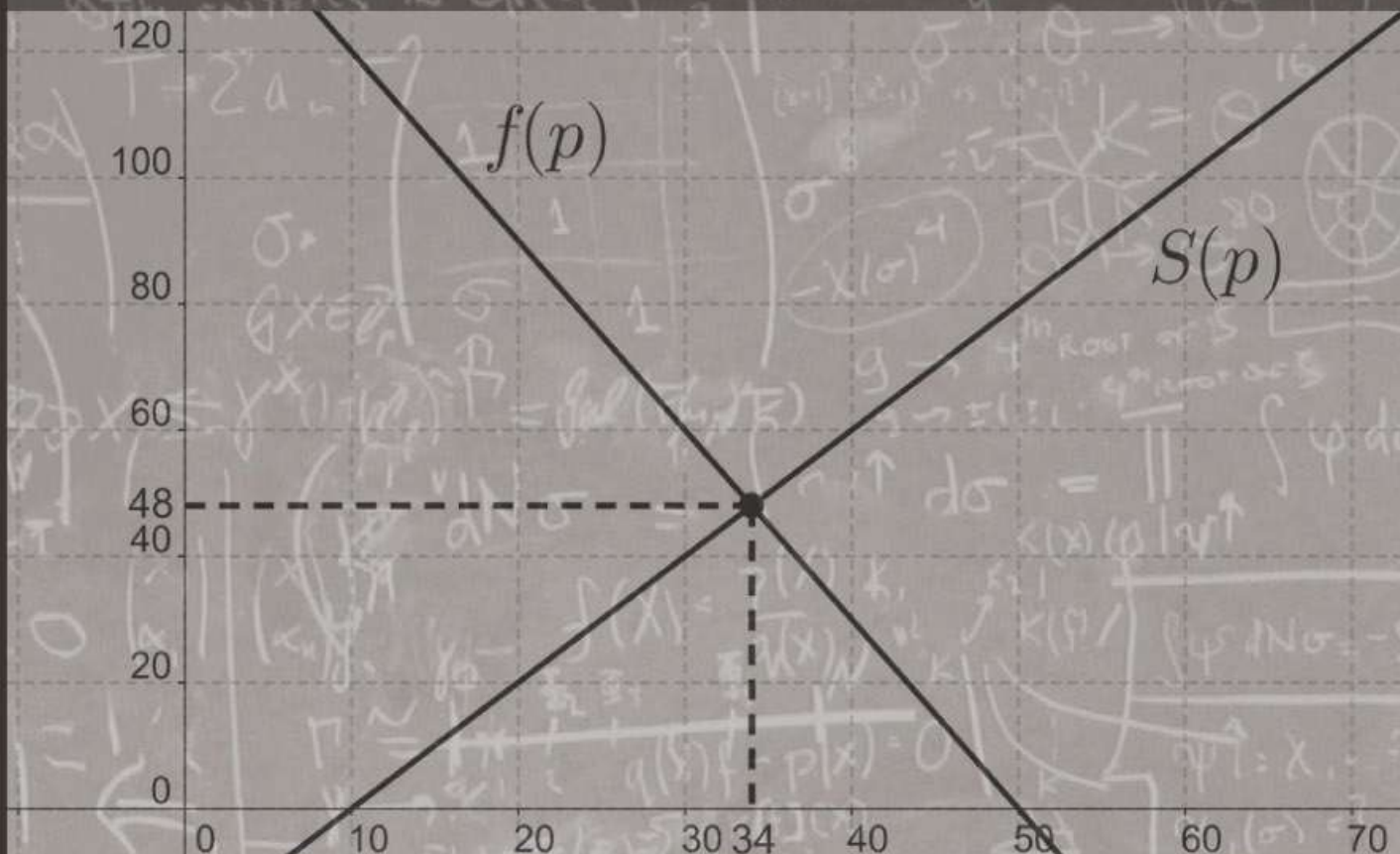


Dr. Kézi Csaba
Bevezetés
a magasabb szintű
matematikába
és alkalmazásaiba
feladatgyűjtemény



Debreceni Egyetem Műszaki Kar
Műszaki Alaptárgyi Tanszék

DEBRECENI EGYETEM
MŰSZAKI KAR

Dr. Kézi Csaba Gábor

BEVEZETÉS A MAGASABB SZINTŰ
MATEMATIKÁBA
ÉS ALKALMAZÁSAIBA
FELADATGYŰJTEMÉNY



Debreceni Egyetemi Kiadó
Debrecen University Press
2017

Lektorok:

Kocsis Imre Tibor

Tanszékvezető főiskolai tanár
Debreceni Egyetem Műszaki Kar Műszaki Alaptárgyi Tanszék

Nagy Gergő

Tanárségéd
Debreceni Egyetem Természettudományi és Technológiai Kar,
Matematikai Intézet

© Debreceni Egyetemi Kiadó Debrecen University Press,
beleértve az egyetemi hálózaton belüli elektronikus terjesztés jogát is

ISBN 978 963 318 096 9

Kiadta: a Debreceni Egyetemi Kiadó Debrecen University Press

Felelős kiadó: Karácsony Gyöngyi

Nyomdai munkálatokat

a Debreceni Egyetem sokszorosítóüzeme végezte 2017-ben.

www.dupress.hu

Előszó

Ez a feladatgyűjtemény a „Bevezetés a magasabb szintű matematikába és alkalmazásaiba” című jegyzet felépítését szorosan követő, és annak jelöléseit használó példatár. Az említett jegyzetben szereplő fogalmak, tételek alkalmazását, megértését segítő feladatokat találunk a feladatgyűjteményben.

A feladatgyűjtemény elsősorban a Debrecen Egyetem Műszaki Karának „Matematika I.” és a „Bevezető matematika” nevű tantárgyaihoz készült oktatási segédanyagként.

Az egyes fejezetekben részletesen kidolgozott feladatokat találhatunk. Ezek hasznosak lehetnek a magasabb szintű matematikát tanuló minden hallgató számára, sőt akár matematika szakosok részére is.

A feladatgyűjtemény gondos átolvasásáért és lektorálásáért és a sok hasznos észrevételért köszönettel tartozom a jegyzet lektorainak, Dr. Kocsis Imre tanszékvezető főiskolai tanárnak és Dr. Nagy Gergő tanársegédnek. Köszönettel tartozom Dr. Szíki Gusztáv Áron főiskolai tanárnak, aki hasznos információkkal látott el a jegyzet megírása során. Köszönöm továbbá Kedvesemnek, Józsa Bettina Csillának és Édesanyámnak, akik mindenben mellettem álltak és támogattak a jegyzet megírása során.

2017. május 20.

1. Logikai állítások, műveletek

1.1. **Feladat.** Állításnak tekinthetőek-e az alábbi kijelentések? Ha igen, adjuk meg az igazságértéket!

- a) Holnap esni fog az eső.
- b) Éva a legszebb lány az iskolában.
- c) A 100 nagy szám.
- d) Az 5 négyzetgyöke racionális szám.

Megoldás:

- a) nem állítás, mert a jövőre vonatkozik, igazságértéke így nem határozható meg egyértelműen;
- b) nem állítás;
- c) nem állítás;
- d) állítás, igazságértéke hamis.

1.2. **Feladat.** Fogalmazzuk meg az alábbi kijelentések tagadását!

- a) A csoportban minden hallgató szereti a matematikát.
- b) Minden négyszög téglalap.
- c) Van olyan holló, amelyik nem fekete.
- d) Bármely két egyenes metszi egymást.
- e) Esik az eső vagy süt a nap.
- f) Bettina szőke és kék szemű.
- g) Van olyan fiú, aki nem szereti a focit.

Megoldás:

- a) A csoportban van olyan hallgató, aki nem szereti a matematikát.
- b) Van olyan négyszög, amelyik nem téglalap.
- c) Minden holló fekete.
- d) Létezik két olyan egyenes, amelyek nem metszik egymást.
- e) Nem esik az eső és nem süt a nap.
- f) Bettina nem szőke vagy nem kék szemű.
- g) Minden fiú szereti a focit.

1.3. Feladat. Fogalmazzuk meg az alábbi állítás megfordítását: *ha egy háromszög derékszögű, akkor az átfogó felezőpontja, a háromszög köré írt körének középpontja.* Fogalmazzuk meg az állítást és a megfordítását egy mondatban!

Megoldás:

Az állítás megfordítása: „ha egy háromszög egyik oldalának felezőpontja a háromszög köré írt körének középpontja, akkor a háromszög derékszögű”.

Az állítás és megfordításának egy mondatban való megfogalmazása:

„egy háromszög pontosan akkor derékszögű, ha az átfogójának felezőpontja egybeesik a köré írt körének középpontjával”.

1.4. Feladat. Tekintsük az alábbi kijelentéseket:

p : kinyitottam a sütőt

q : kivettem a tálát

r : megégettem a kezem.

Fogalmazzuk meg szövegesen a $(p \wedge q) \wedge \neg r$ formulának megfelelő kijelentést.

Megoldás:

Kinyitottam a sütőt, kivettem a tálát és nem égettem meg a kezem.

1.5. Feladat. Igazoljuk, hogy tetszőleges p és q állítások esetén teljesül, hogy $\neg(p \wedge q) = \neg p \vee \neg q$ (de-Morgan azonosság).

Megoldás:

Felírva az igazságtáblázatot, egyrészt

p	q	$p \wedge q$	$\neg(p \wedge q)$
I	I	I	H
I	H	H	I
H	I	H	I
H	H	H	I

másrészt

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \vee \neg q$
I	I	H	H	H
I	H	H	I	I
H	I	I	H	I
H	H	I	I	I

Tehát a két formula igazságértéke azonos, amivel igazoltuk az állítást.

1.6. Feladat. Igazoljuk, hogy tetszőleges p , q és r állítások esetén teljesül, hogy $(p \wedge q) \vee r = (p \vee r) \wedge (q \vee r)$ (disztributivitás).

Megoldás:

Felírva az igazságtáblázatot, egyrészt

p	q	r	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \vee r$
I	I	I	I	I
I	H	I	H	I
H	I	I	H	I
H	H	I	H	I
I	I	H	I	I
I	H	H	H	H
H	I	H	H	H
H	H	H	H	H

másrészt

p	q	r	$p \vee r$	$q \vee r$	$(p \vee r) \wedge (q \vee r)$
I	I	I	I	I	I
I	H	I	I	I	I
H	I	I	I	I	I
H	H	I	I	I	I
I	I	H	I	I	I
I	H	H	I	H	H
H	I	H	H	I	H
H	H	H	H	H	H

Tehát a két formula igazságértéke azonos, amivel igazoltuk az állítást.

1.7. Feladat. Helyes-e az alábbi következtetés:

„Ha moziba megyek, nem tudok tanulni. De tanultam. Tehát nem voltam moziban.”

Megoldás:

Jelölje p azt az állítást, hogy „moziba megyek”, q pedig azt hogy „tanultam”. Ekkor a $((p \Rightarrow \neg q) \wedge q) \Rightarrow \neg p$ formula igazságértékét szeretnénk vizsgálni:

p	q	$\neg q$	$p \Rightarrow \neg q$	$(p \Rightarrow \neg q) \wedge q$	$\neg p$	$((p \Rightarrow \neg q) \wedge q) \Rightarrow \neg p$
I	I	H	H	H	H	I
I	H	I	I	H	H	I
H	I	H	I	I	I	I
H	H	I	I	H	I	I

Az eredmény minden esetben igaz, a következtetés tehát helyes.

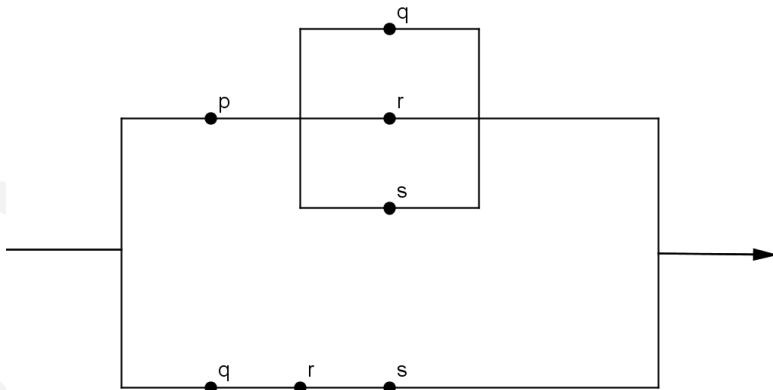
1.8. Feladat. Készítsünk kapcsoló áramkört egy négyszemélyes szavazógépre, amely „a többség dönt” elvet követi, azaz vezeti az áramot, ha legalább három kapcsoló be van kapcsolva, döntetlen esetén pedig egy kitüntetett (elnöki) kapcsoló állásának megfelelően dönt.

Megoldás:

Legyen p az elnöki kapcsolóhoz, q , r és s a további három kapcsolóhoz rendelt logikai változó. A kapcsolóhoz rendelt áramkör vezeti az áramot, ha p és még egy változó igaz, vagy ha q , r és s is igaz. A kapcsoló kikapcsolt, illetve bekapcsolt állapota megfeleltethető a hamis, illetve igaz logikai értékeknek. A fent megfogalmazottak formulákkal az alábbi módon írhatók le:

$$(p \wedge (q \vee r \vee s)) \vee (q \wedge r \wedge s).$$

Az áramkör felrajzolva:



A későbbiekben hivatkozni fogunk a fenti formulára, ezért jelöljük el például $I(p; q; r; s)$ -sel. Elkészítve a fenti formula igazságtáblázat, láthatjuk, hogy valóban a leírtaknak megfelelőeket kapjuk:

2. Halmazelméleti alapok

2.1. **Feladat.** Tekintsük a

$$H = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8\}$$

alaphalmazt és az

$$A = \{2; 3; 5\}, \quad B = \{1; 2; 5; 8\}$$

halmazokat! Adjuk meg az $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, A^c , valamint a B^c halmazokat!

Megoldás:

A két halmaz uniójába azok az elemek tartoznak, amelyek legalább az egyik halmaznak elemei, így

$$A \cup B = \{1; 2; 3; 5; 8\}.$$

Két halmaz metszetébe azok az elemek tartoznak, amelyek mindkét halmaznak elemei, így

$$A \cap B = \{2; 5\}.$$

Az $A \setminus B$ halmaz elemei azok az elemek, amelyek az A halmaznak elemei, de a B halmaznak nem elemei, így

$$A \setminus B = \{3\}.$$

A $B \setminus A$ halmaz elemei azok az elemek, amelyek a B halmaznak elemei, de az A halmaznak nem elemei, így

$$B \setminus A = \{1; 8\}.$$

Az A halmaz komplementerébe azok az elemek tartoznak, amelyek az A halmaznak nem elemei, de az alaphalmaznak elemei, így

$$A^c = \{1; 4; 6; 7; 8\}.$$

A B halmaz komplementerébe azok az elemek tartoznak, amelyek a B halmaznak nem elemei, de az alaphalmaznak elemei, így

$$B^c = \{3; 4; 6; 7\}.$$

2.2. Feladat. Tekintsük az

$$A = \{1; 2; 5; 7\}, \quad B = \{2; 4; 5; 8\}$$

halmazokat! Adjuk meg az $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$ halmazokat!

Megoldás:

A keresett halmazok:

$$A \cup B = \{1; 2; 4; 5; 7; 8\}$$

$$A \cap B = \{2; 5\}$$

$$A \setminus B = \{1; 7\}$$

$$B \setminus A = \{4; 8\}.$$

2.3. Feladat. Adjuk meg az $A \cap B$ halmaz elemeit, ha

$$A = [-5; 3[$$

és $B = \mathbb{Z}$ (egész számok halmaza).

Megoldás:

Feladatunk a $[-5; 3[$ intervallumba eső egész számok megadása, amelyek az alábbiak:

$$A \cap B = \{-5; -4; -3; -2; -1; 0; 1; 2\}.$$

2.4. Feladat. Adjuk meg az $A \cap B$ halmaz elemeit, ha

$$A = [-5; 3[$$

és $B = \mathbb{N}$ (természetes számok halmaza).

Megoldás:

Feladatunk a $[-5; 3[$ intervallumba eső természetes számok megadása:

$$A \cap B = \{1; 2\}.$$

2.5. Feladat. Határozzuk meg az $A = \{1; 2; 3\}$ halmaz összes részhalmazát!

Megoldás:

A keresett részhalmazok:

$$\{1\}; \{2\}; \{3\}; \{1; 2\}; \{1; 3\}; \{2; 3\}; \{1; 2; 3\}, \emptyset$$

Az A halmaz hatványhalmaza az A összes részhalmazát tartalmazó halmaz, azaz

$$\mathcal{P}(A) = \{\{1\}; \{2\}; \{3\}; \{1; 2\}; \{1; 3\}; \{2; 3\}; \{1; 2; 3\}, \emptyset\}.$$

2.6. **Feladat.** Írjuk föl az $A = \{\star; \spadesuit; \diamond\}$ halmaz összes részhalmazát! Adjuk meg az A halmaz hatványhalmazát!

Megoldás:

A keresett részhalmazok:

$$\{\star\}; \{\spadesuit\}; \{\diamond\}; \{\star; \spadesuit\}; \{\star; \diamond\}; \{\spadesuit; \diamond\}; \{\star; \spadesuit; \diamond\}; \emptyset$$

Az A halmaz hatványhalmaza az A összes részhalmazát tartalmazó halmaz, azaz

$$\mathcal{P}(A) = \{\{\star\}; \{\spadesuit\}; \{\diamond\}; \{\star; \spadesuit\}; \{\star; \diamond\}; \{\spadesuit; \diamond\}; \{\star; \spadesuit; \diamond\}; \emptyset\}.$$

2.7. **Feladat.** Tekintsük az

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - x - 6 \geq 0\};$$

$$B = \{x \in \mathbb{R} \mid 2x - 4 < 0\}$$

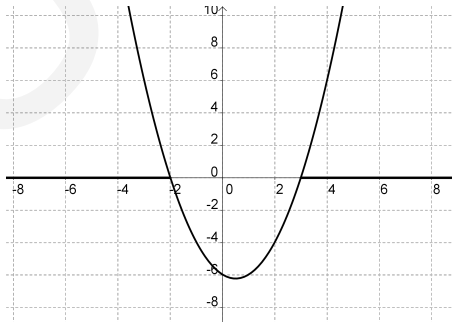
halmazokat! Adjuk meg az $A \cup B$, az $A \cap B$ és az $A \setminus B$ halmazokat!

Megoldás:

Első lépésben megoldjuk az $x^2 - x - 6 \geq 0$ egyenlőtlenséget. Ehhez először megkeressük az $f(x) = x^2 - x - 6$ függvény zérushelyeit, azaz megoldjuk az $x^2 - x - 6 = 0$ egyenletet. A másodfokú egyenlet megoldóképletét felírva azt kapjuk, hogy

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot (-6)}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2},$$

amiből $x_1 = -2$, $x_2 = 3$ adódik. Ezek segítségével felvázoljuk az előbb definiált $f(x)$ függvény grafikonját.



Ebből leolvasható az egyenlőtlenség megoldása: $x \in]-\infty; -2] \cup [3; \infty[$, következésképpen az A halmaz:

$$A =]-\infty; -2] \cup [3; \infty[.$$

Most megoldjuk a $2x - 4 < 0$ egyenlőtlenséget. Mindkét oldalhoz 4-et hozzáadva, majd mindkét oldalt elosztva 2-vel

$$2x - 4 < 0$$

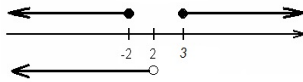
$$2x < 4$$

$$x < 2$$

adódik, így a B halmaz:

$$B =] - \infty; 2[.$$

Az A és B halmazokat ábrázoljuk számsígyenesen:



Ezután leolvassuk a megfelelő halmazműveletek eredményeit:

$$A \cup B =] - \infty; 2[\cup] 3; \infty[= \mathbb{R} \setminus [2; 3[$$

$$A \cap B =] - \infty; -2]$$

$$A \setminus B = [3; \infty[$$

$$B \setminus A =] - 2; 2[.$$

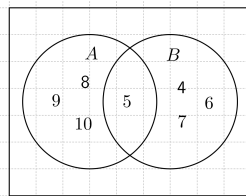
2.8. Feladat. Az A és B halmazok uniója, különbsége, illetve metszete ismert:

$$A \cup B = \{4; 5; 6; 7; 8; 9; 10\}; \quad A \setminus B = \{8; 9; 10\}; \quad A \cap B = \{5\}.$$

Határozzuk meg az A és a B halmazokat!

Megoldás:

Venn diagramon ábrázolva a halmazokat:



Leolvasható, hogy az A halmaz, illetve a B halmaz:

$$A = \{5; 8; 9; 10\}; \quad B = \{4; 5; 6; 7\}.$$

2.9. Feladat. Legyen az A halmaz a 8-nál nem nagyobb pozitív egész számok halmaza, a B halmaz a 3-mal osztható egyjegyű, pozitív egész számok halmaza. Adjuk meg az A és B halmazokat elemeik felsorolásával! Határozzuk meg az $A \cup B$, $A \cap B$ és $A \setminus B$ halmazokat!

Megoldás:

A keresett A és B halmazok:

$$A = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8\}$$

$$B = \{3; 6; 9\}$$

Az $A \cup B$ és $A \cap B$ halmazok:

$$A \cup B = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$$

$$A \cap B = \{3; 6\}$$

$$A \setminus B = \{1; 2; 4; 5; 7; 8\}.$$

2.10. Feladat. Az A , B és a C halmazokról az alábbiakat tudjuk:

$$A \cup B \cup C = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10\};$$

$$A \cup B = \{1; 2; 3; 6; 7; 8; 9; 10\};$$

$$A \setminus B = \{8; 9; 10\};$$

$$A \cap B = \{1; 2; 3\};$$

$$A \cap B \cap C = \{1; 3\};$$

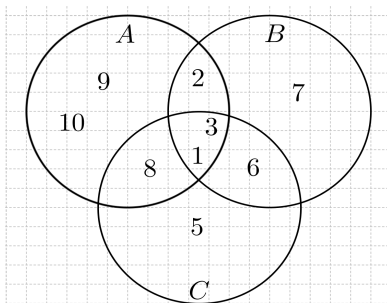
$$A \cap C = \{1; 3; 8\};$$

$$B \setminus C = \{2; 7\}.$$

Határozzuk meg az A , B és C halmazokat!

Megoldás:

Venn diagrammon ábrázolva a halmazokat:



Leolvasható, hogy

$$A = \{1; 2; 3; 8; 9; 10\}$$

$$B = \{1; 2; 3; 6; 7\}$$

$$C = \{1; 3; 4; 5; 6; 8\}.$$

2.11. **Feladat.** Tekintsük az

$$A = \{x^2 - 10x + 24 = 0 \text{ egyenlet valós megoldásai}\},$$

$$B = \{x^{10} = -1 \text{ egyenlet valós megoldásai}\},$$

$$C = \{x^4 - 16 = 0 \text{ egyenlet valós gyökeinek száma}\},$$

$$D = \{3 \text{ és } 7 \text{ közé eső páros számok}\}$$

halmazokat!

- Adjuk meg a fenti halmazok elemeik felsorolásával!
- Válasszunk ki a fenti halmazok közül olyan halmazokat, melyek egyenlők!
- Adjunk meg olyan halmazokat, melyek halmaz, részhalmaz kapcsolatban állnak egymással.

Megoldás:

- Az $x^2 - 10x + 24 = 0$ egyenletet a másodfokú egyenlet megoldóképletével megoldva azt kapjuk, hogy

$$x_{1,2} = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 4 \cdot 24}}{2} = \frac{10 \pm 2}{2},$$

amiből a megoldások $x_1 = 6$, $x_2 = 4$. Így $A = \{4, 6\}$. Mivel nem létezik olyan valós szám, melynek a páros kitevőjű hatványa negatív szám lenne, ezért $B = \emptyset$. Az $x^4 - 16 = 0$ egyenletnek két valós megoldása van, -2 és 2 , így $C = \{2\}$. A D halmaz elemei $D = \{4, 6\}$.

- Az előbbieket alapján azt kaptuk tehát, hogy $A = D$.
- A B halmaz minden halmaznak részhalmaza, továbbá $D \subset A$ és $A \subset D$.

2.12. **Feladat.** Igazoljuk, hogy egy 28 elemű halmaznak ugyanannyi 18 elemű részhalmaza van, mint amennyi 10 elemű!

Megoldás:

Mivel egy n elemű halmaz k elemű részhalmazainak száma $\binom{n}{k}$, továbbá

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k},$$

ezért

$$\binom{28}{10} = \binom{28}{18},$$

amiből következik az állítás.

2.13. Feladat. Igazoljuk, hogy egy 40 elemű halmaznak ugyanannyi 25 elemű részhalma van, mint amennyi 15 elemű!

Megoldás:

Mivel egy n elemű halmaz k elemű részhalmainak száma $\binom{n}{k}$, továbbá

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k},$$

ezért

$$\binom{40}{25} = \binom{40}{15},$$

amiből következik az állítás.

2.14. Feladat. Tekintsük a nevezetes számhalmazokat a szokásos jelölésekkel! Adjuk meg a következő halmazokat:

- | | | |
|---------------------------------|---------------------------------|-------------------------------------|
| a) $\mathbb{N} \cap \mathbb{Z}$ | d) $\mathbb{Q} \cap \mathbb{Z}$ | g) $\mathbb{Q}^* \cap \mathbb{Q}$ |
| b) $\mathbb{N} \cup \mathbb{Z}$ | e) $\mathbb{N} \cup \mathbb{Z}$ | h) $\mathbb{Q}^* \cup \mathbb{Q}$. |
| c) $\mathbb{Z} \cap \mathbb{R}$ | f) $\mathbb{N} \cup \mathbb{R}$ | |

Megoldás:

Mivel $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, továbbá $\mathbb{Q}^* \cup \mathbb{Q} = \mathbb{R}$, ezért

- | | | |
|--|--|--|
| a) $\mathbb{N} \cap \mathbb{Z} = \mathbb{N}$ | d) $\mathbb{Q} \cap \mathbb{Z} = \mathbb{Z}$ | g) $\mathbb{Q}^* \cap \mathbb{Q} = \emptyset$ |
| b) $\mathbb{N} \cup \mathbb{Z} = \mathbb{Z}$ | e) $\mathbb{N} \cup \mathbb{Z} = \mathbb{Z}$ | h) $\mathbb{Q}^* \cup \mathbb{Q} = \mathbb{R}$. |
| c) $\mathbb{Z} \cap \mathbb{R} = \mathbb{Z}$ | f) $\mathbb{N} \cup \mathbb{R} = \mathbb{R}$ | |

2.15. Feladat. Bizonyítsuk be, hogy két racionális szám összege racionális, azaz ha $a, b \in \mathbb{Q}$, akkor $a + b \in \mathbb{Q}$.

Megoldás:

Ha $a \in \mathbb{Q}$, akkor léteznek olyan p és m egész számok, valamint q és n nullától különböző egész számok, hogy

$$a = \frac{p}{q}, \quad b = \frac{m}{n}.$$

Ekkor

$$a + b = \frac{p}{q} + \frac{m}{n} = \frac{pn + mq}{nq}.$$

Mivel két egész szám összege és szorzata is egész szám, ezért azt kapjuk, hogy

$$pn + mq \in \mathbb{Z},$$

továbbá

$$0 \neq n \cdot q \in \mathbb{Z},$$

ezért $a + b$ két egész szám hányadosa, így racionális szám.

2.16. Feladat. Bizonyítsuk be teljes indukcióval, hogy

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n \cdot (n + 1) \cdot (2n + 1)}{6}, \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Megoldás:

Először $n = 1$ -re megvizsgáljuk, hogy teljesül-e az egyenlőség:

a bal oldal: $1^2 = 1$;

a jobb oldal:

$$\frac{1 \cdot (1 + 1) \cdot (2 \cdot 1 + 1)}{6} = 1.$$

Tehát a bal oldalon és a jobb oldalon ugyanazt kaptuk, így $n = 1$ -re igaz az egyenlőség.

Tegyük föl, hogy n -re igaz az állítás, azaz

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n \cdot (n + 1) \cdot (2n + 1)}{6} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

teljesül, és bizonyítsuk be $n + 1$ -re az összefüggést! A bizonyítandó egyenlőség

$$\begin{aligned} 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 + (n + 1)^2 &= \\ &= \frac{(n + 1) \cdot ((n + 1) + 1) \cdot (2 \cdot (n + 1) + 1)}{6}. \end{aligned}$$

Felhasználva, hogy n -re igaz az állítás, azaz felhasználva az indukciós feltevést, azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \frac{n \cdot (n + 1) \cdot (2n + 1)}{6} + (n + 1)^2 &= \\ &= \frac{(n + 1) \cdot ((n + 1) + 1) \cdot (2 \cdot (n + 1) + 1)}{6}. \end{aligned}$$

A jobb oldalon elvégezve az összevonást, beszorozva mindkét oldalt 6-al, ezután $n + 1$ -el végigosztva az egyenletet (ami megtehető, mivel $n + 1 \neq 0$), majd felbontva a zárójeleket mindkét oldalon azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\frac{n \cdot (n + 1) \cdot (2n + 1)}{6} + (n + 1)^2 &= \frac{(n + 1) \cdot (n + 2) \cdot (2n + 3)}{6} \\ n \cdot (n + 1) \cdot (2n + 1) + 6 \cdot (n + 1)^2 &= (n + 1) \cdot (n + 2) \cdot (2n + 3) \\ n \cdot (2n + 1) + 6 \cdot (n + 1) &= (n + 2) \cdot (2n + 3) \\ 2n^2 + n + 6n + 6 &= 2n^2 + 3n + 4n + 6 \\ 2n^2 + 7n + 6 &= 2n^2 + 7n + 6.\end{aligned}$$

Azonosságot kaptunk, amivel az állítást igazoltuk.

2.17. Feladat. Bizonyítsuk be teljes indukcióval, hogy

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n + 1)} = \frac{n}{n + 1} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Megoldás:

Először $n = 1$ -re vizsgáljuk meg az összefüggést:

a bal oldal

$$\frac{1}{1 \cdot 2} = \frac{1}{2},$$

míg a jobb oldal

$$\frac{1}{1 + 1} = \frac{1}{2}.$$

Tehát $n = 1$ -re teljesül az állítás. Tegyük fel, hogy n -re igaz, és bizonyítsuk be $n + 1$ -re az egyenlőséget. A bizonyítandó állítás

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n + 1)} + \frac{1}{(n + 1) \cdot (n + 2)} = \frac{n + 1}{n + 1 + 1}.$$

Felhasználva, hogy n -re igaz az összefüggés, majd beszorozva a közös nevezővel, felbontva a zárójeleket, és összevonva azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\frac{n}{n + 1} + \frac{1}{(n + 1) \cdot (n + 2)} &= \frac{n + 1}{n + 2} \\ n \cdot (n + 2) + 1 &= (n + 1)^2 \\ n^2 + 2n + 1 &= n^2 + 2n + 1.\end{aligned}$$

Azonosságot kaptunk, amivel az állítást igazoltuk.

2.18. **Feladat.** Bizonyítsuk be, hogy

$$1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \dots + n \cdot n! = (n + 1)! - 1$$

teljesül minden n természetes számra!

Megoldás:

Az állítás $n = 1$ -re igaz, ugyanis $1 \cdot 1! = 2! - 1$. Tegyük fel, hogy n -re igaz az állítás és bizonyítsuk be $n + 1$ -re. Igazolnunk kell, hogy minden n természetes szám esetén

$$1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \dots + n \cdot n! + (n + 1) \cdot (n + 1)! = (n + 2)! - 1$$

teljesül. Felhasználva az indukciós feltevést azt kapjuk, hogy a bizonyítandó összefüggés

$$(n + 1)! - 1 + (n + 1) \cdot (n + 1)! = (n + 2)! - 1.$$

Mindkét oldalhoz 1-et hozzáadva, majd a bal oldalon $(n + 1)!$ -t kiemelve

$$(n + 1)! \cdot (1 + n + 1) = (n + 2)!$$

adódik, ami azonosság, hiszen $(n + 1)! \cdot (n + 2) = (n + 2)!$.

2.19. **Feladat.** Bizonyítsuk be, hogy

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + n \cdot (n + 1) = \frac{n \cdot (n + 1) \cdot (n + 2)}{3} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Megoldás:

Az állítás $n = 1$ -re nyilván igaz, hiszen

$$1 \cdot 2 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{3}.$$

Tegyük fel, hogy n -re igaz az állítás, és bizonyítsuk be $n + 1$ -re. A bizonyítandó összefüggés

$$\begin{aligned} 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + n \cdot (n + 1) + (n + 1) \cdot (n + 2) &= \\ &= \frac{(n + 1) \cdot (n + 2) \cdot (n + 3)}{3}. \end{aligned}$$

Az indukciós feltevést felhasználva a bizonyítandó egyenlőség

$$\frac{n \cdot (n + 1) \cdot (n + 2)}{3} + (n + 1) \cdot (n + 2) = \frac{(n + 1) \cdot (n + 2) \cdot (n + 3)}{3}.$$

Mindkét oldalt $(n + 1) \cdot (n + 2)$ -vel elosztva

$$\frac{n}{3} + 1 = \frac{(n + 3)}{3}.$$

Mindkét oldalt 3-al szorozva a bizonyítandó állítást kapjuk.

2.20. Feladat. Bizonyítsuk be teljes indukcióval, hogy minden olyan n természetes számra, melyre $n \geq 4$, teljesül a

$$2^n < n!$$

összefüggés.

Megoldás:

Először $n = 4$ -re ellenőrizzük az állítást. Ekkor a bal oldal $2^4 = 16$, a jobb oldal $4! = 24$, így igaz az összefüggés. Tegyük föl, hogy n -re igaz, és bizonyítsuk be $n + 1$ -re:

$$2^{n+1} = 2^n \cdot 2 < n! \cdot 2 < n! \cdot (n + 1) = (n + 1)!,$$

ami a bizonyítandó állítás.

2.21. Feladat. Bizonyítsuk be teljes indukcióval, hogy minden olyan n természetes számra, melyre $n \geq 4$, teljesül a

$$3^n < (n + 1)!$$

összefüggés.

Megoldás:

Először $n = 4$ -re ellenőrizzük az állítást. Ekkor a bal oldal $3^4 = 81$, a jobb oldal $5! = 120$, így igaz az összefüggés. Tegyük föl, hogy n -re igaz, és bizonyítsuk be $n + 1$ -re:

$$3^{n+1} = 3^n \cdot 3 < (n + 1)! \cdot 3 < (n + 1)! \cdot (n + 2) = (n + 2)!,$$

ami a bizonyítandó állítás.

2.22. Feladat. Bizonyítsuk be, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$6|n^3 + 5n,$$

azaz 6 osztója $n^3 + 5n$ -nek.

Megoldás:

Az állítás $n = 1$ esetén igaz, ugyanis

$$6|1^3 + 5 \cdot 1 = 6.$$

Tegyük föl, hogy n -re igaz az állítás. Be szeretnénk bizonyítani, hogy

$$6|(n+1)^3 + 5 \cdot (n+1)$$

teljesül. Az

$$\begin{aligned}(n+1)^3 + 5 \cdot (n+1) &= n^3 + 3n^2 + 3n + 1 + 5n + 5 = \\ &= n^3 + 3n^2 + 8n + 6 = n^3 + 5n + 3n^2 + 3n + 6,\end{aligned}$$

átalakítást elvégezve azt kaptuk, $6|n^3 + 5n$ az indukciós feltevés miatt, továbbá

$$6|3 \cdot (n^2 + n) = 3 \cdot n \cdot (n+1),$$

ugyanis $n \cdot (n+1)$ biztosan páros, mert egy n és $n+1$ közül az egyik szám páros, a másik páratlan és egy páros és egy páratlan szám szorzata mindig páros, továbbá $6|6$. Azt kaptuk tehát, hogy $n^3 + 5n$, valamint a $3n^2 + 3n$ és a 6 is osztható 6 -tal, így ezek összege is osztható 6 -tal, amivel igazoltuk az állítást.

2.23. Feladat. Bizonyítsuk be, hogy

$$4^n + 6n - 1$$

minden n természetes szám esetén osztható 9 -cel!

Megoldás:

Az állítás $n = 1$ esetén igaz, ugyanis

$$4^1 + 6 \cdot 1 - 1 = 9,$$

ami nyilván osztható 9 -cel. Tegyük föl, hogy n -re igaz az állítás. Be szeretnénk bizonyítani, hogy

$$9|4^{n+1} + 6 \cdot (n+1) - 1$$

teljesül. Mivel

$$4^{n+1} + 6 \cdot (n+1) - 1 = 4 \cdot 4^n + 6n + 5 = 4 \cdot (4^n + 6n - 1) - 18n + 9,$$

így az első tag az indukciós feltevés miatt osztható 9 -cel, a második tag és a harmadik tag nyilvánvalóan osztható 9 -cel, így a teljes kifejezés is osztható 9 -cel, amivel igazoltuk az állítást.

2.24. Feladat. Bizonyítsuk be, hogy egy n elemű halmaz összes részhalmazainak száma: 2^n .

Megoldás:

Az állítás $n = 1$ -re biztosan igaz, hiszen az 1 elemű halmaznak $2^1 = 2$ darab részhalmaza van: az üreshalmaz, és az a halmaz, ami a halmaz egyetlen elemét tartalmazza.

Tegyük föl, hogy az állítás n -re igaz, azaz egy n elemű halmaznak 2^n darab részhalmaza van. Tekintsünk egy $n + 1$ elemű halmazt, amit bontunk fel egy n elemű halmaz és egy egy elemű halmaz uniójára. Az n elemű halmaznak az indukciós feltevés miatt 2^n darab részhalmaza van (ezek azok a részhalmazok, melyek egyike sem tartalmazza az egyelemű halmaz elemét). Azon részhalmazok száma, amelyek az egyelemű halmaz elemét tartalmazzák szintén 2^n (ugyanis az előbbi 2^n darab részhalmaz mindegyikéhez hozzávehetjük az egyelemű halmaz elemét). Azt kaptuk tehát, hogy az $n + 1$ elemű halmaz összes részhalmazainak száma

$$2^n + 2^n = 2 \cdot 2^n = 2^{n+1},$$

amivel igazoltuk az állítást.

2.25. Feladat. Adjuk meg az n természetes szám értékét, ha

$$\binom{n}{2} = 10$$

teljesül!

Megoldás:

Mivel

$$\begin{aligned} \binom{n}{2} &= \frac{n!}{2! \cdot (n-2)!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (n-2) \cdot (n-1) \cdot n}{2 \cdot (n-2)!} = \\ &= \frac{(n-2)! \cdot (n-1) \cdot n}{2 \cdot (n-2)!} = \frac{n \cdot (n-1)}{2}, \end{aligned}$$

ezért az

$$n \cdot (n-1) = 20$$

egyenletet kell megoldanunk a természetes számok halmazán. Felbontjuk a zárójelet és az egyenletet nullára rendezzük:

$$n^2 - n - 20 = 0,$$

majd a másodfokú egyenlet megoldóképletét alkalmazva azt kapjuk, hogy

$$n_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 + 80}}{2} = \frac{1 \pm 9}{2}.$$

Mivel $n > 0$, ezért a keresett természetes szám: $n = 5$.

2.26. Feladat. Határozzuk meg az n természetes szám értékét úgy, hogy a

$$\binom{2n+1}{2n-1} = 55$$

egyenlet teljesüljön!

Megoldás:

A binomiális együttható definíciója szerint

$$\begin{aligned} \binom{2n+1}{2n-1} &= \frac{(2n+1)!}{(2n-1)! \cdot ((2n+1) - (2n-1))!} = \\ &= \frac{(2n+1)!}{(2n-1)! \cdot 2!} = \frac{(2n+1) \cdot 2n}{2} = (2n+2) \cdot n, \end{aligned}$$

így a megoldandó egyenlet

$$(2n+1) \cdot n = 55.$$

Felbontva a zárójelet, majd az egyenletet 0-ra redukálva

$$2n^2 + n - 55 = 0$$

adódik. Ezt megoldva a másodfokú egyenlet megoldóképletével

$$n_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 440}}{4} = \frac{-1 \pm 21}{4}$$

adódik, amiből $n_1 = 5$, $n_2 = -\frac{11}{2}$. Mivel az n csak természetes szám lehet, ezért $n = 5$.

2.27. Feladat. Legyen $n \geq 3$ természetes szám! Oldjuk meg a

$$\binom{n}{3} - \binom{2n}{2} = 32n$$

egyenletet!

Megoldás:

Mivel

$$\binom{n}{3} = \frac{n!}{3! \cdot (n-3)!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)}{6}$$

és

$$\binom{2n}{2} = \frac{(2n)!}{2! \cdot (2n-2)!} = \frac{2n \cdot (2n-1)}{2} = n \cdot (2n-1),$$

ezért a megoldandó egyenlet:

$$\frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)}{6} + n \cdot (2n-1) = 32n.$$

Felbontjuk a zárójeleket, szorzunk a közös nevezővel és összevonunk:

$$\frac{n^3 - 3n^2 + 2n}{6} - 2n^2 + n = 32n$$

$$n^3 - 3n^2 + 2n - 12n^2 + 6n = 192n$$

$$n^3 - 15n^2 - 184n = 0.$$

Az n ismeretlent kiemelve

$$n \cdot (n^2 - 15n - 184) = 0$$

adódik. Mivel $n \neq 0$, ezért

$$n^2 - 15n - 184 = 0.$$

Az egyenlet megoldására

$$n_{1,2} = \frac{15 \pm \sqrt{(-15)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-184)}}{2} = \frac{15 \pm 31}{2}$$

adódik. Mivel $n > 0$, ezért azt kapjuk, hogy $n = 23$. Mivel

$$\binom{23}{3} - \binom{46}{2} = 32 \cdot 23,$$

ezért $n = 23$ valóban megoldása az eredeti egyenletnek.

2.28. Feladat. Határozzuk meg az

$$\left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{100}$$

kifejezés binomiális tétel szerinti kifejtésében a konstans tagot.

Megoldás:

A konstans tagot akkor fogunk kapni, ha a \sqrt{x} és $\frac{1}{\sqrt{x}}$ tagokat azonos kitevőjű hatványként szorozzuk össze. A binomiális tétel szerint az egyes tagokban a kéttényezős hatványok kitevőjének összege jelen esetben 100 kell, hogy legyen. Azaz keressük azt az a hatványkitevőt, amelyre teljesül, hogy $a = 100 - a$, így $a = 50$ adódik. Tehát a keresett konstans tag:

$$\binom{100}{50} \cdot (\sqrt{x})^{50} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{50} = \binom{100}{50}.$$

2.29. **Feladat.** Határozzuk meg az

$$\left(x + \frac{1}{x^2}\right)^{120}$$

kifejzés binomiális tétel szerinti kifejtésében a konstans tagot.

Megoldás:

Annak a tagnak keressük az együtthatóját, amely a binomiális tétel szerinti kifejtésben

$$x^{2k} \cdot \left(\frac{1}{x^2}\right)^k$$

alakú. Azt is tudjuk továbbá a binomiális tételből adódóan, hogy a $k+2k = 120$ egyenletnek is teljesülnie kell, így $k = 40$ adódik. Tehát a konstans tag:

$$\binom{120}{80} \cdot x^{80} \cdot \left(\frac{1}{x^2}\right)^{40} = \binom{120}{80}.$$

A keresett konstans tag tehát:

$$\binom{120}{80}.$$

2.30. **Feladat.** A binomiális tétel felhasználásával „végezzük el” a

$$(2x + 3)^4$$

hatványozást!

Megoldás:

A binomiális tételt alkalmazva

$$\begin{aligned} (2x + 3)^4 &= \binom{4}{0} \cdot (2x)^0 \cdot 3^4 + \binom{4}{1} \cdot (2x)^1 \cdot 3^3 + \\ &+ \binom{4}{2} \cdot (2x)^2 \cdot 3^2 + \binom{4}{3} \cdot (2x)^3 \cdot 3^1 + \\ &+ \binom{4}{4} \cdot (2x)^4 \cdot 3^0 \end{aligned}$$

adódik. Az egyes tagokat kiszámolva azt kapjuk, hogy az első tag:

$$\binom{4}{0} \cdot (2x)^0 \cdot 3^4 = 81;$$

a második tag:

$$\binom{4}{1} \cdot (2x)^1 \cdot 3^3 = 4 \cdot 2x \cdot 27 = 216x;$$

a harmadik tag:

$$\binom{4}{2} \cdot (2x)^2 \cdot 3^2 = 6 \cdot 4x^2 \cdot 9 = 216x^2;$$

a negyedik tag:

$$\binom{4}{3} \cdot (2x)^3 \cdot 3^1 = 4 \cdot 8x^3 \cdot 3 = 96x^3;$$

az ötödik tag:

$$\binom{4}{4} \cdot (2x)^4 \cdot 3^0 = 16x^4.$$

A fentiek felhasználásával a keresett kifejezés binomiális tétel szerinti kifejtésére

$$(2x + 3)^4 = 81 + 216x + 216x^2 + 96x^3 + 16x^4$$

adódik.

2.31. **Feladat.** Adjuk meg a

$$(3x^2 + 1)^5$$

kifejezés binomiális tétel szerinti kifejtését!

Megoldás:

A binomiális tétel szerint

$$\begin{aligned} (3x^2 + 1)^5 &= \binom{5}{0} \cdot (3x^2)^0 \cdot 1^5 + \binom{5}{1} \cdot (3x^2)^1 \cdot 1^4 + \binom{5}{2} \cdot (3x^2)^2 \cdot 1^3 + \\ &+ \binom{5}{3} \cdot (3x^2)^3 \cdot 1^2 + \binom{5}{4} \cdot (3x^2)^4 \cdot 1^1 + \\ &+ \binom{5}{5} \cdot (3x^2)^5 \cdot 1^0. \end{aligned}$$

Kiszámolva a binomiális együtthatókat

$$1 + 15x^2 + 90x^4 + 270x^6 + 405x^8 + 243x^{10}$$

adódik.

2.32. Feladat. Határozzuk meg a $(2x - 4y)^3$ kifejezés binomiális tétel szerinti kifejtésében szereplő tagok együtthatóinak összegét!

Megoldás:

A binomiális tételt alkalmazva:

$$\begin{aligned}(2x - 4y)^3 &= \binom{3}{0} \cdot (2x)^3 \cdot (-4y)^0 + \binom{3}{1} \cdot (2x)^2 \cdot (-4y)^1 + \\ &+ \binom{3}{2} \cdot (2x)^1 \cdot (-4y)^2 + \binom{3}{3} \cdot (2x)^0 \cdot (-4y)^3.\end{aligned}$$

A binomiális együtthatókat kiszámolva, vagy a Pascal-háromszög megfelelő sorát felírva:

$$\begin{aligned}(2x - 4y)^3 &= (2x)^3 \cdot (-4y)^0 + 3 \cdot (2x)^2 \cdot (-4y)^1 + \\ &+ 3 \cdot (2x)^1 \cdot (-4y)^2 + (2x)^0 \cdot (-4y)^3.\end{aligned}$$

Elvégezve a hatványozásokat

$$(2x - 4y)^3 = 8x^3 - 48x^2y + 96xy^2 - 64y^3$$

adódik, így az együtthatók összege:

$$8 + (-48) + 96 + (-64) = 104 - 112 = -8.$$

2.33. Feladat. Határozzuk meg az $A = [1; 5]$ intervallum infimumát, szuprérumát, minimumát, maximumát! Alulról korlátos-e, felülről korlátos-e, korlátos-e a halmaz? Adjuk meg a halmaz belső pontjainak halmazát!

Megoldás:

A halmaz

- pontos alsó korlátja: $\inf(A) = 1$;
- pontos felső korlátja: $\sup(A) = 5$;
- minimuma: $\min(A) = 1$, mivel a pontos alsó korlát eleme a halmaznak;
- maximuma: $\max(A) = 5$, mivel a pontos felső korlát eleme a halmaznak;
- korlátos, mert alulról és felülről is korlátos;
- a belső pontok halmaza: $]1; 5[$.

2.34. Feladat. Határozzuk meg az $A =]4; 7]$ intervallum infimumát, szuprérumát, minimumát, maximumát! Alulról korlátos-e, felülről korlátos-e, korlátos-e a halmaz?

Megoldás:

A halmaz

- pontos alsó korlátja: $\inf(A) = 4$;
- pontos felső korlátja: $\sup(A) = 7$;
- minimuma nincs, mivel a pontos alsó korlát nem eleme a halmaznak;
- maximuma: $\max(A) = 7$, mivel a pontos felső korlát eleme a halmaznak;
- korlátos, mert alulról és felülről is korlátos.

2.35. **Feladat.** Határozzuk meg az $A =]2; \infty[$ intervallum infimumát, szuprénumát, minimumát, maximumát! Alulról korlátos-e, felülről korlátos-e, korlátos-e a halmaz?

Megoldás:

A halmaz

- pontos alsó korlátja: $\inf(A) = 2$;
- pontos felső korlátja: nincs;
- minimuma nincs, mivel a pontos alsó korlát nem eleme a halmaznak;
- maximuma: nincs;
- alulról korlátos, felülről nem korlátos, így nem korlátos.

2.36. **Feladat.** Határozzuk meg az $A =]-\infty; 3]$ intervallum infimumát, szuprénumát, minimumát, maximumát! Alulról korlátos-e, felülről korlátos-e, korlátos-e a halmaz?

Megoldás:

A halmaz

- pontos alsó korlátja: nincs;
- pontos felső korlátja: $\sup A = 3$;
- minimuma: nincs;
- maximuma: $\max A = 3$;
- alulról nem korlátos, felülről korlátos, így nem korlátos.

2.37. **Feladat.** Vizsgáljuk meg az

$$A = \left\{ 1 + \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$$

halmazt korlátosság szempontjából!

Megoldás:

A halmaz

- pontos alsó korlátja: $\inf A = 1$;
- pontos felső korlátja: $\sup A = 2$;
- minimuma: nincs;
- maximuma: $\max A = 2$;
- korlátos, mert alulról és felülről korlátos.

2.38. **Feladat.** Vizsgáljuk meg az

$$A = \left\{ 2 - \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$$

halmazt korlátosság szempontjából!

Megoldás:

A halmaz

- pontos alsó korlátja: $\inf A = 1$;
- pontos felső korlátja: $\sup A = 2$;
- minimuma: $\min A = 1$;
- maximuma: nincs;
- korlátos, mert alulról és felülről korlátos.

2.39. **Feladat.** Korlátos-e az $A = [1; 9[$ halmaz? Határozzuk meg az infimumát, szuprémumát, minimumát, maximumát, belső pontjait, határpontjait, torlódási pontjait, izolált pontjait! Nyílt-e a halmaz? Zárt-e a halmaz?

Megoldás:

A halmaz

- pontos alsó korlátja: $\inf A = 1$;
- pontos felső korlátja: $\sup A = 9$;
- minimuma: $\min A = 1$;
- maximuma: nem létezik;
- korlátos, mert alulról korlátos és felülről korlátos;
- belső pontjainak halmaza: $A^\circ =]1; 9[$;
- határpontjai: $\partial A = \{1; 9\}$;
- torlódási pontjainak halmaza: $A' = [1; 9]$;

- izolált pontja: nincs, mert nincs olyan A -beli elem, amely ne lenne torlódási pont;
- nem nyílt, mert az 1 nem belső pontja;
- nem zárt, mert a komplementere $] - \infty; 1[\cup]9; \infty[$ nem nyílt, ugyanis a 9 nem belső pontja.

2.40. Feladat. Korlátos-e

$$A =]0; 1] \cup]2; \infty[\cup \{-1\}$$

halmaz? Határozzuk meg az infimumát, szuprémumát, minimumát, maximumát, belső pontjait, határpontjait, torlódási pontjait, izolált pontjait! Nyílt-e a halmaz? Zárt-e a halmaz?

Megoldás:

A halmaz

- infimuma: $\inf A = 0$;
- szuprémuma: nem létezik;
- minimuma: nem létezik;
- maximuma: nem létezik;
- nem korlátos;
- belső pontjainak halmaza: $A^\circ =]0; 1[\cup]2; \infty[$;
- határpontjai: $\partial A = \{-1; 0; 1; 2\}$;
- torlódási pontjainak halmaza: $A' = [0; 1] \cup [2; \infty[$;
- izolált pontja: -1 , mert ez az egyetlen halmazbeli elem, amely nem torlódási pont;
- nem nyílt, mert az 1 nem belső pontja;
- nem zárt, mert a komplementere $(] - \infty; 0] \cup]1; 2]) \setminus \{-1\}$ nem nyílt.

2.41. Feladat. Vizsgáljuk meg korlátosság szempontjából az

$$A = \{2^n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

halmazt!

Megoldás:

A halmaz elemei:

$$A = \{2^n \mid n \in \mathbb{N}\} = \{2; 4; 8; 16; \dots\}.$$

A halmaz pontos alsó korlátja, azaz infimuma: $\inf(A) = 3$. Pontos felső korlátja nem létezik. Mivel a pontos alsó korlát eleme a halmaznak, ezért az minimum is, azaz $\min(A) = 3$. Mivel nincs pontos felső korlátja, ezért maximuma sincs. A halmaz felülről nem korlátos, így nem korlátos.

2.42. Feladat. Vizsgáljuk meg korlátosság szempontjából az

$$A = \left\{ (-3)^n \mid n \in \mathbb{N} \right\}$$

halmazt korlátosság szempontjából!

Megoldás:

A halmaz elemei:

$$A = \left\{ (-3)^n \mid n \in \mathbb{N} \right\} = \{-3; 9; -27; 81; \dots\}.$$

A halmaznak pontos alsó korlátja és pontos felső korlátja sem létezik. Tehát minimuma és maximuma sem létezik. Alulról és felülről sem korlátos, tehát nem korlátos.

2.43. Feladat. Vizsgáljuk meg korlátosság szempontjából az

$$A = \left\{ \left(\frac{1}{2}\right)^n \mid n \in \mathbb{N} \right\}$$

halmazt korlátosság szempontjából!

Megoldás:

A halmaz elemei:

$$A = \left\{ \left(\frac{1}{2}\right)^n \mid n \in \mathbb{N} \right\} = \left\{ \frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{8}; \frac{1}{16}; \dots \right\}.$$

A halmaz

- pontos alsó korlátja: $\inf A = 0$;
- pontos felső korlátja: $\sup A = \frac{1}{2}$;
- korlátos, mert alulról és felülről is korlátos.

2.44. Feladat. Adjuk meg a $G(1; 3)$ és a $G(2; 5)$ környezeteket!

Megoldás:

A $G(1; 3)$ környezet az

$$]1 - 2; 1 + 3[=] - 1; 4[$$

intervallum, míg a $G(2; 5)$ környezet a

$$]2 - 5; 2 + 5[=] - 3; 7[$$

intervallum.

2.45. Feladat. Tekintsük az

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 7x + 10 \leq 0\}$$

és a

$$B = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \frac{x+2}{x-3} > 2 \right\}$$

halmazokat!

- Adjuk meg az A halmazt intervallumként vagy intervallumok uniójaként!
- Határozzuk meg az $A \cap \mathbb{N}$ halmazt!
- Adjuk meg a B halmazt intervallumként vagy intervallumok uniójaként!
- Adjuk meg az $A \cup B$ és $A \cap B$ halmazokat!
- Korlátos-e az A halmaz?
- Határozzuk meg az A halmaz infimumát és szupremumát!
- Adjuk meg a B halmaz torlódási pontjainak halmazát!

Megoldás:

- a) Az $x^2 - 7x + 10 \geq 0$ egyenlőtlenség megoldásához tekintsük először az $f(x) = x^2 - 7x + 10$ függvényt. Ennek zérushelyei:

$$x_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 40}}{2} = \frac{7 \pm 3}{2},$$

így a függvény grafikonjából leolvasható, hogy

$$A = [2; 5].$$

- b) Az $A \cap \mathbb{N}$ halmaz:

$$\{2; 3; 4; 5\}.$$

- c) Az

$$\frac{x+2}{x-3} > 2$$

egyenlőtlenség megoldásához először nullára rendezzük az egyenlőtlenséget:

$$\frac{x+2}{x-3} > 2 \quad \Rightarrow \quad \frac{-x+8}{x-3} > 0.$$

Ezt követően megvizsgáljuk, hogy egy tört hogy lehet pozitív. Két esetben: vagy úgy, hogy a számláló és a nevező is pozitív, vagy úgy, hogy a számláló

és a nevező is negatív. Az első esetben $x < 8$ és $x > 3$ adódik, a második esetben pedig $x > 8$ és $x < 3$. Az első esetben a megoldáshalmaz $]3; 8[$, a második esetben ellentmondásra jutunk, így a B halmaz:

$$B =]3; 8[.$$

d) Az A és B halmazok uniója és metszere:

$$A \cup B = [2; 8[$$

$$A \cap B =]3; 5]$$

e) Az A halmaz korlátos, mert alulról és felülről is korlátos.

f) Az A halmaz infimuma 2, szuprémuma: 5.

g) A B halmaz torlódási pontjainak halmaza: $[3; 8]$.

3. Relációk

3.1. **Feladat.** Tekintsük a

$$H = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8\}$$

alaphalmazt és az

$$A = \{2; 3; 5\}; \quad B = \{1; 2; 5; 8\}$$

halmazokat! Adjuk meg az $A \times B$ és $B \times A$ halmazokat!

Megoldás:

A keresett Descartes-szorzatok

$$A \times B = \{(2; 1); (2; 2); (2; 5); (2; 8); (3; 1); (3; 2); (3; 5); (3; 8); (5; 1); (5; 2); (5; 5); (5; 8)\},$$

illetve

$$B \times A = \{(1; 2); (1; 3); (1; 5); (2; 2); (2; 3); (2; 5); (5; 2); (5; 3); (5; 5); (8; 2); (8; 3); (8; 5)\}.$$

3.2. **Feladat.** Tekintsük az

$$A = \{1, 2, 5, 7\}$$

és a

$$B = \{2, 4, 5, 8\}$$

halmazokat! Adjuk meg az $A \times B$ és $B \times A$ halmazokat!

Megoldás:

A keresett halmazok:

$$A \times B = \{(1, 2), (1, 4), (1, 5), (1, 8), (2, 2), (2, 4), (2, 5), (2, 8), (5, 2), (5, 4), (5, 5), (5, 8), (7, 2), (7, 4), (7, 5), (7, 8)\},$$

illetve

$$B \times A = \{(2; 1); (2; 2); (2; 5); (2; 7); (4; 1); (4; 2); (4; 5); (4; 7); (5; 1); (5; 2); (5; 5); (5; 7); (8; 1); (8; 2); (8; 5); (8; 7)\}.$$

3.3. **Feladat.** Soroljuk fel a $A \times B$ halmaz elemeit, ha

$$A = \{x \in \mathbb{Z} \mid -2 \leq x \leq 1\}$$

és

$$B = \{x \in \mathbb{Z} \mid 0 \leq x \leq 2\}.$$

Megoldás:

Az A halmaz:

$$A = \{-2; -1; 0; 1\},$$

a B halmaz:

$$B = \{0; 1; 2\},$$

így az $A \times B$ halmaz:

$$A \times B = \{(-2; 0); (-2; 1); (-2; 2); (-1; 0); (-1; 1); (-1; 2); (0; 0); (0; 1); (0; 2); (1; 0); (1; 1); (1; 2)\}$$

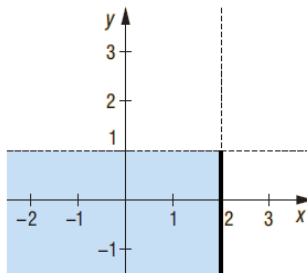
3.4. **Feladat.** Ábrázoljuk a $A =]-\infty; 2] \times]-\infty; 1[$ Descartes szorzatot!

Megoldás:

Azokat a síkbeli pontokat kell ábrázolnunk, amelyek első koordinátája kisebb vagy egyenlő, mint 2, és a második koordinátája kisebb, mint 1, azaz a megadott halmaz másképp a következőképpen írható fel:

$$A = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leq 2; y < 1\}.$$

Az A halmaz ábrázolása koordinátarendszerben:



3.5. **Feladat.** Ábrázoljuk az $A =]-\infty; 1[\times [1; \infty[$ Descartes szorzatot!

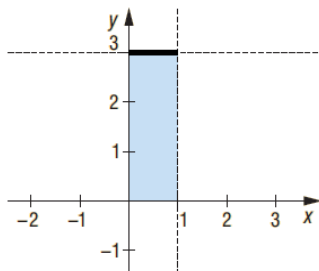
Megoldás:

Azokat a síkbeli pontokat kell ábrázolnunk, amelyek első koordinátája kisebb,

mint 1, és a második koordinátája nagyobb vagy egyenlő, mint 1, azaz a megadott halmaz másképp a következőképpen írható fel:

$$A = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 \mid x < 2; y \geq 1\}.$$

Az A halmaz ábrázolása koordinátarendszerben:



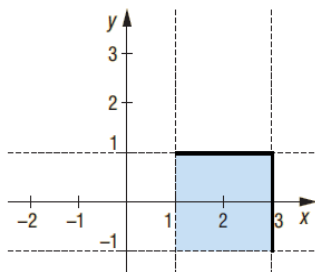
3.6. **Feladat.** Ábrázoljuk az $]1; 3] \times]-1; 1]$ Descartes szorzatot!

Megoldás:

A megadott halmaz másképp a következőképpen írható fel:

$$A = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 < x \leq 3; -1 < y \leq 1\}.$$

Az A halmaz ábrázolása koordinátarendszerben:



3.7. **Feladat.** Tekintsük az $A = \{-1; 0; 1; 2\}$ és a $B = \{1; 2; 3\}$ halmazokat, továbbá legyen

$$\varrho = \{(a; b) \mid a \in A, b \in B, a + b = 2\}.$$

- Adjuk meg az $A \times B$ halmazt!
- Határozzuk meg a ϱ reláció elemeit és ábrázoljuk azokat koordinátarendszerben!
- Írjuk fel a ϱ^{-1} inverz relációt!

- d) Határozzuk meg a reláció és az inverz reláció értelmezési tartományát és értékkészletét!

Megoldás:

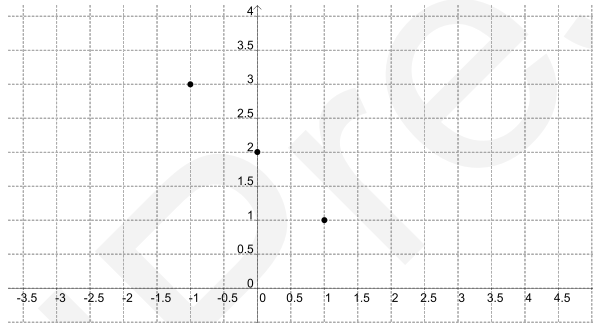
- a) A Descartes szorzat elemei olyan rendezett elempárok, melyek első komponense az első halmazból, második komponense a második halmazból való, így

$$A \times B = \{(-1; 1); (-1; 2); (-1; 3); (0; 1); (0; 2); (0; 3); (1; 1); (1; 2); (1; 3); (2; 1); (2; 2); (2; 3)\}.$$

- b) Az ϱ reláció azokat az elempárokat tartalmazza, amelyek koordinátáinak összege 2, azaz

$$\varrho = \{(-1; 3); (0; 2); (1; 1)\}.$$

Koordinátarendszerben ábrázolva a relációt:



- c) Az inverz reláció elemeit úgy kapjuk meg, hogy a relációban szereplő elemek első és második koordinátáját „megcseréljük”, így

$$\varrho^{-1} = \{(3; -1); (2; 0); (1; 1)\}.$$

- d) A reláció értelmezési tartománya a relációban szereplő elemek első koordinátája

$$D_{\varrho} = \{-1; 0; 1\} \subset A,$$

értékkészlete a relációban szereplő elemek második koordinátája

$$R_{\varrho} = \{1; 2; 3\} \subset B.$$

Az inverz reláció értelmezési tartománya és értékkészlete

$$D_{\varrho^{-1}} = \{1; 2; 3\} = R_{\varrho};$$

$$R_{\varrho^{-1}} = \{-1; 0; 1\} = D_{\varrho}.$$

3.8. **Feladat.** Tekintsük az $A = \{1; 2; 3; 4\}$ és a $B = \{2; 4; 6\}$ halmazokat, továbbá legyen

$$\varrho = \{(a; b) \mid a \in A, b \in B, a \text{ osztója } b\text{-nek vagy } b = a + 2\}.$$

- Adjuk meg az $A \times B$ halmazt!
- Határozzuk meg a ϱ reláció elemeit és ábrázoljuk azokat koordinátarendszerben!
- Írjuk fel a ϱ^{-1} inverz relációt!
- Határozzuk meg a reláció és az inverz reláció értelmezési tartományát és értékkészletét!

Megoldás:

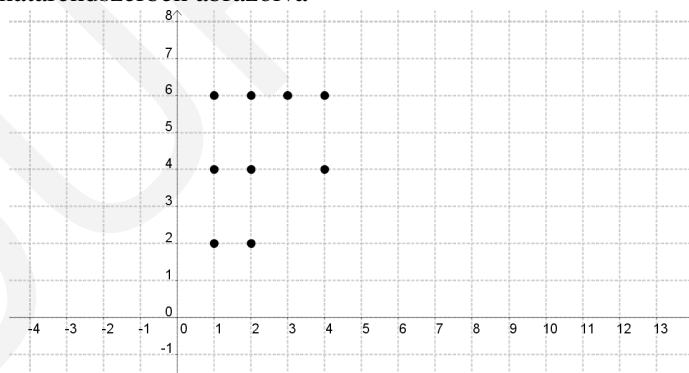
- A Descartes szorzat elemei olyan rendezett elem párok, melyek első komponense az első halmazból, második komponense a második halmazból való! Tehát

$$A \times B = \{(1; 2); (1; 4); (1; 6); (2; 2); (2; 4); (2; 6); (3; 2); (3; 4); (3; 6); (4; 2); (4; 4); (4; 6)\}.$$

- Az ϱ reláció azokat az elem párokat tartalmazza, amelyek koordinátáira teljesül, hogy az első koordináta osztója a másodiknak:

$$\varrho = \{(1; 2); (1; 4); (1; 6); (2; 2); (2; 4); (2; 6); (3; 6); (4; 4); (4; 6)\}.$$

Koordinátarendszerben ábrázolva



- Az inverz reláció elemeit úgy kapjuk meg, hogy a relációban szereplő elemek első és második koordinátáját „megcseréljük”, így

$$\varrho^{-1} = \{(2; 1); (4; 1); (6; 1); (2; 2); (4; 2); (6; 2); (6; 3); (4; 4); (6; 4)\}.$$

- d) A reláció értelmezési tartománya a relációban szereplő elemek első koordinátája

$$D_{\varrho} = \{1; 2; 3; 4\} \subset A,$$

értékkészlete a relációban szereplő elemek második koordinátája

$$R_{\varrho} = \{2; 4; 6\} \subset B.$$

Az inverz reláció értelmezési tartománya és értékkészlete

$$D_{\varrho^{-1}} = \{2; 4; 6\} = R_{\varrho};$$

$$R_{\varrho^{-1}} = \{1; 2; 3; 4\} = D_{\varrho}.$$

- 3.9. **Feladat.** Tekintsük az $A = \{-1; 0; 1\}$ és a $B = \{-1; 0\}$ halmazokat, továbbá legyen

$$\varrho = \{(a; b) \mid a \cdot b = 0\} \subset A \times B.$$

- Írjuk fel az $A \times B$ halmazt!
- Írjuk föl a reláció elemeit!
- Határozzuk meg a reláció inverzét!
- Határozzuk meg a reláció és az inverz reláció értelmezési tartományát és értékkészletét!

Megoldás:

- a) Először felírjuk az $A \times B$ halmazt:

$$A \times B = \{(-1; -1); (-1; 0); (0; -1); (0; 0); (1; -1); (1; 0)\}.$$

- b) A reláció elemei

$$\varrho = \{(-1; 0); (0; -1); (0; 0); (1; 0)\}.$$

- c) Az inverz reláció:

$$\varrho^{-1} = \{(0; -1); (-1; 0); (0; 0); (0; 1)\}.$$

- d) A reláció értelmezési tartománya a relációban szereplő elempárok első koordinátájából álló halmaz, értékkészlete a második koordinátákból álló halmaz:

$$D_{\varrho} = \{-1; 0; 1\}; \quad R_{\varrho} = \{-1; 0\}.$$

Az inverz reláció értelmezési tartománya és értékkészlete

$$D_{\varrho^{-1}} = \{-1; 0\} = R_{\varrho};$$

$$R_{\varrho^{-1}} = \{-1; 0; 1\} = D_{\varrho}.$$

3.10. **Feladat.** Tekintsük az $A = \{1; 2; 3\}$ halmazt!

- Írjuk fel az $A \times A$ halmazt!
- Hány darab különböző relációt adhatunk meg az A halmazon?
- Adjunk meg egy olyan relációt az A -n, amely reflexív!

Megoldás:

- Az $A \times A$ Descartes-szorzat elemei olyan rendezett elempárok melyek első és második koordinátája is az A halmazból való

$$A \times A = \{(1; 1); (1; 2); (1; 3); (2; 1); (2; 2); (2; 3); (3; 1); (3; 2); (3; 3)\}.$$

- Az A halmazon adott reláción az $A \times A$ halmaz tetszőleges részhalmazát értjük. Mivel $A \times A$ -nak 9 eleme van, ezért annyi relációt tudunk felírni, amennyi részhalmazát képezhetjük ennek a halmaznak, azaz $2^9 = 512$ relációt tudunk megadni A -n.

- Például a

$$\rho = \{(1; 1); (2; 2); (3; 3)\}$$

reláció reflexív, mert minden $a \in A$ esetén $(a; a) \in \rho$. Ezen három elemhez bármilyen további elemet hozzávéve a reláció reflexív marad!

3.11. **Feladat.** Mutassuk meg, hogy a síkbeli egyenesek között a „párhuzamoság” ekvivalencia reláció!

Megoldás:

A reláció ekvivalencia reláció, ugyanis

- reflexív, mert minden egyenes párhuzamos önmagával;
- szimmetrikus, mert ha $a \parallel b$, akkor $b \parallel a$;
- transzitiv, mert ha $a \parallel b$ és $b \parallel c$, akkor $a \parallel c$.

3.12. **Feladat.** Mutassuk meg, hogy a valós számok halmazán a „ \leq ” reláció rendezési reláció!

Megoldás:

A reláció rendezési reláció, ugyanis

- reflexív, mert $a \leq a$ minden a valós számra;
- antiszimmetrikus, mert ha $a \leq b$ és $b \leq a$, akkor $a = b$;
- transzitiv, mert ha $a \leq b$ és $b \leq c$, akkor $a \leq c$;
- teljes, mert $a \leq b$ vagy $b \leq a$ közül legalább az egyik fennáll minden a és b valós szám esetén.

3.13. **Feladat.** Mutassuk meg, hogy a halmazok között a „ \subset ” reláció parciális rendezés, de nem rendezési reláció!

Megoldás:

A reláció parciális rendezési reláció, ugyanis

- reflexív, mert $A \subset A$ minden A halmaz esetén;
- antiszimmetrikus, mert ha $A \subset B$ és $B \subset A$, akkor $A = B$;
- tranzitív, mert ha $A \subset B$ és $B \subset C$, akkor $A \subset C$;
- nem teljes, mert léteznek olyan A és B halmazok, hogy $A \subset B$, $B \subset A$ egyike sem teljesül.

3.14. **Feladat.** Adjunk példát olyan relációra, amely szimmetrikus és antiszimmetrikus is.

Megoldás:

A valós számok közötti $=$ reláció szimmetrikus, mert ha $a = b$, akkor $b = a$, továbbá antiszimmetrikus, mert ha $a = b$ és $b = a$, akkor a és b megegyeznek.

3.15. **Feladat.** Adjunk példát olyan relációra, amely nem szimmetrikus és nem is antiszimmetrikus.

Megoldás:

Az egész számok között az oszthatóság, mint reláció nem szimmetrikus, mert ha a osztója b -nek, akkor nem igaz, hogy $b|a$ minden a és b egész számra, ezt mutatja például az, ha $a = 2$ és $b = 3$. A reláció nem antiszimmetrikus, mert ha $a|b$ és $b|a$, akkor $a = b$ valamint $a = -b$ is teljesül.

3.16. **Feladat.** Tekintsük a természetes számok halmazán a következő relációt: $x \varrho y$ pontosan akkor, ha $x - y$ páros. Mutassuk meg, hogy a reláció ekvivalencia reláció. Adjuk meg az általa indukált osztályozást!

Megoldás:

A reláció

- reflexív, mert $x \varrho x$, ugyanis $x - x = 0$ páros minden $x \in \mathbb{N}$ esetén;
- szimmetrikus, mert ha $x - y$ páros, akkor $y - x$ is páros;
- tranzitív, mert ha $x - y$ páros, és $y - z$ páros, akkor

$$x - y + (y - z) = x - z$$

is páros, mert páros számok összege páros.

Tehát a reláció ekvivalencia reláció. Az indukált osztályok

$$\{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ páros}\};$$

$$\{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ páratlan}\}.$$

3.17. Feladat. Tekintsük az

$$A = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6\}$$

halmazt és tekintsük az alábbi relációt:

$$x \rho y \Leftrightarrow 3 \mid (x - y),$$

azaz x pontosan akkor áll relációban y -nal, ha $x - y$ osztható 3-mal.

- Adjuk meg az $A \times A$ halmaz elemeinek a számát!
- Soroljuk fel a ρ relációt elemeit!
- Igazoljuk, hogy a reláció nem antiszimmetrikus!
- Mutassuk meg, hogy a ρ reláció ekvivalencia-reláció!
- Adjuk meg az ekvivalencia-reláció által indukált osztályokat!

Megoldás:

a) Az $A \times A$ halmaz elemeinek a száma $7^2 = 49$.

b) A ρ reláció:

$$\rho = \{(0; 0); (0; 3); (0; 6); (1; 1); (1; 4); (2; 2); (2; 5); (3; 0); (3; 3); (3; 3); (3; 6); (4; 1); (4; 4); (5; 2); (5; 5); (6; 0); (6; 3); (6; 6)\}.$$

c) A reláció nem antiszimmetrikus, mert például

$$3 \mid (5 - 2) = 3 \quad \text{és} \quad 3 \nmid (2 - 5) = -3,$$

de $2 \neq 5$.

d) A reláció

- reflexív, mert minden $x \in A$ esetén $3 \mid (x - x)$;
- szimmetrikus, mert minden $x, y \in A$ esetén

$$3 \mid (x - y) \quad \Rightarrow \quad 3 \mid (y - x);$$

- tranzitív, mert ha $3 \mid (x - y)$ és $3 \mid (y - z)$, akkor

$$3 \mid (x - y) + (y - z) = (x - z).$$

Mivel a ρ reláció reflexív, szimmetrikus és tranzitív, ezért ekvivalencia-reláció.

e) Három ekvivalencia osztály van, ezek az alábbiak:

$$A_1 = \{0; 3; 6\}; \quad A_2 = \{1; 4\}; \quad A_3 = \{2; 5\}.$$

DUPress

4. Függvények

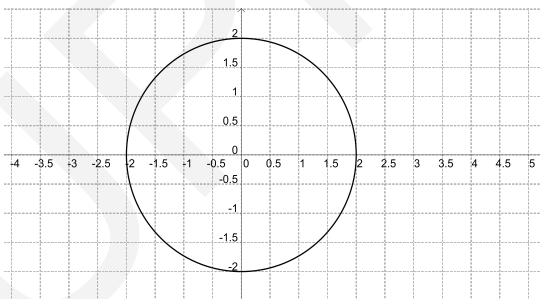
4.1. **Feladat.** Az alábbi hozzárendelések közül melyik függvény?

- Minden emberhez hozzárendeljük a magasságát.
- Minden természetes számhoz hozzárendeljük a nála 1-el nagyobb természetes számot.
- Minden számhoz hozzárendeljük a négyzetét.
- Minden osztályzathoz hozzárendeljük azokat a diákokat, akiknek az év végi matematika jegye az adott osztályzat. (Feltételezzük, hogy az osztálynak legalább 6 tanulója van.)
- Minden valós számhoz hozzárendeljük a felét.

Megoldás:

A d) nem függvény, mert egy osztályzat több diákhoz is tartozhat. A többi leképezés egyértelmű, így azok függvények.

4.2. **Feladat.** Lehet-e az alábbi görbe egy $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény grafikonja?



Megoldás:

Nem lehet, mert egy x értékhez több y érték is tartozik.

4.3. **Feladat.** Adjuk meg az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 2x$ függvény helyettesítési értékét az $x = 2$ helyen!

Megoldás:

A helyettesítési érték:

$$f(2) = 2^2 + 2 \cdot 2 = 4 + 4 = 8.$$

4.4. Feladat. Adjuk meg az $f:]-\infty; 8] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{8-x}$ függvény helyettesítési értékét az $x = 4$ helyen!

Megoldás:

A helyettesítési érték:

$$f(4) = \sqrt{8-4} = 2.$$

4.5. Feladat. Tekintsük az $f: [0; \infty[\rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{-x}$ függvényt! Adjuk meg az értelmezési tartománynak azt az elemét, amelyre a függvényérték 2.

Megoldás:

Azt az x értéket keressük, amelyre $\sqrt{-x} = 2$ teljesül. Az egyenlet mindkét oldalát négyzetre emelve azt kapjuk, hogy $-x = 4$. A keresett szám tehát az $x = -4$.

4.6. Feladat. Tekintsük az $f: \mathbb{R} \setminus \{3\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x-3}$ függvényt!

- Adjuk meg az f függvény helyettesítési értékét az $x = 4$ helyen!
- Adjuk meg az értelmezési tartománynak azt az elemét, amelyre a függvényérték 2.
- Adjuk meg azokat az x valós számokat, amelyekre a függvényérték negatív!

Megoldás:

- a) Az f függvény helyettesítési értékét az $x = 4$ helyen:

$$f(4) = \frac{1}{4-3} = 1.$$

- b) Az értelmezési tartománynak azt az elemét, amelyre a függvényérték 2 az $f(x) = 2$ egyenlet megoldása adja:

$$\frac{1}{x-3} = 2 \quad \Rightarrow \quad 1 = 2x - 6,$$

azaz $x = 3, 5$.

- c) Azokat az x valós számokat keressük, amelyre $f(x) < 0$, azaz az

$$\frac{1}{x-3} < 0$$

egyenlőtlenség megoldását. Mivel a számláló negatív szám, ezért a tört csak úgy lehet negatív, ha a nevező pozitív, azaz ha $x - 3 > 0$, ami ekvivalens azzal, hogy $x > 3$, így a keresett valós számok a $]3; \infty[$ intervallum elemei.

4.7. **Feladat.** Tekintsük az

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 - x$$

függvényt! Mutassuk meg, hogy $f(x+1) = f(-x)$.

Megoldás:

Egyrészt kiszámoljuk $f(x+1)$ -et:

$$f(x+1) = (x+1)^2 - (x+1) = x^2 + 2x + 1 - x - 1 = x^2 + x.$$

Másrészt

$$f(-x) = (-x)^2 - (-x) = x^2 + x,$$

így $f(x+1) = f(-x)$ minden $x \in \mathbb{R}$ esetén.

4.8. **Feladat.** Tekintsük az

$$f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x}$$

függvényt. Mutassuk meg, hogy

$$\frac{f(a) - f(b)}{a - b} = -\frac{1}{a \cdot b}.$$

Megoldás:

Mivel

$$f(a) - f(b) = \frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{b - a}{a \cdot b},$$

ezért

$$\frac{f(a) - f(b)}{a - b} = \frac{b - a}{(a - b) \cdot a \cdot b} = -\frac{1}{a \cdot b},$$

amivel megkaptuk a feladatban szereplő összefüggést.

4.9. **Feladat.** Tekintsük az

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 + 3x - 4$$

függvényt! Számoljuk ki az

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

hányadost, ha a és b különböző valós számok!

Megoldás:

Mivel egyrészt

$$f(b) = b^2 + 3b - 4,$$

másrészt

$$f(a) = a^2 + 3a - 4,$$

ezért

$$\begin{aligned} \frac{f(b) - f(a)}{b - a} &= \frac{(b^2 + 3b - 4) - (a^2 + 3a - 4)}{b - a} = \\ &= \frac{b^2 + 3b - 4 - a^2 - 3a + 4}{b - a} = \frac{b^2 - a^2 + 3b - 3a}{b - a} = \\ &= \frac{(b - a) \cdot (b + a) + 3 \cdot (b - a)}{b - a} = \frac{(b - a) \cdot (b + a + 3)}{b - a} = \\ &= a + b + 3. \end{aligned}$$

4.10. Feladat. Tekintsük az

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2x - x^2$$

függvényt! Számoljuk ki az $f(a + 3) - f(a - 3)$ értéket, ha $a \in \mathbb{R}$ tetszőleges.

Megoldás:

Mivel

$$\begin{aligned} f(a + 3) &= 2 \cdot (a + 3) - (a + 3)^2 = 2a + 6 - (a^2 + 6a + 9) = \\ &= 2a + 6 - a^2 - 6a - 9 = -a^2 - 4a - 3, \end{aligned}$$

továbbá

$$\begin{aligned} f(a - 3) &= 2 \cdot (a - 3) - (a - 3)^2 = 2a - 6 - (a^2 - 6a + 9) = \\ &= 2a - 6 - a^2 + 6a - 9 = -a^2 + 8a - 15, \end{aligned}$$

ezért

$$\begin{aligned} f(a + 3) - f(a - 3) &= -a^2 - 4a - 3 - (-a^2 + 8a - 15) = \\ &= -a^2 - 4a - 3 + a^2 - 8a + 15 = -12a + 12. \end{aligned}$$

4.11. Feladat. Tekintsük az

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 4 - x^2$$

függvényt. Számoljuk ki az $f(b - 2) - f(b + 2)$ értéket, ha $b \in \mathbb{R}$ tetszőleges.

Megoldás:

Mivel

$$\begin{aligned} f(b - 2) &= 4 - (b - 2)^2 = 4 - (b^2 - 4b + 4) = \\ &= 4 - b^2 + 4b - 4 = -b^2 + 4b = -b \cdot (b - 4), \end{aligned}$$

továbbá

$$\begin{aligned} f(b+2) &= 4 - (b+2)^2 = 4 - (b^2 + 4b + 4) = \\ &= 4 - b^2 - 4b - 4 = -b^2 - 4b = -b \cdot (b+4), \end{aligned}$$

ezért

$$\begin{aligned} f(b-2) - f(b+2) &= -b^2 + 4b - (-b^2 - 4b) = \\ &= -b^2 + 4b + b^2 + 4b = 8b. \end{aligned}$$

4.12. Feladat. Határozzuk meg a valós számok halmazának azt a legbővebb részhalmazát, amelyen az

$$f(x) = \sqrt{6-2x}$$

függvény értelmezve van!

Megoldás:

Mivel páros gyökkitevőjű gyök alatt csak nemnegatív szám állhat, ezért az értelmezési tartomány megadásához meg kell oldanunk a

$$6 - 2x \geq 0$$

egyenlőtlenséget, amiből azt kapjuk, hogy $x \leq 3$, így az értelmezési tartomány a $] -\infty; 3]$ intervallum.

4.13. Feladat. Határozzuk meg a valós számok halmazának azt a legbővebb részhalmazát, amelyen az

$$f(x) = \sqrt{4-x^2}$$

függvény értelmezve van!

Megoldás:

Mivel páros gyökkitevőjű gyök alatt csak pozitív szám állhat, ezért az értelmezési tartomány megadásához meg kell oldanunk a

$$4 - x^2 \geq 0$$

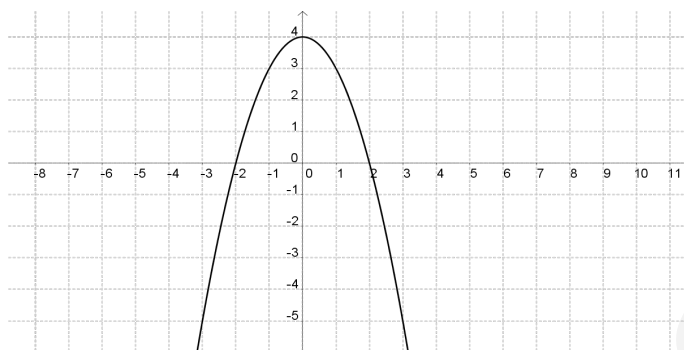
egyenlőtlenséget. Az egyenlőtlenséget grafikusán oldjuk meg. Ehhez első lépésben meghatározzuk az $x \mapsto 4 - x^2$ függvény zérushelyeit:

$$4 - x^2 = 0$$

$$4 = x^2$$

$$\pm 2 = x.$$

Ezután felvázoljuk az $x \mapsto 4 - x^2$ függvény grafikonját:



Leolvashatjuk, hogy az egyenlőtlenség megoldása és így egyben az $f(x)$ függvény értelmezési tartománya:

$$D_f: x \in [-2; 2].$$

4.14. **Feladat.** Határozzuk meg a valós számok halmazának azt a legbővebb részhalmazát, amelyen az

$$f(x) = \lg(4 - 2x)$$

függvény értelmezve van!

Megoldás:

A logaritmus függvény miatt a logaritmus mögötti kifejezésnek pozitívnak kell lenni, azaz meg kell oldanunk a

$$4 - 2x > 0$$

egyenlőtlenséget, amiből azt kapjuk, hogy $x < 2$, így a függvény értelmezési tartománya a $] -\infty; 2[$ intervallum.

4.15. **Feladat.** Határozzuk meg a valós számok halmazának azt a legbővebb részhalmazát, amelyen az

$$f(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$$

függvény értelmezve van!

Megoldás:

A tört miatt $x \neq 0$. A logaritmus függvény miatt a logaritmus mögötti kifejezésnek pozitívnak kell lenni, azaz meg kell oldanunk az

$$1 + \frac{1}{x} > 0$$

egyenlőtlenséget. Egy tört akkor pozitív, ha a számlálója és a nevezője azonos előjelű, így két esetet kell vizsgálnunk.

Ha a számláló és a nevező pozitív, akkor

$$x + 1 > 0 \quad \text{és} \quad x > 0.$$

Ezek megoldásainak közös része a $]0; \infty[$ intervallum.

Ha a számláló és a nevező negatív, akkor

$$x + 1 < 0 \quad \text{és} \quad x < 0.$$

Ezek megoldásainak közös része a $] - \infty; -1[$ intervallum.

Tehát a függvény értelmezési tartománya:

$$D_f: x \in] - \infty, -1[\cup]0, \infty[= \mathbb{R} \setminus [-1, 0].$$

4.16. Feladat. Határozzuk meg az

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 + 8x + 12$$

függvény szélsőértékének típusát, helyét és értékét!

Megoldás:

Másodfokú függvénynek a zérushelyei számtani közepénél van minimuma. Így első lépésben a zérushelyeket határozzuk meg, amihez az

$$x^2 + 8x + 12 = 0$$

másodfokú egyenletet kell megoldanunk. Felírva a másodfokú egyenlet megoldóképletét

$$x_{1,2} = \frac{-8 \pm \sqrt{8^2 - 4 \cdot 1 \cdot 12}}{2} = \frac{-8 \pm 4}{2}$$

adódik, így a zérushelyek $x_1 = -2$ és $x_2 = -6$. Ezek számtani közepe

$$\frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{-2 + (-6)}{2} = \frac{-8}{2} = -4,$$

ami a másodfokú függvény minimum helye. A minimum érték:

$$f(-4) = (-4)^2 + 8 \cdot (-4) + 12 = -4.$$

Megjegyezzük, hogy ha a függvénynek nem lenne zérushelye, akkor teljes négyzetté alakítással határozhatnánk meg a szélsőérték helyét és értékét:

$$f(x) = x^2 + 8x + 12 = (x + 4)^2 - 4,$$

amely akkor a legkisebb, ha $x + 4 = 0$, azaz $x = -4$ és ekkor a függvényérték $f(-4) = -4$.

4.17. **Feladat.** Határozzuk meg az

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = -x^2 + 4x - 3$$

függvény szélsőértékének típusát, helyét és értékét!

Megoldás:

A függvény zérushelyeit az

$$-x^2 + 4x - 3 = 0$$

egyenlet megoldásával kapjuk. A másodfokú egyenlet megoldóképletét alkalmazva

$$x_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 12}}{-2} = \frac{-4 \pm 2}{-2}$$

adódik, így $x_1 = 1$, $x_2 = 3$. Mivel a függvény másodfokú tagjának együtthatója negatív, ezért a függvénynek maximuma van. A maximum helye a zérushelyek számtani közepe, azaz $\frac{1+3}{2} = 2$. A maximum érték:

$$f(2) = -2^2 + 4 \cdot 2 - 3 = 1.$$

Megjegyezzük, hogy ha a függvénynek nem lenne zérushelye, akkor teljes négyzetté alakítással tudjuk meghatározni a szélsőérték helyét és értékét:

$$\begin{aligned} f(x) &= -x^2 + 4x - 3 = -(x^2 - 4x) - 3 = -[(x - 2)^2 - 4] - 3 = \\ &= -(x - 2)^2 + 4 - 3 = -(x - 2)^2 + 1, \end{aligned}$$

aminek akkor a legnagyobb az értéke, ha $x - 2 = 0$, azaz $x = 2$, és ebben az esetben a függvényérték $f(2) = 1$.

4.18. **Feladat.** Vizsgáljuk meg paritás szempontjából az

$$f(x) = \frac{x^2}{\sin 5x}$$

függvényt!

Megoldás:

Felhasználva, hogy a szinusz függvény páratlan, azaz $\sin(-x) = -\sin x$, azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} f(-x) &= \frac{(-x)^2}{\sin(-5x)} = \frac{x^2}{-\sin 5x} = \\ &= -\frac{x^2}{\sin 5x} = -f(x), \end{aligned}$$

így a függvény páratlan.

4.19. **Feladat.** Vizsgáljuk meg paritás szempontjából szerint az

$$f(x) = \frac{x^4}{\cos 2x}$$

függvényt!

Megoldás:

Felhasználva, hogy a koszinusz függvény páros, azaz $\cos(-x) = \cos x$, azt kapjuk, hogy

$$f(-x) = \frac{(-x)^4}{\cos(-2x)} = \frac{x^4}{\cos 2x} = f(x),$$

így a függvény páros.

4.20. **Feladat.** Vizsgáljuk meg paritás szempontjából az

$$f(x) = \frac{1}{x^2} - x$$

függvényt!

Megoldás:

Mivel

$$f(-x) = \frac{1}{(-x)^2} + x = \frac{1}{x^2} + x,$$

ezért $f(-x) \neq f(x)$, illetve $f(-x) \neq -f(x)$. Így a függvény nem páros, nem páratlan.

4.21. **Feladat.** Vizsgáljuk meg paritás szempontjából az

$$f(x) = x + \frac{1}{x}$$

függvényt!

Megoldás:

Mivel

$$f(-x) = -x + \frac{1}{-x} = -x - \frac{1}{x} = -\left(x + \frac{1}{x}\right) = -f(x),$$

így a függvény páratlan.

4.22. **Feladat.** Vizsgáljuk meg paritás szempontjából az

$$f(x) = x^2 + \frac{1}{x^2}$$

függvényt!

Megoldás:

Mivel

$$f(-x) = (-x)^2 + \frac{1}{(-x)^2} = x^2 + \frac{1}{x^2} = f(x),$$

így a függvény páros.

4.23. **Feladat.** Periodikus-e az $f(x) = \sin 2x$ függvény?

Megoldás:

Mivel a szinusz függvény periodikus és a periódusa 2π , ezért az $f(x)$ függvény is periodikus, periódusa π .

4.24. **Feladat.** Adott az ABC háromszög AB és AC oldala, $AB = 10$ [cm], $AC = 6$ [cm]. A két oldal által bezárt φ szöghöz rendeljük hozzá a háromszög területét. Mi lesz az így kapott függvény értelmezési tartománya és értékkészlete?

Megoldás:

Egy háromszög területe a háromszög két oldalának és az általuk bezárt szög szinuszának szorzatának a fele. Tehát a keresett függvény:

$$T(\varphi) = \frac{10 \cdot 6 \cdot \sin \varphi}{2} = 30 \cdot \sin \varphi.$$

Mivel φ egy háromszög egyik szögét jelenti, ezért a $T(\varphi)$ függvény értelmezési tartománya:

$$D_T: \varphi \in]0; \pi[.$$

Mivel a $]0; \pi[$ intervallumon a szinusz függvény értékkészlete a $]0; 1]$ intervallum, ezért a $T(\varphi)$ függvény értékkészlete:

$$T(\varphi) \in]0; 30].$$

4.25. **Feladat.** Határozzuk meg az $f \circ g$ és $g \circ f$ kompozíciókat, ha

$$f(x) = \sqrt{x}, \quad g(x) = x + 7.$$

Adjuk meg a valós számok halmazának azt a legbővebb részhalmazát, amelyen az összetett függvények értelmezve vannak! Oldjuk meg az $f \circ g(x) = g \circ f(x)$

egyenletet!

Megoldás:

Az összetett függvény definícióját használva

$$\begin{aligned} f \circ g(x) &= f(g(x)) = f(x + 7) = \sqrt{x + 7} \\ g \circ f(x) &= g(f(x)) = g(\sqrt{x}) = \sqrt{x} + 7. \end{aligned}$$

Az $f \circ g$ függvény értelmezési tartománya

$$D_{f \circ g} = [-7; \infty[,$$

míg a $g \circ f$ függvény értelmezési tartománya

$$D_{g \circ f} = [0; \infty[.$$

Megoldjuk a

$$\sqrt{x + 7} = \sqrt{x} + 7$$

egyenletet. Mindkét oldalt négyzetre emelve, majd elvégezve az összevonásokat és megfelelően rendezve az egyenletet

$$\begin{aligned} x + 7 &= (\sqrt{x} + 7)^2 \\ x + 7 &= x + 14 \cdot \sqrt{x} + 49 \\ -42 &= 14 \cdot \sqrt{x} \end{aligned}$$

adódik, ami ellentmondás, ugyanis az egyenlet bal oldalán negatív számot kapunk, míg a jobb oldalon egy szám négyzetgyökének pozitív számszorosa szerepel, ami pozitív.

4.26. Feladat. Határozzuk meg az $f \circ g$, $g \circ f$, $f \circ f$, $g \circ g$, $f \circ f \circ f$, $f \circ g \circ f$ kompozíciókat, ha

$$f(x) = \frac{1}{x}, \quad g(x) = x^2 + 2.$$

Megoldás:

Az összetett függvény definícióját használva:

$$f \circ g(x) = f(g(x)) = f(x^2 + 2) = \frac{1}{x^2 + 2}$$

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = g\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x^2} + 2$$

$$f \circ f(x) = f(f(x)) = f\left(\frac{1}{x}\right) = x$$

$$g \circ g(x) = g(g(x)) = g(x^2 + 2) = (x^2 + 2)^2 + 2$$

$$f \circ f \circ f(x) = f \circ (f(f(x))) = f(x) = \frac{1}{x}$$

$$f \circ g \circ f(x) = f \circ (g(f(x))) = f\left(\frac{1}{x^2} + 2\right) = \frac{1}{\frac{1}{x^2} + 2} = \frac{x^2}{1 + 2x^2}.$$

4.27. **Feladat.** Mutassuk meg, hogy az $f: \mathbb{R} \setminus \{\frac{5}{4}\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{5x + 3}{4x - 5}$ függvény inverze önmaga.

Megoldás:

Legyen az f függvény inverze f^{-1} . Ekkor

$$x = f \circ f^{-1}(x) = f\left(\frac{5 \cdot f^{-1}(x) + 3}{4 \cdot f^{-1}(x) - 5}\right).$$

A kapott egyenletet megoldjuk $f^{-1}(x)$ -re. Első lépésben szorozzuk az egyenletet $4f^{-1}(x) - 5$ -el:

$$(4 \cdot f^{-1}(x) - 5) \cdot x = 5 \cdot f^{-1}(x) + 3.$$

Felbontva a zárójelet:

$$x \cdot 4 \cdot f^{-1}(x) - 5x = 5 \cdot f^{-1}(x) + 3.$$

Az egyenletet átrendezve, azaz $f^{-1}(x)$ -et egy oldalra rendezve

$$x \cdot 4 \cdot f^{-1}(x) - 5 \cdot f^{-1}(x) = 3 + 5x.$$

Kiemelve $f^{-1}(x)$ -et

$$f^{-1}(x) \cdot (4x - 5) = 3 + 5x.$$

Mindkét oldalt elosztva $4x - 5$ -el azt kapjuk, hogy az inverzfüggvény:

$$f^{-1}(x) = \frac{3 + 5x}{4x - 5} = \frac{5x + 3}{4x - 5}.$$

4.28. Feladat. Invertálható-e az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + 4$ függvény? Ha igen, határozzuk meg az inverzét! Ábrázoljuk közös koordináta-rendszerben a függvényt és az inverzét! Mi a geometriai kapcsolat a függvény és inverze között?

Megoldás:

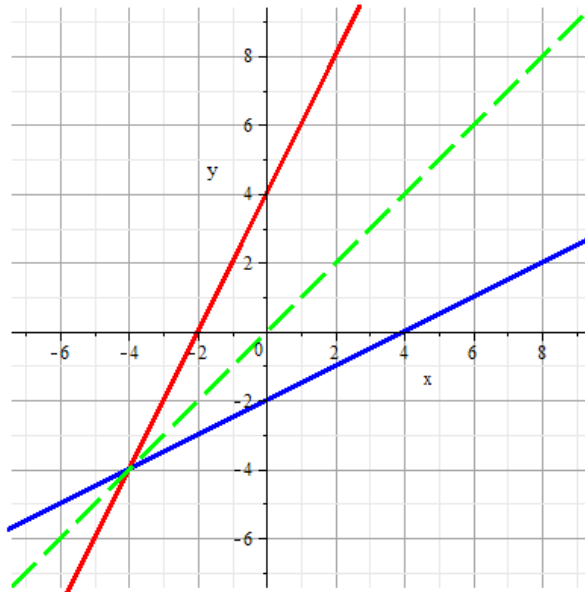
Az f függvény képéből azonnal látszik, hogy injektív, azaz különböző elemekhez különböző elemeket rendel, így invertálható. Ezt algebrai úton is ellenőrizhetjük. Ehhez meg kell vizsgálnunk, hogy ha $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, $x_1 \neq x_2$, akkor $f(x_1) \neq f(x_2)$. Ezt úgy is ellenőrizhetjük, hogy megvizsgáljuk, hogy az $f(x_1) = f(x_2)$ egyenlőségből következik-e, hogy $x_1 = x_2$. Ezen utóbbit fogjuk ellenőrizni. Ha $f(x_1) = f(x_2)$, akkor

$$\begin{aligned} f(x_1) &= f(x_2) \\ 2x_1 + 4 &= 2x_2 + 4 \\ 2x_1 &= 2x_2 \\ x_1 &= x_2, \end{aligned}$$

így a függvény invertálható. Meghatározzuk az inverzfüggvényt:

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x + 4 \\ y &= 2x + 4 && f(x) \text{ helyére } y\text{-t írunk} \\ x &= 2y + 4 && (\text{megcseréljük } x\text{-et és } y\text{-t}) \\ y &= \frac{x - 4}{2} && (\text{kifejezzük } y\text{-t}) \\ f^{-1}(x) &= \frac{x - 4}{2}. \end{aligned}$$

Ezután ábrázolhatjuk a függvényeket:

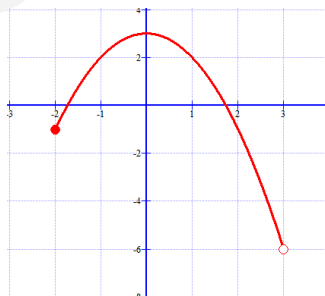


Geometriailag egy függvény inverzét úgy határozhatjuk meg, hogy a függvényt tükrözzük az $y = x$ egyenletű egyenesre.

4.29. **Feladat.** Ábrázoljuk az $f: [-2, 3[\rightarrow \mathbb{R}, f(x) = -x^2 + 3$ függvényt, határozzuk meg az értékkészletét! Invertálható-e a függvény? Ha nem, adjunk meg az értelmezési tartománynak olyan leszűkítését, ahol invertálható, és határozzuk meg, valamint ábrázoljuk az inverzfüggvényt!

Megoldás:

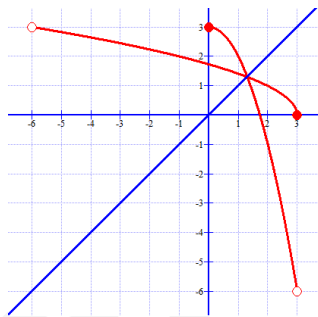
A függvény grafikonja:



Értékkészlete: $R_f =]-6, 3]$. A függvény nem invertálható, ugyanis például $f(-1) = f(1)$. Az értelmezési tartomány $[0, 3[$ részhalmazán a függvény már invertálható. Az f ezen intervallumra való leszűkítését jelöljük h -val. A h függvény értékkészlete $] -6, 3]$, ami az inverzfüggvény értelmezési tartománya lesz. Meghatározzuk az inverzfüggvényt. Az x helyen felvett függvényértéket y -al jelölve, majd megcserélve az x és az y „szerepét” $x = -y^2 + 3$ adódik, amiből y -t kifejezve megkapjuk az inverzfüggvényt

$$h^{-1} = \sqrt{3 - x}.$$

A függvény leszűkítésének és inverzének grafikonja:



4.30. **Feladat.** Invertálható-e az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2^x - 4$ függvény? Ha igen, határozzuk meg az inverzét! Ábrázoljuk közös koordináta-rendszerben a függvényt és az inverzét! Határozzuk meg a függvénynek és inverzének az értelmezési tartományát és értékkészletét!

Megoldás:

Az f függvény képéből azonnal látszik, hogy injektív, azaz különböző elemekhez különböző elemeket rendel, így invertálható.

Az előbbi megállapítást számolással is ellenőrizzük. Ehhez meg kell vizsgálnunk, hogy ha $x_1, x_2 \in \mathbb{R}, x_1 \neq x_2$, akkor $f(x_1) \neq f(x_2)$. Ezt úgy is ellenőrizhetjük, hogy az $f(x_1) = f(x_2)$ egyenlőségből következik-e, hogy $x_1 = x_2$. Ezen utóbbit fogjuk ellenőrizni. Ha $f(x_1) = f(x_2)$, akkor

$$\begin{aligned} f(x_1) &= f(x_2) \\ 2^{x_1} - 4 &= 2^{x_2} - 4 \\ 2^{x_1} &= 2^{x_2} \\ x_1 &= x_2, \end{aligned}$$

így a függvény invertálható. Meghatározzuk az inverzfüggvényt:

$$f(x) = 2^x - 4$$

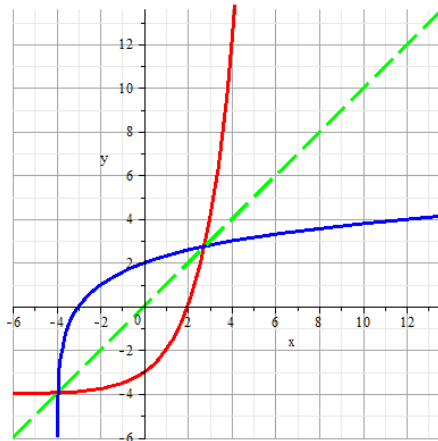
$$y = 2^x - 4 \quad f(x) \text{ helyére } y\text{-t írunk}$$

$$x = 2^y - 4 \quad (\text{megcseréljük } x \text{ és } y\text{-t})$$

$$y = \log_2(x + 4) \quad (\text{kifejezzük } y\text{-t})$$

$$f^{-1}(x) = \log_2(x + 4).$$

Ezután ábrázolhatjuk a függvényeket:



Geometriailag egy függvény inverzét úgy határozhatjuk meg, hogy a függvényt tükrözzük az $y = x$ egyenletű egyenesre. Az f függvény értelmezési tartománya: $D_f = \mathbb{R}$, értékkészlete: $R_f =]2, \infty[$. Az inverzfüggvény értelmezési tartománya:

$$D_{f^{-1}} =]2, \infty[= R_f,$$

továbbá az inverzfüggvény értékkészlete:

$$R_{f^{-1}} = \mathbb{R} = D_f.$$

5. Elemi függvények

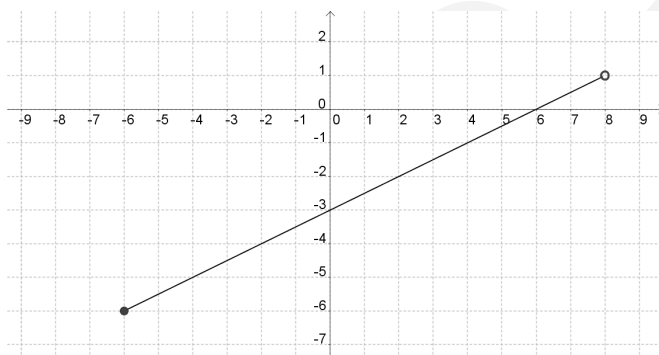
5.1. **Feladat.** Vázoljuk fel az

$$f: [-6; 8[\rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{2}x - 3$$

függvény grafikonját! Adjuk meg az értelmezési tartományát, értékkészletét, zérushelyét, szélsőértékének típusát, helyét és értékét! Korlátos-e a függvény? Vizsgáljuk meg a függvényt monotonitás szempontjából! Hol vesz fel a függvény pozitív értéket? Vizsgáljuk meg a függvényt paritás és periodikusság szempontjából! Injektív-e, szürjektív-e, bijektív-e a függvény? Invertálható-e?

Megoldás:

A függvény grafikonja:



Az f függvény

- értelmezési tartománya: $D_f: x \in [-6; 8[$;
- értékkészlete: $R_f: y \in [-6; 1[$;
- zérushelye: $x = 6$;
- minimum hely: $x = -6$; minimum érték: $y = -6$;
- maximuma nincs;
- korlátos, mert alulról és felülről is korlátos;
- szigorúan monoton növekvő;
- a $]6; 8[$ intervallumon vesz fel pozitív értéket;
- nem páros, nem páratlan;
- nem periodikus;
- injektív, mert különböző elemekhez különböző elemeket rendel;

- nem szürjektív, mert $R_f \neq \mathbb{R}$;
- nem bijektív, mert nem szürjektív;
- invertálható, mert injektív.

5.2. Feladat. Adjuk meg azt a függvényt, amelynek grafikonja egyenes és illeszkedik az $A = (2; 4)$ és $B = (-3; 6)$ koordinátájú pontokra! Határozzuk meg a függvény zérushelyét!

Megoldás:

A keresett függvény grafikonja egyenes, így a függvényt

$$f(x) = m \cdot x + b$$

alakban keressük. Mivel az A pont illeszkedik a függvény grafikonjára, ezért

$$f(2) = m \cdot 2 + b \Rightarrow 4 = 2m + b.$$

Mivel a B pont illeszkedik a függvény grafikonjára, ezért

$$f(-3) = m \cdot (-3) + b \Rightarrow 6 = -3m + b.$$

A fenti két egyenletből álló egyenletrendszer megoldásaként kapjuk meg az m és b ismeretleneket:

$$2m + b = 4$$

$$-3m + b = 6.$$

Az első egyenletből kivonva a második egyenletet azt kapjuk, hogy

$$5m = -2 \Rightarrow m = -\frac{2}{5}.$$

Ezt behelyettesítve például az első egyenletbe

$$-\frac{4}{5} + b = 4 \Rightarrow b = \frac{24}{5}$$

adódik. A keresett függvény tehát:

$$f(x) = -\frac{2}{5}x + \frac{24}{5}.$$

A függvény zérushelye:

$$-\frac{2}{5}x + \frac{24}{5} = 0 \Rightarrow x = 12.$$

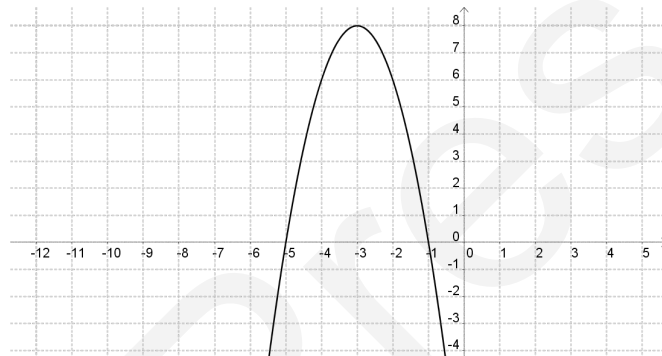
5.3. **Feladat.** Vázoljuk fel az

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = -2 \cdot (x + 3)^2 + 8$$

függvény grafikonját! Adjuk meg az értelmezési tartományát, értékkészletét, zérushelyét, szélsőértékének típusát, helyét és értékét! Korlátos-e a függvény? Vizsgáljuk meg a függvényt monotonitás szempontjából! Vizsgáljuk meg a függvényt paritás és periodikusság és konvexitás szempontjából! Injektív-e, szürjektív-e, bijektív-e a függvény? Invertálható-e?

Megoldás:

A függvény grafikonja:



Az f függvény

- értelmezési tartománya: $D_f: x \in \mathbb{R}$;
- értékkészlete: $R_f: y \in]-\infty; 8]$;
- zérushelye: $x = -5$; $x = -1$;
- minimuma nincs;
- maximum hely: $x = -3$; maximum érték: $y = 8$;
- felülről korlátos, alulról nem korlátos, így nem korlátos;
- szigorúan monoton növekvő, ha $x \in]-\infty; -3]$;
- szigorúan monoton csökkenő, ha $x \in [-3; \infty[$;
- nem páros, nem páratlan;
- nem periódikus;
- konkáv;
- nem injektív, mert például $f(-1) = f(-5)$;
- nem szürjektív, mert $R_f \neq \mathbb{R}$;
- nem bijektív, mert nem injektív, nem szürjektív;

- nem invertálható, mert nem injektív.

5.4. **Feladat.** Vázoljuk fel az

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 - 4x + 3$$

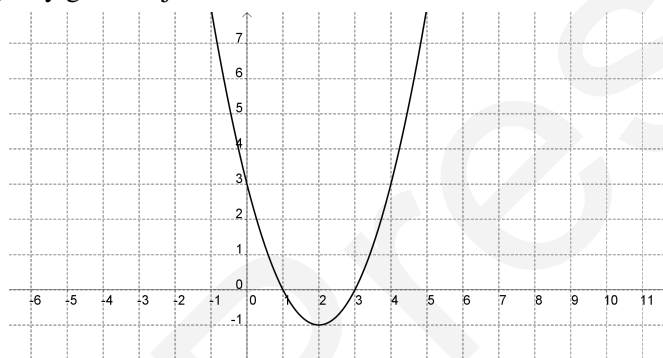
függvény grafikonját!

Megoldás:

Teljes négyzetté alakítva:

$$f(x) = (x - 2)^2 - 4 + 3 = (x - 2)^2 - 1,$$

így a függvény grafikonja:



5.5. **Feladat.** Az $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ függvény grafikonja olyan parabola, amelynek tengelypontja $T = (3; -2)$, továbbá illeszkedik a függvény grafikonjára a $P = (1; 6)$ pont. Adjuk meg az a , b és c paraméterek értékét! Határozzuk meg a függvény zérushelyeit!

Megoldás:

Tekintsük a parabolát

$$f(x) = a \cdot (x - u)^2 + v$$

alakban, ahol $(u; v)$ a parabola tengelypontja. Ekkor

$$f(x) = a \cdot (x - 3)^2 - 2.$$

A függvény grafikonjára illeszkedik az $(1; 6)$ pont, így

$$6 = a \cdot (1 - 3)^2 - 2 \quad \Rightarrow \quad a = 2.$$

Azt kaptuk tehát, hogy

$$f(x) = 2 \cdot (x - 3)^2 - 2 = 2x^2 - 12x + 16,$$

amiből a keresett paraméterek:

$$a = 2; b = -12; c = 16.$$

A függvény zérushelyei a

$$2x^2 - 12x + 16 = 0$$

egyenlet megoldásai, így

$$x_{1,2} = \frac{12 \pm \sqrt{144 - 128}}{4} = \frac{12 \pm 4}{4},$$

azaz $x_1 = 4$, illetve $x_2 = 2$.

5.6. Feladat. Egy téglalap kerülete 200 cm. Írjuk fel a területet az egyik oldal függvényeként! Ábrázoljuk a kapott függvényt úgy, hogy a függvény értelmezési tartománya a valós számok halmazának lehető legbővebb részhalmaza legyen!

Megoldás:

Jelöljük a téglalap oldalait x -el és y -al! Mivel

$$K = 200 \text{ cm},$$

ezért

$$2x + 2y = 200 \quad \Rightarrow \quad x + y = 100,$$

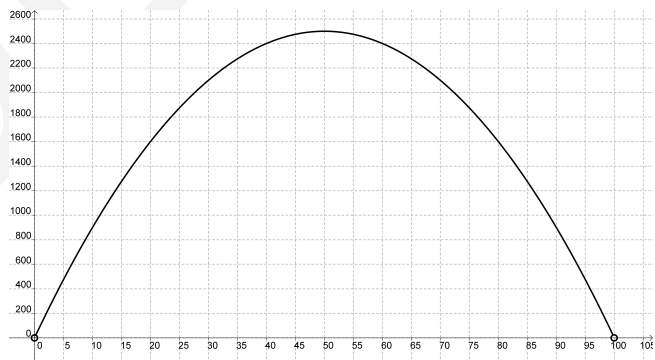
így $y = 100 - x$. Ezt felhasználva a téglalap területe:

$$T(x) = x \cdot y = x \cdot (100 - x) = 100x - x^2.$$

A függvényt teljes négyzetté alakítva

$$T(x) = -1 \cdot (x^2 - 100x) = -[(x - 50)^2 - 2500] = -(x - 50)^2 + 2500.$$

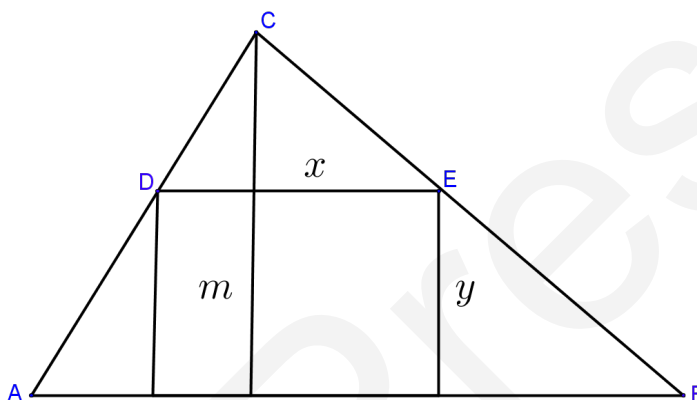
adódik. A függvény grafikonja:



5.7. Feladat. Az ABC háromszög oldalai $AB = 42$, $BC = 40$ és $CA = 26$. Írjunk téglalapot a háromszögbe úgy, hogy a téglalap egyik oldala illeszkedjen a háromszög AB oldalára, másik két csúcsa pedig a háromszög CA , illetve BC oldalára essen. Tekintsük az így beírható téglalapok közül a legnagyobb területűt! Mekkora ennek a téglalapnak az oldalai?

megoldás:

Legyen $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$.



Elsőként a háromszög területét kiszámoljuk Héron-képlettel. Ehhez a kerület:

$$K = 108 \quad \Rightarrow \quad s = \frac{K}{2} = 54.$$

Ezt felhasználva a háromszög területe

$$T = \sqrt{s \cdot (s - a) \cdot (s - b) \cdot (s - c)} = \sqrt{54 \cdot 14 \cdot 28 \cdot 12} = 504.$$

A háromszög területe

$$T = \frac{c \cdot m}{2}$$

alakban is felírható, amiből az adatok behelyettesítésével $1008 = 42 \cdot m$ következik, azaz $m = 24$. Jelöljük a háromszögbe írt legnagyobb területű téglalap vízszintes oldalának hosszát x -el, függőleges oldalának hosszát y -al. Az ABC háromszög hasonló a DEC háromszöghöz, hiszen a szögek megegyeznek, így felírható a

$$\frac{c}{m} = \frac{x}{m - y} \quad \Rightarrow \quad \frac{42}{24} = \frac{x}{24 - y}$$

összefüggés, amit átrendezve

$$1,75 \cdot (24 - y) = x$$

adódik, azaz $x = 42 - 1,75y$. A téglalap területe:

$$T(y) = x \cdot y = (42 - 1,75y) \cdot y = 42y - 1,75y^2.$$

A függvény értelmezési tartománya: $y \in [0; 24]$. A $T(y)$ függvényt teljes négyzetté alakítva

$$\begin{aligned} T(y) &= -1,75 \cdot (y^2 - 24y) = -1,75 \cdot [(y - 12)^2 - 144] = \\ &= -1,75 \cdot (y - 12)^2 + 252 \end{aligned}$$

adódik. Ezen függvény maximuma az $y = 12$ helyen van. Ekkor

$$x = 42 - 1,75 \cdot 12 = 21.$$

Tehát a legnagyobb területű téglalap oldalai 12 és 21 egység, területe:

$$T = 12 \cdot 21 = 252.$$

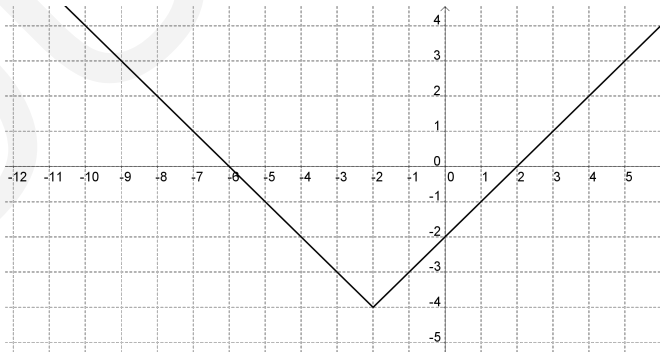
5.8. Feladat. Vázzoljuk fel az

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = |x + 2| - 4$$

függvény grafikonját! Adjuk meg az értelmezési tartományát, értékkészletét, zérushelyét, szélsőértékének típusát, helyét és értékét! Korlátos-e a függvény? Vizsgáljuk meg a függvényt monotonitás szempontjából! Vizsgáljuk meg a függvényt paritás és periodikusság és konvexitás szempontjából! Injektív-e, szürjektív-e, bijektív-e a függvény? Invertálható-e?

Megoldás:

A függvény grafikonja:



Az f függvény

- értelmezési tartománya: $D_f: x \in \mathbb{R}$;
- értékkészlete: $R_f: y \in [-4; \infty[$;
- zérushelye: $x = -6; x = 2$;
- maximuma nincs;
- minimum hely: $x = -2$; minimum érték: $y = -4$;
- alulról korlátos, felülről nem korlátos, így nem korlátos;
- szigorúan monoton csökkenő, ha $x \in] - \infty; -2]$;
- szigorúan monoton növekvő, ha $x \in [-2; \infty[$;
- nem páros, nem páratlan;
- nem periódikus;
- konvex;
- nem injektív, mert például $f(-6) = f(2)$;
- nem szürjektív, mert $R_f \neq \mathbb{R}$;
- nem bijektív, mert nem injektív, nem szürjektív;
- nem invertálható, mert nem injektív.

5.9. **Feladat.** Határozzuk meg az a értékét úgy, hogy az

$$f(x) = a \cdot |x|$$

függvényre $f(-4) = 8$ teljesüljön!

Megoldás:

Mivel $f(-4) = 8$, ezért

$$8 = a \cdot |-4|,$$

így azt kapjuk, hogy $a = 2$.

5.10. **Feladat.** Adjuk meg a b és c értékét úgy, hogy az

$$f(x) = |x + b| + c$$

függvényre $f(0) = 5$ és $f(4) = 3$ teljesüljön!

Megoldás:

Mivel $f(0) = 5$, ezért

$$5 = |0 + b| + c.$$

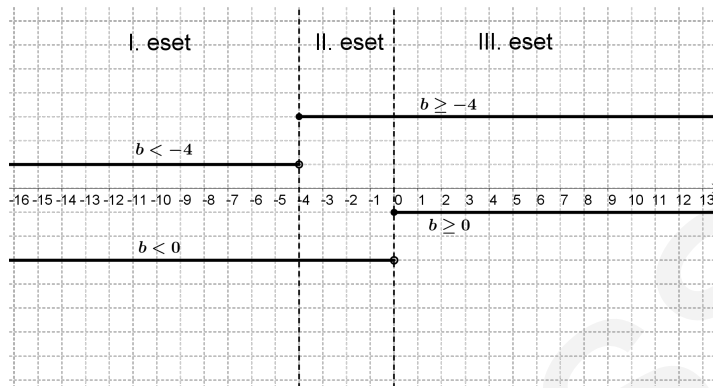
Mivel $f(4) = 3$, ezért

$$3 = |4 + b| + c.$$

A két egyenletet kivonva egymásból azt kapjuk, hogy

$$2 = |b| - |4 + b|.$$

Az egyenlet megoldását 3 esetre kell bontanunk.



Első esetben legyen $b \leq -4$. Ekkor

$$2 = -b - (-4 - b),$$

adódik, amiből az összevonás után $2 = 4$ adódik, ami ellentmondás.

Második esetben legyen $-4 < b \leq 0$. Ekkor a megoldandó egyenlet:

$$2 = -b - (4 + b) \quad \Rightarrow \quad -2b - 4 = 2 \quad \Rightarrow \quad b = -3.$$

A kapott érték megoldás, ugyanis eleget tesz a $-4 < b \leq 0$ feltételnek.

Harmadik esetben legyen $b > 0$. Ekkor a

$$2 = b - (4 + b) \quad \Rightarrow \quad 2 = -4$$

egyenlethez jutunk, ami ellentmondás. Azt kaptuk tehát, hogy egyetlen b érték felel meg a feltételeknek: $b = -3$. Ekkor az

$$5 = |b| + c \quad \Rightarrow \quad 5 = |-3| + c$$

egyenletből $c = 2$ adódik, így azt kapjuk, hogy

$$f(x) = |x - 3| + 2.$$

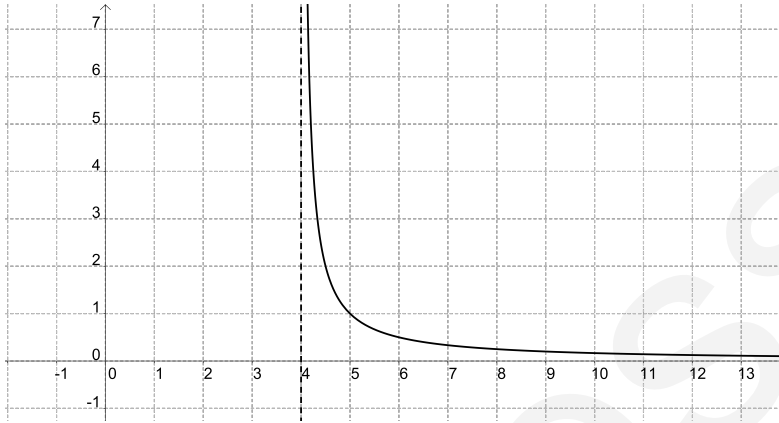
5.11. Feladat. Vázoljuk fel az

$$f:]4; \infty[\rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x - 4}$$

függvény grafikonját! Adjuk meg az értelmezési tartományát, értékkészletét, zérushelyét, szélsőértékének típusát, helyét és értékét! Korlátos-e a függvény? Vizsgáljuk meg a függvényt monotonitás szempontjából! Vizsgáljuk meg a függvényt paritás és perodikusság és konvexitás szempontjából! Injektív-e, szürjektív-e, bijektív-e a függvény? Invertálható-e?

Megoldás:

A függvény grafikonja:

Az f függvény

- értelmezési tartománya: $D_f : x \in]4; \infty[$;
- értékkészlete: $R_f : y \in]0; \infty[$;
- zérushelye: nincs;
- maximuma nincs;
- minimuma nincs;
- alulról korlátos, felülről nem korlátos, így nem korlátos;
- szigorúan monoton csökkenő;
- nem páros, nem páratlan;
- nem periódikus;
- konvex;
- injektív;
- nem szürjektív, mert $R_f \neq \mathbb{R}$;
- nem bijektív, mert nem szürjektív;
- invertálható, mert injektív.

5.12. **Feladat.** Tekintsük az

$$f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x} + b$$

függvényt! Határozzuk meg a b valós szám értékét úgy, hogy $f(2) = 1,5$ teljesüljön!

Megoldás:

Mivel $f(2) = 1, 5$, ezért

$$\frac{3}{2} = \frac{1}{2} + b.$$

Az egyenlet megoldására azt kapjuk, hogy $b = 1$.

5.13. Feladat. Tekintsük az

$$f: \mathbb{R} \setminus \{-b\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x+b} + c$$

függvényt! Határozzuk meg a b és c valós számok értékét úgy, hogy

$$f(2) = -\frac{11}{4} \text{ és } f(4) = -\frac{17}{6}$$

teljesüljön!

Megoldás:

Mivel $f(2) = -\frac{11}{4}$, ezért

$$-\frac{11}{4} = \frac{1}{2+b} + c.$$

Mivel $f(4) = -\frac{17}{6}$, ezért

$$-\frac{17}{6} = \frac{1}{4+b} + c.$$

Az első egyenletből vonjuk ki a második egyenletet:

$$\frac{1}{b+2} - \frac{1}{b+4} = \frac{1}{12}.$$

Az egyenletet szorozva a közös nevezővel azt kapjuk, hogy

$$12 \cdot (b+4 - b-2) = (b+2) \cdot (b+4).$$

A zárójelek felbontása után

$$24 = b^2 + 6b + 8 \quad \Rightarrow \quad b^2 + 6b - 16 = 0$$

adódik. A másodfokú egyenlet megoldóképletével azt kapjuk, hogy

$$b_{1,2} = \frac{-6 \pm \sqrt{36 + 64}}{2} = \frac{-6 \pm 10}{2},$$

így $b_1 = -8$, illetve $b_2 = 2$. A kapott értékeket visszahelyettesítjük például az

$$-\frac{11}{4} = \frac{1}{2+b} + c$$

egyenletbe. A $b_1 = -8$ érték behelyettesítése után

$$-\frac{11}{4} = \frac{1}{-6} + c$$

adódik, amiből azt kapjuk, hogy $c_1 = -\frac{31}{12}$. A $b_2 = 2$ érték behelyettesítése után

$$-\frac{11}{4} = \frac{1}{4} + c$$

adódik, amiből azt kapjuk, hogy $c_2 = -3$. Tehát két olyan függvény is van, amelyik megfelel a feltételeknek:

$$f_1(x) = \frac{1}{x-8} - \frac{31}{12}; \quad f_2(x) = \frac{1}{x+2} - 3.$$

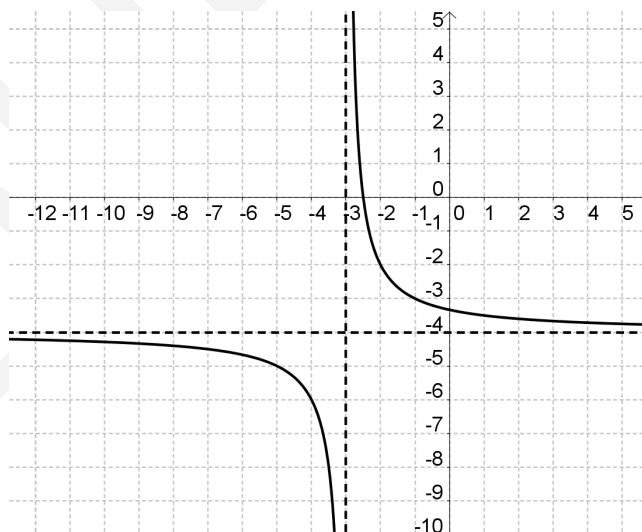
5.14. Feladat. Vázoljuk fel az

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{2}{x+3} - 4$$

függvény grafikonját! Adjuk meg az értelmezési tartományát, értékkészletét, zérushelyét, szélsőértékének típusát, helyét és értékét! Korlátos-e a függvény? Vizsgáljuk meg a függvényt monotonitás szempontjából! Vizsgáljuk meg a függvényt paritás és periodikusság és konvexitás szempontjából! Injektív-e, szürjektív-e, bijektív-e a függvény? Invertálható-e?

Megoldás:

A függvény grafikonja:



Az f függvény

- értelmezési tartománya: $D_f: x \in \mathbb{R} \setminus \{-3\}$;
- értékkészlete: $R_f: y \in \mathbb{R} \setminus \{-4\}$;
- zérushelye: $-2, 5$;
- maximuma nincs;
- minimum nincs;
- alulról nem korlátos, felülről nem korlátos, így nem korlátos;
- szigorúan monoton csökkenő az értelmezési tartományának minden pontjában;
- nem páros, nem páratlan;
- nem periódikus;
- $] - \infty; -3[$ intervallumon konkáv, $] - 3; \infty[$ intervallumon konvex;
- injektív;
- nem szürjektív, mert $R_f \neq \mathbb{R}$;
- nem bijektív, mert nem szürjektív;
- invertálható, mert injektív.

5.15. **Feladat.** Vázoljuk fel az

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{x-1}{x-2}$$

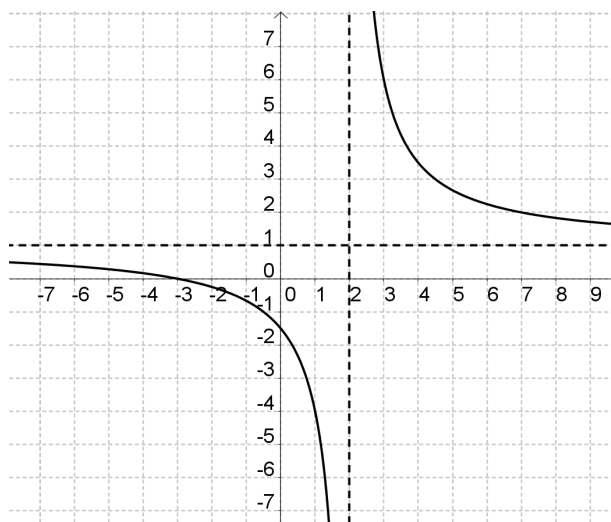
függvény grafikonját! Adjuk meg az értelmezési tartományát, értékkészletét, zérushelyét, szélsőértékének típusát, helyét és értékét! Korlátos-e a függvény? Vizsgáljuk meg a függvényt monotonitás szempontjából! Vizsgáljuk meg a függvényt paritás és periodikusság és konvexitás szempontjából! Injektív-e, szürjektív-e, bijektív-e a függvény? Invertálható-e?

Megoldás:

Első lépésben alakítsuk át a függvényt úgy, hogy a függvénytranszformációs lépések leolvashatóak legyenek:

$$f(x) = \frac{x-1}{x-2} = \frac{x-2+1}{x-2} = \frac{1}{x-2} + 1.$$

A függvény grafikonja:



Az f függvény

- értelmezési tartománya: $D_f: x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$;
- értékészlete: $R_f: y \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$;
- zérushelye: -3 ;
- maximuma nincs;
- minimum nincs;
- alulról nem korlátos, felülről nem korlátos, így nem korlátos;
- szigorúan monoton csökkenő az értelmezési tartományának minden pontjában;
- nem páros, nem páratlan;
- nem periódikus;
- $] -\infty; 2[$ intervallumon konkáv, $]2; \infty[$ intervallumon konvex;
- injektív;
- nem szürjektív, mert $R_f \neq \mathbb{R}$;
- invertálható, mert injektív.

5.16. **Feladat.** Vázoljuk fel az

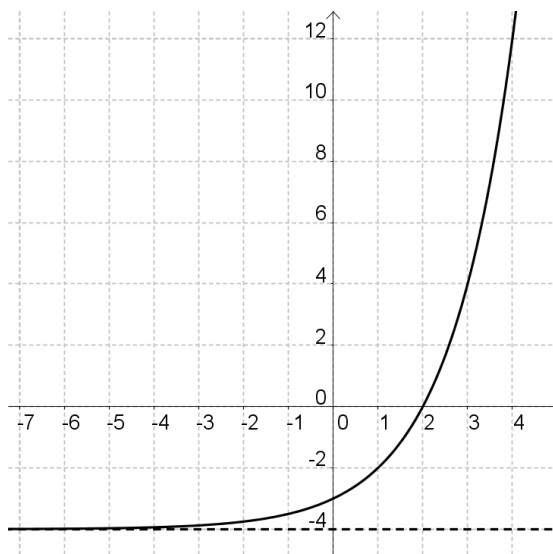
$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2^x - 4$$

függvény grafikonját! Adjuk meg az értelmezési tartományát, értékészletét, zérushelyét, szélsőértékének típusát, helyét és értékét! Korlátos-e a függvény? Vizsgáljuk meg a függvényt monotonitás szempontjából! Vizsgáljuk meg a

függvényt paritás és perodikuság és konvexitás szempontjából! Injektív-e, szürjektív-e, bijektív-e a függvény? Invertálható-e?

Megoldás:

A függvény grafikonja:



Az f függvény

- értelmezési tartománya: $D_f : x \in \mathbb{R}$;
- értékkészlete: $R_f : y \in]4; \infty[$;
- zérushelye: $x = 2$;
- maximuma nincs;
- minimum nincs;
- alulról korlátos, felülről nem korlátos, így nem korlátos;
- szigorúan monoton növekvő;
- nem páros, nem páratlan;
- nem periódikus;
- konvex;
- injektív;
- nem szürjektív, mert $R_f \neq \mathbb{R}$;
- invertálható, mert injektív.

5.17. **Feladat.** Tekintsük az

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2^x + b$$

függvényt! Adjuk meg az a valós szám értékét úgy, hogy $f(3) = 6$ teljesüljön!

Megoldás:

Mivel $f(3) = 6$, ezért

$$6 = 2^3 + b,$$

amiből azt kapjuk, hogy $b = -2$.

5.18. **Feladat.** Tekintsük az

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2^{x+a} + b$$

függvényt! Adjuk meg az a és a b valós számok értékét úgy, hogy $f(2) = 12$ és $f(3) = 28$ teljesüljön!

Megoldás:

Mivel $f(2) = 12$, ezért

$$12 = 2^{a+2} + b.$$

Mivel $f(3) = 28$, ezért

$$28 = 2^{a+3} + b.$$

A második egyenletből kivonva az első egyenletet azt kapjuk, hogy

$$16 = 2^{a+3} - 2^{a+2}.$$

Az azonos alapok hatványának szorzására vonatkozó szabály alkalmazásával

$$16 = 8 \cdot 2^a - 4 \cdot 2^a \quad \Rightarrow \quad 2^a = 4$$

adódik, amiből azt kapjuk, hogy $a = 2$. Ezt felhasználva a

$$12 = 2^{a+2} + b \quad \Rightarrow \quad 12 = 16 + b$$

egyenletből azt kapjuk, hogy $b = -4$. A paraméterek ismeretében azt kapjuk, hogy

$$f(x) = 2^{x+2} - 4.$$

5.19. **Feladat.** Vázoljuk fel az

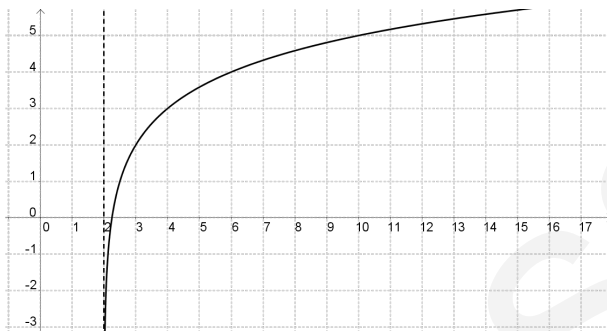
$$f:]2; \infty[\rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \log_2(x-2) + 2$$

függvény grafikonját! Adjuk meg az értelmezési tartományát, értékkészletét, zérushelyét, szélsőértékének típusát, helyét és értékét! Korlátos-e a függvény? Vizsgáljuk meg a függvényt monotonitás szempontjából! Vizsgáljuk meg a függvényt paritás és perodikusság és konvexitás szempontjából! Injektív-e,

szürjektív-e, bijektív-e a függvény? Invertálható-e?

Megoldás:

A függvény grafikonja:



A zérushely meghatározásához megoldjuk a

$$\log_2(x - 2) + 2 = 0$$

egyenletet. Az egyenletet rendezve

$$\log_2(x - 2) = -2 \quad \Rightarrow \quad \log_2(x - 2) = \log_2 \frac{1}{4}$$

adódik, amiből a $x \mapsto \log_2 x$ függvény szigorú monotonitás miatt azt kapjuk, hogy $x = 2, 25$.

Az f függvény

- értelmezési tartománya: $D_f: x \in]2; \infty[$;
- értékészlete: $R_f: y \in \mathbb{R}$;
- zérushelye: $x = 2, 25$;
- maximuma nincs;
- minimuma nincs;
- alulról nem korlátos nem korlátos, felülről nem korlátos, így nem korlátos;
- szigorúan monoton növekvő;
- nem páros, nem páratlan;
- nem periódikus;
- konkáv;
- injektív;
- szürjektív, mert $R_f = \mathbb{R}$;

- bijektív, mert injektív és szürjektív;
- invertálható, mert injektív.

5.20. **Feladat.** Adjuk meg az a valós szám értékét úgy, hogy az

$$f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x + a$$

függvényre $f(8) = 2$ teljesüljön!

Megoldás:

Mivel $f(8) = 2$, ezért

$$2 = \log_{\frac{1}{2}} 8 + a \quad \Rightarrow \quad 2 = -3 + a,$$

így $a = 5$.

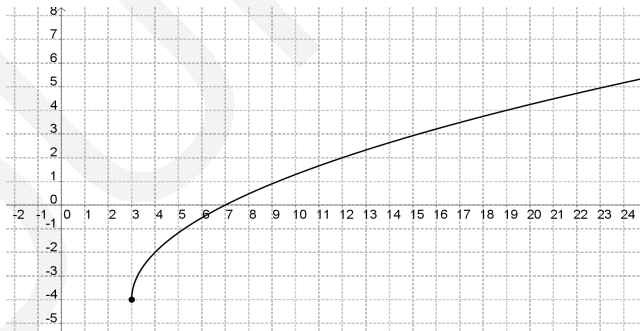
5.21. **Feladat.** Vázoljuk fel az

$$f: [3; \infty[\rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2 \cdot \sqrt{x-3} - 4$$

függvény grafikonját! Adjuk meg az értelmezési tartományát, értékészletét, zérushelyét, szélsőértékének típusát, helyét és értékét! Korlátos-e a függvény? Vizsgáljuk meg a függvényt monotonitás szempontjából! Vizsgáljuk meg a függvényt paritás és periodikusság és konvexitás szempontjából! Injektív-e, szürjektív-e a függvény? Invertálható-e?

Megoldás:

A függvény grafikonja:



Az f függvény

- értelmezési tartománya: $D_f: x \in [3; \infty[$;
- értékészlete: $R_f: y \in [-4; \infty[$;
- zérushelye: $x = 7$;

- maximuma nincs;
- minimum helye: $x = 3$, minimum értéke: $y = -4$;
- alulról korlátos, felülről nem korlátos, így nem korlátos;
- szigorúan monoton növekvő;
- nem páros, nem páratlan;
- nem periódikus;
- konkáv;
- injektív;
- nem szürjektív, mert $R_f \neq \mathbb{R}$;
- invertálható, mert injektív.

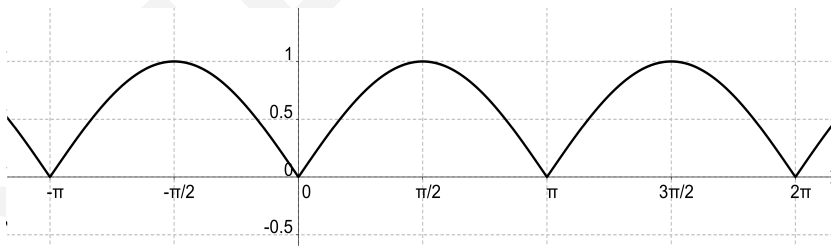
5.22. **Feladat.** Vázoljuk fel az

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = |\sin x|$$

függvény grafikonját! Adjuk meg az értelmezési tartományát, értékkészletét, zérushelyét, szélsőértékek típusát, helyét és értékét! Korlátos-e a függvény? Vizsgáljuk meg a függvényt monotonitás szempontjából! Vizsgáljuk meg a függvényt paritás és periodikusság és konvexitás szempontjából! Injektív-e, szürjektív-e a függvény? Invertálható-e?

Megoldás:

A függvény grafikonja:



Az f függvény

- értelmezési tartománya: $D_f: x \in \mathbb{R}$;
- értékkészlete: $R_f: y \in [0; 1]$;
- zérushelye: $x = k \cdot \pi$;
- maximum helye: $x = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$, maximum értéke: $y = 1$;
- minimum helye: $x = k \cdot \pi$, minimum értéke: $y = 0$;
- alulról korlátos, felülről korlátos, így korlátos;

- a $\left[k \cdot \pi; \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi \right]$ intervallumon szigorúan monoton növekvő;
- a $\left[\frac{\pi}{2} + k \cdot \pi; \pi + k \cdot \pi \right]$ intervallumon szigorúan monoton csökkenő;
- páros, mert szimmetrikus az y tengelyre;
- periódikus, periódusa: π ;
- konkáv;
- nem injektív;
- nem szürjektív, mert $R_f \neq \mathbb{R}$;
- nem invertálható, mert nem injektív.

A fentiekben mindenhol $k \in \mathbb{Z}$.

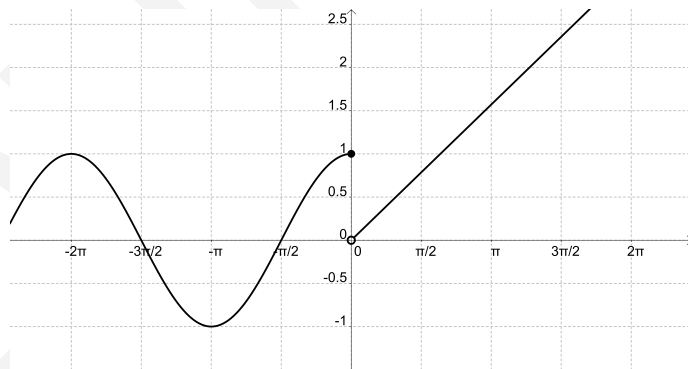
5.23. **Feladat.** Vázzoljuk fel az

$$f(x) = \begin{cases} \cos x, & \text{ha } x \leq 0; \\ x, & \text{ha } x > 0 \end{cases}$$

függvény grafikonját! Adjuk meg az értelmezési tartományát, értékkészletét, zérushelyeit, szélsőértékeinek típusát, helyét és értékét! Korlátos-e a függvény? Vizsgáljuk meg a függvényt paritás és periodikusság szempontjából! Injektív-e, szürjektív-e, bijektív-e a függvény? Invertálható-e?

Megoldás:

A függvény grafikonja:



Az f függvény

- értelmezési tartománya: $D_f: x \in \mathbb{R}$;
- értékkészlete: $R_f: y \in [-1; \infty[$;

- zérushelye: $x = -\frac{\pi}{2} - k \cdot \pi \quad (k \in \mathbb{N})$;
- maximuma nincs;
- minimum helye: $x = -\pi - 2k \cdot \pi \quad (k \in \mathbb{N})$;
- minimum érték: $y = -1$;
- alulról korlátos, nem felülről korlátos, így nem korlátos;
- nem páros, nem páratlan;
- nem periódikus;
- nem injektív;
- nem szürjektív, mert $R_f \neq \mathbb{R}$;
- nem bijektív;
- nem invertálható, mert nem injektív.

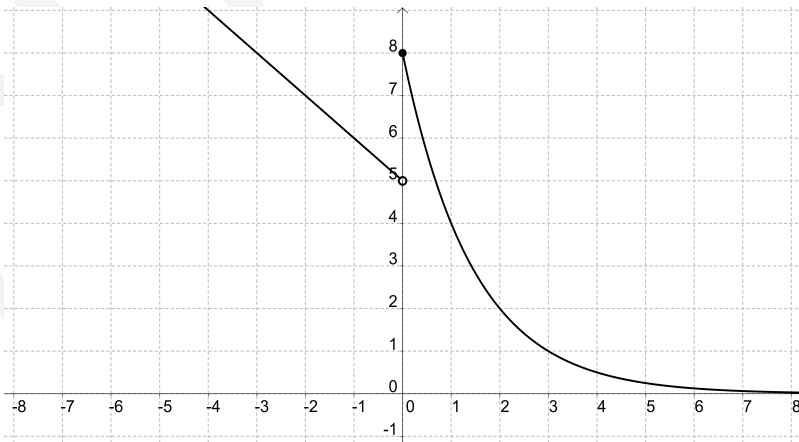
5.24. **Feladat.** Vázoljuk fel az

$$f(x) = \begin{cases} 5 - x, & \text{ha } x < 0; \\ 8 \cdot 2^{-x}, & \text{ha } x > 0 \end{cases}$$

függvény grafikonját! Adjuk meg az értelmezési tartományát, értékkészletét, zérushelyeit, szélsőértékeinek típusát, helyét és értékét! Korlátos-e a függvény? Vizsgáljuk meg a függvényt paritás és periodikusság szempontjából! Injektív-e, szürjektív-e, bijektív-e a függvény? Invertálható-e? Adjuk meg az értelmezési tartománynak azt az x elemét, amelyre $f(x) = 4$ teljesül!

Megoldás:

A függvény grafikonja:



Az f függvény

- értelmezési tartománya: $D_f: x \in \mathbb{R}$;
- értékkészlete: $R_f: y \in]0; \infty[$;
- zérushelye: nincs;
- maximuma nincs;
- minimuma nincs;
- alulról korlátos, nem felülről korlátos, így nem korlátos;
- nem páros, nem páratlan;
- nem periódikus;
- nem injektív;
- nem szürjektív, mert $R_f \neq \mathbb{R}$;
- nem bijektív;
- nem invertálható, mert nem injektív.

A függvény grafikonjáról leolvasható, hogy az $f(x) = 4$ egyenlet egyetlen megoldása $x = 1$.

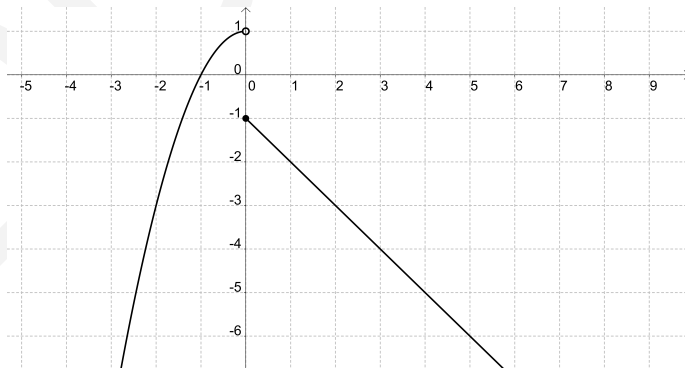
5.25. **Feladat.** Vázoljuk fel az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + 1, & \text{ha } x < 0 \\ -x - 1, & \text{ha } x \geq 0. \end{cases}$$

függvény grafikonját! Határozzuk meg az értelmezési tartományát, értékkészletét, zérushelyét, a szuprémumát, infimumát, maximumát, minimumát!

Megoldás:

A függvény grafikonja:



Az f függvény

- értelmezési tartománya: $D_f = \mathbb{R}$;
- értékészlete: $R_f =] - \infty, 1[$;
- zérushelye: $x = -1$;
- szuprémuma: $\sup(f) = 1$;
- infimuma: $\inf(f) = -\infty$;
- maximuma: $\max(f)$: nincs;
- minimuma: $\min(f)$: nincs.

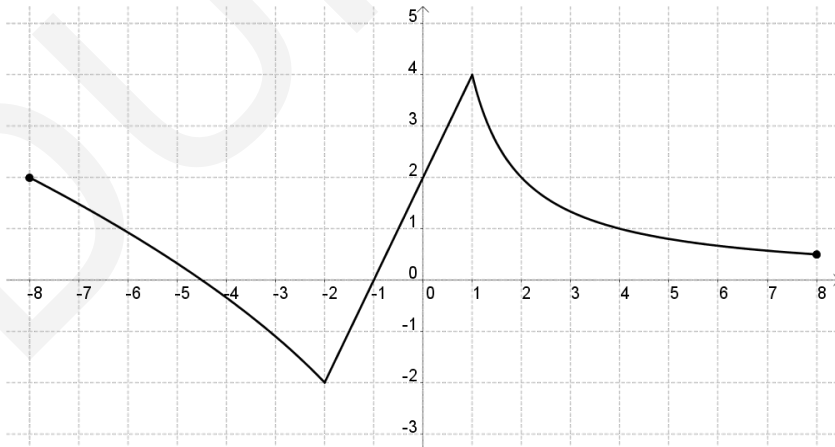
5.26. **Feladat.** Vázoljuk fel az $f: [-8; 8] \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 2 \cdot \sqrt{-2x} - 6, & \text{ha } -8 \leq x < -2 \\ 2x + 2, & \text{ha } -2 < x < 1 \\ \frac{4}{x}, & \text{ha } 1 < x \leq 8. \end{cases}$$

függvény grafikonját! Határozzuk meg az értelmezési tartományát, értékészletét, zérushelyét, a szuprémumát, infimumát, szélsőértékek típusát, helyét és értékét! Vizsgáljuk meg a függvény monotonitását, korlátosságát, paritását és periodikusságát! Vizsgáljuk meg a függvényt injektivitás, szürjektivitás, bijektivitás szerint! Invertálható-e a függvény?

Megoldás:

A függvény grafikonja:



Az f függvény

- értelmezési tartománya: $D_f: x \in [-8; 8]$;
- értékkészlete: $R_f: y \in [-2; 4]$;
- zérushelye: $x_1 = -4, 5; x_2 = -2$;
- szuprémuma: $\sup(f) = 4$;
- infimuma: $\inf(f) = -2$;
- maximum helye: $x = 1$, maximum értéke: $y = 4$;
- minimum helye: $x = -2$, minimum értéke: $y = -2$;
- szigorúan monoton növekvő, ha $x \in [-8; -2] \cup [1; 8]$;
- szigorúan monoton csökkenő, ha $x \in [-2; 1]$;
- alulról korlátos, felülről korlátos, így korlátos;
- nem páros, nem páratlan;
- nem periódikus;
- nem injektív, mert például $f(-4, 5) = f(-1) = 0$;
- nem szürjektív, mert $R_f \neq \mathbb{R}$;
- nem bijektív;
- nem invertálható, mert nem injektív.

5.27. **Feladat.** Adjuk meg

$$\operatorname{tg} \left(\arccos \frac{1}{3} \right)$$

pontos értékét!

Megoldás:

Tekintsük elsőként a

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

azonosságot. Osszuk el mindkét oldalt $\cos^2 x$ -el és alkalmazzuk, hogy minden

$$x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$$

esetén

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}.$$

Ekkor

$$\operatorname{tg}^2 x + 1 = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Ezt felhasználva

$$\operatorname{tg}^2(\arccos x) = \frac{1}{x^2} - 1,$$

így minden $|x| \leq 1$ esetén

$$\operatorname{tg}(\arccos x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{|x|}$$

teljesül. Ebből azt kapjuk, hogy

$$\operatorname{tg}\left(\arccos\frac{1}{3}\right) = \frac{\sqrt{1-\frac{1}{9}}}{\frac{1}{3}} = \sqrt{\frac{8}{9}} \cdot 3 = 2 \cdot \sqrt{2}.$$

5.28. Feladat. Számoljuk ki

$$\operatorname{ch}(\ln 2)$$

pontos értékét!

Megoldás:

Felhasználva a $\operatorname{ch}x$ függvény definícióját azt kapjuk, hogy

$$\operatorname{ch}(\ln 2) = \frac{e^{\ln 2} + e^{-\ln 2}}{2} = \frac{2 + \frac{1}{2}}{2} = \frac{5}{4}.$$

5.29. Feladat. Számoljuk ki

$$\operatorname{sh}(\ln 3)$$

pontos értékét!

Megoldás:

Felhasználva a $\operatorname{sh}x$ függvény definícióját azt kapjuk, hogy

$$\operatorname{sh}(\ln 3) = \frac{e^{\ln 3} - e^{-\ln 3}}{2} = \frac{3 - \frac{1}{3}}{2} = \frac{4}{3}.$$

5.30. Feladat. Oldjuk meg a valós számok halmazán az

$$\operatorname{sh}^2 x - 7 \cdot \operatorname{ch}x + 11 = 0$$

egyenletet!

Megoldás:

Felhasználva, hogy

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$$

azt kapjuk, hogy

$$\operatorname{ch}^2 x - 7 \cdot \operatorname{ch}x + 10 = 0.$$

Vezessük be a $\operatorname{ch}x = k$ jelölést! Ekkor a

$$k^2 - 7k + 10 = 0$$

egyenlethez jutunk, amelyet a másodfokú egyenlet megoldóképletével megoldva azt kapjuk, hogy

$$k_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 40}}{2} = \frac{7 \pm 3}{2},$$

így $k_1 = 2$, illetve $k_2 = 5$. Mivel $\operatorname{ch} x = k$, ezért egyrészt $\operatorname{ch} x = 2$, másrészt $\operatorname{ch} x = 5$.

- Elsőként legyen $\operatorname{ch} x = 2$. Ekkor a $\operatorname{ch} x$ függvény definíciójából azt kapjuk, hogy

$$\frac{e^x + e^{-x}}{2} = 2 \quad \Rightarrow \quad \frac{e^x + \frac{1}{e^x}}{2} = 2.$$

Vezessük be most az $e^x = a$ jelölést! Ekkor az

$$a + \frac{1}{a} = 4 \quad \Rightarrow \quad a^2 - 4a + 1 = 0$$

egyenlethez jutunk. Az egyenlet megoldására

$$a_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4}}{2} = \frac{4 \pm 2 \cdot \sqrt{3}}{2} = 2 \pm \sqrt{3}$$

adódik. Mivel $e^x = a$, ezért egyrészt

$$e^x = 2 + \sqrt{3},$$

amiből azt kapjuk, hogy

$$x_1 = \ln(2 + \sqrt{3}),$$

másrészt pedig

$$e^x = 2 - \sqrt{3}$$

miatt

$$x_2 = \ln(2 - \sqrt{3}).$$

- Második esetben $\operatorname{ch} x = 5$. Ekkor a $\operatorname{ch} x$ függvény definíciójából azt kapjuk, hogy

$$\frac{e^x + e^{-x}}{2} = 5 \quad \Rightarrow \quad \frac{e^x + \frac{1}{e^x}}{2} = 5.$$

Vezessük be most az $e^x = b$ jelölést! Ekkor az

$$b + \frac{1}{b} = 10 \quad \Rightarrow \quad b^2 - 10b + 1 = 0$$

egyenlethez jutunk. Az egyenlet megoldására

$$b_{1,2} = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 4}}{2} = \frac{10 \pm 4 \cdot \sqrt{6}}{2} = 5 \pm 2 \cdot \sqrt{6}$$

adódik. Mivel egyrészt $e^x = b$, ezért

$$e^x = 5 + 2 \cdot \sqrt{6} \quad \Rightarrow \quad x_3 = \ln(5 + 2 \cdot \sqrt{6}),$$

másrészt pedig

$$e^x = 5 - 2 \cdot \sqrt{6}$$

miatt

$$x_4 = \ln(5 - 2 \cdot \sqrt{6}).$$

5.31. Feladat. Oldjuk meg a valós számok halmazán az

$$\operatorname{arctg} \frac{x \cdot (2 - x)}{9} + \operatorname{arctg}(1 - x) = \frac{\pi}{4}$$

egyenletet!

Megoldás:

Első lépésben rendezzük át az egyenletet:

$$\operatorname{arctg} \frac{x \cdot (2 - x)}{9} = \frac{\pi}{4} - \operatorname{arctg}(1 - x).$$

Vegyük mindkét oldal tangensét:

$$\operatorname{tg} \left(\operatorname{arctg} \frac{x \cdot (2 - x)}{9} \right) = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - \operatorname{arctg}(1 - x) \right).$$

Felhasználva, hogy

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta},$$

majd alkalmazva, hogy

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}(x)) = x$$

azt kapjuk, hogy

$$\frac{x \cdot (2 - x)}{9} = \frac{1 - (1 - x)}{1 + 1 \cdot (1 - x)}.$$

Az egyenletet rendezve

$$\frac{2x - x^2}{9} = \frac{x}{2 - x}$$

$$x \cdot (2 - x)^2 = 9x$$

adódik. A kapott egyenletet nullára rendezve, majd szorzattá alakítva

$$x \cdot (2 - x)^2 - 9x = 0$$

$$x \cdot [(2 - x)^2 - 9] = 0$$

adódik. Egy szorzat úgy lehet zérus, ha valamelyik tényezője zérus, így azt kapjuk, hogy $x = 0$ vagy

$$(2 - x)^2 - 9 = 0 \quad \Rightarrow \quad 2 - x = \pm 3,$$

amiből $x = -1$ vagy $x = 5$ adódik. A kapott eredményeket visszahelyettesítve az eredeti egyenletbe azt kapjuk, hogy $x = -1$, illetve $x = 0$ megoldás, míg $x = 5$ nem megoldás.

6. Függvények gazdasági alkalmazásai

6.1. **Feladat.** Egy termék keresleti függvénye

$$f(p) = 150 - 3p,$$

kínálati függvénye

$$S(p) = 2p - 20.$$

Mindkét esetben a mennyiséget darabban, az árat forintban értjük.

- Határozzuk meg az egyensúlyi árat és az egyensúlyi mennyiséget!
- Ábrázoljuk közös koordinátarendszerben a keresleti és kínálati függvényt, jelöljük az egyensúlyi mennyiséget és az egyensúlyi árat!

Megoldás:

- Az egyensúlyi árat a keresleti és kínálati függvény metszéspontja adja. Tehát az egyensúlyi árat az $f(p) = S(p)$ egyenlet megoldásával kapjuk meg:

$$150 - 3p = 2p - 20.$$

Az egyenlet rendezése után

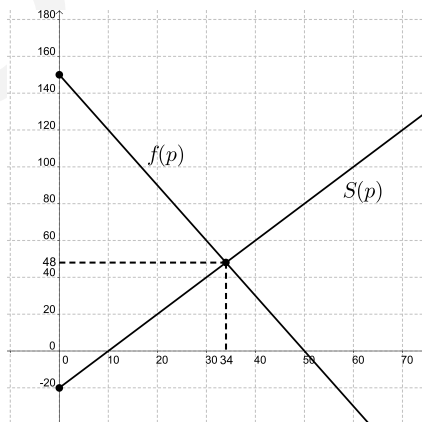
$$5p = 170$$

adódik, amiből azt kapjuk, hogy az egyensúlyi ár $p = 34$. Az egyensúlyi mennyiségre

$$f(34) = 150 - 3 \cdot 34 = 48$$

adódik.

- A keresleti és kínálati függvény grafikonja:



6.2. **Feladat.** Egy szupermarket egy bizonyos típusú DVD-lejátszóból egy hónap alatt 3 000 darabot értékesít 485 \$ áron. Amennyiben az árat 20 \$-ral csökkentik, úgy az eladott mennyiség 250 darabbal növekszik. Az eladott mennyiség és az eladási ár között elsőfokú függvénykapcsolatot feltételezünk!

- Határozzuk meg a keresleti függvényt!
- Adjuk meg azt az árat, amelyhez tartozó kereslet 0 darab!
- Adjuk meg az inverz keresleti függvényt!

Megoldás:

- A keresleti függvény

$$f(p) = a \cdot p + b$$

alakban keressük. A függvény grafikonjára illeszkednek a (485; 3 000) és a (465; 3 250) pontok, így teljesülnek a

$$3\,000 = 485a + b$$

és a

$$3\,250 = 465a + b$$

egyenletek. Az első egyenletből kivonva a másodikat azt kapjuk, hogy

$$250 = -20a \quad \Rightarrow \quad a = -\frac{250}{20} = -12,5.$$

Ezt behelyettesítve az első egyenletbe

$$3\,000 = -485 \cdot 12,5 + b \quad \Rightarrow \quad b = 9\,062,5$$

adódik. A keresleti függvény tehát:

$$f(p) = -12,5p + 9\,062,5.$$

- Valójában a keresleti függvény zérushelyét keressük, azaz az $f(p) = 0$ egyenlet megoldását:

$$-12,5p + 9\,062,5 = 0 \quad \Rightarrow \quad p = 725.$$

Azt kaptuk tehát, hogy 725 \$-os ár esetén már senki sem vásárolja meg a terméket.

- A keresleti mennyiséget q -val jelölve, az előbbieket felhasználásával felírhatjuk a

$$q = -12,5p + 9\,062,5$$

összefüggést. Az inverz keresleti függvény meghatározásához valójában a fenti egyenletből kell kifejeznünk a p -t:

$$p = \frac{q - 9\,062,5}{-12,5} \quad \Rightarrow \quad q = -0,08q + 725.$$

Az inverz keresleti függvény tehát:

$$f^{-1}(p) = -0,08p + 725.$$

6.3. **Feladat.** Egy termék keresleti függvénye

$$f(p) = 200 - p,$$

kínálati függvénye

$$S(p) = p.$$

- Határozzuk meg az egyensúlyi árat és az egyensúlyi mennyiséget!
- Adjuk meg a bevételi függvényt!

Megoldás:

- Az egyensúlyi árat a keresleti függvény és a kínálati függvény metszéspontja, pontosabban a

$$200 - p = p$$

egyenlet megoldása adja. Ebből azt kapjuk, hogy $p = 100$. Az egyensúlyi mennyiséget úgy kapjuk meg, hogy kiszámoljuk például a kínálati függvény $p = 100$ helyen vett helyettesítési értékét. Ekkor azt kapjuk, hogy

$$S(100) = 100.$$

- A bevételi függvény:

$$R(p) = p \cdot f(p) = 200p - p^2.$$

6.4. **Feladat.** Egy termék iránti keresleti függvény

$$f(p) = e^{-0,02p},$$

ahol az árat euroban, keresletet ezer darabban értjük.

- Adjuk meg a bevételi függvényt!
- Határozzuk meg a bevételt, ha a termék ára 50 e.

Megoldás:

- A bevételi függvény:

$$R(p) = p \cdot f(p) = p \cdot e^{-0,02p}.$$

- A bevétel 50 e egységár esetén:

$$R(50) = 50 \cdot e^{-0,02 \cdot 50} \cdot 1000 \approx 18390 \text{ e.}$$

6.5. **Feladat.** Egy termék keresleti függvénye

$$f(p) = 600 - 10p,$$

ahol az árat \$-ban, a keresleti mennyiséget pedig darabban értjük.

- a) Adjuk meg a bevételi függvényt!
 b) Milyen ár esetén lesz maximális a bevételünk?

Megoldás:

- a) A bevételi függvény

$$R(p) = p \cdot f(p) = 600p - 10p^2.$$

- b) A bevételi függvényt teljes négyzetté alakítva azt kapjuk, hogy

$$R(p) = -10 \cdot (p^2 - 60p) = -10 \cdot (p - 30)^2 + 9000.$$

Ennek a függvénynek $p = 30$ esetén van maximuma, így azt kaptuk, hogy 30\$-os ár esetén lesz maximális a bevételünk. Ekkor a keresleti mennyiség:

$$f(30) = 600 - 10 \cdot 30 = 300 \text{ [db]}.$$

6.6. Feladat. Egy termék iránti keresletet az ár függvényében elsőfokú függvénnyel modellezhetjük. Azt is tudjuk, hogy amennyiben a termék ára 80 Ft, úgy a termék iránti kereslet 1400 [db], továbbá, ha a termék ára 50 Ft, akkor a termék iránti kereslet 2000 [db]. Ugyenezen termék esetén, ha a termék ára 80 Ft, akkor a kínálat 750 [db], ha a termék ára 50 Ft, akkor a kínálat 375 [db]. A kínálati függvényt szintén elsőfokú függvénnyel modellezzük.

- a) Írjuk fel a keresleti függvényt!
 b) Írjuk fel a kínálati függvényt!
 c) Adjuk meg a bevételi függvényt!
 d) Határozzuk meg, milyen ár esetén lesz a bevételünk maximális!
 e) Határozzuk meg a maximális bevételt biztosító ár esetén a bevételt!
 f) Számoljuk ki az egyensúlyi árat és az egyensúlyi mennyiséget!
 g) Ábrázoljuk közös koordinátarendszerben a keresleti függvényt és a kínálati függvényt!

Megoldás:

- a) Mivel a keresett függvény elsőfokú, ezért

$$f(p) = a \cdot p + b$$

alakban keressük. A függvény grafikonjára illeszkednek a $(80; 1400)$, valamint az $(50; 2000)$ pontok, így egyrészt teljesül, hogy $f(80) = 1400$, másrészt $f(50) = 2000$, amiből a

$$80a + b = 1400$$

$$50a + b = 2000$$

egyenletrendszerhez jutunk. Az első egyenletből kivonva a másodikat azt kapjuk, hogy $30a = -600$, azaz $a = -20$. A kapott értéket behelyettesítve például az első egyenletbe

$$80 \cdot (-20) + b = 1400 \quad \Rightarrow \quad b = 3000$$

adódik. A kapott eredmények felhasználásával azt kapjuk, hogy a keresleti függvény

$$f(p) = -20p + 3000.$$

b) Mivel a kínálati függvény elsőfokú, ezért azt

$$S(p) = c \cdot p + d$$

alakban keressük. A függvény grafikonjára illeszkednek a $(80; 750)$, valamint az $(50; 375)$ pontok, így egyrészt $S(80) = 750$, másrészt $S(50) = 375$, amiből a

$$80a + b = 750$$

$$50a + b = 375$$

egyenletrendszerhez jutunk. Az első egyenletből kivonva a másodikat azt kapjuk, hogy $30a = 375$, azaz $a = 12,5$. A kapott értéket behelyettesítve például az első egyenletbe

$$80 \cdot 12,5 + b = 750 \quad \Rightarrow \quad b = -250$$

adódik. A kapott eredmények felhasználásával azt kapjuk, hogy a kínálati függvény:

$$S(p) = 12,5p - 250.$$

c) A bevételt a termék egységárának és a termék iránti keresletnek a szorzata adja:

$$R(p) = p \cdot f(p) = p \cdot (-20p + 3000) = -20p^2 + 3000p.$$

d) Teljes négyzetté alakítva az előbbi függvényt

$$\begin{aligned} R(p) &= -20 \cdot (p^2 - 150p) = -20 \cdot ((p - 75)^2 - 5625) = \\ &= -20 \cdot (p - 75)^2 + 11250 \end{aligned}$$

adódik. Ezt felhasználva azt kapjuk, hogy

$$p = 75 \text{ [Ft]}$$

esetén lesz maximális a bevételünk. Ekkor

$$f(75) = -20 \cdot 75 + 3000 = 1500,$$

így a keresleti mennyiség 1500 [db].

e) A maximális bevételt biztosító ár esetén a bevétel

$$R(75) = 20 \cdot (75 - 75)^2 + 11\,250 = 11\,250.$$

A maximális bevétel tehát 11 250[Ft].

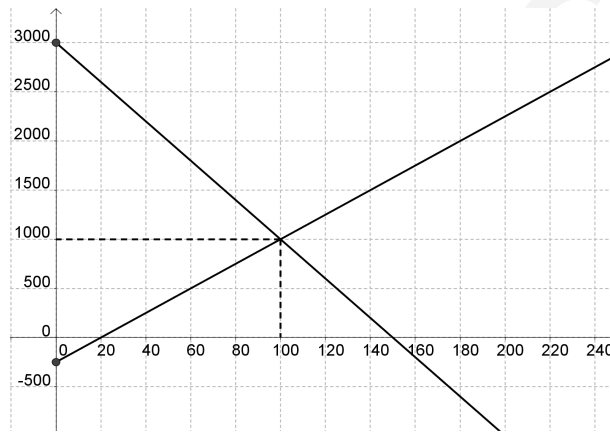
f) Az egyensúlyi árat az $f(p) = S(p)$ egyenlet megoldása adja:

$$-20p + 3\,000 = 12,5p - 250 \quad \rightarrow \quad 32,5p = 3\,000.$$

Az egyensúlyi ár tehát $p = 100$ [Ft]. Az egyensúlyi mennyiség:

$$f(100) = -20 \cdot 100 + 3\,000 = 1\,000 \text{ [db]}.$$

g) A keresleti és a kínálati függvény grafikonja:



6.7. Feladat. Egy termék keresleti függvénye

$$f(p) = 110 - 5p.$$

- Adjuk meg az inverz keresleti függvényt!
- Ábrázoljuk közös koordináta-rendszerben a keresleti függvényt és az inverz keresleti függvényt!

Megoldás:

- Keressük azt az $f^{-1}(p)$ függvényt, amelyre

$$f(f^{-1}(p)) = p$$

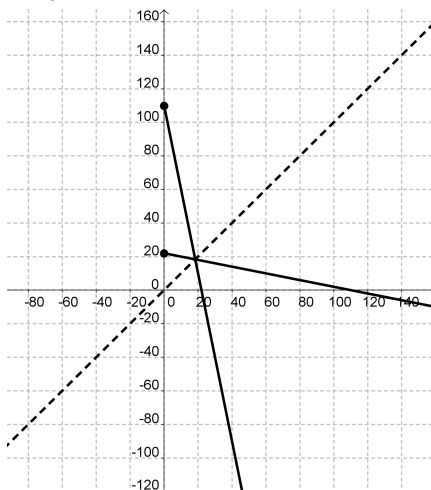
teljesül. Felhasználva $f(p)$ definícióját azt kapjuk, hogy

$$110 - 5 \cdot f^{-1}(p) = p.$$

A kapott egyenletből $f^{-1}(p)$ -t kifejezve azt kapjuk, hogy

$$f^{-1}(p) = \frac{p - 110}{-5} = 22 - \frac{1}{5}p.$$

b) A függvények grafikonjai:



6.8. Feladat. Egy vállalat (teljes) költségfüggvénye

$$C(q) = q^3 - 20q^2 + 10q + 1\,100,$$

ahol a költséget ezer forintban, a darabszámot ezer darabban értjük.

- Adjuk meg a fix költséget!
- Határozzuk meg a változó költség függvényt!
- Adjuk meg az átlag költség függvényt!
- Határozzuk meg az átlagos fix költség függvényt!
- Adjuk meg az átlagos változó költség függvényt!

Megoldás:

a) A fix költség: $FC = 1\,100\,000$ Ft.

b) A változó költség függvény:

$$VC(q) = q^3 - 20q^2 + 10q.$$

c) Az átlag költség függvény:

$$AC(q) = \frac{C(q)}{q} = q^2 - 20q + 10 + \frac{1\,100}{q}.$$

- d) Az átlagos fix költség: $AFC = 10$.
 e) Az átlagos változó költség függvénye:

$$AVC(q) = q^2 - 20q + \frac{100}{q}.$$

6.9. Feladat. Egy termék inverz keresleti függvénye

$$f^{-1}(q) = 400 - 5q.$$

Ugyanezen termékhez tartozó (teljes) költségfüggvény

$$C(q) = 20q^2 + 100.$$

A keresletet ezer darabban, a költséget ezer forintban értjük.

- a) Adjuk meg a keresleti függvényt!
 b) Határozzuk meg a bevételi függvényt!
 c) Írjuk fel a profitfüggvényt!
 d) Ábrázoljuk a profitfüggvényt!
 e) Hány darab termék eladása esetén lesz a nyereség maximális?

Megoldás:

- a) A keresleti függvényt úgy kapjuk meg, hogy a

$$p = 400 - 5q$$

egyenletből kifejezzük q -t:

$$q = \frac{400 - p}{5}.$$

A keresleti függvény tehát:

$$f(p) = 80 - \frac{1}{5}p.$$

- b) A bevétel az eladott mennyiség függvényében:

$$R^*(q) = p \cdot q = (400 - 5q) \cdot q = 400q - 5q^2.$$

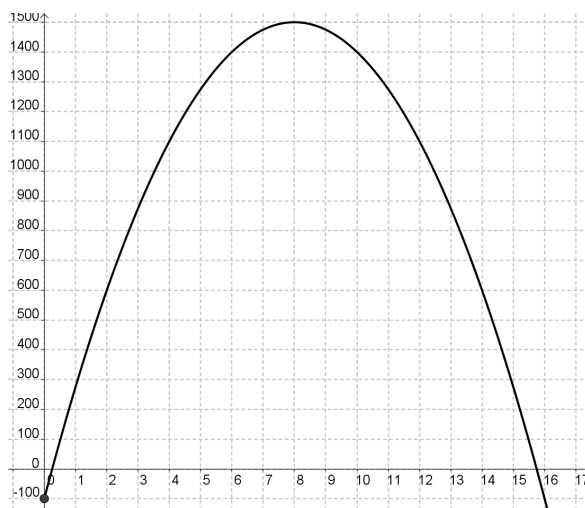
- c) A profitfüggvény

$$\begin{aligned} \Pi(q) &= R^*(q) - C(q) = (400q - 5q^2) - (20q^2 + 100) = \\ &= -25q^2 + 400q - 100. \end{aligned}$$

d) A profitfüggvényt teljes négyzetté alakítva azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\Pi(q) &= -25 \cdot (q^2 - 16q + 4) = -25 \cdot ((q - 8)^2 - 60) = \\ &= -25 \cdot (q - 8)^2 + 1\,500.\end{aligned}$$

Ezt felhasználva a profitfüggvény grafikonja:



e) A profitfüggvény maximum helye: $q = 8$, azaz 8 000 darab termék esetén lesz maximális a nyereségünk. Ekkor a maximális nyereség 1 500 000 [Ft].

6.10. **Feladat.** Egy vállalat (teljes) költségfüggvénye

$$C(q) = 500 + 140q,$$

ahol a költséget ezer forintban, a darabszámot ezer darabban értjük. A bevétel ezer forintban az

$$R(q) = 200q - q^2$$

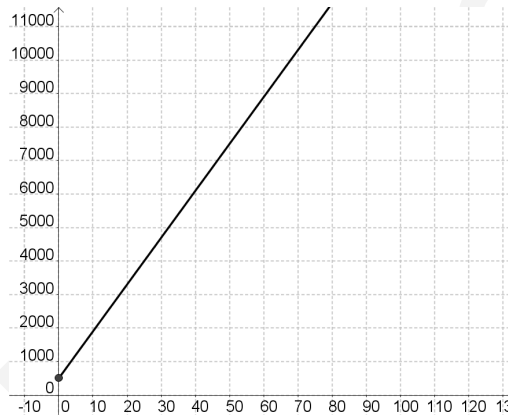
függvény adja meg.

- Vázzuk fel a $C(q)$ függvény grafikonját!
- Mennyibe kerül 2 000 darab termék előállítás?
- Adjuk meg a fix költséget!
- Határozzuk meg a változó költség függvényt!
- Adjuk meg az átlag költség függvényt!
- Határozzuk meg az átlagos fix költség függvényt!
- Adjuk meg az átlagos változó költség függvényt!

- h) Vázoljuk fel a $C(q)$ függvénnyel közös koordináta-rendszerben a $R(q)$ függvény grafikonját!
- i) Mennyi lesz a bevételünk 2 000 darab termék gyártása esetén?
- j) Adjuk meg a profitfüggvényt!
- k) Hány darab terméket gyártsunk ahhoz, hogy a nyereségünk a lehető legnagyobb legyen?
- l) Vázoljuk fel a profitfüggvény grafikonját!
- m) Hány darab termék gyártása esetén lesz a bevétel nagyobb, mint a költség?

Megoldás:

- a) A $C(q)$ függvény grafikonja:



- b) A költség függvény $q = 2$ helyen vett helyettesítési értéke

$$C(2) = 500 + 140 \cdot 2 = 780,$$

így 2 000 darab termék előállítására 780 000 forintba kerül.

- c) A fix költség $FC = 500 000$ forint.

- d) A változó költség függvény:

$$VC(q) = 140q.$$

- e) Az átlag költség függvény:

$$AC(q) = \frac{C(q)}{q} = 140 + \frac{500}{q}.$$

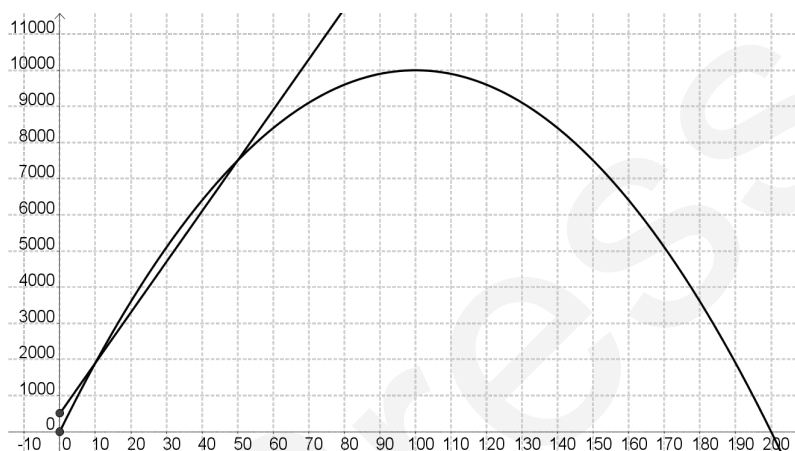
- f) Az átlagos fix költség:

$$AFC = 140.$$

g) Az átlagos változó költség függvény:

$$AVC(q) = \frac{500}{q}.$$

h) A $C(q)$ és $R(q)$ függvény grafikonja:



i) Mivel

$$R(2) = 200 \cdot 2 - 2^2 = 396,$$

ezért 2 000 darab termék gyártása esetén 396 000 forint lesz a bevételünk.

j) A profitfüggvény:

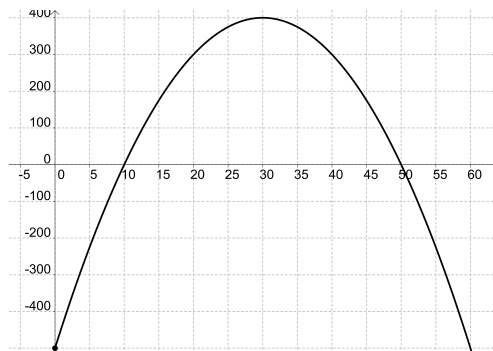
$$\begin{aligned} \Pi(q) &= R(q) - C(q) = (200q - q^2) - (500 - 140q) = \\ &= -q^2 + 60q - 500. \end{aligned}$$

k) A profitfüggvényt teljes négyzetté alakítva azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \Pi(q) &= -(q^2 - 60q) - 500 = -((q - 30)^2 - 900) - 500 = \\ &= -(q - 30)^2 + 900 - 500 = -(q - 30)^2 + 400. \end{aligned}$$

A $\Pi(q)$ függvény maximum helye $q = 30$ -nál van, így 30 000 darab termék gyártása esetén lesz a legnagyobb a nyereségünk. Ekkor a maximális profit 400 000 forint.

l) A profitfüggvény grafikonja:



- m) A bevétel pontosan akkor nagyobb, mint a költség, amikor a profitfüggvény pozitív értékét vesz fel. Ezt az előbbi függvény grafikonjából is leolvashatjuk. Azt kapjuk, hogy

$$q \in]10; 50[$$

esetén teljesül a kívánt feltétel, így ha azt szeretnénk, hogy nagyobb legyen a bevétel, mint a költség, akkor 10 000 darabnál több és 50 000 darabnál kevesebb terméket kell gyártanunk.

7. Függvények fizikai és biológiai alkalmazásokban

7.1. **Feladat.** A hálózati feszültség időbeli lefolyását az

$$U(t) = 230 \cdot \sin(100\pi \cdot t)$$

függvény írja le, ahol a feszültséget voltban, az időt másodpercben mérjük.

- Mekkora a feszültség a $t = 0$ időpillanatban?
- Mekkora a feszültség a $t = 0,005$ időpillanatban?
- Mekkora a feszültség maximális és minimális értéke?
- Határozzuk meg azokat az időpillanatokat, amikor a feszültség pillanatnyi értéke 115 [V].
- Vázzuk fel az $U(t)$ függvény grafikonját!

Megoldás:

- a) A feszültség értéke a $t = 0$ időpillanatban:

$$U(0) = 230 \cdot \sin(100\pi \cdot 0) = 0 \text{ [V]}.$$

- b) A feszültség értéke a $t = 0,005$ időpillanatban:

$$U(0,005) = 230 \cdot \sin(100\pi \cdot 0,005) = 230 \text{ [V]}.$$

- c) Mivel minden $x \in \mathbb{R}$ esetén $-1 \leq \sin x \leq 1$, ezért

$$-230 \leq 230 \cdot \sin(100\pi \cdot t) \leq 230,$$

tehát az $U(t)$ függvény minimum értéke -230 [V], maximum értéke 230 [V].

- d) Keressük az $U(t) = 115$ egyenlet megoldását:

$$115 = 230 \cdot \sin(100\pi \cdot t).$$

Az egyenlet mindkét oldalát elosztjuk 230-cal:

$$\frac{1}{2} = \sin(100\pi \cdot t).$$

Ekkor azt kapjuk, hogy

$$100\pi \cdot t = \frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

vagy

$$100\pi \cdot t = \left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) + l \cdot 2\pi \quad (l \in \mathbb{Z}).$$

A kapott egyenletekből kifejezve a t ismeretlent

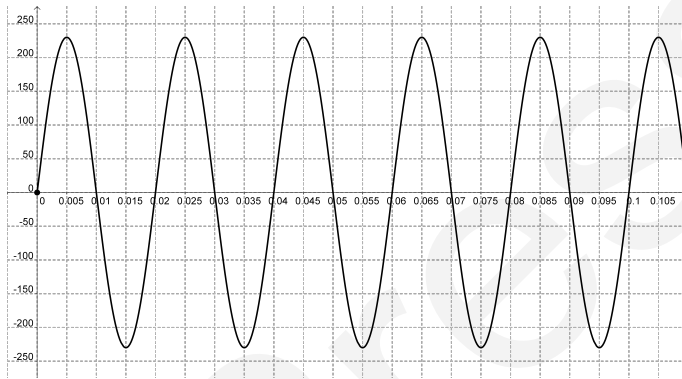
$$t_1 = \frac{1}{600} + 0,02k \quad (k \in \mathbb{Z}),$$

illetve

$$t_1 = \frac{5}{600} + 0,02l \quad (l \in \mathbb{Z})$$

adódik.

e) Az $U(t)$ függvény grafikonja:



7.2. Feladat. Egy harmonikus rezgőmozgást végző test kitérés-idő függvénye:

$$y(t) = 6 \cdot \sin(2t) \quad (0 \leq t \leq 120),$$

ahol az időt másodpercben, a kitérést méterben mérjük.

- Mennyi a maximális kitérés?
- Adjuk meg azokat az időpillanatokot, amikor a kitérés 3 méter!
- Vázoljuk fel a kitérés-idő függvény grafikonját a $[0; 10\pi]$ időintervallumban!

Megoldás:

- a) Mivel a minden $x \in \mathbb{R}$ esetén $-1 \leq \sin x \leq 1$, ezért

$$-6 \leq 6 \cdot \sin(2t) \leq 6,$$

így a maximális kitérés 6 méter.

- b) Meg kell oldanunk a

$$3 = 6 \cdot \sin(2t)$$

egyenletet. Mindkét oldalt elosztjuk 6-tal:

$$\frac{1}{2} = \sin(2t).$$

Ezt felhasználva

$$2t = \frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi \quad (0 \leq k \leq 38)$$

vagy

$$2t = \left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) + l \cdot 2\pi \quad (0 \leq l \leq 38)$$

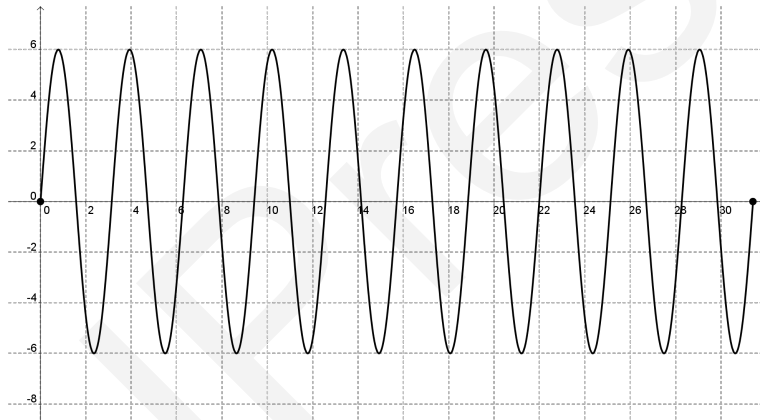
adódik, így azt kapjuk, hogy

$$t_1 = \frac{\pi}{12} + k \cdot \pi \quad (0 \leq k \leq 38),$$

illetve

$$t_2 = \frac{5}{12}\pi + l \cdot \pi \quad (0 \leq l \leq 38).$$

c) A függvény grafikonja:



7.3. Feladat. A fény a ködben elég rövid távon elveszíti a fényerejét. A fényerőt a fényforrástól d távolságban az

$$I(d) = I_0 \cdot a^d$$

függvény adja meg, ahol I_0 a kezdeti fényerő, a pedig egy, a köd sűrűségétől függő állandó ($0 < a < 1$).

Tudjuk, hogy egy autó lámpája még ködben is észrevehető, ha az eredeti fényének legalább az 5%-a megvan. Egy adott napon $a = 0,9$. Milyen messziről lehet látni a szembejövő autó lámpáját?

Megoldás:

Az említett modellt felhasználva

$$0,05I_0 = I_0 \cdot 0,9^d,$$

adódik amiből azt kapjuk, hogy

$$0,05 = 0,9^d.$$

Vegyük mindkét oldal (például) 10-es alapú logaritmusát. Ekkor

$$\lg 0,05 = \lg 0,9^d \quad \Rightarrow \quad \lg 0,05 = d \cdot \lg 0,9$$

adódik, amiből azt kapjuk, hogy

$$d = \frac{\lg 0,05}{\lg 0,9} \approx 28,43.$$

Tehát 28,43 méternél távolabbi autó lámpáját (az említett napon) már nem fogjuk látni.

7.4. Feladat. A ^{14}C szénizotóp radioaktív. Tudjuk, hogy a ^{14}C -et tartalmazó anyagban 5 570 év alatt csökken a felére a ^{14}C atomok száma, azaz 5 570 év a felezési idő.

- Határozzuk meg a bomlási állandót!
- Az atomok hány százaléka bomlik el 1 000 év alatt?

Megoldás:

- Ha a 0 időpillanatban N_0 számú bomlatlan atomot tartalmazott a radioaktív anyag, akkor t idő múlva a még bomlatlan atomok száma:

$$N(t) = N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t},$$

ahol λ a bomlási állandó. Az ismert felezési idő alapján azt kapjuk, hogy

$$0,5N_0 = N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot 5570},$$

ezért N_0 -al egyszerűsítve

$$0,5 = e^{-5570\lambda}$$

adódik. Vegyük mindkét oldal természetes alapú logaritmusát:

$$\ln 0,5 = -5570\lambda,$$

így a bomlási állandó:

$$\lambda = -0,000124.$$

- Mivel ismerjük a bomlási állandót is, ezért 1 000 év múlva a még bomlatlan atommagok száma:

$$N(t) = N_0 \cdot e^{-0,000124 \cdot 1000} = N_0 \cdot e^{-0,124} = 0,8834N_0.$$

Azt kaptuk tehát, hogy 1 000 év múlva az atommagok 11,66%-a bomlik el.

7.5. Feladat. Egy radioaktív izotóp felezési ideje: T . Mutassuk meg, hogy a t időpillanatban a még el nem bomlott atomok száma:

$$N(t) = N_0 \cdot 2^{-\frac{t}{T}},$$

ahol N_0 a kiinduló időpillanatban a radioaktív atomok száma.

Megoldás:

Ha λ a bomlási állandó, akkor a t időpillanatban a még bomlatlan atommagok száma:

$$N(t) = N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t}.$$

Amennyiben T a felezési idő, úgy azt kapjuk, hogy

$$\frac{1}{2}N_0 = N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot T}.$$

Az egyenletet N_0 -al egyszerűsítve

$$\frac{1}{2} = e^{-\lambda \cdot T}$$

adódik. A kapott egyenletből a bomlási állandót kifejezve azt kapjuk, hogy

$$\lambda = -\frac{\ln \frac{1}{2}}{T}.$$

Ezt behelyettesítve az

$$N(t) = N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t}$$

egyenletbe

$$N(t) = N_0 \cdot e^{\frac{\ln \frac{1}{2}}{T} \cdot t}$$

adódik. Felhasználva, hogy $\ln \frac{1}{2} = -\ln 2^{-1}$ azt kapjuk, hogy

$$N(t) = N_0 \cdot (e^{\ln 2})^{-\frac{t}{T}},$$

amiből a logaritmus definíciója miatt az

$$N(t) = N_0 \cdot 2^{-\frac{t}{T}}$$

egyenlethez jutunk, ami a bizonyítandó összefüggés.

7.6. Feladat. A gyógyászatban a daganatos területek kezelésére úgynevezett kobaltágyút használnak, amelynek során 60-as tömegszámú kobaltizotóp gamma-sugárzásával kezelik a betegséget. A kobalt izotóp vastag ólomköpeny alatt néhány méter hosszú csőben van elhelyezve. A kobalt 60-as izotópjának felezési ideje 5,27 év.

a) A radioaktív atomok hány százaléka bomlik el egy év alatt?

- b) A radioaktív atomok mekkora része bomlik el 3 év alatt?
 c) Mennyi idő alatt bomlik el a radioaktív atomok 20%-a?

Megoldás:

- a) Az előbbi feladat eredményét felhasználva azt kapjuk, hogy 1 év elteltével a jelen lévő atommagok száma:

$$N(1) = N_0 \cdot 2^{-\frac{1}{5,27}} = 0,8768N_0,$$

tehát az atommagoknak körülbelül a 12,32%-a bomlik el 1 év alatt.

- b) Szintén az előző feladat eredményét használva 3 év elteltével a jelen lévő atommagok száma:

$$N(3) = N_0 \cdot 2^{-\frac{3}{5,27}} = 0,674N_0,$$

tehát az atommagoknak körülbelül a 32,6%-a bomlik el 3 év alatt.

- c) Keressük a

$$0,8N_0 = N_0 \cdot 2^{-\frac{t}{5,27}}$$

egyenlet megoldását. Mindkét oldalt elosztva N_0 -lal azt kapjuk, hogy

$$0,8 = 2^{-\frac{t}{5,27}}.$$

Vegyük mindkét oldal 10-es alapú logaritmusát, majd alkalmazzuk a megfelelő logaritmus-azonosságot:

$$\lg 0,8 = -\frac{t}{5,27} \cdot \lg 2.$$

A kapott egyenletből kifejezve a t ismeretlent

$$t = -\frac{\lg 0,8}{\lg 2} \cdot 5,27 = 1,7$$

adódik, így azt kaptuk, hogy 1,7 év alatt bomlik el a radioaktív atomok 20%-a.

7.7. Feladat. A korlátozott (logisztikus) növekedés matematikai modellje szerint egy populáció egyedszáma a vizsgálat kezdetétől eltelt t idő múlva:

$$N(t) = \frac{K \cdot N_0}{N_0 + (K - N_0) \cdot a^t},$$

ahol N_0 a populáció induló egyedszáma, K a körülmények szerint „eltartható” maximális egyedszám, a pedig a növekedésre jellemző konstans. Egy populáció induló egyedszáma $N_0 = 2000$ egyed, továbbá ismert, hogy $K = 10000$. Az időt években mérjük. Tudjuk azt is, hogy 1 évvel a megfigyelés kezdete után az egyedek száma: 3000.

- a) Határozzuk meg az a paraméter értékét!
 b) Várhatóan hány egyed lesz a megfigyelés kezdete után 2 évvel?
 c) Várhatóan hány egyed lesz a megfigyelés kezdete után 10 évvel?
 d) A megfigyelés kezdete után hány évvel lesz az egyedszám 7 000?
 e) Vázoljuk fel az $N(t)$ függvény grafikonját a $[0; 10]$ intervallumon!

Megoldás:

- a) Mivel a megfigyelés kezdete után 1 évvel 3 000 egyed volt, ezért

$$3\,000 = \frac{10\,000 \cdot 2\,000}{2\,000 + 8\,000a}.$$

A megfelelő egyszerűsítések elvégzése után azt kapjuk, hogy

$$\frac{20}{2 + 8a} = 3.$$

A nevezővel való szorzás után a

$$20 = 6 + 24a$$

egyenlethez jutunk, amiből azt kapjuk, hogy $a = \frac{7}{12}$. Azt kaptuk tehát, hogy

$$N(t) = \frac{10\,000 \cdot 2\,000}{2\,000 + 8\,000 \cdot \left(\frac{7}{12}\right)^t} = \frac{20\,000\,000}{2\,000 + 8\,000 \cdot \left(\frac{7}{12}\right)^t}.$$

- b) A megfigyelés kezdete után 2 évvel

$$N(2) = \frac{20\,000\,000}{2\,000 + 8\,000 \cdot \left(\frac{7}{12}\right)^2} = 4\,235$$

egyed lesz a modell szerint.

- c) A megfigyelés kezdete után 5 évvel

$$N(5) = \frac{20\,000\,000}{2\,000 + 8\,000 \cdot \left(\frac{7}{12}\right)^5} = 7\,873.$$

egyed lesz a modell szerint.

- d) A megfigyelés kezdete után 10 évvel

$$N(10) = \frac{20\,000\,000}{2\,000 + 8\,000 \cdot \left(\frac{7}{12}\right)^{10}} = 9\,821.$$

egyed lesz a modell szerint.

e) Meg kell oldanunk a

$$7\,000 = \frac{20\,000\,000}{2\,000 + 8\,000 \cdot \left(\frac{7}{12}\right)^t}$$

egyenletet. A nevezővel szorozva mindkét oldalt azt kapjuk, hogy

$$14\,000\,000 + 56\,000\,000 \cdot \left(\frac{7}{12}\right)^t = 20\,000\,000.$$

Ha az egyenlet mindkét oldalát osztjuk 2 000 000-val, akkor

$$7 + 28 \cdot \left(\frac{7}{12}\right)^t = 10$$

adódik. Mindkét oldalból kivonva 7-et, majd mindkét oldalt 56-tal osztva azt kapjuk, hogy

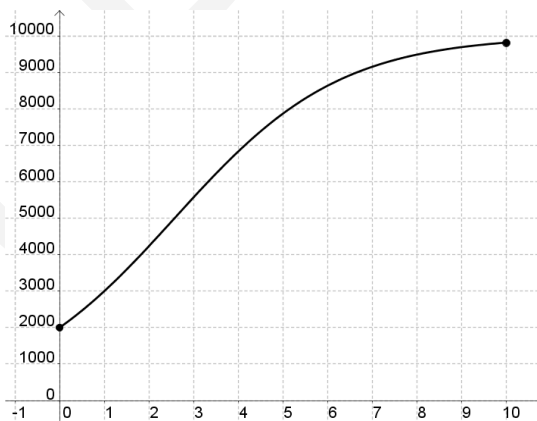
$$\left(\frac{7}{12}\right)^t = \frac{3}{28},$$

amiből mindkét oldal 10-es alapú logaritmusát véve, majd kifejezve a t ismeretlent

$$t = \frac{\lg \frac{3}{28}}{\lg \frac{7}{12}} \approx 4,14$$

adódik, tehát az ötödik évben lesz az egyedszám 7 000.

f) Az $N(t)$ függvény grafikonja:



8. Halmazok számossága

8.1. **Feladat.** Egy 26 fős osztályban 15-en tanulnak németül, 20-an angolul. Mindenki tanulja legalább a két nyelv egyikét. Hányan tanulnak csak németül?

1. Megoldás:

Jelöljük A -val az angolul tanulók, N -el a németül tanulók halmazát. Ekkor a logikai szitaformula szerint felírhatjuk az

$$|A \cup N| = |A| + |N| - |A \cap N|$$

összefüggést, amibe behelyettesítve a megadott adatokat

$$26 = 20 + 15 - |A \cap N| \quad \Rightarrow \quad 26 = 35 - |A \cap N|$$

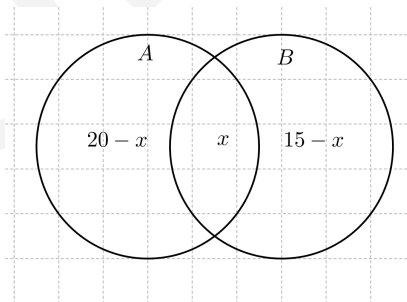
adódik. Kifejezve az $|A \cap N|$ ismeretlent azt kapjuk, hogy

$$|A \cap N| = 9,$$

azaz 9-en tanulják mindkét nyelvet. Összesen 15-en tanulnak németül, következésképpen $15 - 9 = 6$ -an csak németül tanulnak.

2. Megoldás:

A feladatot Venn-diagram segítségével is megoldhatjuk. Tegyük fel, hogy x olyan tanuló van, akik angolul és németül is tanulnak. Ekkor csak angolul $20 - x$, csak németül $15 - x$ diák tanul. Az említetteknek megfelelő Venn-diagram:



Megjegyezzük, hogy a Venn-diagramban most nem a halmaz elemi láthatóak, hanem a megfelelő halmazok számossága.

Mivel minden diák tanulja legalább az egyik nyelvet, ezért a

$$(20 - x) + x + (15 - x) = 26 \quad \Rightarrow \quad -x + 35 = 26$$

egyenlethez jutunk, amiből azt kapjuk, hogy $x = 9$, így 9 olyan diák van, aki mindkét nyelvet tanulja, tehát $15 - 9 = 6$ olyan van, aki csak németül tanul.

8.2. Feladat. Egy 10 fős baráti társaságból 5 fő szereti a focit, 4 a kosárlabdát, egyvalaki pedig mind a két sportágat. Hányan nem kedvelik a két labdajáték egyikét sem a baráti társaságból?

1. Megoldás:

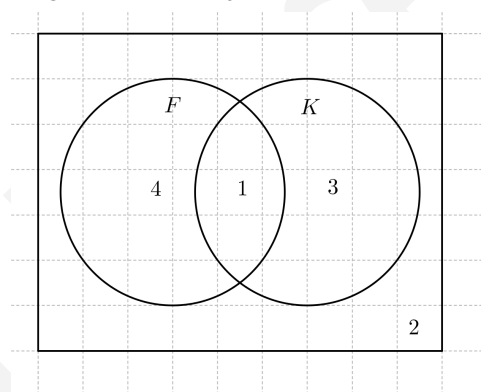
Jelöljük F -el azok halmazát, akik szeretik a focit, K -val pedig azokat, akik szeretik a kosárlabdát. Ekkor a logikai szitaformula szerint:

$$|F \cup K| = |F| + |K| - |F \cap K|.$$

Az adatok behelyettesítése után az egyenlőség jobb oldalán $5 + 4 - 1 = 8$ adódik. Mivel a társaság 10 fős, így 2 olyan személy van, aki egyik labdajátékot sem szereti.

2. Megoldás:

Az adatokat Venn-diagramon ábrázoljuk:



Megjegyezzük, hogy a Venn-diagramban most nem a halmaz elemi láthatóak, hanem a megfelelő halmazok számossága.

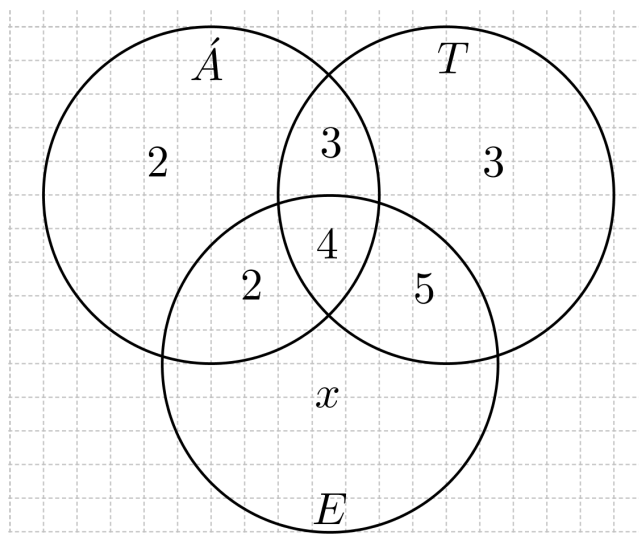
A Venn-diagramról leolvashatjuk a megoldást, miszerint 2 olyan személy van, aki egyik labdajátékot sem szereti.

8.3. Feladat. Egy rejtvényújságban egymás mellett két, szinte azonos rajz található, amelyek között 23 apró eltérés van. Ezek megtalálása a feladat. Ádám, Tamás és Enikő figyelmesen megnézték az ábrákat. Ádám 11, Tamás 15 eltérést talált. Mindössze 4 olyan eltérés volt, amelyet mind a hárman megtaláltak, továbbá 7 olyan eltérés volt, amelyet Ádám és Tamás is észrevett. Az Enikő

által bejelöltekből hatot Ádám is, kilencet Tamás is észrevett, és örömmel látták, hogy hárman együtt az összes eltérést megtalálták. Hány olyan eltérés volt, amelyet csak Enikő talált meg?

Megoldás:

Jelöljük x -el azon eltérések számát, amelyeket csak Enikő talált meg. Venn-diagramon ábrázoljuk a szövegnek megfelelő adatokat:



Ekkor

$$2 + 3 + 2 + 4 + 5 + 3 + x = 23 \quad \Rightarrow \quad x = 4,$$

így azt kapjuk, hogy 4 olyan eltérés volt, amelyet csak Enikő talált meg.

8.4. Feladat. Mutassuk meg, hogy a valós számok halmazának számossága megegyezik a $] - 1; 1[$ intervallum számosságával.

Megoldás:

Tekintsük az $f: \mathbb{R} \rightarrow] - 1; 1[$,

$$f(x) = \frac{x}{1 + |x|} \quad (x \in \mathbb{R})$$

függvényt! Megmutatjuk, hogy a leképezés bijektív. Ha $x > 0$, akkor

$$f(x) = \frac{x}{1 + x}.$$

Ha $f(x_1) = f(x_2)$, akkor

$$\frac{x_1}{1+x_1} = \frac{x_2}{1+x_2},$$

amiből a nevezővel beszorozva, majd a zárójeleket felbontva

$$x_1 \cdot (1+x_2) = x_2 \cdot (1+x_1)$$

$$x_1 + x_1 \cdot x_2 = x_2 + x_2 \cdot x_1$$

adódik, így $x_1 = x_2$ adódik, tehát f injektív. Hasonlóan adódik az injektivitás, ha $x < 0$.

Az f függvény szürjektív is, mert $R_f =]-1; 1[$. Azt kaptuk tehát, hogy f bijektív, mert injektív és szürjektív is.

A függvény grafikonjának felvázolásához átalakítjuk a kifejezést.

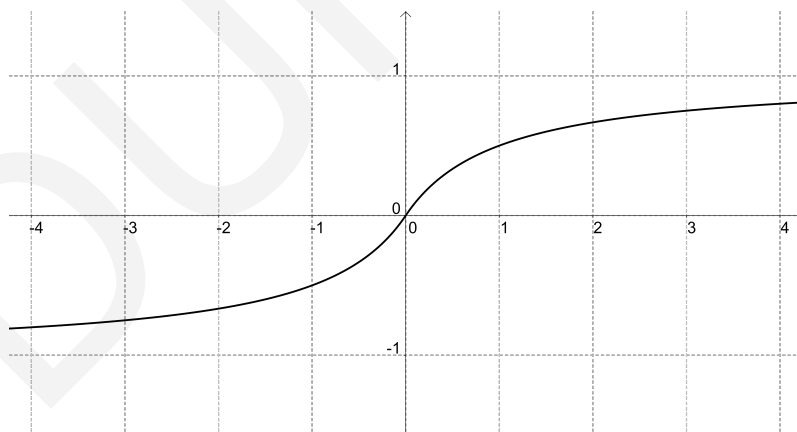
- Ha $x > 0$, akkor

$$f(x) = \frac{x}{1+x} = \frac{x+1-1}{1+x} = 1 - \frac{1}{x+1}.$$

- Ha $x < 0$, akkor

$$f(x) = \frac{x}{1-x} = -\frac{x}{x-1} = -\frac{x-1+1}{x-1} = -1 - \frac{1}{x-1}.$$

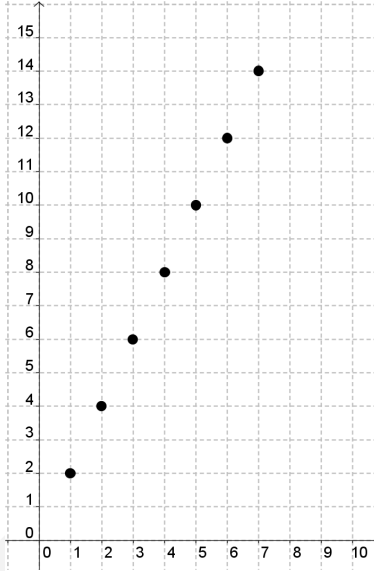
Az f függvény grafikonja:



8.5. Feladat. Bizonyítsuk be, hogy a pozitív páros számok halmazának számossága megegyezik a pozitív számok halmazának számosságával.

Megoldás:

Tekintsük az $f: \mathbb{N} \rightarrow H$ halmazt, ahol H a pozitív páros számok halmazát jelöli. Definiáljuk az $f: \mathbb{N} \rightarrow H$, $f(x) = 2x$ függvényt! A függvény grafikonja:



Az f függvény

- injektív, hiszen különböző elemekhez különböző elemeket rendel;
- szürjektív, mert értékkészlete a pozitív páros számok halmaza.

Mivel a függvény injektív és szürjektív is egyidejűleg, ezért bijektív, tehát megadtunk \mathbb{N} és H között egy bijektív leképezést, így azt kapjuk, hogy \mathbb{N} és H számossága megegyezik, ami azt is jelenti, hogy H megszámlálhatóan végtelen számosságú halmaz.

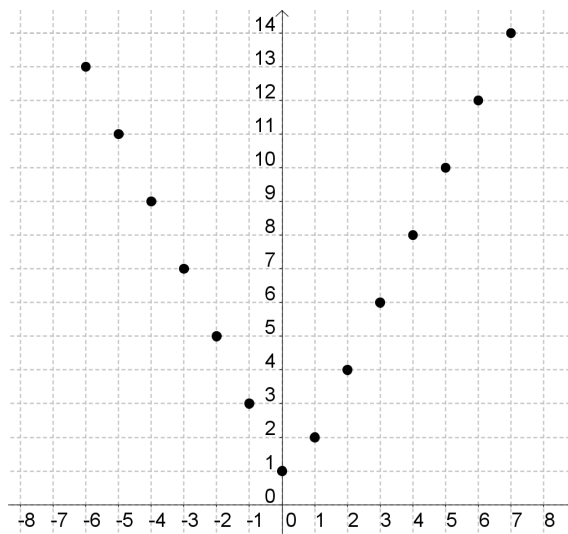
8.6. Feladat. Mutassuk meg, hogy a természetes számok halmazának és az egész számok halmazának számossága megegyezik, következésképpen az egész számok halmazának számossága megszámlálhatóan végtelen.

Megoldás:

Tekintsük az $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}$,

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & \text{ha } x > 0 \\ -2x + 1, & \text{ha } x \leq 0 \end{cases}$$

függvényt. A függvény grafikonja:



Az f függvény

- injektív, hiszen különböző elemekhez különböző elemeket rendel;
- szürjektív, mert ha x pozitív, akkor a függvény értékei a pozitív páros számok, ha x negatív vagy nulla, akkor a függvény értékei a pozitív páratlan számok, így értékkészlete a természetes számok halmaza.

Mivel f injektív és szürjektív is egyidejűleg, ezért bijektív, tehát megadtunk \mathbb{N} és \mathbb{Z} között egy bijektív leképezést, így azt kapjuk, hogy \mathbb{N} és \mathbb{Z} számossága megegyezik, azaz \mathbb{Z} megszámlálhatóan végtelen számosságú halmaz.

9. Komplex számok

9.1. **Feladat.** Adjuk meg az alábbi komplex számok valós részét, illetve képzetes részét:

a) $z_1 = 2 + 3i$

c) $z_3 = 6$

e) $z_5 = -2i$

b) $z_2 = 3 - 4i$

d) $z_4 = i$

f) $z_6 = 1$

Megoldás:

A $z = a + bi$ komplex szám valós része $\operatorname{Re}(z) = a$, képzetes része $\operatorname{Im}(z) = b$. Ezt felhasználva:

a) $\operatorname{Re}(z_1) = 2, \operatorname{Im}(z_1) = 3$

d) $\operatorname{Re}(z_4) = 0, \operatorname{Im}(z_4) = 1$

b) $\operatorname{Re}(z_2) = 3, \operatorname{Im}(z_2) = -4$

e) $\operatorname{Re}(z_5) = 0, \operatorname{Im}(z_5) = -2$

c) $\operatorname{Re}(z_3) = 6, \operatorname{Im}(z_3) = 0$

f) $\operatorname{Re}(z_6) = 1, \operatorname{Im}(z_6) = 0$

9.2. **Feladat.** Ábrázoljuk a Gauss-féle komplex számsíkon az alábbi komplex számokat:

a) $z_1 = 3$

c) $z_3 = -i$

e) $z_5 = 3 + 2i$

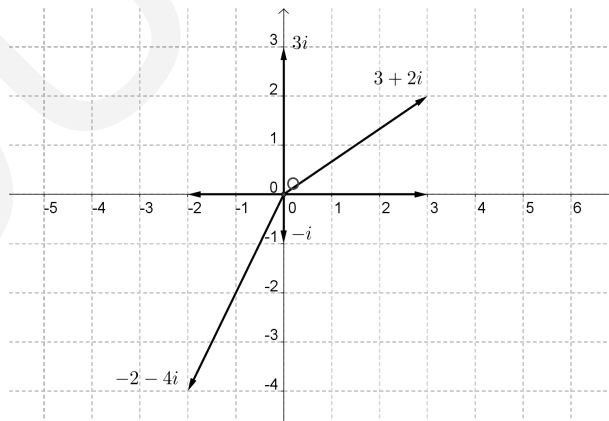
b) $z_2 = -2$

d) $z_4 = 3i$

f) $z_6 = -2 - 4i$

Megoldás:

A komplex számok ábrázolása a Gauss-féle komplex számsíkon:



9.3. Feladat. Ábrázoljuk a Gauss-féle komplex számsíkon az alábbi halmazokat:

a) $A = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) \leq 1\}$

b) $B = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(z) > 0\}$

c) $C = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$

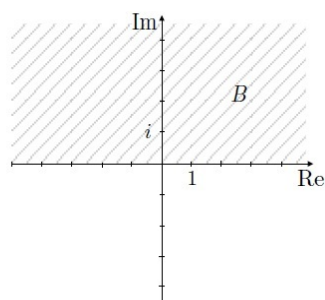
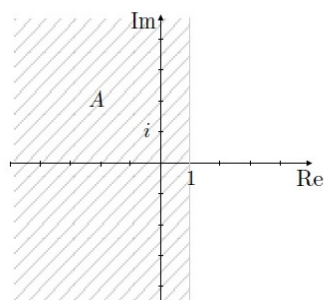
d) $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \geq 1\}$

Megoldás:

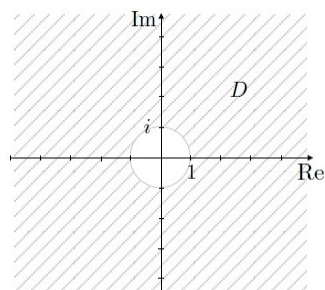
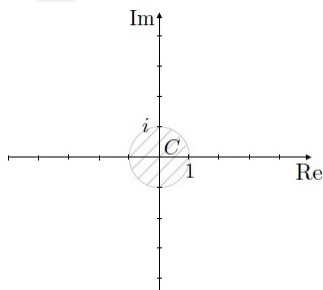
Az A halmaz elemei azok a komplex számok, amelyek valós része legfeljebb 1.

A B halmaz elemei azok a komplex számok, amelyek képzetes része pozitív.

Az A és a B halmazokat a Gauss-féle komplex számsíkon ábrázolhatjuk:



A C halmaz elemei azon komplex számok, melyek abszolút értéke kisebb vagy egyenlő, mint 1, azaz azok a komplex számok, melyeknek az origótól való távolsága nem nagyobb, mint 1. Ezek a pontok az egység sugarú, origó középpontú körön és annak belsejében helyezkednek el. A D halmaz elemei pedig éppen az említett kör és a rajta „kívül eső” pontok halmaza. A C és a D halmazok:



9.4. **Feladat.** Tekintsük a $z_1 = 2 + 3i$ és a $z_2 = 3 - 4i$ komplex számokat! Határozzuk meg a

- | | | |
|--------------------|--|--|
| a) $z_1 + z_2$ | f) $\frac{z_1}{z_2}$ | i) $\operatorname{Im}\left(\frac{z_1}{z_2}\right)$ |
| b) $z_1 \cdot z_2$ | g) $\frac{z_2}{z_1}$ | j) $z_1 + 5\bar{z}_2 + 6$ |
| c) \bar{z}_1 | h) $\operatorname{Re}\left(\frac{z_1}{z_2}\right)$ | k) z_1^2 |
| d) \bar{z}_2 | | l) z_2^2 |
| e) $ z_1 $ | | |

komplex számokat!

Megoldás:

- a) Két algebrai alakú komplex számot úgy adunk össze, hogy a valós részt a valós résszel, a képzetes részt a képzetes résszel összegezzük:

$$z_1 + z_2 = (2 + 3i) + (3 - 4i) = 2 + 3i + 3 - 4i = 5 - i.$$

- b) Két algebrai alakú komplex számot úgy szorzunk össze, hogy minden tagot szorzunk minden taggal:

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= (2 + 3i) \cdot (3 - 4i) = 6 - 8i + 9i - 12i^2 = \\ &= 6 + i - 12 \cdot (-1) = 18 + i. \end{aligned}$$

- c) Az $a + bi$ komplex szám konjugáltja az $a - bi$ komplex szám:

$$\bar{z}_1 = 2 - 3i.$$

A konjugálás geometriai jelentése a valós tengelyre való tükrözés.

- d) A konjugálás definíciója miatt

$$\bar{z}_2 = 3 + 4i.$$

- e) Egy komplex szám hossza a valós részének és képzetes részének a négyzetösszege:

$$|z_1| = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13}.$$

- f) Két algebrai alakú komplex számot úgy osztunk el egymással, hogy bővítjük a törtet a nevező konjugáltjával. Ezután tört törttel való szorzását kapjuk, melyet úgy végzünk el, hogy a számlálót szorozzuk a számlálósval, a nevezőt

a nevezővel:

$$\begin{aligned}\frac{z_1}{z_2} &= \frac{2+3i}{3-4i} = \frac{2+3i}{3-4i} \cdot \frac{3+4i}{3+4i} = \frac{(2+3i) \cdot (3+4i)}{(3-4i)(3+4i)} = \\ &= \frac{6+8i+9i+12i^2}{9-16i^2} = \frac{6+17i-12}{9+16} = \frac{-6+17i}{25} = -\frac{6}{25} + \frac{17}{25}i.\end{aligned}$$

g) A törtet a nevező konjugáltjával bővítve, majd a megfelelő műveleteket elvégezve azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\frac{z_2}{z_1} &= \frac{3-4i}{2+3i} = \frac{3-4i}{2+3i} \cdot \frac{2-3i}{2-3i} = \frac{(3-4i)(2-3i)}{(2+3i)(2-3i)} = \\ &= \frac{6-8i-9i+12i^2}{4-9i^2} = \frac{6-17i-12}{4+9} = \frac{-6-17i}{13} = -\frac{6}{13} - \frac{17}{13}i.\end{aligned}$$

h) A valós rész definíciója szerint

$$\operatorname{Re}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = -\frac{6}{25}.$$

i) A képzetes rész definíciója szerint

$$\operatorname{Im}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \frac{17}{25}.$$

j) Elvégezve a konjugálást, majd összeadva a komplex számokat:

$$\begin{aligned}z_1 + 5\bar{z}_2 + 6 &= 2 + 3i + 5(3 + 4i) + 6 = 2 + 3i + 15 + 20i + 6 = \\ &= 23 + 23i\end{aligned}$$

adódik.

k) Felhasználva, hogy $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$:

$$z_1^2 = (2+3i)^2 = 4 + 12i + 9i^2 = 4 + 12i - 9 = -5 + 12i.$$

l) Felhasználva, hogy $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$:

$$z_2^2 = (3-4i)^2 = 9 - 24i + 16i^2 = 9 - 8i - 16 = -7 - 8i.$$

9.5. Feladat. Határozzuk meg az

$$i^0; i^1; i^2; i^3; i^4; i^{100}; i^{101}; i^{102}; i^{103}; i^{104}$$

$$i^{4k}; i^{4k+1}; i^{4k+2}; i^{4k+3},$$

ha k egész szám? komplex számok értékét!

Megoldás:

Mivel $i^2 = -1$, ezért

$$i^0 = 1; \quad i^1 = i; \quad i^2 = -1; \quad i^3 = i^2 \cdot i = -i; \quad i^4 = (i^2)^2 = 1.$$

Hasonlóan adódna, hogy

$$i^4 = (i^2)^2 = 1; \quad i^5 = i^4 \cdot i = i; \quad i^6 = i^4 \cdot i^2 = -1; \quad i^7 = i^4 \cdot i^3 = -i.$$

A fenti eredményeket is felhasználva

$$\begin{aligned} i^{100} &= (i^4)^{25} = 1^{25} = 1; \\ i^{101} &= i^{100} \cdot i = 1 \cdot i = i; \\ i^{102} &= i^{100} \cdot i^2 = 1 \cdot (-1) = -1; \\ i^{103} &= i^{100} \cdot i^3 = -i; \\ i^{104} &= i^{100} \cdot i^4 = 1 \end{aligned}$$

adódik. Észrevehetjük, hogy 4-es „csoportokban” ismétlődnek az eredmények. Pontosabban fogalmazva, ha i hatványkitevője 4-gyel osztható, akkor a hatvány értéke 1; ha 4-gyel osztva 1 maradékot ad, akkor a hatvány értéke i ; ha 2 maradékot ad, akkor -1 ; ha 3 maradékot ad, akkor $-i$. Tehát:

$$i^{4k} = 1; \quad i^{4k+1} = i; \quad i^{4k+2} = -1; \quad i^{4k+3} = -i.$$

Ezzel minden kért érték kiszámoltunk.

9.6. Feladat. Írjuk fel a $z = -2 - 2i$ komplex szám trigonometrikus alakját!

Megoldás

A $z = a + bi$ komplex szám trigonometrikus alakja

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi),$$

ahol r a komplex szám hossza (abszolútértéke), φ a komplex szám argumentuma, azaz a valós pozitív félegyenesével bezárt szöge.

Jelen esetben a komplex számunk valós része $\operatorname{Re}(z) = -2$, képzetes része $\operatorname{Im}(z) = -2$, így a komplex szám hossza

$$r = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2} = \sqrt{8},$$

továbbá az argumentumra fennáll a

$$\operatorname{tg}(\varphi) = \frac{b}{a} = \frac{-2}{-2} = 1$$

egyenlet, amiből

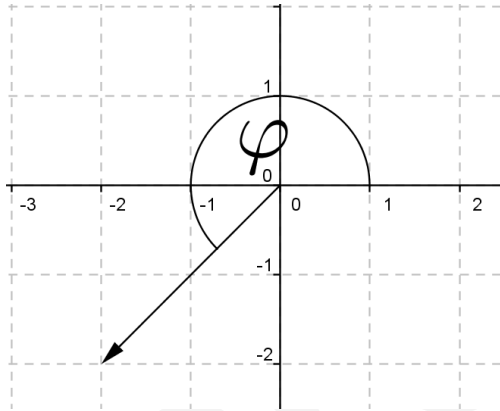
$$\varphi_1 = \frac{\pi}{4}$$

vagy

$$\varphi_2 = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$$

adódik. Az ábrázolás után világos, hogy a megfelelő szög

$$\varphi = \frac{5\pi}{4}.$$



A komplex szám trigonometrikus alakja tehát:

$$z = \sqrt{8} \left(\cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4} \right).$$

9.7. Feladat. Számoljuk ki a $z = -\sqrt{3} + i$ komplex szám harmadik gyökeit!

Megoldás:

Minden komplex számnak n darab n -edik gyöke van. Ezek

$$w_k = \sqrt[n]{r} \cdot \left(\cos \left(\frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right) + i \sin \left(\frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right) \right) \quad (k = 0, \dots, n-1).$$

alakban állnak elő. Jelen esetben harmadik gyököt szeretnénk vonni, azaz $n = 3$, így három megoldás lesz. A komplex szám hossza

$$r = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2,$$

argumentuma

$$\varphi = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}.$$

Behelyettesítve a fenti képletbe

$$\begin{aligned} w_0 &= \sqrt[3]{2} \cdot \left(\cos \left(\frac{5\pi}{6} + 2 \cdot 0\pi \right) + i \sin \left(\frac{5\pi}{6} + 2 \cdot 0\pi \right) \right) = \\ &= \sqrt[3]{2} \cdot \left(\cos \frac{5\pi}{18} + i \sin \frac{5\pi}{18} \right); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w_1 &= \sqrt[3]{2} \cdot \left(\cos \left(\frac{5\pi}{6} + 2 \cdot 1\pi \right) + i \sin \left(\frac{5\pi}{6} + 2 \cdot 1\pi \right) \right) = \\ &= \sqrt[3]{2} \cdot \left(\cos \frac{17\pi}{18} + i \sin \frac{17\pi}{18} \right); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w_2 &= \sqrt[3]{2} \cdot \left(\cos \left(\frac{5\pi}{6} + 2 \cdot 2\pi \right) + i \sin \left(\frac{5\pi}{6} + 2 \cdot 2\pi \right) \right) = \\ &= \sqrt[3]{2} \cdot \left(\cos \frac{29\pi}{18} + i \sin \frac{29\pi}{18} \right). \end{aligned}$$

adódik.

9.8. Feladat. Oldjuk meg a komplex számok halmazán a

$$z^3 + 1 + i = 0$$

egyenletet!

Megoldás:

Kifejezzük z -t az egyenletből:

$$z = \sqrt[3]{-1 - i}.$$

Így a $-1 - i$ komplex szám harmadik gyökeit kell meghatározni. Minden komplex számnak n darab n -edik gyöke van, így 3 darab harmadik gyök van. Ezek

$$w_k = \sqrt[n]{r} \cdot \left(\cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right), \quad (k = 0, \dots, n - 1)$$

alakban állnak elő. Jelen esetben $n = 3$, $r = \sqrt{2}$, $\varphi = \frac{5\pi}{4}$, $k = 0, 1, 2$. Ezt felhasználva az egyenlet megoldásai:

$$\begin{aligned} w_0 &= \sqrt[3]{\sqrt{2}} \cdot \left(\cos \frac{\frac{5\pi}{4} + 2 \cdot 0 \cdot \pi}{3} + i \sin \frac{\frac{5\pi}{4} + 2 \cdot 0 \cdot \pi}{3} \right) = \\ &= \sqrt[6]{2} \cdot \left(\cos \frac{5\pi}{12} + i \sin \frac{5\pi}{12} \right); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w_1 &= \sqrt[3]{\sqrt{2}} \cdot \left(\cos \frac{\frac{5\pi}{4} + 2 \cdot 1 \cdot \pi}{3} + i \sin \frac{\frac{5\pi}{4} + 2 \cdot 1 \cdot \pi}{3} \right) = \\ &= \sqrt[6]{2} \cdot \left(\cos \frac{13\pi}{12} + i \sin \frac{13\pi}{12} \right); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w_2 &= \sqrt[3]{\sqrt{2}} \cdot \left(\cos \frac{\frac{5\pi}{4} + 2 \cdot 2 \cdot \pi}{3} + i \sin \frac{\frac{5\pi}{4} + 2 \cdot 2 \cdot \pi}{3} \right) = \\ &= \sqrt[6]{2} \cdot \left(\cos \frac{21\pi}{12} + i \sin \frac{21\pi}{12} \right). \end{aligned}$$

9.9. Feladat. Határozzuk meg és ábrázoljuk a negyedik egységgyököket!

Megoldás:

Az n -edik egységgyökök az 1 komplex szám n -edik gyökei. Így a negyedik egységgyökök az 1 komplex szám negyedik gyökei. Ezek

$$w_k = \sqrt[n]{r} \cdot \left(\cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right) \quad (k = 0, \dots, n-1)$$

alakban állnak elő. Jelen esetben $n = 4$, $r = 1$, $\varphi = 0$, $k = 0, 1, 2, 3$. Így a negyedik egységgyökök

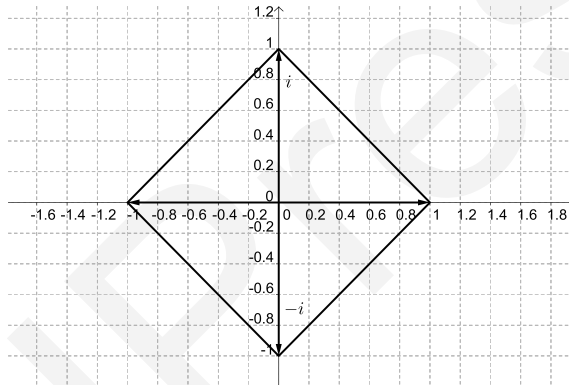
$$\begin{aligned} w_0 &= \sqrt[4]{1} \cdot \left(\cos \frac{0 + 2 \cdot 0 \cdot \pi}{4} + i \sin \frac{0 + 2 \cdot 0 \cdot \pi}{4} \right) = \\ &= \cos 0 + i \sin 0 = 1; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w_1 &= \sqrt[4]{1} \cdot \left(\cos \frac{0 + 2 \cdot 1 \cdot \pi}{4} + i \sin \frac{0 + 2 \cdot 1 \cdot \pi}{4} \right) = \\ &= \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} = i; \end{aligned}$$

$$w_2 = \sqrt[4]{1} \cdot \left(\cos \frac{0 + 2 \cdot 2 \cdot \pi}{4} + i \sin \frac{0 + 2 \cdot 2 \cdot \pi}{4} \right) = \\ = \cos \pi + i \sin \pi = -1$$

$$w_3 = \sqrt[4]{1} \cdot \left(\cos \frac{0 + 2 \cdot 3 \cdot \pi}{4} + i \sin \frac{0 + 2 \cdot 3 \cdot \pi}{4} \right) = \\ = \cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} = -i.$$

Ábrázolva a kapott komplex számokat a Gauss-féle (komplex számsíkon) azt vehetjük észre, hogy a negyedik egységgyökök négyoldalú szabályos sokszög csúcsaiban helyezkednek el. Általánosan igaz, hogy az n -edik egységgyökök n oldalú szabályos sokszög csúcsaiban helyezkednek el.



9.10. Feladat. Oldjuk meg a komplex számok halmazán a

$$z^2 + 2z + 2 = 0$$

másodfokú egyenletet!

Megoldás:

Felírva a másodfokú egyenlet megoldóképletét azt kapjuk, hogy

$$z_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 8}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{-4}}{2} = \\ = \frac{-2 \pm 2i}{2} = -1 \pm i.$$

Az egyenlet megoldásai tehát $z_1 = -1 - i$, illetve $z_2 = -1 + i$.

c) Hasonlóan:

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{3}{\sqrt{2}} \cdot \left(\cos \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3} \right) \right) = \\ &= \frac{3}{\sqrt{2}} \cdot \left(\cos \frac{-\pi}{12} + i \sin \frac{-\pi}{12} \right) = \\ &= \frac{3}{\sqrt{2}} \left(\cos \frac{23\pi}{12} + i \sin \frac{23\pi}{12} \right). \end{aligned}$$

d) Trigonometrikus alakú komplex számokat úgy hatványozunk, hogy az abszolútértéküket hatványozzuk, az argumentumokat szorozzuk a kitevővel:

$$\begin{aligned} z_1^{10} &= \sqrt{2}^{10} \cdot \left(\cos \frac{10\pi}{4} + i \sin \frac{10\pi}{4} \right) = \\ &= 32 \cdot \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right) = 32i. \end{aligned}$$

9.13. **Feladat.** Tekintsük a $z^2 + 2z + 5 = 0$ komplex számok halmazán értelmezett másodfokú egyenletet!

- Határozzuk meg az egyenlet gyökeit!
- Ábrázoljuk a gyököket a Gauss-féle komplex számsíkon!
- Adjuk meg a gyökök összegét és szorzatát!
- Adjuk meg az egyenlet megoldásainak trigonometrikus alakját!
- Adjuk meg az egyenlet megoldásainak exponenciális alakját!

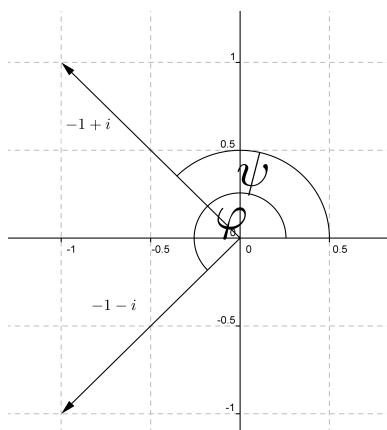
Megoldás:

a) A másodfokú egyenlet megoldóképletét alkalmazva

$$z_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 20}}{2} = \frac{-2 \pm 2i}{2} = -1 \pm i$$

adódik, így $z_1 = 1 - i$, $z_2 = 1 + i$.

b) A komplex számokat a Gauss-féle komplex számsíkon ábrázolhatjuk:



c) A gyökök összege

$$z_1 + z_2 = (1 - i) + (1 + i) = 2,$$

a gyökök szorzata

$$z_1 \cdot z_2 = (1 - i) \cdot (1 + i) = 1 - i^2 = 2.$$

Ezekből a gyökök összegének valós része

$$\operatorname{Re}(z_1 + z_2) = 2,$$

képzetes része

$$\operatorname{Im}(z_1 + z_2) = 0.$$

A gyökök szorzatának valós része

$$\operatorname{Re}(z_1 \cdot z_2) = 2,$$

a gyökök szorzatának képzetes része

$$\operatorname{Im}(z_1 \cdot z_2) = 0.$$

d) A trigonometrikus alakok felírásához meghatározzuk a komplex számok hosszát és argumentumát. A komplex számok hossza

$$|z_1| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2},$$

másrészt

$$|z_2| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}.$$

Az argumentumok leolvashatók az ábrázolásról: $\varphi = 135^\circ$, $\psi = 45^\circ$. Így a trigonometrikus alakok

$$z_1 = \sqrt{2} \cdot (\cos 135^\circ + i \sin 135^\circ),$$

illetve

$$z_2 = \sqrt{2} \cdot (\cos 45^\circ + i \sin 45^\circ).$$

e) Az exponenciális alakok:

$$z_1 = \sqrt{2}e^{i \cdot \frac{3\pi}{4}},$$

illetve

$$z_2 = \sqrt{2}e^{i \cdot \frac{\pi}{4}}.$$

9.14. Feladat. Bizonyítsuk be, hogy minden $\varphi \in \mathbb{R}$ esetén egyrészt

$$\cos 2\varphi = \cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi,$$

másrészt

$$\sin 2\varphi = 2 \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi.$$

Megoldás:

Tekintsük a

$$z = \cos \varphi + i \cdot \sin \varphi$$

komplex számot. Ennek a négyzete (algebrai alakú komplex számként tekintve):

$$z^2 = (\cos \varphi + i \cdot \sin \varphi)^2 = \cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi + i \cdot 2 \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi.$$

Másrészt z trigonometrikus alakú komplex számnak is tekinthető. A négyzetre emelést ilyen alakban elvégezve

$$z^2 = \cos 2\varphi + i \cdot \sin 2\varphi$$

adódik. A két komplex számnak meg kell egyeznie, ami pontosan akkor teljesül, ha a valós részük is és a képzetes részük is megegyezik, ezért egyrészt

$$\cos 2\varphi = \cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi,$$

másrészt

$$\sin 2\varphi = 2 \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi.$$

9.15. Feladat. Bizonyítsuk be, hogy minden $\varphi \in \mathbb{R}$ esetén egyrészt

$$\cos 3\varphi = \cos^3 \varphi - 3 \cdot \cos^2 \varphi \cdot \sin \varphi,$$

másrészt

$$\sin 3\varphi = \sin^3 \varphi - 3 \cdot \sin^2 \varphi \cdot \cos \varphi.$$

Megoldás:

Tekintsük a

$$z = \cos \varphi + i \cdot \sin \varphi$$

komplex számot. Ennek a harmadik hatványa:

$$\begin{aligned} z^3 &= (\cos \varphi + i \cdot \sin \varphi)^3 = \\ &= \cos^3 \varphi - 3i \cdot \cos^2 \varphi \cdot \sin \varphi + 3 \cdot \sin^2 \varphi \cdot i^2 \cdot \sin^2 \varphi - i^3 \cdot \sin^3 \varphi = \\ &= \cos^3 \varphi - 3 \cdot \cos \varphi \cdot \sin^2 \varphi + i \cdot (\sin^3 \varphi - 3 \cdot \sin^2 \varphi \cdot \cos \varphi). \end{aligned}$$

Másrészt z trigonometrikus alakú komplex számnak is tekinthető. A harmadik hatványra emelést ilyen alakban elvégezve

$$z^3 = \cos 3\varphi + i \cdot \sin 3\varphi$$

adódik. A két komplex számnak meg kell egyeznie, ami pontosan akkor teljesül, ha a valós részük is és a képzetes részük is megegyezik, ezért egyrészt

$$\cos 3\varphi = \cos^3 \varphi - 3 \cdot \cos^2 \varphi \cdot \sin \varphi,$$

másrészt

$$\sin 3\varphi = \sin^3 \varphi - 3 \cdot \sin^2 \varphi \cdot \cos \varphi.$$

9.16. Feladat. Bizonyítsuk be, hogy

$$\sin \varphi + \sin 2\varphi + \dots + \sin n\varphi = \frac{\sin \frac{(n+1)\varphi}{2}}{\sin \frac{\varphi}{2}} \sin \frac{n\varphi}{2}.$$

Megoldás:

Tekintsük a $z = e^{i\varphi}$ exponenciális alakban megadott komplex számot. Ennek a trigonometrikus alakja:

$$z = \cos \varphi + i \cdot \sin \varphi.$$

Az alábbi összeget trigonometrikus alakokkal írva, majd trigonometrikus alakban elvégezve a hatványozást

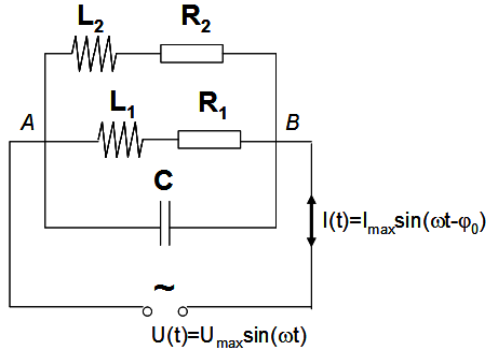
$$\begin{aligned} 1 + z + z^2 + \dots + z^n &= \\ &= 1 + \cos \varphi + i \sin \varphi + (\cos \varphi + i \sin \varphi)^2 + (\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = \\ &= 1 + \cos \varphi + i \sin \varphi + \cos 2\varphi + i \sin 2\varphi + \cos n\varphi + i \sin n\varphi = \\ &= 1 + \cos \varphi + \cos 2\varphi + \dots + \cos n\varphi + i \sin \varphi + i \sin 2\varphi + \dots + i \sin n\varphi = \\ &= 1 + \cos \varphi + \cos 2\varphi + \dots + \cos n\varphi + i(\sin \varphi + \sin 2\varphi + \dots + \sin n\varphi). \end{aligned}$$

Másrészt

$$\begin{aligned}
 1 + z + z^2 + \dots + z^n &= \\
 &= \frac{z^{n+1} - 1}{z - 1} = \frac{e^{i(n+1)\varphi} - 1}{e^{in\varphi} - 1} = \\
 &= \frac{e^{\frac{i(n+1)\varphi}{2}} \left(e^{\frac{i(n+1)\varphi}{2}} - e^{-\frac{i(n+1)\varphi}{2}} \right)}{e^{\frac{i\varphi}{2}} \left(e^{\frac{i\varphi}{2}} - e^{-\frac{i\varphi}{2}} \right)} = \\
 &= e^{in\varphi} \cdot \frac{\cos(n+1)\varphi + i \sin(n+1)\varphi - \cos(n+1)\varphi + i \sin(n+1)\varphi}{\cos \varphi + i \sin \varphi - \cos \varphi + i \sin \varphi} = \\
 &= e^{in\varphi} \cdot \frac{2i \sin(n+1)\varphi}{2i \sin \varphi} = e^{in\varphi} \cdot \frac{\sin(n+1)\varphi}{\sin \varphi} = \\
 &= (\cos n\varphi + i \sin n\varphi) \cdot \frac{\sin(n+1)\varphi}{\sin \varphi} = \\
 &= \cos n\varphi \cdot \frac{\sin(n+1)\varphi}{\sin \varphi} + i \sin n\varphi \cdot \frac{\sin(n+1)\varphi}{\sin \varphi}.
 \end{aligned}$$

A kapott eredményeket összegezve adódik a bizonyítandó összefüggés.

9.17. **Feladat.** Tekintsük az alábbi váltóáramú hálózatot:



Adatok:

$$U_{\text{eff}} = 220 \text{ [V]}; f = 50 \text{ [Hz]}; L_1 = 0,1 \text{ H}; L_2 = 0,15 \text{ [H]};$$

$$C = 5 \cdot 10^{-5} \text{ [F]}; R_1 = 3 \text{ [\Omega]}; R_2 = 4 \text{ [\Omega]}.$$

- Határozzuk meg a komplex, majd a valós impedanciát az alábbi váltóáramú hálózatok A és B pontja között!
- Határozzuk meg a φ_0 fázisszöget!

- c) Határozzuk meg a főágban folyó áramerősség effektív értékét!
 d) Adjuk meg az áramerősséget az idő függvényében!

Megoldás:

- a) Mivel

$$\omega = 2\pi \cdot f \approx 314,16 \left[\frac{1}{s} \right],$$

ezért egyrészt

$$\hat{X}_{L_1} = \omega \cdot L_1 \cdot i \approx 31,42i \text{ } [\Omega],$$

másrészt

$$\hat{X}_{L_2} = \omega \cdot L_2 \cdot i \approx 47,12i \text{ } [\Omega].$$

A fentiek felhasználásával az induktív ellenállás egyrészt

$$\hat{Z}_1 = R_1 + \hat{X}_{L_1} = (3 + 31,42i) \text{ } [\Omega],$$

másrészt

$$\hat{Z}_2 = R_2 + \hat{X}_{L_2} + R_2 = (4 + 47,12i) \text{ } [\Omega].$$

A kapacitív ellenállás

$$\hat{X}_C = -\frac{1}{\omega \cdot C} \cdot i \approx -63,66i \text{ } [\Omega].$$

Az eredő komplex impedancia

$$\begin{aligned} \frac{1}{\hat{Z}} &= \frac{1}{\hat{Z}_1} + \frac{1}{\hat{Z}_2} + \frac{1}{\hat{X}_C} = \frac{1}{3 + 31,42i} + \frac{1}{4 + 47,12i} + \frac{1}{-63,66i} = \\ &= \frac{1}{3 + 31,42i} \cdot \frac{3 - 31,42i}{3 - 31,42i} + \frac{1}{4 + 47,12i} \cdot \frac{4 - 47,12i}{4 - 47,12i} + \\ &+ \frac{1}{-63,66i} \cdot \frac{i}{i} = \frac{3 - 31,42i}{9 + 31,42^2} + \frac{4 - 47,12i}{16 + 47,12^2} + \frac{i}{63,66} \approx \\ &\approx 0,048 - 0,0369i \left[\frac{1}{\Omega} \right], \end{aligned}$$

így

$$\hat{Z} = \frac{1}{0,048 - 0,0369i} \approx 13,09 + 10,07i \text{ } [\Omega].$$

A valós impedancia

$$Z = \sqrt{13,09^2 + 10,07^2} \approx 13,13 \text{ } [\Omega].$$

- b) A fázisszög:

$$\varphi_0 = \arctan \frac{10,07}{13,09} \Rightarrow \varphi_0 \approx 37,57^\circ.$$

c) Az effektív áramerősség

$$I_{\text{eff}} = \frac{U_{\text{eff}}}{Z} = \frac{220}{13,13} \approx 16,76 \text{ [A]}.$$

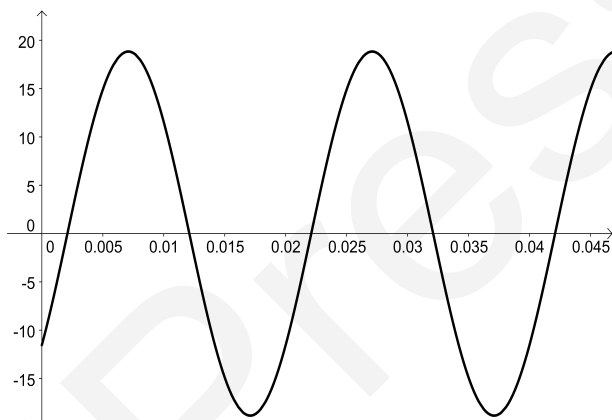
d) A maximális áramerősség

$$I_{\text{max}} = I_{\text{eff}} \cdot \sqrt{2} \approx 23,7 \text{ [A]}.$$

Az áramerősség-idő függvény

$$I(t) = I_{\text{max}} \cdot \sin(\omega t - \varphi_0) = 23,7 \cdot \sin(314,16t - 0,21\pi).$$

A függvény grafikonja:



Irodalomjegyzék

- [1] Babcsányi István – Gyurmánczi János – Szabó Lajos – Wettl Ferenc, *Matematika feladatgyűjtemény I.*, Műegyetemi Kiadó, 2009.
- [2] Bárd Ágnes – Frigyesi Miklós – Lukács Judit – Major Éva – Székely Péter – Vancsó Ödön, *Készüljünk az érettségire matematikából emelt szinten (feladatgyűjtemény)*, Műszaki Kiadó, 2006.
- [3] Bartha Gábor – Bogdán Zoltán – Duró Lajosné dr. – Gyapjas Ferencné – Hack Frigyes – dr. Kántor Sándorné – dr. Korányi Erzsébet, *Matematika feladatgyűjtemény II.*, Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 2000.
- [4] Bárczy Barnabás, *Differenciálszámítás*, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1994.
- [5] Benkő Pálné – Diószegi Ferencné – Serény György, *Matematika feladattár II*, Műegyetemi Kiadó, 2002.
- [6] Bíró Fatime – Vincze Szilvia, *A gazdasági matematika alapjai*, Debreceni Egyetemi Kiadó, 2010.
- [7] Császár Ákosné, *Matematika I/1*, Műegyetemi Kiadó, 2003.
- [8] Csikós Pajor Gizella – Péics Hajnalka, *Analízis elméleti összefoglaló és példatár*, Bolyai Farkas Alapítvány, Zenta, 2010.
- [9] Denkinger Géza – Gyurkó Lajos, *Analízis gyakorlatok*, Nemzeti Tankönyvkiadó, 1987.
- [10] Farkas István, *Differenciálszámítás gyakorlati jegyzet*, Debreceni Egyetem, 2005.
- [11] Gábos Adél – Halmos Mária, *Készüljünk az érettségire matematikából közép-, emelt szinten*, Műszaki Könyvkiadó, 2005.
- [12] Dr. Gerőcs László – Juhász István – Orosz Gyula – Paróczay József – Számadó László – Szászné Dr. Simon Judit, *Matematika emelt szintű tananyag*, Nemzedékek Tudása Tankönyvkiadó, 2013.
- [13] Gilbert János – Sólyom András – Kocsányi László, *Fizika mérnököknek I-II*, Egyetemi Tankönyv, Műegyetemi Kiadó, 1999.
- [14] J. Harcet – L. Heinrichs – P. M. Seiler – M. T. Skoumal, *Mathematics Higher Level*, Oxford University Press, 2012.
- [15] Horváth Eszter – Inges János – Nagyné Pálmai Piroska – Róka Sándor – Tassy Gergely, *Tehetséggondozás a matematikában*, <http://users.itk.ppke.hu/adorjan/matematika/list.html>, 2011.
- [16] Jakus G. – Kis M. – Magyar T. – Zombori N., *Analízis példatár*, Budapest, 2014.
- [17] Kézi Csaba Gábor, *Differenciálszámítás és alkalmazásai feladatgyűjtemény*, 2016.
- [18] Király Balázs, *Analízis (gyakorlat támogató jegyzet)*, elektronikus oktatási segédanyag, <http://tamop412a.ttk.pte.hu/files/analizis.pdf>, 2011.
- [19] Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapok, 1996. január, 51. oldal, 2869. fizika feladat, <http://db.komal.hu/KomalHU/felhivatkoz.phtml?id=41005>

- [20] Nagyné Kondor Rita – Szíki Gusztáv Áron, *Matematika eszközök mérnöki alkalmazásokban*, Egyetemi jegyzet, Debreceni Egyetem, 2011.
- [21] Kovács József – Takács Gábor – Takács Miklós, *Analízis*, Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 1986.
- [22] Kovács István – Trembeczki Csaba, *Sokszínű matematika feladatgyűjtemény, az analízis elemei, 11 – 12 emelt szint*, Mozaik Kiadó, Szeged, 2011.
- [23] Lengyel Csilla Mária, *Szélsőérték-feladatok különböző megoldási módszerei*, ELTE, szakdolgozat, 2012.
- [24] Lial M. L. – Greenwell R. N. – Ritchey N. P., *Calculus with applications*, Pearson, 2012.
- [25] Mendelson E., *3000 solved problems in calculus*, McGraw-Hill Companies, 1988.
- [26] Nándori Frigyes – Szirbik Sándor, *Statika oktatási segédlet a Gépészmérnöki és Informatikai Kar Bsc levelezős hallgatói részére*, Mechanikai Tanszék, Miskolc-Egyetemváros, 2008.
- [27] Pintér Lajos, *Analízis I*, Typotex, 1998.
- [28] Rosser M., *Basic mathematics for economists*, Routledge, 2003.
- [29] Sikolya Eszter, *Analízis jegyzet Matematikatanári Szakosok részére*, elektronikus jegyzet, tankonyvtar.ttk.bme.hu, 2013.
- [30] Simon Anita, *Az analízis néhány közgazdaságtani alkalmazása*, szakdolgozat, Eötvös Loránd Tudományegyetem, Természettudományi Kar, 2009.
- [31] Szentelekiné Dr. Páles Ilona, *Analízis példatár*, Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 2011.
- [32] Stewart J., *Calculus*, Brooks/Cole, 2012.
- [33] Tan S. T., *Applied Calculus for the Managerial, Life and Social Sciences*, Brooks/Cole, 1999.
- [34] Thomas G. B. – Weir M. D. – Hass J. – Giordano F. R., *Thomas féle kalkulus I. kötet*, Typotex, Budapest, 2008.

Tartalomjegyzék

1. Logikai állítások, műveletek	5
2. Halmazelméleti alapok	10
3. Relációk	34
4. Függvények	44
5. Elemi függvények	60
6. Függvények gazdasági alkalmazásai	88
7. Függvények fizikai és biológiai alkalmazásokban	100
8. Halmazok számossága	108
9. Komplex számok	114
Irodalomjegyzék	131