógépeket (főlhasználva azok multimédiás lehetőségeit) egyes költséges, vagy más szempontból nehezen elvégezhető kísérletek bemutatására. Ilyen mérőkísérletekre láthatunk példákat a 2.1. bekezdésben. Itt lényegében olyan videofelvételek mutatják be a vizsgált jelenséget, amelyeket a felvétel szerkesztése során megfelelő képi elemekkel ellátva alkalmassá tettünk a mérés szempontjából fontos értékek leolvasására. A módszer alkalmazását indokolja, hogy segítségével kvalitatív és kvantitatív vizsgálatok egyaránt elvégezhetők, nem szükséges a kísérleti eszközök és anyagok jelenléte, segítségével a tanulók önállóan, akár veszélyes jelenségeket is vizsgálhatnak és tetszőlegesen sokszor tanulmányozhatók. Természetesen hátrányt jelent, hogy egy adott felvétel esetében nem lehetséges a paraméterek módosítása³. Ez ellensúlyozható azzal, ha a kísérletről több, különböző beállítással készült felvétel áll rendelkezésre, ahogyan ezt a 2.1. bekezdés 2.1. táblázata és 2.2. ábrája szemlélteti. Ezeknél a méréseknél tekinthetjük úgy, hogy valaki más jóval korábban előkészítette és el is végezte a kísérleteket – így ez a megoldás nem alkalmas a kísérletezésben való jártasság fejlesztésére – de az eredmények leolvasása és azok kiértékelése a felvételek elemzőire vár. A kísérleti méréseknek egy másik, a fejezetben ismertetett módja – a felvételek számítógép által végzett kiértékelése – megint más céllal választható. Ezzel a megoldással a vizsgált jelenséghez közvetlenül tudunk nagy mennyiségű elektronikusan tárolt mérési eredményt társítani. A modellalkotás folyamatában van szükség arra, hogy meg tudjuk jeleníteni és vizsgálni tudjuk a mért értékek közötti kapcsolatokat. Tudjuk, hogy a számítógépes adatgyűjtés gyors kiértékelést tesz lehetővé.

A különböző megoldásokat más-más céllal, tudatosan választva, lényegében a teljes műveletnek azt a részét kiemelve, amely az oktatás folyamatában valóban szükséges, teljesen nem szakadunk el a kísérletezés gyakorlatától, de mégis időt takaríthatunk meg.

Az így szerzett tapasztalatok már önmagukban is hasznosak, de szeretnénk ezeket a jelenségek mélyebb összefüggéseinek feltárására használni. A NaAc kristályosodását vizsgálva, annak eredményeként előállítottuk a jelenség egy speciális körülmények között érvényes matematikai modelljét, és ennek értelmezésével a modell általánosításait. Az itt nyert összefüggéseket aztán párhuzamba állítottuk a mechanikai mozgásokat leíró néhány törvényszerűséggel, ezzel is alátámasztva,

³Fontos megjegyeznünk, hogy a valós körülmények között elvégzett kísérleteket, méréseket mindenkor előnyben kell részesítenünk, ha az lehetséges.

hogy a matematika eszközei az egyes tudományterületek sajátosságaitól függetlenül alkalmazhatók a jelenségek leírására.

Különbő tudományterületekhez (kémia, fizika, biológia, anyagszerkezet, ökológia, stb.) tartozó jelenségek egész sora ismert, amelyek törvényszerűségei a matematika eszközeinek segítségével hasonló módon írhatók le. Ugyanezt a tapasztalatot szeretné nyomatékosítani a dolgozat a 4. fejezetében egy összetettebb modell segítségével, amelyet a (4.1) differenciálegyenlet-rendszer formájában adhatunk meg. Ez az egyenletrendszer felépítésénél fogva alkalmas különféle jól ismert jelenségek (exponenciális és logisztikus növekedés, populációk közötti interakciók, egyszerűbb harci modellek, bizonyos periodikus jelenségek) leírására. Ennek igazolására a 7. fejezet tartalmaz még különböző jelenségeknek egy olyan gyűjteményét, amelyek modellezésére szintén alkalmas ez az egyenletrendszer.

A számítógépek fejlődésével (műveleti sebességük és számítási pontosságuk javulásával) egyre jobban képesek vagyunk kielégíteni a közelítő számítások iránti igényeket. Ez egyúttal azt is jelenti, hogy egyre nagyobb az igény az ilyen algoritmusok ismerete iránt is. Ilyenek a differenciálegyenletek közelítő módszerei is, amelyek közül néhány (Euler-módszer, javított Euler-módszer, Runge–Kutta-módszer, implicit Euler-módszer, trapéz-módszer) szemléletes bemutatását tűzte ki célul a dolgozat azért, hogy segítse azok algoritmizálását. A dolgozat a fenti, jól ismert módszerek mellett ismertet egy új számítási eljárást is, amely további összehasonlításokat tesz lehetővé a közelítő módszerek hatékonyságával kapcsolatban a korrekter módszerek vonatkozásában is.

Ha abból indulunk ki, hogy az oktatás különböző szintjein az ismereteknek csak az adott szintre jellemző, megfelelő mélységű elsajátíttatására törekszünk, bizonyos esetekben kimondottan előny lehet, ha a számítógépes szimuláció elfedi a tanulók elől a számítási műveletek bonyolultságát. Ezeken túlmenően a matematikai modellezés és a számítógépes szimuláció jó koncentrációs lehetőséget biztosít a különféle műveltségi területek, elsősorban természettudományos tantárgyak között. Hogy ezek a lehetőségek realizálhatók legyenek, a témában járatos oktatókra van szükség.

Summary

Understanding of the phenomenon of nature – not only in education process – is possible through the models made of them. The depth of understanding is only limited by the credibility of the model. The objective of the study was to observe those elements which may have a thought-provoking role in the process of mathematical modelling and computer simulation and have practical use in the field of education and modelling as well.

A number of national and international surveys assessing the results of publications reported about some kind of crisis in the field of science subjects mainly in Physics, Chemistry and Mathematics⁴. Due to the complexity of the situation, which developed during decades, the solutions to the problem can be complex, too. Content-based and methodological changes will be needed at various educational levels, including teacher training as well as post-gradual teacher training so that the positive effect of the changes can be realized as soon as possible. According to the above-mentioned facts the overburden of students, the under-representation of the results of the resent experiments (mainly student experiments) and the general decline in the role of illustration can be the basic problem.

Nowadays the computer is available at different levels of education and it is a kind of educational tool which can be used in many ways. The targeted usage of the informational tools can be the solution to the problems mentioned above.

The first important element is the experimental measuring on which the mathematical description of the internal correlation of the phenomenon can be based. In paragraph 2.2 a simple but graphic example can be seen. This chapter is emphatic because it introduces an innovative and effective alternative in terms of experimental measuring. Thank to the phenomenon modelled here we have an opportunity to represent the importance and universality of the tools of mathematics.

The fact that the students are overburdened can be characterized by the quantity of the material and the time required for learning. Since science subjects study the phenomena of the surrounding world, direct experience should be considered as priority. However, in certain cases, teachers can alleviate the lack of time by using

⁴The results of the surveys suggest the problem is considerably more complex than we have previously explained, since at higher grades the popularity of each subject is lower than it was previously. In addition to this, the three above-mentioned subjects, together with Grammar take the last four places in the rank [8]. At the same time the Biology is considerably ranked higher. In this context the problem is far too beyond the framework of this thesis.

computers (using their multimedia possibilities) to demonstrate some expensive or otherwise difficult experiment.

Such examples are presented in 2.1 section. In this case the video recordings show the studied phenomenon, this recording made it possible to read important values and this recording was completed during the editing by adding suitable elements. This method is justified by the fact that both qualitative and quantitative studies can be carried out without using experimental equipment and material. In addition to this, students can study dangerous phenomenon as many times as they wish. This method has certain disadvantages as well, for example modifying the parameters is impossible during the studying⁵. This drawback can be counterbalanced by the fact that the experiments with different settings are available. See table 2.1 and 2.2 graph which illustrate it. These measurements can be considered in the way that someone else has already prepared them earlier, consequently, this method is not suitable for developing the experimental skills, but to read and evaluate the results of the experiments is the analyst's task. The other type of experimental measurements (described in another subject) where the results are evaluated by computers - can have another optional objective. By using this method a great quantity of electronically stored results can be associated with the phenomenon. During the process of modelling it is necessary to be able to display and examine the difference between the measured values. We know that computerised data collection is suitable for rapid assessment.

By selecting the different types of solutions deliberately to fulfil different objectives and highlighting the part of the operation, which is really important in education, we do not deviate from the experimentation, but save time.

The experiences obtained in such way are already useful themselves we would like to use them to reveal the deeper contexts of the phenomena. During the examination of NaAc crystallisation as a result of this we were able to construct the mathematical model of the phenomenon, which in certain special circumstances, and by the interpretation of this, we could construct the generalisation of the model. We drew a parallel between the relationships gained here with a few laws describing mathematical motions to support the idea that the devices of the mathematics are applicable to the description of the phenomena regardless of the peculiarities of the given area.

Various aspects of science (Chemistry, Physics, Biology, Substance construction, Ecology) are known, the laws of which can be described with the help of mathematical tools. We would like to stress the same experience in chapter 4 of

⁵It is important to note that the experiments carried out in natural surroundings should be preferred if it is possible.

this thesis with the help of a more complex model, which was given in the form of a (4.1) differential equation. This system of equation is suitable for describing various well-known phenomena (for example exponential and logistic increase, interaction between different populations, simple martial models, certain periodic phenomena) due to its construction. To justify this fact, chapter 7 contains a collection of various phenomena, and this system of equation is suitable for modelling these phenomena.

With the development of the computers (with the improvement of their operation velocity and their computational accuracy) we are able to fulfil the requirements of the approaching calculations increasingly better. At the same time it means that there is a growing demand for the knowledge of the algorithms like this. The approximation methods of the differential equations belong to this category, (a few of which are Euler-method, improved Euler-method, trapezium method) and the aim of this thesis was to demonstrate some of them in order to help algorithmise them. This paper, besides the well-known methods mentioned above, demonstrates a new method as well, which gives way to further comparisons in connection with the efficiency of the approximation methods with regard to the corrector methods, too.

Jelölések

$\mathbb{N}$	a természetes számok halmaza
$\mathbb{R}$	a valós számok halmaza
$\mathbb{R}^n$	az n -dimenziós valós vektorok halmaza
$\ \mathbf{v}\ $	a $\mathbf{v}$ vektor normája
$P(p_0; p_1; \dots; p_n)$	az $(n+1)$ -dimenziós térbeli P pont, melynek koordinátái rendre $p_0; p_1; \dots; p_n$
$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$	az $\mathbf{u}$ és $\mathbf{v}$ vektorok skaláris szorzata
$\overrightarrow{AB}$	vektor, melynek kezdőpontja A , végpontja B
$\dot{X}(t), [\ddot{X}(t)]$	az X valós változójú, valós értékű függvény első [második] deriváltja t szerint
$\mathbf{A}$	az $\mathbf{A}$ valós elemű mátrix

Irodalomjegyzék

- [1] ARATÓ, M., *A Famous Nonlinear Stochastic Equation (Lotka-Volterra Model with Diffusion)*, Mathematical and Computer Modelling, **38** (2003), 709–726.
- [2] АРНОЛЬД В.И., *Обыкновенные дифференциальные уравнения*, Наука, Москва, (1984)
- [3] ATKINS, P.W., *Physical Chemistry I-III.*, Oxford University Press, Oxford (1990)
- [4] BAZSA, GY., *Nem lineáris dinamika és egzotikus kinetikai jelenségek kémiai rendszerekben*, Egyetemi jegyzet (1992)
- [5] BIRABEN, N.J., *Essai sur l'évolution du nombre des hommes*, Population (1979)
- [6] BORRELLI, R.L., COLEMAN, C.S., *Differential Equations: A Modeling Perspective*, 2nd Edition, Wiley, New York, (2004)
- [7] BUDÓ, Á., *Kísérleti fizika I-III.*, Tankönyvkiadó, Budapest (1978)
- [8] CSAPÓ, B., *A tantárgyakkal kapcsolatos attitűdök összefüggései*, MAGYAR PEDAGÓGIA **100/3** (2000) 343-366.
- [9] EINSTEIN, A., *Über die spezielle und allgemeine Relativitätstheorie*, Druck und Verlag von Friedrich Vieweg und Sohn, Braunschweig (1921)
- [10] FERNENGEL, A., *A kémia tantárgy helyzete és fejlesztési feladatai*, Új pedagógiai szemle **52** (2002) 68-82.
- [11] ФИЛИППОВ А.Ф., *Сборник задач по дифференциальным уравнениям*, Государственное Издательство Физико-Математической Литературы, Москва, (1961)

- [12] FOKASZ, N., *Káosz és fraktálok, Bevezetés a kaotikus dinamikus rendszerek matematikájába – szociológusoknak*, Új Mandátum Könyvkiadó (2000)
- [13] GEARY, D. C., *Children's mathematical development: Research and practical applications* Washington, DC: American Psychological Association (1994)
- [14] HADHÁZY, T., SZABÓ, Á., *Általános iskolai tanulók véleménye a fizikaoktatásról*, Fizikai Szemle **46** (1996) 166.
- [15] HATVANI, L., PINTÉR, L., *Differenciálegyenletes modellek a középiskolában*, POLIGON (1997)
- [16] HILBERT, D., COHN-VOSSEN, S., *Anschauliche Geometrie*, Springer, Berlin (1996)
- [17] HOLT, R.D., PICKERING, J., *Infectious Disease and Species Coexistence: A Model of Lotka-Volterra Form*, The American Naturalist, (1985)
- [18] HAWKING S.W., *Einstein álma és egyéb írások*, Vince Kiadó, (2000)
- [19] JOHNSON, R.A., WICHERN, D.W., *Applied Multivariate Statistical Analysis*, Prentice-Hall International, Inc. (1992)
- [20] JÓZSA K., LENCSEŠ GY., PAPP K., *Merre tovább iskolai természettudomány?*, Fizikai Szemle **46** (1996) 167.
- [21] KONDRATYEV, V., *The Structure of Atoms and Molecules*, Foreign Languages Publishing House, Moscow
- [22] LIVI BACCI, M., *A Concise History of World Population: An Introduction to Population Processes*, Blackwell Publishing, (2001)
- [23] MALTHUS, T.R., *An Essey on the Principle of Population*, Penguin Books, (1985)
- [24] MEYER P.S., AUSUBEL J.H., *Carrying Capacity: A Model with Logistically Varying Limits*, Technological Forecasting and Social Change, 61(3):209-214, (1999)
- [25] MURRAY J.D., *Interdisciplinary Applied Mathematics: Mathematical Biology*, Springer, (2003)
- [26] *Nemzeti alaptanterv: 202/2007. (VII. 31.) rendelet a Nemzeti alaptanterv kiadásáról, bevezetéséről és alkalmazásáról szóló 243/2003. (XII. 17.) Korm. rendelet módosításáról* (2007)

- [27] PAPP K., JÓZSA K., *Legkevésbé a fizikát szeretik a diákok?*, Fizikai Szemle **50/2** (2000) 61-67.
- [28] ПЕТРОВСКИЙ И.Г., *Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений*, Наука, Москва, (1970)
- [29] PONOMARJOW, K.K., *Differenciálegyenletek felállítása és megoldása*, Tankönyvkiadó, Budapest (1981)
- [30] ПОНТЯГИН Л.С., *Обыкновенные дифференциальные уравнения*, Наука, Москва, (1983)
- [31] REMÉNYI, Z., SIEGLER, G., SZALAYNÉ TAHI, ZS., *Érettségire felkészítő feladatgyűjtemény – Informatika*, Nemzeti Tankönyvkiadó (2004)
- [32] RONTÓ, M., RAISZ, P., *Differenciálegyenletek műszakiaknak*, Miskolci Egyetemi Kiadó (2004)
- [33] SEUL, M., O’GORMAN, L., SAMMON, M.J., *Practical algorithms for image analysis*, Cambridge University Press, (2000)
- [34] RADNÓTI, K., *A fizika tantárgy helyzete és fejlesztési feladatai egy vizsgálat tükrében*, Fizikai Szemle **53/5** (2003) 170
- [35] SZALAY, B., SZEPESI, I., *A matematika- és természettudományoktatásról ŰTIMSS 2007*, Új Pedagógiai Szemle **1** (2009) 3
- [36] STOYAN, G., *Numerikus matematika Mérnököknek és programozóknak*, TYPOT_{EX} Kiadó (2007)
- [37] СТЕПАНОВ В.В., *Курс дифференциальных уравнений*, Физматгиз, Москва, (1959)
- [38] SZENTKUTI, ZS. *Periodikus megoldások May-Leonard típusú populációdinamikai modellekben*, Alkalmazott matematikai lapok, (1998)
- [39] TÓTH, J., SIMON, L.P., *Differenciálegyenletek, Bevezetés az elméletbe és az alkalmazásokba*, TYPOT_{EX} Kiadó (2005)
- [40] VÁTI P., BÁNFI I., FELVÉGI E., KROLOPP J., RÓZSA C., SZALAY B., *A PISA 2000 vizsgálatról*, Új Pedagógiai Szemle 51/12 (2001)
- [41] WALTER, W. *Ordinary Differential Equations*, Graduate Texts in Mathematics 182, Springer, New York (1998)

- [42] WILSON, E.O., BOSSERT, W.H., *A Primer of Population Biology*, Sinauer Associates, Inc., Sunderland, Massachusetts. (1971) 192 pp.
- [43] WOLFRAM, S., *The Mathematica Book, 5th ed.*, Wolfram Media, (2003)

Geda Gábor publikációi

Referált folyóiratban megjelent publikációk

- [44] GEDA, G., *Modelling a simple continuous-time system*, Annales Mathematicae et Informaticae, Eger **35** (2008), 157–162
- [45] GEDA, G., *Various systems in a single mathematical model*, Teaching Mathematics and Computer Science, Debrecen **6/1** (2008), 1–13
- [46] GEDA, G., VÁGNER, A., *Solving Ordinary Differential Equation Systems by Approximation in a Graphical Way*, Annales Mathematicae et Informaticae, Eger **33** (2006), 57–68.
- [47] GEDA, G., *Solving initial value problem by different numerical methods: Practical investigation*, Annales Mathematicae et Informaticae, Eger **32** (2005), 203–210.

Előadások

- [48] GEDA, G., *Investigation of Stochastic Models of Some Periodic Phenomena*, 7th International Conference on Applied Informatics, Eger (2007)
- [49] GEDA, G., *Investigation of Stability of Nonlinear Differential Equations with Stochastic Methods*, XXVI. Seminar on Stability Problems for Stochastic Models, Szováta (2006)
- [50] GEDA, G., VIDA, J., MURÁNYI Z., B. TÓTH SZ., *How to study the phenomena of nature in the future (Multimédia a Kísérleti mérések szolgálatában)*, NETWORK SHOP 2005, Szeged (2005)
- [51] GEDA, G., *Kezdetiérték-probléma közelítő megoldásának egy geometriai szemléltetése*, Tvaszi Szél 2005, Debrecen (2005)
- [52] GEDA, G., *Solving initial value problem by approximation in different graphic ways*, University of Miskolc, Miskolc (2005)

- [53] GEDA, G., VIDA, J., *Observation of mechanical movements through virtual experiments*, 6th International Conference on Applied Informatics, Eger (2004)
- [54] GEDA, G., VIDA, J., *Digitális tudásbázis és fizikai mérőkísérlet*, Agria Media, Eger (2004)
- [55] GEDA, G., *Új utak keresése és tapasztalatok a számítógéppel segített vizuális szemléltetés területén*, Informatika a Felsőoktatásban, Debrecen (2002)
- [56] GEDA, G., RÁCZ, L., *Visualisation of Quantum Station*, 1st European Conference in Chemical Education, Budapest (1998)
- [57] GEDA, G., RÁCZ, L., *Elektronszerkezet szemléltetése számítógéppel*, Agria Media, Eger (1998)
- [58] GEDA, G., *Elektronszerkezet 3D szemléltetése számítógéppel*, Agria Media, Eger (1994)
- [59] GEDA, G., *A hidrogénszerű atomok elektronszerkezetének szemléltetése számítógéppel*, XV. KÉMIA TANÁRI KONFERENCIA, Kaposvár (1992)

Jegyzet

- [60] BÉKÉSI, J., GEDA, G., HOLOVÁCS, J., PERGE I., *Adatbázis-kezelés*, EKF Líceum Kiadó, Eger, (2001)

Egyéb

- [61] GEDA, G., *SuliNet Digitális Tudásbázis, Elektronikus tananyag, (Modellezés, Adatszerkezetek)*, Edukáció Kht. (2006)
- [62] GEDA, G., VIDA, J., *Virtuális kísérletek mechanikai mozgások vizsgálatára*, 47. Országos Középiskolai Fizikatanári Ankét és Eszközkiállítást, Miskolc (2004)
- [63] GEDA, G., VIDA, J., *Virtuális kísérletek mechanikai mozgások vizsgálatára*, XXVIII. Országos Általános Iskolai Fizikatanári Ankét és Eszközkiállítást, Karcag (2004)

- [64] GEDA, G., VIDA, J., *Digitális oktatási segédanyagok fejlesztése (IHM-ITP-11): Mechanikai mozgások vizsgálata interaktív módon, virtuális kísérletekkel*, Informatikai és Hírközlési Minisztérium (2003)
- [65] GEDA, G., *A számítástechnika oktatásának hatékonyabbá tétele a közoktatásban*, A Közoktatásfejlesztési Alap negyedik éve, MKM, Budapest (1994), 48–50
- [66] GEDA, G., *Kvantumszámok és atompályák közötti összefüggések bemutatásához számítógépes program és diasorozat*, Pedagógus Szakma Megújítása Projekt (1993)
- [67] GEDA, G., *Egyesített Pénztári Rendszer-oktató szoftver*, Magyar Posta, (1990)
- [68] GEDA, G., *3 Primo Etüd*, ötlet86, BIT-LET, Budapest **5/48 (232)** (1986), 35

Köszönetnyilvánítás

Ezúton is szeretnék köszönetet mondani mindazoknak, akik közvetlenül vagy közvetve hozzájárultak dolgozatom elkészítéséhez.

Köszönetem fejezem ki témavezetőmnek Dr. Holovács Józsefnek, hogy figyelemmel kísérte és segítette munkámat, amikor arra szükség volt.

Külön köszönöm Dr. Arató Mátyásnak és Dr. Csőke Lajosnak, hogy elindítottak ezen az úton, és hasznos tanácsokkal, bátorító szavakkal elérték, hogy eljussak a cél közelébe.

Szeretnék köszönetet mondani tanárainknak, Dr. Bácsó Sándornak, Dr. Kormos Jánosnak, Dr. Lajkó Károlynak, Dr. Nyakóné Juhász Katalinnak, Dr. Páles Zsolt-nak és különös tekintettel Dr. Pap Gyulának, akikkel PhD-tanulmányaim során kapcsolatba kerültem, és a velük folytatott konzultációk szakmai és emberi értékei mind segítettek dolgozatom elkészítésében és a készítő épülését szolgálták.

Itt mondok köszönetet Dr. Hatvani Lászlónak a vele folytatott beszélgetésekért, amelyek elősegítették a dolgozat végleges koncepciójának kialakulását.

Köszönettel tartozom számos kollégámnak remélve azt, hogy köszönetemet a mindennapok közös munkája során még lesz módom kifejezni.

Hálával tartozom feleségemnek, gyermekeimnek és édesanyámnak, akik türelmükkel, a nyugodt háttér biztosításával járultak hozzá a disszertáció elkészítéséhez.