

MODELLEZÉS ÉS SZIMULÁCIÓ

(A LINEÁRIS RUGALMASSÁGTAN ÉS A VÉGESELEM-MÓDSZER)



MODELLEZÉS ÉS SZIMULÁCIÓ

(A LINEÁRIS RUGALMASSÁGTAN ÉS A VÉGESELEM-MÓDSZER)

Szerzők:

Dr. Mankovits Tamás
Huri Dávid

Lektor: Dr. Szabó Tamás

Kézirat lezárva: 2015. január

Kiadja: Debreceni Egyetem

TÁMOP-4.1.2.E-13/1/KONV-2013-0010

„Képzés- és rendszerfejlesztés a sportos társadalomért Észak-Kelet Magyarországon”

A és A komponensek a felsőoktatási Sport fejlesztésért

Debrecen, 2015
© 2015 a szerzők

TARTALOMJEGYZÉK

ELŐSZÓ	10
1. BEVEZETÉS.....	11
1.1. A végeelem-módszer kialakulásának rövid történeti áttekintése.....	12
1.2. A végeelem-módszer rövid összefoglalása	12
2. LINEÁRIS RUGALMASSÁGTAN ALAPJAI	16
2.1. A lineáris rugalmasságtan ismeretlen mezői.....	16
2.1.1. Elmozdulásmező	16
2.1.2. A derivált tenzor és felbontása	17
2.1.3. Forogató tenzor	20
2.1.4. Alakváltozási tenzor (alakváltozási állapot)	20
2.1.5. Feszültségtenzor (feszültségi állapot).....	22
2.1.6. Főfeszültségek, skalárinvariánsok és az egyenértékű (redukált) feszültség.....	23
2.2. A rugalmasságtan alapegyenletrendszere és peremfeltételei	24
2.2.1. Kinematikai egyenletek (geometriai egyenletek).....	24
2.2.2. Anyagegyenletek	25
2.2.3. Egyensúlyi egyenletek	27
2.2.4. Peremfeltételek.....	29
2.3. Egydimenziós peremértékfeladat analitikus megoldása.....	30
3. ALAKVÁLTOZÁSI ENERGIA ÉS ENERGIAELVEK.....	35
3.1. Alakváltozási energia	35
3.2. Teljes potenciális energia	36
3.3. Közelítő eljárások és a variációszámítás	37
3.3.1. Variációszámítás	37
3.3.2. Variációs elvek.....	37
3.4. Teljes potenciális energia minimuma elv	38
3.4.1. Lagrange-féle variációs elv.....	38
3.5. Lineáris rugó.....	39
3.6 Ritz-módszer.....	44
4. ELMOZDULÁSMEZŐN ALAPULÓ VÉGESELEM-MÓDSZER.....	48
4.1. Az elmozdulásmezőn alapuló végeelemes egyensúlyi egyenlet származtatása	48
4.2. Húzott-nyomott rúdelem.....	54

4.3. Hajlított-nyírt rúdelem.....	60
4.3.1. Hajlított-nyírt rúdszerkezetekre vonatkozó egyenletrendszer és peremfeltételek	60
5. LINEÁRIS RUGALMASSÁGTAN KÉTDIMENZIÓS FELADATAI	68
5.1. Síkalakváltozási állapot	68
5.2. Általánosított sík feszültségi állapot.....	70
5.3. Tengelyszimmetrikus feladatok	72
6. KÉTDIMENZIÓS FELADATOK VÉGESELEMES TÁRGYALÁSMÓDJA.....	73
7. IZOPARAMETRIKUS VÉGESELEMEK	78
7.1. Egydimenziós izoparametrikus leképezés	78
7.1.1. Húzott-nyomott rúdelem.....	78
7.1.2. Háromcsomópontú rúdelem (kábel elem).....	80
7.2. Kétdimenziós izoparametrikus leképezés.....	82
7.2.1. Lineáris négyszög elem	82
7.2.2. Kvadratikus négyszög elem	88
7.2.3. Lagrange-féle kvadratikus négyszög elem.....	90
7.2.4. Lineáris háromszög elem	91
7.2.5. Kvadratikus háromszög elem.....	94
7.3. Háromdimenziós izoparametrikus leképezés.....	95
7.3.1. Nyolccsomópontú hexaéder („tégla”) elem	95
7.3.2. Húzcsoomópontú kvadratikus hexaéder elem	98
7.3.3. Huszonhétcsomópontú hexaéder elem.....	100
7.3.4. Négycsomópontú tetraéder elem	100
7.3.5. Tízcsomópontú kvadratikus tetraéder elem.....	103
7.3.6. Tizennégycsomópontú tetraéder elem	104
8. NUMERIKUS INTEGRÁLÁS.....	105
8.1. Gauss-féle kvadratúra.....	106
8.2. A merevségi mátrix kiszámítása a Gauss-féle kvadratúrával	110
9. ÁLTALÁNOS CÉLÚ VÉGESELEMES PROGRAM-CSOMAGOK	111
9.1. Bevezetés a Femap 9.3 végeelem programba.....	112
10. NUMERIKUS PÉLDÁK.....	114
1. Numerikus példa (Önsúlyával terhelt prizmatikus rúd - programozás).....	114
2. Numerikus példa (Húzásra igénybevett prizmatikus rúd)	117
3. Numerikus példa (Hegesztett rácsos szerkezet vizsgálata).....	122
4. Numerikus példa (Statikailag határozatlan tartó).....	129
5. Numerikus példa (Hidraulikus emelőgép vizsgálata hibrid modell alkalmazásával).....	132
6. Numerikus példa (Furattal gyengített alumínium lemez).....	144

7. Numerikus példa (Belső nyomással terhelt vastagfalú cső)	148
8. Numerikus példa (Forgásszimmetrikus nyomástartó edény).....	153
9. Numerikus példa (Síkjában megoszló terheléssel terhelt körlemez).....	161
10. Numerikus példa (Lemez próbatest húzása).....	167
11. Numerikus példa (Csavarkötés vizsgálata).....	173
FELHASZNÁLT IRODALOM	182

TÁBLÁZATOK JEGYZÉKE

2.1. táblázat Az elmozdulások, rúderők és feszültségek	33
3.1. táblázat Az elmozdulásmező (analitikus számítás, Ritz-módszer)	47
8.1. táblázat Gauss koordináták és Gauss súlyok	106
9.1. táblázat Vonalelem könyvtár	112
9.2. táblázat Síkbeli elem könyvtár.....	112
9.3. táblázat Térbeli elem könyvtár.....	113
9.4. táblázat Anyagkönyvtár.....	113
9.5. táblázat A terheléstípusok könyvtára	113
10.1. táblázat A csomópontok elmozdulásai terhelt állapotban.....	121
10.2. táblázat Rúderő értékek	121
10.3. táblázat A csomóponti elmozdulások és szögelfordulások.....	131
10.4. táblázat A veszélyes keresztmetszetben ébredő igénybevételek	143
10.5. táblázat A csomópontok elmozdulása	152
10.6. táblázat Az elemekben ébredő feszültségek	152
10.7. táblázat Az öt elem, ahol a legnagyobb feszültség ébred	160
10.8. táblázat A külső körív mentén lévő elemekben ébredő feszültség.....	166

ÁBRAJEGYZÉK

1.1. ábra A végeelem szimulációt tartalmazó tervezési-gyártási folyamat egyszerűsített modellje.....	11
1.2. ábra A végeelem vizsgálat folyamata	13
1.3. ábra Végeselemes diszkretizáció	14
1.4. ábra Peremfeltételek figyelembevétele.....	14
2.1. ábra Az elmozdulásvektor származtatása	16
2.2. ábra Két szomszédos pont elmozdulásállapota	17
2.3. ábra Az alakváltozási tenzor és a forgató tenzor értelmezése.....	19
2.4. ábra Az elemi környezet alakváltozási állapota	21
2.5. ábra A feszültségvektor bevezetése.....	22
2.6. ábra Lineárisan rugalmas anyag karakterisztikája	25
2.7. ábra A rugalmas test egy belső tartománya	27
2.8. ábra Típusos peremfeltételek	29
2.9. ábra Egydimenziós rugalmas peremértékfeladat	30
2.10. ábra A rúd egydimenziós mechanikai modellje	30
2.11. ábra Az elemi rúdszakasz egyensúlya	31
2.12. ábra Az elmozdulások, rúderők és feszültségek	34
3.1. ábra A szakítóvizsgálat és az erő-elmozdulás görbe	35
3.2. ábra Rugalmas szilárd test	36
3.3. ábra Egy függvény variációjának értelmezése	37
3.4. ábra Lineáris rugó	40
3.5. ábra A teljes potenciális energia szemléltetése	40
3.6. ábra Rugóelem	41
3.7. ábra Két rugóból álló rendszer	41
3.8. ábra Három rugóból álló rendszer	42
3.9. ábra Az elmozdulásmező (analitikus számítás, Ritz-módszer).....	47
4.1. ábra A végeselemes diszkretizáció és egy végeelem	49
4.2. ábra Szomszédos elemek közös csomópontjai	54
4.3. ábra A rúd végeelem modellje és a lokális közelítés	54
4.4. ábra Az elmozdulás közelítése a 2-es sorszámú elemen	55
4.5. ábra Hajlított-nyírt rúdszerkezet	60
4.6. ábra Hajlított-nyírt rúdelem a helyi koordináta-rendszerben.....	62
4.7. ábra Az alakfüggvények	63
4.8. ábra Statikailag határozatlan síkbeli tartó koncentrált erővel terhelve.....	65
4.9. ábra A tartó végeelem modellje.....	65
5.1. ábra Síkalakváltozási feltételek.....	68
5.2. ábra Síkfeszültségi feltételek	70
5.3. ábra Tengelyszimmetrikus feladat	72
7.1. ábra A leggyakrabban alkalmazott izoparametrikus végeelemek.....	78
7.2. ábra Húzott-nyomott rúdelem	78
7.3. ábra A húzott-nyomott rúdelem alakfüggvényei.....	79
7.4. ábra Háromcsomópontú rúdelem	80
7.5. ábra A háromcsomópontú rúdelem alakfüggvényei.....	81

7.6. ábra Háromcsomópontú rúdelem a csomópontokkal	82
7.7. ábra Lineáris izoparametrikus négyszög elem	83
7.8. ábra Az elem geometriája és a csomóponti koordináták	85
7.9. ábra Az elem geometriája és a csomóponti koordináták	87
7.10. ábra Kvadratikus négyszög elem	88
7.11. ábra Lagrange-féle kvadratikus négyszög elem	90
7.12. ábra Lineáris háromszög elem	91
7.13. ábra Kvadratikus háromszög elem	94
7.14. ábra Nyolccsomópontú hexaéder elem	95
7.15. ábra Húscsomópontú kvadratikus hexaéder elem	98
7.16. ábra Négycsomópontú tetraéder elem	100
7.17. ábra Tízcsomópontú kvadratikus tetraéder elem	103
8.1. ábra A numerikus integrálás egydimenziós esetben	106
8.2. ábra Numerikus integrálás négyszög tartományon kétdimenziós esetben	108
8.3. ábra Numerikus integrálás háromszög tartományon kétdimenziós esetben	109
9.1. ábra A végeleemes programok fő részei	111
10.1. ábra Önsúlyával terhelt prizmatikus rúd	114
10.2. ábra Az eredmények $N = 1$ és $N = 2$ esetekre	116
10.3. ábra Az eredmények $N = 4$ és $N = 8$ esetekre	116
10.4. ábra A prizmatikus rúd modellezése egy vonallal	117
10.5. ábra A kiválasztott keresztmetszet és tulajdonságai	118
10.6. ábra A prizmatikus rúd végeelem modellje	120
10.7. ábra Az elemekben ébredő rúderők	121
10.8. ábra A szerkezet mechanikai modellje	122
10.9. ábra A rácsos tartó bal oldala	122
10.10. ábra A Femap-ban felépített geometria	123
10.11. ábra $250 \times 150 \times 7$ Beam elemekkel hálózandó vonalak	125
10.12. ábra A $200mm$ Beam elemek létrehozása	126
10.13. ábra A behálózott rácsos szerkezet	126
10.14. ábra Feszültségállapot megjelenítése a deformált alakon	128
10.15. ábra A tartó középvonalának alakváltozása ($N=2$ és $N=8$)	131
10.16. ábra A hidraulikus emelőgép és a vázának keresztmetszete	132
10.17. ábra A szerkezet kialakítása vonalakkal	133
10.18. ábra A vonalak mentén előírt hálósűrűség	135
10.19. ábra A behálózott modell	136
10.20. ábra Egybeeső csomópontok	136
10.21. ábra Az elemek helyi koordináta-rendszerei	137
10.22. ábra A 25-ös sorszámú elem, RZ szabadságfokkal rendelkező csomópont	137
10.23. ábra A tartó deformációja és a feszültségeloszlás	139
10.24. ábra A veszélyes szerkezeti elemek	140
10.25. ábra A rúdelemben ébredő erő és a szerkezet hajlítónyomatéki ábrája	141
10.26. ábra A nyíróerő ábra és a rúderő ábra	141
10.27. ábra Feszültségeloszlás a keresztmetszeten	142
10.28. ábra A redukált feszültség eloszlása a keresztmetszet mentén	142
10.29. ábra A lemez végeelem modellje	146
10.30. ábra A feszültségeloszlás és az elmozdulásmező	147
10.31. ábra A belső nyomással terhelt vastagfalú cső mechanikai modellje	148
10.32. ábra A vastagfalú cső végeelem modellje	150

10.33. ábra A vastagfalú cső alakváltozása és feszültségeloszlása.....	151
10.34. ábra A csődiagram.....	152
10.35. ábra A nyomástartó edény 3D-s modellje.....	153
10.36. ábra Meridiánmetszet előállítás a 3D-s modelltől	154
10.37. ábra A tartály meridiánmetszete.....	155
10.38. ábra A behálózott modell, a lekerekítés mentén hálósűrítéssel.....	156
10.39. ábra A kinematikai peremfeltétel definiálása.....	157
10.40. ábra A tartály elemeire ható nyomásvektorok	158
10.41. ábra A nyomástartó edény deformációja és a tartály falában ébredő feszültség.....	159
10.42. ábra A körlemez mechanikai modellje	161
10.43. ábra A körlemez végeelem modellje.....	164
10.44. ábra A körlemez deformációja és feszültségeloszlása.....	165
10.45. ábra A próbatest geometriai mérete.....	167
10.46. ábra A próbatest végeelem modellje.....	170
10.47. ábra A próbatest deformációja és feszültségeloszlása.....	172
10.48. ábra A feszültség változása az idő függvényében.....	172
10.49. ábra Az összeállítás	173
10.50. ábra A vizsgálathoz előkészített negyedmodell	174
10.51. ábra A fedél előkészítése hexaéder elemekkel való hálózásra.....	176
10.52. ábra A behálózott alkatrészek	177
10.53. ábra A felső érintkezési tartomány.....	178
10.54. ábra Az alsó érintkezési tartomány	178
10.55. ábra A csavar előfeszítés definiálására kiválasztott elemek	180
10.56. ábra Az összeállítás végeelemes modellje.....	180
10.57. ábra A szerkezet deformációja és a feszültségeloszlás.....	181

ELŐSZÓ

A végeselemes vizsgálatok fontos részét képezik a mérnöki tervezésnek. Ehhez kapcsolódóan számos kereskedelmi forgalomban elérhető végeselem programrendszer áll rendelkezésre. A szoftver megfelelő használata nagymértékben függ a felhasználó mechanikai ismeretétől. Jelen jegyzet ehhez kíván segítséget nyújtani.

A jegyzet első részében a lineáris rugalmasságtan és a végeselem-módszer elméleti háttere kerül bemutatásra, amely elengedhetetlen végeselem programrendszerek magabiztos használatához és megkönnyíti a modellalkotást.

A jegyzet második részében elemi példákon bevezetve, majd egyre bonyolultabb feladatokon keresztül kerül bemutatásra egy-egy szilárdságtani végeselem vizsgálat.

A könyv elsősorban gépészmérnöki, sportmérnöki és mechatronikai képzésben részt vevő hallgatók részére került kidolgozásra, mindemellett az informatikai területen tanuló hallgatók is hasznos információkat szerezhetnek a könyv gondos tanulmányozásával.

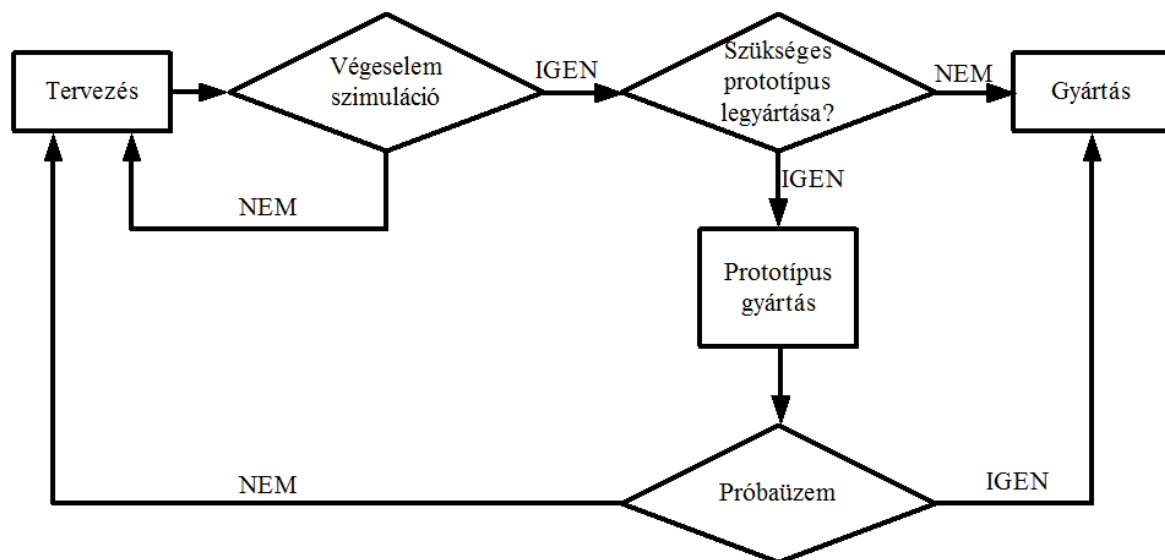
A szerzők itt szeretnék köszönetet mondani az ábrák elkészítésében nyújtott segítségért Varga Tamás Antalnak és nem utolsósorban a jegyzet szakmai lektorának, Dr. Szabó Tamásnak a hasznos és érdemi szakmai észrevételeiért, amelyek a jegyzet végleges változatába beépültek.

A szerzők

1. BEVEZETÉS

Mára már alapkövetelmény, hogy egy termék teljes életpályájára vonatkozó információkat szoftveresen is kezelni tudjuk. A termékről minden műszaki információ így rendelkezésre áll. Ezeket a követelményeket elégítik ki többek között a CAD rendszerek (Számítógéppel segített mérnöki tervezés), a CAM rendszerek (Számítógéppel segített gyártás) és a CAE rendszerek (Számítógéppel segített mérnöki tevékenység). A felsorolt rendszerekkel végezhetjük és kezelhetjük a koncepció medellezést, a geometriai modellezést, a numerikus vizsgálatokat és szimulációkat, a műhelyrajzokat és megjelenítéseket, a dokumentációkezelést, a technológiai előfeldolgozást, az adatbáziskezelést szabványos kommunikáción keresztül.

A számítógéppel segített tervezés alkalmas a tervezési koncepciók kialakítására, a rajzok és dokumentációk készítésére. Alapvető feladata a geometria létrehozása. Ezen geometriákat felhasználhatjuk a CAM és CAE rendszerekben is mindenfajta újratervezés nélkül, amely jelentős időmegtakarítást eredményez. A legnépszerűbb CAD szoftverek a teljesség igénye nélkül az AutoCAD, Solid Edge, SolidWorks, Catia, Creo, NX, stb. A számítógéppel segített gyártás alkalmas a gyártási folyamatok tervezéséhez és szervezéséhez. A CAM egy gyártórendszerekkel összekapcsolt technológia. A CAM alkalmas továbbá a gyártócellában alkalmazható szerszámok kiválasztására is. Említésre méltó CAM szoftver az EdgeCAM és a MasterCAM. A különféle végelem szoftverek a CAE rendszerek csoportjába tartoznak. Ezen szoftverekkel oldható meg egy termék, vagy szerkezet várható viselkedésének szimulációja. Így megfelelő eszköz a már meglévő CAD modell átervezésére és optimalizálására. Számos kereskedelmi forgalomban elérhető végelem szoftver létezik, ilyen pl. a Femap, az Ansys, a Marc, az Abaqus, az Adina, stb. Jelen jegyzet a végelem-módszerrel és számos numerikus példán keresztül a Femap alkalmazásával foglalkozik és próbál áttekintést adni.



1.1. ábra A végelem szimulációt tartalmazó tervezési-gyártási folyamat egyszerűsített modellje

A végelem-módszer egy közelítő megoldással szolgáló numerikus eszköz, amely számos mérnöki probléma elemzésére alkalmas. A végelem-módszer háttérben parciális differenciálegyenletek közelítő megoldása áll. Elmondható, hogy napjainkban már nélkülözhetetlen eszköze a mechanikai vizsgálatoknak, mivel gyakorlatilag minden természeti

jelenség és viselkedés leírására képes. Ez a modern és professzionális végeelem szoftvereknek köszönhető.

A költségcsökkentés és a minőség növelés kötelező eleme a mai iparnak, ezt több téren kiszolgálják a numerikus szimulációkra alkalmas szoftverek. Markáns költségvonzata van egy vállalat költségvetésében a prototípusok legyártásának, az ahhoz kapcsolódó teszteknek és természetesen a szakembergárda alkalmazásának. Megfelelő stratégiával alkalmazva a vállalaton belül a végeelem-módszert ezek a költségek minimalizálhatóak, adott esetben kiküszöbölhetőek. A vállalatok ennek megfelelően alkalmazzák is ezt a technológiát és a részét képezik a mindennapoknak. A végeelemes technológiát is alkalmazó tervezési-gyártási folyamat egyszerűsített modelljét az 1.1. ábrán szemléltetjük [5,6].

A végeelem-módszer alapötlete az, hogy egy bonyolult feladat megoldását egy valamilyen szinten egyszerűsített modellt alkalmazva keressük. Ebből a gondoltamenetből kiindulva, a végeelemes szakemberek képesek az adott probléma közelítő megoldására. Itt megjegyezzük, hogy a rendelkezésre álló matematikai és mechanikai eszközök nem képesek a pontos megoldást szolgáltatni bonyolult feladatok esetén. Mivel a pontos megoldás elérése csak egyszerű esetekben lehetséges, így bonyolult feladatoknál meg kell elégednünk a közelítő megoldással, amely egyébként a legtöbb esetben kielégítő. A végeelem-módszer alkalmazása esetén a vizsgált alkatrészt, szerkezetet véges számú egymáshoz ún. csomópontokban kapcsolódó tartományokra (végeelemek) bontjuk, így a bonyolult parciális differenciálegyenletek lineáris, vagy nemlineáris egyenletekké alakíthatók át. Az ún. végeelemes diszkretizáció eljárás alkalmazása véges számú ismeretlent határoz meg.

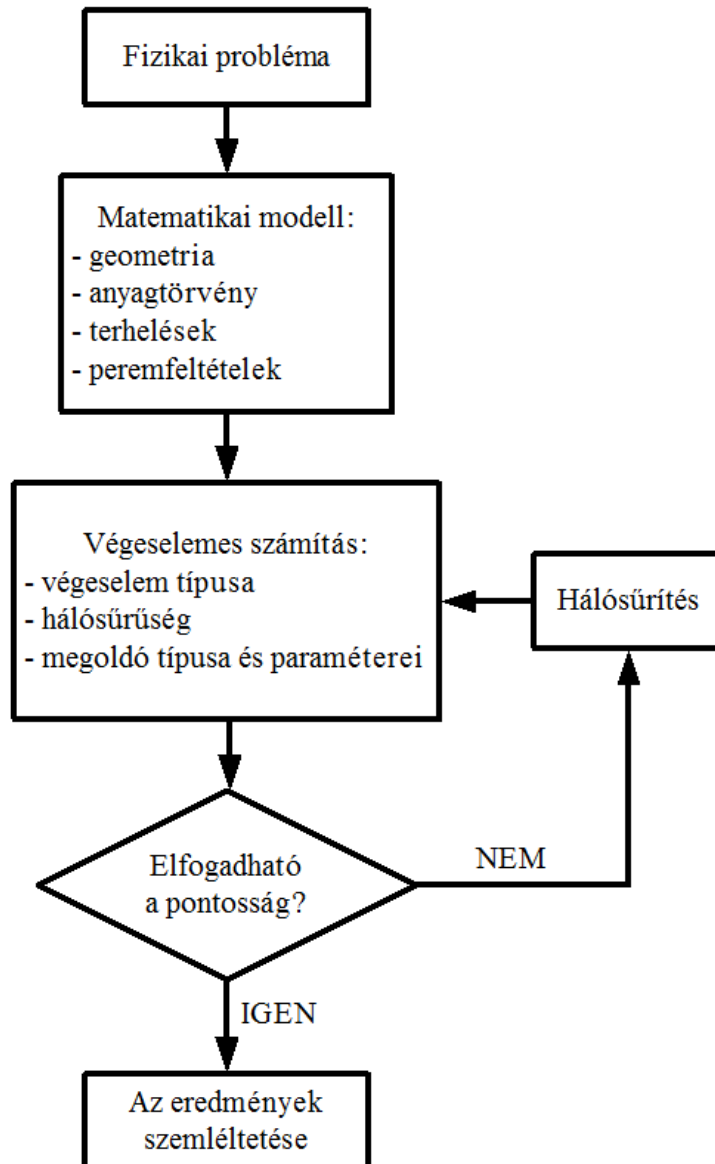
1.1. A végeelem-módszer kialakulásának rövid történeti áttekintése

Az 1900-as évek környékén Cook analitikusan rúdszerkezetet vizsgált elemekre bontva. 1943-ban Courant a végeelem-módszerhez hasonló eljárással folytonos függvényeket alkalmazva háromszög tartományokat vizsgált. Courant oldott meg először csavarási feladatot a teljes potenciális energia minimuma elv felhasználásával. Az 1950-es években Boeing repülőgépszárnyat elemzett háromszög elemeket alkalmazva és feszültségeket számolt. 1956-ban síkalakváltozási problémákat számolt Turner és társai. Az 1960-as évekre a végeelem-módszer népszerűvé vált, Clough nagy erőfeszítéseket tett a módszer elterjesztésében. Ebben az időszakban már hőtani feladatokat is oldottak meg a végeelem-módszerrel. Az első elmozdulásmézőn alapuló végeelem szoftverek (NASTRAN, ASKA) is az 1960-as években kerültek kifejlesztésre. Az első végeelem-módszer könyv 1967-ben jelent meg, amelyet Zienkiewicz és Cheung írt. 1969-ben alapították meg az első, a végeelem-módszer új kutatási eredményeit bemutató „International Journal for Numerical Methods in Engineering” c. tudományos folyóiratot, amely mind a mai napig az egyik legfontosabb folyóirat ebben a témakörben. Az 1970-es években már nemlineáris feladatokat is megoldottak. Kijelenthető, hogy mára gyakorlatilag minden természeti jelenség és viselkedés modellezhető a végeelem-módszerrel. Ebben természetesen óriási szerepe van a számítógépek rohamos fejlődésének is [2,10]. A mai végeelem szoftverek a teljesség igénye nélkül alkalmasak szerkezeti vizsgálatokra (statikai, szilárdságtani, dinamikai vizsgálatok, törésmechanika, stabilitásvizsgálat, stb.), gyártási folyamatok szimulációjára (fröccsöntés szimuláció, stb.), folyadék mechanikai, hőtani problémák, elektrosztatikus problémák vizsgálatára, stb.

1.2. A végeelem-módszer rövid összefoglalása

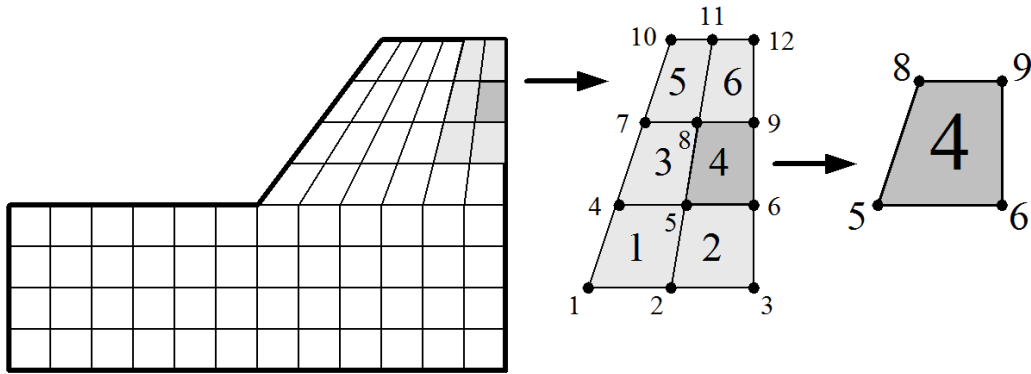
A végeelem-módszert a mérnöki vizsgálatokban a fizikai problémák megoldására alkalmazzák. A fizikai problémák magukkal vonják azt, hogy egy alkatrész, vagy szerkezet terhelést szenved. A fizikai modellt matematikai modellé szükséges átalakítani, amely

differenciálegyenlethez vezet. Ezt a matematikai modellt oldjuk meg a végelem-módszer segítségével. Mivel numerikus eljárásról beszélünk, így az elvárt pontosság egy fontos követelmény [1,4,7-9,11,15,16]. Általánosságban elmondható, hogy a végelemek számának növelésével (azaz sűrített végelem hálóval) nagyobb pontosság érhető el. A végelem vizsgálat folyamatát az 1.2. ábrán szemléltetjük.



1.2. ábra A végelem vizsgálat folyamata

A végelem vizsgálat a végelemes diszkretizációval kezdődik. A vizsgált tartományt véges számú, egymáshoz csomópontokban kapcsolódó elemre bontjuk. Az elemek a csomópontok által vannak definiálva. A diszkretizációba tartozik az elemek és csomópontok sorszámozása is. Ezt a folyamatot végelemes hálózásnak nevezzük (1.3. ábra). A csomópontok legfőbb jellemzője a szabadásági fokok és a csomópontok koordinátái. A végelem típusának kiválasztását pedig az adott probléma határozza meg. Egydimenziós, kétdimenziós és háromdimenziós végelemek léteznek.



1.3. ábra Végeselemes diszkretizáció

A keresett függvénynek (jellemzően elmozdulás értékek) az elem belüli tartományban lévő értékeit interpolációval határozzuk meg a csomóponti értékekből. Az interpolációs függvények egyben az alakfüggvények szerepét is betölthetik. Az alakfüggvények többnyire polinomok, legtöbbször lineárisak, vagy kvadratikusak.

A következő lépés a parciális differenciálegyenlet formájában adott feladat átalakítása. A célunk olyan algebrai egyenletrendszer előállítása, amely megadja a keresett függvényértékeket a csomópontokban. Az algebrai egyenletrendszer alakja

$$\mathbf{K}^e \mathbf{q}^e = \mathbf{f}^e, \quad (1.1)$$

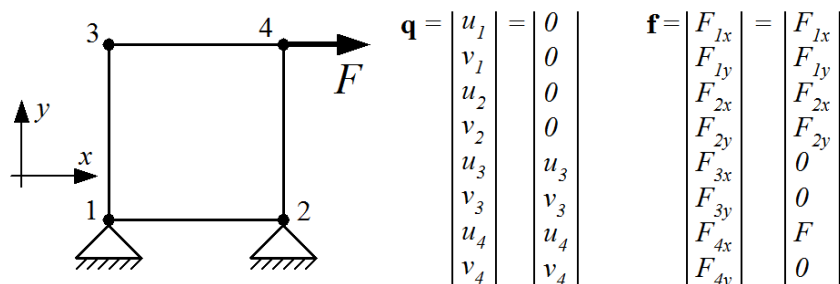
ahol \mathbf{K}^e az elem merevségi mátrixa, amely az alkalmazott elem tulajdonságait tartalmazza, \mathbf{q}^e az elem csomóponti elmozdulásvektora, \mathbf{f}^e az elem tehervektora, míg e jelöli az elemet.

Az 1.3. ábrán jól látható, hogy különböző elemek csomópontjai egy pontban kapcsolódnak egymáshoz. Ezeket a topológiai tulajdonságokat a teljes szerkezetre vonatkozó algebrai egyenletrendszer összeállításánál figyelembe kell venni, amely

$$\mathbf{K} \mathbf{q} = \mathbf{f}, \quad (1.2)$$

ahol \mathbf{K} a szerkezet globális merevségi mátrixa, amely az alkalmazott elem tulajdonságait tartalmazza, \mathbf{q} a globális csomóponti elmozdulásvektor, \mathbf{f} a globális tehervektor. Ez meghatározza a rendszer szabadsági fokát is.

A peremfeltételeket is biztosítani kell. A megtámasztások és terhelések lehetnek előírt értékűek, vagy zérusak is, amelyeket figyelembe kell vennünk. Ez lecsökkenti a megoldandó egyenletek számát (1.4. ábra). Az 1.4. ábrán az alsó index jelöli a csomóponti sorszámokat, míg u és v a csomóponti elmozdulás komponensei, F_x és F_y a terhelő erő komponensei rendre az x és y irányokban.



1.4. ábra Peremfeltételek figyelembevétele

Az 1-es és 2-es csomópontok nem mozdulhatnak el, azaz gátolva vannak, míg a 3-as csomópont terheletlen.

A cél a globális algebrai egyenletrendszer megoldása során a \mathbf{q} csomóponti paraméterek meghatározása.

Számos módszer létezik a lineáris algebrai egyenletrendszer megoldásának előállítására, amely formálisan a globális merevségi mátrix inverzével történő beszorzást jelenti, azaz

$$\mathbf{q} = \mathbf{K}^{-1}\mathbf{f}. \quad (1.3)$$

A globális algebrai egyenletrendszer megoldásával ismertek lesznek az elmozdulásmező értékei a csomópontokban. Az elmozdulásmező ismeretében a vizsgált feladat szempontjából fontos további mennyiségek már számíthatók, ilyen lehet pl. az alakváltozás és a feszültség.

A végeselemes eredmény minősége számos tényezőtől függ, mint például a vonatkozó programkód számítási technológiájától, a végeselem számítást végző személy tapasztalatától és hozzáértésétől és az eredmények kiértékelésének módjától. Ezek közül valamelyiknek a hiánya, vagy nem megfelelőse hibás eredményekhez vezet. Ugyanakkor egy tapasztalt végeselemes szakember ezt az eszközt igazolásra, továbbá egy jobb termék, vagy egy terhelési folyamat megbecslésére kiválóan tudja alkalmazni. Mindemellett fontos megjegyezni, hogy a végeselemes vizsgálat nem helyettesíti a tesztelést, de jelentősen csökkentheti egy termék bevezetésének átlagos idejét akár megnövelve annak élettartamát is.

2. LINEÁRIS RUGALMASSÁGTAN ALAPJAI

A rugalmasságtan a rugalmas testek mechanikája. Ismeretes, hogy a szilárd testek a terhelés hatására deformálódnak. Egy rugalmas test rugalmasan képes deformálódni. A rugalmas deformáció azt jelenti, hogy a terhelés elvétele után a test visszatér eredeti formájába, nincsen maradó alakváltozás. A rugalmasságtan feladata a rugalmas szilárd testek elmozdulásának, alakváltozási- és feszültségi mértékeinek meghatározása [3,12]. Attól függően, hogy milyen a kapcsolat az alakváltozás és a feszültség között, beszélhetünk lineáris és nemlineáris rugalmas deformációról. Amennyiben a kapcsolat az alakváltozás és a feszültség között lineáris, úgy a deformáció lineárisan rugalmas. Az acél, az öntöttvas az alumínium, stb. anyagok lineárisan rugalmas anyagok. Amennyiben a kapcsolat az alakváltozás és a feszültség között nemlineáris, úgy a deformáció nemlineárisan rugalmas. Az egyik leggyakoribb nemlineáris anyag a gumi. Jelen jegyzet kizárólag a lineáris rugalmasságtan összefüggéseit tárgyalja.

A rugalmasságtan a feladat matematikai modelljét tárgyalja, amelyhez a megfelelő matematikai ismereteket nélkülözhetetlenek. Ennek hiányában a formulák és a megoldási eljárások nem lesznek követhetők. A vonatkozó parciális differenciálegyenleteket vektor és tenzor tárgyalásmódban közöljük.

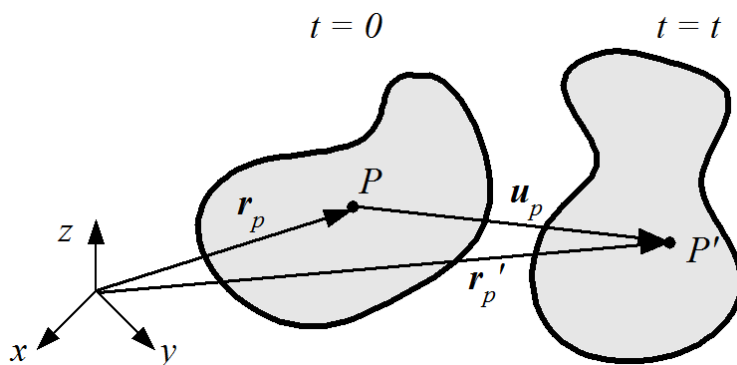
2.1. A lineáris rugalmasságtan ismeretlen mezői

2.1.1. Elmozdulásmező

A lineáris rugalmasságtan keretein belül az alakváltozott test visszanyeri eredeti alakját a terhelés elvétele után.

Vizsgáljunk egy általános rugalmas testet, amelynek terheletlen és terhelt állapotát a 2.1. ábra szemlélteti. A terhelés hatására a rugalmas test deformálódik és ez a deformáció leírható anyagi pontok elmozdulásaival. A kontinuummechanika értelmében a vizsgált test összes anyagi pontjának elmozdulásvektora egy ún. elmozdulásmezőt alkot.

Vizsgáljuk meg a test egy tetszőleges pontját, a P pontot. A terhelt állapotban a P pont elmozdul a P' pontba.



2.1. ábra Az elmozdulásvektor származtatása

A derékszögű Descartes koordináta-rendszert alkalmazva legyenek \mathbf{r}_P és \mathbf{r}'_P a P és P' pontokhoz kötött helyvektorok, amelyek egyszerűen felírhatók. Az \mathbf{r}'_P helyvektor pedig kifejezhető az \mathbf{r}_P helyvektor segítségével

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_P &= x_P \mathbf{i} + y_P \mathbf{j} + z_P \mathbf{k}, \\ \mathbf{r}'_P &= \mathbf{r}_P + \mathbf{u}_P,\end{aligned}\tag{2.1}$$

ahol \mathbf{u}_P a rugalmas szilárd test P pontjának elmozdulásvektora,

$$\mathbf{u}_P = u_P \mathbf{i} + v_P \mathbf{j} + w_P \mathbf{k}. \quad (2.2)$$

Itt u_P , v_P és w_P az elmozduláskoordináták x , y és z irányokban. Látható, hogy pontról pontra más-más elmozdulásvektort kapunk, amely egy ún. elmozdulásmezőt alkot. Az elmozdulásmező a helyvektor függvényében

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{r}) = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + w\mathbf{k}. \quad (2.3)$$

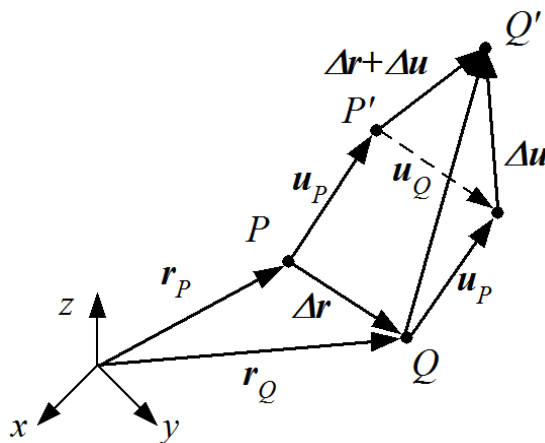
Az elmozdulásmező koordinátáit általában a terheletlen állapotra vonatkoztatva fejezzük ki, így

$$u = u(\mathbf{r}) = u(x, y, z); \quad v = v(\mathbf{r}) = v(x, y, z); \quad w = w(\mathbf{r}) = w(x, y, z). \quad (2.4)$$

Az elmozdulásvektor mértékegysége mm .

2.1.2. A derivált tenzor és felbontása

Legyen a Q pont a P pont közvetlen (elemi) környezetében és $P \neq Q$. A $\Delta\mathbf{r}$ a Q pont P pontra vonatkoztatott helyvektora, ahogy az a 2.2. ábrán látható. Az \mathbf{u}_P és \mathbf{u}_Q különbsége adja meg a $\Delta\mathbf{u}$ relatív elmozdulásvektort. Ha egy rugalmas test deformálódik, akkora a két anyagi pont közötti relatív elmozdulás változik. Ez pont ellentétes a merevtestszerű mozgással, amikor a két pont közötti távolság nem változik.



2.2. ábra Két szomszédos pont elmozdulásállapota

Látható az ábrából, hogy a $\Delta\mathbf{r}$

$$\begin{aligned} \Delta\mathbf{r} &= \mathbf{r}_Q - \mathbf{r}_P = (x_Q - x_P)\mathbf{i} + (y_Q - y_P)\mathbf{j} + (z_Q - z_P)\mathbf{k} = \\ &= \Delta x\mathbf{i} + \Delta y\mathbf{j} + \Delta z\mathbf{k}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Feltételezésünk szerint a P és Q egymás közvetlen környezetében fekszik. A lineáris közelítés elérése érdekében Taylor sorba fejtjük az elmozduláskoordinátákat. A kis alakváltozás lineáris elmélete alapján a sorfejtés lineáris részét megtartva jó közelítéssel fennáll, hogy

$$\begin{aligned}
u_Q &\cong u_P + \frac{\partial u_P}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial u_P}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial u_P}{\partial z} \Delta z, \\
v_Q &\cong v_P + \frac{\partial v_P}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial v_P}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial v_P}{\partial z} \Delta z, \\
w_Q &\cong w_P + \frac{\partial w_P}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial w_P}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial w_P}{\partial z} \Delta z.
\end{aligned} \tag{2.6}$$

Ez vektorként is felírható,

$$\mathbf{u}_Q \cong \mathbf{u}_P + \left[\frac{\partial \mathbf{u}_P}{\partial x} \quad \frac{\partial \mathbf{u}_P}{\partial y} \quad \frac{\partial \mathbf{u}_P}{\partial z} \right] \Delta \mathbf{r}, \tag{2.7}$$

ahonnan a relatív elmozdulásvektor közelítése

$$\Delta \mathbf{u} = \mathbf{u}_Q - \mathbf{u}_P \cong \left[\frac{\partial \mathbf{u}_P}{\partial x} \quad \frac{\partial \mathbf{u}_P}{\partial y} \quad \frac{\partial \mathbf{u}_P}{\partial z} \right] \Delta \mathbf{r}. \tag{2.8}$$

Így bevezethetjük az elmozdulásmező \mathbf{U}_P derivált tenzorát

$$\Delta \mathbf{u} = \mathbf{U}_P \Delta \mathbf{r}, \tag{2.9}$$

ahol

$$\mathbf{U}_P = \left[\frac{\partial \mathbf{u}_P}{\partial x} \quad \frac{\partial \mathbf{u}_P}{\partial y} \quad \frac{\partial \mathbf{u}_P}{\partial z} \right] = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_P}{\partial x} & \frac{\partial u_P}{\partial y} & \frac{\partial u_P}{\partial z} \\ \frac{\partial v_P}{\partial x} & \frac{\partial v_P}{\partial y} & \frac{\partial v_P}{\partial z} \\ \frac{\partial w_P}{\partial x} & \frac{\partial w_P}{\partial y} & \frac{\partial w_P}{\partial z} \end{bmatrix}. \tag{2.10}$$

Általánosan felírva

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix}. \tag{2.11}$$

Figyelembe véve a ∇ Hamilton-féle differenciáloperátort, amely

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k}, \tag{2.12}$$

a derivált tenzor felírható diádikus formában is

$$\mathbf{U} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} \circ \mathbf{i} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} \circ \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} \circ \mathbf{k} = \mathbf{u} \circ \nabla. \quad (2.13)$$

Minden tenzor felbontható egy szimmetrikus és egy ferdeszimmetrikus tenzor összegére, így a felbontási-tételt alkalmazva az elmozdulásmező \mathbf{U} derivált tenzora a következőképpen bontható fel,

$$\mathbf{U} = \frac{1}{2}(\mathbf{u} \circ \nabla + \nabla \circ \mathbf{u}) + \frac{1}{2}(\mathbf{u} \circ \nabla - \nabla \circ \mathbf{u}) = \frac{1}{2}(\mathbf{U} + \mathbf{U}^T) + \frac{1}{2}(\mathbf{U} - \mathbf{U}^T), \quad (2.14)$$

ahol \mathbf{U}^T a derivált tenzor transzponáltja,

$$\mathbf{U}^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial z} & \frac{\partial v}{\partial z} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix}. \quad (2.15)$$

A felbontás eredményeként kapott szimmetrikus tenzor az ún. alakváltozási tenzor,

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}_{szimmetrikus} = \frac{1}{2}(\mathbf{U} + \mathbf{U}^T). \quad (2.16)$$

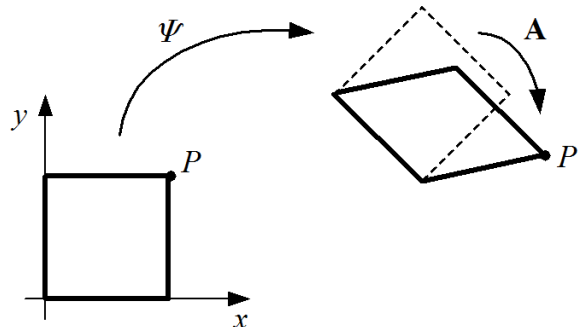
A felbontás eredményeként kapott aszimmetrikus tenzor az ún. forgató tenzor,

$$\mathbf{\Psi} = \mathbf{U}_{aszimmetrikus} = \frac{1}{2}(\mathbf{U} - \mathbf{U}^T). \quad (2.17)$$

Felhasználva (2.16) és (2.17) összefüggéseket a derivált tenzor az alakváltozási tenzor és a forgató tenzor összegeként írható fel, azaz

$$\mathbf{U} = \mathbf{A} + \mathbf{\Psi}. \quad (2.18)$$

Az alakváltozási tenzor írja le az elemi környezet tiszta deformációját, míg a forgató tenzor annak merevtestszerű forgását. Kétdimenziós esetben ezt a felbontást a 2.3. ábra szemlélteti.



2.3. ábra Az alakváltozási tenzor és a forgató tenzor értelmezése

2.1.3. Forgató tenzor

Ahogy azt a korábbiakban tisztáztuk az elemi környezet merevtestszerű forgását a forgató tenzor írja le. Vizsgáljuk meg az elmozdulásmező derivált tenzorának aszimmetrikus részét.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Psi} = \frac{1}{2}(\mathbf{U} - \mathbf{U}^T) &= \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) & 0 & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right) & 0 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -\varphi_z & \varphi_y \\ \varphi_z & 0 & -\varphi_x \\ -\varphi_y & \varphi_x & 0 \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (2.19)$$

ahol φ_x, φ_y és φ_z a merevtestszerű forgásvektor koordinátái és $|\boldsymbol{\varphi}| \ll 1$.

Amennyiben nincs deformáció, akkor $\mathbf{A} = \mathbf{0}$, ilyenkor a relatív elmozdulásvektor az alábbi módon írható fel,

$$\Delta \mathbf{u} = \boldsymbol{\Psi} \Delta \mathbf{r}, \quad (2.20)$$

azaz a Q pont elmozdulásvektora

$$\mathbf{u}_Q = \mathbf{u}_P + \boldsymbol{\Psi} \cdot \Delta \mathbf{r} = \mathbf{u}_P + \boldsymbol{\varphi} \times \Delta \mathbf{r}, \quad (2.21)$$

ahol $\boldsymbol{\varphi}$ a merevtestszerű forgásvektor, $\boldsymbol{\varphi} = \varphi_x \mathbf{i} + \varphi_y \mathbf{j} + \varphi_z \mathbf{k}$ és \mathbf{u}_P egy eltolásként értelmezhető. A merevtestszerű forgás nem indukál alakváltozási energiát, amelynek fontos szerepe van a végeleemes számításokban. A merevtestszerű forgást a végeleemes modell felépítésekor gátolni kell.

2.1.4. Alakváltozási tenzor (alakváltozási állapot)

Az elemi környezet tiszta deformációját az alakváltozási tenzor írja le. Vizsgáljuk meg az elmozdulásmező derivált tenzorának szimmetrikus részét.

$$\begin{aligned} \mathbf{A} = \frac{1}{2}(\mathbf{U} + \mathbf{U}^T) &= \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right) & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{bmatrix} = \mathbf{A}^T, \end{aligned} \quad (2.22)$$

ahol ε_x , ε_y és ε_z a fajlagos megnyúlások (megrövidülések) az x , y és z irányokban és $\varepsilon \ll 1$, $\gamma_{xy} = \gamma_{yx}$, $\gamma_{yz} = \gamma_{zy}$ és $\gamma_{zx} = \gamma_{xz}$ a fajlagos szögtorzulások és kis alakváltozást feltételezve $\gamma \ll 1$. A fajlagos megnyúlás mértékegység nélküli, míg a fajlagos szögtorzulás mértékegysége radián. Amennyiben $\varepsilon > 0$, az eredetileg egységnyi hossz megnyúlik, amennyiben $\varepsilon < 0$, az eredetileg egységnyi hossz megrövidül. Ha a $\gamma > 0$ az eredetileg 90° csökkent, ha a $\gamma < 0$ az eredetileg 90° megnő. Egy elemi környezet deformációja, alakváltozási mennyiségei a 2.4. ábrán láthatók. Az alakváltozás leírására még bevezetjük az α_x , α_y és α_z alakváltozási vektorokat is,

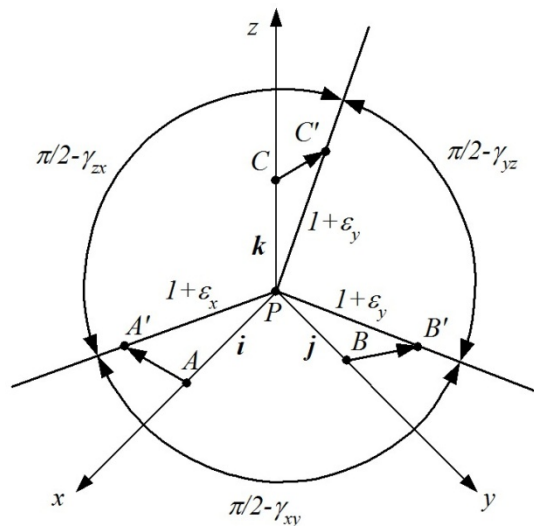
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{bmatrix} = [\alpha_x \quad \alpha_y \quad \alpha_z], \quad (2.23)$$

ahol

$$\begin{aligned} \alpha_x &= \varepsilon_x \mathbf{i} + \frac{1}{2}\gamma_{yx} \mathbf{j} + \frac{1}{2}\gamma_{zx} \mathbf{k}, \\ \alpha_y &= \frac{1}{2}\gamma_{xy} \mathbf{i} + \varepsilon_y \mathbf{j} + \frac{1}{2}\gamma_{zy} \mathbf{k}, \\ \alpha_z &= \frac{1}{2}\gamma_{xz} \mathbf{i} + \frac{1}{2}\gamma_{yz} \mathbf{j} + \varepsilon_z \mathbf{k}. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Az alakváltozási vektorok segítségével az alakváltozási tenzor felírható diádikus formában,

$$\mathbf{A} = \alpha_x \circ \mathbf{i} + \alpha_y \circ \mathbf{j} + \alpha_z \circ \mathbf{k}. \quad (2.25)$$



2.4. ábra Az elemi környezet alakváltozási állapota

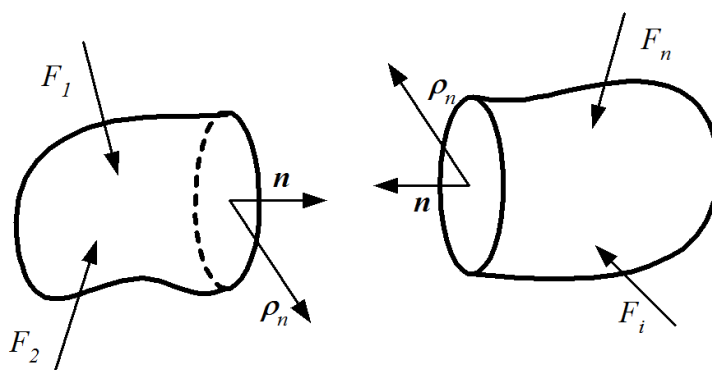
A 2.4 ábrán a P pont környezetének alakváltozási állapota látható a P pontban felvett, terhelés előtt egymásra kölcsönösen merőleges \mathbf{i} , \mathbf{j} és \mathbf{k} egységvektor által képzett és az A , B és C végpontokkal kijelölt ún. elemi triéderen.

2.1.5. Feszültségtenzor (feszültségi állapot)

A vizsgálat tárgyát képező rugalmas szilárd test egyensúlyi erőrendszerrel terhelt. Gondolatban ezt a szilárd testet vágjuk ketté egy feltételezett síkkal és távolítsuk el egymástól az így keletkező testrészeket (2.5. ábra). Mindkét testrész egyensúlyban kell, hogy legyen külön-külön is. Ezt az egyensúlyt a vágási felületen ható felületen megoszló belső erőrendszer tartja fent. Továbbá annak is teljesülnie kell, hogy a két vágási felületen ható felületen megoszló belső erőrendszereknek egyenértékűnek kell lenni egymással. Megjegyezzük, hogy természetesen a két felület nagysága is egyenlő. A testrész belső felületén ható belső erőrendszer sűrűségvektora (feszültségvektor) $\boldsymbol{\rho}$. A vágási felület (keresztmetszet) normál egységvektora \mathbf{n} . Kijelenthetjük, hogy ismerjük egy szilárd test pontjának feszültségi állapotát amennyiben ismerjük a feszültségvektort. Ha egy másik síkkal vágnánk ketté a testet, akkor egy másik felületen megoszló belső erőrendszer ébred az előzőekben említett tulajdonságokkal.

Newton harmadik törvénye (hatás-ellenhatás) értelmében

$$\boldsymbol{\rho}(-\mathbf{n}) = -\boldsymbol{\rho}(\mathbf{n}). \quad (2.26)$$



2.5. ábra A feszültségvektor bevezetése

A normál irányú komponens σ_n normálfeszültségnek, a keresztmetszet síkjába eső komponens τ csúsztató feszültségnek nevezzük. A derékszögű Descartes koordináta-rendszerben felírhatók a feszültségvektorok, így megkapjuk a $\boldsymbol{\rho}_x$, $\boldsymbol{\rho}_y$ és $\boldsymbol{\rho}_z$ komponenseit,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\rho}_x &= \sigma_x \mathbf{i} + \tau_{yx} \mathbf{j} + \tau_{zx} \mathbf{k}, \\ \boldsymbol{\rho}_y &= \tau_{xy} \mathbf{i} + \sigma_y \mathbf{j} + \tau_{zy} \mathbf{k}, \\ \boldsymbol{\rho}_z &= \tau_{xz} \mathbf{i} + \tau_{yz} \mathbf{j} + \sigma_z \mathbf{k}. \end{aligned} \quad (2.27)$$

A csúsztató feszültség első indexe jelöli a csúsztató feszültség irányát, míg a második index azon felületelem normálisát azonosítja, amelyben a csúsztató feszültség ébred. A normálfeszültségnek egy indexe van, ez a felületelem normálisának irányát jelöli.

Ezek a feszültségkomponensek alkotják az ún. \mathbf{T} feszültségtenzort,

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} = [\boldsymbol{\rho}_x \quad \boldsymbol{\rho}_y \quad \boldsymbol{\rho}_z] = \mathbf{T}^T. \quad (2.28)$$

A feszültségtenzor szimmetrikus, azaz a csúsztató feszültségek esetében igaz, hogy $\tau_{xy} = \tau_{yx}$, $\tau_{yz} = \tau_{zy}$ és $\tau_{zx} = \tau_{xz}$.

A feszültségvektorok segítségével a feszültségtenzor diádikus formában is felírható,

$$\mathbf{T} = \boldsymbol{\varrho}_x \circ \mathbf{i} + \boldsymbol{\varrho}_y \circ \mathbf{j} + \boldsymbol{\varrho}_z \circ \mathbf{k}. \quad (2.29)$$

Figyelembe véve Cauchy tételét, az ún. Cauchy feszültségvektor

$$\boldsymbol{\varrho}_n = \mathbf{T}\mathbf{n}. \quad (2.30)$$

A mérnöki gyakorlatban a mechanikai feszültség mértékegysége $\frac{N}{mm^2} = MPa$.

2.1.6. Főfeszültségek, skalárinvariánsok és az egyenértékű (redukált) feszültség

A végeeselemes számítások esetén képeseknek kell lennünk összevetni a szerkezetben ébredő feszültséget az anyagra megengedett rugalmas feszültséggel. Általános esetben a feszültségtenzor teli, azaz minden eleme különbözik zérustól, ilyenkor az ún. egyenértékű (redukált) feszültség meghatározása szükséges az ellenőrzéshez. Az egyenértékű feszültség definiálására különböző méretezési elméletek léteznek.

A kérdés úgy merül fel, hogy hogyan találjuk meg azokat a síkokat, amelyek esetén a feszültségvektorok párhuzamosak a sík normális irányú vektorával, azaz

$$\mathbf{T}\mathbf{n} = \lambda\mathbf{n}, \quad (2.31)$$

ebből

$$(\mathbf{T} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{n} = \mathbf{0}, \quad (2.32)$$

ahol \mathbf{I} az egységtenzor. A matematikában ezt sajátérték, sajátvektor feladatnak nevezik. A karakterisztikus egyenlet

$$-\lambda^3 + T_I\lambda^2 - T_{II}\lambda + T_{III} = 0, \quad (2.33)$$

ahol T_I , T_{II} és T_{III} a feszültségtenzor első, második és harmadik skalárinvariánsa,

$$\begin{aligned} T_I &= \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3, \\ T_{II} &= \begin{vmatrix} \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zy} & \sigma_z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xz} \\ \tau_{zx} & \sigma_z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_y \end{vmatrix} = \sigma_2\sigma_3 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_1\sigma_2, \\ T_{III} &= \det(\mathbf{T}) = \sigma_1\sigma_2\sigma_3. \end{aligned} \quad (2.34)$$

A megoldás menetét nem részletezve az eredmény a következő,

$$\mathbf{T}(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}) = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} \rightarrow \mathbf{T}(\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}) = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix}, \quad (2.35)$$

ahol $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ a főfeszültségek az **1**, **2** és **3** főirányokban.

Általános esetben összetett igénybevétel esetén a \mathbf{T} és \mathbf{A} meghatározhatók és ismertek. A legelterjedtebb anyagvizsgálat a szakítóvizsgálat, amelyből a σ_{meg} anyagra megengedett feszültség meghatározható. A kérdés, hogyan tudunk kapcsolatot teremteni a húzófeszültség és egy többtengelyű feszültségi állapot között? A kapcsolat a σ_{red} egyenértékű feszültség.

Az egyenértékű feszültség az egyetlen mérőszám minden pontban; a több tengelyű feszültségi állapottal azonos veszélyességű, egyenértékű húzófeszültség. A legtöbb végelem szoftver az egyenértékű feszültség definiálására a Huber-Mises-Hencky elméletet alkalmazza, ahol az egyenértékű feszültség σ_{red} (von Mises). Ez a feszültség a főfeszültségek felhasználásával határozható meg,

$$\sigma_{red}(\text{von Mises}) = \sqrt{\frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + \frac{1}{2}(\sigma_2 - \sigma_3)^2 + \frac{1}{2}(\sigma_3 - \sigma_1)^2} \geq 0. \quad (2.36)$$

Jól ismert, hogy a méretezés alapegyenlete

$$\sigma_{red}^{max}(\text{von Mises}) \leq \sigma_{meg}. \quad (2.37)$$

Egy általános rugalmasságtani feladat így 15 skalár ismeretlent tartalmaz, amelyből három elmozdulás (u, v, w), hat alakváltozási mérték ($\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$) és hat feszültségi mérték ($\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$). Ezeket keressük a feladat megoldása során.

2.2. A rugalmasságtan alapegyenletrendszere és peremfeltételei

2.2.1. Kinematikai egyenletek (geometriai egyenletek)

Az elmozdulásmező ismeretében az alakváltozási tenzor előállítására szolgáló egyenlet a kinematikai egyenlet, azaz

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2}(\mathbf{U} + \mathbf{U}^T) = \frac{1}{2}(\mathbf{u} \circ \nabla + \nabla \circ \mathbf{u}). \quad (2.38)$$

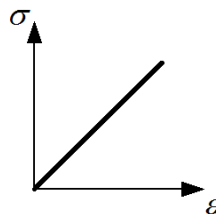
A kinematikai egyenlet ezen alakja csak kis alakváltozás esetén érvényes. Ez egy tenzoregyenlet, amelynek skaláregyenletei a következők,

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x}, \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y}, \\ \varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z}, \\ \gamma_{xy} = \gamma_{yx} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \\ \gamma_{yz} = \gamma_{zy} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}, \\ \gamma_{zx} = \gamma_{xz} &= \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}. \end{aligned} \quad (2.39)$$

Ez a hat egymástól független alakváltozási mérték teljes mértékben leírja a kis alakváltozást. Összességében a kinematikai egyenlet adja meg a kapcsolatot az elmozdulásmező és az alakváltozási tenzormező között.

2.2.2. Anyagegyenletek

A következőkben vizsgáljuk meg az anyagnak a terhelésre adott válaszát (viselkedését). A műszaki gyakorlatban sokféle anyagot alkalmaznak, s a technika fejlődésével egyre több új anyag jelenik meg. A korszerű anyagok anyagegyenleteinek kifejlesztése nagyon népszerű a kutatók körében, így a mechanikában is rendkívül fontos szerepe van. Ezen anyagegyenletek mindegyike anyagvizsgálatokon alapul. A szilárd anyagok mechanikai viselkedését az ún. feszültség-alakváltozás kapcsolattal definiálhatjuk. A függvénykapcsolat értelmében a feszültség az alakváltozás függvénye. Jelen jegyzet rugalmasan viselkedő szilárd anyagok mechanikai viselkedéséhez kapcsolódik. A rugalmas viselkedés azt jelenti, hogy a terhelés elvétele után a vizsgált szerkezet visszatér eredeti formájába. Ezen belül is csak azt az esetet vizsgáljuk, amikor ez a függvénykapcsolat lineáris, azaz lineárisan rugalmas szilárd anyagokat. Számos műszaki gyakorlatban alkalmazott anyag viselkedik lineárisan rugalmasan kis alakváltozás esetén, mint pl. fémek, fa, beton, műanyagok, stb. A 2.6. ábrán egy lineárisan rugalmas anyag feszültség-alakváltozás kapcsolatát (karakterisztika) szemléltetjük.



2.6. ábra Lineárisan rugalmas anyag karakterisztikája

A jól ismert Hooke-törvény lineárisan rugalmas anyagok leírására érvényes. Egytengelyű feszültségi állapotot feltételezve az egyszerűsített Hooke-törvény

$$\sigma = E\varepsilon, \quad (2.40)$$

ahol E a Young-féle rugalmassági modulusz (rugalmassági modulusz), amely egy valóságos anyagállandó. Tiszta csavarás esetén az egyszerűsített Hooke-törvény a következő,

$$\tau = G\gamma, \quad (2.41)$$

ahol G a nyírási rugalmassági modulusz. Lineárisan rugalmas izotróp (az anyagi viselkedés iránytól független) anyagokra az anyagállandók között az alábbi kapcsolat érvényes,

$$E = 2G(1 + \nu), \quad (2.42)$$

ahol ν a Poisson-tényező, amely a keresztirányú és a hosszirányú fajlagos megnyúlások közötti kapcsolat adja meg.

Általános esetben a Hooke-törvény tenzor egyenlettel írható le, amely tetszőleges koordináta-rendszerben értelmezhető,

$$\mathbf{T} = 2G \left(\mathbf{A} + \frac{\nu}{1 - 2\nu} A_I \mathbf{I} \right), \quad (2.43)$$

vagy

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2G} \left(\mathbf{T} - \frac{\nu}{1+\nu} T_I \mathbf{I} \right), \quad (2.44)$$

ahol A_I az alakváltozási tenzor első skalárinvariánsa,

$$A_I = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3. \quad (2.45)$$

A 2.43 egyenlet az alábbi skaláregyenleteket szolgáltatja

$$\begin{aligned} \sigma_x &= 2G \left[\varepsilon_x + \frac{\nu}{1-2\nu} (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) \right], \\ \sigma_y &= 2G \left[\varepsilon_y + \frac{\nu}{1-2\nu} (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) \right], \\ \sigma_z &= 2G \left[\varepsilon_z + \frac{\nu}{1-2\nu} (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) \right], \\ \tau_{xy} &= G\gamma_{xy}, \\ \tau_{yz} &= G\gamma_{yz}, \\ \tau_{zx} &= G\gamma_{zx}. \end{aligned} \quad (2.46)$$

A 2.44 egyenlet az alábbi skaláregyenleteket szolgáltatja

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{2G} \left[\sigma_x - \frac{\nu}{1+\nu} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \right], \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{2G} \left[\sigma_y - \frac{\nu}{1+\nu} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \right], \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{2G} \left[\sigma_z - \frac{\nu}{1+\nu} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \right], \\ \gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G}, \\ \gamma_{yz} &= \frac{\tau_{yz}}{G}, \\ \gamma_{zx} &= \frac{\tau_{zx}}{G}. \end{aligned} \quad (2.47)$$

Lineárisan rugalmas izotróp anyagok esetén ez a kapcsolat mátrix formában is felírható,

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{bmatrix}, \quad (2.48)$$

vagy

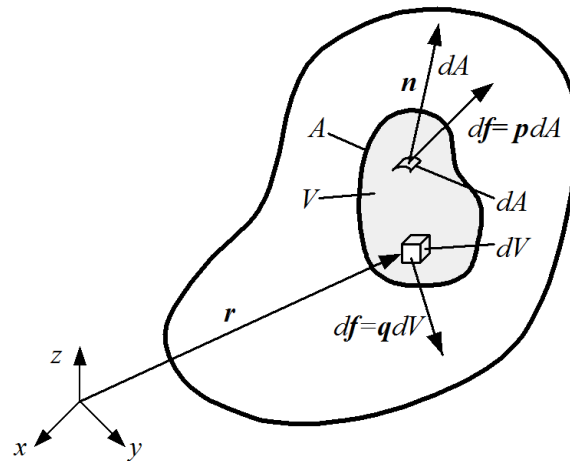
$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{bmatrix}. \quad (2.49)$$

Ez a hat egymástól független egyenlet adja meg a kapcsolatot a feszültség és az alakváltozás között.

2.2.3. Egyensúlyi egyenletek

A statikus egyensúly differenciálegyenleteinek származtatására vizsgáljunk meg egy V térfogatú általános rugalmas szilárd testet. Az alakváltozásra képes test feszültségi állapota a külső erőrendszer eredményeként a hely folytonos függvénye. Az alkalmazott erőrendszerek kielégítik a statikai egyensúly egyenleteit, így az eredő erő és nyomaték zérus.

Tekintsünk egy olyan V térfogatot, amely a rugalmas test belsejében, egyensúlyban van, felülete pedig A (2.7. ábra).



2.7. ábra A rugalmas test egy belső tartománya

A V tartományra külső erők hatnak, ahol a V elemi térfogatra ható erő

$$df = qdV, \quad (2.50)$$

ahol q a térfogati erőrendszer sűrűségvektora, a V elemi felületére ható erő pedig

$$df = pdA = TndA. \quad (2.51)$$

A zárt tartomány egyensúlyban van, így

$$\int_{(V)} \mathbf{q} dV + \int_{(A)} \mathbf{T} n dA = \mathbf{0}. \quad (2.52)$$

Az egyenlet második tagját a Gauss-Osztrogradszkij-féle integrálatalakítás-tétel alapján térfogati integrállá átalakítva kapjuk

$$\int_{(V)} \mathbf{q} dV + \int_{(V)} \mathbf{T} \nabla dV = \mathbf{0}, \quad (2.53)$$

amiből

$$\int_{(V)} (\mathbf{T} \nabla + \mathbf{q}) dV = \mathbf{0}. \quad (2.54)$$

Mivel V tetszőleges, így

$$\mathbf{T} \nabla + \mathbf{q} = \mathbf{0}. \quad (2.55)$$

A fenti egyenlet az ún. egyensúlyi egyenlet. Figyelembe véve a derékszögű Descartes koordináta-rendszert az egyensúlyi egyenlet mátrix formában is felírható a megfelelő koordinátákkal,

$$\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} q_x \\ q_y \\ q_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (2.56)$$

Az egyensúlyi egyenletek skalár egyenletei pedig a következők,

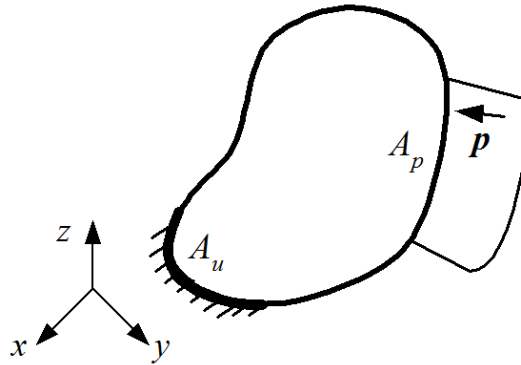
$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + q_x &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + q_y &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + q_z &= 0. \end{aligned} \quad (2.57)$$

Az egyensúlyi egyenletek a térfogati terhelés és a feszültségi állapot közötti összefüggést írják le.

Összefoglalva a 15 ismeretlen meghatározására így rendelkezésre áll 15 skalár egyenlet (6 kinematikai egyenlet, 6 anyagegyenlet és 3 egyensúlyi egyenlet).

2.2.4. Peremfeltételek

A rugalmasságtani modellhez kapcsolt peremfeltételeknek nagyon fontos szerepe van. Az előzőekben felírt egyenletrendszer egyértelmű megoldásához szükségünk van peremfeltételek megadására is. A test peremfelületén terhelést és elmozdulást (pl. megfogást) írunk elő (2.8. ábra). A helytelenül megadott peremfeltételek más feladathoz vezethetnek.



2.8. ábra Típusos peremfeltételek

A test felülete legyen A és érvényes rá, hogy

$$A = A_u \cup A_p, \quad A_u \cap A_p = \emptyset. \quad (2.58)$$

A kinematikai peremfeltétel (elmozdulási peremfeltétel – Dirichlet-féle)

$$\mathbf{u} = \tilde{\mathbf{u}}, \quad \mathbf{r} \in A_u, \quad (2.59)$$

ahol $\tilde{\mathbf{u}}$ az előírt elmozdulásmező (leggyakoribb a megfogás, ahol $\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{0}$),

$$u = \tilde{u}, \quad v = \tilde{v}, \quad w = \tilde{w}. \quad (2.60)$$

A dinamikai peremfeltétel (feszültségi peremfeltétel – Neumann-féle)

$$\mathbf{T} \cdot \mathbf{n} = \tilde{\mathbf{p}}, \quad \mathbf{r} \in A_p, \quad (2.61)$$

ahol $\tilde{\mathbf{p}}$ az előírt terhelési vektor. A 2.61 vektoregyenlet skaláregyenletei

$$\begin{aligned} \sigma_x n_x + \tau_{xy} n_y + \tau_{xz} n_z &= \tilde{p}_x, \\ \tau_{yx} n_x + \sigma_y n_y + \tau_{yz} n_z &= \tilde{p}_y, \\ \tau_{zx} n_x + \tau_{zy} n_y + \sigma_z n_z &= \tilde{p}_z. \end{aligned} \quad (2.62)$$

Összességében elmondható, hogy egy általános mérnöki probléma esetén a megoldandó egyenletrendszer túl komplex ahhoz, hogy azt analitikus módszerekkel oldjuk meg. Ennek megfelelően további megfontolások szükségesek ahhoz, hogy a rugalmas peremértékfeladat közelítőleg megoldható legyen.

A rugalmas peremértékfeladat megoldásának útja kétféle rendszerben történhet. Az egyik az ún. primál rendszer, ahol az elmozdulásmező az alapváltozó (elmozdulásmezőre alapozott rendszer – a végeelem szoftverek ~99.9%-a ilyen). Primál rendszerben a kinematikai peremfeltétel mindig ki van elégítve. A megoldás útja a következő:

$$\mathbf{u} \rightarrow (\text{kinematikai egyenlet}) \rightarrow \mathbf{A} \rightarrow (\text{Hooke-törvény}) \rightarrow \mathbf{T}.$$

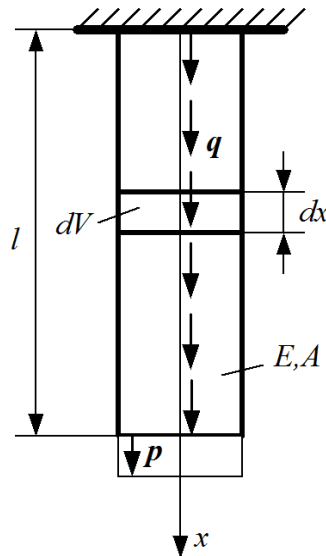
A másik rendszer az ún. duál rendszer, ilyenkor az alapváltozó a feszültségi tenzormező (feszültségmezőre alapozott rendszer). Duál rendszerben a dinamikai peremfeltétel ki van elégítve. A megoldás útja a következő:

$$\mathbf{T} \rightarrow (\text{Hooke-törvény}) \rightarrow \mathbf{A} \rightarrow (\text{Cesaro-formula}) \rightarrow \mathbf{u}.$$

Ez utóbbi út lényegesen nehezebb.

2.3. Egydimenziós peremértékfeladat analitikus megoldása

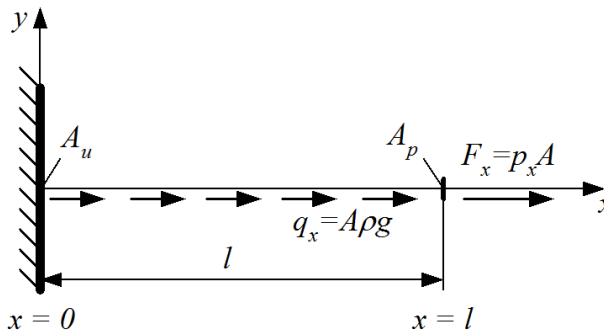
A rugalmas peremértékfeladatok megoldására megoldási stratégiák állnak rendelkezésre. Az ún. analitikus megoldás a rugalmas peremértékfeladat mezőegyenleteinek direkt integrálásával keresi a megoldást. Fontos, hogy a peremfeltételek megfelelően legyenek definiálva. A bonyolult feladatok analitikus megoldása jelentős matematikai nehézségeket generál, így csak egyszerű peremértékfeladatok esetén célszerű alkalmazni.



2.9. ábra Egydimenziós rugalmas peremértékfeladat

Tekintsük egy olyan prizmatikus rudat, amely önsúlyával és a véglapon megoszló erőrendszerrel terhelt. A rúd másik vége befalazott. A rúd anyaga homogén, izotróp és lineárisan rugalmas. A feladatot a 2.9. ábra szemlélteti.

A megoldás során azt feltételezzük, hogy a rúd tetszőleges keresztmetszetében kizárólag rúdírányú, egyenletesen megoszló normálfeszültség ébred. A mechanikában az ilyen feladatokat egydimenziós feladatoknak nevezzük. A feladtból készített mechanikai modellt a 2.10. ábra szemlélteti.



2.10. ábra A rúd egydimenziós mechanikai modellje

A 2.9. és a 2.10. ábrákon alkalmazott jelölések a következők: A a rúd keresztmetszetének területe, l a rúd hossza, E a rúd anyagának rugalmassági modulusza, ρ a rúd anyagának sűrűsége, \mathbf{g} a gravitációs gyorsulásvektor, \mathbf{q} a rúd önsúlyából származó térfogati erőrendszer sűrűségvektora, \mathbf{p} a felületen megoszló erőrendszer sűrűségvektora. A dV és dx az elemi rúdtérfogat és az elemi rúdhossz, míg A_u a kinematikai peremfeltételt tartalmazó felület (előírt elmozdulás) és A_p a dinamikai peremfeltételt tartalmazó felület (terhelt felület).

A feladat az $u(x)$ elmozdulás meghatározása. A feladat megoldása során az ide vonatkozó kinematikai egyenletet, anyagegyenletet és egyensúlyi egyenletet, valamint a rugalmas peremértékfeladat peremfeltételeit használjuk.

A 2.9. ábra és a 2.10. ábrák alapján

$$\mathbf{F} = \mathbf{p}A = p_x \mathbf{i}A \rightarrow F_x = p_x A, \\ \mathbf{q} = q_x \mathbf{i} = A \rho g \mathbf{i}.$$

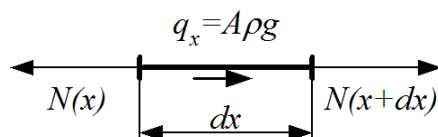
Az ide vonatkozó kinematikai egyenlet a 2.39 szerint

$$\varepsilon_x = \frac{du(x)}{dx}, \quad 0 < x < l.$$

A 2.40 alapján a Hooke-törvényből kapjuk, hogy

$$\sigma_x = E \varepsilon_x \rightarrow N = \sigma_x A = AE \varepsilon_x = AE \frac{du(x)}{dx}, \quad 0 < x < l.$$

Az egyensúlyi egyenlet számoztatásához a 2.11. ábrán látható elemi rúdhossz egyensúlyát vizsgáljuk meg.



2.11. ábra Az elemi rúdszakasz egyensúlya

Az egyensúly értelmében, rúdirányban felírható, hogy

$$-N(x) + N(x + dx) + q_x dx = 0.$$

Az $N(x + dx)$ rúderőt sorba fejtve a lineáris tagig

$$N(x + dx) = N(x) + \frac{dN}{dx} dx + \dots$$

és ezt visszahelyettesítve a vetületi egyenletbe kapjuk

$$-N(x) + N(x) + \frac{dN}{dx} dx + q_x dx = 0 \\ \frac{dN}{dx} dx + q_x dx = 0 \quad /: dx$$

$$\frac{dN}{dx} + q_x = 0.$$

Az A_u felületen az elmozdulás ismert, azaz

$$u(0) = 0,$$

amíg az A_p felületen a terhelés ismert, miszerint

$$N(l) = AE \left. \frac{du}{dx} \right|_{x=l} = F_x.$$

Az analitikus megoldás:

$$\begin{aligned} \frac{dN}{dx} + q_x &= 0, \\ \frac{d(AE \frac{du(x)}{dx})}{dx} + q_x &= 0. \end{aligned}$$

Mivel a rúd homogén és prizmatikus

$$AE \frac{d^2u}{dx^2} + q_x = 0.$$

A fenti egyenlet átrendezése után x szerint kétszer integrálunk

$$\begin{aligned} \frac{d^2u}{dx^2} &= -\frac{q_x}{AE} && / \int dx \\ \frac{du}{dx} &= -\frac{q_x}{AE}x + C_1, && / \int dx \\ u(x) &= -\frac{q_x}{2AE}x^2 + C_1x + C_2. \end{aligned}$$

A következő lépésben a C_1 és C_2 integrációs állandók meghatározása következik a peremfeltételek segítségével. Figyelembe véve a kinematikai peremfeltételt,

$$u(0) = -\frac{q_x}{2AE}0^2 + C_1 \cdot 0 + C_2 \rightarrow C_2 = 0.$$

A dinamikai peremfeltételből következik, hogy

$$\begin{aligned} N(l) &= AE \frac{du}{dx}(l) = F_x \\ AE \left(-\frac{q_x}{AE}l + C_1\right) &= F_x \\ -q_x l + AEC_1 &= F_x \rightarrow AEC_1 = q_x l + F_x \rightarrow C_1 = \frac{q_x l + F_x}{AE} \end{aligned}$$

A C_1 és C_2 integrációs állandókat visszahelyettesítve az $u(x)$ elmozdulásfüggvénybe megkapjuk az analitikus megoldást,

$$u(x) = -\frac{q_x}{2AE}x^2 + \frac{q_x l + F_x}{AE}x.$$

Az $u(x)$ ismeretében a fajlagos megnyúlás is meghatározható,

$$\varepsilon(x) = \frac{du}{dx} = -\frac{q_x}{AE}x + \frac{q_x l + F_x}{AE},$$

valamint a rúderő is,

$$N(x) = AE \frac{du(x)}{dx} = AE\varepsilon(x) = F_x + q_x(l - x).$$

1. példa

Egy körkeresztmetszetű prizmatikus rúd önsúlyával és a véglapján megoszló erőrendszerrel terhelt. A rúd másik vége befalazott. A rúd anyaga alumínium. A problémát a 2.9. ábra szemlélteti.

Adatok:

$$d = 30\text{mm}$$

$$E = 6,9 \cdot 10^4 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

$$l = 1000\text{mm}$$

$$\rho = 2700 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

$$F_x = 5\text{N}$$

Eredmények:

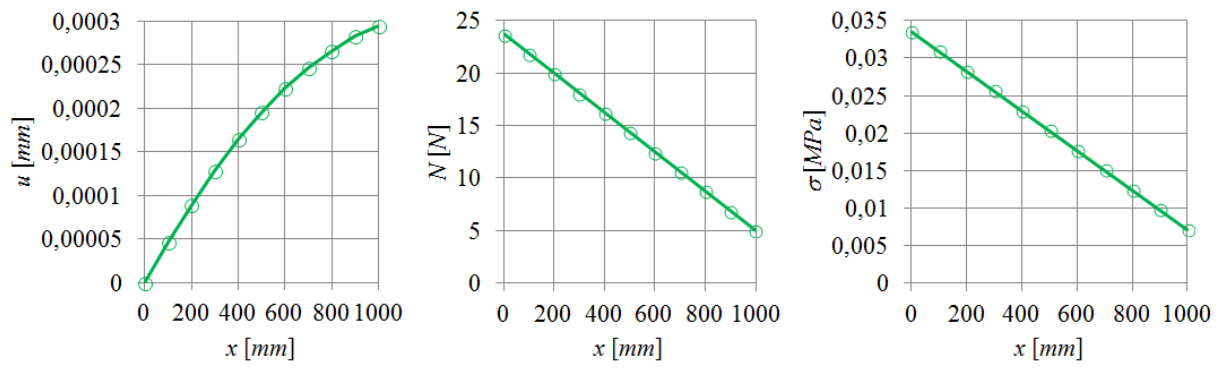
$$A = \frac{d^2\pi}{4} = 706,85\text{mm}^2$$

$$q_x = A\rho g = 0,01872 \frac{\text{N}}{\text{mm}}$$

x [mm]	u [mm]	N [N]	σ [MPa]
0	0	23,72256	0,033560553
100	4,67191E-05	21,8503	0,030911853
200	8,95996E-05	19,97805	0,028263153
300	0,000128641	18,10579	0,025614453
400	0,000163844	16,23353	0,022965753
500	0,000195209	14,36128	0,020317053
600	0,000222734	12,48902	0,017668353
700	0,000246421	10,61677	0,015019653
800	0,00026627	8,744511	0,012370953
900	0,000282279	6,872256	0,009722253
1000	0,00029445	5	0,007073553

2.1. táblázat Az elmozdulások, rúderők és feszültségek

A 2.12. ábrán a megoldások láthatók.



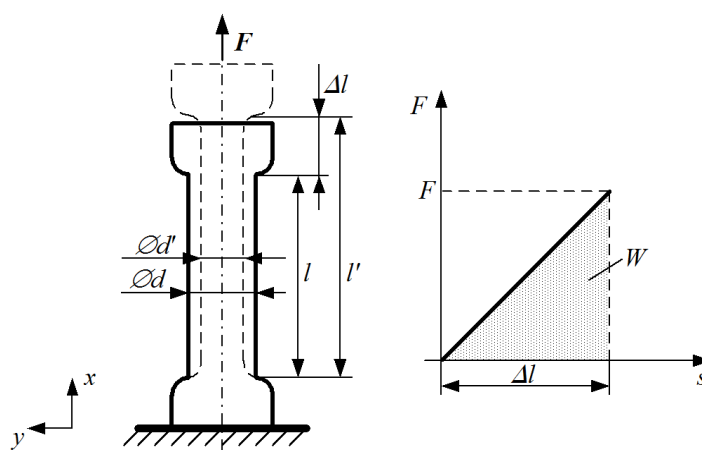
2.12. ábra Az elmozdulások, rúderők és feszültségek

3. ALAKVÁLTOZÁSI ENERGIA ÉS ENERGIAELVEK

3.1. Alakváltozási energia

A rugalmas szilárd testen végzett W munka egy része belső energia formájában (U alakváltozási energia) halmozódik fel a testben. Ideális esetet feltételezve ez a tárolt energia teljes mértékben megegyezik ezzel a munkával, továbbá $U = 0$, amikor a rugalmas szilárd test visszatér eredeti, terheletlen állapotába.

Vizsgáljuk azt a legegyszerűbb esetet, amikor egy hengeres test tiszta húzásnak van kitéve. Ilyen eset például egy hengeres próbatest szakítóvizsgálata (3.1. ábra).



3.1. ábra A szakítóvizsgálat és az erő-elmozdulás görbe

Ezen egyszerű példa esetén az önsúlyból származó erőrendszert nem vesszük figyelembe, valamint az inercia hatásokat is elhanyagoljuk. A testben lejároló folyamatról azt feltételezzük, hogy a szerkezetben ébredő feszültség lassan növekszik és ér el egy σ_x diszkrét értéket. Az alakváltozási energia megegyezik ebben az esetben a vizsgált hengeren végzett munkával.

$$W = \int_0^{\Delta l} F(s) ds = \frac{1}{2} F \Delta l = \frac{1}{2} \frac{F}{A} \frac{\Delta l}{l} A l = \frac{1}{2} \sigma_x \varepsilon_x V = U. \quad (3.1)$$

Bevezetve az u fajlagos (egységnyi térfogatra vonatkozó) alakváltozási energiát, a testben felhalmozott alakváltozási energia

$$U = \int_V u dV = \frac{1}{2} \int_V \sigma_x \varepsilon_x dV. \quad (3.2)$$

Általános esetben a fajlagos alakváltozási energia az alábbi formában írható fel,

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{2} \mathbf{T} \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{2} (\mathbf{e}_x \circ \mathbf{i} + \mathbf{e}_y \circ \mathbf{j} + \mathbf{e}_z \circ \mathbf{k}) \cdot (\alpha_x \circ \mathbf{i} + \alpha_y \circ \mathbf{j} + \alpha_z \circ \mathbf{k}) = \\ &= \frac{1}{2} [\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{yz} \gamma_{yz} + \tau_{zx} \gamma_{zx}], \end{aligned} \quad (3.3)$$

ahol “ \cdot ” a tenzorok közötti kétszeres skaláris szorzást jelöli. A 3.3 összefüggés alapján így általános esetben a test alakváltozási energiája

$$U = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{T} \cdot \mathbf{A} dV. \quad (3.4)$$

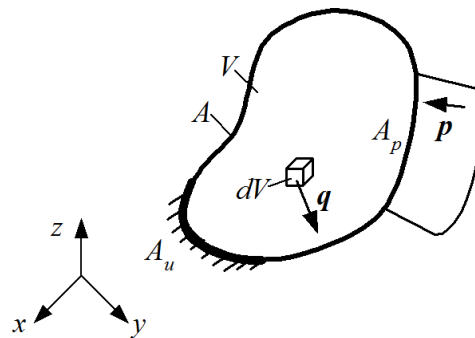
Belátható továbbá az, hogy az alakváltozási energia

$$U = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{T}(\mathbf{A}) \cdot \mathbf{A} dV \geq 0, \quad (3.5)$$

mert (3.5) \mathbf{A} -nak kvadratikus függvénye.

3.2. Teljes potenciális energia

A teljes potenciális energia tartalmazza a testben felhalmozott alakváltozási energiát és a testre ható külső erőrendszerek potenciálját. A 3.2. ábrán egy általános, rugalmas szilárd test látható.



3.2. ábra Rugalmas szilárd test

A külső erőrendszer munkája az \mathbf{u} elmozduláson a 3.2. ábra alapján

$$W = \int_V \mathbf{u} \mathbf{q} dV + \int_{A_p} \mathbf{u} \mathbf{p} dA, \quad (3.6)$$

ahol az első tag a térfogati erőrendszer (pl. önsúly) munkája, amíg a második tag a felületi erőrendszer munkája. Megjegyezzük, hogy az erőrendszer minden esetben konzervatív, amely esetén a munka csak a kezdő és végső helyzettől függ. A teljes potenciális energia ilyenkor az alakváltozási energiának és a külső erőrendszer potenciáljának az összege. A külső erőrendszer potenciálja az erő elmozduláson vett munkájának -1 szerese, így a Π teljes potenciális energia

$$\Pi = U - W. \quad (3.7)$$

Felhasználva 3.4-et a teljes potenciális energia lineáris, rugalmas szilárd test esetén

$$\Pi(\mathbf{u}) = U - W = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{T}(\mathbf{A}) \cdot \mathbf{A} dV - \int_V \mathbf{u} \mathbf{q} dV - \int_{A_p} \mathbf{u} \mathbf{p} dA. \quad (3.8)$$

A teljes potenciális energia egy funkcionál, amely az \mathbf{u} elmozdulás függvényre egy skalár értéket szolgáltat.

3.3. Közelítő eljárások és a variációs számítás

Bonyolult rugalmas peremérték feladatok esetén csak közelítő megoldással tudunk szolgálni. A közelítő megoldással szemben viszont elvárásokat fogalmazhatunk meg.

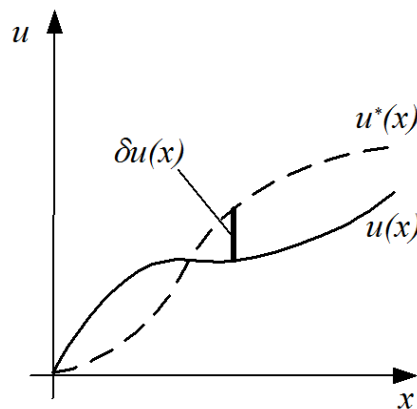
Az elmozdulásmező \mathbf{u}^* kinematikailag lehetséges, amennyiben \mathbf{u}^* folytonos, differenciálható és kielégíti a kinematikai peremfeltételt. A feszültségmező \mathbf{T}^* statikailag lehetséges, amennyiben \mathbf{T}^* kielégíti az egyensúlyi egyenletet és a dinamikai peremfeltételt.

3.3.1. Variációs számítás

A $\delta u(x)$ az $u(x)$ függvény variációja, azaz $\delta u(x)$ az $u(x)$ függvénytől való eltérést jelenti. Egydimenziós esetben az elmozdulásmező variációja így

$$u^*(x) = u(x) + \delta u(x). \quad (3.9)$$

A 3.3. ábrából látható, hogy $u^*(x)$ kielégíti kinematikai peremfeltételt, azaz $u^*(0) = u(0)$, amelyből következik, hogy $\delta u(0) = 0$.



3.3. ábra Egy függvény variációjának értelmezése

Egy elv szükséges ahhoz, hogy szolgáltatni tudjuk a közelítő megoldást. A választott elvnek a lehető legjobb közelítéssel kell szolgálnia az adott függvényteréből.

3.3.2. Variációs elvek

Számos variációs elv létezik. A differenciálegyenlet-rendszer közvetlen megoldásával szemben a feladatok variációs elvek segítségével történő vizsgálatának előnyei a következők:

- a vizsgált variációs elvhez kapcsolódó funkcionál legtöbbször fizikai tartalommal bír,
- a közelítés jósága megbecsülhető,
- a variációs elvekkel igazolni lehet a megoldás létezését,
- variációs elvekkel bonyolult peremfeltételek vezethetők le,
- a fizikai tartalmú funkcionálok alapján numerikusan stabil eljárások származtathatók,
- stb.

3.4. Teljes potenciális energia minimuma elv

A teljes potenciális energia minimuma elv definíciója a következő: az összes kinematikailag lehetséges elmozdulásmező közül a teljes potenciális energia a valós elmozdulásmező esetén minimális, azaz a teljes potenciális energia minimummal rendelkezik a tényleges megoldásnál.

A Π^* kinematikailag lehetséges teljes potenciális energia meghatározható az \mathbf{u}^* kinematikailag lehetséges elmozdulásmezőre, azaz

$$\Pi^* = \Pi^*(\mathbf{u}^*) = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{T}^* \cdot \mathbf{A}^* dV - \int_V \mathbf{u}^* \mathbf{q} dV - \int_{A_p} \mathbf{u}^* \mathbf{p} dA. \quad (3.10)$$

A teljes potenciális energia minimuma elv értelmében

$$\Pi^* - \Pi \geq 0. \quad (3.11)$$

$\Pi^* = \Pi$ csak akkor lehetséges, amikor $\mathbf{A}^* = \mathbf{A}$ és $\mathbf{u}^* = \mathbf{u}$. Abban az esetben kapjuk meg a pontos megoldást, ha az összes kinematikailag lehetséges teljes potenciális energia közül a legkisebbet választjuk ki. Ilyenkor $\Pi_{min}^* = \Pi$. Amennyiben nem a legkisebb kinematikailag lehetséges teljes potenciális energiát választjuk ki, akkor közelítő megoldást kapunk. Ilyenkor $\Pi_{min}^* \neq \Pi$.

3.4.1. Lagrange-féle variációs elv

A teljes potenciális energia minimuma elv variációs megfogalmazása a Lagrange-féle variációs elv. Korábban kijelentettük, hogy a teljes potenciális energia tulajdonképpen egy funkcionál, azaz

$$\Pi(\mathbf{u}) = U - W = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{T} \cdot \mathbf{A} dV - \int_V \mathbf{u} \mathbf{q} dV - \int_{A_p} \mathbf{u} \mathbf{p} dA. \quad (3.12)$$

Az \mathbf{u} elmozdulásmező ismert az A_u felületen, így a kinematikai peremfeltétel $\delta \mathbf{u}|_{A_u} = 0$

A teljes potenciális energiának a tényleges elmozdulásmezőre szélsőértéke van. A szélsőérték szükséges feltétele, hogy $\delta \Pi = 0$,

$$\delta \Pi = \int_V \delta(\mathbf{T} \cdot \mathbf{A}) dV - \int_V \delta \mathbf{u} \mathbf{q} dV - \int_{A_p} \delta \mathbf{u} \mathbf{p} dA = 0. \quad (3.13)$$

A szélsőérték akkor minimum, ha $\delta^2 \Pi \geq 0$, ez a minimum elégséges feltétele. A teljes potenciális energia minimuma elv és a Lagrange-féle variációs elv fizikai tartalma azonos.

Fontos bizonyítani, hogy az elv alapján számított tényleges megoldás kielégíti-e a rugalmasságtan egyenletrendszerét. A 3.13 egyenlet első tagja a következőképpen alakítható át,

$$\int_V \delta(\mathbf{T} \cdot \mathbf{A}) dV = \int_V \mathbf{T} \cdot \delta \mathbf{A} dV = \int_V \mathbf{T} \cdot \delta(\underbrace{\mathbf{u} \circ \nabla}_{\mathbf{u}}) dV = \int_V \mathbf{T} \cdot (\delta \mathbf{u} \circ \nabla) dV,$$

ahol

$$\int_V \mathbf{T} \cdot \delta(\underbrace{\mathbf{u} \circ \nabla}_U) dV = \int_V \mathbf{T} \cdot \delta \mathbf{A} dV + \int_V \mathbf{T} \cdot \delta \Psi dV = \int_V \mathbf{T} \cdot \delta \mathbf{A} dV.$$

Mivel egy szimmetrikus és egy ferdeszimmetrikus tenzor kétszeres skaláris szorzata zérus, így $\mathbf{T} \cdot \Psi = 0$.

$$\int_V \mathbf{T} \cdot (\delta \mathbf{u} \circ \nabla) dV = \int_V [(\delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{T} \cdot \nabla) - \delta \mathbf{u} \cdot (\mathbf{T} \cdot \nabla)] dV,$$

ahol

$$\int_V \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{T} \cdot \nabla dV = \int_A \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{n} dA = \int_{A_p} \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{n} dA + \underbrace{\int_{A_u} \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{n} dA}_0.$$

Végül,

$$\int_V \delta(\mathbf{T} \cdot \mathbf{A}) dV = \int_{A_p} \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{n} dA - \int_V \delta \mathbf{u} \cdot (\mathbf{T} \cdot \nabla) dV.$$

Az átalakítások és a 3.13-ba való behelyettesítés után kapjuk, hogy

$$\delta \Pi = - \int_V \delta \mathbf{u} \cdot (\mathbf{T} \cdot \nabla) dV - \int_V \delta \mathbf{u} \mathbf{q} dV + \int_{A_p} \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{n} dA - \int_{A_p} \delta \mathbf{u} \mathbf{p} dA = 0. \quad (3.14)$$

A 3.14 tovább alakítható, amelyből

$$\delta \Pi = - \int_V \delta \mathbf{u} \cdot (\mathbf{T} \cdot \nabla + \mathbf{q}) dV + \int_{A_p} \delta \mathbf{u} \cdot (\mathbf{T} \cdot \mathbf{n} - \mathbf{p}) dA = 0. \quad (3.15)$$

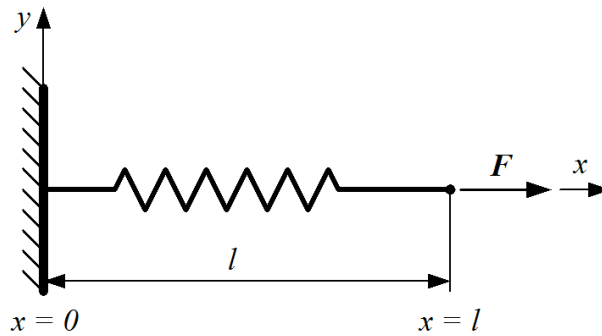
Mivel $\delta \mathbf{u}$ tetszőleges, így a zárójelben levő tagoknak kell zérusnak lenniük, azaz az elv tartalmazza az egyensúlyi egyenletet és a dinamikai peremfeltételt.

3.5. Lineáris rugó

A lineáris rugó egy olyan mechanikus szerkezet, amely csak axiális terhelést képes felvenni. A rugó megnyúlása, vagy megrövidülése párhuzamos az alkalmazott axiális terheléssel. A teljes potenciális energia minimuma elv alkalmazása bevezethető a lineáris rugó példára.

2. példa

Tekintsünk egy k merevségű rugót, amelyet F erő terhel (3.4. ábra). Legyen u a rugó elmozdulása terhelt állapotban.



3.4. ábra Lineáris rugó

A rendszer teljes potenciális energiája felírható,

$$\Pi = U - W = \frac{1}{2}ku^2 - Fu,$$

a szükséges feltétel, hogy az első derivált zérus legyen, azaz

$$\delta\Pi = \frac{d\Pi}{du} = 0 = ku - F \rightarrow u = \frac{F}{k}$$

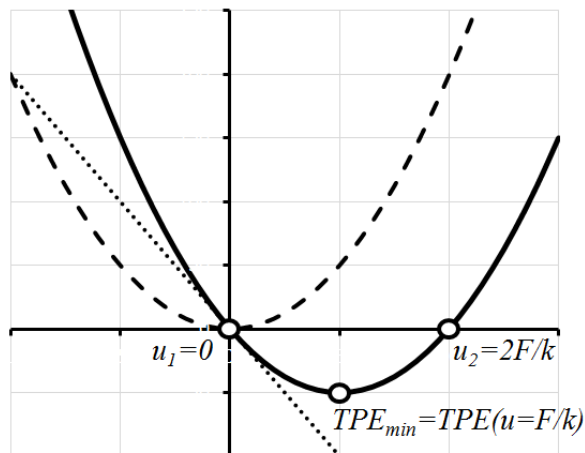
és a minimum elégséges feltétele is bizonyítható, miszerint

$$\frac{d^2\Pi}{du^2} = k > 0.$$

A teljes potenciális energia minimumának szemléltetése a 3.5. ábrán látható, amelyhez szükséges meghatározni a zérushelyeket,

$$\Pi = u \left(\frac{1}{2}ku - F \right) \rightarrow u_1 = 0, u_2 = \frac{2F}{k}$$

- - Alakváltozási energia
- Külső erők munkája
- Teljes potenciális energia



3.5. ábra A teljes potenciális energia szemléltetése

Egy lineáris rugóelem (3.6. ábra) teljes potenciális energiája felírható az alábbi alakban,

$$\Pi(u_1, u_2) = \frac{1}{2}k(u_2 - u_1)^2 - F_1u_1 - F_2u_2$$

A $\Pi(u_1, u_2)$ függvény első deriváltja az elmozdulások szerint

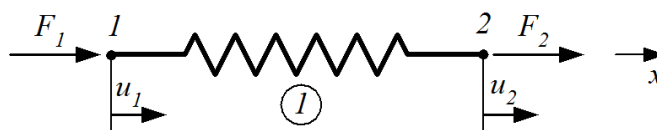
$$\begin{aligned} \frac{d\Pi}{du_1} = 0 &= k(u_2 - u_1)(-1) - F_1 = ku_1 - ku_2 - F_1 = 0, \\ \frac{d\Pi}{du_2} = 0 &= k(u_2 - u_1) - F_2 = -ku_1 + ku_2 - F_2 = 0. \end{aligned}$$

Mátrix alakban

$$\begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{F},$$

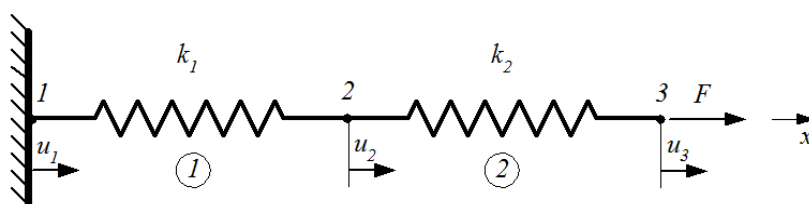
ahol \mathbf{K} a rugóelem merevségi mátrixa, \mathbf{u} az ismeretlen csomóponti elmozdulásvektor, míg \mathbf{F} a rugóelem terhelési vektora. Látható, hogy a fenti egyenlet megegyezik az (1.2)-es egyenlettel. Ez a végeelem-módszer alapegyenlete rugónál.



3.6. ábra Rugóelem

3. példa

Tekintsük az alábbi két rugóból álló rendszert (3.7. ábra). A rugók merevsége k_1 és k_2 , míg a rendszert F erővel terheljük. A kinematikai peremfeltétel: $u_1 = 0$.



3.7. ábra Két rugóból álló rendszer

A megoldást ez esetben is a teljes potenciális energia minimuma elv alapján keressük. A két rugóból álló rendszer teljes potenciális energiája

$$\Pi(u_2, u_3) = \underbrace{\Pi_1(u_2)}_{\text{rugó } k_1} + \underbrace{\Pi_2(u_2, u_3)}_{\text{rugó } k_2} = \frac{1}{2}k_1u_2^2 + \frac{1}{2}k_2(u_3 - u_2)^2 - Fu_3.$$

A $\Pi(u_2, u_3)$ függvény első deriváltja az elmozdulások szerint

$$\frac{d\Pi}{du_2} = 0 = k_1 u_2 + k_2(u_3 - u_2)(-1) = (k_1 + k_2)u_2 - k_2 u_3 = 0,$$

$$\frac{d\Pi}{du_3} = 0 = k_2(u_3 - u_2) - F = -k_2 u_2 + k_2 u_3 - F = 0.$$

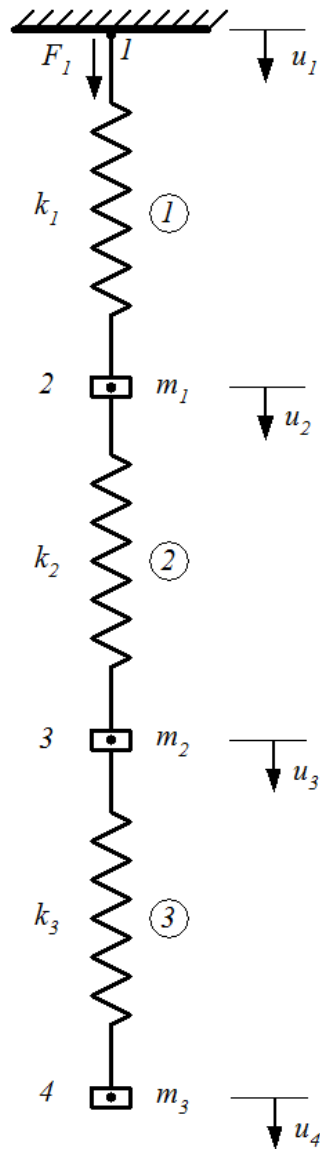
Így az u_2 és u_3 elmozdulásokra két egyenletet kaptunk, amely mátrixos alakban is felírható,

$$\begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ F \end{bmatrix} = 0,$$

$$\mathbf{Ku} = \mathbf{F}.$$

4. példa

Tekintsük az alábbi három rugóból álló rendszert (3.8. ábra).



3.8. ábra Három rugóból álló rendszer

Adatok:

$$k_1 = 2k, k_2 = 3k, k_3 = k = 50 \frac{N}{m}$$

$$m = m_1 = m_2 = m_3 = 0,3kg$$

$$g \cong 10 \frac{m}{s^2}$$

$$u_i = ? (i = 1, \dots, 4)$$

$$F_{1x} = ?$$

A rugóelemek merevségi mátrixa:

Elem sorszáma	Merevségi mátrix \mathbf{K}^i	Csomóponti elmozdulásvektor \mathbf{u}^i	Terhelési vektor \mathbf{F}^i
1	$\begin{bmatrix} 2k & -2k \\ -2k & 2k \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} F_{1x} \\ mg \end{bmatrix}$
2	$\begin{bmatrix} 3k & -3k \\ -3k & 3k \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ mg \end{bmatrix}$
3	$\begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} u_3 \\ u_4 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ mg \end{bmatrix}$

A globális egyenletrendszer

$$\mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{F},$$

ahol

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 2k & -2k & 0 & 0 \\ -2k & 2k + 3k & -3k & 0 \\ 0 & -3k & 3k + k & -k \\ 0 & 0 & -k & k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2k & -2k & 0 & 0 \\ -2k & 5k & -3k & 0 \\ 0 & -3k & 4k & -k \\ 0 & 0 & -k & k \end{bmatrix},$$

és

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} F_{1x} \\ mg \\ mg \\ mg \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} 2k & -2k & 0 & 0 \\ -2k & 5k & -3k & 0 \\ 0 & -3k & 4k & -k \\ 0 & 0 & -k & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{1x} \\ mg \\ mg \\ mg \end{bmatrix}$$

A kinematikai peremfeltétel alapján $u_1 = 0$, így

$$\begin{bmatrix} 2k & -2k & 0 & 0 \\ -2k & 5k & -3k & 0 \\ 0 & -3k & 4k & -k \\ 0 & 0 & -k & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{1x} \\ mg \\ mg \\ mg \end{bmatrix}$$

Keressük az u_2 , u_3 , u_4 és F_{1x} ismeretleneket.

$$\left. \begin{aligned} -2ku_2 &= F_{1x} \\ 5ku_2 - 3ku_3 &= mg \\ -3ku_2 + 4ku_3 - ku_4 &= mg \\ -ku_3 + ku_4 &= mg \end{aligned} \right\} \begin{aligned} F_{1x} &= 9N (\uparrow) \\ u_2 &= 0,09m \\ u_3 &= 0,13m \\ u_4 &= 0,19m \end{aligned}$$

3.6 Ritz-módszer

Viszonylag egyszerű feladatok esetén a rugalmasságtani egyenletrendszer integrálással is megoldható. Bonyolult szerkezetek, és/vagy terhelések esetén a vonatkozó differenciálegyenletek analitikus módszerrel történő megoldása viszont rendkívül komplikált. Komplex feladatok esetén közelítő megoldások alkalmazása szükséges. A Ritz-módszer egy olyan technika, ahol próbafüggvényeket alkalmazunk a közelítő megoldás előállítására. Ez a módszer nagyon hasonló a végeelem-módszerhez, tulajdonképpen a végeelem-módszer a Ritz-módszer kiterjesztésének tekinthető.

A Ritz-módszer egy közelítő módszer, amely alapján a teljes potenciális energia minimuma elv felhasználásával közelítő megoldás állítható elő. A Ritz-módszer alapja olyan próbafüggvények felvétele, amelyek kielégítik a kinematikai peremfeltételt és elegendően sokszor deriválhatók. Itt az összes kinematikailag lehetséges elmozdulásmezőből csak egy bizonyos halmazzt vizsgálunk. A kinematikailag lehetséges elmozdulásmezőt az alábbi alakban keressük,

$$\mathbf{u}^* = \mathbf{u}^*(C_0, C_1, \dots, C_n), \quad (3.16)$$

ahol \mathbf{u}^* a kinematikailag lehetséges elmozdulásmező, C_0, C_1, \dots, C_n véges számú ismeretlen állandók. Általában ezek a próbafüggvények elemi függvények, mint pl. polinomok, trigonometrikus függvények, stb. Az ismeretlen állandókat kell meghatározni a teljes potenciális minimuma elv felhasználásával. A közelítés alkalmazása miatt ezen ismeretlen állandóktól függ a teljes potenciális energia

$$\Pi(\mathbf{u}^*) = \Pi^*(C_0, C_1, \dots, C_n), \quad (3.17)$$

és a többváltozós függvény minimuma n számú lineáris algebrai egyenletet szolgáltat,

$$\min \Pi^*(C_0, C_1, \dots, C_n) \rightarrow \frac{\partial \Pi^*}{\partial C_0} = 0, \frac{\partial \Pi^*}{\partial C_1} = 0, \dots, \frac{\partial \Pi^*}{\partial C_n} = 0. \quad (3.18)$$

Ezt a lineáris algebrai egyenletrendszert kell megoldani a C_0, C_1, \dots, C_n ismeretlen állandók előállítására.

5. példa

Egy korábbi feladat (2.9. ábra) vizsgálata a Ritz-módszer alkalmazásával. A teljes potenciális energia ebben az esetben az alábbi alakban írható fel,

$$\Pi^*(u^*) = \frac{1}{2} \int_0^l AE \left(\frac{du^*}{dx} \right)^2 dx - \int_0^l u^* q_x dx - F_x u(l)^*.$$

5a, Lineáris közelítés

A próbafüggvény legyen lineáris függvény

$$u^*(x) = C_0 + C_1x.$$

Mivel a kinematikai peremfeltétel értelmében $u(0) = 0$, így

$$u^*(0) = 0 = C_0 + C_1 \cdot 0 \rightarrow C_0 = 0.$$

Ennek megfelelően

$$u^*(x) = C_1x.$$

A fajlagos megnyúlás

$$\varepsilon_x^* = \frac{du^*}{dx} = C_1.$$

Ennek eredményeként felírhatjuk a potenciális energiát az ismeretlen állandó függvényeként

$$\Pi^*(C_1) = \frac{1}{2} \int_0^l AEC_1^2 dx - \int_0^l C_1 x q_x dx - F_x C_1 l.$$

A $\Pi^*(C_1)$ függvény minimumának meghatározása:

$$\frac{\partial \Pi^*}{\partial C_1} = 0 = \int_0^l AEC_1 dx - \int_0^l x q_x dx - F_x l = AEC_1 [x]_0^l - q_x \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^l - F_x l,$$

$$0 = AEC_1 l - q_x \frac{l^2}{2} - F_x l \rightarrow C_1 = \frac{F_x l + q_x \frac{l^2}{2}}{AE l} = \frac{F_x + q_x \frac{l}{2}}{AE}.$$

Behelyettesítve az elmozdulásmezőbe kapjuk,

$$u(x) = C_1 x = \frac{F_x + q_x \frac{l}{2}}{AE} x,$$

$$\varepsilon_x(x) = C_1 = \frac{F_x + q_x \frac{l}{2}}{AE},$$

$$N(x) = \sigma_x A = E \varepsilon_x A = F_x + q_x \frac{l}{2}.$$

Összehasonlítva a lineáris közelítésből származó eredményeket az analitikus megoldáshoz képest azt tapasztaljuk, hogy az eltérés meglehetősen nagy.

5b, Közelítés másodfokú polinommal

A próbafüggvény legyen másodfokú polinom

$$u^*(x) = C_0 + C_1x + C_2x^2.$$

Mivel a kinematikai peremfeltétel értelmében $u(0) = 0$, így

$$u^*(0) = 0 = C_0 + C_1 \cdot 0 + C_2 \cdot 0^2 \rightarrow C_0 = 0.$$

Ennek megfelelően

$$u^*(x) = C_1x + C_2x^2.$$

A fajlagos megnyúlás

$$\varepsilon_x^* = \frac{du^*}{dx} = C_1 + 2C_2x.$$

Ennek eredményeként felírhatjuk a potenciális energiát az ismeretlen állandók függvényeként

$$\Pi^*(C_1, C_2) = \frac{1}{2} \int_0^l AE(C_1 + 2C_2x)^2 dx - \int_0^l (C_1x + C_2x^2)q_x dx - F_x(C_1l + C_2l^2).$$

A $\Pi^*(C_1, C_2)$ függvény minimumának meghatározása:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi^*}{\partial C_1} = 0 &= \int_0^l AE(C_1 + 2C_2x) dx - \int_0^l xq_x dx - F_x l = \\ &= \int_0^l AEC_1 dx + \int_0^l 2AEC_2x dx - \int_0^l xq_x dx - F_x l, \end{aligned}$$

$$0 = AEC_1[x]_0^l + 2AEC_2 \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^l - q_x \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^l - F_x l,$$

$$0 = AEC_1 l + AEC_2 l^2 - q_x \frac{l^2}{2} - F_x l.$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi^*}{\partial C_2} = 0 &= \int_0^l 2AE(C_1 + 2C_2x)x dx - \int_0^l x^2 q_x dx - F_x l^2 = \\ &= \int_0^l 2AEC_1 x dx + \int_0^l 4AEC_2 x^2 dx - \int_0^l x^2 q_x dx - F_x l^2, \end{aligned}$$

$$0 = 2AEC_1 \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^l + 4AEC_2 \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^l - q_x \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^l - F_x l^2,$$

$$0 = AEC_1 l^2 + 4AEC_2 \frac{l^3}{3} - q_x \frac{l^3}{3} - F_x l^2.$$

Keressük a C_1 , C_2 állandókat

$$\left. \begin{aligned} 0 &= AEC_1l + AEC_2l^2 - q_x \frac{l^2}{2} - F_x l \\ 0 &= AEC_1l^2 + 4AEC_2 \frac{l^3}{3} - q_x \frac{l^3}{3} - F_x l^2 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} C_1 &= \frac{F_x + q_x l}{AE} \\ C_2 &= -\frac{q_x}{2AE} \end{aligned}$$

Behelyettesítve az elmozdulásmezőbe kapjuk,

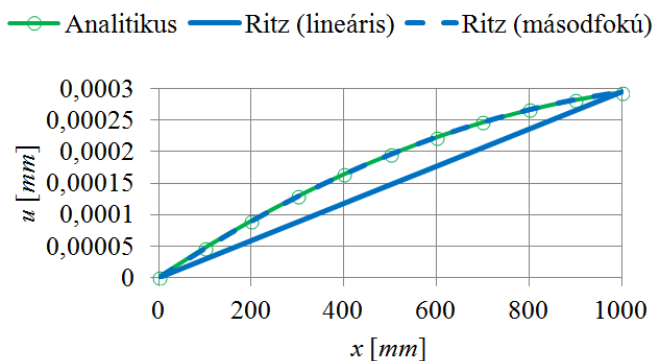
$$\begin{aligned} u(x) &= C_1x + C_2x^2 = \frac{F_x + q_x l}{AE}x - \frac{q_x}{2AE}x^2, \\ \varepsilon_x(x) &= C_1 + 2C_2x = \frac{F_x + q_x l}{AE} - \frac{q_x}{AE}x, \\ N(x) &= \sigma_x A = E\varepsilon_x A = F_x + q_x(l - x). \end{aligned}$$

Másodfokú polinom alkalmazása esetén visszkapjuk az analitikus számítás által kapott eredményt.

Látható, hogy a két különböző közelítés különböző eredményt szolgáltat. A közelítés fokszámának növelésével jobb megoldást kapunk. A két közelítés eredményeit a 3.9. ábrán szemléltetjük.

x [mm]	$u_{\text{analitikus}}$ [mm]	$u_{\text{ritz lineáris}}$ [mm]	$u_{\text{ritz másodfokú}}$ [mm]
0	0	0	0
100	4,67191E-05	2,9445E-05	4,67191E-05
200	8,95996E-05	5,889E-05	8,95996E-05
300	0,000128641	8,8335E-05	0,000128641
400	0,000163844	0,00011778	0,000163844
500	0,000195209	0,000147225	0,000195209
600	0,000222734	0,00017667	0,000222734
700	0,000246421	0,000206115	0,000246421
800	0,00026627	0,00023556	0,00026627
900	0,000282279	0,000265005	0,000282279
1000	0,00029445	0,00029445	0,00029445

3.1. táblázat Az elmozdulásmező (analitikus számítás, Ritz-módszer)



3.9. ábra Az elmozdulásmező (analitikus számítás, Ritz-módszer)

4. ELMOZDULÁSMEZŐN ALAPULÓ VÉGESELEM-MÓDSZER

A végeselem-módszer egy kulcsfontosságú és nélkülözhetetlen számítógépes technológia a mérnöki problémák modellezésében és szimulációjában. Ahhoz, hogy képesek legyünk mérnöki feladatokat vizsgálni, a probléma leírásához matematikai modellt szükséges rendelni. Olyan feltételezésekkel kell közben élni, amelyek bizonyos mértékű egyszerűsítéseket tartalmaznak. Ez a matematikai leírás differenciálegyenletekből és adott peremfeltételekből áll. Általánosságban elmondható, hogy az analitikus eljárás a differenciálegyenletek megoldására meglehetősen nehézkes. Mindemellett viszont különböző numerikus megoldó technikák képesek ezek közelítő megoldásának meghatározására. A végeselem-módszer az egyike a legfontosabb ilyen numerikus megoldó technikának. Mára már gyakorlatilag bármilyen természetes jelenség leírására alkalmasak az általános célú végeselem szoftverek [1,15,16].

A végeselemes eljárás a következőkön alapul:

- A vizsgált testeket elemekre bontjuk. Ezt az eljárást nevezzük hálózásnak. Ezeken a résztartományokon (elemek) közelítjük az elmozdulásmezőt. A teljes testre érvényes mező a résztartományokra számolt mezők összekapcsolásával építhető fel.
- A rugalmasságtani probléma megoldását energiaelvek alkalmazásával állítjuk elő (Lagrange-féle variációs elv, Castigliano-féle variációs elv, stb.).

A végeselem szoftverek többnyire a Lagrange-féle variációs elvet ($\delta\Pi = 0$) alkalmazzák, ahol az elsődleges alapváltozó az elmozdulásmező.

A végeselemes formulákat koordináta-rendszerben szükséges tárgyalni. A végeselemes egyenletek előállításánál az elemek vonatkozásában egy ún. lokális (helyi) koordináta-rendszert alkalmazunk a teljes szerkezetre vonatkozó globális koordináta-rendszerben. Az elem koordináta-rendszerére alapozva az elem belüli elmozdulást a csomóponti elmozdulások interpolációjával kapjuk. Ezt az eljárást elmozdulásmezőn alapuló módszernek nevezzük. Jelen jegyzetben csak az elmozdulásmezőre alapozott módszerhez tartozó formulákat mutatjuk be.

Az elmozdulásmezőn alapuló végeselem-módszer lépései a következők:

- A testet elvileg tetszőleges alakú, véges számú résztartományra bontjuk. Ezeket a résztartományokat nevezzük végeselemeknek.
- Az elmozdulásmezőt elemenként külön-külön közelítjük. A közelítő függvények legtöbbször polinomok. Ezt nevezzük lokális közelítésnek.
- Az elemeket csomópontok határozzák meg és a csomóponti elmozdulás paraméterekkel illesztjük össze az elemenként felvett közelítő függvényeket.
- A Lagrange-féle variációs elvet alkalmazva a csomóponti elmozdulás paraméterekre lineáris algebrai egyenletrendszert kapunk.
- A csomóponti elmozdulás paramétereket ebből a lineáris algebrai egyenletrendszerből határozzuk meg.
- Az elmozdulásmező ismeretében a vizsgálat szempontjából fontos további mennyiségek is meghatározhatók, ilyen lehet az alakváltozás, a feszültség, stb.

4.1. Az elmozdulásmezőn alapuló végeselemes egyensúlyi egyenlet származtatása

A végeselemes egyenletek felépítésére a továbbiakban a mátrixos írásmódot alkalmazzuk. Vizsgálatunk tárgya egy általános háromdimenziós test egyensúlyi állapota. A test alakja, geometriája és anyaga ismert. A test A_u felületén a megtámasztásból adódóan az elmozdulás előírt, amíg a test A_p felületén felületen megoszló terhelés hat.

A célunk meghatározni a test elmozdulás állapotát és a vonatkozó alakváltozási és feszültségi mennyiségeket.

Az elmozdulásvektor mátrixa

$$\mathbf{u} = \underbrace{\begin{bmatrix} u(x, y, z) \\ v(x, y, z) \\ w(x, y, z) \end{bmatrix}}_{(3 \times 1)} \quad (4.1)$$

Az alakváltozási vektor mátrixa

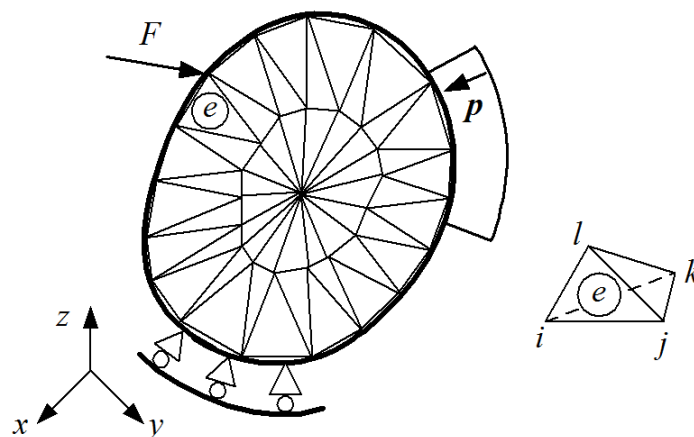
$$\boldsymbol{\varepsilon} = \underbrace{\begin{bmatrix} \varepsilon_x(x, y, z) \\ \varepsilon_y(x, y, z) \\ \varepsilon_z(x, y, z) \\ \gamma_{xy}(x, y, z) \\ \gamma_{yz}(x, y, z) \\ \gamma_{zx}(x, y, z) \end{bmatrix}}_{(6 \times 1)} \quad (4.2)$$

A feszültségvektor mátrixa

$$\boldsymbol{\sigma} = \underbrace{\begin{bmatrix} \sigma_x(x, y, z) \\ \sigma_y(x, y, z) \\ \sigma_z(x, y, z) \\ \tau_{xy}(x, y, z) \\ \tau_{yz}(x, y, z) \\ \tau_{zx}(x, y, z) \end{bmatrix}}_{(6 \times 1)} \quad (4.3)$$

A megoldást a kis alakváltozás lineáris elméletére vezetjük le, ahol az elmozdulások kismértékűek.

A szilárd testet véges számú, tetszőleges alakú elemekre bontjuk. Az elemeket a csomópontok határozzák meg. Az e jelöli az elem (résztartomány) sorszámát, míg i, j, k, l jelöli az elemek csomópontját (4.1. ábra).



4.1. ábra A végeleemes diszkretizáció és egy végeleelem

Egy tipikus végelelemet a csomópontjaival és azokat összekötő egyenes vagy görbe vonalú peremekkel definiáljuk. Az elmozdulásmezőt elemenként külön-külön közelítjük,

$$\underbrace{\mathbf{u}^e}_{(3 \times 1)} = \underbrace{\mathbf{N}^e}_{(3 \times n)} \underbrace{\mathbf{q}^e}_{(n \times 1)}, \quad (4.4)$$

ahol \mathbf{u}^e az elem elmozdulásmezője, \mathbf{N}^e az elem approximációs (alakfüggvények) mátrixa, \mathbf{q}^e az elem csomóponti elmozdulásvektora, n az elem szabadsági foka. Az approximációs mátrix tartalmazza az alakfüggvényeket.

Az e elem csomóponti elmozdulásvektora

$$\mathbf{q}^e = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{q}_i \\ \mathbf{q}_j \\ \mathbf{q}_k \\ \vdots \\ \mathbf{q}_N \end{bmatrix}}_{(3N \times 1)}, \quad (4.5)$$

ahol N a csomópontok száma. Az e elem i -edik csomópontjának elmozdulásvektora

$$\mathbf{q}_i^e = \underbrace{\begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \end{bmatrix}}_{(3 \times 1)}. \quad (4.6)$$

Megjegyezzük, hogy az elmozdulás komponensek pl. rúdszerkezetek, lemezszerkezetek esetén tartalmaznak szögelfordulásokat is. Az approximációs mátrix általános alakja

$$\mathbf{N}^e = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{N}_i \\ \mathbf{N}_j \\ \mathbf{N}_k \\ \vdots \\ \mathbf{N}_N \end{bmatrix}}_{(3N \times 3)}. \quad (4.7)$$

Az e elem i -edik csomópontjához tartozó approximációs mátrix blokk

$$\mathbf{N}_i^e = \underbrace{\begin{bmatrix} N_{xxi} & N_{xyi} & N_{xzi} \\ N_{yxi} & N_{yyi} & N_{yzi} \\ N_{zxi} & N_{zyi} & N_{zzi} \end{bmatrix}}_{(3 \times 3)}. \quad (4.8)$$

Az elmozdulás közelítéséből kiindulva az elem alakváltozási állapotának közelítése

$$\boldsymbol{\varepsilon}^e = \underbrace{\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{bmatrix}}_{(6 \times 1)}^e = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \end{bmatrix}}_{(6 \times 1)}^e = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}}_{(6 \times 3)}^e \underbrace{\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}}_{(3 \times 1)}^e. \quad (4.9)$$

Itt

$$\mathbf{D}^e = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}}_{(6 \times 3)}^e. \quad (4.10)$$

az ún. differenciál utasítások mátrixa, így az alakváltozás a (4.4) összefüggés felhasználásával

$$\boldsymbol{\varepsilon}^e = \mathbf{D}^e \mathbf{N}^e \mathbf{q}^e = \mathbf{B}^e \mathbf{q}^e, \quad (4.11)$$

ahol \mathbf{B}^e az ún. alakváltozás-csomóponi elmozdulás mátrix

$$\mathbf{B}_i^e = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial z} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial z} & \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x} \end{bmatrix}}_{(6 \times 3)}^e. \quad (4.12)$$

A Hooke-törvény értelmében izotróp anyagot feltételezve az alakváltozás közelítéséből kiindulva az elem feszültségi állapotának közelítése

$$\boldsymbol{\sigma}^e = \underbrace{\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{bmatrix}}_{(6 \times 1)}^e = \underbrace{\begin{bmatrix} c_1 & c_2 & c_2 & 0 & 0 & 0 \\ c_2 & c_1 & c_2 & 0 & 0 & 0 \\ c_2 & c_2 & c_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_3 \end{bmatrix}}_{(6 \times 6)}^e \underbrace{\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{bmatrix}}_{(6 \times 1)}^e, \quad (4.13)$$

ahol

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{E(1-\nu)}{(1-2\nu)(1+\nu)} \\ c_2 &= \frac{E\nu}{(1-2\nu)(1+\nu)} \\ c_3 &= \frac{E}{2(1+\nu)} = G \end{aligned} \quad (4.14)$$

Az anyagállandó mátrixát bevezetve,

$$\mathbf{C}^e = \underbrace{\begin{bmatrix} c_1 & c_2 & c_2 & 0 & 0 & 0 \\ c_2 & c_1 & c_2 & 0 & 0 & 0 \\ c_2 & c_2 & c_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_3 \end{bmatrix}}_{(6 \times 6)}^e, \quad (4.15)$$

és a 4.11 összefüggést alkalmazva az elem feszültségvektora

$$\boldsymbol{\sigma}^e = \mathbf{C}^e \boldsymbol{\varepsilon}^e = \mathbf{C}^e \mathbf{B}^e \mathbf{q}^e. \quad (4.16)$$

A Hooke-törvény értelmében egy végelemben számolt feszültség kapcsolatban áll az elem alakváltozási állapotával.

A (3.8) egyenletre hivatkozva az elem teljes potenciális energiája mátrixos írásmódban

$$\Pi^e = U - W = \frac{1}{2} \int_V \boldsymbol{\varepsilon}^{eT} \boldsymbol{\sigma}^e dV - \int_V \mathbf{u}^{eT} \mathbf{q}^e dV - \int_{A_p} \mathbf{u}^{eT} \mathbf{p}^e dA. \quad (4.17)$$

A (4.17) egyenletbe behelyettesítve a (4.4), (4.12) és (4.16) összefüggéseket, valamint a csomóponti elmozdulásvektorokat kiemelve az integráljel elé az elem teljes potenciális energiája

$$\Pi^e = \frac{1}{2} \mathbf{q}^{eT} \int_V \mathbf{B}^{eT} \mathbf{C}^e \mathbf{B}^e dV \mathbf{q}^e - \mathbf{q}^{eT} \int_V \mathbf{N}^{eT} \mathbf{q}^e dV - \mathbf{q}^{eT} \int_{A_p} \mathbf{N}^{eT} \mathbf{p}^e dA, \quad (4.18)$$

ahol

$$\mathbf{K}^e = \int_V \mathbf{B}^{eT} \mathbf{C}^e \mathbf{B}^e dV \quad (4.19)$$

az elem ún. merevségi mátrixa. Az elem merevségi mátrixa szimmetrikus, azaz $\mathbf{K}^e = \mathbf{K}^{eT}$. A merevségi mátrix tartalmazza az elemre vonatkozó geometriai és anyagi tulajdonságokat. A térfogati terhelésből származó csomóponti tehervektor

$$\mathbf{f}_q^e = \int_V \mathbf{N}^{eT} \mathbf{q}^e dV. \quad (4.20)$$

A felületi terhelésből származó csomóponti tehervektor

$$\mathbf{f}_p^e = \int_{A_p} \mathbf{N}^{eT} \mathbf{p}^e dA. \quad (4.21)$$

Az elem csomóponti tehervektora

$$\mathbf{f}^e = \mathbf{f}_q^e + \mathbf{f}_p^e. \quad (4.22)$$

A bevezetett jelöléseket felhasználva az elem teljes potenciális energiája

$$\Pi^e = \frac{1}{2} \mathbf{q}^{eT} \mathbf{K}^e \mathbf{q}^e - \mathbf{q}^{eT} \mathbf{f}^e. \quad (4.23)$$

A teljes potenciális energia minimuma elv (Lagrange-féle variációs elv) kizárólag csak az egész testre érvényes, az elemekre külön-külön nem. A teljes test teljes potenciális energiája egyenlő az elemek potenciális energiájának összegével, így

$$\Pi = \sum_{e=1}^Q \Pi^e = \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \mathbf{K} \mathbf{q} - \mathbf{q}^T \mathbf{f}, \quad (4.24)$$

ahol Q a végelemek száma, \mathbf{K} a globális merevségi mátrix a teljes testre, \mathbf{q} a teljes testre vonatkozó csomóponti elmozdulásvektor és \mathbf{f} a teljes testre vonatkozó csomóponti tehervektor.

A Lagrange-féle variációs elv értelmében a teljes potenciális energia első variációja zérus, azaz $\delta\Pi = 0$, így a (4.24) egyenletre alkalmazva

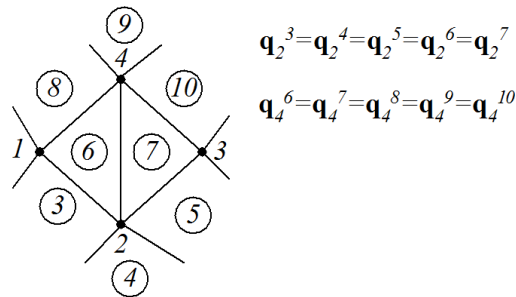
$$\delta\Pi = \delta\left(\frac{1}{2} \mathbf{q}^T \mathbf{K} \mathbf{q} - \mathbf{q}^T \mathbf{f}\right) = \delta\mathbf{q}^T (\mathbf{K} \mathbf{q} - \mathbf{f}) = 0. \quad (4.25)$$

A (4.25) összefüggésből adódik, hogy

$$\mathbf{K} \mathbf{q} = \mathbf{f}. \quad (4.26)$$

Lineáris analízis esetén a (4.26) egyenlet a megoldandó végelemek egyensúlyi inhomogén lineáris algebrai egyenletrendszer.

Megjegyezzük, hogy figyelembe kell venni azt, hogy egy csomópont több elemhez is tartozik. Ezen csomópontok elmozdulásvektora minden hozzátartozó elemre természetesen ugyanaz (4.2. ábra). Ez a tény jelentősen lecsökkenti a globális egyenletrendszer méretét.



4.2. ábra Szomszédos elemek közös csomópontjai

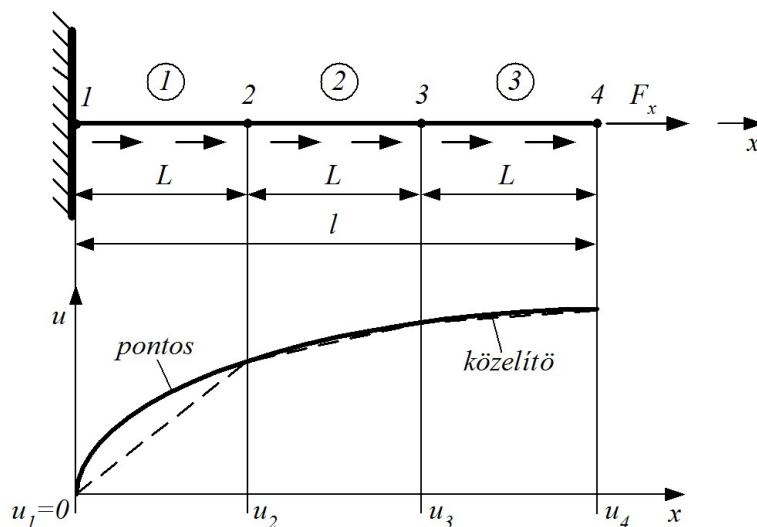
Megjegyezzük továbbá, hogy a kinematikai peremfeltételeket is figyelembe kell venni, azaz a csomóponti elmozdulásvektor tartalmazhat zérus komponenseket. Ez a tény szintén csökkenti a globális egyenletrendszer méretét (sor- és oszloptörlés).

4.2. Húzott-nyomott rúdelem

A húzott-nyomott rúdelem az egyike a legegyszerűbb szerkezeti elemeknek. Ez egy olyan rúd, amely csak rúdírányú terhelést vesz fel, így csak rúdírányban alakváltozik. A rúd keresztmetszete tetszőleges lehet, de rúdként csak akkor értelmezhetjük, ha a keresztmetszet méretei jóval kisebbek a rúd hosszánál. Az ilyen tulajdonságú elemet hívjuk húzott-nyomott rúdelemnek.

A vizsgált tartományt egymáshoz kapcsolódó, kis résztartományokra bontjuk gondolatban. Az elmozdulásmezőt ezeken a résztartományokon egymástól külön-külön közelítjük. Ezeket a résztartományokat nevezzük végelemeknek. A résztartományok (elemek) csomópontokban kapcsolódnak egymáshoz.

Tekintsük ezúttal is a korábban (2.9. ábra) már vizsgált feladatot. Itt a tartományt három egyenlő résztartományra bontjuk (4.3. ábra), azaz legyen $l = 3L$. Figyelembe kell vennünk, hogy néhány elem közös csomóponttal rendelkezik, így gondoskodnunk kell azok illesztéséről. Az illesztés értelmében $u_2^1 = u_2^2$, itt az alsó index jelöli a csomóponti sorszámot, míg a felső index jelöli a végelem sorszámot.



4.3. ábra A rúd végelem modellje és a lokális közelítés

A közelítő próbafüggvény felépíthető a csomópontokhoz rendelt N_i ($i = 1,2,3,4$) alakfüggvények lineáris kombinációjaként, azaz

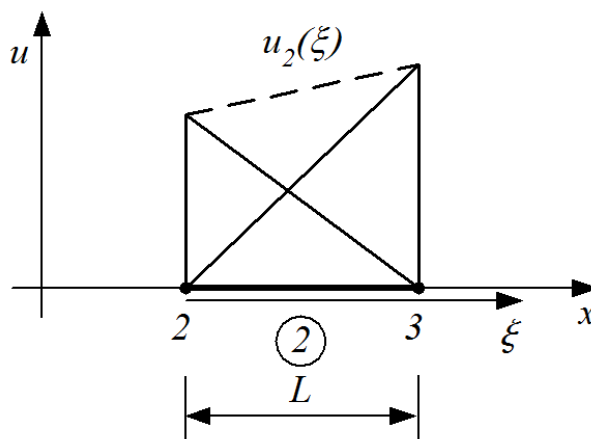
$$u^*(x) = u(x) = \sum_{i=1}^4 N_i(x) u_i. \quad (4.27)$$

A vizsgált feladatra a kinematikai peremfeltétel $u_1 = 0$.

A szerkezet teljes potenciális energiája a koncentrált erő munkájával együtt az egyes elemeken számolt potenciális energiák összegeként állítható elő, miszerint

$$\Pi = \sum_{e=1}^3 \Pi^e - F_x u_4. \quad (4.28)$$

Egy végeelemen az elmozdulás közelítése a 4.4. ábrán látható.



4.4. ábra Az elmozdulás közelítése a 2-es sorszámú elemen

Helyi koordináta rendszer segítségével az elemen számolt potenciális energia

$$\begin{aligned} \Pi^e(u_i, u_j) &= \frac{1}{2} \int_0^L AE \left(\frac{du^e}{d\xi} \right)^2 d\xi - \int_0^L u^e q_x d\xi = \\ &= \underbrace{\frac{1}{2} \int_0^L \left(\frac{du^e}{d\xi} \right) AE \left(\frac{du^e}{d\xi} \right) d\xi}_{U^e \text{ alakváltozási energia}} - \underbrace{\int_0^L u^e q_x d\xi}_{W \text{ megosztó erőrendszer munkája}}. \end{aligned} \quad (4.29)$$

Vizsgáljuk meg a 2-es sorszámú elem elmozdulásának közelítését. A ξ koordináta és az u_i csomóponti elmozdulás koordináták segítségével az elem mentén az elmozdulásmező felírható, azaz

$$u^2(\xi) = u_2 + \frac{u_3 - u_2}{L} \xi. \quad (4.30)$$

Kijelenthető, hogy elemenként az elmozdulás lineárisan változik. Emiatt az ilyen elemet lineáris elemnek is nevezzük. Alakítsuk át a (4.30) egyenletet a csomóponti elmozdulás koordináták szerint, ekkor kapjuk

$$u^2(\xi) = \left(1 - \frac{\xi}{L}\right) u_2 + \frac{\xi}{L} u_3 = \begin{bmatrix} \left(1 - \frac{\xi}{L}\right) & \frac{\xi}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = [u_2 \quad u_3] \begin{bmatrix} \left(1 - \frac{\xi}{L}\right) \\ \frac{\xi}{L} \end{bmatrix}. \quad (4.31)$$

A fentiek értelmében egy általános elem közelítése származtatható,

$$u^e(\xi) = \left(1 - \frac{\xi}{L}\right) u_i + \frac{\xi}{L} u_j = \begin{bmatrix} \left(1 - \frac{\xi}{L}\right) & \frac{\xi}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ u_j \end{bmatrix} = [u_i \quad u_j] \begin{bmatrix} \left(1 - \frac{\xi}{L}\right) \\ \frac{\xi}{L} \end{bmatrix}. \quad (4.32)$$

Ha az elmozdulásmezőt ismerjük, akkor az alakváltozás is számítható,

$$\varepsilon^e(\xi) = \frac{du^e}{d\xi} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ u_j \end{bmatrix} = [u_i \quad u_j] \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix} \quad (4.33)$$

amely a (4.32) egyenlet ξ szerinti deriváltjából adódik. Figyeljük meg, hogy a (4.33)-ban az alakváltozás állandó mértékű az elemen. Az egyszerű Hooke-törvény felhasználásával a rúderő is származtatható,

$$N^e(\xi) = A\sigma_x^e = AE\varepsilon^e(\xi) = AE \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ u_j \end{bmatrix} = [u_i \quad u_j] \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix} AE. \quad (4.34)$$

Egy elem alakváltozási energiája

$$\begin{aligned} U^e &= \frac{1}{2} \int_0^L \left(\frac{du^e}{d\xi}\right) AE \left(\frac{du^e}{d\xi}\right) d\xi = \frac{1}{2} \int_0^L [u_i \quad u_j] \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix} AE \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ u_j \end{bmatrix} d\xi = \\ &= \frac{1}{2} [u_i \quad u_j] \int_0^L \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix} AE \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix} d\xi \begin{bmatrix} u_i \\ u_j \end{bmatrix} = \frac{1}{2} [u_i \quad u_j] \int_0^L \begin{bmatrix} \frac{AE}{L^2} & -\frac{AE}{L^2} \\ -\frac{AE}{L^2} & \frac{AE}{L^2} \end{bmatrix} d\xi \begin{bmatrix} u_i \\ u_j \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (4.35)$$

Megjegyezzük, hogy

$$\int_0^L \frac{AE}{L^2} d\xi = \left[\frac{AE}{L^2} \xi \right]_0^L = \frac{AE}{L}. \quad (4.36)$$

Felhasználva (4.36)-ot és azt behelyettesítve (4.35)-be kapjuk, hogy

$$U^e = \frac{1}{2} [u_i \quad u_j] \begin{bmatrix} \frac{AE}{L} & -\frac{AE}{L} \\ -\frac{AE}{L} & \frac{AE}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ u_j \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \mathbf{q}^{eT} \mathbf{K}^e \mathbf{q}^e, \quad (4.37)$$

ahol \mathbf{q}^e az elem csomóponti elmozdulásvektora és \mathbf{K}^e az elem merevségi mátrixa.
Az elem hossza mentén a megoszló erőrendszer munkája (a (4.29) összefüggés utolsó tagja)

$$\int_0^L u^e q_x d\xi = [u_i \quad u_j] \int_0^L \begin{bmatrix} 1 - \frac{\xi}{L} \\ \frac{\xi}{L} \end{bmatrix} q_x d\xi. \quad (4.38)$$

Megjegyezzük, hogy

$$\begin{aligned} \int_0^L \left(1 - \frac{\xi}{L}\right) q_x d\xi &= \left[\left(\xi - \frac{\xi^2}{2L}\right) q_x \right]_0^L = \left(L - \frac{L^2}{2L}\right) q_x = \frac{q_x L}{2} \\ \int_0^L \frac{\xi}{L} q_x d\xi &= \left[\frac{\xi^2}{2L} q_x \right]_0^L = \frac{q_x L}{2}. \end{aligned} \quad (4.39)$$

Felhasználva (4.39)-et és azt behelyettesítve 4.38-ba kapjuk, hogy

$$\int_0^L u^e q_x d\xi = [u_i \quad u_j] \begin{bmatrix} \frac{q_x L}{2} \\ \frac{q_x L}{2} \end{bmatrix} = \mathbf{q}^{eT} \mathbf{f}_q^e, \quad (4.40)$$

ahol \mathbf{f}_q^e az elem tehervektora. Felhasználva (4.37) és (4.40) egyenleteket az elem potenciális energiája

$$\Pi^e = \frac{1}{2} \mathbf{q}^{eT} \mathbf{K}^e \mathbf{q}^e - \mathbf{q}^{eT} \mathbf{f}_q^e, \quad (4.41)$$

vagy

$$\Pi^e = \frac{1}{2} [u_i \quad u_j] \begin{bmatrix} \frac{AE}{L} & -\frac{AE}{L} \\ -\frac{AE}{L} & \frac{AE}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ u_j \end{bmatrix} - [u_i \quad u_j] \begin{bmatrix} \frac{q_x L}{2} \\ \frac{q_x L}{2} \end{bmatrix}. \quad (4.42)$$

A szerkezet teljes potenciális energiája

$$\Pi = \sum_{e=1}^3 \Pi^e - F_x u_4 = \Pi^1 + \Pi^2 + \Pi^3 - F_x u_4. \quad (4.43)$$

Az elemek potenciális energiája:

Elem sorszám	Potenciális energia Π^e
1	$\frac{1}{2} [u_1 \quad u_2] \begin{bmatrix} \frac{AE}{L} & -\frac{AE}{L} \\ -\frac{AE}{L} & \frac{AE}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} - [u_1 \quad u_2] \begin{bmatrix} \frac{q_x L}{2} \\ \frac{q_x L}{2} \end{bmatrix}$
2	$\frac{1}{2} [u_2 \quad u_3] \begin{bmatrix} \frac{AE}{L} & -\frac{AE}{L} \\ -\frac{AE}{L} & \frac{AE}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} - [u_2 \quad u_3] \begin{bmatrix} \frac{q_x L}{2} \\ \frac{q_x L}{2} \end{bmatrix}$
3	$\frac{1}{2} [u_3 \quad u_4] \begin{bmatrix} \frac{AE}{L} & -\frac{AE}{L} \\ -\frac{AE}{L} & \frac{AE}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} - [u_3 \quad u_4] \begin{bmatrix} \frac{q_x L}{2} \\ \frac{q_x L}{2} \end{bmatrix}$

Mivel $u_2^1 = u_2^2$ és $u_3^2 = u_3^3$ a szerkezet teljes potenciális energiája

$$\Pi(u_1, u_2, u_3, u_4) = \frac{1}{2} [u_1 \quad u_2 \quad u_3 \quad u_4] \begin{bmatrix} \frac{AE}{L} & -\frac{AE}{L} & 0 & 0 \\ -\frac{AE}{L} & \frac{2AE}{L} & -\frac{AE}{L} & 0 \\ 0 & -\frac{AE}{L} & \frac{2AE}{L} & -\frac{AE}{L} \\ 0 & 0 & -\frac{AE}{L} & \frac{AE}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} - [u_1 \quad u_2 \quad u_3 \quad u_4] \begin{bmatrix} \frac{q_x L}{2} \\ \frac{q_x L}{2} \\ \frac{q_x L}{2} \\ \frac{q_x L}{2} + F_x \end{bmatrix}. \quad (4.44)$$

Figyelembe véve a kinematikai peremfeltételt ($u_1 = 0$),

$$\Pi(u_1, u_2, u_3, u_4) = \frac{1}{2} [0 \quad u_2 \quad u_3 \quad u_4] \begin{bmatrix} \frac{AE}{L} & -\frac{AE}{L} & 0 & 0 \\ -\frac{AE}{L} & \frac{2AE}{L} & -\frac{AE}{L} & 0 \\ 0 & -\frac{AE}{L} & \frac{2AE}{L} & -\frac{AE}{L} \\ 0 & 0 & -\frac{AE}{L} & \frac{AE}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} - [0 \quad u_2 \quad u_3 \quad u_4] \begin{bmatrix} \frac{q_x L}{2} \\ \frac{q_x L}{2} \\ \frac{q_x L}{2} \\ \frac{q_x L}{2} + F_x \end{bmatrix}. \quad (4.45)$$

Mivel $u_1 = 0$ a szerkezeti merevségi mátrix első sora és oszlopa törölhető, így

$$\begin{aligned} \Pi(u_2, u_3, u_4) = \frac{1}{2} [u_2 \quad u_3 \quad u_4] & \begin{bmatrix} \frac{2AE}{L} & -\frac{AE}{L} & 0 \\ -\frac{AE}{L} & \frac{2AE}{L} & -\frac{AE}{L} \\ 0 & -\frac{AE}{L} & \frac{AE}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} - \\ & - [u_2 \quad u_3 \quad u_4] \begin{bmatrix} q_x L \\ q_x L \\ \frac{q_x L}{2} + F_x \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (4.46)$$

A (4.46) egyenlet tömörebb formában is felírható,

$$\Pi(\mathbf{q}) = \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \mathbf{K} \mathbf{q} - \mathbf{q}^T \mathbf{f}_q, \quad (4.47)$$

ahol \mathbf{K} a szerkezeti merevségi mátrix, \mathbf{q} a szerkezeti csomóponti elmozdulásvektor és \mathbf{f}_q a szerkezeti tehervektor.

A szerkezet teljes potenciális energiája a csomóponti elmozdulás paraméterek háromváltozós függvénye. A teljes potenciális energia minimum elv értelmében ennek a háromváltozós függvénynek keressük a minimumát, így

$$\min \Pi(u_2, u_3, u_4) \rightarrow \frac{\partial \Pi(u_2, u_3, u_4)}{\partial u_2} = 0; \quad \frac{\partial \Pi(u_2, u_3, u_4)}{\partial u_3} = 0; \quad \frac{\partial \Pi(u_2, u_3, u_4)}{\partial u_4} = 0, \quad (4.48)$$

vagy

$$\min \Pi(\mathbf{q}) \rightarrow \frac{\partial \Pi(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{0}. \quad (4.49)$$

$$\frac{\partial \Pi(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{0} = \frac{\partial \left(\frac{1}{2} \mathbf{q}^T \mathbf{K} \mathbf{q} - \mathbf{q}^T \mathbf{f}_q \right)}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{K} \mathbf{q} - \mathbf{f}_q. \quad (4.50)$$

A (4.50)-et átrendezve a következő lineáris algebrai egyenletrendszert kapjuk

$$\mathbf{K} \mathbf{q} = \mathbf{f}_q. \quad (4.51)$$

A (4.51) részletesen

$$\begin{bmatrix} \frac{2AE}{L} & -\frac{AE}{L} & 0 \\ -\frac{AE}{L} & \frac{2AE}{L} & -\frac{AE}{L} \\ 0 & -\frac{AE}{L} & \frac{AE}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_x L \\ q_x L \\ \frac{q_x L}{2} + F_x \end{bmatrix}. \quad (4.52)$$

A (4.52) egyenlet három egyenletet és három ismeretlent tartalmaz, így az megoldható a csomóponti elmozdulás paraméterekre. A egyenletrendszert megoldva kapjuk

$$\left. \begin{aligned} \frac{2AE}{L}u_2 - \frac{AE}{L}u_3 &= q_x L \\ -\frac{AE}{L}u_2 + \frac{2AE}{L}u_3 - \frac{AE}{L}u_4 &= q_x L \\ -\frac{AE}{L}u_3 + \frac{AE}{L}u_4 &= \frac{q_x L}{2} + F_x \end{aligned} \right\} \begin{aligned} u_2 &= \frac{5q_x L^2}{2AE} + \frac{F_x L}{AE} \\ u_3 &= \frac{4q_x L^2}{AE} + \frac{2F_x L}{AE} \\ u_4 &= \frac{9q_x L^2}{2AE} + \frac{3F_x L}{AE} \end{aligned} \quad (4.53)$$

Az elmozdulás paraméterek ismeretében a többi mennyiség (pl. fajlagos megnyúlás, normálerő) is számítható (4.33) és (4.34) alapján.

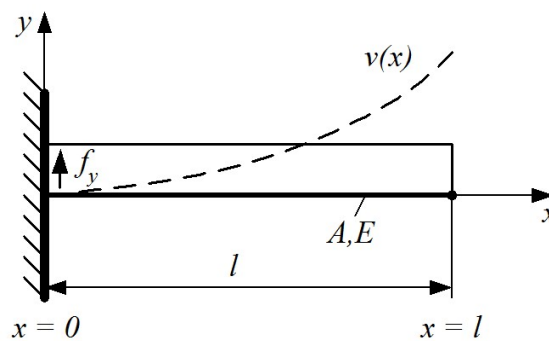
4.3. Hajlított-nyírt rúdelem

A hajlított-nyírt rúdelem egy egyszerű és gyakran alkalmazott szerkezeti elem. Ez szintén egy egyenes rúd tetszőleges keresztmetszettel, de kizárólag csak a rúd tengelyére merőlegesen képes alakváltozni. Az ilyen elemet nevezzük hajlított-nyírt elemnek. Rúdszerkezetekben a rudak legtöbbször hegesztéssel vannak egymáshoz erősítve, így a rudak között átadódik mind az erő, mind pedig a nyomaték. Kétfajta rúdmelet létezik a hajlított-nyírt rúdelemre, az egyik az Euler-Bernoulli-féle rúdmelet, míg a másik a Timoshenko-féle rúdmelet. A két elmélet abban különbözik, hogy míg a Timoshenko-féle elmélet figyelembe veszi a nyírásból származó alakváltozást, addig az Euler-Bernoulli-féle elmélet azt elhanyagolja. Ezáltal az Euler-Bernoulli-féle rúdmelet jóval egyszerűbb. Jelen jegyzet kizárólag az Euler-Bernoulli-féle rúdmeletet tárgyalja részletesen, valamint kizárólag síkbeli rúdszerkezeteket vizsgál.

Síkbeli rúdszerkezetek vizsgálatánál az alábbi feltételezésekkel élünk:

- A rúd középvonala egyenes (semleges szál).
- A rúd lehajlásának mértéke kisebb, mint a rúd bármelyik jellemző mérete.
- A rúd anyaga lineárisan rugalmas, izotróp és homogén.
- A keresztmetszet tengelyei y és z .

A hajlított-nyírt rudak feladata a 4.5. ábrán látható.



4.5. ábra Hajlított-nyírt rúdszerkezet

4.3.1. Hajlított-nyírt rúdszerkezetekre vonatkozó egyenletrendszer és peremfeltételek

Jól ismert, hogy hajlítás esetén a feszültség

$$\sigma_x = \frac{M_{hz}}{I_z} y, \quad (4.54)$$

ahol M_{hz} a hajlítónyomtéka, I_z a keresztmetszet másodrendű nyomatéka és y a semleges száltól való távolság. A középvonal elmozdulásvektora

$$\mathbf{u} = v\mathbf{j} \rightarrow v(x), \quad (4.54)$$

kis alakváltozást feltételezve

$$\frac{dv}{dx} \ll 1. \quad (4.55)$$

Az Euler-Bernoulli-féle rúdelmélet értelmében $\gamma_{xy} = 0$ és $\varepsilon_y = \varepsilon_z = 0$.

A keresztmetszet szögelfordulása

$$\varphi(x) = -\frac{dv(x)}{dx}. \quad (4.56)$$

A semleges szál κ görbülete

$$\kappa(x) = -\frac{d^2v(x)}{dx^2} = \frac{d\varphi(x)}{dx}. \quad (4.57)$$

A fajlagos megnyúlás

$$\varepsilon_x(x) = \kappa(x)y. \quad (4.58)$$

A Hooke-törvény értelmében

$$\sigma_x(x) = E\varepsilon_x(x). \quad (4.59)$$

A (4.57), a (4.58) és a (4.59) egyenleteket felhasználva a (4.54) egyenlet

$$\frac{M_{hz}(x)}{I_z}y = E\kappa(x)y \rightarrow M_{hz}(x) = I_zE\kappa(x) = -I_zE\frac{d^2v(x)}{dx^2}. \quad (4.60)$$

Az Euler-Bernoulli-féle rúdelmélet értelmében az egyensúlyi egyenlet

$$\frac{d^2M_{hz}(x)}{dx^2} + f_y(x) = 0. \quad (4.61)$$

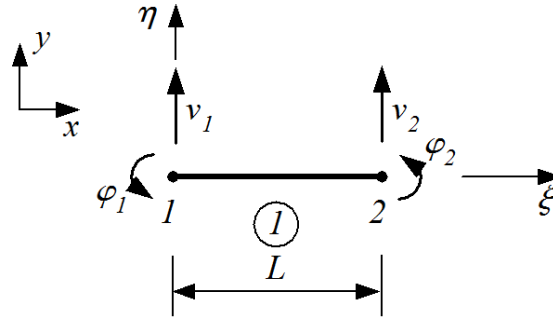
A kinematikai peremfeltételek elmozdulásra és szögelfordulásra adhatók meg,

$$\begin{aligned} &v(0), \\ &v(l), \\ &\frac{dv(0)}{dx} = -\varphi(0), \\ &\frac{dv(l)}{dx} = -\varphi(l). \end{aligned} \quad (4.62)$$

A dinamikai peremfeltételek pedig hajlítónyomatéokra és nyíróerőre adhatók meg,

$$\begin{aligned} \frac{d^2 v(0)}{dx^2} &= -\frac{M_{hz}(0)}{I_z E}, & \frac{d^3 v(0)}{dx^3} &= \frac{T_y(0)}{I_z E}, \\ \frac{d^2 v(l)}{dx^2} &= -\frac{M_{hz}(l)}{I_z E}, & \frac{d^3 v(l)}{dx^3} &= \frac{T_y(l)}{I_z E}. \end{aligned} \quad (4.63)$$

Helyi koordináta-rendszerben a síkbeli hajlított-nyírt rúdelemeknek (4.6. ábra) egy csomópontban két szabadságfoka van. A rúd le tud hajlani y irányban és elfordulni $x - y$ síkban. Ennek megfelelően minden hajlított-nyírt rúdelemnek összesen négy szabadságfoka van.



4.6. ábra Hajlított-nyírt rúdelem a helyi koordináta-rendszerben

Hasonlóan a húzott-nyomott rúdszerekezetekhez a végeselemes egyenletek felírásához alakfüggvényeket használunk a változók közelítéséhez. Mivel négy szabadságfoka van egy hajlított-nyírt rúdelemnek így négy alakfüggvényre van szükségünk. Ahhoz, hogy a helyi koordináta-rendszerben származtathassuk a négy alakfüggvényt, azt feltételezzük, hogy az elem elmozdulása négy ismeretlent tartalmazó harmadfokú polinommal írható fel a ξ függvényében. Az elmozdulásmező közelítése így

$$v^e(\xi) = C_0 + C_1 \xi + C_2 \xi^2 + C_3 \xi^3. \quad (4.64)$$

Harmadfokú polinomot választottunk, így négy ismeretlent tartalmaz a függvény, amely kapcsolatba hozható a rúdelem négy szabadságfokával.

Az elmozdulásmező

$$\mathbf{u}^e(\xi) = [v^e(\xi)]. \quad (4.65)$$

A csomópontokat jelölje i és j . A csomóponti elmozdulásvektor

$$\mathbf{q}^e = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_i^e \\ \mathbf{q}_j^e \end{bmatrix}, \quad (4.66)$$

ahol

$$\mathbf{q}_i^e = \begin{bmatrix} v_i \\ \varphi_i \end{bmatrix}^e, \quad \mathbf{q}_j^e = \begin{bmatrix} v_j \\ \varphi_j \end{bmatrix}^e. \quad (4.67)$$

A polinomok együtthatóinak kifejezése a csomóponti paraméterekkel,

$$\begin{aligned}
v^e(\xi = 0) &= v_i^e = C_0 \\
\varphi^e(\xi = 0) &= -\frac{dv^e(\xi = 0)}{d\xi} = \varphi_i^e = -C_1 \\
v^e(\xi = L) &= v_j^e = C_0 + C_1L + C_2L^2 + C_3L^3 \\
\varphi^e(\xi = L) &= -\frac{dv^e(\xi = L)}{d\xi} = \varphi_j^e = -C_1 - 2C_2L - 3C_3L^2
\end{aligned} \tag{4.68}$$

Az elem elmozdulása felírható az alakfüggvényekkel

$$v^e(\xi) = N_1^e(\xi)v_i^e + N_2^e(\xi)\varphi_i^e + N_3^e(\xi)v_j^e + N_4^e(\xi)\varphi_j^e, \tag{4.69}$$

amely mátrixos írásmódban is felírható

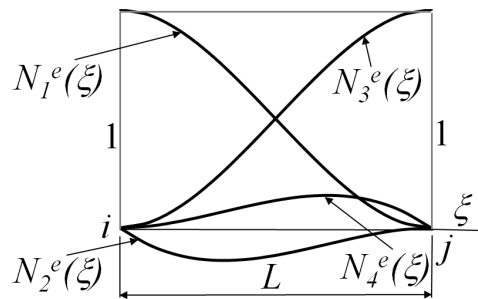
$$[v^e(\xi)] = [N_1^e(\xi) \quad N_2^e(\xi) \quad N_3^e(\xi) \quad N_4^e(\xi)] \begin{bmatrix} v_i^e \\ \varphi_i^e \\ v_j^e \\ \varphi_j^e \end{bmatrix} \tag{4.70}$$

és

$$\mathbf{u}^e(\xi) = \mathbf{N}^e(\xi)\mathbf{q}^e. \tag{4.71}$$

Az alakfüggvények (4.7. ábra) a következő Hermite polinomok,

$$\begin{aligned}
N_1^e(\xi) &= 1 - 3\left(\frac{\xi}{L}\right)^2 + 2\left(\frac{\xi}{L}\right)^3 \\
N_2^e(\xi) &= L\left[-\frac{\xi}{L} + 2\left(\frac{\xi}{L}\right)^2 - \left(\frac{\xi}{L}\right)^3\right] \\
N_3^e(\xi) &= 3\left(\frac{\xi}{L}\right)^2 - 2\left(\frac{\xi}{L}\right)^3 \\
N_4^e(\xi) &= L\left[\left(\frac{\xi}{L}\right)^2 - \left(\frac{\xi}{L}\right)^3\right]
\end{aligned} \tag{4.72}$$



4.7. ábra Az alakfüggvények

ahol

$$\begin{aligned}
N_1^e(\xi = 0) &= 1 \\
N_1^e(\xi = L) &= 0 \\
N_2^e(\xi = 0) &= 0 \\
N_2^e(\xi = L) &= 0 \\
N_3^e(\xi = 0) &= 0 \\
N_3^e(\xi = L) &= 1 \\
N_4^e(\xi = 0) &= 0 \\
N_4^e(\xi = L) &= 0
\end{aligned} \tag{4.73}$$

Az elem elmozdulásának ismeretében a kapcsolódó alakváltozás is számítható,

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\varepsilon}^e(\xi) &= [\boldsymbol{\kappa}^e(\xi)] = \left[-\frac{d^2 v^e(\xi)}{d\xi^2} \right] = \underbrace{\left[-\frac{d^2}{d\xi^2} \right]}_{\mathbf{D}^e} [v^e(\xi)] = \\
&= \underbrace{\left[-\frac{d^2 N_1^e(\xi)}{d\xi^2} \quad -\frac{d^2 N_2^e(\xi)}{d\xi^2} \quad -\frac{d^2 N_3^e(\xi)}{d\xi^2} \quad -\frac{d^2 N_4^e(\xi)}{d\xi^2} \right]}_{\mathbf{B}^e(\xi)} \begin{bmatrix} v_i^e \\ \varphi_i^e \\ v_j^e \\ \varphi_j^e \end{bmatrix},
\end{aligned} \tag{4.74}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}^e(\xi) = \mathbf{D}^e \mathbf{N}^e(\xi) \mathbf{q}^e = \mathbf{B}^e(\xi) \mathbf{q}^e, \tag{4.75}$$

ahol \mathbf{D}^e a differenciál operátorok mátrixa, \mathbf{B}^e az alakváltozás-csomóponti elmozdulás mátrix. A (4.60) egyenlet értelmében az elem alakváltozás ismeretében a feszültség is meghatározható

$$[M_{hz}(\xi)] = \left[-I_\zeta E \frac{d^2 v^e(\xi)}{d\xi^2} \right] = \underbrace{[I_\zeta E]}_{\mathbf{C}^e} [\boldsymbol{\kappa}^e(\xi)], \tag{4.76}$$

$$\boldsymbol{\sigma}^e(\xi) = \mathbf{C}^e \mathbf{B}^e(\xi) \mathbf{q}^e, \tag{4.77}$$

ahol \mathbf{C}^e az anyagállandók mátrixa.

A hajlított-nyírt rúdelem merevségi mátrixa

$$\mathbf{K}^e = \int_L \mathbf{B}^{eT}(\xi) \mathbf{C}^e \mathbf{B}^e(\xi) d\xi, \tag{4.78}$$

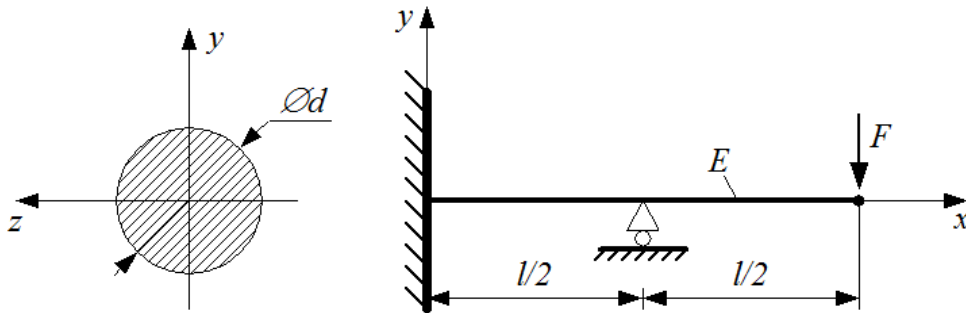
$$\mathbf{K}^e = \frac{I_\zeta E}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{ii} & \mathbf{K}_{ij} \\ \mathbf{K}_{ji} & \mathbf{K}_{jj} \end{bmatrix}^e. \tag{4.79}$$

Egy elem potenciális energiája

$$\Pi^e = \frac{1}{2} [\mathbf{q}_i^{eT} \quad \mathbf{q}_j^{eT}] \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{ii} & \mathbf{K}_{ij} \\ \mathbf{K}_{ji} & \mathbf{K}_{jj} \end{bmatrix}^e \begin{bmatrix} \mathbf{q}_i^e \\ \mathbf{q}_j^e \end{bmatrix} - [\mathbf{q}_i^{eT} \quad \mathbf{q}_j^{eT}] \begin{bmatrix} \mathbf{f}_i^e \\ \mathbf{f}_j^e \end{bmatrix}. \tag{4.80}$$

6. példa

Tekintsük az alábbi statikailag határozatlan tartót (4.8. ábra). Határozzuk meg az elmozdulásokat!



4.8. ábra Statikailag határozatlan síkbeli tartó koncentrált erővel terhelve

Adatok:

$$l = 1000\text{mm}$$

$$d = 30\text{mm}$$

$$E = 69000\text{MPa}$$

$$F = 500\text{N}$$

$$v_i = ? (i = 1, 2, 3)$$

$$\varphi_i = ? (i = 1, 2, 3)$$

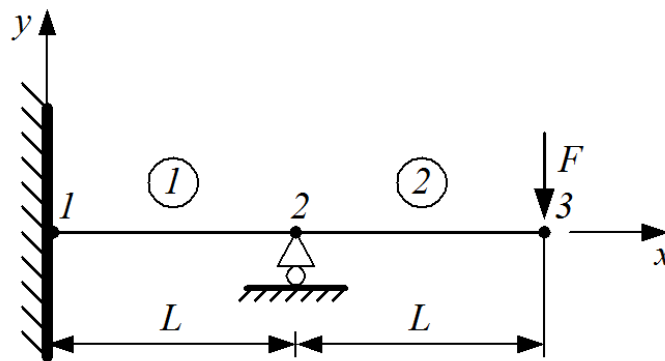
$$F_{1y} = ?$$

$$M_1 = ?$$

$$F_{2y} = ?$$

A megoldást az Euler-Bernoulli-féle rúdelméletre alapozva keressük. Azt feltételezzük, hogy a rúd keresztmetszetei merevek és merőlegesek maradnak az alakváltozott középvonalra.

A tartót gondolatban két résztartományra (végeelem) bontjuk. A tartó végeelem modellje a 4.9. ábrán látható.



4.9. ábra A tartó végeelem modellje

A csomóponti elmozdulásvektor

$$\mathbf{q}_i = \begin{bmatrix} v_i \\ \varphi_i \end{bmatrix}, \quad i = 1, 2, 3.$$

Először fel kell írunk a két elem merevségi mátrixát. A (4.79) egyenletet felhasználva az elemek merevségi mátrixa

$$\mathbf{K}^1 = \mathbf{K}^2 = \frac{I_z E}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix},$$

ahol

$$\mathbf{K}^1 = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11}^1 & \mathbf{K}_{12}^1 \\ \mathbf{K}_{21}^1 & \mathbf{K}_{22}^1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K}^2 = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{22}^2 & \mathbf{K}_{23}^2 \\ \mathbf{K}_{32}^2 & \mathbf{K}_{33}^2 \end{bmatrix}.$$

A csomóponti tehervektorok

$$\mathbf{f}^1 = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_1^1 \\ \mathbf{f}_2^1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}^2 = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_2^2 \\ \mathbf{f}_3^2 \end{bmatrix}.$$

A lineáris algebrai egyenletrendszer $\mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{f}$ felépíthető,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11}^1 & \mathbf{K}_{12}^1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{K}_{21}^1 & \mathbf{K}_{22}^1 + \mathbf{K}_{22}^2 & \mathbf{K}_{23}^2 \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_{32}^2 & \mathbf{K}_{33}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_1 \\ \mathbf{q}_2 \\ \mathbf{q}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_1^1 \\ \mathbf{f}_2^1 + \mathbf{f}_2^2 \\ \mathbf{f}_3^2 \end{bmatrix},$$

amely részletesen

$$\frac{I_z E}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L & 0 & 0 \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 & 0 & 0 \\ -12 & -6L & 24 & 0 & -12 & 6L \\ 6L & 2L^2 & 0 & 8L^2 & -6L & 2L^2 \\ 0 & 0 & -12 & -6L & 12 & -6L \\ 0 & 0 & 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ \varphi_1 \\ v_2 \\ \varphi_2 \\ v_3 \\ \varphi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{1y} \\ M_1 \\ F_{2y} \\ 0 \\ -F \\ 0 \end{bmatrix}.$$

A reakcióerők F_{1y}, M_1 és F_{2y} az ismeretlenek. A megtámasztásokat figyelembe véve a kinematikai peremfeltétel $v_1 = 0, \varphi_1 = 0$ és $v_2 = 0$.

A kinematikai peremfeltételeket figyelembe véve a lineáris algebrai egyenletrendszer jelentősen egyszerűsödik, aminek eredményeképpen kapjuk, hogy

$$\frac{I_z E}{L^3} \begin{bmatrix} 8L^2 & -6L & 2L^2 \\ -6L & 12 & -6L \\ 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_2 \\ v_3 \\ \varphi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -F \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Az egyenletrendszer három egyenletet és három ismeretlent tartalmaz,

$$\begin{aligned} 8L^2 \varphi_2 - 6Lv_3 + 2L^2 \varphi_3 &= 0 \\ \frac{I_z E}{L^3} (-6L \varphi_2 + 12v_3 - 6L \varphi_3) &= -F \\ 2L^2 \varphi_2 - 6Lv_3 + 4L^2 \varphi_3 &= 0. \end{aligned}$$

Az egyenletrendszert megoldva kapjuk

$$\begin{aligned}\varphi_2 &= -\frac{FL^2}{4I_z E} = -0,01139rad \\ v_3 &= -\frac{7FL^3}{12I_z E} = -13,289mm \\ \varphi_3 &= -\frac{3FL^2}{4I_z E} = -0,034171rad\end{aligned}$$

Végül a reakcióerőket is megkaphatjuk, amennyiben visszahelyettesítjük az elmozdulás koordinátákat a szerkezeti egyenletbe,

$$\begin{aligned}F_{1y} &= -750N \\ M_1 &= -125000Nmm \\ F_{2y} &= 1250N\end{aligned}$$

Általános feladatok esetén szükséges lehet koordináta transzformációra, azaz transzformációra a helyi és a globális koordináta-rendszer között. Ez a transzformáció akkor alkalmazandó, amikor egy rúdszerkezetben két vagy több rúdnak az orientációja más. Ezeket a rúdszerkezeteket nevezzük keretszerkezetnek, ilyen pl. a rácsos szerkezet is. Jelen jegyzet a koordináta transzformációt nem részletezi.

5. LINEÁRIS RUGALMASSÁGTAN KÉTDIMENZIÓS FELADATAI

Háromdimenziós feladatok analitikus számítása meglehetősen nehézkes. Sok esetben az adott háromdimenziós feladat kétdimenziós feladatként is modellezhető. Bizonyos feltételek mellett az alakváltozási- és feszültségi állapot egyszerűsíthető, így számos térbeli szerkezeti probléma kétdimenziós feladattá redukálható [3,5,6,10,13]. A következőkben részletesen a lineáris rugalmasságtan kétdimenziós feladataival fogunk foglalkozni.

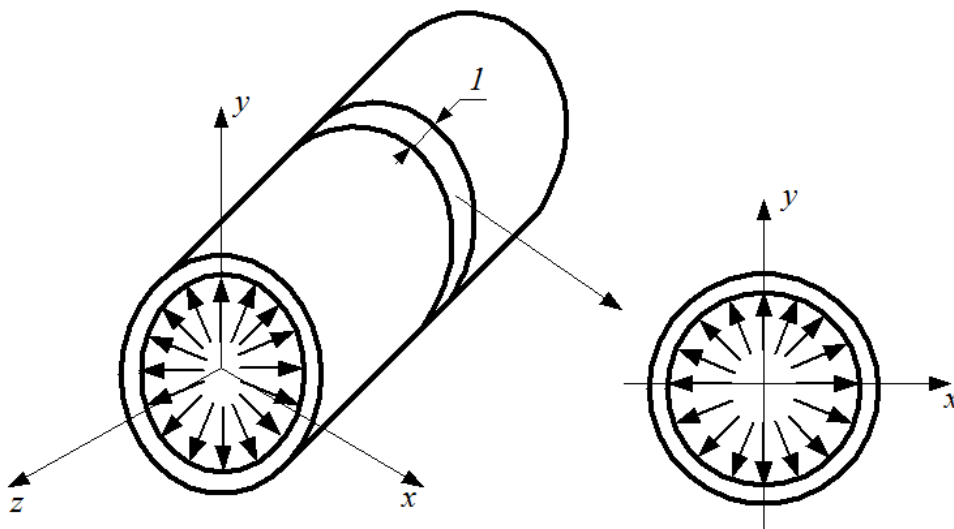
5.1. Síkalakváltozási állapot

Tekintsünk egy végtelen hosszú prizmatikus testet (5.1. ábra). Amennyiben a testre ható terhelések, illetve az önsúlyból származó erők függetlenek a z koordinátától, akkor az \mathbf{u} elmozdulásmező a szerkezetre vonatkozóan a következő formában írható fel,

$$\mathbf{u} = u\mathbf{i} + v\mathbf{j}, \quad (5.1)$$

ahol

$$u = u(x, y), \quad v = v(x, y), \quad w \equiv 0. \quad (5.2)$$



5.1. ábra Síkalakváltozási feltételek

Síkalakváltozásról akkor beszélünk, ha vizsgált testnek van egy olyan jellemző síkja, amelyre minden sík alakváltozása azonos, továbbá a síkok távolsága sem változik. Felhasználva az elmozdulás és alakváltozás közötti kapcsolatot, az alakváltozási tenzor

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & 0 \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (5.3)$$

ahol

$$\begin{aligned}
\varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x}, \\
\varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y}, \\
\varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z} \equiv 0, \\
\gamma_{xy} = \gamma_{yx} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \\
\gamma_{yz} = \gamma_{zy} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \equiv 0, \\
\gamma_{zx} = \gamma_{xz} &= \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial z} \equiv 0.
\end{aligned} \tag{5.4}$$

Az alakváltozás és a feszültség közötti kapcsolat (Hooke-törvény) révén a feszültségi tenzor

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{yx} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{bmatrix}, \tag{5.5}$$

ahol

$$\begin{aligned}
\sigma_x &= 2G \left[\varepsilon_x + \frac{\nu}{1-2\nu} (\varepsilon_x + \varepsilon_y) \right], \\
\sigma_y &= 2G \left[\varepsilon_y + \frac{\nu}{1-2\nu} (\varepsilon_x + \varepsilon_y) \right], \\
\sigma_z &= 2G \left[\frac{\nu}{1-2\nu} (\varepsilon_x + \varepsilon_y) \right] = \nu(\sigma_x + \sigma_y), \\
\tau_{xy} &= \tau_{yx} = G\gamma_{xy}, \\
\tau_{yz} &= \tau_{zy} = G\gamma_{yz} \equiv 0, \\
\tau_{zx} &= \tau_{xz} = G\gamma_{zx} \equiv 0.
\end{aligned} \tag{5.6}$$

Látható, hogy a σ_z könnyedén kifejezhető a σ_x és σ_y segítségével. Síkalakváltozás esetén az egyensúlyi egyenletek a következők,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + q_x &= 0, \\
\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + q_y &= 0.
\end{aligned} \tag{5.7}$$

Így láthatjuk, hogy síkalakváltozási feladatok esetén 8 ismeretlenünk van ($u, v, \varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}, \sigma_x, \sigma_y$ és τ_{xy}), s azok meghatározására 8 egyenletünk. A kinematikai peremfeltétel

$$\mathbf{u} = \tilde{\mathbf{u}}, \quad \mathbf{r} \in A_u, \tag{5.8}$$

ahol $\tilde{\mathbf{u}}$ az előírt elmozdulásmező (megfогott peremen az $\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{0}$),

$$u = \tilde{u}, \quad v = \tilde{v}. \quad (5.9)$$

A dinamikai peremfeltétel

$$\mathbf{T} \cdot \mathbf{n} = \tilde{\mathbf{p}}, \quad \mathbf{r} \in A_p, \quad (5.10)$$

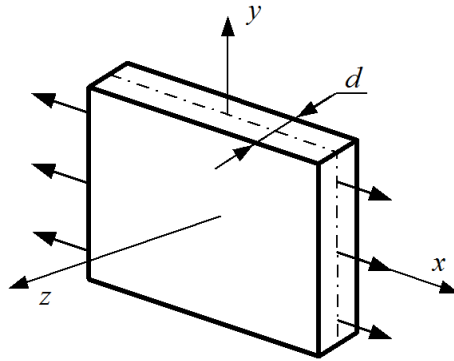
ahol $\tilde{\mathbf{p}}$ az előírt erővektor. Így az (5.10) egyenlet skalár egyenletei

$$\begin{aligned} \sigma_x n_x + \tau_{xy} n_y &= \tilde{p}_x, \\ \tau_{yx} n_x + \sigma_y n_y &= \tilde{p}_y. \end{aligned} \quad (5.11)$$

Az egyensúlyi egyenletek esetén azért nem tüntetjük fel a z irányú feszültséget, mert az alakváltozási energiában nem játszik szerepet, mivel az alakváltozási tenzorban a z irányú fajlagos megnyúlás zérus.

5.2. Általánosított síkfeszültségi állapot

Síkfeszültségi állapotot abban az esetben feltételezünk, amennyiben a vizsgált test egyik mérete lényegesen kisebb, mint a másik kettő és a terhelés is síkbeli. Ilyenkor értelmezhető egy ún. középsík is. A síkfeszültségi feladatot az 5.2. ábra szemlélteti.



5.2. ábra Síkfeszültségi feltételek

A probléma leírásához az $x - y$ síkot választjuk. A tartomány két síkkal, $z = \pm \frac{d}{2}$ van körülhatárolva, ahogy az az 5.2. ábrán látható. Mivel a feltételezés szerint a terhelés vastagság menti eredője a középsíkba esik, így azokon a síkokon a $\sigma_z = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$.

Síkfeszültségi állapot esetén a feszültségi tenzor

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{yx} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (5.12)$$

ahol

$$\sigma_x = \sigma_x(x, y), \quad \sigma_y = \sigma_y(x, y), \quad \sigma_z = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0. \quad (5.13)$$

Síkfeszültségi állapot értelmében az alakváltozási állapot a Hooke-törvény segítségével határozható meg, ahol az alakváltozási tenzor elemeit a következő módon kapjuk meg,

$$\begin{aligned}
\varepsilon_x &= \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y), \\
\varepsilon_y &= \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu\sigma_x), \\
\varepsilon_z &= -\frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y), \\
\gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G}, \\
\gamma_{yz} &= \frac{\tau_{yz}}{G} \equiv 0, \\
\gamma_{zx} &= \frac{\tau_{zx}}{G} \equiv 0.
\end{aligned} \tag{5.14}$$

Figyelembe véve az (5.14) összefüggéseket az alakváltozási tenzor

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & 0 \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{bmatrix}. \tag{5.15}$$

Az alakváltozás és a középfelület elmozdulása közötti kapcsolat

$$\begin{aligned}
\varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x}, \\
\varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y}, \\
\gamma_{xy} = \gamma_{yx} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}.
\end{aligned} \tag{5.16}$$

Általánosított síkfeszültség esetén az egyensúlyi egyenletek a következők,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + q_x &= 0, \\
\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + q_y &= 0.
\end{aligned} \tag{5.17}$$

Így láthatjuk, hogy síkalakváltozási feladatok esetén 8 ismeretlenünk van ($u, v, \varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}, \sigma_x, \sigma_y$ és τ_{xy}), s azok meghatározására 8 egyenletünk.

A kinematikai peremfeltétel

$$\mathbf{u} = \tilde{\mathbf{u}}, \quad \mathbf{r} \in A_u, \tag{5.18}$$

ahol $\tilde{\mathbf{u}}$ az előírt elmozdulásmező (megfогott peremen az $\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{0}$),

$$u = \tilde{u}, \quad v = \tilde{v}. \tag{5.19}$$

A dinamikai peremfeltétel

$$\mathbf{T} \cdot \mathbf{n} = \tilde{\mathbf{p}}, \quad \mathbf{r} \in A_p, \quad (5.20)$$

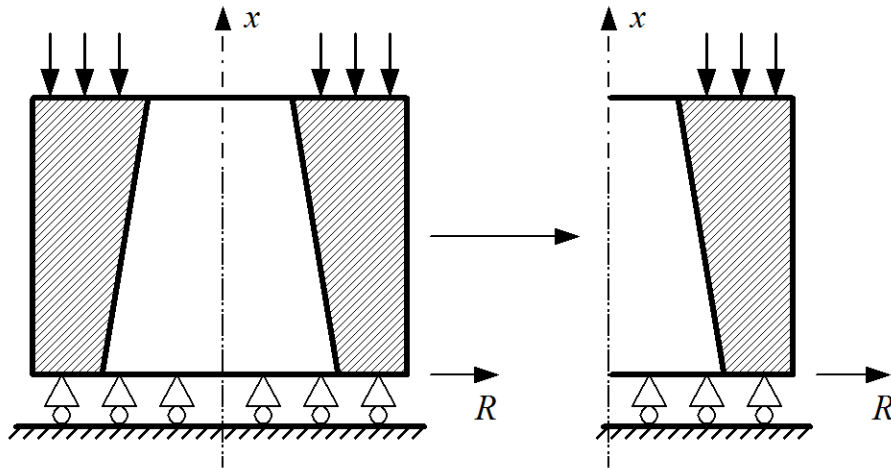
ahol $\tilde{\mathbf{p}}$ az előírt erővektor. Így az 5.20 egyenlet skalár egyenletei

$$\begin{aligned} \sigma_x n_x + \tau_{xy} n_y &= \tilde{p}_x, \\ \tau_{yx} n_x + \sigma_y n_y &= \tilde{p}_y. \end{aligned} \quad (5.21)$$

Az egyensúlyi egyenletek esetén azért nem tüntetjük fel a z irányú fajlagos megnyúlást, mert az alakváltozási energiában nem játszik szerepet, mivel a feszültségi tenzorban a z irányú normálfeszültség zérus.

5.3. Tengelyszimmetrikus feladatok

Ha egy test geometriája tengelyszimmetrikus, valamint annak terhelése és megtámasztása is, akkor bármely meridián metszetében ugyanaz az alakváltozási- és feszültségi állapot ébred. Egy tengelyszimmetrikus feladat az 5.3. ábrán látható. A szimmetriából adódóan a tengely mentén bármely keresztmetszetben a két elmozdulás komponens írja le az alakváltozási- és a feszültségi állapotot.



5.3. ábra Tengelyszimmetrikus feladat

Hengerkoordináta- rendszert (R, φ, x) használva az alakváltozási tenzor

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \varepsilon_R & 0 & \frac{1}{2} \gamma_{Rx} \\ 0 & \varepsilon_\varphi & 0 \\ \frac{1}{2} \gamma_{xR} & 0 & \varepsilon_x \end{bmatrix}. \quad (5.22)$$

Az alakváltozás és a feszültség közötti kapcsolat (Hooke-törvény) révén a feszültségi tenzor

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \sigma_R & 0 & \tau_{Rx} \\ 0 & \sigma_\varphi & 0 \\ \tau_{xR} & 0 & \sigma_x \end{bmatrix}. \quad (5.23)$$

6. KÉTDIMENZIÓS FELADATOK VÉGESELEMES TÁRGYALÁSMÓDJA

Megjegyezzük, hogy a következőkben bevezett összefüggések kizárólag síkalakváltozási és síkfeszültségi feladatokra érvényesek. Kétdimenziós feladatoknál az elmozdulásvektor mátrixa

$$\mathbf{u} = \underbrace{\begin{bmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{bmatrix}}_{(2 \times 1)} \quad (6.1)$$

Az alakváltozási vektor mátrixa

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \underbrace{\begin{bmatrix} \varepsilon_x(x, y) \\ \varepsilon_y(x, y) \\ \gamma_{xy}(x, y) \end{bmatrix}}_{(3 \times 1)} \quad (6.2)$$

A feszültségvektor mátrixa

$$\boldsymbol{\sigma} = \underbrace{\begin{bmatrix} \sigma_x(x, y) \\ \sigma_y(x, y) \\ \tau_{xy}(x, y) \end{bmatrix}}_{(3 \times 1)} \quad (6.3)$$

A megoldást kis alakváltozás lineáris elméletére vezetjük le, ahol az elmozdulások kismértékűek. Egy kétdimenziós végeselemet csomópontjaival és azokat összekötő egyenes vonalú peremekkel definiálunk. Az elmozdulásmezőt elemenként külön-külön közelítjük,

$$\underbrace{\mathbf{u}^e}_{(2 \times 1)} = \underbrace{\mathbf{N}^e}_{(2 \times n)} \underbrace{\mathbf{q}^e}_{(n \times 1)} \quad (6.4)$$

ahol \mathbf{u}^e az elem elmozdulásmezője, \mathbf{N}^e az elem approximációs (alakfüggvények) mátrixa, \mathbf{q}^e az elem csomóponti elmozdulásvektora, n az elem szabadsági foka. Az approximációs mátrix tartalmazza az alakfüggvényeket.

Az e elem csomóponti elmozdulásvektora

$$\mathbf{q}^e = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{q}_i \\ \mathbf{q}_j \\ \mathbf{q}_k \\ \vdots \\ \mathbf{q}_N \end{bmatrix}}_{(2N \times 1)} \quad (6.5)$$

ahol N a csomópontok száma. Az e elem i -edik csomópontjának elmozdulásvektora

$$\mathbf{q}_i^e = \underbrace{\begin{bmatrix} u_i \\ v_i \end{bmatrix}}_{(2 \times 1)} \quad (6.6)$$

Az approximációs mátrixban szereplő közelítő függvények általában polinomok, ezek fokszáma határozza meg a csomóponti paraméterek számát. Az approximációs mátrix általános alakja

$$\mathbf{N}^e = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{N}_i \\ \mathbf{N}_j \\ \mathbf{N}_k \\ \vdots \\ \mathbf{N}_N \end{bmatrix}}_{(2Nx2)}^e. \quad (6.7)$$

Az e elem i -edik csomópontjához tartozó approximációs mátrix blokk

$$\mathbf{N}_i^e = \underbrace{\begin{bmatrix} N_{xxi} & N_{xyi} \\ N_{yxi} & N_{yyi} \end{bmatrix}}_{(2x2)}^e. \quad (6.8)$$

Az elmozdulás közelítéséből kiindulva az elem alakváltozási állapotának közelítése

$$\boldsymbol{\varepsilon}^e = \underbrace{\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}}_{(3x1)}^e = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{bmatrix}}_{(3x1)}^e = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}}_{(3x2)}^e \underbrace{\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}}_{(2x1)}^e. \quad (6.9)$$

Itt

$$\mathbf{D}^e = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}}_{(3x2)}^e \quad (6.10)$$

a differenciál utasítások mátrixa, így az alakváltozás a (6.4) összefüggés felhasználásával

$$\boldsymbol{\varepsilon}^e = \mathbf{D}^e \mathbf{u}^e = \mathbf{D}^e \mathbf{N}^e \mathbf{q}^e = \mathbf{B}^e \mathbf{q}^e. \quad (6.11)$$

ahol \mathbf{B}^e az alakváltozás-csomóponti elmozdulás mátrixa

$$\mathbf{B}_i^e = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} \end{bmatrix}}_{(3 \times 2)}^e. \quad (6.12)$$

A Hooke-törvény értelmében izotróp anyagot feltételezve az alakváltozás közelítéséből kiindulva az elem feszültségi állapotának közelítése

$$\boldsymbol{\sigma}^e = \underbrace{\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix}}_{(3 \times 1)}^e = \underbrace{\begin{bmatrix} c_1 & c_2 & 0 \\ c_2 & c_1 & 0 \\ 0 & 0 & c_3 \end{bmatrix}}_{(3 \times 3)}^e \underbrace{\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}}_{(3 \times 1)}^e, \quad (6.13)$$

ahol

	Síkalakváltozási állapot	Síkfeszültségi állapot
c_1	$\frac{E(1-\nu)}{(1-2\nu)(1+\nu)}$	$\frac{E}{1-\nu^2}$
c_2	$\frac{E\nu}{(1-2\nu)(1+\nu)}$	$\frac{E\nu}{1-\nu^2}$
c_3	$\frac{E}{2(1+\nu)} = G$	$\frac{E}{2(1+\nu)} = G$

Az anyagállandók mátrixát bevezetve,

$$\mathbf{C}^e = \underbrace{\begin{bmatrix} c_1 & c_2 & 0 \\ c_2 & c_1 & 0 \\ 0 & 0 & c_3 \end{bmatrix}}_{(3 \times 3)}^e, \quad (6.14)$$

és a (6.11) összefüggést alkalmazva az elem feszültségvektora

$$\boldsymbol{\sigma}^e = \mathbf{C}^e \boldsymbol{\varepsilon}^e = \mathbf{C}^e \mathbf{B}^e \mathbf{q}^e. \quad (6.15)$$

A Hooke-törvény értelmében egy végelemben számolt feszültség kapcsolatban áll az elem alakváltozási állapotával.

A (3.8) egyenletre hivatkozva az elem teljes potenciális energiája mátrixos írásmódban

$$\Pi^e = \frac{1}{2} \int_V \boldsymbol{\varepsilon}^{eT} \boldsymbol{\sigma}^e dV - \int_V \mathbf{u}^{eT} \mathbf{q}^e dV - \int_{A_p} \mathbf{u}^{eT} \mathbf{p}^e dA. \quad (6.16)$$

A (6.16) egyenletbe behelyettesítve a (6.4), (6.12) és (6.15) összefüggéseket, valamint a csomóponti elmozdulásvektorokat kiemelve az integráljel elé az elem teljes potenciális energiája

$$\Pi^e = \frac{1}{2} \mathbf{q}^{eT} \int_V \mathbf{B}^{eT} \mathbf{C}^e \mathbf{B}^e dV \mathbf{q}^e - \mathbf{q}^{eT} \int_V \mathbf{N}^{eT} \mathbf{q}^e dV - \mathbf{q}^{eT} \int_{A_p} \mathbf{N}^{eT} \mathbf{p}^e dA, \quad (6.17)$$

ahol

$$\mathbf{K}^e = \int_V \mathbf{B}^{eT} \mathbf{C}^e \mathbf{B}^e dV \quad (6.18)$$

az elem merevségi mátrixa. Az elem merevségi mátrixa szimmetrikus, azaz $\mathbf{K}^e = \mathbf{K}^{eT}$.
Megjegyezzük, hogy síkalakváltozási feladatok esetén méret z irányban egységnyi. Ez azt vonja maga után, hogy

$$dV = dx dy dz \rightarrow dA = dx dy. \quad (6.19)$$

Figyelembe véve a (6.19) összefüggést a merevségi mátrix így

$$\mathbf{K}^e = \int_A \mathbf{B}^{eT} \mathbf{C}^e \mathbf{B}^e dA. \quad (6.20)$$

A 6.19 értelmében a térfogati terhelésből származó csomóponti tehervektor

$$\mathbf{f}_q^e = \int_A \mathbf{N}^{eT} \mathbf{q}^e dA. \quad (6.21)$$

A felületi terhelésből származó csomóponti tehervektor

$$\mathbf{f}_p^e = \int_{A_p} \mathbf{N}^{eT} \mathbf{p}^e dA. \quad (6.22)$$

Az elem csomóponti tehervektora

$$\mathbf{f}^e = \mathbf{f}_q^e + \mathbf{f}_p^e. \quad (6.23)$$

A bevezetett jelöléseket felhasználva az elem teljes potenciális energiája

$$\Pi^e = \frac{1}{2} \mathbf{q}^{eT} \mathbf{K}^e \mathbf{q}^e - \mathbf{q}^{eT} \mathbf{f}^e. \quad (6.24)$$

A teljes potenciális energia minimuma elv (Lagrange-féle variációs elv) kizárólag csak az egész testre érvényes, az elemekre külön-külön nem. A teljes test teljes potenciális energiája egyenlő az elemek potenciális energiájának összegével, így

$$\Pi = \sum_{e=1}^Q \Pi^e = \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \mathbf{K} \mathbf{q} - \mathbf{q}^T \mathbf{f}, \quad (6.25)$$

ahol Q a végelemek száma, \mathbf{K} a globális merevségi mátrix a teljes testre, \mathbf{q} a teljes testre vonatkozó csomóponti elmozdulásvektor és \mathbf{f} a teljes testre vonatkozó csomóponti tehervektor.

A Lagrange-féle variációs elv értelmében a teljes potenciális energia első variációja zérus, azaz $\delta\Pi = 0$, így a (6.25) egyenletre alkalmazva kapjuk, hogy

$$\delta\Pi = \delta\left(\frac{1}{2}\mathbf{q}^T\mathbf{K}\mathbf{q} - \mathbf{q}^T\mathbf{f}\right) = \delta\mathbf{q}^T(\mathbf{K}\mathbf{q} - \mathbf{f}) = 0. \quad (6.26)$$

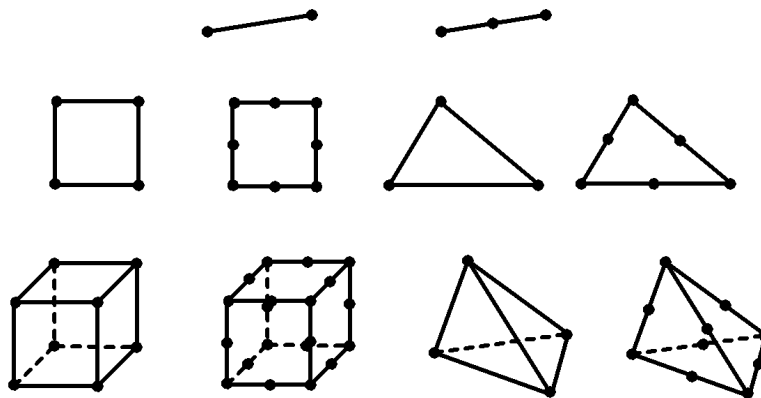
A (6.26) összefüggésből adódik, hogy

$$\mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{f}. \quad (6.27)$$

Lineáris analízis esetén a (6.27) egyenlet a megoldandó végeselemes egyensúlyi inhomogén lineáris algebrai egyenletrendszer.

7. IZOPARAMETRIKUS VÉGESELEMEK

A globális koordináta-rendszerben az elemi merevségi mátrixokat és tehervektorokat kiszámítani meglehetősen nehéz feladat. Ezt kiváltva kerültek kifejlesztésre az ún. izoparametrikus leírási mód. Ez a leírás azt jelenti, hogy a geometria leképezésére alkalmazott csomóponti paraméterek száma az ismeretlen mező közelítésére felvett paraméterek számával. Ennek megfelelően ugyanazokat az alakfüggvényeket használjuk a geometria leképezésére, mint az ismeretlen mező közelítésére. Az izoparametrikus elem merevségi mátrixának és tehervektorának előállításakor a numerikus integrálás könnyen végrehajtható, így azok használata széles körben elterjedt az általános célú végeselemes programrendszerekben [1,4,15,16]. További előnye, hogy egyaránt alkalmazható egy-, két- és háromdimenziós feladatokra. A 7.1. ábra mutatja be a tipikus végeselemeket.



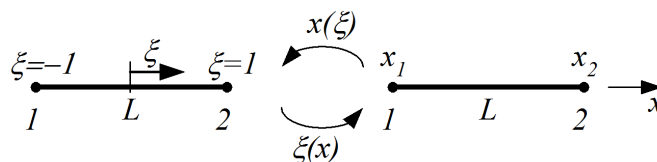
7.1. ábra A leggyakrabban alkalmazott izoparametrikus végeselemek

Az izoparametrikus végeselemes leírás értelmében az elem koordinátáit és az elem elmozdulását egy, az elemhez kötött helyi koordináta-rendszerben történő interpoláció segítségével fejezzük ki. A helyi ξ, η, ζ koordináták (száma függ a feladat dimenziójától) az elem középpontjához vannak kötve. A ξ, η, ζ tengelyekre feltételezzük, hogy azok egymásra kölcsönösen merőlegesek.

7.1. Egydimenziós izoparametrikus leképezés

7.1.1. Húzott-nyomott rúdelem

Egy húzott-nyomott rúdelem (kétsomópontú) geometriáját és annak leképezését a 7.2. ábra szemlélteti. Az elem kétsomópontú.



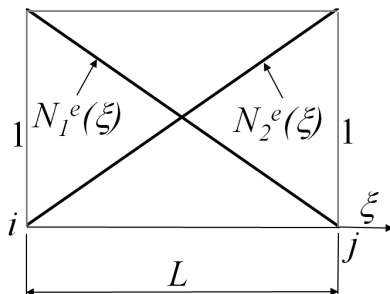
7.2. ábra Húzott-nyomott rúdelem

Húzott-nyomott rúdelemet vizsgálva a koordináta interpoláció

$$x(\xi) = \sum_{i=1}^2 N_i x_i = N_1 x_1 + N_2 x_2, \quad (7.1)$$

ahol az alakfüggvények (7.3. ábra)

$$\begin{aligned} N_1(\xi) &= \frac{1}{2}(1 - \xi), \\ N_2(\xi) &= \frac{1}{2}(1 + \xi). \end{aligned} \quad (7.2)$$



7.3. ábra A húzott-nyomott rúdelem alakfüggvényei

	$\xi = -1$	$\xi = 1$
Csomópont 1	$N_1(\xi) = 1$	$N_1(\xi) = 0$
Csomópont 2	$N_2(\xi) = 0$	$N_2(\xi) = 1$

Az alakfüggvény tulajdonságai:

1.	$\sum_{i=1}^2 N_i(\xi) = 1 \quad -1 \leq \xi \leq 1$
2.	$N_i(\xi_j) = \begin{cases} 1 & \text{ha } i = j \\ 0 & \text{ha } i \neq j \end{cases}$ ahol a j -edik csomópont koordinátája $\xi_j, j = 1, 2$

Feltételezve, hogy $\xi = \xi(x)$, egy elem elmozdulásmezőjének közelítése

$$u^e(x) = \sum_{i=1}^2 N_i(\xi) u_i^e = N_1(\xi) u_1^e + N_2(\xi) u_2^e, \quad (7.3)$$

ahol u_i^e az e elem i -edik csomópontjának elmozdulás koordinátája. A vizsgálat célja, hogy meghatározzuk ezeket a csomóponti értékeket. A mátrixformalizmust alkalmazva

$$\mathbf{u}^e = \underbrace{[u]}_{(1 \times 1)}^e = \underbrace{[N_1 \quad N_2]}_{(2 \times 1)} \underbrace{\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}}_{(2 \times 1)}^e = \mathbf{N} \mathbf{q}^e, \quad (7.4)$$

ahol \mathbf{q}^e az elem csomóponti elmozdulásvektora. Felhasználva a (6.11) egyenletet az elem alakváltozási vektorát megkaphatjuk,

$$\boldsymbol{\varepsilon}^e = \mathbf{D}^e \mathbf{u}^e = \mathbf{D}^e \mathbf{N} \mathbf{q}^e = \mathbf{B} \mathbf{q}^e, \quad (7.5)$$

ahol \mathbf{B} az alakváltozás-csomóponti elmozdulás mátrix

$$\mathbf{B} = \mathbf{D}^e \mathbf{N} = \underbrace{\left[\frac{\partial}{\partial x} \right]}_{(1 \times 1)} \underbrace{\begin{bmatrix} N_1 & N_2 \end{bmatrix}}_{(1 \times 2)} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial x} \end{bmatrix}}_{(2 \times 1)}. \quad (7.6)$$

Az alakfüggvény deriváltja

$$\frac{\partial N_i(\xi, \eta)}{\partial x} = \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x}. \quad (7.7)$$

A (7.7) egyenlet mátrixegyenletként is felírható

$$\left[\frac{\partial}{\partial x} \right] = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} \end{bmatrix}}_{\mathbf{J}^{-1}} \left[\frac{\partial}{\partial \xi} \right] = \mathbf{J}^{-1} \left[\frac{\partial}{\partial \xi} \right], \quad (7.8)$$

ahol \mathbf{J} a Jacobi-féle „mátrix”. A végesesemes számításoknál a Jacobi-féle „mátrix” inverzét kell előállítanunk, azaz feltétel, hogy az invertálható legyen. A Jacobi „mátrix” egyébként az $x = x(\xi)$ függvényében ismert, azaz

$$\left[\frac{\partial}{\partial \xi} \right] = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} \end{bmatrix}}_{\mathbf{J}} \left[\frac{\partial}{\partial x} \right] = \mathbf{J} \left[\frac{\partial}{\partial x} \right], \quad (7.9)$$

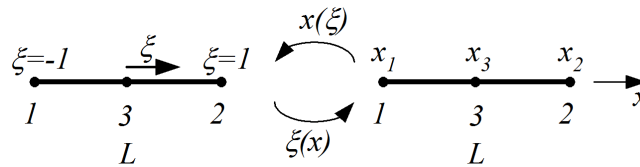
Az inverz Jacobi „mátrix” előállítása,

$$\mathbf{J}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} \end{bmatrix} = \frac{1}{\det \mathbf{J}} \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} \end{bmatrix}, \quad (7.10)$$

ahol $\det \mathbf{J} = J > 0$.

7.1.2. Háromcsomópontú rúdelem (kábel elem)

Egy háromcsomópontú rúdelem geometriáját és annak leképezését a 7.4. ábra szemlélteti. Az elem háromcsomópontú, a harmadik csomópont az elem közepén van.



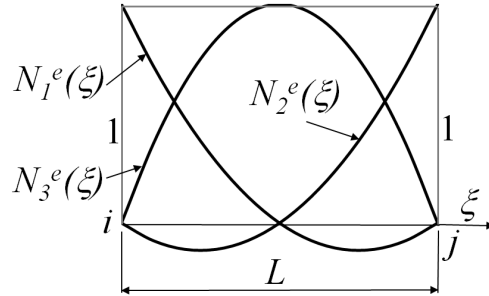
7.4. ábra Háromcsomópontú rúdelem

Háromcsomópontú rúdelemet vizsgálva a koordináta interpoláció

$$x(\xi) = \sum_{i=1}^3 N_i x_i = N_1 x_1 + N_2 x_2 + N_3 x_3, \quad (7.11)$$

ahol az alakfüggvények (7.5. ábra)

$$\begin{aligned}
N_1(\xi) &= \frac{1}{2}(1 - \xi) - \frac{1}{2}(1 - \xi^2) = -\frac{\xi(1 - \xi)}{2}, \\
N_2(\xi) &= \frac{1}{2}(1 + \xi) - \frac{1}{2}(1 - \xi^2) = \frac{\xi(1 + \xi)}{2}, \\
N_3(\xi) &= 1 - \xi^2.
\end{aligned} \tag{7.12}$$



7.5. ábra A háromcsomópontú rúdelem alakfüggvényei

	$\xi = -1$	$\xi = 1$
Csomópont 1	$N_1(\xi) = 1$	$N_1(\xi) = 0$
Csomópont 2	$N_2(\xi) = 0$	$N_2(\xi) = 1$
Csomópont 3	$N_3(\xi) = 0$	$N_3(\xi) = 0$

Az alakfüggvény tulajdonságai:

1.	$\sum_{i=1}^3 N_i(\xi) = 1 \quad -1 \leq \xi \leq 1$
2.	$N_i(\xi_j) = \begin{cases} 1 & \text{ha } i = j \\ 0 & \text{ha } i \neq j \end{cases}$ ahol a j -edik csomópont koordinátája $\xi_j, j = 1, 2, 3$

Feltételezve, hogy $\xi = \xi(x)$, egy elem elmozdulásmezőjének közelítése

$$u^e(x) = \sum_{i=1}^3 N_i(\xi) u_i^e = N_1(\xi) u_1^e + N_2(\xi) u_2^e + N_3(\xi) u_3^e, \tag{7.13}$$

ahol u_i^e az e elem i -edik csomópontjának elmozdulás koordinátája. A vizsgálat célja, hogy meghatározzuk ezeket a csomóponti értékeket. A mátrixformalizmust alkalmazva

$$\mathbf{u}^e = \underbrace{[\mathbf{u}]^e}_{(1 \times 1)} = \underbrace{[N_1 \quad N_2 \quad N_3]}_{(3 \times 1)} \underbrace{\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}}_{(3 \times 1)} = \mathbf{N} \mathbf{q}^e, \tag{7.14}$$

ahol \mathbf{q}^e az elem csomóponti elmozdulásvektora. Felhasználva (6.11) egyenletet az elem alakváltozási vektorát megkaphatjuk,

$$\boldsymbol{\varepsilon}^e = \mathbf{D}^e \mathbf{u}^e = \mathbf{D}^e \mathbf{N} \mathbf{q}^e = \mathbf{B} \mathbf{q}^e, \tag{7.15}$$

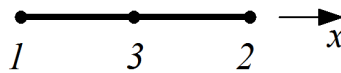
ahol az alakváltozás-csomóponti elmozdulás mátrix

$$\mathbf{B} = \mathbf{D}^e \mathbf{N} = \underbrace{\left[\frac{\partial}{\partial x} \right]}_{(1 \times 1)}^e \underbrace{[N_1 \quad N_2 \quad N_3]}_{(3 \times 1)} = \underbrace{\left[\frac{\partial N_1}{\partial x} \quad \frac{\partial N_2}{\partial x} \quad \frac{\partial N_3}{\partial x} \right]}_{(3 \times 1)}. \quad (7.16)$$

Az alakfüggvény deriváltjának származtatása és a Jacobi mátrix meghatározásának módja megegyezik a húzott-nyomott rúdelemével.

7. példa

A feladat egy háromcsomópontú rúdelem leképezése. A 7.6. ábrán az elem látható, valamint ismertek a csomóponti koordináták.



7.6. ábra Háromcsomópontú rúdelem a csomópontokkal

Határozza meg az alakfüggvényeket a globális koordináta-rendszerben!

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 5, \quad x_3 = 3$$

Az izoparametrikus leképezés $x(\xi)$

$$\begin{aligned} x(\xi) &= \sum_{i=1}^3 N_i x_i = N_1 x_1 + N_2 x_2 + N_3 x_3 = \\ &= -\frac{\xi(1-\xi)}{2} \cdot 0 + \frac{\xi(1+\xi)}{2} \cdot 5 + (1-\xi^2) \cdot 3 = 3 + \frac{5\xi}{2} - \frac{\xi^2}{2} \end{aligned}$$

Az inverz leképezés $\xi(x)$

$$\xi(x) = \frac{5 - \sqrt{49 - 8x}}{2}$$

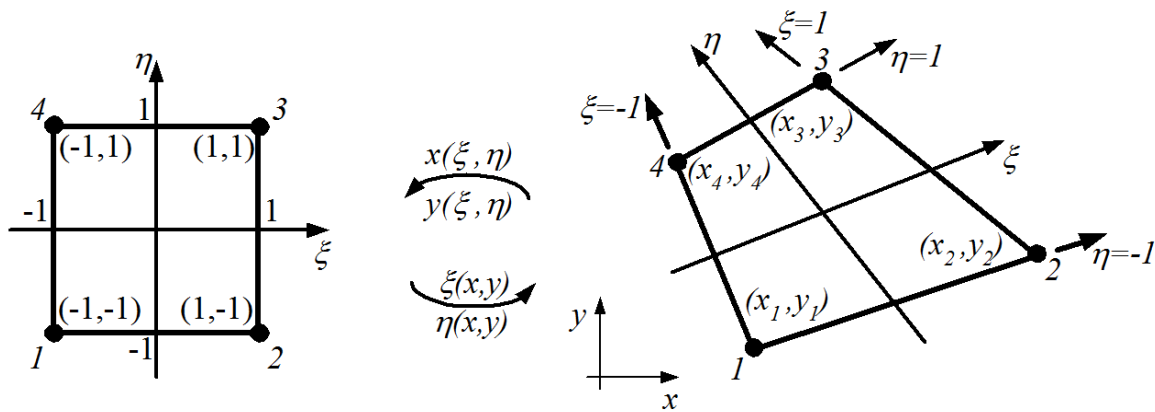
Az alakfüggvények a globális koordináta-rendszerben:

$$\begin{aligned} N_1(\xi) &= -\frac{\xi(1-\xi)}{2} = 8 - x - \sqrt{49 - 8x} = N_1(x) \\ N_2(\xi) &= \frac{\xi(1+\xi)}{2} = \frac{21}{2} - x - \frac{3}{2}\sqrt{49 - 8x} = N_2(x) \\ N_3(\xi) &= 1 - \xi^2 = 8x - 48 = N_3(x) \end{aligned}$$

7.2. Kétdimenziós izoparametrikus leképezés

7.2.1. Lineáris négyszög elem

Egy lineáris négyszög elem geometriáját és annak leképezését a 7.7. ábra szemlélteti. Az elem négycsomópontú, a csomópontok a négyszög sarkai.



7.7. ábra Lineáris izoparametrikus négyszög elem

Lineáris négyszög elemet vizsgálva a koordináta interpolációk

$$\begin{aligned}
 x(\xi, \eta) &= \sum_{i=1}^4 N_i x_i = N_1 x_1 + N_2 x_2 + N_3 x_3 + N_4 x_4, \\
 y(\xi, \eta) &= \sum_{i=1}^4 N_i y_i = N_1 y_1 + N_2 y_2 + N_3 y_3 + N_4 y_4,
 \end{aligned}
 \tag{7.17}$$

ahol az alakfüggvények

$$\begin{aligned}
 N_1(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta), \\
 N_2(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 - \eta), \\
 N_3(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \eta), \\
 N_4(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 + \eta)
 \end{aligned}
 \tag{7.18}$$

és lineárisak $\xi - \eta$ síkon.

	$\xi = -1; \eta = -1$	$\xi = 1; \eta = -1$	$\xi = 1; \eta = 1$	$\xi = -1; \eta = 1$
Csomópont 1	$N_1(\xi, \eta) = 1$	$N_1(\xi, \eta) = 0$	$N_1(\xi, \eta) = 0$	$N_1(\xi, \eta) = 0$
Csomópont 2	$N_2(\xi, \eta) = 0$	$N_2(\xi, \eta) = 1$	$N_2(\xi, \eta) = 0$	$N_2(\xi, \eta) = 0$
Csomópont 3	$N_3(\xi, \eta) = 0$	$N_3(\xi, \eta) = 0$	$N_3(\xi, \eta) = 1$	$N_3(\xi, \eta) = 0$
Csomópont 4	$N_4(\xi, \eta) = 0$	$N_4(\xi, \eta) = 0$	$N_4(\xi, \eta) = 0$	$N_4(\xi, \eta) = 1$

Az alakfüggvény tulajdonságai:

1.	$\sum_{i=1}^4 N_i(\xi, \eta) = 1 \quad -1 \leq \xi \leq 1$
2.	$N_i(\xi_j, \eta_j) = \begin{cases} 1 & \text{ha } i = j \\ 0 & \text{ha } i \neq j \end{cases}$ ahol j -edik csomópont koordinátái $\xi_j, \eta_j, j = 1, 2, 3, 4$

Feltételezve, hogy $\xi = \xi(x, y)$ és $\eta = \eta(x, y)$, egy elem elmozdulásmezőjének közelítése

$$\begin{aligned} u^e(x, y) &= \sum_{i=1}^4 N_i(\xi, \eta) u_i^e = N_1(\xi, \eta) u_1^e + N_2(\xi, \eta) u_2^e + N_3(\xi, \eta) u_3^e + N_4(\xi, \eta) u_4^e, \\ v^e(x, y) &= \sum_{i=1}^4 N_i(\xi, \eta) v_i^e = N_1(\xi, \eta) v_1^e + N_2(\xi, \eta) v_2^e + N_3(\xi, \eta) v_3^e + N_4(\xi, \eta) v_4^e, \end{aligned} \quad (7.19)$$

ahol u_i^e és v_i^e az e elem i -edik csomópontjának elmozdulás koordinátái. A vizsgálat célja, hogy meghatározzuk ezeket a csomóponti értékeket. A mátrixformalizmust alkalmazva

$$\mathbf{u}^e = \underbrace{\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}}_{(2 \times 1)}^e = \underbrace{\begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix}}_{(2 \times 8)} \underbrace{\begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{bmatrix}}_{(8 \times 1)}^e = \mathbf{N} \mathbf{q}^e, \quad (7.20)$$

ahol \mathbf{q}^e az elem csomóponti elmozdulásvektora. Felhasználva a (6.11) egyenletet az elem alakváltozási vektorát megkaphatjuk,

$$\boldsymbol{\varepsilon}^e = \mathbf{D}^e \mathbf{u}^e = \mathbf{D}^e \mathbf{N} \mathbf{q}^e = \mathbf{B} \mathbf{q}^e, \quad (7.21)$$

ahol \mathbf{B} az alakváltozás-csomóponti elmozdulás mátrix

$$\begin{aligned} \mathbf{B} = \mathbf{D}^e \mathbf{N} &= \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}}_{(3 \times 2)} \underbrace{\begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix}}_{(2 \times 8)} = \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_3}{\partial y} & \frac{\partial N_3}{\partial x} & \frac{\partial N_4}{\partial y} & \frac{\partial N_4}{\partial x} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (7.22)$$

Az alakfüggvény deriváltjai

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_i(\xi, \eta)}{\partial x} &= \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i(\xi, \eta)}{\partial y} &= \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{aligned} \quad (7.23)$$

A 7.23 egyenlet mátrixegyenletként is felírható

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ \frac{\partial \xi}{\partial y} & \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{bmatrix}}_{\mathbf{J}^{-1}} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \mathbf{J}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{bmatrix}, \quad (7.24)$$

ahol \mathbf{J} a Jacobi-féle „mátrix”. A végeselemes számításoknál a Jacobi-féle „mátrix” inverzét kell előállítanunk, azaz feltétel, hogy az invertálható legyen. A Jacobi „mátrix” egyébként az $x = x(\xi)$ és $y = y(\xi, \eta)$ függvényében ismert, azaz

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix}}_{\mathbf{J}} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} = \mathbf{J} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix}, \quad (7.25)$$

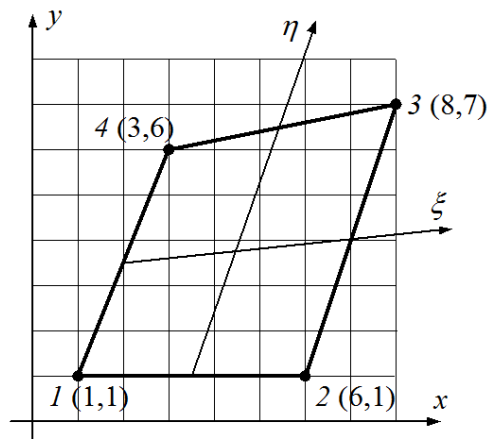
Az inverz Jacobi mátrix előállítása,

$$\mathbf{J}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ \frac{\partial \xi}{\partial y} & \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{bmatrix} = \frac{1}{\det \mathbf{J}} \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial \eta} & -\frac{\partial y}{\partial \xi} \\ -\frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial x}{\partial \xi} \end{bmatrix}, \quad (7.26)$$

ahol $\det \mathbf{J} = J > 0$. A Jacobi mátrix determinánása fontos szerepet tölt be az elem leképezésének ellenőrzése során is. Azon esetek, amikor $J < 0$ vagy $J = 0$, nem megengedhetők a végeselemes számítások során, mert numerikus hibát okoznak. Ha annak értéke zérus, akkor a leképezés szinguláris. Amennyiben a Jacobi determináns előjelet vált, akkor az azt jelenti, hogy az elem nagyon torzult alakú.

8. példa

Egy négycsomópontú négyszög elem és annak csomópontjai a koordinátákkal adottak (7.8. ábra).



7.8. ábra Az elem geometriája és a csomóponti koordináták

$$x(\xi, \eta) = ?$$

$$y(\xi, \eta) = ?$$

$$\mathbf{J} = ?$$

$$J = ?$$

$x(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^4 N_i x_i = N_1 x_1 + N_2 x_2 + N_3 x_3 + N_4 x_4 =$ $= \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta) \cdot 1 + \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 - \eta) \cdot 6 +$ $+ \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \eta) \cdot 8 + \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 + \eta) \cdot 3 = \frac{9}{2} + \frac{5}{2}\xi + \eta$
$y(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^4 N_i y_i = N_1 y_1 + N_2 y_2 + N_3 y_3 + N_4 y_4 =$ $= \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta) \cdot 1 + \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 - \eta) \cdot 1 +$ $+ \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \eta) \cdot 7 + \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 + \eta) \cdot 6 = \frac{15}{4} + \frac{1}{4}\xi + \frac{11}{4}\eta + \frac{1}{4}\xi\eta$

Az $x(\xi, \eta)$ és $y(\xi, \eta)$ ξ és η szerinti deriváltjait elő kell állítani, hogy megkapjuk a Jacobi mátrixot,

$\frac{\partial x}{\partial \xi} = \frac{5}{2}$	$\frac{\partial y}{\partial \xi} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\eta$
$\frac{\partial x}{\partial \eta} = 1$	$\frac{\partial y}{\partial \eta} = \frac{11}{4} + \frac{1}{4}\xi$

Így a Jacobi „mátrix” felépíthető,

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{2} & \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\eta \\ 1 & \frac{11}{4} + \frac{1}{4}\xi \end{bmatrix}$$

$$J(\xi, \eta) = \det \mathbf{J}(\xi, \eta) = \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi} = \frac{53}{8} + \frac{5}{8}\xi - \frac{1}{4}\eta$$

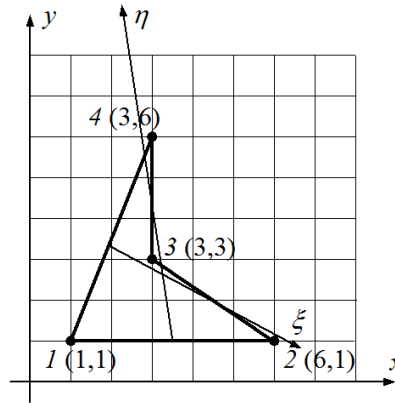
A $J(\xi, \eta)$ -re vonatkozó feltételeket kell ellenőrizni:

	$J(\xi, \eta)$
$\xi = -1; \eta = -1$	$\frac{25}{4}$
$\xi = 1; \eta = -1$	$\frac{15}{2}$
$\xi = 1; \eta = 1$	7
$\xi = -1; \eta = 1$	$\frac{23}{4}$

Az elem nem elfajuló, azaz az elem nem torzult annyira, hogy az numerikus hibát okozzon a számítások során.

9.példa

Egy négycsomópontú négyyszög elem és annak csomópontjai a koordinátákkal adottak (7.9. ábra). Az elem torzult.



7.9. ábra Az elem geometriája és a csomóponti koordináták

$x(\xi, \eta) = ?$
 $y(\xi, \eta) = ?$
 $\mathbf{J} = ?$
 $J = ?$

$x(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^4 N_i x_i = N_1 x_1 + N_2 x_2 + N_3 x_3 + N_4 x_4 =$ $= \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta) \cdot 1 + \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 - \eta) \cdot 6 +$ $+ \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \eta) \cdot 3 + \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 + \eta) \cdot 3 = \frac{13}{4} + \frac{5}{4}\xi - \frac{1}{4}\eta - \frac{5}{4}\xi\eta$
$y(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^4 N_i y_i = N_1 y_1 + N_2 y_2 + N_3 y_3 + N_4 y_4 =$ $= \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta) \cdot 1 + \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 - \eta) \cdot 1 +$ $+ \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \eta) \cdot 3 + \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 + \eta) \cdot 6 = \frac{11}{4} - \frac{3}{4}\xi + \frac{7}{4}\eta - \frac{3}{4}\xi\eta$

Az $x(\xi, \eta)$ és $y(\xi, \eta)$ ξ és η szerinti deriváltjait elő kell állítani, hogy megkapjuk a Jacobi mátrixot,

$\frac{\partial x}{\partial \xi} = \frac{5}{4} - \frac{5}{4}\eta$	$\frac{\partial y}{\partial \xi} = -\frac{3}{4} - \frac{3}{4}\eta$
$\frac{\partial x}{\partial \eta} = -\frac{1}{4} - \frac{5}{4}\xi$	$\frac{\partial y}{\partial \eta} = \frac{7}{4} - \frac{3}{4}\xi$

Így a Jacobi „mátrix” felépíthető,

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{4} - \frac{5}{4}\eta & -\frac{3}{4} - \frac{3}{4}\eta \\ -\frac{1}{4} - \frac{5}{4}\xi & \frac{7}{4} - \frac{3}{4}\xi \end{bmatrix}$$

$$J(\xi, \eta) = \det J(\xi, \eta) = \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi} = 2 - \frac{15}{8}\xi - \frac{19}{8}\eta$$

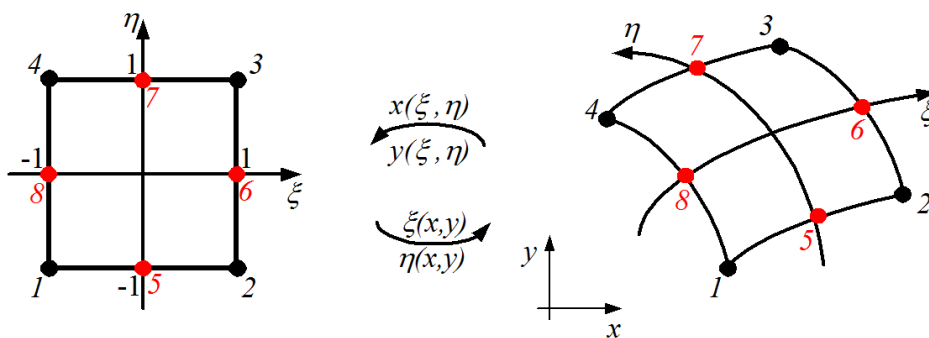
A $J(\xi, \eta)$ -re vonatkozó feltételeket kell ellenőrizni:

	$J(\xi, \eta)$
$\xi = -1; \eta = -1$	$\frac{25}{4}$
$\xi = 1; \eta = -1$	$\frac{5}{2}$
$\xi = 1; \eta = 1$	$-\frac{25}{4}$
$\xi = -1; \eta = 1$	$\frac{3}{2}$

Látható, hogy az elem elfajuló, azaz az elem annyira torzult, hogy az numerikus hibát fog okozni a számítások során.

7.2.2. Kvadratikus négyszög elem

Egy nyolccsomópontú kvadratikus négyszög elem geometriáját és annak leképezését a 7.10. ábra szemlélteti. Komplex geometriák modellezésére (pl. görbe peremek esetén) a nagymértékű pontossága és rugalmassága miatt egyike a leggyakrabban alkalmazott kétdimenziós elemeknek.



7.10. ábra Kvadratikus négyszög elem

Az ilyen típusú elemet nyolc csomópont határozza meg, ebből négy a négyszög csúcsai, négy pedig az oldalélek felezőpontjai. Kvadratikus négyszög elemet vizsgálva a koordináta interpolációk

$$\begin{aligned}
x(\xi, \eta) &= \sum_{i=1}^8 N_i x_i = N_1 x_1 + N_2 x_2 + N_3 x_3 + N_4 x_4 + N_5 x_5 + N_6 x_6 + N_7 x_7 + N_8 x_8, \\
y(\xi, \eta) &= \sum_{i=1}^8 N_i y_i = N_1 y_1 + N_2 y_2 + N_3 y_3 + N_4 y_4 + N_5 y_5 + N_6 y_6 + N_7 y_7 + N_8 y_8.
\end{aligned} \tag{7.27}$$

A helyi koordináta-rendszerben az alakfüggvények

$$\begin{aligned}
N_1(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta)(-\xi - \eta - 1), \\
N_2(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 - \eta)(\xi - \eta - 1), \\
N_3(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \eta)(\xi + \eta - 1), \\
N_4(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 + \eta)(-\xi + \eta - 1), \\
N_5(\xi, \eta) &= \frac{1}{2}(1 - \xi^2)(1 - \eta), \\
N_6(\xi, \eta) &= \frac{1}{2}(1 + \xi)(1 - \eta^2), \\
N_7(\xi, \eta) &= \frac{1}{2}(1 - \xi^2)(1 + \eta), \\
N_8(\xi, \eta) &= \frac{1}{2}(1 - \xi)(1 - \eta^2).
\end{aligned} \tag{7.28}$$

	$\xi = -1; \eta = -1$	$\xi = 1; \eta = -1$	$\xi = 1; \eta = 1$	$\xi = -1; \eta = 1$
Csomópont 1	$N_1(\xi, \eta) = 1$	$N_1(\xi, \eta) = 0$	$N_1(\xi, \eta) = 0$	$N_1(\xi, \eta) = 0$
Csomópont 2	$N_2(\xi, \eta) = 0$	$N_2(\xi, \eta) = 1$	$N_2(\xi, \eta) = 0$	$N_2(\xi, \eta) = 0$
Csomópont 3	$N_3(\xi, \eta) = 0$	$N_3(\xi, \eta) = 0$	$N_3(\xi, \eta) = 1$	$N_3(\xi, \eta) = 0$
Csomópont 4	$N_4(\xi, \eta) = 0$	$N_4(\xi, \eta) = 0$	$N_4(\xi, \eta) = 0$	$N_4(\xi, \eta) = 1$
Csomópont 5	$N_5(\xi, \eta) = 0$	$N_5(\xi, \eta) = 0$	$N_5(\xi, \eta) = 0$	$N_5(\xi, \eta) = 0$
Csomópont 6	$N_6(\xi, \eta) = 0$	$N_6(\xi, \eta) = 0$	$N_6(\xi, \eta) = 0$	$N_6(\xi, \eta) = 0$
Csomópont 7	$N_7(\xi, \eta) = 0$	$N_7(\xi, \eta) = 0$	$N_7(\xi, \eta) = 0$	$N_7(\xi, \eta) = 0$
Csomópont 8	$N_8(\xi, \eta) = 0$	$N_8(\xi, \eta) = 0$	$N_8(\xi, \eta) = 0$	$N_8(\xi, \eta) = 0$

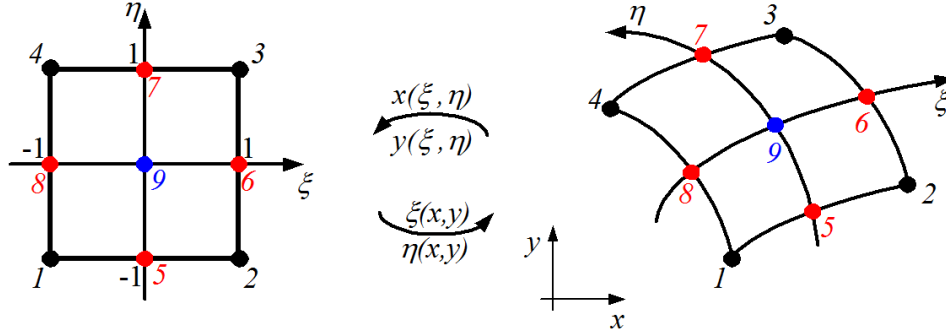
Feltételezve, hogy $\xi = \xi(x, y)$ és $\eta = \eta(x, y)$, egy elem elmozdulásmezőjének közelítése

$$\begin{aligned}
u^e(x, y) &= \sum_{i=1}^8 N_i(\xi, \eta) u_i^e = N_1(\xi, \eta) u_1^e + N_2(\xi, \eta) u_2^e + N_3(\xi, \eta) u_3^e + \\
&\quad + N_4(\xi, \eta) u_4^e + N_5(\xi, \eta) u_5^e + N_6(\xi, \eta) u_6^e + N_7(\xi, \eta) u_7^e + N_8(\xi, \eta) u_8^e, \\
v^e(x, y) &= \sum_{i=1}^8 N_i(\xi, \eta) v_i^e = N_1(\xi, \eta) v_1^e + N_2(\xi, \eta) v_2^e + N_3(\xi, \eta) v_3^e + \\
&\quad + N_4(\xi, \eta) v_4^e + N_5(\xi, \eta) v_5^e + N_6(\xi, \eta) v_6^e + N_7(\xi, \eta) v_7^e + N_8(\xi, \eta) v_8^e
\end{aligned} \tag{7.29}$$

amelyek az elemre vonatkozó kvadratikus függvények, továbbá az alakváltozási mértékek és a feszültségek is kvadratikus függvények, amelyek az elem mechanikai tulajdonságait jobban le tudják írni.

7.2.3. Lagrange-féle kvadratikus négyszög elem

Egy kilenccsomópontú kvadratikus négyszög elem geometriáját és annak leképezését a 7.11. ábra szemlélteti. Ez úgyszintén egy gyakran alkalmazott végelem. A nyolccsomópontú kvadratikus négyszög elemhez képest tartalmaz egy ún. buborék függvényt is.



7.11. ábra Lagrange-féle kvadratikus négyszög elem

Kilencsomópontú kvadratikus négyszög elemet vizsgálva a koordináta interpolációk

$$\begin{aligned}
 x(\xi, \eta) &= \sum_{i=1}^9 N_i x_i = \\
 &= N_1 x_1 + N_2 x_2 + N_3 x_3 + N_4 x_4 + N_5 x_5 + N_6 x_6 + N_7 x_7 + N_8 x_8 + N_9 x_9, \\
 y(\xi, \eta) &= \sum_{i=1}^9 N_i y_i = \\
 &= N_1 y_1 + N_2 y_2 + N_3 y_3 + N_4 y_4 + N_5 y_5 + N_6 y_6 + N_7 y_7 + N_8 y_8 + N_9 y_9.
 \end{aligned} \tag{7.30}$$

A helyi koordináta-rendszerben a kilenc alakfüggvény

$$\begin{aligned}
 N_1(\xi, \eta) &= \frac{1}{4} (1 - \xi)(1 - \eta)(-\xi - \eta - 1), \\
 N_2(\xi, \eta) &= \frac{1}{4} (1 + \xi)(1 - \eta)(\xi - \eta - 1), \\
 N_3(\xi, \eta) &= \frac{1}{4} (1 + \xi)(1 + \eta)(\xi + \eta - 1), \\
 N_4(\xi, \eta) &= \frac{1}{4} (1 - \xi)(1 + \eta)(-\xi + \eta - 1), \\
 N_5(\xi, \eta) &= \frac{1}{2} (1 - \xi^2)(1 - \eta), \\
 N_6(\xi, \eta) &= \frac{1}{2} (1 + \xi)(1 - \eta^2), \\
 N_7(\xi, \eta) &= \frac{1}{2} (1 - \xi^2)(1 + \eta), \\
 N_8(\xi, \eta) &= \frac{1}{2} (1 - \xi)(1 - \eta^2), \\
 N_9(\xi, \eta) &= \frac{1}{2} (1 - \xi^2)(1 - \eta^2).
 \end{aligned} \tag{7.31}$$

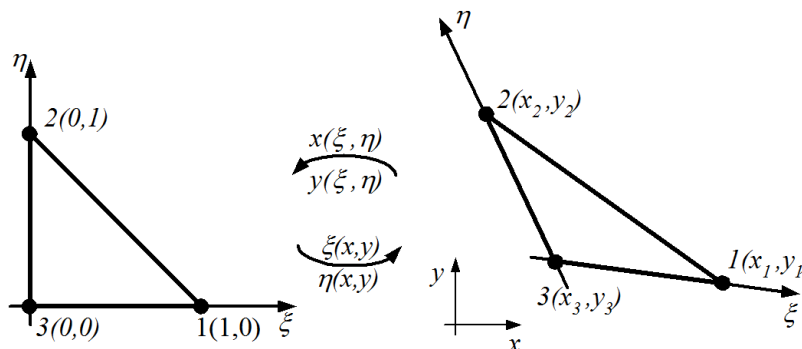
	$\xi = -1; \eta = -1$	$\xi = 1; \eta = -1$	$\xi = 1; \eta = 1$	$\xi = -1; \eta = 1$								
Csomópont 1	$N_1(\xi, \eta) = 1$	$N_1(\xi, \eta) = 0$	$N_1(\xi, \eta) = 0$	$N_1(\xi, \eta) = 0$								
Csomópont 2	$N_2(\xi, \eta) = 0$	$N_2(\xi, \eta) = 1$	$N_2(\xi, \eta) = 0$	$N_2(\xi, \eta) = 0$								
Csomópont 3	$N_3(\xi, \eta) = 0$	$N_3(\xi, \eta) = 0$	$N_3(\xi, \eta) = 1$	$N_3(\xi, \eta) = 0$								
Csomópont 4	$N_4(\xi, \eta) = 0$	$N_4(\xi, \eta) = 0$	$N_4(\xi, \eta) = 0$	$N_4(\xi, \eta) = 1$								
Csomópont 5	$N_5(\xi, \eta) = 0$	$N_5(\xi, \eta) = 0$	$N_5(\xi, \eta) = 0$	$N_5(\xi, \eta) = 0$								
Csomópont 6	$N_6(\xi, \eta) = 0$	$N_6(\xi, \eta) = 0$	$N_6(\xi, \eta) = 0$	$N_6(\xi, \eta) = 0$								
Csomópont 7	$N_7(\xi, \eta) = 0$	$N_7(\xi, \eta) = 0$ </tr <tr> <td>Csomópont 8</td> <td>$N_8(\xi, \eta) = 0$</td> <td>$N_8(\xi, \eta) = 0$</td> <td>$N_8(\xi, \eta) = 0$</td> <td>$N_8(\xi, \eta) = 0$</td> </tr> <tr> <td>Csomópont 9</td> <td>$N_9(\xi, \eta) = 0$</td> <td>$N_9(\xi, \eta) = 0$</td> <td>$N_9(\xi, \eta) = 0$</td> <td>$N_9(\xi, \eta) = 0$</td> </tr>	Csomópont 8	$N_8(\xi, \eta) = 0$	$N_8(\xi, \eta) = 0$	$N_8(\xi, \eta) = 0$	$N_8(\xi, \eta) = 0$	Csomópont 9	$N_9(\xi, \eta) = 0$	$N_9(\xi, \eta) = 0$	$N_9(\xi, \eta) = 0$	$N_9(\xi, \eta) = 0$
Csomópont 8	$N_8(\xi, \eta) = 0$	$N_8(\xi, \eta) = 0$	$N_8(\xi, \eta) = 0$	$N_8(\xi, \eta) = 0$								
Csomópont 9	$N_9(\xi, \eta) = 0$	$N_9(\xi, \eta) = 0$	$N_9(\xi, \eta) = 0$	$N_9(\xi, \eta) = 0$								

Feltételezve, hogy $\xi = \xi(x, y)$ és $\eta = \eta(x, y)$, egy elem elmozdulásmezőjének közelítése

$$\begin{aligned}
u^e(x, y) &= \sum_{i=1}^9 N_i(\xi, \eta) u_i^e = N_1(\xi, \eta) u_1^e + N_2(\xi, \eta) u_2^e + N_3(\xi, \eta) u_3^e + \\
&+ N_4(\xi, \eta) u_4^e + N_5(\xi, \eta) u_5^e + N_6(\xi, \eta) u_6^e + N_7(\xi, \eta) u_7^e + N_8(\xi, \eta) u_8^e + N_9(\xi, \eta) u_9^e, \\
v^e(x, y) &= \sum_{i=1}^9 N_i(\xi, \eta) v_i^e = N_1(\xi, \eta) v_1^e + N_2(\xi, \eta) v_2^e + N_3(\xi, \eta) v_3^e + \\
&+ N_4(\xi, \eta) v_4^e + N_5(\xi, \eta) v_5^e + N_6(\xi, \eta) v_6^e + N_7(\xi, \eta) v_7^e + N_8(\xi, \eta) v_8^e + N_9(\xi, \eta) v_9^e.
\end{aligned} \tag{7.32}$$

7.2.4. Lineáris háromszög elem

Egy lineáris háromszög elem geometriáját és leképezését a 7.12. ábra szemlélteti. Egy háromszög elem a négyszög elem két szomszédos csomópontjának egybeállításából képezhető.



7.12. ábra Lineáris háromszög elem

Lineáris háromszög elemet vizsgálva a koordináta interpolációk

$$\begin{aligned}
x(\xi, \eta) &= \sum_{i=1}^3 N_i x_i = N_1 x_1 + N_2 x_2 + N_3 x_3, \\
y(\xi, \eta) &= \sum_{i=1}^3 N_i y_i = N_1 y_1 + N_2 y_2 + N_3 y_3,
\end{aligned} \tag{7.33}$$

ahol az alakfüggvények

$$\begin{aligned}
N_1(\xi, \eta) &= \xi, \\
N_2(\xi, \eta) &= \eta, \\
N_3(\xi, \eta) &= 1 - \xi - \eta.
\end{aligned} \tag{7.34}$$

Az alakfüggvény tulajdonságai:

1.	$\sum_{i=1}^3 N_i(\xi, \eta) = 1 \quad -1 \leq \xi \leq 1$
2.	$N_i(\xi_j, \eta_j) = \begin{cases} 1 & \text{ha } i = j \\ 0 & \text{ha } i \neq j \end{cases}$ ahol a j -edik csomópont koordinátái $\xi_j, \eta_j, j = 1, 2, 3$

Feltételezve, hogy $\xi = \xi(x, y)$ és $\eta = \eta(x, y)$, egy elem elmozdulásmezőjének közelítése

$$\begin{aligned} u^e(x, y) &= \sum_{i=1}^3 N_i(\xi, \eta) u_i^e = N_1(\xi, \eta) u_1^e + N_2(\xi, \eta) u_2^e + N_3(\xi, \eta) u_3^e, \\ v^e(x, y) &= \sum_{i=1}^3 N_i(\xi, \eta) v_i^e = N_1(\xi, \eta) v_1^e + N_2(\xi, \eta) v_2^e + N_3(\xi, \eta) v_3^e, \end{aligned} \quad (7.35)$$

ahol u_i^e és v_i^e az e elem i -edik csomópontjának elmozdulás koordinátái. A vizsgálat célja, hogy meghatározzuk ezeket a csomóponti értékeket. A mátrixformalizmust alkalmazva

$$\mathbf{u}^e = \underbrace{\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}}_{(2 \times 1)}^e = \underbrace{\begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 \end{bmatrix}}_{(2 \times 6)} \underbrace{\begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{bmatrix}}_{(6 \times 1)}^e = \mathbf{N} \mathbf{q}^e, \quad (7.36)$$

ahol \mathbf{q}^e az elem csomóponti elmozdulásvektora. Felhasználva (6.11) egyenletet az elem alakváltozási vektorát megkaphatjuk,

$$\boldsymbol{\varepsilon}^e = \mathbf{D}^e \mathbf{u}^e = \mathbf{D}^e \mathbf{N} \mathbf{q}^e = \mathbf{B} \mathbf{q}^e, \quad (7.37)$$

ahol \mathbf{B} az alakváltozás-csomóponti elmozdulás mátrix

$$\begin{aligned} \mathbf{B} = \mathbf{D}^e \mathbf{N} &= \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}}_{(3 \times 2)} \underbrace{\begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 \end{bmatrix}}_{(2 \times 6)} = \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_3}{\partial y} & \frac{\partial N_3}{\partial x} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (7.38)$$

Az alakfüggvény deriváltjai

$$\begin{aligned}\frac{\partial N_i(\xi, \eta)}{\partial x} &= \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i(\xi, \eta)}{\partial y} &= \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y}\end{aligned}\quad (7.39)$$

A 7.39 egyenlet mátrixegyenletként is felírható

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ \frac{\partial \xi}{\partial y} & \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{bmatrix}}_{\mathbf{J}^{-1}} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \mathbf{J}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{bmatrix}, \quad (7.40)$$

ahol \mathbf{J} a Jacobi-féle mátrix. A végeselemes számításoknál a Jacobi-féle mátrix inverzét kell előállítanunk, azaz feltétel, hogy az invertálható legyen. A Jacobi mátrix egyébként az $x = x(\xi)$ és $y = y(\xi, \eta)$ függvényében ismert, azaz

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix}}_{\mathbf{J}} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} = \mathbf{J} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix}, \quad (7.41)$$

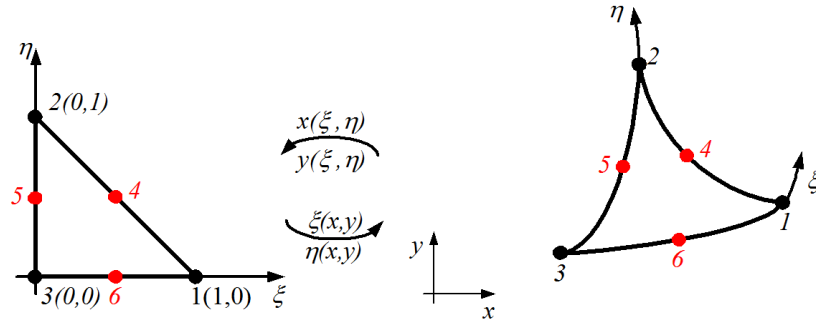
Az inverz Jacobi mátrix előállítása,

$$\mathbf{J}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ \frac{\partial \xi}{\partial y} & \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{bmatrix} = \frac{1}{\det \mathbf{J}} \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial \eta} & -\frac{\partial y}{\partial \xi} \\ -\frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial x}{\partial \xi} \end{bmatrix}, \quad (7.42)$$

ahol $\det \mathbf{J} = J > 0$. A Jacobi mátrix determinánusa fontos szerepet tölt be az elem leképezésének ellenőrzése során is. Azon esetek, amikor $J < 0$, vagy $J = 0$, nem megengedhetőek a végeselemes számítások során, mert numerikus hibát okoznak. Ha annak értéke zérus, akkor a leképezés szinguláris. Amennyiben a Jacobi determináns előjelet vált, akkor az azt jelenti, hogy az elem nagyon torzult alakú.

7.2.5. Kvadratikus háromszög elem

Egy kvadratikus háromszög elem geometriáját és leképezését a 7.13. ábra szemlélteti.



7.13. ábra Kvadratikus háromszög elem

Kvadratikus háromszög elemet vizsgálva a koordináta interpolációk

$$\begin{aligned} x(\xi, \eta) &= \sum_{i=1}^6 N_i x_i = N_1 x_1 + N_2 x_2 + N_3 x_3 + N_4 x_4 + N_5 x_5 + N_6 x_6, \\ y(\xi, \eta) &= \sum_{i=1}^6 N_i y_i = N_1 y_1 + N_2 y_2 + N_3 y_3 + N_4 y_4 + N_5 y_5 + N_6 y_6, \end{aligned} \quad (7.43)$$

ahol az alakfüggvények

$$\begin{aligned} N_1(\xi, \eta) &= \xi(2\xi - 1), \\ N_2(\xi, \eta) &= \eta(2\eta - 1), \\ N_3(\xi, \eta) &= (1 - \xi - \eta)(1 - 2\xi - 2\eta), \\ N_4(\xi, \eta) &= 4\xi\eta, \\ N_5(\xi, \eta) &= \eta(1 - \xi - \eta), \\ N_6(\xi, \eta) &= \xi(1 - \xi - \eta). \end{aligned} \quad (7.44)$$

Az alakfüggvény tulajdonságai:

1.	$\sum_{i=1}^6 N_i(\xi, \eta) = 1 \quad -1 \leq \xi \leq 1$
2.	$N_i(\xi_j, \eta_j) = \begin{cases} 1 & \text{ha } i = j \\ 0 & \text{ha } i \neq j \end{cases}$ ahol a j -edik csomópont koordinátái $\xi_j, \eta_j, j = 1, \dots, 6$

Feltételezve, hogy $\xi = \xi(x, y)$ és $\eta = \eta(x, y)$, egy elem elmozdulásmezőjének közelítése

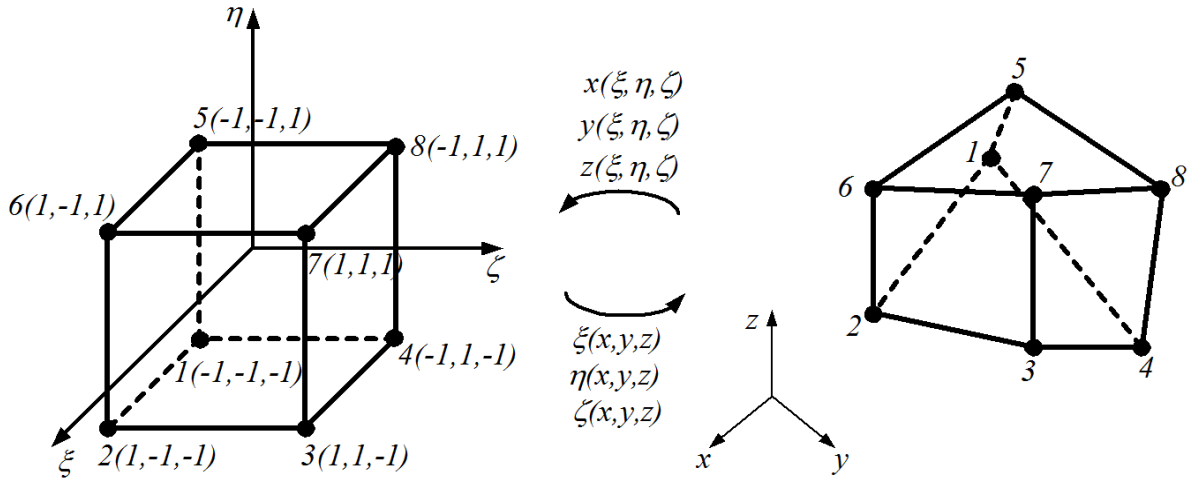
$$\begin{aligned} u^e(x, y) &= \sum_{i=1}^6 N_i(\xi, \eta) u_i^e = \\ &= N_1(\xi, \eta) u_1^e + N_2(\xi, \eta) u_2^e + N_3(\xi, \eta) u_3^e + N_4(\xi, \eta) u_4^e + N_5(\xi, \eta) u_5^e + N_6(\xi, \eta) u_6^e, \\ v^e(x, y) &= \sum_{i=1}^6 N_i(\xi, \eta) v_i^e = \\ &= N_1(\xi, \eta) v_1^e + N_2(\xi, \eta) v_2^e + N_3(\xi, \eta) v_3^e + N_4(\xi, \eta) v_4^e + N_5(\xi, \eta) v_5^e + N_6(\xi, \eta) v_6^e, \end{aligned} \quad (7.45)$$

ahol u_i^e és v_i^e az e elem i -edik csomópontjának elmozdulás koordinátái.

7.3. Háromdimenziós izoparametrikus leképezés

7.3.1. Nyolccsomópontú hexaéder („tégla”) elem

Egy nyolccsomópontú hexaéder elem geometriáját és annak leképezését a 7.14 ábra szemlélteti. Az ilyen elemeket szokás „tégla” elemnek is nevezni. A hexaéder topológiailag egyenértékű egy kockával, amelynek nyolc sarka van. Az ilyen típusú elemeket széles körben alkalmazzák térbeli feladatok végesesemes vizsgálatánál. Ezeknek az elemeknek 24 szabadsági foka van.



7.14. ábra Nyolccsomópontú hexaéder elem

Nyelccsomópontú hexaéder elemet vizsgálva a koordináta interpolációk

$$\begin{aligned}
 x(\xi, \eta, \zeta) &= \sum_{i=1}^8 N_i x_i = \\
 &= N_1 x_1 + N_2 x_2 + N_3 x_3 + N_4 x_4 + N_5 x_5 + N_6 x_6 + N_7 x_7 + N_8 x_8, \\
 y(\xi, \eta, \zeta) &= \sum_{i=1}^8 N_i y_i = \\
 &= N_1 y_1 + N_2 y_2 + N_3 y_3 + N_4 y_4 + N_5 y_5 + N_6 y_6 + N_7 y_7 + N_8 y_8, \\
 z(\xi, \eta, \zeta) &= \sum_{i=1}^8 N_i z_i = \\
 &= N_1 z_1 + N_2 z_2 + N_3 z_3 + N_4 z_4 + N_5 z_5 + N_6 z_6 + N_7 z_7 + N_8 z_8,
 \end{aligned} \tag{7.46}$$

ahol az alakfüggvények

$$\begin{aligned}
N_1(\xi, \eta, \zeta) &= \frac{1}{8}(1 - \xi)(1 - \eta)(1 - \zeta), \\
N_2(\xi, \eta, \zeta) &= \frac{1}{8}(1 + \xi)(1 - \eta)(1 - \zeta), \\
N_3(\xi, \eta, \zeta) &= \frac{1}{8}(1 + \xi)(1 + \eta)(1 - \zeta), \\
N_4(\xi, \eta, \zeta) &= \frac{1}{8}(1 - \xi)(1 + \eta)(1 - \zeta), \\
N_5(\xi, \eta, \zeta) &= \frac{1}{8}(1 - \xi)(1 - \eta)(1 + \zeta), \\
N_6(\xi, \eta, \zeta) &= \frac{1}{8}(1 + \xi)(1 - \eta)(1 + \zeta), \\
N_7(\xi, \eta, \zeta) &= \frac{1}{8}(1 + \xi)(1 + \eta)(1 + \zeta), \\
N_8(\xi, \eta, \zeta) &= \frac{1}{8}(1 - \xi)(1 + \eta)(1 + \zeta).
\end{aligned} \tag{7.47}$$

Az alakfüggvény tulajdonságai:

1.	$\sum_{i=1}^8 N_i(\xi, \eta, \zeta) = 1 \quad -1 \leq \begin{matrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{matrix} \leq 1$
2.	$N_i(\xi_j, \eta_j, \zeta_j) = \begin{cases} 1 & \text{ha } i = j \\ 0 & \text{ha } i \neq j \end{cases}$ <p>ahol a j-edik csomópont koordinátái $\xi_j, \eta_j, \zeta_j, j = 1, \dots, 8$</p>

Feltételezve, hogy $\xi = \xi(x, y, z)$, $\eta = \eta(x, y, z)$ és $\zeta = \zeta(x, y, z)$, egy elem elmozdulásmezőjének közelítése

$$\begin{aligned}
u^e(x, y, z) &= \sum_{i=1}^8 N_i(\xi, \eta, \zeta) u_i^e = N_1(\xi, \eta, \zeta) u_1^e + N_2(\xi, \eta, \zeta) u_2^e + N_3(\xi, \eta, \zeta) u_3^e + \\
&\quad + N_4(\xi, \eta, \zeta) u_4^e + N_5(\xi, \eta, \zeta) u_5^e + N_6(\xi, \eta, \zeta) u_6^e + N_7(\xi, \eta, \zeta) u_7^e + N_8(\xi, \eta, \zeta) u_8^e, \\
v^e(x, y, z) &= \sum_{i=1}^8 N_i(\xi, \eta, \zeta) v_i^e = N_1(\xi, \eta, \zeta) v_1^e + N_2(\xi, \eta, \zeta) v_2^e + N_3(\xi, \eta, \zeta) v_3^e + \\
&\quad + N_4(\xi, \eta, \zeta) v_4^e + N_5(\xi, \eta, \zeta) v_5^e + N_6(\xi, \eta, \zeta) v_6^e + N_7(\xi, \eta, \zeta) v_7^e + N_8(\xi, \eta, \zeta) v_8^e, \\
w^e(x, y, z) &= \sum_{i=1}^8 N_i(\xi, \eta, \zeta) w_i^e = N_1(\xi, \eta, \zeta) w_1^e + N_2(\xi, \eta, \zeta) w_2^e + N_3(\xi, \eta, \zeta) w_3^e + \\
&\quad + N_4(\xi, \eta, \zeta) w_4^e + N_5(\xi, \eta, \zeta) w_5^e + N_6(\xi, \eta, \zeta) w_6^e + N_7(\xi, \eta, \zeta) w_7^e + N_8(\xi, \eta, \zeta) w_8^e,
\end{aligned} \tag{7.48}$$

ahol u_i^e , v_i^e és w_i^e az e elem i -edik csomópontjának elmozdulás koordinátái. A vizsgálat célja, hogy meghatározzuk ezeket a csomóponti értékeket. A mátrixformalizmust alkalmazva

$$\mathbf{u}^e = \underbrace{\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}}_{(3 \times 1)}^e = \underbrace{\begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & \dots & N_8 & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & \dots & 0 & N_8 & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & \dots & 0 & 0 & N_8 \end{bmatrix}}_{(3 \times 24)} \underbrace{\begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \\ \vdots \\ u_8 \\ v_8 \\ w_8 \end{bmatrix}}_{(24 \times 1)}^e = \mathbf{Nq}^e, \quad (7.49)$$

ahol \mathbf{q}^e az elem csomóponti elmozdulásvektora. Felhasználva a (6.11) egyenletet az elem alakváltozási vektorát megkaphatjuk,

$$\boldsymbol{\varepsilon}^e = \mathbf{D}^e \mathbf{u}^e = \mathbf{D}^e \mathbf{Nq}^e = \mathbf{Bq}^e, \quad (7.50)$$

ahol \mathbf{B} az alakváltozás-csomóponti elmozdulás mátrix

$$\mathbf{B} = \mathbf{D}^e \mathbf{N} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}}_{(6 \times 3)} \underbrace{\begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & \dots & N_8 & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & \dots & 0 & N_8 & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & \dots & 0 & 0 & N_8 \end{bmatrix}}_{(3 \times 24)} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & 0 & \dots & \frac{\partial N_8}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & \dots & 0 & \frac{\partial N_8}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_1}{\partial z} & \dots & 0 & 0 & \frac{\partial N_8}{\partial z} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & \dots & \frac{\partial N_8}{\partial y} & \frac{\partial N_8}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial z} & \frac{\partial N_1}{\partial y} & \dots & 0 & \frac{\partial N_8}{\partial z} & \frac{\partial N_8}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1}{\partial z} & 0 & \frac{\partial N_1}{\partial x} & \dots & \frac{\partial N_8}{\partial z} & 0 & \frac{\partial N_8}{\partial x} \end{bmatrix}}_{(6 \times 24)}. \quad (7.51)$$

Az alakfüggvény deriváltjai

$$\begin{aligned}
\frac{\partial N_i(\xi, \eta, \zeta)}{\partial x} &= \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial x}, \\
\frac{\partial N_i(\xi, \eta, \zeta)}{\partial y} &= \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial y}, \\
\frac{\partial N_i(\xi, \eta, \zeta)}{\partial z} &= \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial z} + \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial z} + \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial z}.
\end{aligned}
\tag{7.52}$$

A (7.52) egyenlet mátrixegyenletként is felírható

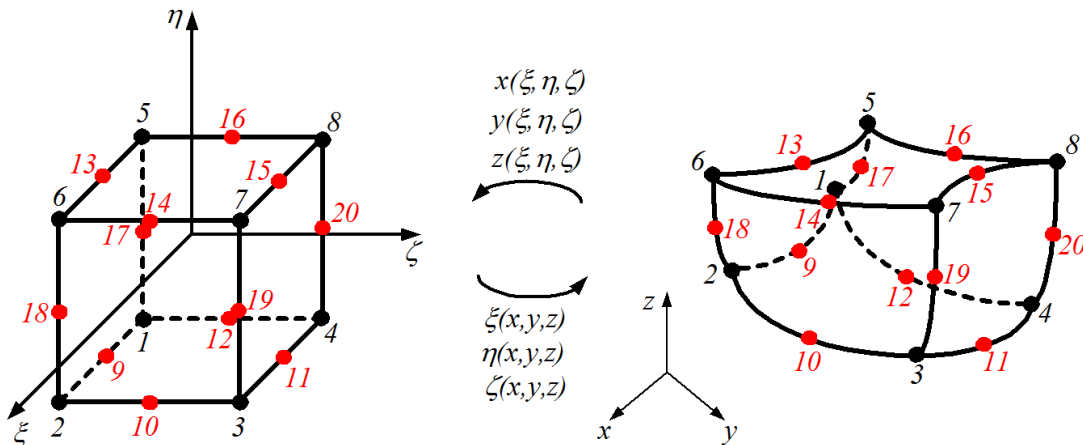
$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial x} & \frac{\partial \zeta}{\partial x} \\ \frac{\partial \xi}{\partial y} & \frac{\partial \eta}{\partial y} & \frac{\partial \zeta}{\partial y} \\ \frac{\partial \xi}{\partial z} & \frac{\partial \eta}{\partial z} & \frac{\partial \zeta}{\partial z} \end{bmatrix}}_{\mathbf{J}^{-1}} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \\ \frac{\partial}{\partial \zeta} \end{bmatrix} = \mathbf{J}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \\ \frac{\partial}{\partial \zeta} \end{bmatrix},
\tag{7.53}$$

ahol \mathbf{J} a Jacobi-féle mátrix. A végesesemes számításoknál a Jacobi-féle mátrix inverzét kell előállítanunk, azaz feltétel, hogy az invertálható legyen. A Jacobi mátrix egyébként az $x = x(\xi, \eta, \zeta)$, $y = y(\xi, \eta, \zeta)$ és $z = z(\xi, \eta, \zeta)$ függvényében ismert, azaz

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \\ \frac{\partial}{\partial \zeta} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{bmatrix}}_{\mathbf{J}} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} = \mathbf{J} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix},
\tag{7.54}$$

7.3.2. Húszcsomópontú kvadratikus hexaéder elem

Egy húszcsomópontú kvadratikus hexaéder elem geometriáját és annak leképezését a 7.15 ábra szemlélteti. Az ilyen elemek 8 sarokponti csomóponttal és az élek középpontjaiban elhelyezett további 12 csomóponttal rendelkeznek és összesen 60 szabadságfokkal.



7.15. ábra Húszcsomópontú kvadratikus hexaéder elem

Húszcsomópontú hexaéder elemet vizsgálva a koordináta interpolációk

$$\begin{aligned} x(\xi, \eta, \zeta) &= \sum_{i=1}^{20} N_i x_i, \\ y(\xi, \eta, \zeta) &= \sum_{i=1}^{20} N_i y_i, \\ z(\xi, \eta, \zeta) &= \sum_{i=1}^{20} N_i z_i. \end{aligned} \quad (7.55)$$

ahol az alakfüggvények csoportba oszthatók. A sarokponti csomópontok ($i = 1, 2, 3, \dots, 8$)

$$N_i(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{8} (1 + \xi \xi_i)(1 + \eta \eta_i)(1 + \zeta \zeta_i)(\xi \xi_i + \eta \eta_i + \zeta \zeta_i - 2). \quad (7.56)$$

Az élek középpontjában elhelyezett csomópontra ($i = 9, 11, 15, 13$)

$$N_i(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{4} (1 - \xi^2)(1 + \eta \eta_i)(1 + \zeta \zeta_i). \quad (7.57)$$

Az élek középpontjában elhelyezett csomópontra ($i = 10, 12, 16, 14$)

$$N_i(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{4} (1 - \eta^2)(1 + \xi \xi_i)(1 + \zeta \zeta_i). \quad (7.58)$$

Az élek középpontjában elhelyezett csomópontra ($i = 17, 18, 19, 20$)

$$N_i(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{4} (1 - \zeta^2)(1 + \xi \xi_i)(1 + \eta \eta_i). \quad (7.59)$$

Az alakfüggvény tulajdonságai:

1.	$\sum_{i=1}^{20} N_i(\xi, \eta, \zeta) = 1 \quad \begin{matrix} \xi \\ -1 \leq \eta \leq 1 \\ \zeta \end{matrix}$
2.	$N_i(\xi_j, \eta_j, \zeta_j) = \begin{cases} 1 & \text{ha } i = j \\ 0 & \text{ha } i \neq j \end{cases}$ ahol a j -edik csomópont koordinátái $\xi_j, \eta_j, \zeta_j, j = 1, \dots, 20$

Feltételezve, hogy $\xi = \xi(x, y, z)$, $\eta = \eta(x, y, z)$ és $\zeta = \zeta(x, y, z)$, egy elem elmozdulásmezőjének közelítése

$$\begin{aligned} u^e(x, y, z) &= \sum_{i=1}^{20} N_i(\xi, \eta, \zeta) u_i^e, \\ v^e(x, y, z) &= \sum_{i=1}^{20} N_i(\xi, \eta, \zeta) v_i^e, \\ w^e(x, y, z) &= \sum_{i=1}^{20} N_i(\xi, \eta, \zeta) w_i^e, \end{aligned} \quad (7.60)$$

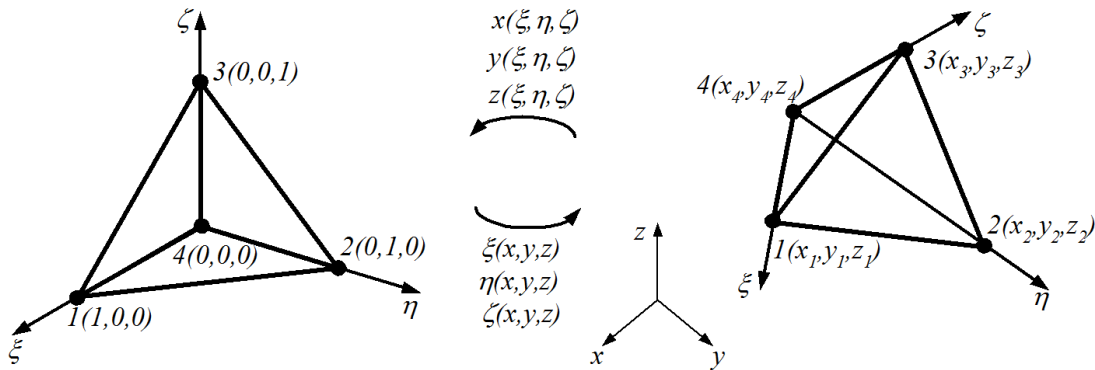
ahol u_i^e , v_i^e és w_i^e az e elem i -edik csomópontjának elmozdulás koordinátái.

7.3.3. Huszonhétcsomópontú hexaéder elem

A huszonhétcsomópontú hexaéder 7 további csomóponttal rendelkezik a húszcsomópontú hexaéder elemhez képest. Hat csomópont az oldallapok középpontjában, míg egy belső (ún. buborék függvény) pont a hexaéder térfogatközéppontjában van. Az ilyen típusú elemek 81 szabadságfokkal rendelkeznek.

7.3.4. Négycsomópontú tetraéder elem

Egy négycsomópontú tetraéder elem geometriáját és leképezését a 7.16 ábra szemlélteti. Az ilyen típusú elem 4 sarokponti csomóponttal rendelkezik, valamint 12 szabadságfoka van.



7.16. ábra Négycsomópontú tetraéder elem

Négycsomópontú tetraéder térbeli elemet vizsgálva a koordináta interpolációk

$$\begin{aligned}
 x(\xi, \eta, \zeta) &= \sum_{i=1}^4 N_i x_i = N_1 x_1 + N_2 x_2 + N_3 x_3 + N_4 x_4, \\
 y(\xi, \eta, \zeta) &= \sum_{i=1}^4 N_i y_i = N_1 y_1 + N_2 y_2 + N_3 y_3 + N_4 y_4, \\
 z(\xi, \eta, \zeta) &= \sum_{i=1}^4 N_i z_i = N_1 z_1 + N_2 z_2 + N_3 z_3 + N_4 z_4,
 \end{aligned} \tag{7.61}$$

ahol az alakfüggvények

$$\begin{aligned}
 N_1(\xi, \eta, \zeta) &= \xi, \\
 N_2(\xi, \eta, \zeta) &= \eta, \\
 N_3(\xi, \eta, \zeta) &= \zeta, \\
 N_4(\xi, \eta, \zeta) &= 1 - \xi - \eta - \zeta.
 \end{aligned} \tag{7.62}$$

Az alakfüggvény tulajdonságai:

1.	$\sum_{i=1}^4 N_i(\xi, \eta, \zeta) = 1 \quad -1 \leq \xi \leq 1$
2.	$N_i(\xi_j, \eta_j, \zeta_j) = \begin{cases} 1 & \text{ha } i = j \\ 0 & \text{ha } i \neq j \end{cases}$ <p>ahol a j-edik csomópont koordinátái $\xi_j, \eta_j, \zeta_j, j = 1, 2, 3, 4$</p>

Feltételezve, hogy $\xi = \xi(x, y, z)$, $\eta = \eta(x, y, z)$ és $\zeta = \zeta(x, y, z)$, egy elem elmozdulásmezőjének közelítése

$$\begin{aligned}
 u^e(x, y, z) &= \sum_{i=1}^4 N_i(\xi, \eta, \zeta) u_i^e = \\
 &= N_1(\xi, \eta, \zeta) u_1^e + N_2(\xi, \eta, \zeta) u_2^e + N_3(\xi, \eta, \zeta) u_3^e + N_4(\xi, \eta, \zeta) u_4^e, \\
 v^e(x, y, z) &= \sum_{i=1}^4 N_i(\xi, \eta, \zeta) v_i^e = \\
 &= N_1(\xi, \eta, \zeta) v_1^e + N_2(\xi, \eta, \zeta) v_2^e + N_3(\xi, \eta, \zeta) v_3^e + N_4(\xi, \eta, \zeta) v_4^e, \\
 w^e(x, y, z) &= \sum_{i=1}^4 N_i(\xi, \eta, \zeta) w_i^e = \\
 &= N_1(\xi, \eta, \zeta) w_1^e + N_2(\xi, \eta, \zeta) w_2^e + N_3(\xi, \eta, \zeta) w_3^e + N_4(\xi, \eta, \zeta) w_4^e,
 \end{aligned} \tag{7.63}$$

ahol u_i^e , v_i^e és w_i^e az e elem i -edik csomópontjának elmozdulás koordinátái. A vizsgálat célja, hogy meghatározzuk ezeket a csomóponi értékeket. A mátrixformalizmust alkalmazva

$$\mathbf{u}^e = \underbrace{\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}}_{(3 \times 1)}^e = \underbrace{\begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & \cdots & N_4 & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & \cdots & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & \cdots & 0 & 0 & N_4 \end{bmatrix}}_{(3 \times 12)} \underbrace{\begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \\ \vdots \\ u_4 \\ v_4 \\ w_4 \end{bmatrix}}_{(12 \times 1)}^e = \mathbf{N} \mathbf{q}^e, \tag{7.64}$$

ahol \mathbf{q}^e az elem csomóponi elmozdulásvektora. Felhasználva a (6.11) egyenletet az elem alakváltozási vektorát megkaphatjuk,

$$\boldsymbol{\varepsilon}^e = \mathbf{D}^e \mathbf{u}^e = \mathbf{D}^e \mathbf{N} \mathbf{q}^e = \mathbf{B} \mathbf{q}^e, \tag{7.65}$$

ahol \mathbf{B} az alakváltozás-csomóponi elmozdulás mátrix

$$\mathbf{B} = \mathbf{D}^e \mathbf{N} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}}_{(6 \times 3)} \underbrace{\begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & \cdots & N_4 & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & \cdots & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & \cdots & 0 & 0 & N_4 \end{bmatrix}}_{(3 \times 12)} = \tag{7.66}$$

$$= \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & 0 & \dots & \frac{\partial N_4}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & \dots & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_1}{\partial z} & & 0 & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial z} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & & \frac{\partial N_4}{\partial y} & \frac{\partial N_4}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial z} & \frac{\partial N_1}{\partial y} & \dots & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial z} & \frac{\partial N_4}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1}{\partial z} & 0 & \frac{\partial N_1}{\partial x} & & \frac{\partial N_4}{\partial z} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial x} \end{bmatrix}}_{(6 \times 12)}.$$

Az alakfüggvény deriváltjai

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_i(\xi, \eta, \zeta)}{\partial x} &= \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial x}, \\ \frac{\partial N_i(\xi, \eta, \zeta)}{\partial y} &= \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial y}, \\ \frac{\partial N_i(\xi, \eta, \zeta)}{\partial z} &= \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial z} + \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial z} + \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial z}. \end{aligned} \quad (7.67)$$

A (7.67) egyenlet mátrixegyenletként is felírható

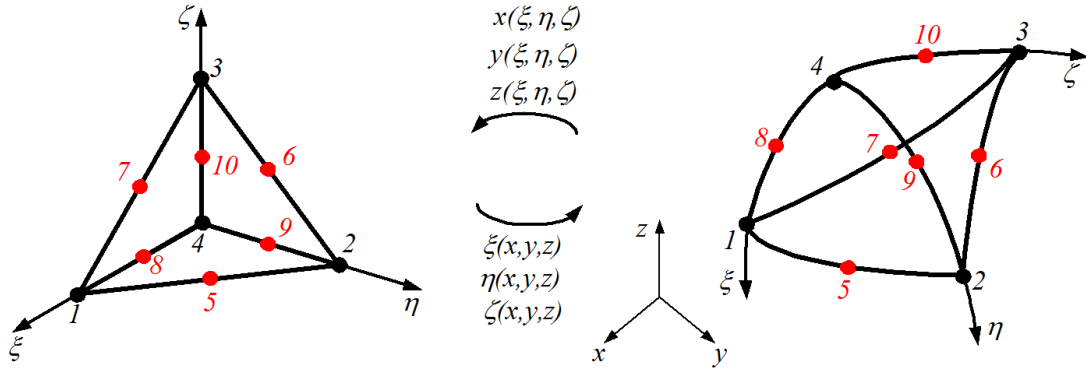
$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial x} & \frac{\partial \zeta}{\partial x} \\ \frac{\partial \xi}{\partial y} & \frac{\partial \eta}{\partial y} & \frac{\partial \zeta}{\partial y} \\ \frac{\partial \xi}{\partial z} & \frac{\partial \eta}{\partial z} & \frac{\partial \zeta}{\partial z} \end{bmatrix}}_{\mathbf{J}^{-1}} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \\ \frac{\partial}{\partial \zeta} \end{bmatrix} = \mathbf{J}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \\ \frac{\partial}{\partial \zeta} \end{bmatrix}, \quad (7.68)$$

ahol \mathbf{J} a Jacobi-féle mátrix. A végesesleges számításoknál a Jacobi-féle mátrix inverzét kell előállítanunk, azaz feltétel, hogy az invertálható legyen. A Jacobi mátrix egyébként az $x = x(\xi, \eta, \zeta)$, $y = y(\xi, \eta, \zeta)$ és $z = z(\xi, \eta, \zeta)$ függvényében ismert, azaz

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \\ \frac{\partial}{\partial \zeta} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{bmatrix}}_{\mathbf{J}} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} = \mathbf{J} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix}, \quad (7.69)$$

7.3.5. Tízcsomópontú kvadratikus tetraéder elem

Egy tízcsomópontú kvadratikus tetraéder elem geometriáját és leképezését a 7.17 ábra szemlélteti. Az ilyen elemek 4 sarokponti csomóponttal és az élek középpontjaiban elhelyezett további 6 csomóponttal rendelkeznek és összesen 30 szabadságfokkal.



7.17. ábra Tízcsomópontú kvadratikus tetraéder elem

Tízcsomópontú kvadratikus tetraéder térbeli elemet vizsgálva a koordináta interpolációk

$$\begin{aligned}
 x(\xi, \eta, \zeta) &= \sum_{i=1}^{10} N_i x_i, \\
 y(\xi, \eta, \zeta) &= \sum_{i=1}^{10} N_i y_i, \\
 z(\xi, \eta, \zeta) &= \sum_{i=1}^{10} N_i z_i,
 \end{aligned} \tag{7.70}$$

ahol az alakfüggvények

$$\begin{aligned}
 N_1(\xi, \eta, \zeta) &= \xi, \\
 N_2(\xi, \eta, \zeta) &= \eta, \\
 N_3(\xi, \eta, \zeta) &= \zeta, \\
 N_4(\xi, \eta, \zeta) &= 1 - \xi - \eta - \zeta, \\
 N_5(\xi, \eta, \zeta) &= 4\xi\eta, \\
 N_6(\xi, \eta, \zeta) &= 4\eta\zeta, \\
 N_7(\xi, \eta, \zeta) &= 4\zeta\xi, \\
 N_8(\xi, \eta, \zeta) &= \xi(1 - \xi - \eta - \zeta), \\
 N_9(\xi, \eta, \zeta) &= \eta(1 - \xi - \eta - \zeta), \\
 N_{10}(\xi, \eta, \zeta) &= \zeta(1 - \xi - \eta - \zeta).
 \end{aligned} \tag{7.71}$$

Az alakfüggvény tulajdonságai:

1.	$\sum_{i=1}^{10} N_i(\xi, \eta, \zeta) = 1 \quad \begin{matrix} \xi \\ -1 \leq \eta \leq 1 \\ \zeta \end{matrix}$
2.	$N_i(\xi_j, \eta_j, \zeta_j) = \begin{cases} 1 & \text{ha } i = j \\ 0 & \text{ha } i \neq j \end{cases}$ <p>ahol a j-edik csomópont koordinátái $\xi_j, \eta_j, \zeta_j, j = 1, 2, \dots, 10$</p>

Feltételezve, hogy $\xi = \xi(x, y, z)$, $\eta = \eta(x, y, z)$ és $\zeta = \zeta(x, y, z)$, egy elem elmozdulásmezőjének közelítése

$$\begin{aligned} u^e(x, y, z) &= \sum_{i=1}^{10} N_i(\xi, \eta, \zeta) u_i^e, \\ v^e(x, y, z) &= \sum_{i=1}^{10} N_i(\xi, \eta, \zeta) v_i^e, \\ w^e(x, y, z) &= \sum_{i=1}^{10} N_i(\xi, \eta, \zeta) w_i^e, \end{aligned} \quad (7.72)$$

ahol u_i^e , v_i^e és w_i^e az e elem i -edik csomópontjának elmozdulás koordinátái.

7.3.6. Tizennégycsomópontú tetraéder elem

A tizennégycsomópontú tetraéder 4 további csomóponttal rendelkezik a tízcsomópontú tetraéder elemhez képest. Három csomópont az oldallapok középpontjában, míg egy belső (ún. buborék függvény) pont a tetraéder térfogatközéppontjában van. Az ilyen típusú elemek 42 szabadságfokkal rendelkeznek.

8. NUMERIKUS INTEGRÁLÁS

A végelem-módszer egyenleteiben határozott (feladattól függően vonalmenti, felületmenti vagy térbeli) integrálok jelennek meg. Izoparamterikus végelemek alkalmazásánál az elem merevségi mátrixának és az elem tehervektorának meghatározásához numerikus integrálás szükséges.

Az elem merevségi mátrixa

$$\mathbf{K}^e = \int_V \mathbf{B}^{eT} \mathbf{C}^e \mathbf{B}^e dV, \quad (8.1)$$

ahol

$$dV = dx dy dz. \quad (8.2)$$

Az elem tehervektora

$$\mathbf{f}_p^e = \int_{A_p} \mathbf{N}^{eT} \mathbf{p}^e dA, \quad (8.3)$$

ahol

$$dA = dx dy. \quad (8.4)$$

A végelelemes programcsomagok többfajta numerikus integrálási módszert ajánlanak fel. A mindenkori cél az, hogy minél pontosabban tudjuk kiszámolni az integrálokat. Számos numerikus módszer van numerikus integrálás elvégzésére, ilyen pl. a Newton-Cotes formula, a Gauss-féle kvadratura, stb. Végelelemes alkalmazások esetén általában a Gauss-féle kvadraturát helyezzük előnybe a Newton-Cotes formulákhoz képest, mivel azonos számú integrálási pont esetén pontosabb eredményt szolgáltat. Jelen jegyzet a Gauss-féle kvadraturát tárgyalja részletesen.

A Gauss-kvadratura esetén az integrálási pontokat egymástól nem egyenlő, hanem optimális távolságra vesszük fel (megjegyzés: a Newton-Cotes formula esetén az integrálási pontokat az integrációs tartományon egymástól egyenlő távolságra vesszük fel). Ettől azt várjuk, hogy az integrálás pontossága javulni fog.

Általánosságban elmondható, hogy az $f(x)$ függvény integrálja numerikusan közelítőleg összeg alakjában állítható elő, ahol az összeg minden tagja egy integrálási súlytényező és egy függvényérték szorzata, azaz

$$\int_{x=a}^b f(x) dx = \sum_{i=1}^{n_{int}} w_i f(x_i) + E, \quad (8.5)$$

ahol w_i az integrálási ponthoz tartozó súlytényező, x_i az integrálási pont helykoordinátája, n_{int} az integrálási pontok száma, míg az E a hiba.

8.1. Gauss-féle kvadratura

Az általános integrálási módszerek esetén az integrálási pontok egyenlő távolságban vannak. A Gauss-kvadratura esetén az integrálási pontokat egymástól nem egyenlő, hanem optimális távolságra vesszük fel. A Gauss-féle kvadratura alapján

$$\int_{x=a}^b f(x)dx \cong \sum_{k=1}^{n_{int}} w_k f(x_k). \quad (8.6)$$

A függvény integrálját n_{int} (Gauss pontok) számú integrálási pont alkalmazásával számoljuk ki. A Gauss-módszer esetén az integrálási pontokat úgy választjuk meg, hogy a lehető legpontosabb értéket kapjuk. Az integrálási pontok az adott intervallum közepétől szimmetrikusan vannak felvéve. A Gauss-féle kvadratura legfeljebb $(2n-1)$ -ed fokú polinomig bezárólag pontos értéket szolgáltat az integrálra. A numerikus integrálás pontossága függ attól, hogy az adott görbére milyen mértékben illeszkedik az alkalmazott polinom. Izoparametrikus végelemek alkalmazásánál térbeli esetben

$$dV = dx dy dz = J d\xi d\eta d\zeta. \quad (8.7)$$

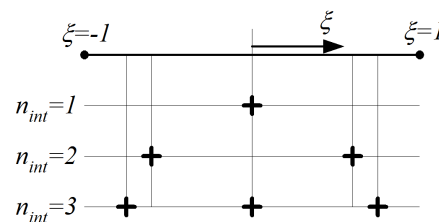
Izoparametrikus végelemek alkalmazásánál síkbeli esetben

$$dA = dx dy = J d\xi d\eta. \quad (8.8)$$

Egydimenziós esetben (8.1. ábra) a Gauss-féle integrálás

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{\xi=-1}^{\xi=1} f[x(\xi)]Jd\xi \cong \sum_{k=1}^{n_{int}} w_k f[x(\xi_k)]J, \quad (8.9)$$

ahol $J = (b - a)/2 > 0$, ξ_k az integrálási pontok, w_k a Gauss-féle integrálási súlyok.



8.1. ábra A numerikus integrálás egydimenziós esetben

Az $a = -1$ és $b = 1$ intervallum esetén a Gauss-féle integrálási pontok és integrálási súlyok a következők:

n_{int}	ξ_k	w_k
1	0.0000000000000000	2.0000000000000000
2	-0.577350269189626	1.0000000000000000
	0.577350269189626	1.0000000000000000
3	-0.774596669241483	0.5555555555555555
	0.0000000000000000	0.8888888888888888
	0.774596669241483	0.5555555555555555

8.1. táblázat Gauss koordináták és Gauss súlyok

10. példa

Gauss-típusú integrálás egydimenzióban. Adott az $f(x)$ függvény. Határozza meg a pontos értékét a függvény integráljának egyponthos, kétpontos és háromponthos formulákkal az adott intervallumban és hasonlítsa az össze a kapott eredményeket!

Adatok:

$$f(x) = \sin x, a = 0, b = \pi/2$$

Az integrál pontos értéke:

$$I = \int_0^{\pi} \sin x \, dx = [-\cos x]_0^{\pi} = -\cos \pi - (-\cos 0) = -(-1) - (-1) = 2$$

A Gauss-féle kvadratúra alkalmazása alapján

$$\int_a^b f(x) \, dx = \int_{\xi=-1}^{\xi=1} f[x(\xi)]Jd\xi \cong \sum_{k=1}^{n_{int}} w_k f[x(\xi_k)]J,$$

ahol $J = (b - a)/2 = \pi/2$.

10a, Egyponthos formula használata

($n_{int} = 1$), ahol $\xi_1 = 0$ és $w_1 = 2$:

$$I_{n_{int}=1} = \int_{\xi=-1}^{\xi=1} \sin[x(\xi)]Jd\xi \cong \sum_{k=1}^1 w_k \sin[x_k(\xi_k)]J = w_1 \sin[x(\xi_1)]J$$

A leképezés

$$x(\xi) = \sum_{i=1}^2 N_i x_i = N_1 x_1 + N_2 x_2 = \frac{1}{2}(1 - \xi)0 + \frac{1}{2}(1 + \xi)\pi = \frac{\pi}{2}(1 + \xi)$$

$\xi_1 = 0$ -ra az $x(\xi_1) = \pi/2$, azaz

$$I_{n_{int}=1} = w_1 \sin[x(\xi_1)]J = 2 \cdot \sin \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \pi = 3,14 \neq 2$$

A hiba mértéke 54%.

10b, Kétpont formula használata

($n_{int} = 2$), ahol $\xi_1 = -0.577350269189626$, $\xi_2 = 0.577350269189626$ és $w_1 = 1$, $w_2 = 1$:

$$I_{n_{int}=2} = \int_{\xi=-1}^{\xi=1} \sin[x(\xi)]Jd\xi \cong \sum_{k=1}^2 w_k \sin[x_k(\xi_k)]J = w_1 \sin[x(\xi_1)]J + w_2 \sin[x(\xi_2)]J$$

A leképezés

$$x(\xi) = \sum_{i=1}^2 N_i x_i = N_1 x_1 + N_2 x_2 = \frac{1}{2}(1 - \xi)0 + \frac{1}{2}(1 + \xi)\pi = \frac{\pi}{2}(1 + \xi)$$

$\xi_1 = -0.577350269189626$ -re $x(\xi_1) = 38.03847577^\circ$ és

$\xi_2 = 0.577350269189626$ -re $x(\xi_2) = 141.9615242^\circ$, azaz

$$I_{n_{int}=2} = w_1 \sin[x(\xi_1)]J + w_2 \sin[x(\xi_2)]J = 1.935819575 \neq 2$$

A hiba mértéke 3.31%.

10c, Hárompont formula használata

($n_{int} = 3$), ahol $\xi_1 = -0.774596669241483$, $\xi_2 = 0$, $\xi_3 = 0.774596669241483$, és $w_1 = 0.5555555555555555$, $w_2 = 0.8888888888888888$, $w_3 = 0.5555555555555555$:

$$I_{n_{int}=3} = \int_{\xi=-1}^{\xi=1} \sin[x(\xi)]J d\xi \cong \sum_{k=1}^3 w_k \sin[x_k(\xi_k)]J$$

A leképezés

$$x(\xi) = \sum_{i=1}^2 N_i x_i = N_1 x_1 + N_2 x_2 = \frac{1}{2}(1-\xi)0 + \frac{1}{2}(1+\xi)\pi = \frac{\pi}{2}(1+\xi)$$

$\xi_1 = -0.774596669241483$ -re $x(\xi_1) = 20.28629977^\circ$ és

$\xi_2 = 0$ -re $x(\xi_2) = \pi/2$ és

$\xi_3 = 0.774596669241483$ -ra $x(\xi_3) = 159.7137002^\circ$, azaz

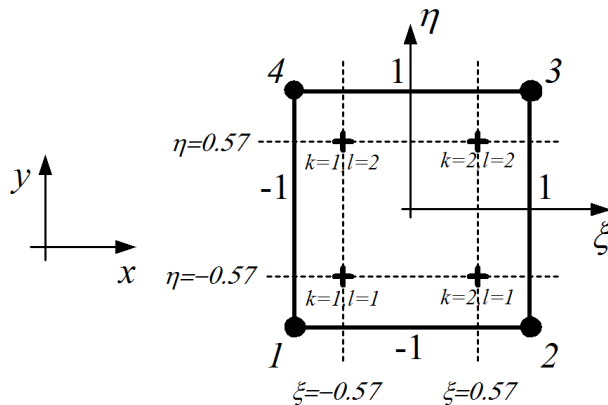
$$I_{n_{int}=3} = w_1 \sin[x(\xi_1)]J + w_2 \sin[x(\xi_2)]J + w_3 \sin[x(\xi_3)]J = 2.001388914 \approx 2$$

A hiba mértéke 0.069%.

Kétdimenziós esetben négyszög tartományon a Gauss-típusú numerikus integrálás

$$\begin{aligned} \int_A f(x,y) dA &= \int_x \int_y f(x,y) dx dy = \\ &= \int_{\xi=-1}^{\xi=1} \int_{\eta=-1}^{\eta=1} f[x(\xi,\eta), y(\xi,\eta)] J(\xi,\eta) d\xi d\eta \cong \\ &\cong \sum_{k=1}^{n_{int}} \sum_{l=1}^{n_{int}} w_k w_l f[x(\xi_k, \eta_l), y(\xi_k, \eta_l)] J(\xi_k, \eta_l), \end{aligned} \quad (8.10)$$

ahol ξ_k és η_l az integrálási pontok, w_k és w_l a Gauss súlyok. 2×2 pontos (4 pontos integrálás) integrálásnál az integrálási pontok helyzete a 8.2. ábrán látható.



8.2. ábra Numerikus integrálás négyszög tartományon kétdimenziós esetben

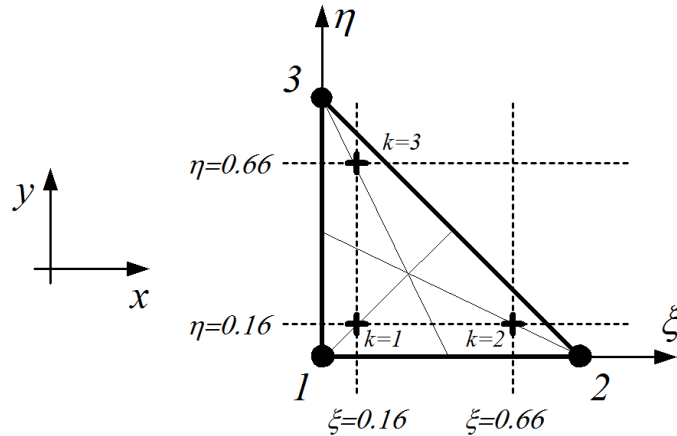
Ebben az esetben az integrált az alábbi módon közelítjük

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^2 \sum_{l=1}^2 w_k w_l f[x(\xi_k, \eta_l), y(\xi_k, \eta_l)] J(\xi_k, \eta_l) = \\ & = w_1 w_1 f[x(\xi_1, \eta_1), y(\xi_1, \eta_1)] J(\xi_1, \eta_1) + w_1 w_2 f[x(\xi_1, \eta_2), y(\xi_1, \eta_2)] J(\xi_1, \eta_2) = \\ & = w_2 w_1 f[x(\xi_2, \eta_1), y(\xi_2, \eta_1)] J(\xi_2, \eta_1) + w_2 w_2 f[x(\xi_2, \eta_2), y(\xi_2, \eta_2)] J(\xi_2, \eta_2), \end{aligned} \quad (8.11)$$

ahol $\xi_1 = \eta_1 = -0.577350269189626$, $\xi_2 = \eta_2 = 0.577350269189626$ és $w_1 = w_2 = 1$.
Kétdimenziós esetben háromszög tartományon a Gauss-típusú numerikus integrálás

$$\begin{aligned} \int_A f(x, y) dA &= \int_x \int_y f(x, y) dx dy \cong \\ &\cong \sum_{k=1}^{n_{int}} w_k f[x(\xi_k, \eta_k), y(\xi_k, \eta_k)] J(\xi_k, \eta_k), \end{aligned} \quad (8.12)$$

ahol ξ_k és η_k az integrálási pontok, w_k a Gauss súly. Hárompontos Gauss szabály esetén az integrálási pontok helyzete a 8.3. ábrán látható.



8.3. ábra Numerikus integrálás háromszög tartományon kétdimenziós esetben

Ebben az esetben az integrált az alábbi módon közelítjük

$$\begin{aligned} & \sum_{l=1}^3 w_k f[x(\xi_k, \eta_k), y(\xi_k, \eta_k)] J(\xi_k, \eta_k) = \\ & = w_1 f[x(\xi_1, \eta_1), y(\xi_1, \eta_1)] J(\xi_1, \eta_1) + w_2 f[x(\xi_2, \eta_2), y(\xi_2, \eta_2)] J(\xi_2, \eta_2) = \\ & = w_3 f[x(\xi_3, \eta_3), y(\xi_3, \eta_3)] J(\xi_3, \eta_3), \end{aligned} \quad (8.13)$$

ahol $\xi_1 = \eta_1 = \xi_3 = \eta_3 = 0.1666666666666667$, $\xi_2 = \eta_2 = 0.6666666666666667$ és $w_1 = w_2 = w_3 = 0.3333333333333333$.

Térbeli esetben nyolccsomópontú hexaéder tartományon a Gauss-típusú numerikus integrálás

$$\begin{aligned} \int_V f(x, y, z) dV &= \int_x \int_y \int_z f(x, y, z) dx dy dz = \\ &= \int_{\xi=-1}^{\xi=1} \int_{\eta=-1}^{\eta=1} \int_{\zeta=-1}^{\zeta=1} f[x(\xi, \eta, \zeta), y(\xi, \eta, \zeta), z(\xi, \eta, \zeta)] J(\xi, \eta, \zeta) d\xi d\eta d\zeta \cong \\ &\cong \sum_{k=1}^{n_{int}} \sum_{l=1}^{n_{int}} \sum_{m=1}^{n_{int}} w_k w_l w_m f[x(\xi_k, \eta_l, \zeta_m), y(\xi_k, \eta_l, \zeta_m), z(\xi_k, \eta_l, \zeta_m)] J(\xi_k, \eta_l, \zeta_m), \end{aligned} \quad (8.14)$$

ahol ξ_k, η_l és ζ_m az integrálási pontok, w_k, w_l és w_m a Gauss súlyok. $2 \times 2 \times 2$ pontos (8 pontos integrálás) integrálásnál az integrálási pontok $\xi_1 = \eta_1 = \zeta_1 = -0.577350269189626$, $\xi_2 = \eta_2 = \zeta_2 = 0.577350269189626$ és $w_1 = w_2 = 1$.

8.2. A merevségi mátrix kiszámítása a Gauss-féle kvadraturával

Kétdimenziós négyszög elem elemi merevségi mátrixa felhasználva (8.1) és (8.4)-et

$$\mathbf{K}^e = \int_A \mathbf{B}^{eT} \mathbf{C}^e \mathbf{B}^e dA = \int_x \int_y \mathbf{B}^{eT} \mathbf{C}^e \mathbf{B}^e dx dy, \quad (8.15)$$

ahol az integrandusz az x és y csomóponti értékek függvénye. Az elemi merevségi mátrix négyszög elemre az ξ, η helyi koordináták szerint az -1 és 1 határok között,

$$\mathbf{K}^e = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{B}^{eT} \mathbf{C}^e \mathbf{B}^e J d\xi d\eta. \quad (8.16)$$

2×2 pontos integrálással (4 pontos integrálás)

$$\begin{aligned} \mathbf{K}^e &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{B}^{eT} \mathbf{C}^e \mathbf{B}^e J d\xi d\eta \cong \\ &\cong \mathbf{B}(\xi_1, \eta_1)^{eT} \mathbf{C}^e \mathbf{B}(\xi_1, \eta_1)^e J(\xi_1, \eta_1) w_1 w_1 + \\ &+ \mathbf{B}(\xi_1, \eta_2)^{eT} \mathbf{C}^e \mathbf{B}(\xi_1, \eta_2)^e J(\xi_1, \eta_2) w_1 w_2 + \\ &+ \mathbf{B}(\xi_2, \eta_1)^{eT} \mathbf{C}^e \mathbf{B}(\xi_2, \eta_1)^e J(\xi_2, \eta_1) w_2 w_1 + \\ &+ \mathbf{B}(\xi_2, \eta_2)^{eT} \mathbf{C}^e \mathbf{B}(\xi_2, \eta_2)^e J(\xi_2, \eta_2) w_2 w_2, \end{aligned} \quad (8.17)$$

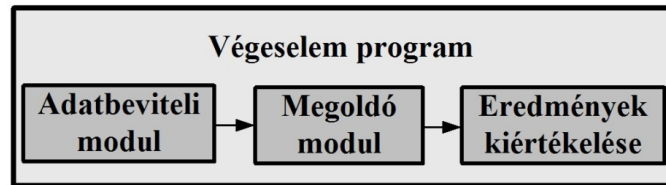
ahol $\xi_1 = \eta_1 = -0.577350269189626$, $\xi_2 = \eta_2 = 0.577350269189626$ és $w_1 = w_2 = 1$. Behelyettesítve a (8.17) egyenletbe a súlyokat kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \mathbf{K}^e &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{B}^{eT} \mathbf{C}^e \mathbf{B}^e J d\xi d\eta \cong \\ &\cong \mathbf{B}(\xi_1, \eta_1)^{eT} \mathbf{C}^e \mathbf{B}(\xi_1, \eta_1)^e J(\xi_1, \eta_1) + \\ &+ \mathbf{B}(\xi_1, \eta_2)^{eT} \mathbf{C}^e \mathbf{B}(\xi_1, \eta_2)^e J(\xi_1, \eta_2) + \\ &+ \mathbf{B}(\xi_2, \eta_1)^{eT} \mathbf{C}^e \mathbf{B}(\xi_2, \eta_1)^e J(\xi_2, \eta_1) + \\ &+ \mathbf{B}(\xi_2, \eta_2)^{eT} \mathbf{C}^e \mathbf{B}(\xi_2, \eta_2)^e J(\xi_2, \eta_2). \end{aligned} \quad (8.18)$$

A következő lépés a Jacobi meghatározása, majd az alakváltozás-csomóponti elmozdulás mátrix kiszámítása minden egyes Gauss integrálási pontban, végül a művelet elvégzése.

9. ÁLTALÁNOS CÉLÚ VÉGESELEMES PROGRAMCSOMAGOK

A végeselemes vizsgálat három egymástól elkülönülő modulból áll. Az első az ún. adatbeviteli rész (preprocessing), a második a megoldó rész (processing), míg a harmadik rész az eredmények kiértékelés rész (postprocessing). Ez a felosztás a 9.1. ábrán látható.



9.1. ábra A végeselemes programok fő részei

Az adatbeviteli résznél építjük fel a pontos végeselem modellt, azaz megadjuk a geometriát, hozzárendeljük az anyagot, felépítjük a végeselemes hálót, valamint megadjuk a peremfeltételeket terhelések és megtámasztások formájában.

Az adatbeviteli rész általános lépései:

1. A szerkezet, vagy alkatrész geometriájának felépítése
 - a, a geometria importálása más állományból
 - b, a geometria felépítése a végeselemes programban
 - pontok,
 - vonalak,
 - felületek,
 - térfigatok segítségével.
2. A szerkezet, vagy alkatrész végeselemes behálózása
 - csomópontok,
 - elemek.
3. A szerkezet, vagy alkatrész anyagának definiálása
4. A szerkezet, vagy alkatrész terhelésének definiálása
5. A szerkezet, vagy alkatrész megtámasztásának definiálása

A megoldó modulban történik a merevségi mátrix generálása, a lineáris algebrai egyenletrendszer megoldása a csomóponti változókra. Ez egy ún. fekete doboz.

A megoldó modul általános lépései:

1. Az elemek merevségi mátrixok és a csomóponti tehervektorok felépítése
2. A szerkezeti merevségi mátrix és a szerkezeti tehervektor felépítése
3. A kinematikai peremfeltételek figyelembe vétele
4. A lineáris algebrai egyenletrendszer megoldása, amely szolgáltatja a csomóponti elmozdulásokat
5. Az alakváltozási és feszültségi értékek számítása minden egyes csomópontban, vagy az elemek belsejében

Az eredmények kiértékelése rész, ahogy az a nevében is benne van, az eredmények megjelenítésére szolgál. Amennyiben a megoldás jóságát jóváhagytuk, úgy a vizsgálat szempontjából szükséges mennyiségek megjeleníthetők és kiértékelhetők.

Szerkezeti vizsgálatok során az eredmények kiértékelése legtöbbször:

1. A deformált alak megjelenítése
2. A feszültségek, igénybevételek, támaszerőrendszer megjelenítése

9.1. Bevezetés a Femap 9.3 végeelem programba

A Femap egy CAD független Windows-alapú pre- és postprocesszor [14]. A CAD független azt jelenti, hogy számos CAD rendszerből importálhatunk és dolgozhatunk fel a geometriát, így például Solid Edge-ből, NX-ből, Catia-ból, SolidWorks-ből, stb. A Femap-be az NX Nastran megoldót integrálták, de támogat más ipari megoldót is, így az MSC Nastran-t, Abaqus-t, Ansys-t, MSC Marc-ot, LS-DYNA-t, stb.

A Femap vonalelem könyvtárát a 9.1. táblázat tartalmazza.

Rod	Egyirányú elem húzásra és nyomásra. Nincs nyírás és hajlítás.	Egyenes két csomóponttal
Tube	Cső	Egyenes két csomóponttal
Curved tube	Görbe cső	Görbe két csomóponttal
Bar	Egyirányú elem húzásra, nyomásra, csavarásra és hajlításra.	Egyenes két csomóponttal
Beam	Egyirányú elem húzásra, nyomásra, csavarásra és hajlításra.	Egyenes két, vagy három csomóponttal
Curved beam	Görbe rúd	Görbe két csomóponttal
Link	Összekötő elem	Egyenes két csomóponttal
Spring	Merevítő, vagy csillapító elem	Egyenes két csomóponttal
DOF spring	Csomóponti rugó	Két csomópontot kapcsol össze
Gap	Hézag	Egyenes két csomóponttal
Plot only		Egyenes két csomóponttal.

9.1. táblázat Vonalelem könyvtár

A Femap síkbeli elemeinek könyvtárát a 9.2. táblázat tartalmazza.

Shear panel	Nyíró igénybevételre	Síkbeli elem, három-, vagy hatsomópontú háromszög. négy-, vagy nyolcsomópontú négyszög.
Membrane	Membrán	Síkbeli elem, három-, vagy hatsomópontú háromszög. négy-, vagy nyolcsomópontú négyszög.
Bending	Hajlításra	Síkbeli elem, három-, vagy hatsomópontú háromszög. négy-, vagy nyolcsomópontú négyszög.
Plate	Lemez	Síkbeli elem, három-, vagy hatsomópontú háromszög. négy-, vagy nyolcsomópontú négyszög.
Laminate	Kompozit	Síkbeli elem, három-, vagy hatsomópontú háromszög. négy-, vagy nyolcsomópontú négyszög.
Plane strain	Síkalakváltozás	Síkbeli elem, három-, vagy hatsomópontú háromszög. négy-, vagy nyolcsomópontú négyszög.
Axisymmetric shell	Tengelyszimmet- rikus héj	Egyenes és parabola kettő, vagy három csomóponttal.
Planar plot only		Lineáris háromszög és lineáris négyszög.

9.2. táblázat Síkbeli elem könyvtár

A Femap térbeli elemeinek könyvtárát a 9.3. táblázat tartalmazza.

Axisymmetric	Kétdimenziós elem forgásszimmetrikus testek modellezésére	Síkbeli elem, három-, vagy hatsomópontú háromszög, négy-, vagy nyolcsomópontú négyszög.
Solid	Háromdimenziós test elem térbeli szerkezetek modellezésére	Négy-, vagy tízcsomópontú tetraéder, nyolc-, vagy húszcsomópontú téglalest.

9.3. táblázat Térbeli elem könyvtár

A Femap anyagkönyvtárát a 9.4. táblázat tartalmazza.

Isotropic	Az anyagi tulajdonságok nem függenek az iránytól
Orthotropic	Az anyagi tulajdonságok irányfüggőek (merőleges irányban)
Anisotropic	Általánosabb, mint az ortotróp, de hasonló tulajdonságokkal
Hyperelastic	Nagy alakváltozásra képes anyagok

9.4. táblázat Anyagkönyvtár

A Femapben definiálható terheléseket a 9.5. táblázat tartalmazza.

Body or global	Acceleration	transzlációs (gravitáció) és forgómozgás.	
	Velocity	forgómozgás	
	Thermal	alapértelmezett hőmérséklet	
Nodal	Force/moment		
	Displacement		
	Velocity		
	Temperature		
	Heat generation	egységnyi térfogatra értelmezett hőenergia	
Elemental	Heat flux	egységnyi felületre értelmezett hőenergia	
	Distributed	megoszló terhelés	
	Pressure		
	Temperature		
	Heat generation	egységnyi térfogatra értelmezett hőenergia	
	Heat flux	egységnyi felületre értelmezett hőenergia	
	Convection		
	Radiation		
	Geometry-based	Points	
		Lines	
Surfaces			

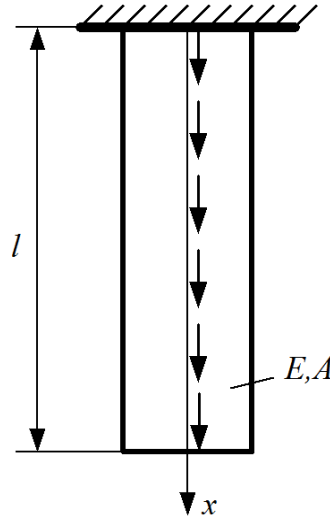
9.5. táblázat A terheléstípusok könyvtára

A Femap-ben számos módon definiálhatunk megtámasztásokat (csomóponti, geometriából származó, stb.).

10. NUMERIKUS PÉLDÁK

1. Numerikus példa (Önsúlyával terhelt prizmatikus rúd - programozás)

Egy állandó körkeresztmetszetű rúd önsúlyával terhelt. A rúd az egyik végén meg van fogva. A rúd anyaga acél. A problémát a 10.1. ábra mutatja. Hasonlítsa össze a végeleemes számításokra kapott eredményeket az elmozdulások és a feszültségek vonatkozásában 1, 2, 4 vagy 8 végelelem alkalmazása esetén!



10.1. ábra Önsúlyával terhelt prizmatikus rúd

Adatok:

$$d = 30\text{mm}$$

$$E = 2,1 \cdot 10^5 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

$$l = 2000\text{mm}$$

$$\rho = 7800 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

A program Scilab 3.1 környezetben készült:

```
//Bemenő adatok (Kizárólag a Nelem változót szükséges változtatni: 1, 2, 4 vagy 8)//
```

```
Nelem=1;
```

```
Nnodes=Nelem+1;
```

```
E=2.1e5;
```

```
A=7.0685e2;
```

```
g=9.81;
```

```
ro=7.8e-6;
```

```
L=2000;
```

```
pm=A*ro*g;
```

```
Le=L/Nelem;
```

```
Kg=zeros(Nnodes,Nnodes);
```

```
fg=zeros(Nnodes,1);
```

```
q=zeros(Nnodes,1);
```

```
s=zeros(Nnodes,1);
```

```

for ie=1:Nelem
    Ke=zeros(2,2);
    fe=zeros(2,1);
    Ke(1,1)=A*E/Le;
    Ke(1,2)=-A*E/Le;
    Ke(2,1)=-A*E/Le;
    Ke(2,2)=A*E/Le;
    fe(1,1)=pm*Le/2;
    fe(2,1)=pm*Le/2;
    ik=ie;
    iv=ie+1;
    jk=ie;
    jv=ie+1;
    Kg(ik:iv,jk:jv)=Kg(ik:iv,jk:jv)+Ke;
    fg(ik:iv,1)=fg(ik:iv,1)+fe;
end

```

```

//Peremfeltételek definiálása//

```

```

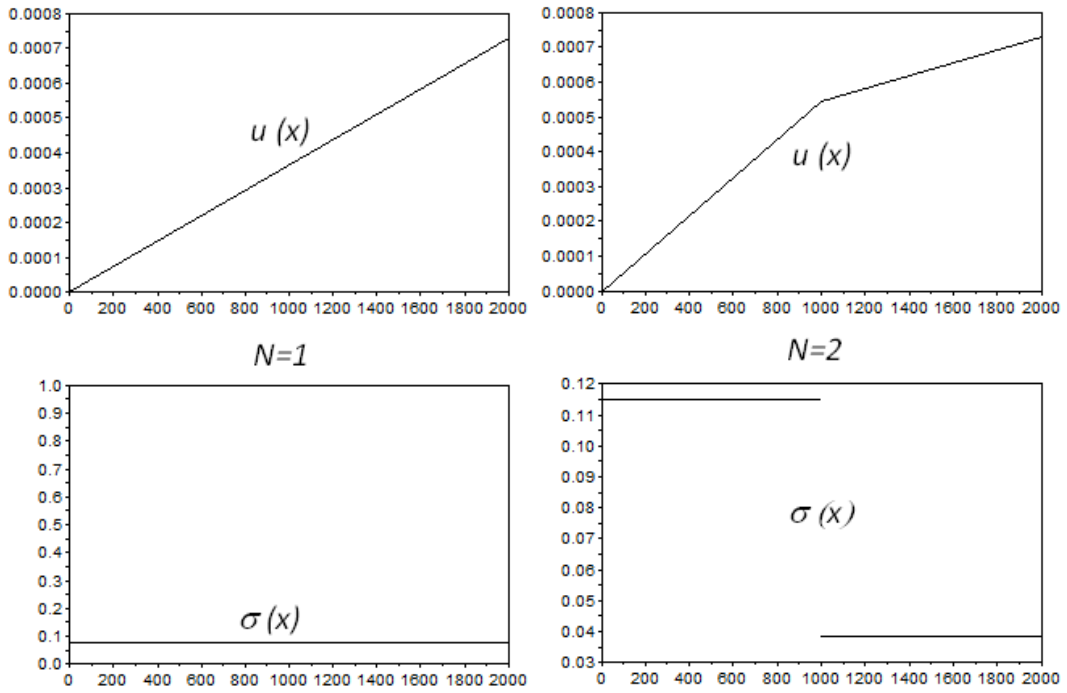
Kg(:,1)=zeros(Nnodes,1);
Kg(1,:)=zeros(1,Nnodes);
Kg(1,1)=1;
fg(1,1)=0;
Kgi=inv(Kg);
q=Kgi*fg;
for i=1:Nnodes
    s(i,1)=(i-1)*Le;
end
subplot(2,1,1)
plot2d(s,q)
B=zeros(1,2);
B(1,1)=-1/Le;
B(1,2)=1/Le;
qe=zeros(2,1);

```

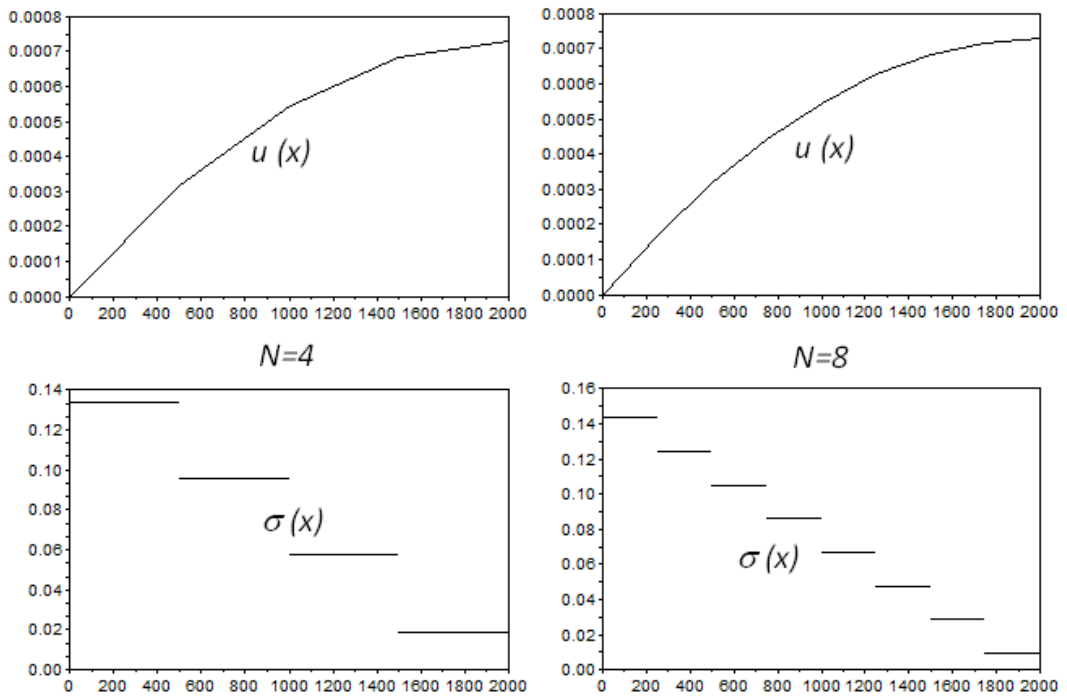
```

for ie=1:Nelem
    qe(1,1)=q(ie,1);
    qe(2,1)=q(ie+1,1);
    xe(1,1)=s(ie,1);
    xe(2,1)=s(ie+1,1);
    sige=E*B*qe
    ye(1,1)=sige;
    ye(2,1)=sige;
    subplot(2,1,2)
    plot2d(xe,ye)
end

```



10.2. ábra Az eredmények $N = 1$ és $N = 2$ esetekre



10.3. ábra Az eredmények $N = 4$ és $N = 8$ esetekre

2. Numerikus példa (Húzásra igénybevett prizmatikus rúd)

Egy állandó kör keresztmetszetű prizmatikus rúd a saját súlyával és a végén lévő felületen megoszló terheléssel van terhelve. A rúd másik vége meg van fogva. A rúd anyaga alumínium. A problémát a 2.9. ábra mutatja be. A tartó három vonalelemmel lett modellezve a középvonala mentén. Először építse fel a végeleemes modellt, majd a Femap 9.3 segítségével futasson le végeleemes számítást. Értékelje ki a csomópontok elmozdulásait és az elemekben ébredő erők nagyságát. Szemléltesse a rúderőket és a reakcióerő vektorát.

Adatok:

$$d = 30\text{mm}$$

$$E = 6,9 \cdot 10^4 \frac{N}{\text{mm}^2}$$

$$l = 1000\text{mm}$$

$$\rho = 2700 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

$$F_x = 5\text{N}$$

A geometria megadása

//A modell felépítését célszerű mindig a geometria létrehozásával kezdeni, hiszen majd erre fogjuk felépíteni a végeleemes modellt. Egyszerű geometriát érdemesebb a Femap-on belül felépíteni, mint importálni egy külső CAD szoftverből. Első lépésként egy vonalat fogunk megrajzolni egy milliméteres léptéket használva.//

Geometry/Curve-Line/Project Points...

In Locate- Enter First Location for Projected Line dialog box set

X=0; Y=0; Z=0, then Click OK

In Locate- Enter Second Location for Projected Line dialog box set

X=1000; Y=0; Z=0, then Click OK, then Cancel

Hit Ctrl+A key to Autoscale the graphics window



10.4. ábra A prizmatikus rúd modellezése egy vonallal

Az anyag és tulajdonság definiálása

//Mielőtt behálózna a modellt szükséges, hogy definiáljunk a hálózásra alkalmazandó tulajdonságokat. A definiálandó tulajdonságban határozzuk meg a végelelem típusát, továbbá az alkalmazandó anyagtörvényt.//

Az anyag megadása

//A rúd anyaga alumínium, amit jól lehet modellezni egyszerű homogén, lineáris és izotropikus viselkedést leíró anyagtörvénnyel. Ebben az esetben az általános Hooke-törvény értelmében elegendő az alumínium rugalmassági modulusát és Poisson tényezőjét megadni. A sűrűség értékét is megadjuk mm^3 -re vonatkoztatva, erre az önsúly számítása miatt lesz szükség.//

Model/Material

In Define Material – ISOTROPIC dialog box

Click Type

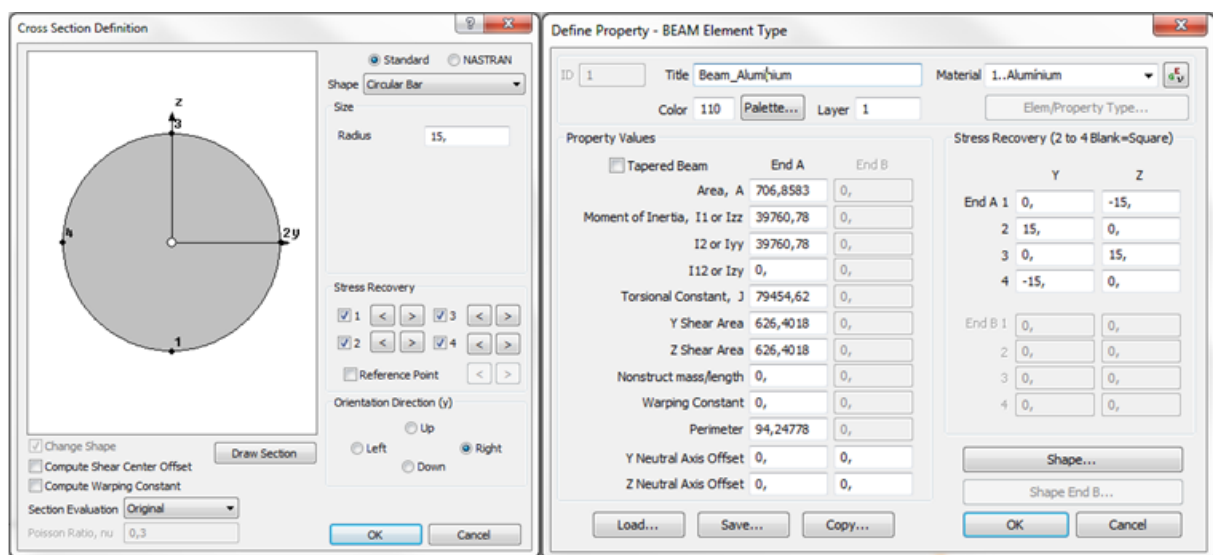
In Material Type dialog box choose Isotropic

Click OK
 In Define Material – ISOTROPIC dialog box set
 Title: Aluminum
 Young Modulus, E: 6,9E4
 Poisson's Ratio, nu: 0,33
 Mass Density: 2,7E-6
 Click OK (material 1 created), then Cancel

A tulajdonság definiálása

// A már definiált anyagtörvény felhasználásával és beam (gerenda) típusú elem kiválasztásával egy új tulajdonságot fogunk létrehozni. A beam elem egy vonalelem, a mechanikában megszokott középvonalában modellezett rúdszerkezetek vizsgálatokor használjuk. Beam elem esetén definiálni kell a modellezett rúd keresztmetszetének a mechanikai tulajdonságait. A Femap 9.3 rendelkezik beépített általános keresztmetszetekkel, melyek közül kiválasztva a megfelelőt a program automatikusan kiszámolja a szükséges értékeket.//

Model/Property
 In Define Property – PLATE Element Type dialog box
 Click Elem/Property Type
 In Element/Property Type dialog box choose Beam (line Elements)
 Click OK
 In Define Property – BEAM Element Type dialog box
 Give a Title such as: 30mm diameter BEAM
 Material: 1..Aluminum
 Click Shape button
 In Cross Section Defining dialog box
 Shape: Circular Bar
 Radius: 15
 Click Draw section, then Click OK
 In Define Property – BEAM Element Type dialog box
 Click OK (Property 1 created), then Cancel



10.5. ábra A kiválasztott keresztmetszet és tulajdonságai

Végeleemes hálózás

//Következő lépés a hálózás. Elsőként a hálósűrűséget fogjuk megadni a vonal mentén. Hálózni az előbb definiált tulajdonsággal fogunk. Az elem orientációját is meg fogjuk adni egy vektorral. Fontos, hogy orientációs vektor nem lehet párhuzamos a behálózandó vonallal. Végül megjelenítjük a létrehozott elemek és csomópontjaik sorszámát.//

Mesh/Mesh control/Size Along Curve

In Entity Selection – Select Curve(s) to Set Mesh Size dialog box

Select the defined curve in the graphics window, then click OK

In Mesh Size Along Curve dialog box

Select Number of Elements, then write 3 in field

click OK, then Cancel

Mesh/Geometry/Curve

In Entity Selection – Select Curve(s)to Mesh dialog box

Select the defined curve in the graphics window, then click OK

In Geometry Mesh Options dialog box set

Property: 1..30 mm diameter BEAM, then Click OK

In Vector Locate – Define Element Orientation Vector dialog box set

In Base fields: X=0; Y=0; Z=0

In Tip fields: X=0; Y=1; Z=0

Click OK (3 Elements Created)

View/ Visibility

In Visibility dialog box Select Entity/ Label Tab

Pick Labels, then Click to All Off Button

In Mesh section Select Node and Element, then Click Done

A megfogások definiálása

//A Femapban mindig úgy kell definiálni a kinematikai peremfeltételeket, hogy a modell statikailag határozott szerkezet legyen. A Femap a modellt mindig térbeli feladatként kezeli, emiatt a befogás helyén a csomópont minden egyes szabadságfokát gátoljuk.//

Model/ Constraint/ On Point

In New Constraint Set dialog box

Title: (give a title), then click OK

In Entity Selection – Enter Point(s) to Select dialog box

Choose the point 1 on the left end of the rod , then click OK

In Create Constraint on Geometry dialog box

Title: Support

Select Fixed, then Click OK, then Click Cancel

View/ Visibility

In Visibility dialog box Select Entity/ Label Tab

Pick Labels, then Click to All Off Button

In Mesh section Select Node and Element, then Click Done

A terhelés megadása

// További peremfeltételként írjuk elő a rudat terhelő erőt. Ezután az önsúlyból adódó terhelést adjuk a tartóra, ehhez azonban meg kell adnunk a modell térben a gravitációs vektor nagyságát, irányát és értelmét. A nagyságát m/s^2 mértékegységben adjuk meg, hiszen csakis így adódhat a gravitációs erő mértékegységének N .//

Model/ Load/ On Point

In New Load Set dialog box

Title: (give a title), then click OK
 In Entity Selection – Enter Point(s) to Select dialog box
 Choose the point 2 on the right end of the rod , then click OK
 In Create Loads on Points dialog box
 Title: húzás; Choose Force and set Load value to: $F_x=5$
 Click OK, then Cancel
 Model/Load/Body
 In Create Body Loads dialog box
 Translational Accel/Gravity (length/time/time) select Active
 Set Ax value to 9,81
 Click OK
 Select Loads Visibility
 Hit Ctrl+G key to Regenerate the graphics window
 //Megjelent a gravitációs vektor iránya és nagysága a koordináta-rendszerben.//



10.6. ábra A prizmatikus rúd végeelem modellje

Végeselemes számítás

// Az NX Nastran megoldót használva lineáris statikus vizsgálatot végzünk.//
 Model/Analysis
 In Analysis Set Manager dialog box
 Click New button
 In Analysis Set dialog box
 Title: Linear static analysis
 Analysis Program: 36..NX Nastran
 Analysis Type: 1..Static
 Click OK, then analyze (In Analysis Set Manager dialog box)
 When you see the following message: Cleanup of Output Set 1 is Complete, close the NX Nastran Analysis Monitor

Az eredmények megjelenítése

//Következő lépésként ki fogjuk listázni a végeelemes analízis eredményét, így a csomópontok elmozdulását, valamint az elemekben ébredő rúderőt.//
 List/Output/Standard...
 In Select Output Set(s) to list dialog box
 Select 1..NX NASTRAN Case 1, then Click OK
 In List Formatted Output dialog box
 Title: Elmozdulások
 Sort Field: Choose 2..T1 Translation from the drop down list
 Format ID: Select 0..NASTRAN Displacement, then click OK
 In Entity Selection – Select Node(s) to List dialog box
 Click Select All button, then Click OK

Elmozdulások			
Point ID	T1	T2	T3
1	0	0	0
2	1,408022E-4	0	0
3	2,389522E-4	0	0
4	2,944501E-4	0	0

10.1. táblázat A csomópontok elmozdulásai terhelt állapotban

List/Output/Standard...

In Select Output Set(s) to list dialog box

Select 1..NX NASTRAN Case 1, then Click OK

In List Formatted Output dialog box

Title: Normal forces

Sort Field: Choose 3022..Beam EndA Axial Forces from the drop down list

Format ID: Select 0..NASTRAN CBEAM Forces, then click OK

In Entity Selection – Select Element(s) to List dialog box

Click Select All button, then Click OK

Az elemekben ébredő rúderők			
Element ID	Moments	Shears	Axial forces
3	0	0	8,120426E+0 [N]
2	0	0	1,436128E+1 [N]
1	0	0	2,060213E+1 [N]

10.2. táblázat Rúderő értékek

A rúderők kiírása

View/Select (or hit F5 button)

In View Select dialog box

Deformed Style: Deform

Contour Style: Criteria

Click to Deformed and Contour Data... Button

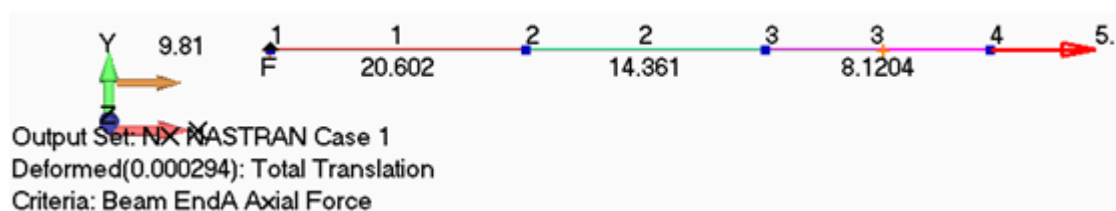
In Select PostProcessing Data dialog box

Output Sets: NX NASTRAN Case 1

Deform: 1..Total Translation

Contour: 3022..Beam EndA Axial Force

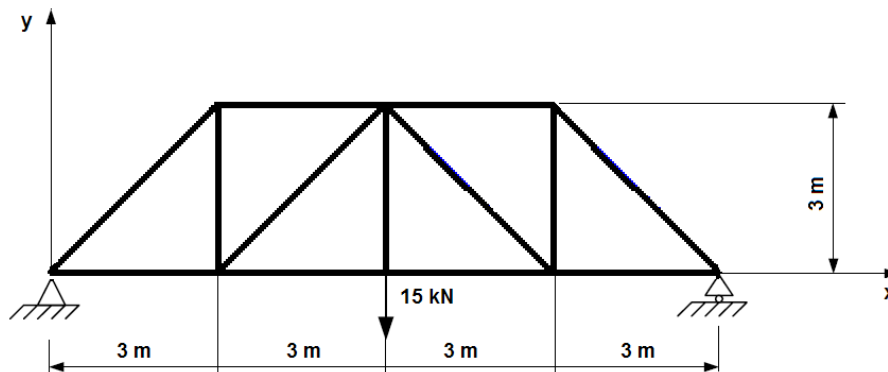
Click OK all dialog boxes



10.7. ábra Az elemekben ébredő rúderők

3. Numerikus példa (Hegesztett rácsos szerkezet vizsgálata)

Ebben a példában egy hegesztett rácsos szerkezetet fogunk vizsgálni beam elemekkel.



10.8. ábra A szerkezet mechanikai modellje

Adatok:

Cső keresztmetszetének méretei:

Átmérő: 200mm

Falvastagság: 7mm

Zárt szelvény keresztmetszetének méretei:

Magasság: 250mm

Szélesség: 150mm

Falvastagság: 7mm

Anyag: S235 acél

Terhelés: $F=15kN$

A geometria megadása:

//A szerkezet méreteiből adódóan méter léptékben rajzoljuk meg a geometriát a gépészetben megszokott milliméter lépték helyett. Erre van lehetőségünk, hiszen a Femap 9.3 egy mértékegység rendszer nélküli szoftver, így annak megválasztása rajtunk múlik. Emiatt fokozottan figyeljünk az adatok megfelelő egységben való megadására.//

Geometry/Point

In Locate - Enter Coordinates or Select with Cursor dialog box set

X=0; Y=0; Z=0, then Click OK

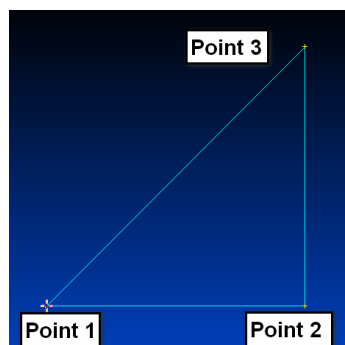
In Locate- Enter Coordinates or Select with Cursor dialog box set

X=3; Y=0; Z=0, then Click OK

In Locate- Enter Coordinates or Select with Cursor dialog box set

X=3; Y=3; Z=0, Click OK then Cancel

Hit Ctrl+A key to Autoscale the graphics window



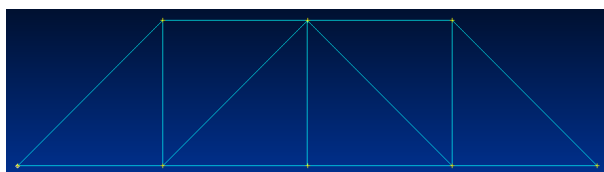
10.9. ábra A rácsos tartó bal oldala

Geometry/Curve-Line/Points...
In Create Line from Points dialog box
Pick point 1 then point 2
Click OK (curve 1 created)
In Create Line from Points dialog box
Pick point 2 then point 3
Click OK (curve 2 created)
In Create Line from Points dialog box
Pick point 3 then point 1
Click OK (curve 3 created), then Cancel

Geometry/Copy/Curve...
In Entity Selection – Select Curve(s) to Copy dialog box
Select All
Click OK
In Generation Options dialog box
Repetitions: 1
Click OK
In Vector Locate – Select Vector to Copy Along dialog box
Base: X=0; Y=0; Z=0
Tip: X=3; Y=0; Z=0
Click OK

Geometry/Curve-Line/Points...
In Create Line from Points dialog box
Pick point 3 then point 6
Click OK (curve 7 created)

Geometry/Reflect/Curve...
In Entity Selection – Select Curve(s) to Reflect dialog box
Select all
Pick Remove
Pick curve 5 (or write 5 in ID, than Click More)
Click OK
In Generation Options
Click OK
In Plane Locate – Select Reflection Plane
Select Base X field, then hit Ctrl+P key (in this way you can select points in the graphics window)
In Base field select point 5
In Point 1 field select point 6
In Point 2 field write X=6;Y=0; Z=1
Click OK



10.10. ábra A Femap-ban felépített geometria

Az anyag és tulajdonság definiálása

//Első lépésként anyagmodellt fogunk létrehozni. Mivel a szerkezet keresztmetszete változó, kétféle elem tulajdonságot szükséges definiálni. Az elem tulajdonságok anyagtörvénye egyező, eltérés az elemekhez hozzárendelt keresztmetszetekben lesz.//

Az anyag megadása

//Az S235 szerkezeti acél egy izotróp tulajdonságú anyag. Folyás határ alatt az izotróp anyagtörvény paraméterei közül elég az általános Hooke-törvényhez szükséges anyagjellemzőket megadni. Az önsúly figyelembe vétele miatt megadjuk a sűrűséget is.//

Model/Material

In Define Material – ISOTROPIC dialog box

Click Type

In Material Type dialog box choose Isotropic

Click OK

In Define Material – ISOTROPIC dialog box set

Title: S235 Steel

Young Modulus, E: 2,06e11 (remember we chosed *m* for unit)

Poisson's Ratio, nu: 0,3

Mass Density: 7,85e3

Click OK (material 1 created), then Cancel

A tulajdonság definiálása

//Hegesztett szerkezetek modellezésekor mindig beam elemeket alkalmazunk. A beam elemek végpontjai nyomaték felvételére is alkalmasak. A Femap 9.3 beépített keresztmetszeteket tartalmaz, amelyből most a körgyűrű és a zártszelvény keresztmetszeteket fogjuk alkalmazni.//

Model/Property

In Define Property – PLATE Element Type dialog box

Click Elem/Property Type

In Element/Property Type dialog box choose Beam (line Elements)

Click OK

In Define Property – BEAM Element Type dialog box

Give a Title such as: 200mm diameter BEAM

Material: 1..S235 Steel

Click Shape button

In Cross Section Defining dialog box

Shape: Circular Tube

Radius: 0,1

Thickness: 0,007

Click Draw section, then Click OK

In Define Property – BEAM Element Type dialog box

Click OK (Property 1 created)

In Define Property – BEAM Element Type dialog box

Title: 250x150x7 Beam

Material: 1..S235 Steel

Click Shape button

In Cross Section Defining dialog box

Shape: Rectangular Tube

Size: Height= 0,25; Width= 0,15; Thickness= 0,007
Click Draw section, then Click OK
In Define Property – BEAM Element Type dialog box
Click OK (Property 2 created), then click Cancel

Végeselemes hálózás

//Első lépésként előírjuk a hálósűrűséget majd az alsó és felső színt fogjuk behálózni, rossz orientációval. Ezután megjelenítjük a keresztmetszetet, majd javítjuk az orientációját. Végül behálózunk a megmaradt vonalakat is.//

Mesh/Mesh control/Size Along Curve

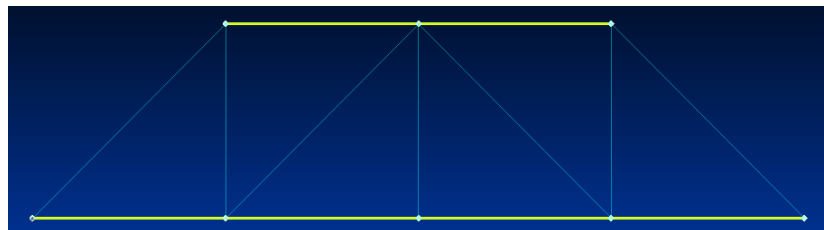
In Entity Selection – Select Curve(s) to Set Mesh Size dialog box

Select All, then click OK

In Mesh Size Along Curve dialog box

Select Number of Elements, then write 1 in field,

click OK, then Cancel



10.11. ábra 250x150x7 Beam elemekkel hálózandó vonalak

Mesh/Geometry/Curve

In Entity Selection – Select Curve(s) to Mesh dialog box

Pick the highlighted curves (Curve IDs 1,4,7,8,11,13)

Click OK

In Geometry Mesh Options dialog box set

Property: 2..250x150x7 Beam, then Click OK

In Vector Locate – Define Element Orientation Vector dialog box

Click Methods, then select Global Axis

In Vector Global Axis – Define Element Orientation Vector dialog box

Select Y Axis, then Click OK (6 Element(s) Created)

F6 key (view options)

In View Options dialog box

Category: Labels, Entities, and Color

Option: select Element Orientation/Shape

Element Shape: select 3..Show Cross Section

Click OK

//A keresztmetszet jobb láthatóságáért használjuk a közelítést és a forgatást.//

Modify/ Update Elements/ Line Element Orientation

In Entity Selection – Select Element(s) to Update Orientation

Select All, then click OK

In Update Element Orientation dialog box

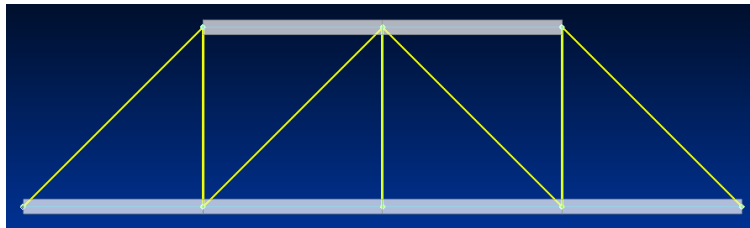
Select Vector, then click OK

In Vector Global Axis – Define Element Orientation Vector dialog box

Select Z Axis, then click OK

Ctrl+G key to Regenerate the window

A 200mm Beam elemek létrehozása



10.12. ábra A 200mm Beam elemek létrehozása

F8 key/View Rotate dialog box
Click XY_Top button, then Click OK

Mesh/Geometry/Curve

In Entity Selection – Select Curve(s) to Mesh dialog box
Pick the highlighted curves (Curve IDs 2, 3, 5, 6, 9, 10, 12)

Click OK

In Geometry Mesh Options dialog box set

Property: 1..200mm diameter BEAM, then Click OK

In Vector Global Axis – Define Element Orientation Vector dialog box

Click Methods, then select Normal to view

In Vector Normal to view – Define Element Orientation Vector dialog box

Click OK (7 Element(s) Created)

Egybeeső csomópontok egyesítése

//Több lépésben elvégzett hálózaskor mindig lesznek egymással ugyan egybeeső, de független csomópontok. Ezeket az egybeeső csomópontokat egyesíteni kell.//

Tools/ Check/ Coincident Nodes

In Entity Selection dialog box

Select All, then Click Ok

In Check/Merge Coincident dialog box

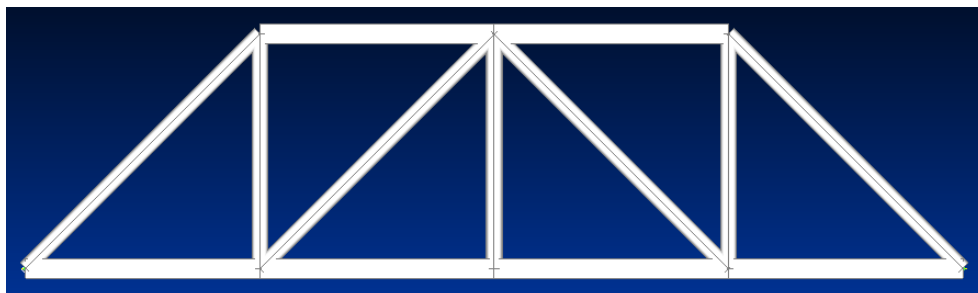
Action: Merge

Keep ID: Automatic

Move To: Current Location

Click OK (8 Node(s) Merged)

Hálózás után a grafikus ablaknak egyeznie kell a következő képpel:



10.13. ábra A behálózott rácsos szerkezet

A megfogások definiálása

Model/ Constraint/ Nodal

In New Constraint Set dialog box

Title: (give a title), then click OK

In Entity Selection – Enter Node(s) to Select dialog box

Pick point 5, then click OK

In Create Nodal Constraint/ DOF Dialog box

Title: Support1

Select Coord Sys: 0.. Basic Rectangular

Select TX; TY; TZ; RX; RY, then Click OK

In Entity Selection – Enter Node(s) to Select dialog box

Pick point 11, then click OK

In Create Nodal Constraint/ DOF Dialog box

Title: Support2

Select Coord Sys: 0.. Basic Rectangular

Select TY; TZ; RX; RY

Click OK, then Click Cancel

A terhelés megadása

Model/ Load/ Nodal

In New Load Set dialog box

Title: (give a title), then click OK

In Entity Selection – Enter Node(s) to Select dialog box

Pick point 10, then click OK

In Create Loads on Nodes dialog box

Title: Loading; Force FY=-15000

Click OK, then Cancel

Model/Load/Body

In Create Body Loads dialog box

Translational Accel/Gravity (length/time/time) select Active

Ay value= -9,81

Click OK

Végeleemes számítás

//Az NX Nastran megoldót használva lineáris statikus vizsgálatot végzünk.//

Model/Analysis

In Analysis Set Manager dialog box

Click New button

In Analysis Set dialog box

Title: Linear static analysis

Analysis Program: 36..NX Nastran

Analysis Type: 1..Static

Click OK, then analyze (In Analysis Set Manager dialog box)

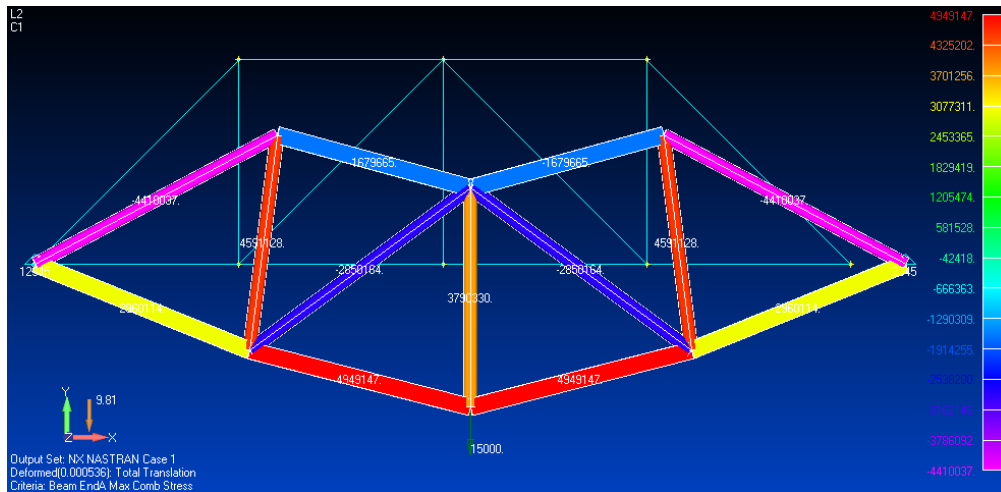
When you see the following message: Cleanup of Output Set 1 is Complete, close the NX Nastran Analysis Monitor

Az eredmények megjelenítése

F5 key (view select)

In View Select dialog box

Deformed Style: Deform
 Contour Style Criteria
 Click Deformed and Contour Data
 Select PostProcessing Data dialog box
 Output vector; Deform: 1..Total Translation
 Contour: 3164..Beam EndA Max Comb Stress
 Click OK all dialog box



10.14. ábra Feszültségállapot megjelenítése a deformált alakon

4. Numerikus példa (Statikailag határozatlan tartó)

Tekintsük a 4.8. ábrán lévő statikailag határozatlan befogott tartót. Feladatunk meghatározni a csomópontok y tengely menti elmozdulását és z tengely körüli elfordulását.

Adatok:

$$l = 1000mm$$

$$d = 30mm$$

$$E = 69000MPa$$

$$F = 500N$$

A geometria megadása:

Geometry/Curve-Line/Project Points...

In Locate- Enter First Location for Projected Line dialog box set

X=0; Y=0; Z=0, then Click OK

In Locate- Enter Second Location for Projected Line dialog box set

X=1000; Y=0; Z=0, then Click OK and finally CANCEL

Hit Ctrl+A key to Autoscale the graphics window

Az anyag megadása

//A rúd anyaga alumínium, amelyre a Hooke-törvényt alkalmazzuk, mint anyagtörvény.

Ilyenkor elegendő megadni az anyag rugalmassági modulusát és a Poisson tényezőt.//

Model/Material

In Define Material – ISOTROPIC dialog box

Click Type

In Material Type dialog box choose Isotropic

Click OK

In Define Material – ISOTROPIC dialog box set

Title: Alumínium

Young Modulus, E: 6,9E4Poisson's Ratio, nu: 0,33

Click OK (material 1 created), then Cancel

A tulajdonság definiálása

//Az anyag megadása után a tulajdonságot adjuk meg. Körkeresztmetszetű Beam elemet választunk.//

Model/Property

In Define Property – PLATE Element Type dialog box

Click Elem/Property Type

In Element/Property Type dialog box choose Beam (line Elements)

Click OK

In Define Property – BEAM Element Type dialog box

Give a Title such as: 30mm diameter BEAM

Material: 1..Aluminum

Click Shape button

In Cross Section Defining dialog box

Shape: Circular Bar

Radius: 15

Click Draw section, then Click OK

In Define Property – BEAM Element Type dialog box

Click OK (Property 1 created), then Cancel

Végelelemes hálózás

Mesh/Mesh control/Size Along Curve

In Entity Selection – Select Curve(s) to Set Mesh Size dialog box

Select the defined curve in the graphics window, then click OK

In Mesh Size Along Curve dialog box

Select Number of Elements, then write 2 in field

click OK, then Cancel

Mesh/Geometry/Curve

In Entity Selection – Select Curve(s) to Mesh dialog box

Select the defined curve in the graphics window, then click OK

In Geometry Mesh Options dialog box set

Property: 1..30 mm diameter BEAM, then Click OK

In Vector Locate – Define Element Orientation Vector dialog box set

In Base fields: X=0; Y=0; Z=0

In Tip fields: X=0; Y=1; Z=0

Click OK (2 Elements Created)

A megfogások definiálása

Model/ Constraint/ Nodal

In New Constraint Set dialog box

Title: (give a title), then click OK

In Entity Selection – Enter Nodal(s) to Select dialog box

Choose the nodel 1 on the left end of the rod , then click OK

In Create Nodal Constraints/DOF dialog box

Title: Support1

Select Fixed, then Click OK

In Entity Selection – Enter Node(s) to Select dialog box

Pick node 2 on the middle of the rod , then click OK

In Create Nodal Constraint/ DOF Dialog box

Title: Support2

Select Coord Sys: 0.. Basic Rectangular

Select TY, Click OK, then Click Cancel

A terhelés megadása

Model/ Load/ Nodal

In New Load Set dialog box

Title: (give a title), then click OK

In Entity Selection – Enter Nodal(s) to Select dialog box

Pick node 3 on the right end of the rod , then click OK

In Create Loads on Nodes dialog box

Title: Hajlítás; Choose Force and set Load value to: $F_y=-500$

Click OK, then Cancel

Végelelemes számítás

//Az NX Nastran megoldót használva lineáris statikus vizsgálatot végzünk.//

Model/Analysis

In Analysis Set Manager dialog box

Click New button

In Analysis Set dialog box

Title: Linear static analysis

Analysis Program: 36..NX Nastran

Analysis Type: 1..Static

Click OK, then analyze (In Analysis Set Manager dialog box)

When you see the following message: Cleanup of Output Set 1 is Complete, close the NX Nastran Analysis Monitor

Az eredmények megjelenítése

//Jelen példánál a számunkra fontos információk a csomóponti elmozdulás és szögelfordulás értékek. Ezeket fogjuk kilistázni.//

List/Output/Results to Data Table (If this is option is unavailable, Turn on it Tools/Data Table)

OK to Unlock Data Table? Click Yes

In Send Results to Data Table dialog box

Select Output Sets: in Columns; Output Vectors: in Columns; Nodes/Elements: in Rows

In Coordinate System (Nodal Output Only) Select 0..Basic Rectangular

In Results to Add to Data Table dialog box

Pick Outputs Sets: 1..NX NASTRAN Case 1

Pick Output Vectors: 3..T2 Translation and 8..R3 Rotation; Click OK

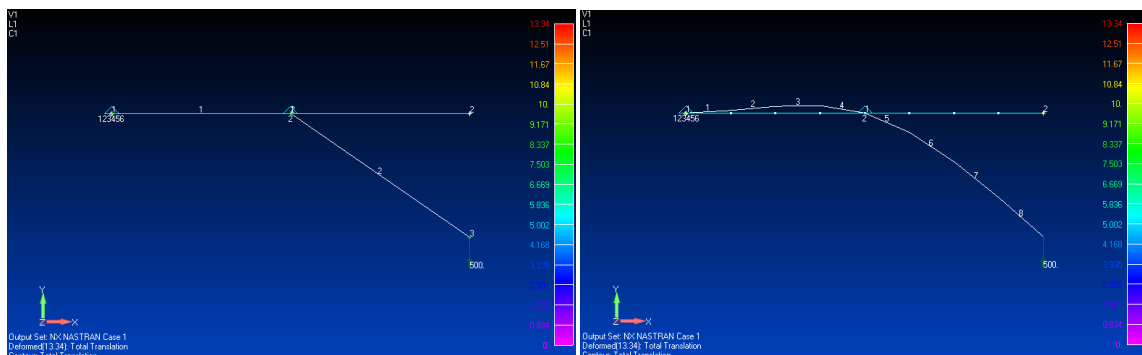
In Entity Selection – Select Node(s) to Report

Choose Select All Button, then Click OK

//A Data Table megnyitásával az alábbi adatoknak kell megjelenni://

ID	CSys ID	X	Y	Z	1..NX NASTRAN Case 1, 3..T2 Translation	1..NX NASTRAN Case 1, 8..R3 Rotation
1	0	0	0	0	0	0
2	0	500	0	0	0	-0.01145968 [rad]
3	0	1000	0	0	-13.33895 [mm]	-0.03424085 [rad]

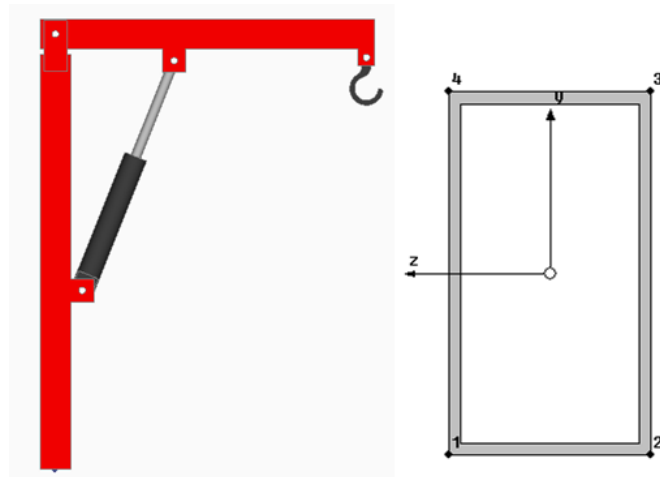
10.3. táblázat A csomóponti elmozdulások és szögelfordulások



10.15. ábra A tartó középvonalának alakváltozása ($N=2$ és $N=8$)

5. Numerikus példa (Hidraulikus emelőgép vizsgálata hibrid modell alkalmazásával)

Feladatunk előzetes méretezés elvégzése egy hidraulikus emelőgépen, mellyel maximálisan fél tonnás teher emelése a cél. Mondjuk meg mekkora tolóerejű munkahengert kell a szerkezetbe beépíteni! Ezután a terhelés hatására létrejött deformációt, majd a szerkezetben ébredő feszültségeket fogjuk megjeleníteni. Ábrázolva a szerkezet igénybevételi ábráit, meghatározásra kerül a veszélyes keresztmetszet és az ott ébredő igénybevételek nagysága. Végezetül meghatározzuk a szerkezet azon részeit, melyekben a feszültség értéke meghaladja a megengedett feszültség értékét. Tegyen javaslatot a szerkezet merevítésére.



10.16. ábra A hidraulikus emelőgép és a vázának keresztmetszete

Adatok:

$$F = mg$$

$$m = 500 \text{ kg}$$

$$a = 50 \text{ mm}$$

$$b = 90 \text{ mm}$$

$$v = 3 \text{ mm}$$

$$d = 30 \text{ mm}$$

$$E = 206000 \text{ MPa}$$

$$\nu = 0,3$$

$$\sigma_{meg} = 200 \text{ MPa}$$

Előzetes tervezéskor a valóságot jól közelítő, de a lehető legegyszerűbb mechanikai modell megalkotása a cél. A szerkezetet felépítő szelvényeket középvonalaikkal helyettesítve, egy egyszerű csuklós szerkezet kapunk. Ezekről a csuklókról a modell hálózásakor kell gondoskodni. A hidraulikus munkahenger szabványos elem, így szilárdsági méretezése most nem feladatunk. Ezekből adódóan a munkahengert célszerűen egyetlen rúd elemmel helyettesítjük, melynek végpontjaiban eleve csuklók találhatóak. A szerkezet további részeihez beam elemeket használunk.

A geometria megadása:

//A geometria 5 vonalból lesz elkészítve, ennek a hálózás szempontjából van szerepe.//

Geometry/Point

In Locate - Enter Coordinates or Select with Cursor dialog box set

X=0; Y=0; Z=0, then Click OK

In Locate- Enter Coordinates or Select with Cursor dialog box set

X=0; Y=500; Z=0, then Click OK

In Locate- Enter Coordinates or Select with Cursor dialog box set X=0; Y=1200; Z=0, then Click OK

In Locate- Enter Coordinates or Select with Cursor dialog box set X=300; Y=1200; Z=0, then Click OK

In Locate- Enter Coordinates or Select with Cursor dialog box set X=900; Y=1200; Z=0, Click OK, then Cancel

Hit Ctrl+A key to Autoscale the graphics window

Geometry/Curve-Line/Points...

In Create Line from Points dialog box

Pick point 1 then point 2 on the graphics window

Click OK (curve 1 created)

In Create Line from Points dialog box

Pick point 2 then point 3

Click OK (curve 2 created)

In Create Line from Points dialog box

Pick point 3 then point 4

Click OK (curve 3 created)

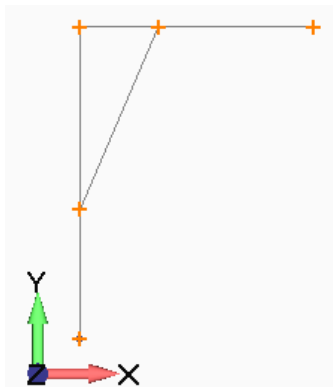
In Create Line from Points dialog box

Pick point 4 then point 5

Click OK (curve 4 created)

Pick point 2 then point 4

Click OK (curve 5 created), then CANCEL



10.17. ábra A szerkezet kialakítása vonalakkal

Az anyag megadása

//Az S235 szerkezeti acélra megszokott lineáris izotrópikus anyagtörvényt választjuk.//

Model/Material

In Define Material – ISOTROPIC dialog box

Click Type

In Material Type dialog box choose Isotropic

Click OK

In Define Material – ISOTROPIC dialog box set

Title: S235 Steel

Young Modulus, E: 2,06E5

Poisson's Ratio, nu: 0,3

Click OK (material 1 created), then Cancel

A tulajdonság definiálása

//Mivel két különböző típusú elemmel akarunk hálózni, két elem tulajdonságot hozunk létre a definiált anyagmodell kiválasztásával. Az egyik lesz a rúd vonalelem, mely csakis rúdirányú erő felvételére alkalmas. A beam vonalelemhez továbbá hozzárendeljük az alkalmazott keresztmetszet tulajdonságait is.//

Model/Property

In Define Property – PLATE Element Type dialog box

Click Elem/Property Type

In Element/Property Type dialog box

Choose Beam (line Elements), then Click OK

In Define Property – BEAM Element Type dialog box

Give a Title such as: BEAM 90x50x3

Material: 1..S235 Steel

Click Shape button

In Cross Section Defining dialog box

Shape: Rectangular Tube

Height: 90

Width: 50

Thickness: 3

Orientation Direction (y): Pick Up,

Click Draw section, then Click OK

In Define Property – BEAM Element Type dialog box

Click OK (Property 1 created)

In Define Property – BEAM Element Type dialog box

Click Elem/Property Type

In Element/Property Type dialog box

Choose Rod (line Elements), then Click OK

In Define Property – ROD Element Type dialog box

Title: 30 diameter ROD

Material: 1..S235 Steel

Area, A: 707

Click OK (Property 2 created), then click Cancel

Végeselemes hálózás

//Elsőként 50 mm-es elemméretet írunk elő a tartószerkezetet helyettesítő vonalakra. Ha több rúd elemmel hálózunk könnyen előfordulhat, hogy mechanikailag instabil szerkezethez jutunk. Emiatt a munkahenger vonalára a hálósűrűséget egy elemre állítjuk. A beam elemek keresztmetszetének orientációját körültekintően adjuk meg.//

Mesh/Mesh control/Size Along Curve

In Entity Selection – Select Curve(s) to Set Mesh Size dialog box

Pick to Curve: 1,2,3,4 on the graphics window, then click OK

In Mesh Size Along Curve dialog box

Select Element Size: 50

Click OK, then Cancel

In Entity Selection – Select Curve(s) to Set Mesh Size dialog box

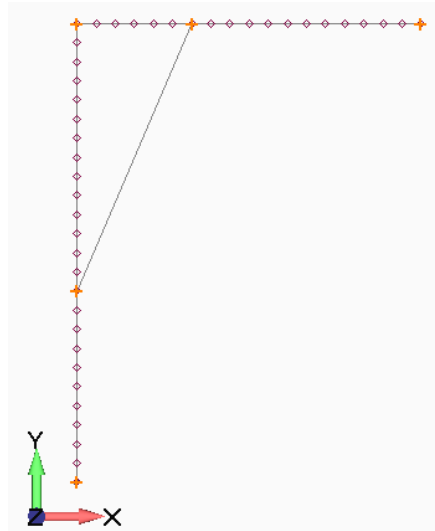
Pick to Curve: 5 on the graphics window, then click OK

In Mesh Size Along Curve dialog box

Select Number of Elements: 1

Click OK, then Cancel

View/ Options (or hit F6 key)
 In view Options dialog box
 Category: Labels, Entities and Color
 Options: Element – Orientation/ Shape
 Element Shape: 3..Show Cross Section
 Click OK



10.18. ábra A vonalak mentén előírt hálósűrűség

Mesh/Geometry/Curve

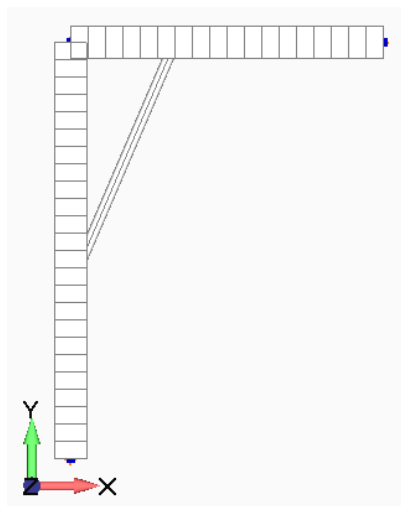
In Entity Selection – Select Curve(s) to Mesh dialog box
 Pick curve 1,2 on the graphics window, then click OK
 In Geometry Mesh Options dialog box set
 Property: 1..BEAM 90x50x3, then Click OK
 In Vector Locate – Define Element Orientation Vector dialog box set
 Click to Methods Button and Select Global Axis from the drop down list
 In Vector Global Axis – Define Element Orientation Vector
 Direction: Negative; X Axis
 Click Preview Button, then OK (24 Elements Created)

Mesh/Geometry/Curve

In Entity Selection – Select Curve(s) to Mesh dialog box
 Pick curve 3,4 on the graphics window, then click OK
 In Geometry Mesh Options dialog box set
 Property: 1..BEAM 90x50x3, then Click OK
 In Vector Global Axis – Define Element Orientation Vector
 Direction: Positive; Y Axis
 Click OK (18 Elements Created)

Mesh/Geometry/Curve

In Entity Selection – Select Curve(s) to Mesh dialog box
 Pick curve 5 on the graphics window, then click OK
 In Geometry Mesh Options dialog box set
 Property: 2..30 diameter ROD
 Click OK (1 element Created)



10.19. ábra A behálózott modell

Egybeeső csomópontok egyesítése

//Mivel több lépésben hálóztuk be a modellt a csatlakozó vonalak végpontjaiban több csomópont van. Ezek a csomópontok egymástól függetlenül el tudnak mozdulni, ezért összevonjuk őket.//

Tools/ Check/ Coincident Nodes

In Entity Selection dialog box

Select All, then Click Ok

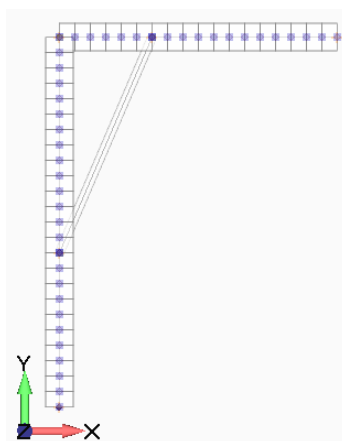
In Check/Merge Coincident dialog box

Tolerance: 1

Click Preview Button (You had to see 3 coincident nodes)

In Preview Coincident dialog box, Click to Done

In Check/Merge Coincident dialog box, Click to OK (3 Nodes Merged)



10.20. ábra Egybeeső csomópontok

//Következőekben a szerkezetben lévő csuklópontokat fogjuk a modellben is megvalósítani. A dugattyút helyettesítő rúdelem tulajdonságából adódóan csuklósan kapcsolódik a szerkezethez. A csatlakozási pontban viszont a szerkezet úgy viselkedik, mintha össze lenne hegesztve. A két elem egymáshoz képesti elfordulása, az elem csomópontjában lévő szabadságfok elengedésével biztosítható. Nem megfelelő szabadságfok elengedése futtatási problémát okoz. Megjelenítjük a beam elemek y tengelyét, és irányát (x tengely). Az elem irányvektora mindig az elem A végpontjából a B végpontjába mutat. Az A pont az origója az

elem saját helyi koordináta-rendszerének, melyben így már a megfelelő szabadságfok elengedése értelemeszerű.//

View/ Options (or hit F6 key)

In view Options dialog box

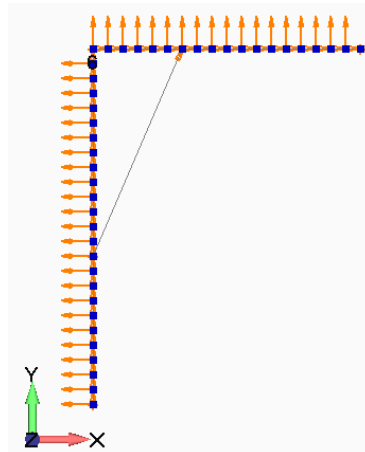
Category: Labels, Entities and Color

Options: Element – Directions, Pick Show Direction

Options: Element – Orientation/ Shape, then Element Shape: 0..Line/Plane Only

Options: Element – Beam Y-Axis, Pick Show Y Axis

Click OK



10.21. ábra Az elemek helyi koordináta-rendszerei

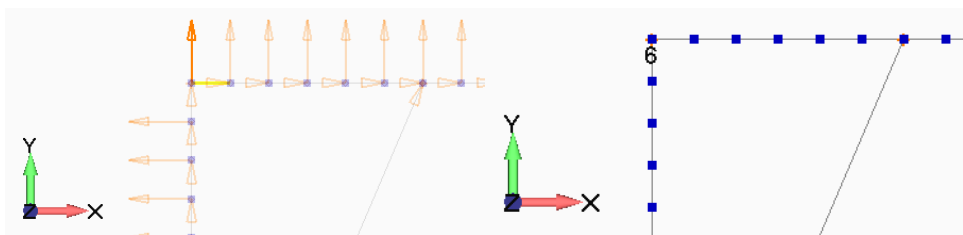
Modify/ Update Elements/ Beam or Bar Releases

In Entity Selection – Select Element(s) to Update Releases

Pick the element 25 on the graphics window, then Click to OK

In Define Element Releases

End A: Select RZ, then click OK



10.22. ábra A 25-ös sorszámú elem, RZ szabadságfokkal rendelkező csomópont

A megfogások definiálása

//A szerkezet alján lévő pontot kijelölve fix megfogást írunk elő.//

Model/ Constraint/ On Point

In New Constraint Set dialog box

Title: (give a title), then click OK

In Entity Selection – Enter Point(s) to Select dialog box

Pick point 1, then click OK

In Create Constraint on Geometry Dialog box

Title: Support

Standard Types: Fixed

Click OK, then Cancel

A terhelés megadása

Model/ Load/ On Point
In New Load Set dialog box
Title: (give a Title), then click OK
In Entity Selection – Enter Point(s) to Select dialog box
Pick point 5, then click to OK
In Create Loads on Points dialog box
Title: Loading
Select Force
Load Value: FY= -5000
Click OK, then Cancel

Végeselemes számítás

//Az NX Nastran megoldót használva lineáris statikus vizsgálatot végzünk. Beállítjuk a kiértékelendő mennyiségeket (elmozdulások, reakció erők, feszültségek, az elemekben fellépő erők).//

Model/Analysis
In Analysis Set Manager dialog box
Click New button
In Analysis Set dialog box
Title: Linear static analysis
Analysis Program: 36..NX Nastran
Analysis Type: 1..Static
Click Next 8 times
In Nastran Output Requests dialog box
Uncheck: Applied Load
Check: Displacement, Constraint Force, Force and Stess
Click OK, then analyze (In Analysis Set Manager dialog box)
When you see the following message: Cleanup of Output Set 1 is Complete, close the NX Nastran Analysis Monitor

Az eredmények megjelenítése

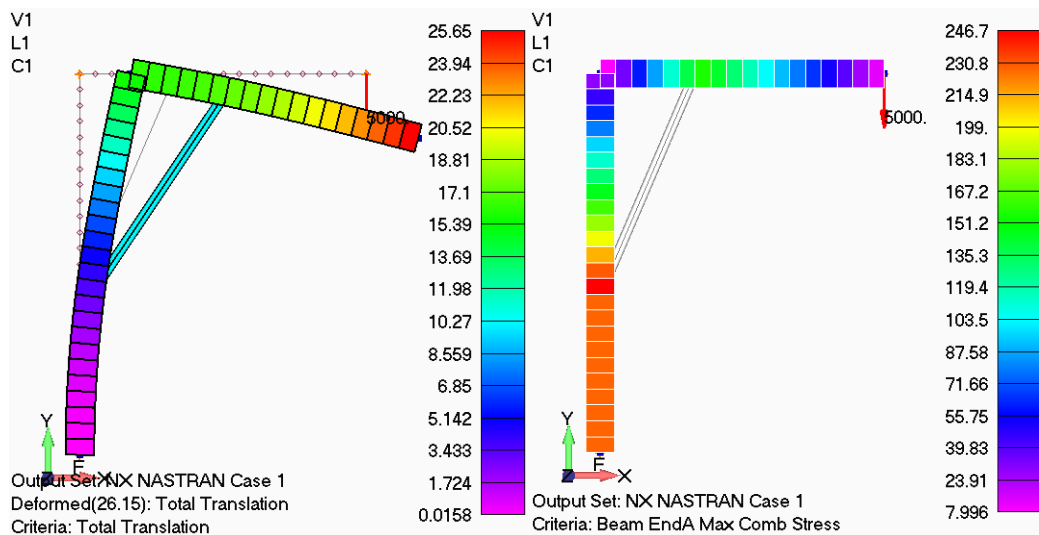
//Feladatunk a tartó alakváltozásátnak megjelenítése, ehhez módosításokat fogunk elvégezni a nézet beállításai ablakban. A deformált alak felnagyított állapotot mutat.//

View/ Rotate/ Modell (or hit F8 key)
In view rotate dialog box
Click to XY Top Button, then OK
Hit Ctrl+A key
View/Select (or hit F5 button)
In View Select dialog box
Deformed Style: Deform
Contour Style: Criteria
Click to Deformed and Contour Data... Button
In Select PostProcessing Data dialog box
Output Sets: NX NASTRAN Case 1
Deform: 1..Total Translation
Contour: 1..Total Translation
Click OK all dialob boxes
View/ Options
Category: Labels, Entities and Color

Options: Element – Orientation/ Shape, then Element Shape: 3..Show Cross Section
 Category: PostProcessing
 Options: Criteria – Elements that Pass
 Label Mode: 0..No Label
 Click OK

//Következő lépésként megjelenítjük a feszültségeloszlást.//

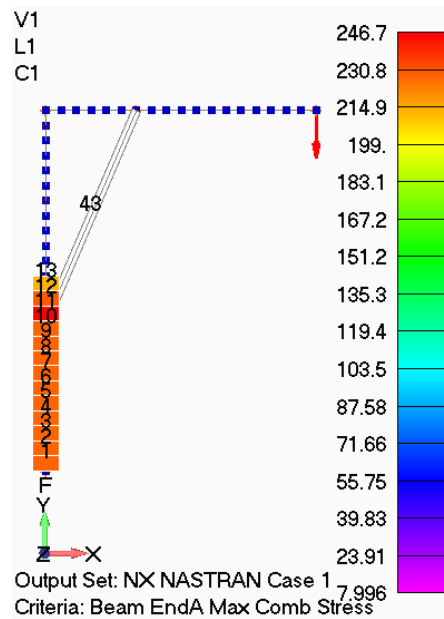
View/Select (or hit F5 button)
 In View Select dialog box
 Deformed Style: None – Model Only
 Click to Deformed and Contour Data... Button
 In Select PostProcessing Data dialog box
 Deform: 1..Total Translation
 Contour: 3164..Beam EndA Max Comb Stress
 Click OK all dialog boxes



10.23. ábra A tartó deformációja és a feszültségeloszlás

//Megjelenítjük azokat az elemeket, melyekben a feszültség értéke túllépi a szerkezetben megengedett 200 MPa-os feszültség értéket.//

View/ Options
 In View Options dialog box
 Category: PostProcessing
 Options: Criteria Limits
 Limits Mode: 1..Above Maximum
 Minimum: 0; Maximum: 200
 Click OK



10.24. ábra A veszélyes szerkezeti elemek

//A következő lépésekben az igénybevételi ábrákat jelenítjük meg. A munkahenger tolóerejének meghatározása céljából elsőként a rúdelemben ébredő rúderő nagyságát értékeljük ki.//

View/ Select

In View Select dialog box

Deformed Style: None – Model Only

Contour Style: Criteria

Click to Deformed and Contour Data... Button

In Select PostProcessing Data dialog box

Contour: 3036..Rod Axial Force

Click OK all dialob boxes

//A következő lépésben megjelenítjük a hajlítónyomatéki ábrát.//

View/ Select

In View Select dialog box

Deformed Style: None – Model Only

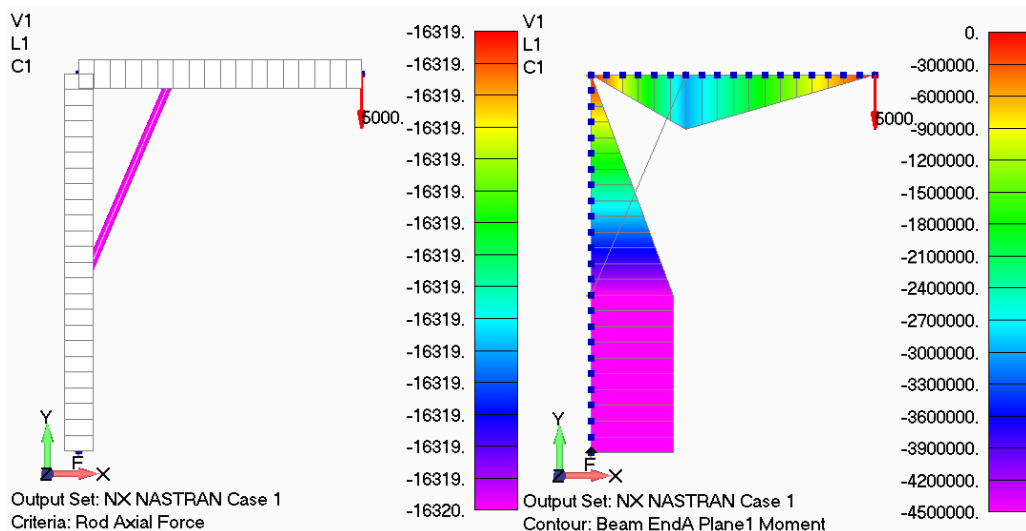
Contour Style: Beam Diagram

Click to Deformed and Contour Data... Button

In Select PostProcessing Data dialog box

Contour: 3014..Beam EndA Plane1 Moment

Click OK all dialog boxes



10.25. ábra A rúdelemben ébredő erő és a szerkezet hajlítónyomatéki ábrája

//Normál és nyíró igénybevételi ábrák kiértékelésének lépései//

View/ Select

In View Select dialog box

Click to Deformed and Contour Data... Button

In Select PostProcessing Data dialog box

Contour: 3018..Beam EndA P11 Shear Force

Click OK all dialob boxes

View/ Select

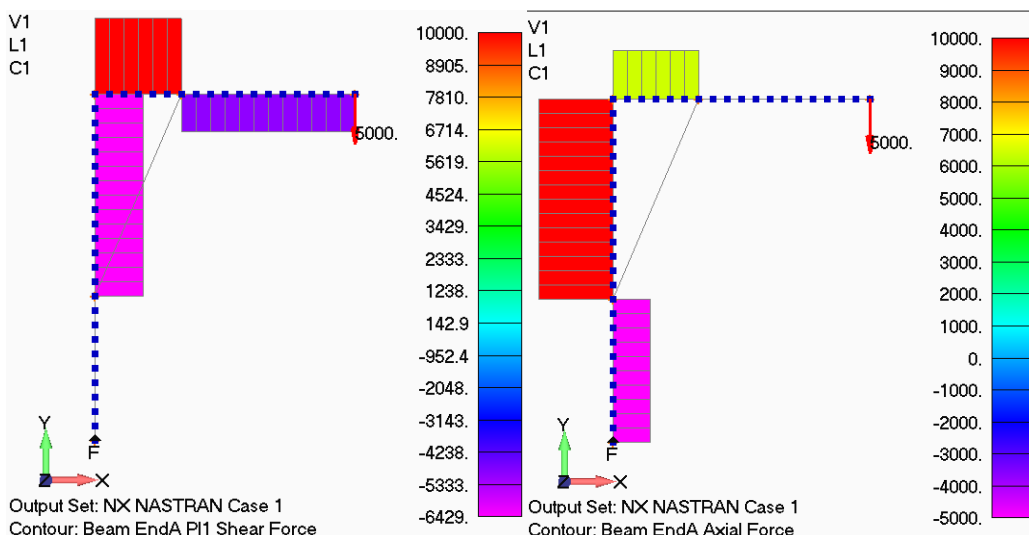
In View Select dialog box

Click to Deformed and Contour Data... Button

In Select PostProcessing Data dialog box

Contour: 3022..Beam EndA Axial Force

Click OK all dialog boxes



10.26. ábra A nyíróerő ábra és a rúdező ábra

//A Femap-ben lehetőség van az elemekhez rendelt keresztmetszetekben ébredő feszültségeloszlások megjelenítésére//

View/ Select

In View Select dialog box

Contour Style: None – Model Only

Click OK

View/ Advanced Post/ Beam Cross Section

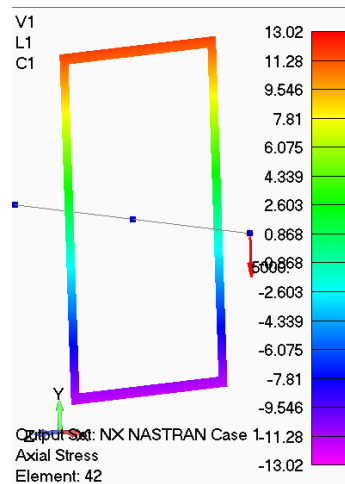
In Beam Cross Section Stress Control dialog box

Elements: Select Single

Pick Element 42 (the last element at the right side of the model)

Show Stress: Select 4..Axial Stress from the drop down list

In location section: Move the slider bar between End A and End B

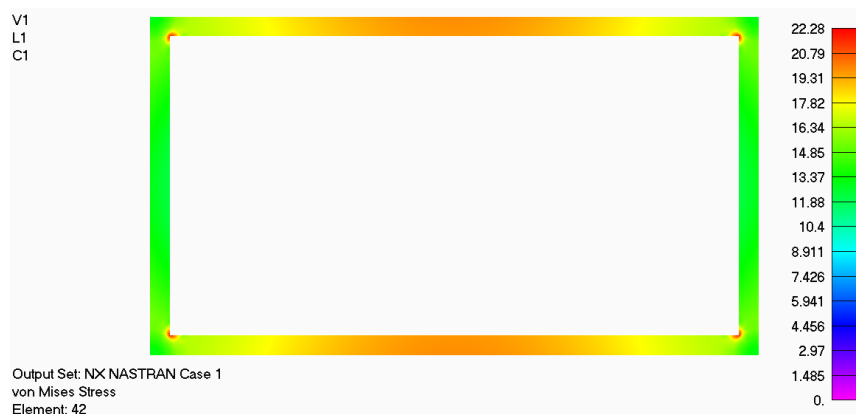


10.27. ábra Feszültségeloszlás a keresztmetszeten

Select Screen Space

Show Stress: 0.. von Mises Stress

Click OK



10.28. ábra A redukált feszültség eloszlása a keresztmetszet mentén

//Az igénybevételi ábra alapján a veszélyes keresztmetszethez tartozó elem meghatározható.

Az itt ébredő igénybevételeket az elemhez tartozó csomópontból értékeljük ki.//

List/Output/Results to Data Table (If this is option is unavailable, Turn on it Tools/Data Table)

OK to Unlock Data Table? Click Yes

In Send Results to Data Table dialog box

Select Output Sets: in Columns; Output Vectors: in Columns; Nodes/Elements: in Rows

In Coordinate System (Nodal Output Only) Select 0..Basic Rectangular
 In Results to Add to Data Table dialog box
 Pick Outputs Sets: 1..NX NASTRAN Case 1
 Pick Output Vectors: 3014..Beam EndA Plane 1 Moment, 3018..Beam endA P11Shear Force,
 3022..Beam EndA Axial Force; then Click OK
 In Entity Selection – Select Element(s) to Report
 Pick to element 11 (above the dangerous cross-section)
 //A Data Table megnyitásával az alábbi adatoknak kell megjeleníteni://

Element ID	Beam EndA Plane1 Moment	Beam EndA Plane1 Shear Force	Beam EndA Axial Force
11	-4500000 [Nmm]	-6428.571 [N]	10000 [N]

10.4. táblázat A veszélyes keresztmetszetben ébredő igénybevételek

6. Numerikus példa (Furattal gyengített alumínium lemez)

Egy középen furattal ellátott alumínium lemezt vizsgálunk a következőkben.

Adatok:

Oldalélek hossza: $a = 80\text{mm}$, $b = 30\text{mm}$.

Furatátmérő: $d = 20\text{mm}$.

Lemezvastagság: $t = 2\text{mm}$.

Rugalmasági modulusz: $E = 69\text{ GPa}$.

Poisson tényező: $\nu = 0.33$.

Terhelés $p = 30\text{ N/mm}^2$.

A geometria megadása

//A modell geometriája és peremfeltételei is szimmetrikusak. Modellezéskor ezt kihasználva a lemez negyedmodelljét vizsgáljuk.//

Geometry/Curve-Line/Project points

In Locate-Enter First Location for Projected Line dialog box set

X=10; Y=0; Z=0

Click OK

In Locate-Enter Second Location for Projected Line dialog box set

X=15; Y=0; Z=0

Click OK (curve 1 created)

In Locate-Enter First Location for Projected Line dialog box set

X=15; Y=0; Z=0

Click OK

In Locate-Enter Second Location for Projected Line dialog box set

X=15; Y=40; Z=0

Click OK (curve 2 created)

In Locate-Enter First Location for Projected Line dialog box set

X=15; Y=40; Z=0

Click OK

In Locate-Enter Second Location for Projected Line dialog box set

X=0; Y=40; Z=0

Click OK (curve 3 created)

In Locate-Enter First Location for Projected Line dialog box set

X=0; Y=40; Z=0

Click OK

In Locate-Enter Second Location for Projected Line dialog box set

X=0; Y=10; Z=0

Click OK (curve 4 created), then click Cancel.

Geometry/Curve-Arc/Center-Start-End

In Locate-Enter Location at Center of Arc dialog box set

X=0; Y=0; Z=0

Click OK

In Locate-Enter Location at Start of Arc dialog box set

X=10; Y=0; Z=0

Click OK

In Locate-Enter Location at End of Arc dialog box set

X=0; Y=10; Z=0

Click OK (curve 5 created), then click Cancel.

Geometry/Boundary Surface/From Curves
In Entity Selection-Select Curve(s) on Closed Boundary dialog box click
Select All, then click OK (boundary 1 created), then click Cancel.

Az anyag megadása

Model/Material
In Define Material dialog box click
Type,
In Material Type dialog box choose Isotropic
Click OK
In Define Material-ISOTROPIC Dialog box set
Title=aluminum
Youngs Modulus, E=69000
Poisson's Ration, nu=0.33
Click OK (Material 1 created), then click Cancel.

A tulajdonság definiálása

Model/Property
In Define Property dialog box click
Elem/Property Type...,
In Element/Property Type dialog box choose Plane Strain
Click OK
In Define Property-PLANE STRAIN Element Type dialog box set
Thicknesses, Tavg or T1=2
Click OK (Property 1 created), then click Cancel.

A terhelés megadása

Model/Load/On Curve
In Entity Selection-Enter Curve(s) to Select dialog box set
ID=3 to=3 by=1 (or pick curve 3)
Click OK
In Create Loads on Curves dialog box choose Force Per Length and set
FY=30
Click OK (Load 1 created), then click Cancel.

A megfogások definiálása

Model/Constraint/On Curve
In Entity Selection-Enter Curve(s) to Select dialog box set
ID=1 to=1 by=1 (or pick curve 1)
Click OK
In Create Constraints on Geometry dialog box choose Arbitrary in CSyS and choose TY
Click OK
In Entity Selection Enter Curve(s) to Select dialog box set
ID=4 to=4 by=1 (or pick curve 4)
Click OK
In Create Constraints on Geometry dialog box choose Arbitrary in CSyS and choose TX
Click OK, then click Cancel.

Végeselemes hálózás

Mesh/Mesh Control/Default Size

In Default Mesh Size dialog box set

Size=1

Click OK

Mesh/Geometry/Surface

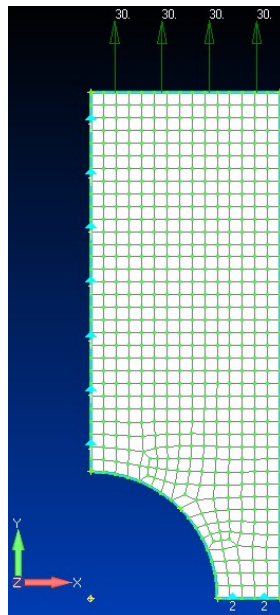
In Entity Selection-Select Surfaces to Mesh dialog box click

Select All, then click OK

In Automesh Surfaces dialog box set Property to 1..PLAIN STRAIN Property

Click OK.

//A modelltérben az alábbi képet kell látni://



10.29. ábra A lemez végeelem modellje

Végeselemes számítás

//Az NX Nastran megoldót használva lineáris statikus vizsgálatot végzünk.//

Model/Analysis

In Analysis Set Manager dialog box

Click New button

In Analysis Set dialog box

Title: Linear static analysis

Analysis Program: 36..NX Nastran

Analysis Type: 1..Static

Click Next 8 times

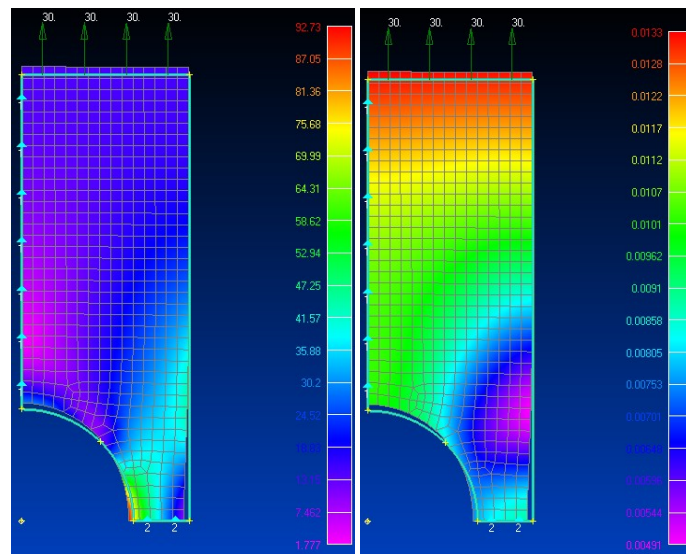
In Nastran Output Requests dialog box

Uncheck Applied Load, Constraint Force, Force and Check Strain

Click OK, then analyze (In Analysis Set Manager dialog box)

When you see the following message: Cleanup of Output Set 1 is Complete, close the NX Nastran Analysis Monitor

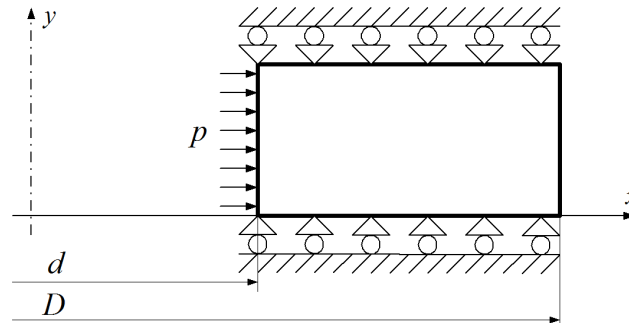
Az eredmények megjelenítése



10.30. ábra A feszültségeloszlás és az elmozdulásmező

7. Numerikus példa (Belső nyomással terhelt vastagfalú cső)

Egy vastag falú cső mechanikai modellje látható a 10.31. ábrán. A cső belső nyomásnak van kitéve. A cső tengelyirányú alakváltozása korlátozva van. A végeleemes modellt 8 elemből építjük fel elemenként 4 csomóponttal. A sugárirányú elmozdulás engedélyezett.



10.31. ábra A belső nyomással terhelt vastagfalú cső mechanikai modellje

Adatok:

Külső átmérő $D = 800\text{mm}$

Belső átmérő $d = 600\text{mm}$

Rugalmassági modulusz: $E = 210\text{ GPa}$.

Poisson tényező: $\nu = 0.3$.

Belső nyomás: $p = 100\text{bar} = 10\text{MPa}$.

A geometria megadása

Geometry/Curve-Line/Project points

In Locate-Enter First Location for Projected Line dialog box set

$X=300; Y=0; Z=0$

Click OK

In Locate-Enter Second Location for Projected Line dialog box set

$X=400; Y=0; Z=0$

Click OK (curve 1 created)

In Locate-Enter First Location for Projected Line dialog box set

$X=400; Y=0; Z=0$

Click OK

In Locate-Enter Second Location for Projected Line dialog box set

$X=400; Y=50; Z=0$

Click OK (curve 2 created)

In Locate-Enter First Location for Projected Line dialog box set

$X=400; Y=50; Z=0$

Click OK

In Locate-Enter Second Location for Projected Line dialog box set

$X=300; Y=50; Z=0$

Click OK (curve 3 created)

In Locate-Enter First Location for Projected Line dialog box set

$X=300; Y=50; Z=0$

Click OK

In Locate-Enter Second Location for Projected Line dialog box set

$X=300; Y=0; Z=0$

Click OK (curve 4 created), then click Cancel.

Geometry/Boundary Surface/From Curves

In Entity Selection-Select Curve(s) on Closed Boundary dialog box click Select All, then click OK (Boundary 1 created), then click Cancel.

Az anyag megadása

Model/Material

In Define Material dialog box click

Type,

In Material Type dialog box choose Isotropic

Click OK

In Define Material-ISOTROPIC Dialog box set

Title=steel

Youngs Modulus, E=210000

Poisson's Ration, nu=0.3

Click OK (Material 1 created), then click Cancel.

A megfogások definiálása

Model/Property

In Define Property dialog box click

Elem/Property Type...,

In Element/Property Type dialog box choose Axisymmetric

Click OK

OK to show Axisymmetric Axis in all Views?

Click Yes

In Define Property-AXISYMMETRIC Element Type dialog box set

Title=axisymmetric

Material, choose 1..steel

Click OK (Property 1 created), then click Cancel.

Végeselemes hálózás

Mesh/Mesh Control/Size along curve

In Entity Selection-Select Curve(s) to Set Mesh Size dialog box set

Select Curve 1 and Curve 3

Click OK

In Mesh Size Along Curves dialog box set

Number of Elements box, set 8

Click OK

In Entity Selection-Select Curve(s) to Set Mesh Size dialog box set

Select Curve 2 and Curve 4

Click OK

In Mesh Size Along Curves dialog box set

Number of Elements box, set 1

Click OK, then click Cancel.

Mesh/Geometry/Surface

In Entity Selection-Select Surfaces to Mesh dialog box click

Select All, then click OK

In Automesh Surfaces dialog box set Property to 1..axisymmetric Property

Click OK.

A terhelés megadása

Model/Load/Elemental

In New Load Set dialog box set

Title: loading

Click OK

In Entity Selection-Enter Element(s) to Select dialog box set

Pick element 1

Click OK

In Create Loads on Elements dialog box choose Pressure and set

Pressure=10

Click OK

In Face Selection dialog box set

Pick Face 3

Click OK (Load 1 created), then click Cancel.

A megfogások definiálása

Model/Constraint/Create/Manage Set

In Constraint Set Manager dialog box set

New Constraint Set...

Title: constraints

Click OK

Click Done.

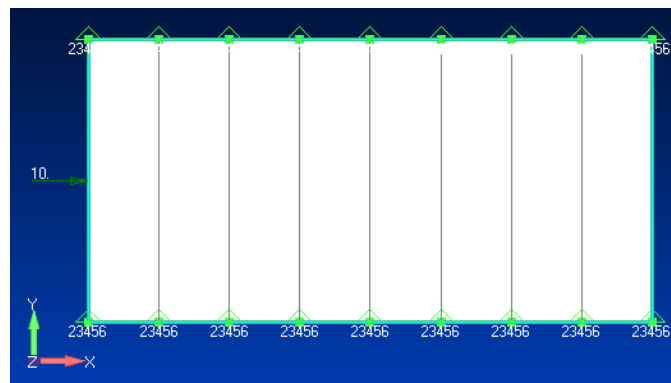
Modify/Update Other/Perm Constraint...

In Entity Selection-Select Node(s) to Update Permanent Constraints dialog box set

Select All, then click OK

In Update Nodal Permanent Constraints dialog box pick

TY, TZ, RX, RY, RZ, then click OK



10.32. ábra A vastagfalú cső végeselem modellje

Végeselemes számítás

//Az NX Nastran megoldót használva lineáris statikus vizsgálatot végzünk.//

Model/Analysis

In Analysis Set Manager dialog box

Click New button

In Analysis Set dialog box

Title: Linear static analysis

Analysis Program: 36..NX Nastran

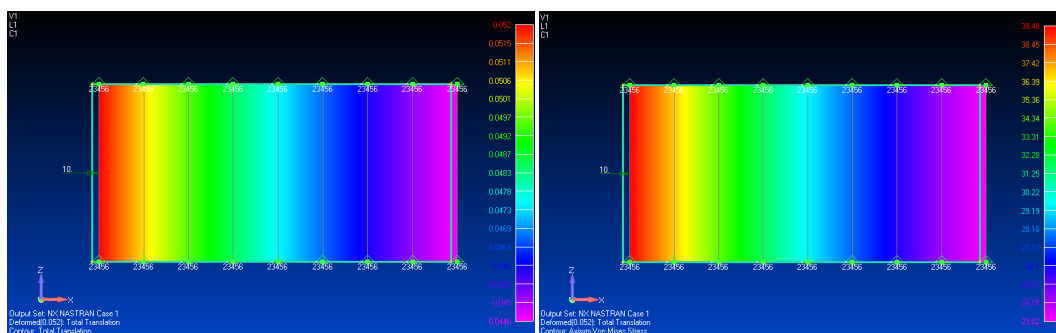
Analysis Type: 1..Static

Click Next 8 times

Click OK, then analyze (In Analysis Set Manager dialog box)
 OK to Flip Model?
 Click Yes
 OK to force all element normals to lie along the correct global axis?
 Click Yes
 In Scale Factor for Axisym Forces dialog box set
 Factor=1, then click OK
 OK to Save Model Now?
 Click Yes
 close the NX Nastran Analysis Monitor

Az eredmények megjelenítése

View/Rotate/Model
 In View Rotate dialog box pick
 ZX Front, then click OK
 //Megjelenítjük a nyomás hatására létrejött elmozdulásokat és feszültségeket.//
 View/Select
 In View Select dialog box set
 Deform Style: Deform
 Contour Style: Contour
 Click Deformed and Contour Data...
 In Select PostProcessing Data dialog box set
 Output Set: 1..NX NASTRAN Case 1
 Output Vectors
 Deformation: 1..Total Translation
 Contour: 1.. Total Translation
 Click OK
 Click OK
 View/Select
 In View Select dialog box set
 Deform Style: Deform
 Contour Style: Contour
 Click Deformed and Contour Data...
 In Select PostProcessing Data dialog box set
 Output Set: 1..NX NASTRAN Case 1
 Output Vectors
 Deformation: 1..Total Translation
 Contour: 6035.. Axisym Von Mises Stress
 Click OK
 Click OK



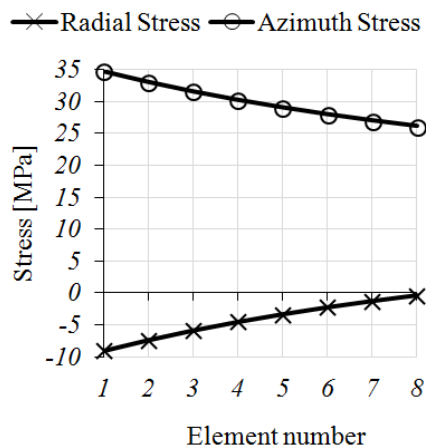
10.33. ábra A vastagfalú cső alakváltozása és feszültségeloszlása

ID	1..NX NASTRAN Case 1, 1..Total Translation
1	0.05198631 [mm]
2	0.05198631 [mm]
3	0.05068693 [mm]
4	0.04951809 [mm]
5	0.04846529 [mm]
6	0.04751609 [mm]
7	0.04665979 [mm]
8	0.04588709 [mm]
9	0.04518991 [mm]
10	0.04456116 [mm]
11	0.04456116 [mm]
12	0.04518991 [mm]
13	0.04588709 [mm]
14	0.04665979 [mm]
15	0.04751609 [mm]
16	0.04846529 [mm]
17	0.04951809 [mm]
18	0.05068693 [mm]

10.5. táblázat A csomópontok elmozdulása

ID	1..NX NASTRAN Case 1, 6028..Axisym Radial Stress	1..NX NASTRAN Case 1, 6029..Axisym Azimuth Stress	1..NX NASTRAN Case 1, 6035..Axisym Von Mises Stress
1	-9.076963 [MPa]	34.79367 [MPa]	38.33964 [MPa]
2	-7.390267 [MPa]	33.10605 [MPa]	35.44596 [MPa]
3	-5.890926 [MPa]	31.60596 [MPa]	32.878 [MPa]
4	-4.552184 [MPa]	30.26659 [MPa]	30.58937 [MPa]
5	-3.351897 [MPa]	29.06578 [MPa]	28.54168 [MPa]
6	-2.271611 [MPa]	27.98506 [MPa]	26.70294 [MPa]
7	-1.295845 [MPa]	27.00893 [MPa]	25.04629 [MPa]
8	-0.4115381 [MPa]	26.12431 [MPa]	23.54908 [MPa]

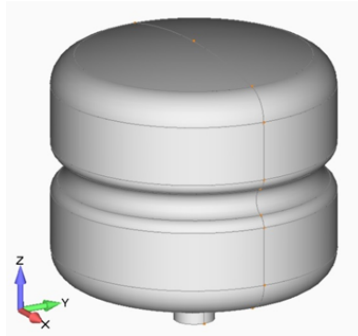
10.6. táblázat Az elemekben ébredő feszültségek



10.34. ábra A csődiagram

8. Numerikus példa (Forgásszimmetrikus nyomástartó edény)

A 10.35. ábrán látható nyomástartó edény belső nyomással van terhelve. Célunk meghatározni a nyomás hatására a tartály falában ébredő feszültségeket és a deformált alakot.



10.35. ábra A nyomástartó edény 3D-s modellje

Adatok:

Belső nyomás: $p = 20 \text{ bar}$

Falvastagság: $v = 10 \text{ mm}$

$E = 69000 \text{ MPa}$

$\nu = 0,33$

A 3D modell importálása

File/Import/ Geometry

In Geometry File to Import dialog box:

Go to the Examples directory and open pressure_vessel.stp file

In STEP Read Options dialog box:

Check the Geometry Scale Factor: 1000

Click OK

//Mikor más CAD rendszertől importáljuk a geometriát fontos, hogy ellenőrizzük a modell méreteit. Jelen esetben ezt a falvastagság ellenőrzésével tesszük meg.//

Tools/Measure/Distance

In Locate – Define Location to Measure From dialog box

Click Methods Button, and Select On Point (or press CTRL+P key when the cursor in the X, Y or Z field)

On Point – Define Location to Measure From dialog box

Point ID: 32, or Pick the point 1 on the model, Click OK

On Point – Define Location to Measure From dialog box

Point ID: 36, or Pick the point 2 on the model, Click OK then Cancel

//A mért távolság adatai a Message ablakban olvashatóak. Ellenőrizzük le, hogy a két pont távolsága valóban 10 mm-e.//

A 3D modell előkészítése a hálózásra

//Ha egy alkatrész geometriája, megfogása és terhelése is forgásszimmetrikus, akkor a modellt annak meridiánmetszetében építjük fel és vizsgáljuk. A következő lépésekben a tartály metszetének felületét készítjük el a solid modelltől kiindulva. A geometriával szemben támasztott követelmények tengelyszimmetrikus elemek használata esetén:

-A modellezés síkjának a Z és pozitív X tengelyek által behatárolt síknak kell lennie

-Az elemek henger koordinátarendszerben vannak értelmezve, ennek értelmében a Z tengely a henger koordinátarendszer forgástengelye, míg az x tengely a henger koordinátarendszer R tengelye lesz.//

Geometry/ Solid/ Slice

In Entity Selection – Select Solid to Slice dialog box

Pick the solid part on the graphics window, then Click OK

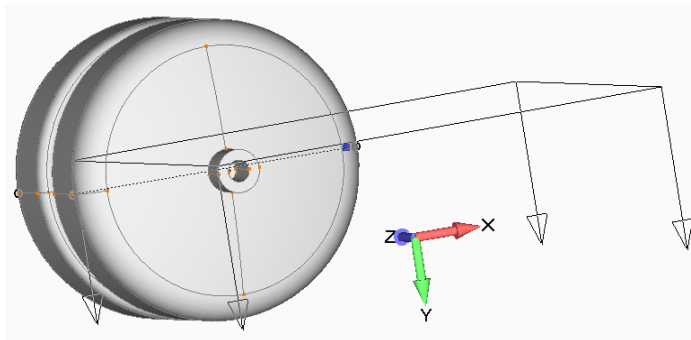
In Plane Locate - Specify Plane for Intersection dialog box

Click Methods Button and Select Points

In Plane Points –Specify Plane for Intersection dialog box

Select 3 points on the modell which is lying on the XZ plane

Base Point ID: 50; Plane Point 1: 49; Plane Point 2: 48, Click OK then Cancel



10.36. ábra Meridiánmetszet előállítása a 3D-s modellből

View/ Visibility (or hit CTRL+Q key)

In Visibility dialog box Select Geometry tab, Uncheck 1..Geometry, then Click Done

Geometry/ Solid/ Slice

In Entity Selection – Select Solid to Slice dialog box

Pick the solid part on the graphics window, then Click OK

In Plane Points –Specify Plane for Intersection box

Click Methods Button and Select Global Plane

In Global Plane –Specify Plane for Intersection box

Base: $X=0$; $Y=0$; $Z=0$ and Select YZ Plane,

Click preview (you can checking the cutting plane), Then Click OK

View/ Visibility

In Visibility dialog box Select Geometry tab, Uncheck 2..Untitled Geometry, then Click Done

Geometry/ Surface/Offset

In Entity Selection – Select Surfaces to Offset

Click Pick Button and select Front

Pick the surface 51 on the graphics window, and Click OK

In Offset Surface dialog box

Enter offset Value: 0, and Click OK, then Cancel

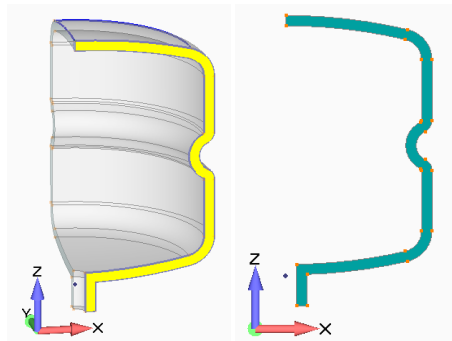
View/ Visibility

In Visibility dialog box Select Geometry tab, Uncheck 3..Untitled Geometry, then Click Done

View/ Rotate/ Model (or hit F8 Button)

In View Rotate dialog box Click to ZX Front Button, then Click OK

//A modelltérben a következőt kell látni://



10.37. ábra A tartály meridiánmetszete

Az anyag és tulajdonság definiálása

//Mielőtt behálóznánk a modellt szükséges, hogy definiáljunk a hálózásra alkalmazandó tulajdonságot. A definiálandó tulajdonságban meghatározzuk a végelem típusát, továbbá az alkalmazandó anyagtörvényt.//

Az anyag megadása

//A tartály anyaga S235 szerkezeti acél. Elegendő megadni az anyag rugalmassági modulusát és a Poisson tényezőt.//

Model/Material

In Define Material – ISOTROPIC dialog box

Click Type

In Material Type dialog box choose Isotropic

Click OK

In Define Material – ISOTROPIC dialog box set

Title: Aluminum

Young Modulus, E: 6,9E4

Poisson's Ratio, nu: 0,33

Click OK (material 1 created), then Cancel

A tulajdonság definiálása

//Az anyag megadása után elemtípusnak tengelyszimmetrikus térfogati elemet választunk.//

Model/Property

In Define Property – PLATE Element Type dialog box

Click to Elem/Property Type Button

In Element/Property Type dialog box choose Axisymmetric (Volume Elements)

Click OK

Ok to show Axisymmetric Axis in all Views? Click to Yes

In Define Property – AXYSIMMETRIC Element Type dialog box

Give a Title such as: Axisymmetric Aluminum

Material: 1..Aluminum

Click to OK, then Cancel

View/ Options (F6 key)

In View Options dialog box

Category: Tools and View Style

Options: Axisymmetric Axes

Direction: 4..Global Z, X Radial

Color/ Draw Mode: 5..RGB Solid

Click OK

Végeselemes hálózás

//Először az alapértelmezett elemméretet 2mm-re állítjuk. Ezután a belső lekerekítésen sűrítjük a hálózást 0,5 mm-es elemméretre. Végül a már definiált tulajdonsággal három csomópontú háromszög elemeket alkalmazva behálózuk a modellt.//

Mesh/Mesh control/Default Size

In Default Mesh Size dialog box

Element Size: 2

Click OK

View/ Options

In View Options dialog box

Category: Labels, Entities and Color

Options: Curve – Mesh Size

Show As: 2..Symbols (all curves)

Click OK

Mesh/ Mesh Control/ Size Along Curve

In Entity Selection – Select Curve(s) to Set Mesh Size dialog box

Pick curve 209 and 211 on the graphics window, then Click OK

In Mesh Size Along Curve dialog box

Element Size: 0,5

Click OK, then Cancel

Mesh/Geometry/Surface

In Entity Selection – Select Surfaces to Mesh dialog box

Select the meridian section's surface in the graphics window, then click OK

In Automesh Surfaces dialog box Set

Property: 1..Axyssymmetric Aluminum

Mesher: Triangles

Click OK

View/ Visibility

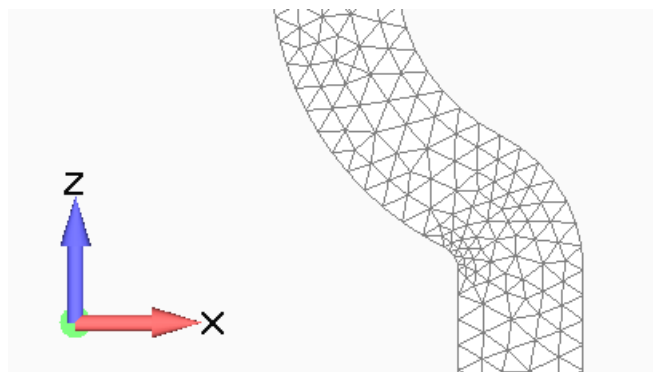
In Visibility dialog box Select Entity/ Label tab

Select Labels, Click to All off Button

Select Draw Entity, Click to All off Button, then Select Mesh/ Element

Click Done

//A modelltérben a következőt kell látni://



10.38. ábra A behálózott modell, a lekerekítés mentén hálósűrítéssel

A megfogások definiálása

//Mielőtt futtatnánk a végeelemes analízist definiálnunk kell a peremfeltételeket. A modell elmozdulását gátolni kell az XZ síkban, ezért az alsó vonal elemeinek Z tengely irányú szabadságfokát gátoljuk. A modell X és Y tengely irányú szabadságfokának megkötésére a tengelyszimmetrikus elemek alkalmazása miatt nincs szükség.//

Model/ Constraint/ On Curve

In New Constraint Set dialog box

Title: (give a title), then click OK

In Entity Selection – Enter Curve(s) to Select dialog box

Choose the curve 204 on the bottom of the part, then click OK

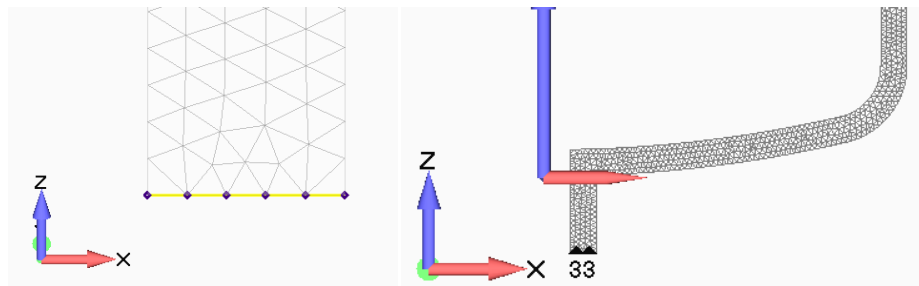
In Create Constraints on Geometry dialog box

Title: Support

Select Arbitrary in CSys and 0..Basic Rectangular from the drop down list

Check TZ degrees of freedom

Click Ok, then Cancel



10.39. ábra A kinematikai peremfeltétel definiálása

A terhelés megadása

///Következő lépésként belső nyomást írunk elő a tartály belső falára. Mivel nyomást csak felületen tudunk értelmezni, meg kell adnunk melyik elemre és annak melyik felületén hat a nyomás. A felületeket a Femap úgynevezett „Adjacent Faces” módszerével fogjuk kijelölni. Ehhez elsőnek fel kell venni egy referencia felületet, amely belső nyomásnak kitett. A módszer lényege, hogy a felvett felületből kiindulva, mindaddig kijelölődnek a csatlakozó felületek, míg azok egy tolerancia értéként megadott szögértéken kívül nem esnek. Mivel egy bizonyos mértékű tolerancia érték felett a metszet kontúrvonalának összes eleme kijelölődne, a terhelést két lépésben írjuk elő.//

Model/ Load/ Elemental

In New Load Set dialog box

Title: (give a title), then click OK

In Entity Selection – Enter Element(s) to Select dialog box

Click to Select All Button, then click OK

In Create Loads on Elements dialog box

Title: Belső Nyomás; Choose Pressure

Direction: Normal to Element Face (The direction of this vector will always shown out of the material)

Set Pressure value to: 2 (in MPa dimension)

Click OK

In Face Selection dialog box

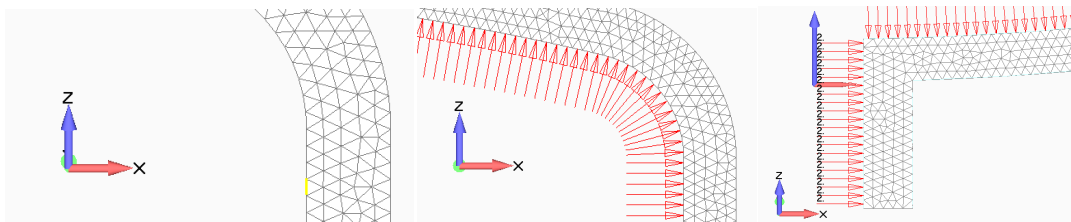
Method: Adjacent Faces

Click in Face field, and pick an element face on the inside of the vessel

Tolerance: 89

Select Front Face, then Click OK

In Entity Selection – Enter Element(s) to Select dialog box
 Click to Select All Button, then click OK
 In Create Loads on Elements dialog box
 Title: Internal pressure; Choose Pressure
 Set Pressure value to: 2
 Click OK
 In Face Selection dialog box
 Method: Adjacent Faces
 Click in Face field, and pick an element according to the Figure 10.40.
 Tolerance: 20
 Click OK, then Cancel



10.40. ábra A tartály elemeire ható nyomásvektorok

Végeselemes számítás

// Az NX Nastran megoldót használva lineáris statikus vizsgálatot végzünk.//

Model/Analysis

In Analysis Set Manager dialog box

Click New button

In Analysis Set dialog box

Title: Linear static analysis

Analysis Program: 36..NX Nastran

Analysis Type: 1..Static

Click Next 8 times

In Nastran Output Requests dialog box

Uncheck Applied Load, Constraint Force, Force nad Check Strain

Click OK, then analyze (In Analysis Set Manager dialog box)

When you see the following message: Cleanup of Output Set 1 is Complete, close the NX Nastran Analysis Monitor

Az eredmények megjelenítése

//A végeselem vizsgálat végeztével a számunkra fontos információkat értékeljük ki, úgy mint a csomóponti elmozdulásokat és az ébredő feszültségeket.//

View/ Rotate/ Modell (or hit F8 key)

In view rotate dialog box

Click ZX Front Button, then OK

View/Select (or hit F5 button)

In View Select dialog box

Deformed Style: Deform

Contour Style: Contour

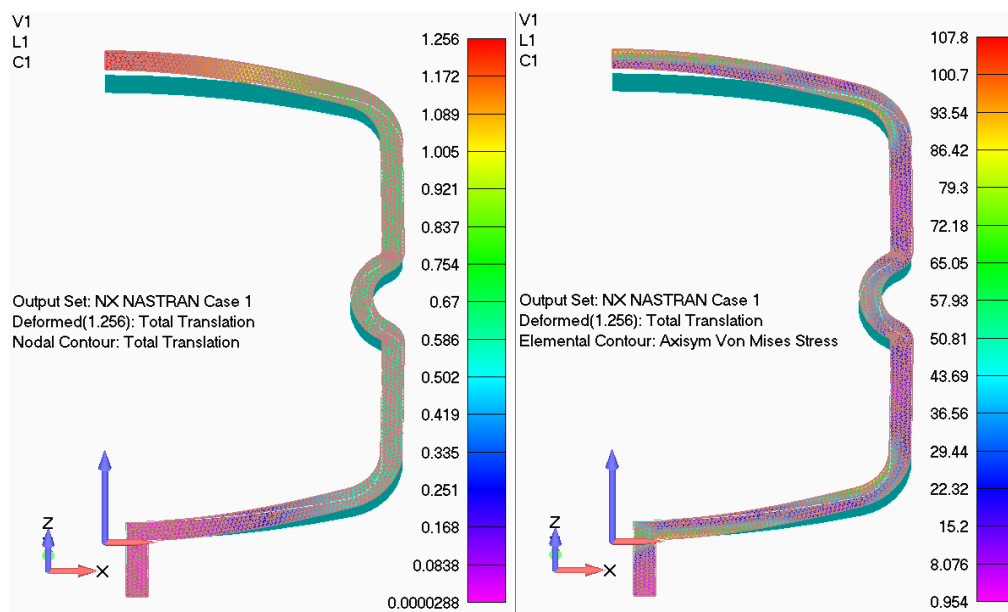
Click to Deformed and Contour Data... Button

In Select PostProcessing Data dialog box

Output Sets: NX NASTRAN Case 1

Deform: 1..Total Translation
 Contour: 1..Total Translation
 Click OK all dialog boxes
 Click Post Options and Select Actual Deformation
 Select Scale Deformation
 In Deformation Scale dialog box
 Actual: 10, Click OK

Post Options on the toolbar
 View/Select (or hit F5 button)
 In View Select dialog box
 Click to Deformed and Contour Data
 In Select PostProcessing Data dialog box
 Deform: 1..Total Translation
 Contour: 6035..Axisym Von Mises Stress
 Click OK all dialog boxes



10.41. ábra A nyomástartó edény deformációja és a tartály falában ébredő feszültség

//Animáció megjelenítése//

View/Select (or hit F5 button)

In View Select dialog box

Deformed Style: Animate

Contour Style: Contour

Click OK and then you had to see the deformation animation about the vessel load and unload

Some other recommended options for animation settings:

Click Post Options and Select Animation – Positive only

Click Animation Frames

In animation Frames dialog box

Frames: 20, then Click OK

//A feszültségértékek szempontjából veszélyes elemek kilistázása//

List/Output/Results to Data Table (If this option is unavailable, Turn on it Tools/Data Table)

OK to Unlock Data Table? Click Yes

In Send Results to Data Table dialog box

Select Output Sets: in Columns; Output Vectors: in Columns; Nodes/Elements: in Rows

In Coordinate System (Nodal Output Only) Select 0..Basic Rectangular

In Results to Add to Data Table dialog box

Pick Outputs Sets: 1..NX NASTRAN Case 1

Pick Output Vectors: 6035..Axisym Von Mises Stress; Click OK

In Entity Selection – Select element(s) to Report dialog box

Choose Select All Button, then Click OK

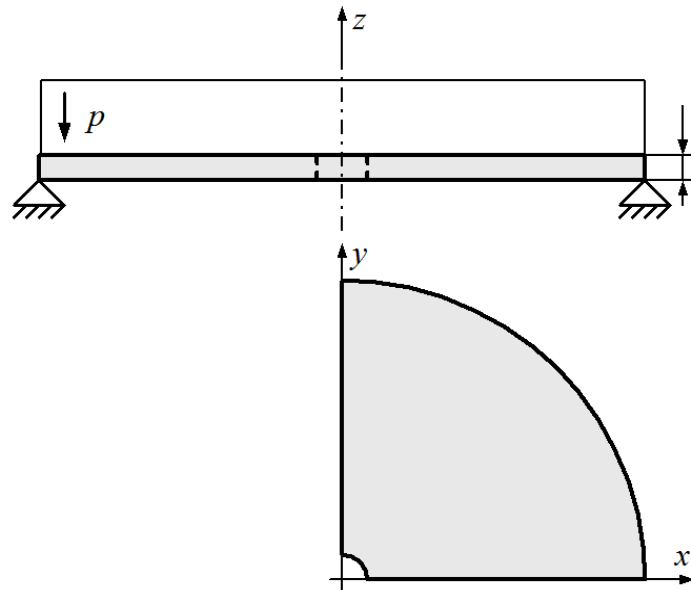
Open the Data Table and sort in decreasing order the value of 6035..Axisym Von Mises Stress

dangerous elements ID	1..NX NASTRAN Case 1, 6035..Axisym Von Mises Stress
523	119,2865 [MPa]
920	108,7452 [MPa]
925	108,2656 [MPa]
921	106,7549 [MPa]
56	106,5607 [MPa]

10.7. táblázat Az öt elem, ahol a legnagyobb feszültség ébred

9. Numerikus példa (Síkjában megoszló terheléssel terhelt körlemez)

Egy síkjában megoszló terheléssel terhelt körlemezt vizsgálunk. A körlemez mechanikai modelljét a 10.42. szemlélteti.



10.42. ábra A körlemez mechanikai modellje

Adatok:

Külső átmérő: $D = 1000\text{mm}$

Belső átmérő: $d = 100\text{mm}$

Lemezvastagság: $t = 50\text{mm}$

$E = 69000\text{MPa}$

$\nu = 0.33$

Nyomás: $p = 6\text{bar}$

A geometria megadása

//A modell geometriája és peremfeltételei is szimmetrikusak. Modellezéskor ezt kihasználva a lemez negyedmodelljét vizsgáljuk.//

Geometry/Curve – Line/Project points

In Locate-Enter First Location for Projected Line dialog box set

$X=50; Y=0; Z=0$

Click OK

In Locate-Enter Second Location for Projected Line dialog box set

$X=500; Y=0; Z=0$

Click OK (curve 1 created), then click Cancel

Geometry/Curve – Arc/Center – Start – End

In Locate-Enter Location at Center of Arc dialog box set

$X=0; Y=0; Z=0$

Click OK

In Locate-Enter Location at Start of Arc dialog box set

$X=500; Y=0; Z=0$

Click OK

In Locate-Enter Location at End of Arc dialog box set

$X=0; Y=500; Z=0$

Click OK (curve 2 created), then click Cancel

Geometry/Curve – Line/Project points

In Locate-Enter First Location for Projected Line dialog box set

X=0; Y=500; Z=0

Click OK

In Locate-Enter Second Location for Projected Line dialog box set

X=0; Y=50; Z=0

Click OK (curve 3 created), then click Cancel

Geometry/Curve – Arc/Center – Start – End

In Locate-Enter Location at Center of Arc dialog box set

X=0; Y=0; Z=0

Click OK

In Locate-Enter Location at Start of Arc dialog box set

X=50; Y=0; Z=0

Click OK

In Locate-Enter Location at End of Arc dialog box set

X=0; Y=50; Z=0

Click OK (curve 4 created), then click Cancel

Geometry/Boundary Surface/From Curves

In Entity Selection – Select Curve(s) on Closed Boundary dialog box pick

Select All, click OK (boundary 1 created), then click Cancel.

Az anyag megadása

Model/Material

In Define Material dialog box click

Type,

In Material Type dialog box choose Isotropic

Click OK

In Define Material-ISOTROPIC Dialog box set

Title=aluminum

Youngs Modulus, E=69000

Poisson's Ration, nu=0.33

Click OK (Material 1 created), then click Cancel.

A tulajdonság definiálása

Model/Property

In Define Property – PLATE Element Type dialog box set

Title: plate

Thicknesses, Tavg or T1=50

Material: 1..aluminum

Click OK (Property 1 created), then click Cancel

Végeselemes hálózás

Mesh/Mesh Control/Size Along Curve

In Entity Selection – Select Curve(s) to Set Mesh Size dialog box pick

curve 1, then click OK

In Mesh Size Along Curve dialog box set

Number of Elements=25

Node Spacing: Biased

Bias Factor=5

Small Elements at Start

Click OK

In Entity Selection – Select Curve(s) to Set Mesh Size dialog box pick curve 3, then click OK

In Mesh Size Along Curve dialog box set

Number of Elements=25

Node Spacing: Biased

Bias Factor=5

Small Elements at End

Click OK

In Entity Selection – Select Curve(s) to Set Mesh Size dialog box pick curve 2, then click OK

In Mesh Size Along Curve dialog box set

Number of Elements=25

Node Spacing: Equal

Click OK

In Entity Selection – Select Curve(s) to Set Mesh Size dialog box pick curve 4, then click OK

In Mesh Size Along Curve dialog box set

Number of Elements=10

Node Spacing: Equal

Click OK, then click Cancel

Mesh/Geometry/Surface

In Entity Selection – Select Surfaces to Mesh dialog box pick

Select All, then click OK

In Automesh Surfaces dialog box set

Property: 1..plate

Click OK

A terhelés megadása

Model/Load/On Surface

In New Load Set dialog box set

Title: Loading

Click OK

In Entity Selection – Enter Surface(s) to Select dialog box pick

Select All

Click OK

In Create Loads on Surface dialog box pick

Pressure

Pressure=0.6

Click OK, then click Cancel

A megfogások definiálása

Model/Constraint Nodal

In New Constraint Set dialog box set

Title: Support

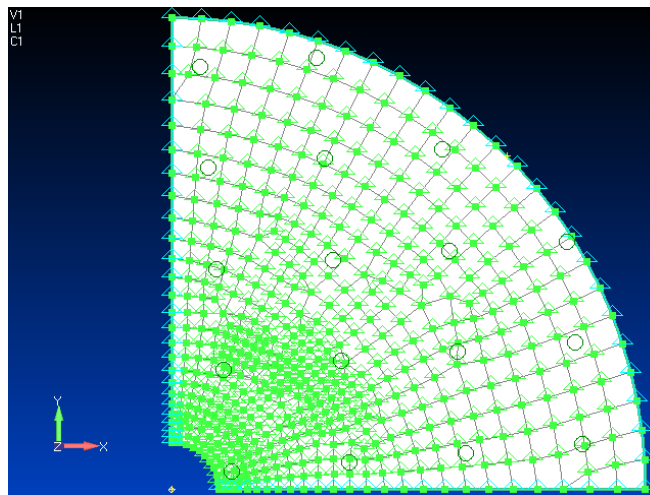
Click OK

In Entity Selection – Enter Node(s) to Select dialog box pick

Method – on Curve

Select curve 1, click OK

In Create Nodal Constraints/DOF dialog box pick
 TY; RX
 Click OK
 In Entity Selection – Enter Node(s) to Select dialog box pick
 Method – on Curve
 Select curve 3, click OK
 In Create Nodal Constraints/DOF dialog box pick
 TX; RY
 Click OK
 In Entity Selection – Enter Node(s) to Select dialog box pick
 Method – on Curve
 Select curve 2, click OK
 In Create Nodal Constraints/DOF dialog box pick
 Pinned
 Click OK
 Selected Constraints Already Exists. OK to Overwrite (NO=Combine)? No
 Click Cancel
 Modify/Update Other/Perm Constraint
 In Entity Selection – Select Node(s) to Update Permanent Constraints dialog box pick
 Select All
 In Update Nodal Permanent Constraints dialog box set
 RZ
 Click OK



10.43. ábra A körlemez végeselem modellje

Végeselemes számítás

//Az NX Nastran megoldót használva lineáris statikus vizsgálatot végzünk.//

Model/Analysis

In Analysis Set Manager dialog box

Click New button

In Analysis Set dialog box

Title: Linear static analysis

Analysis Program: 36..NX Nastran

Analysis Type: 1..Static

Click Next 8 times

Click OK, then analyze (In Analysis Set Manager dialog box)

Az eredmények megjelenítése

View/Select

In View Select dialog box set

Deform Style: Deform

Contour Style: Contour

Click Deformed and Contour Data...

In Select PostProcessing Data dialog box set

Output Set: 1..NX NASTRAN Case 1

Output Vectors

Deformation: 1..Total Translation

Contour: 1..Total Translation

Click OK

Click OK

View/Select

In View Select dialog box set

Deform Style: Deform

Contour Style: Contour

Click Deformed and Contour Data...

In Select PostProcessing Data dialog box set

Output Set: 1..NX NASTRAN Case 1

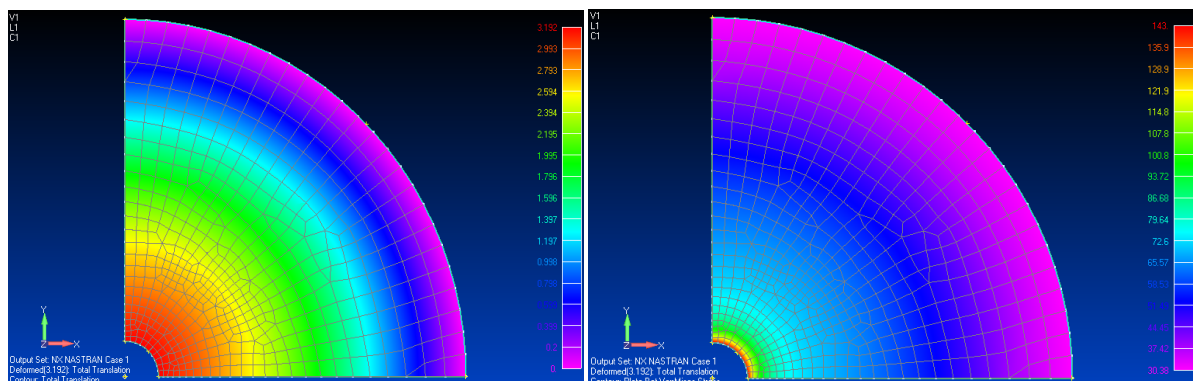
Output Vectors

Deformation: 1..Total Translation

Contour: 6035.. Axisym Von Mises Stress

Click OK

Click OK



10.44. ábra A körlemez deformációja és feszültségeloszlása

Unlock Data Table in toolbar

List/Output/Results to Data Table

In Send Results to Data Table dialog box set

Output Selection: Elemental

Click OK

In Results to Add to Data Table dialog box pick

1..NX NASTRAN Case 1

Output Vectors (from Output Set 1): 7030—Plate Top Mean Stress

Output Vectors (from Output Set 1): 7031—Plate Top MaxShear Stress

Output Vectors (from Output Set 1): 7033—Plate Top VonMises Stress

Click OK

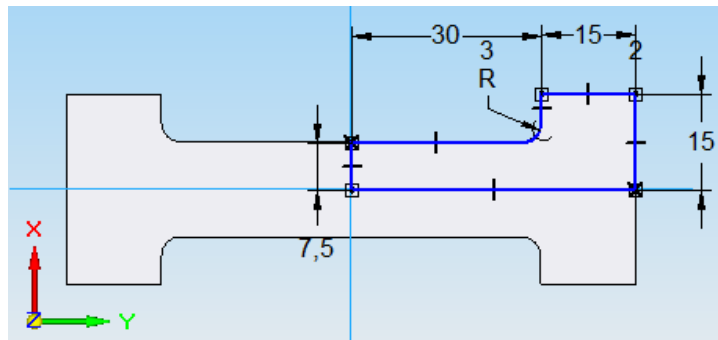
In Entity Selection-Select Element(s) to Report dialog box pick
Method – on Curve
Select curve 1
Click OK

ID	1..NX NASTRAN Case 1, 7030..Plate Top Mean Stress	1..NX NASTRAN Case 1, 7031..Plate Top MaxShear Stress	1..NX NASTRAN Case 1, 7033..Plate Top VonMises Stress
413	-53.4458 [MPa]	7.090441 [MPa]	54.83864 [MPa]
416	-56.42203 [MPa]	6.654825 [MPa]	57.58737 [MPa]
417	-50.07182 [MPa]	7.683464 [MPa]	51.81017 [MPa]
420	-59.01939 [MPa]	6.375372 [MPa]	60.04352 [MPa]
422	-61.2808 [MPa]	6.260712 [MPa]	62.23284 [MPa]
424	-63.26665 [MPa]	6.35216 [MPa]	64.21619 [MPa]
426	-64.99482 [MPa]	6.685522 [MPa]	66.0183 [MPa]
428	-66.44609 [MPa]	7.235489 [MPa]	67.6176 [MPa]
430	-67.66678 [MPa]	8.077028 [MPa]	69.09782 [MPa]
447	-30.81892 [MPa]	11.9621 [MPa]	37.13599 [MPa]
448	-37.15897 [MPa]	10.36846 [MPa]	41.27111 [MPa]
449	-41.98561 [MPa]	9.342827 [MPa]	44.99619 [MPa]
453	-25.63874 [MPa]	13.23143 [MPa]	34.38832 [MPa]
458	-18.83364 [MPa]	14.73518 [MPa]	31.71881 [MPa]
460	-46.26427 [MPa]	8.434076 [MPa]	48.51581 [MPa]
475	-68.69603 [MPa]	9.282112 [MPa]	70.55223 [MPa]
478	-69.54889 [MPa]	10.95035 [MPa]	72.08869 [MPa]
481	-70.25391 [MPa]	13.19449 [MPa]	73.87758 [MPa]
482	-70.79776 [MPa]	16.14915 [MPa]	76.12298 [MPa]
483	-71.22256 [MPa]	19.99701 [MPa]	79.19782 [MPa]
484	-71.52769 [MPa]	24.88964 [MPa]	83.51463 [MPa]
485	-71.62747 [MPa]	31.00818 [MPa]	89.52663 [MPa]
486	-72.0363 [MPa]	39.60439 [MPa]	99.47237 [MPa]
487	-72.01177 [MPa]	50.28646 [MPa]	113.0127 [MPa]
499	-71.91799 [MPa]	63.6239 [MPa]	131.591 [MPa]

10.8. táblázat A külső körív mentén lévő elemekben ébredő feszültség

10. Numerikus példa (Lemez próbatest húzása)

A 10.45. ábra egy lemez alakú szabványos szakító próbatest méreteit mutatja. Vizsgálat alatt a próbatest befogó pófák közé van szorítva. Feladatunk, olyan modell felépítése mellyel előállítható a lineárisan rugalmas tartományban a feszültség-alakváltozás görbe.



10.45. ábra A próbatest geometriai mérete

Adatok:

Vastagság $t = 2 \text{ mm}$

Előírt megnyúlás a pófák között: $\Delta v = 0,2 \text{ mm}$

A geometria megadása:

//A próbatest geometriájának és peremfeltételeinek szimmetriája miatt elég csak a modell negyedét vizsgálni.//

Geometry/Point

In Locate - Enter Coordinates or Select with Cursor dialog box set $X=0; Y=0; Z=0$, then Click OK

In Locate- Enter Coordinates or Select with Cursor dialog box set $X=7,5; Y=0; Z=0$, then Click OK

In Locate- Enter Coordinates or Select with Cursor dialog box set $X=7,5; Y=30; Z=0$, Click OK

In Locate- Enter Coordinates or Select with Cursor dialog box set $X=15; Y=30; Z=0$, Click OK

In Locate- Enter Coordinates or Select with Cursor dialog box set $X=15; Y=45; Z=0$, Click OK

In Locate- Enter Coordinates or Select with Cursor dialog box set $X=0; Y=45; Z=0$, Click OK then Cancel

Hit Ctrl+A key to Autoscale the graphics window

Geometry/Curve-Line/Points...

In Create Line from Points dialog box

Pick point 1 then point 2

Click OK (curve 1 created)

In Create Line from Points dialog box

Pick point 2 then point 3

Click OK (curve 2 created)

In Create Line from Points dialog box

Pick point 3 then point 4

Click OK (curve 3 created)

In Create Line from Points dialog box

Pick point 4 then point 5

Click OK (curve 4 created)

In Create Line from Points dialog box
Pick point 5 then point 6
Click OK (curve 5 created)
In Create Line from Points dialog box
Pick point 6 then point 1
Click OK (curve 6 created), then CANCEL
Modify/ Fillet
In Fillet Curves dialog box
Curve 1: 2; Curve 2: 3; Radius: 3
With Center Near: Click in X Field then click on the center of the fillet on the screen
Click OK, then Cancel
Geometry/ Boundary Surfaces/ From Curves
In Entity Selection - Select Curve(s) on closed Boundary dialog box Click to
Select All Button, then Ok

Az anyag megadása

Model/Material
In Define Material – ISOTROPIC dialog box
Click Type
In Material Type dialog box choose Isotropic
Click OK
In Define Material – ISOTROPIC dialog box set
Title: S235 Steel
Young Modulus, E: 2,06E5
Poisson's Ratio, nu: 0,3
Click OK (material 1 created), then Cancel

A tulajdonság definiálása

In Define Property – PLATE Element Type dialog box
Click Elem/Property Type
Give a Title such as: S235 PLATE
Material: 1..S235 Steel
Thicknesses, Tavg or T1: 2
Click OK (Property 1 created), then Cancel

Végeselemes hálózás

//Elsőként az alapértelmezett elemméretet 2mm-re állítjuk. Mivel a lekerekítések közelében az értékek intenzívebb változását várjuk, hálósűrítést végzünk ezeken a területeken. Végül a definiált tulajdonsággal három csomópontú, háromszög alakú elemeket alkalmazva behálózunk a modellt.//

Mesh/Mesh control/Default Size
In Default Mesh Size dialog box UnCheck Set Element Size on Next Use
Set Element Size: 2
Set Minimum Number of Elements: 1
Click OK

View/ Options

In View Options dialog box Select
Category: Labels, Entities and Color
Options: Curve – Mesh Size

Show As: 2..Symbols (all curves)
Options: Curve- Surface Directions
Parametric Directions: 2..Show Curve Arrows
Click OK

Mesh/ Mesh Control/ Size Along Curve
In Entity Selection – Select Curve(s) to Set Mesh Size dialog box
Pick curve 2 on the graphics window, then Click OK
In Mesh Size Along Curve dialog box
Number of Elements: 30
Select Noda Spacing: Biased
Bias Factor: 5
Select Small Elements at End
Click OK
In Entity Selection – Select Curve(s) to Set Mesh Size dialog box
Pick curve 3 on the graphics window, then Click OK
In Mesh Size Along Curve dialog box
Number of Elements: 10
Select Node Spacing: Biased
Bias Factor: 5
Select Small Elements at Start
Click OK
In Entity Selection – Select Curve(s) to Set Mesh Size dialog box
Pick curve 7 on the graphics window, then Click OK
In Mesh Size Along Curve dialog box Set
Element size: 0,2
Click OK, then Cancel

Mesh/Geometry/Surface
In Entity Selection – Select Surfaces to Mesh dialog box
Select the defined boundary surface, then Click OK
In Automesh Surfaces dialog box Set
Property: 1..S235 PLATE
Mesher: Triangles
Click OK
The graphic window should look like this:

A terhelés megadása

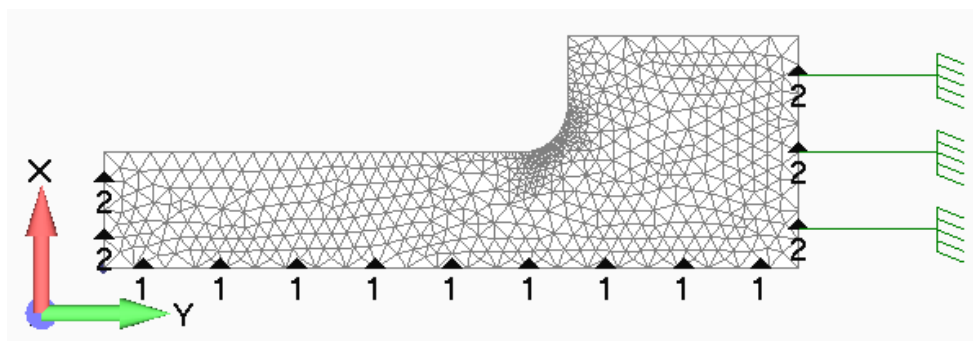
//A próbatest vége a valóságban két befogó pofa közé van szorítva. Ezt a legjobban a befogás helyén lévő csomópontokra előírt elmozdulással lehet modellezni. Az elmozdulást lépésekben adjuk rá. Ehhez elsőként létre kell hozni egy függvényt.//

Model/ Function
In Function Definition dialog box Set
Title: Load vs. Time
Type: 1..vs. Time
Data Entry: X=0; Y=0, then Click Add
Data Entry: X=10; Y=10, Click Add, then OK

Model/Load/On Curve
 In New Load Set dialog box set
 Title: loading
 Click OK
 In Entity Selection-Enter Curve(s) to Select dialog box
 Pick curve 5
 Click OK
 In Create Loads on Curves dialog box choose Displacement and set
 Load Value: Pick $TY=0,01$
 Load Time/ Freq Dependence: Choose 1..Load vs. Time from the drop down list
 Title: Enforced Displacement
 Click OK, then Cancel

A megfogások definiálása

Model/ Constraint/ On Curve
 In New Constraint Set dialog box
 Title: (give a title), then click OK
 In Entity Selection – Enter Curve(s) to Select dialog box
 Choose curve 6, then click OK
 In Create Constraints on Geometry dialog box Set
 Title: X Symmetry
 Select Arbitrary in CSys and 0..Basic Rectangular from the drop down list
 Check TX degrees of freedom
 Click Ok
 In Entity Selection – Enter Curve(s) to Select dialog box
 Choose curve 1, then click OK
 In Create Constraints on Geometry dialog box Set
 Title: Y Symmetry
 Select Arbitrary in CSys and 0..Basic Rectangular from the drop down list
 Check TY degrees of freedom
 Click Ok
 In Entity Selection – Enter Curve(s) to Select dialog box
 Choose curve 5, then click OK
 In Create Constraints on Geometry dialog box Set
 Title: Constraint at Displacement
 Select Arbitrary in CSys and 0..Basic Rectangular from the drop down list
 Check TY degrees of freedom
 Click Ok, then Cancel



10.46. ábra A próbatest végeselem modellje

Végelelemes számítás

//Az NX Nastran megoldó segítségével tranziens dinamikus analízist végzünk. Az ok amiért erre szükség van, a szerkezet időfüggő terhelése.//

Model/Analysis

In Analysis Set Manager dialog box

Click New button

In Analysis Set dialog box

Title: Direct Transient

Analysis Program: 36..NX Nastran

Analysis Type: 3..Transient Dynamic/ Time History

Click Next 6 times

In Dynamic Control Options dialog box Set

Transient Time Step Intervals:

Number of Steps: 10

Time per Step: 1

Output Interval: 1

Click Next 4 times

In Nastran Output Requests dialog box Select:

Nodal: Displacement, Applied Load, Constraint Force,

Elemental: Force, Stress, Strain

Click OK, then Analyze

When you see the following message: Cleanup of Output Set 11 is Complete, close the NX Nastran Analysis Monitor

Az eredmények megjelenítése

View/Select

In View Select dialog box set

Deform Style: Deform

Contour Style: Contour

Click Deformed and Contour Data...

In Select PostProcessing Data dialog box set

Output Sets: 11..Case 11 Time 10

Output Vectors

Deformation: 1..Total Translation

Contour: 1.. Total Translation

Click OK all dialog boxes

View/Select

In View Select dialog box set

Deform Style: Deform

Contour Style: Contour

Click Deformed and Contour Data...

In Select PostProcessing Data dialog box set

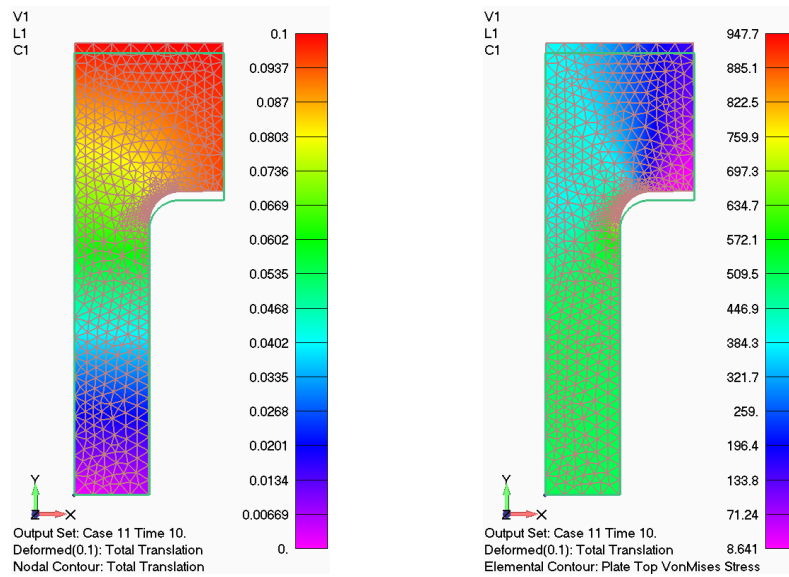
Output Set: 11..Case 11 Time 10

Output Vectors

Deformation: 1..Total Translation

Contour: 7033..Plate Top Von Mises Stress

Click OK all dialog boxes



10.47. ábra A próbatest deformációja és feszültségeloszlása

View/Select

In View Select dialog box set

Deform Style: None- Model Only

Contour Style: None- Model Only

Click OK

Tools/ Charting

In Charting dialog box Click to Data Series Manager Button

In Chart Data Series Manager dialog box

Click to New Data Series Button

In Chart Data Series dialog box Set

Title: Stress vs. Time step

Data Type: 2..XY vs. Set Value

UnCheck: Use All Output Sets

Start: 1..Case 1 Time 0.

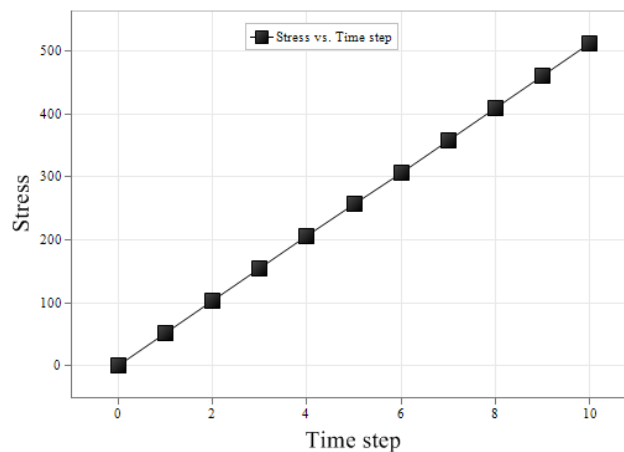
End: 11..Case 11 Time 10.

Vector: Plate Top Von Mises Stress

Click to Location field: 849 (Select element 849)

Click Ok then Cancel

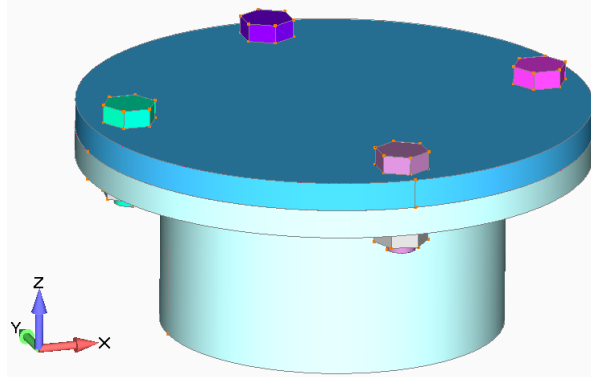
In Chart Data Series Manager dialog box Click Done



10.48. ábra A feszültség változása az idő függvényében

11. Numerikus példa (Csavarkötés vizsgálata)

A 10.49. ábrán egy egyszerű összeszerelés látható. Az alkatrészek csavarkötéssel vannak egymáshoz rögzítve. A csavarok elő vannak feszítve. A modell építésekor kihasználjuk a szimmetriát, hogy csökkentsük a futásidőt. Bemutatjuk a modellépítés menetét és az elvégzett vizsgálat eredményeit.



10.49. ábra Az összeállítás

Adatok:

Belső nyomás: $p = 100 \text{ bar}$

Falvastagság: $t = 10 \text{ mm}$

$E = 206000 \text{ MPa}$

$\nu = 0,3$

Csavarok előfeszítése: $F = 1000N$

A 3D modell importálása

File/Import/ Geometry

In Geometry File to Import dialog box:

Go to the Examples directory and open assembly.stp file

In STEP Read Options dialog box:

Check the Geometry Scale Factor: 1000

Assembly Options:

Check Increment Layer, Increment Colour

Click OK

Tools/Measure/Distance

In Locate – Define Location to Measure From dialog box

Click Methods Button, and Select One Point (or press CTRL+P key when the cursor in the X, Y or Z field)

On Point – Define Location to Measure From dialog box

Point ID: 138, Click OK

On Point – Define Location to Measure From dialog box

Point ID: 137, Click OK then Cancel

//A mért távolság adatai a Message ablakban olvashatóak. Ellenőrizzük le, hogy a két pont távolsága valóban 10 mm-e.//

A 3D modell előkészítése a hálózásra

//A modell kétszeres szimmetriáját kihasználva, az összeszerelt alkatrész negyedét modellezzük. Az összeszerelt modell felszeletelésével állítjuk elő a geometriát. Ehhez vágóvonalat kell definiálni, amihez először segédpontokat veszünk fel.//

Geometry/ Point

In Locate – Enter Coordinates or Select with Cursor dialog box

Click to Methods and Select Along Curve

In Along Curve – Enter Coordinates or Select with Cursor dialog box Set Curve ID: 247; Along: 25%

Click Ok

In Along Curve – Enter Coordinates or Select with Cursor dialog box Set Curve ID: 247; Along: 25%; From End Near: Select the Line other End

Click Ok

In Along Curve – Enter Coordinates or Select with Cursor dialog box Set Curve ID: 248; Along: 25%

Click Ok

In Along Curve – Enter Coordinates or Select with Cursor dialog box Set Curve ID: 248; Along: 25%; From End Near: Select the Line other End

Click Ok

In Along Curve – Enter Coordinates or Select with Cursor dialog box Set Curve ID: 258; Along: 25%

Click Ok

In Along Curve – Enter Coordinates or Select with Cursor dialog box Set Curve ID: 258; Along: 25%; From End Near: Select the Line other End

Click Ok, then Cancel

Geometry/ Solid/ Slice

In Entity Selection – Select Solid to Slice dialog box

Click to Select All Button, then Click OK

In Plane Locate - Specify Plane for Intersection dialog box

Click Methods Button and Select Points

In Plane Points –Specify Plane for Intersection dialog box

Base Point ID: 182; Plane Point 1: 180; Plane Point 2: 177, Click OK

On Model info panel UnCheck:

Geometry: 11..Untitled and 12..Untitled

Geometry/ Solid/ Slice

In Entity Selection – Select Solid to Slice dialog box

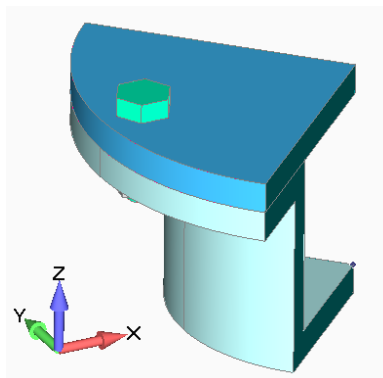
Add ID:9 and 10, then Click OK

In Plane Points –Specify Plane for Intersection dialog box

Base Point ID: 181; Plane Point 1: 179; Plane Point 2: 178, Click OK

On Model info panel UnCheck:Unused Geometry

//A modelltérben a következőt kell látni://



10.50. ábra A vizsgálathoz előkészített negyedmodell

Az anyag megadása

Model/Material

In Define Material – ISOTROPIC dialog box

Click Type

In Material Type dialog box choose Isotropic

Click OK

In Define Material – ISOTROPIC dialog box set

Title: Steel

Young Modulus, E: 2,06E5

Poisson's Ratio, nu: 0,3

Click OK (material 1 created), then Cancel

A tulajdonság definiálása

//Az alkatrész térfogati elemek használatát követeli meg, ezért az elem tulajdonságot ennek megfelelően definiáljuk.//

In Define Property – PLATE Element Type dialog box

Click Elem/Property Type

In Element/Property Type dialog box Select

Volume elements: Solid, then click OK

In Define Property – SOLID Element Type dialog box Set

Title: S235 SOLID

Material: 1..Steel

Click OK (Property 1 created), then Cancel

Végeselemes hálózás

//Hálózaskor két típusú térfogati elemet is használunk. Lemezszerű alkatrészeket hexaéder elemekkel hálózva tovább rövidíthető az analízis teljes futásideje.//

In Model Info panel Click with Left Mouse button to the Layers

Select View Visible Layers Only

Check 10..vessel

Mesh/Mesh control/Size On Solid

In Entity Selection – Select Solid(s) to Set Mesh Size dialog box

Add ID: 10, then Select OK

In Automatic Mesh Sizing dialog box Set

Element Size: 2,5

Min Elements on Edge: 4

Click OK

Mesh/Geometry/ Solids

In Entity Selection – Select Solid(s) to Mesh dialog box

Add ID: 10, then Click Ok

In Automesh Solids dialog box Select

Property: 1..S235SOLID

UnCheck: Midsides Nodes

Click OK

In Model Info panel

Check Visibility and Activate 9..cover

Mesh/Mesh control/Size On Solid

In Entity Selection – Select Solid(s) to Set Mesh Size dialog box

Add ID: 9, then Click OK

In Automatic Mesh Sizing dialog box Set

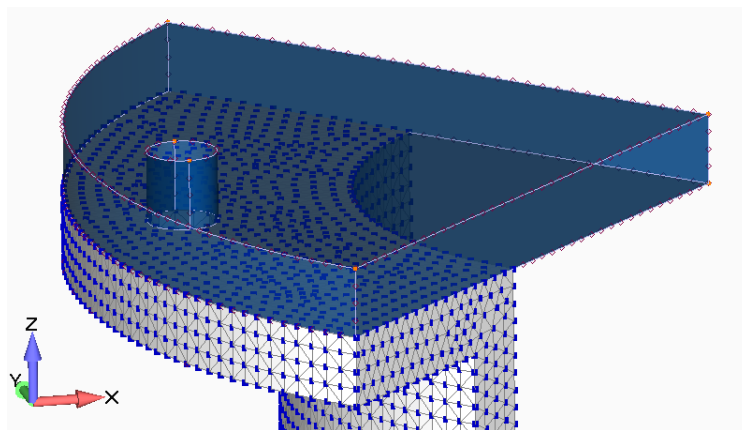
Size for: Hex Meshing

Element Size: 2,5

Min Elements on Edge: 4

Click OK

//Az alkatrész világoskék színre változása az alkatrész hexaéder elemekkel való hálózhatóságát jelöli.//



10.51. ábra A fedél előkészítése hexaéder elemekkel való hálózásra

Mesh/Geometry/ HexMesh Solids

In Entity Selection – Select Solid(s) to Mesh dialog box

Add ID: 9, then Click Ok

In Hex Mesh Solids dialog box Select

Property: 1..S235SOLID

UnCheck: Midsides Nodes

Click OK

In Model Info panel

Check Visibility and Activate 6..bolt

Check Visibility: 2..nut

UnCheck Visibility: 9..cover and 10..vessel

Mesh/Mesh control/Size On Solid

In Entity Selection – Select Solid(s) to Set Mech Size dialog box

Add ID: 6 and 2, then Select OK

In Automatic Mesh Sizing dialog box Set

Size for: Hex Meshing

Click OK

Geometry/ Solid/ Slice

In Entity Selection – Select Solid to Slice dialog box

Add ID: 6, then Click OK

In Plane Points - Specify Plane for Intersection dialog box

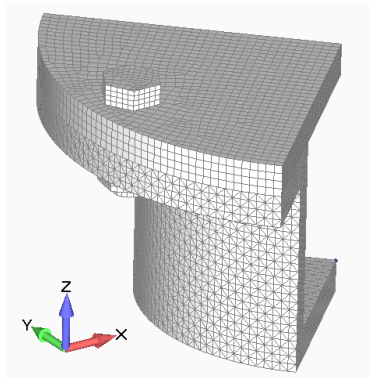
Base Point ID: 90; Plane Point 1: 87; Plane Point 2: 189, Click OK

Mesh/Mesh control/Size On Solid

In Entity Selection – Select Solid(s) to Set Mech Size dialog box

Add ID: 6,2 and 15, then Click OK
In Automatic Mesh Sizing dialog box Set
Size for: Hex Meshing
Click OK

Mesh/Geometry/ HexMesh Solids
In Entity Selection – Select Solid(s) to Mesh dialog box
Add ID: 6,2 and 15, then Click Ok
In Hex Mesh Solids dialog box Select
Property: 1..S235SOLID
UnCheck: Midsides Nodes
Click OK



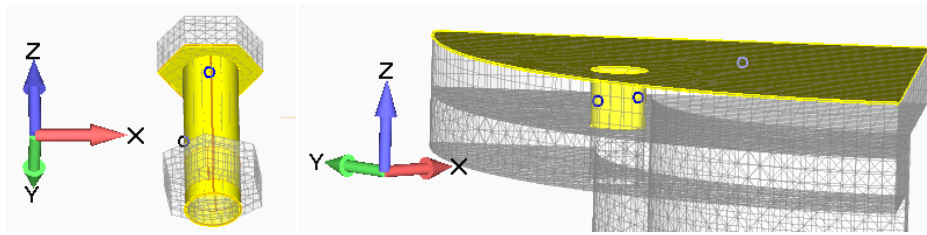
10.52. ábra A behálózott alkatrészek

Érintkezés figyelembevétele

//A csavarkötés elemei között ragasztott kapcsolatot írunk elő. Érintkezést írunk elő a fedél, tartály, csavar és anya között.//

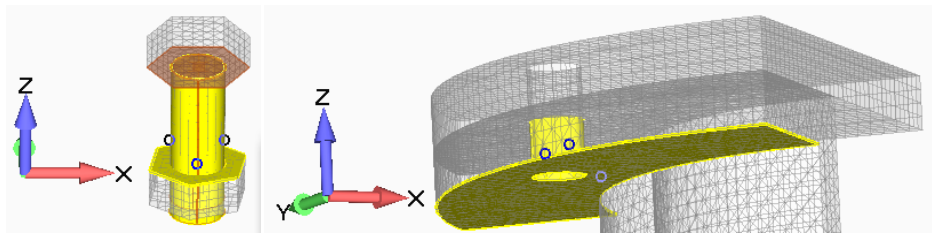
Connect/ Automatic
In Entity Selection – Select Solid(s) to Detect Connections dialog box
Add ID: 6,15 and 2; then Click OK
In Auto Detection Options for Connections dialog box
Connection Property: Glued
Click OK
Add ID: 9,10; then Click OK
In Auto Detection Options for Connections dialog box
Connection Property: Contact
Click OK, then Cancel

Connect/ Connection Region
In Connection region dialog box Set
Title: bolt top
Add Surface: 57, 53 and 52
Click OK
Connect/ Connection Region
In Connection region dialog box Set
Title: top
Add Surface: 85, 91 and 96
Click OK



10.53. ábra A felső érintkezési tartomány

Connect/ Connection Region
 In Connection region dialog box Set
 Title: bolt bottom
 Add Surface: 12, 53 and 52
 Click OK
 Connect/ Connection Region
 In Connection region dialog box Set
 Title: bottom
 Add Surface: 102, 106 and 108
 Click OK, then Cancel



10.54. ábra Az alsó érintkezési tartomány

Connect/ Connector
 In Define Contact Connector – Select Connection Regions dialog box Set
 Title: top
 Property: 2..Untitled
 Master (Target): 7..bolt top
 Slave (Source): 9..top
 Click Ok (Connector 4 Created)
 Title: bottom
 Property: 2..Untitled
 Master (Target): 8..bolt bottom
 Slave (Source): 10..bottom
 Click Ok, then Cancel

A terhelés megadása

//A tartály belső felületére nyomást definiálunk.//

Model/ Load/ Elemental

In New Load Set dialog box

Title: (give a title), then click OK

In Entity Selection – Enter Element(s) to Select dialog box

Click to Pick Button, and Select Around Point

In Along Curve – Specify Location to Select Around dialog box Set

Point ID: 215, Click OK

In Select by Distance From Point dialog box Set Distance Specification

Pick Closer Than
Min: 50, Click Ok
In Entity Selection – Enter Element(s) to Select dialog box Click Ok
in Create Loads on Elements dialog box Set
Title: Pressure on the cover
Select Pressure
Direction: Normal to Element Face
Set Pressure Value to: 10, Click OK
In Face Selection dialog box
Method: Adjacent Faces
Click in Face field, and pick an element
Tolerance: 20
Select Front Face, Click OK, then Cancel

Model/ Load/ On Surface
in Entity Selection – Enter Surfaces(s) to Select dialog box Add
ID: 100, 109, 110
In Create Loads on Surface dialog box Set
Title: Pressure inside the vessel
Select Pressure
Direction: Normal to Element Face
Set Pressure Value to: 10, Click OK

A megfogások definiálása

Model/ Constraint/ On Surface
In New Constraint Set dialog box
Title: (give a title), then click OK
In Entity Selection – Enter Surface(s) to Select dialog box Add
Surface ID: 115, 121, Click OK
In Create Constraints on Geometry dialog box Set
Title: Symmetry1
Advanced Type: Select Surface
Check Allow Sliding only along Surface (Symmetry)
Click Ok
In Entity Selection – Enter Surface(s) to Select dialog box Add
Surface ID: 133, 139, Click OK
In Create Constraints on Geometry dialog box Set
Title: Symmetry2
Advanced Type: Select Surface
Check Allow Sliding only along Surface (Symmetry)
Click Ok
In Entity Selection – Enter Surface(s) to Select dialog box Add
Surface ID: 113, Click OK
In Create Constraints on Geometry dialog box Set
Title: TZ
Select Arbitrary in CSys and 0..Basic Rectangular from the drop down list
Check TZ degree of freedom
Click Ok, then Cancel

Csavar előfeszítés definiálása

//Megadjuk a csavarkötés előfeszítését a modellre. Ehhez a grafikus ablakon csak a behálózott csavart tesszük láthatóvá.//

Hit F8 Key, Select ZX Front, then Click Ok

Group/ Create/Manage

In Group Manager dialog box Click to New Group Button

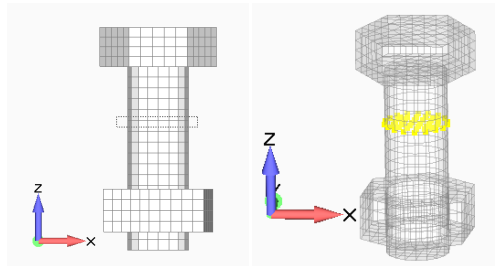
In New Group dialog box Set Title: Bolt Group, Click Ok, then Done

Group/ Node/ ID

In Entity Selection – Select Node(s) for Group dialog box Click to Pick Button

Select Box from the drop down list, choose element according to the Figure 10.55.

Click OK



10.55. ábra A csavar előfeszítés definiálására kiválasztott elemek

Connect/ Bolt Region

In Bolt Region dialog box Set

Title: Bolt Region

Bolt Type: Solid

Click to Multiple Button

In Entity Selection – Enter Node(s) to Select dialog box

Select Group: 1..Bolt Region from the drop down list, Click Ok

In Bolt Region dialog box Set

Bolt Axis Direction: 3..Z, Click OK

Model/ Load/ Bolt Preload

In Create Bolt Preload dialog box Set

Title: Bolt Preload Load

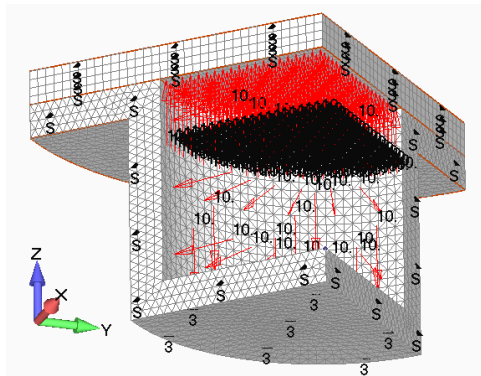
Preload Value: 1000

Pick Bolt Region(s)

Click OK

In Entity Selection – Select Region(s) for Preload dialog box

Click More Button, Click OK, then Cancel



10.56. ábra Az összeállítás végeleemes modellje

Végeselemes számítás

Model/Analysis

In Analysis Set Manager dialog box

Click New button

In Analysis Set dialog box

Title: Linear static analysis

Analysis Program: 36..NX Nastran

Analysis Type: 1..Static

Click OK, then analyze (In Analysis Set Manager dialog box)

When you see the following message: Cleanup of Output Set 1 is Complete, close the NX Nastran Analysis Monitor

Az eredmények megjelenítése

View/Select (or hit F5 button)

In View Select dialog box

Deformed Style: Deform

Contour Style: Contour

Click to Deformed and Contour Data...

In Select PostProcessing Data dialog box

Output Sets: NX NASTRAN Case 1

Deform: 1..Total Translation

Contour: 1..Total Translation

Click OK all dialog boxes

Click Post Options and Select Actual Deformation

Select Scale Deformation

In Deformation Scale dialog box

Actual: 20, Click OK

View/Select (or hit F5 button)

In View Select dialog box

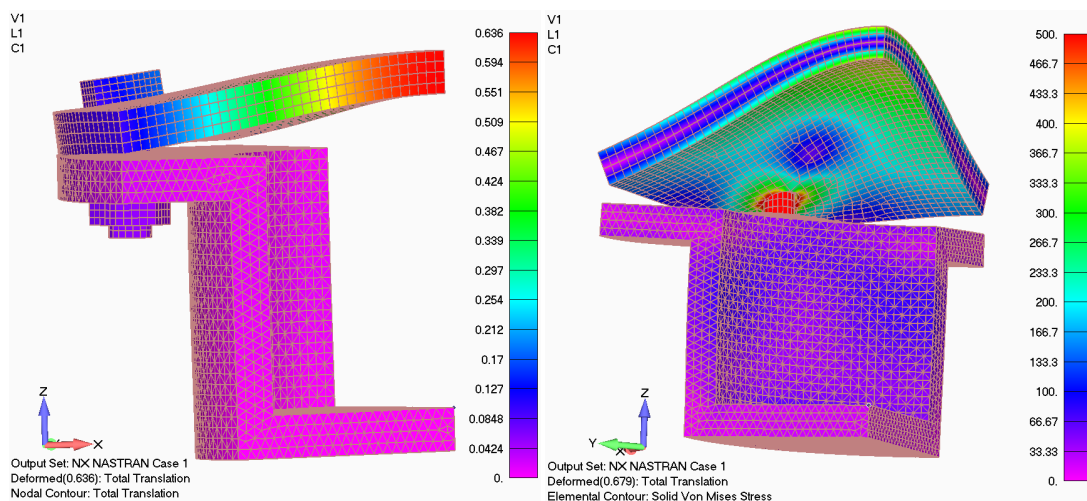
Click to Deformed and Contour Data...

In Select PostProcessing Data dialog box

Deform: 1..Total Translation

Contour: 60031..Solid Von Mises Stress

Click OK all dialog boxes



10.57. ábra A szerkezet deformációja és a feszültségeloszlás

FELHASZNÁLT IRODALOM

- [1] BATHE K.J.: Finite Element Procedures, Prentice-Hall International, New Jersey, USA, p. 1037, 1996.
- [2] COOK R.D.: Finite Element Modeling for Stress Analysis, John Wiley & Sons, USA, p. 330, 1995.
- [3] ÉGERT J., KEPPLER I.: A végeelem módszer mechanikai alapjai, Universitas-Győr Nonprofit Kft., Győr, Hungary, p. 210, 2007.
- [4] HUTTON D.V.: Fundamentals of Finite Element Analysis, McGraw-Hill, New York, USA, p. 505, 2004.
- [5] KOVÁCS Á., MOHAROS I., OLDAL I., SZEKRÉNYES A.: Finite Element Methode, Typotex Kiadó, Budapest, Hungary, p. 378, 2012.
- [6] KOVÁCS Á., MOHAROS I., OLDAL I., SZEKRÉNYES A.: Végeelem-módszer, Typotex Kiadó, Budapest, Hungary, p. 383, 2011.
- [7] LIU G.R., QUEK S.S.: The Finite Element Method – A Practical Course, Butterworth-Heinemann, London, England, p. 361, 2003.
- [8] LIU Y.: Introduction to the Finite Element Method (Lecture Notes), University of Cincinnati, USA, p. 188, 2003.
- [9] NIKISHKOV G.P.: Introduction to the Finite Element Method (Lecture Notes), University of Aizu, Japan, p. 45, 2004.
- [10] PÁCZELT I.: A végeelem-módszer alapjai, Miskolci Egyetem, Miskolc, Hungary, p. 94, 1993.
- [11] RAO S.S.: The Finite Element Method in Engineering, 4th edition, Elsevier Science & Technology Books, p. 658, 2004.
- [12] SADD M.H.: Elasticity – Theory, Applications, and Numerics, Butterworth-Heinemann, Burlington, USA, p. 474, 2005.
- [13] SZABÓ T.: Alkalmazott mechanika – Végelem-módszer alkalmazásai, Miskolci Egyetem, Miskolc, Hungary, p. 81, 2003.
- [14] UGS: Femap User Guide Version 9.2, UGS Corporation, USA
- [15] ZIENKIEWICZ O.C., TAYLOR R.L.: The Finite Element Method – The Basis, 5th edition, Butterworth-Heinemann, London, England, p. 708, 2000.
- [16] ZIENKIEWICZ O.C., TAYLOR R.L.: The Finite Element Method – Solid Mechanics, 5th edition, Butterworth-Heinemann, London, England, p. 477, 2000.

SZÉCHENYI 2020



HUNGARIAN
GOVERNMENT

European Union
European Social
Fund



INVESTING IN YOUR FUTURE