Összeg alakú függvényegyenletek stabilitása

Stability of sum form functional equations

doktori (PhD) értekezés tézisei

KOCSIS IMRE

Debreceni Egyetem
Debrecen, 2003

1. BEVEZETÉS

E PhD tézisek a függvényegyenletek témakörében – a matematikának a XX. század második felében intenzív fejlõdésnek indult területén – tartalmaznak új eredményeket. Ezek az eredmények olyan függvényegyenletekhez kapcsolódnak, amelyek információ-elméleti eredetûek, úgynevezett információmértékek elõállításához kötõdnek.

Azt vizsgáljuk, hogy ezek az egyenletek rendelkeznek-e egy meghatározott stabilitási tulajdonsággal. A stabilitási tulajdonság definiálásában S.M. Ulam gondolatait követjük, aki egy elõadásában, amelyet a Wisconsin egyetemen tartott 1940-ben, a következõ problémát vetette fel (Ulam [U64]):

Legyen $(G,\circ)$ *egy csoport,* $(H,*)$ *pedig egy metrikus csoport* d *metrikával. Igaz-e, hogy minden* $\varepsilon>0$ *számhoz van olyan* $\delta>0$ *szám, hogy bármely* $f:G\to H$ *függvényhez, melyre minden* $x,y\in G$ *esetén fennáll a*

$$d\,(\,f(x\circ y)\,,\,f(x)*f(y)\,) < \varepsilon$$

egyenlõtlenség van olyan $A:G\to H$ *homomorfizmus, vagyis az*

$$f(x\circ y) = f(x)*f(y)$$

ún. Cauchy egyenletnek eleget tevõ függvény, melyre

$$d\,(\,f(x)\,,\,A(x)\,) < \delta$$

minden $x\in G$ *mellett?*

Hasonló kérdést számos más egyenlettel (sõt egyenlõtlenséggel) kapcsolatban is felvetettek. Ennek nyomán a témakörben többszáz dolgozat született. Ezekrõl összefoglaló áttekintések a Forti [F95], Ger [G94], Hyers-Isac-Rassias [HIR98] és a Székelyhidi [S00] munkákban találhatók.

1.1. JELÖLÉSEK

A tételek sorszáma megegyezik a disszertációban alkalmazott sorszámmal.

R a valós számok halmazát jelöli, k legyen egy tetszõleges, rögzített, pozitív egész szám. Ha $c\in R$, akkor $\underline{c}=(c,c,\dots,c)\in R^k$.

Ha $x=(x_1,x_2,\dots,x_k)$ és $y=(y_1,y_2,\dots,y_k)$ az R^k halmaz elemei, akkor legyen $x\bullet y = (x_1y_1,x_2y_2,\dots,x_ky_k)\in R^k$.

Legyen $J = [0,1]^k$, $J^0 =]0,1[^k$ és $\Delta^k = \{(x,y) \mid x,y,x+y\in J\}$, továbbá az $n\geq 2$ természetes számokra definiáljuk a következõ halmazokat:

$$\Gamma_n = \Gamma_n^{[k]} = \left\{(p_1,\dots,p_n)\in J^n \,\middle|\, \sum_{i=1}^n p_i = \underline{1}\right\},$$

$$\Gamma_n^0 = \Gamma_n^{0[k]} = \left\{(p_1,\dots,p_n)\in \left(J^0\right)^n \,\middle|\, \sum_{i=1}^n p_i = \underline{1}\right\}.$$

A Γ_n és a Γ_n^0 halmazok elemeire a következõ jelöléseket fogjuk használni: ha $P\in\Gamma_n$ vagy $P\in\Gamma_n^0$, akkor $P=(p_1,p_2,\dots,p_n)=(p_{ij})_{k\times n}$.

Ha egy állításban a J vagy a J^0 halmaz, illetve a Γ_n vagy a Γ_n^0 halmaz egyaránt állhat, akkor ennek kifejezésére az Y, illetve az Ω_n jelöléseket használjuk.

Az $A:R^k\to R$ függvény **additív**, ha minden $x,y\in R^k$ esetén

$$A(x+y) = A(x) + A(y).$$

Az $M:Y\to R$ függvény **multiplikatív** az Y halmazon, ha minden $x,y\in Y$ esetén

$$M(x\bullet y) = M(x)\cdot M(y).$$

A II.2. és III.2. fejezetekben olyan speciális multiplikatív függvényekkel dolgozunk, melyek rendelkeznek a hatványfüggvények bizonyos tulajdonságaival. Az $M:]0,1[\to R$ multiplikatív függvényt **normális**nak nevezzük, ha $M(x)\neq 0$, $x\in]0,1[$. Az $M:[0,1]\to R$ multiplikatív függvényt **normális**nak nevezzük, ha $M(0)=0$, $M(1)=1$ és $M(x)\neq 0$, $x\in]0,1[$.

Az $L:]0,1[\to R$ függvény **logaritmikus** a $]0,1[$ halmazon, ha minden $x,y\in]0,1[$ esetén

$$L(x\cdot y) = L(x) + L(y).$$

Az $L:[0,1]\to R$ függvény **logaritmikus** a $[0,1]$ halmazon, ha $L(0)=0$ és minden $x,y\in]0,1]$ esetén

$$L(x\cdot y) = L(x) + L(y).$$

1.2. STABILITÁSI PROBLÉMA AZ ÖSSZEG ALAKÚ FÜGGVÉNYEGYENLETEKRE

Legyen $D=\{ f \mid f:Y\to R \}$, $E=\{ h \mid h:Y\times Y\to R \}$, $F: D\to E$ rögzített és $f\in D$. A disszertációban vizsgált függvényegyenletek mindegyike felírható a következõ alakban:

(1) $$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} F(f)(p_i,q_j)=0, \quad (p_1,\ldots,p_n)\in\Omega_n,\ (q_1,\ldots,q_m)\in\Omega_m,$$

ahol $n\geq 3$ és $m\geq 3$ rögzített egész, f ismeretlen függvény. Az (1) alakú függvényegyenleteket **összeg alakú függvényegyenlet**eknek nevezzük.

A disszertáció II. fejezetében olyan esetekkel foglalkozunk, amikor $\mathbf{(Y,\Omega_n)=(J,\Gamma_n)}$ (**zárt alaphalmaz**), a III. fejezetben pedig olyanokkal, amikor $\mathbf{(Y,\Omega_n)=(J^0,\Gamma_n^0)}$ (**nyílt alaphalmaz**).

Ha k=1, akkor azt mondjuk, hogy a probléma **egydimenziós**, a $k\geq 1$ (általános) esetet **többdimenziós**nak nevezzük.

Ulam nyomán azt mondjuk, hogy **az (1) összeg alakú függvényegyenlet stabil**, ha bármely $0\leq\varepsilon\in R$ esetén létezik olyan $0\leq\delta\in R$, hogy bármely $g\in D$ függvényhez, melyre minden $(p_1,\ldots,p_n)\in\Omega_n$ és $(q_1,\ldots,q_m)\in\Omega_m$ esetén fennáll a

$$\left|\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} F(g)(p_i,q_j)\right|\leq\varepsilon,$$

egyenlõtlenség, létezik olyan f megoldása az (1) egyenletnek, hogy

$$|\, g(x)-f(x)\,|\leq\delta, \qquad x\in Y.$$

1.3. INFORMÁCIÓELMÉLETI EREDETÛ, ÖSSZEG ALAKÚ FÜGGVÉNYEGYENLETEK

Egy $(I_n)_{n=2}^{\infty}$ függvénysorozatot, ahol I_n valós értékû függvény a Γ_n vagy a Γ_n^0 halmazon (n=2,3,…), **információmérték**nek nevezünk. (lásd [AD75] és [ESS98])

Az $\Omega_n\times\Omega_m$ halmazon értelmezzük a $\otimes$ függvényt a következõ módon: ha $P=(p_1,\ldots,p_n)\in\Omega_n$, $Q=(q_1,\ldots,q_m)\in\Omega_m$, akkor legyen

$$P\otimes Q=(p_1q_1,\ldots,p_1q_m,p_2q_1,\ldots,p_2q_m,\ldots,p_nq_1,\ldots,p_nq_m)\in\Omega_{nm}\ .$$

Az $I_n:\Omega_n \to R$ függvényekbõl álló $(I_n)_{n=2}^{\infty}$ függvénysorozat (információmérték)

(α,n,m)-additív (*$\alpha \in R$, $n \geq 2$, $m \geq 2$ rögzített egészek*), ha

$$I_{nm}(P \otimes Q) = I_n(P) + I_m(Q) + (2^{1-\alpha} - 1) \cdot I_n(P) \cdot I_m(Q),$$

$P \in \Omega_n$, $Q \in \Omega_m$,

(n,m)-additív az M_1,M_2 függvényekkel súlyozva (*$n \geq 2$ és $m \geq 2$ rögzített egészek, $M_1,M_2:Y \to R$ rögzített multiplikatív függvények*), ha

$$I_{nm}(P \otimes Q) = \sum_{i=1}^{n} M_1(p_i)\, I_m(Q) + \sum_{j=1}^{m} M_2(q_j)\, I_n(P),$$

$P \in \Omega_n$, $Q \in \Omega_m$,

összeg tulajdonságú, ha létezik olyan $f:Y \to R$ függvény, melyre

$$I_n(p_1,\dots,p_n) = \sum_{i=1}^{n} f(p_i), \qquad n=2,3,\dots \,.$$

(lásd például [ESS98])

A disszertáció fõ célkitûzése az (α,n,m)-additív, összeg tulajdonságú információmértékek elõállításával kapcsolatos **BEHARA-NATH II. EGYENLET**:

(B-N II.)
$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} f(p_i \bullet q_j) = \sum_{i=1}^{n} f(p_i) \sum_{j=1}^{m} f(q_j),$$

valamint a multiplikatív függvényekkel súlyozottan (n,m)-additív, összeg tulajdonságú információmértékek elõállításával kapcsolatos **MULTIPLIKATÍV TÍPUSÚ ÖSSZEG ALAKÚ EGYENLET**:

(M)
$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} f(p_i \bullet q_j) = \sum_{i=1}^{n} M_1(p_i) \sum_{j=1}^{m} f(q_j) + \sum_{j=1}^{m} M_2(q_j) \sum_{i=1}^{n} f(p_i)$$

stabilitásának igazolása – bizonyos feltételek mellett. Az egyenletekben $f:Y \to R$ ismeretlen függvény, $M_1,M_2:Y \to R$ rögzített multiplikatív függvények, és az egyenlõségek fennállnak minden $(p_1,\dots,p_n) \in \Omega_n$ és $(q_1,\dots,q_m) \in \Omega_m$ esetén.

A fenti egyenletek származtatása megtalálható például [ESS98]-ban.

2.1. EGY EGYSZERÛ ÖSSZEG ALAKÚ EGYENLET STABILITÁSA

Az összeg alakú függvényegyenletek vizsgálatában alapvetõ szerepet játszik a

(S) $$\sum_{i=1}^{n} \varphi(p_i) = d \ ,$$

egyszerû összeg alakú függvényegyenlet, ahol $\varphi:Y\to R$ ismeretlen függvény, $d\in R$ rögzített és (S) fennáll minden $(p_1,\dots,p_n)\in\Omega_n$ esetén.

Az (S) egyenlet stabilitását egydimenzióban, zárt alaphalmazon Maksa Gyula mutatta ki [M94]-ben.

TÉTEL II.1.1. (Maksa [M94]) Legyen $0\le\varepsilon\in R$ és $d\in R$ rögzített, $\varphi:[0,1]\to R$. Ha minden $(p_1,\dots,p_n)\in\Gamma_n^{[1]}$ esetén

(2) $$\left|\sum_{i=1}^{n} \varphi(p_i) - d\right| \le \varepsilon ,$$

akkor létezik olyan $a:R\to R$ additív és olyan $b:[0,1]\to R$ függvény, melyre

$$\varphi(x) - \varphi(0) = a(x) + b(x), \qquad x\in[0,1]$$

és

$$|b(x)| \le 18 \cdot \varepsilon, \qquad x\in[0,1].$$

A II.1.1. TÉTEL bizonyításának alapja, hogy a Cauchy egyenlet stabil Δ^1-en:

TÉTEL II.1.2. (Maksa [M94]) Legyen $0\le\varepsilon\in R$ rögzített és $f:[0,1]\to R$. Ha az f függvény ε-additív Δ^1-en, azaz

(3) $$|f(x+y) - f(x) - f(y)| \le \varepsilon, \qquad (x,y)\in\Delta^1$$

akkor létezik olyan $a:R\to R$ additív és olyan $b:[0,1]\to R$ függvény, melyre

$$f(x) = a(x) + b(x), \qquad x \in [0,1]$$

és

$$|b(x)| \leq 9 \cdot \varepsilon, \qquad x \in [0,1].$$

A II.1.1. TÉTEL általánosítását jelentõ II.1.5. TÉTEL igazolásának alapja a II.1.2. TÉTEL alábbi általánosítása a Δ^k (k>1) halmazokra:

TÉTEL II.1.3. (Kocsis, [K]) Legyen $0 \leq \varepsilon \in R$ rögzített és $f:J \to R$. Ha az f függvény teljesíti a (3) egyenlõtlenséget minden $(x,y) \in \Delta^k$ esetén, akkor létezik olyan $a:R^k \to R$ additív és olyan $b:J \to R$ függvény, melyre

$$f(x) = a(x) + b(x), \qquad x \in J$$

és

$$|b(x)| \leq 3^{k+2} \cdot \varepsilon, \qquad x \in J.$$

Legyen $\emptyset \neq D \subset R^k \times R^k$, $D_x = \{x | \exists y:(x,y) \in D\}$, $D_y = \{y | \exists x:(x,y) \in D\}$, $D_{x+y} = \{z | \exists (x,y) \in D: z = x+y\}$, $I = D_x \cup D_y \cup D_z$, legyen továbbá $f:I \to R$.

Az **f** függvényt **additív**nak nevezzük **D-n**, ha a Cauchy egyenlet fennáll minden $(x,y) \in D$ esetén. (lásd [DL67]) Továbbá a **D** halmazt **egyértelmûen additív típusú**nak nevezzük (*Daróczy Zoltán, Függvényegyenletek címû elõadássorozat, 1996*), ha abból, hogy az f függvény additív D-n következik, hogy egyértelmûen létezik egy olyan, az R^k halmazon értelmezett, additív függvény, melynek az I-re való leszûkítése f.

Következmény. A Δ^K HALMAZ ($K \geq 1$ RÖGZÍTETT EGÉSZ) EGYÉRTELMÛEN ADDITÍV TÍPUSÚ, AZAZ HA AZ $F:J \to R$ FÜGGVÉNY ADDITÍV A Δ^K HALMAZON, AKKOR EGYÉRTELMÛEN LÉTEZIK EGY OLYAN $A:R^K \to R$ ADDITÍV FÜGGVÉNY, MELYNEK J-RE VALÓ LESZÛKÍTÉSE F. (LEGYEN UI. A II.1.3. Tételben $\varepsilon=0$.) (LÁSD MÉG [ESS98])

A disszertáció II.1. fejezetének fõ eredménye a II.1.5. TÉTEL, amely szerint az (1) egyenlet stabil, ha Y=J, $\Omega_n = \Gamma_n$ és $F(f)(p,q) = \frac{1}{m} f(p)$, $(p,q) \in J^2$, vagyis az (S) egyenlet stabil többdimenzióban, zárt alaphalmazon.

TÉTEL II.1.5. (Kocsis, [K]) Legyen $n \geq 3$ rögzített egész, $0 \leq \varepsilon \in R$ és $d \in R$ rögzített. Ha a $\varphi:J \to R$ függvény eleget tesz a (2) egyenlõtlenségnek minden $(p_1,\ldots,p_n) \in \Gamma_n$ esetén, akkor létezik olyan $a:R^k \to R$ additív és olyan $b:J \to R$ függvény, melyre

$$\varphi(x) - \varphi(\underline{0}) = a(x) + b(x), \qquad x\in J$$

és

$$|b(x)| \le 2\cdot 3^{k+2}\cdot\varepsilon, \qquad x\in J.$$

2.2. A MULTIPLIKATÍV TÍPUSÚ ÖSSZEG ALAKÚ EGYENLET STABILITÁSA EGYDIMENZIÓBAN, ZÁRT ALAPHALMAZON

A disszertáció II.2. fejezetének fõ eredménye a II.2.2. TÉTEL, amely szerint az (1) egyenlet stabil, ha $Y=[0,1]$, $\Omega_n=\Gamma_n^{[1]}$, $\Omega_m=\Gamma_m^{[1]}$, $M_1,M_2:[0,1]\to R$ rögzített normális multiplikatív függvények (legalább az egyik különbözik a [0,1] intervallum identikus függvényétõl) és $F(f)(p,q) = f(p\bullet q) - M_1(p)\cdot f(q) - f(p)\cdot M_2(q)$, $(p,q)\in[0,1]^2$, vagyis az (M) egyenlet stabil egydimenzióban, zárt alaphalmazon. (Kocsis-Maksa [KM98], Kocsis [K01])

TÉTEL II.2.2. (Kocsis-Maksa [KM98], Kocsis [K01]) Legyen $n\ge 3$ és $m\ge 3$ rögzített egész, $0\le\varepsilon\in R$ rögzített és legyenek $M_1,M_2:[0,1]\to R$ rögzített normális multiplikatív függvények, melyek közül legalább az egyik különbözik a [0,1] intervallum identikus függvényétõl. Ha az $f:[0,1]\to R$ függvény minden $(p_1,\dots,p_n)\in\Gamma_n^{[1]}$ és $(q_1,\dots,q_m)\in\Gamma_m^{[1]}$ esetén eleget tesz a

$$\left|\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} f(p_i q_j) - \sum_{i=1}^{n} M_1(p_i)\sum_{j=1}^{m} f(q_j) - \sum_{j=1}^{m} M_2(q_j)\sum_{i=1}^{n} f(p_i)\right| \le \varepsilon,$$

egyenlõtlenségnek, akkor léteznek olyan $a_1,a_2:R\to R$ additív, $L:[0,1]\to R$ logaritmikus, $B_1,B_2:[0,1]\to R$ korlátos függvények, és létezik olyan $C\in R$, hogy

$$f(p) = a_1(p) + C(M_1(p) - M_2(p)) + B_1(p), \quad p\in[0,1], \quad \text{ha} \quad M_1\ne M_2,$$

$$f(p) = a_2(p) + M_1(p)L(p) + B_2(p), \quad p\in[0,1], \quad \text{ha} \quad M_1=M_2.$$

2.3. A BEHARA-NATH II. EGYENLET STABILITÁSA TÖBBDIMENZIÓBAN, ZÁRT ALAPHALMAZON

A disszertáció II.3. fejezetének fõ eredménye a II.3.3. TÉTEL, amely szerint az (1) egyenlet stabil, ha $Y=J$, $\Omega_n=\Gamma_n$, $\Omega_m=\Gamma_m$ és $F(f)(p,q) = f(p\bullet q) - f(p)\cdot f(q)$, $(p,q)\in J^2$, vagyis a (B-N II.) egyenlet stabil többdimenzióban, zárt alaphalmazon.

A (B-N II.) egyenlet stabilitását egydimenzióban, zárt alaphalmazon Maksa Gyula mutatta ki [M94]-ben:

TÉTEL II.3.2. (Maksa [M94]) Legyen $n\geq 3$ és $m\geq 3$ rögzített egész és $0\leq\varepsilon\in R$ rögzített. Ha az $f:[0,1]\to R$ függvényre minden $(p_1,\ldots,p_n)\in\Gamma_n^{[1]}$ és $(p_1,\ldots,p_n)\in\Gamma_m^{[1]}$ esetén fennáll a

$$\left|\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} f(p_i q_j) - \sum_{i=1}^{n} f(p_i)\sum_{j=1}^{m} f(q_j)\right| \leq \varepsilon$$

egyenlõtlenség, akkor vagy

$$f(p) = a_1(p) + b(p), \qquad p\in[0,1],$$

vagy

$$f(p) = a_2(p) + M(p) + f(0), \qquad p\in[0,1],$$

ahol $a_1,a_2:R\to R$ additív, $M:[0,1]\to R$ multiplikatív, $b:[0,1]\to R$ korlátos függvények.

Az információelméleti eredetû összeg alakú függvényegyenletek stabilitásával kapcsolatos korábbi eredmények (például a II.2.2. és a II.3.2. TÉTELEK) egydimenziós valószínûségeloszlásokon értelmezett információmértékek vizsgálatára alkalmazhatók.

A II.1.5. TÉTEL lehetõvé teszi, hogy a stabilitás vizsgálatát kiterjesszük a többdimenziós valószínûségeloszlásokon értelmezett információmértékekre is. Így a következõ tétel bizonyításában is ez a tétel az alapvetõ eszköz.

TÉTEL II.3.3. (Kocsis, [K]) Legyen $n\geq 3$ és $m\geq 3$ rögzített egész és $0\leq\varepsilon\in R$ rögzített. Ha az $f:J\to R$ függvényre fennáll a

$$\left|\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} f(p_i \bullet q_j) - \sum_{i=1}^{n} f(p_i)\sum_{j=1}^{m} f(q_j)\right| \leq \varepsilon$$

egyenlõtlenség minden $(p_1,\ldots,p_n)\in\Gamma_n$ és $(q_1,\ldots,q_m)\in\Gamma_m$ esetén, akkor vagy

$$f(p) = a_1(p) + B_1(p), \qquad p\in J,$$

vagy

$$f(p) = a_2(p) + M(p) + B_2(p), \qquad p\in J,$$

ahol $a_1,a_2:R^k\to R$ additív, $M:J\to R$ multiplikatív, $B_1,B_2:J\to R$ korlátos függvények.

Egy függvényegyenlet és a megfelelõ stabilitási függvényegyenlõtlenség kapcsolatának pontos leírása az egyenlet és az egyenlõtlenség általános megoldásának ismeretében lehetséges. Megjegyezzük azonban, hogy az általunk megfogalmazott stabilitási probléma megválaszolásához nem szükséges a vizsgált egyenlet általános megoldását ismerni.

A disszertációban vizsgált (B-N II.), (M) és (S) egyenletek általános megoldása egydimenzióban, zárt és nyílt alaphalmaz esetén egyaránt ismert.

A többdimenzióban, zárt alaphalmazon vizsgált (B-N II.) egyenlet általános megoldását kétdimenzióban a szerzõ adta meg egy eddig még publikálatlan eredményében:

TÉTEL II.3.5. (Kocsis, publikálatlan) Legyen $n\geq 3$ és $m\geq 3$ rögzített egész és legyen $k=2$. A (B-N II.) egyenlet általános megoldása

$$f(p) = A_1(p) + b, \qquad p\in[0,1]^2,$$

vagy

$$f(p) = A_2(p) + M(p), \qquad p\in[0,1]^2,$$

ahol $A_1,A_2:R^2\to R$ additív, $M:[0,1]^2\to R$ multiplikatív függvény, továbbá $A_2(\underline{1})=0$ és $A_1(\underline{1}) + nmb = (A_1(\underline{1})+nb)\cdot(A_1(\underline{1})+mb)$.

A szerzõ tudomása szerint a (B-N II.) egyenlet általános megoldása a $k>2$ esetben, zárt alaphalmazon nem ismert.

3. STABILITÁS NYÍLT ALAPHALMAZON

3.1. AZ (S) EGYENLET STABILITÁSA EGYDIMENZIÓBAN, NYÍLT ALAPHALMAZON

A disszertáció III.1. fejezetének fõ eredménye a III.1.3. TÉTEL, amely szerint az (1) egyenlet stabil, ha $Y=]0,1[$, $\Omega_n=\Gamma_n^{0[1]}$ és $F(f)(p,q)=\frac{1}{m}f(p)$, $(p,q)\in]0,1[^2$, vagyis az (S) egyenlet stabil egydimenzióban, nyílt alaphalmazon.

Nyílt alaphalmazon általában nem alkalmazhatók a zárt alaphalmazon használt módszerek. A bizonyítások nehézségét elsõsorban az okozza, hogy a változók nem vehetik fel a 0 és az 1 értékeket.

Az összeg alakú függvényegyenletek stabilitásának zárt alaphalmazon való igazolásakor használt egyes segédtételek állításai nyílt alaphalmazon is fennállnak, ez azt sugallja, hogy remény van a stabilitás igazolására nyílt alaphalmazon is.

A III.1.3. TÉTEL bizonyításában alapvetõ eszköz a Cauchy egyenlet stabilitása egy speciális nyílt halmazon.

LEMMA III.1.2. (Kocsis, [K00]) Legyen $0 \le \varepsilon \in R$, $b,c \in R$ ($b>0, c>0$) rögzített és $f:]-2b,2c[\to R$. Ha az f függvény ε-additív a $]-b,c[^2$ halmazon, azaz minden $(x,y) \in]-b,c[^2$ esetén

$$\left| f(x+y) - f(x) - f(y) \right| \le \varepsilon,$$

akkor létezik olyan $A:R \to R$ additív függvény, melyre

$$\left| f(x) - A(x) \right| \le 5\varepsilon, \qquad x \in]-2b,2c[.$$

Következmény. A $]-b,c[^2$ HALMAZ ($b,c \in R$, $b>0$, $c>0$) EGYÉRTELMÛEN ADDITÍV TÍPUSÚ, VAGYIS HA AZ $f:]-2b,2c[\to R$ FÜGGVÉNY ADDITÍV A $]-b,c[^2$ HALMAZON, AKKOR EGYÉRTELMÛEN LÉTEZIK EGY OLYAN $A:R \to R$ ADDITÍV FÜGGVÉNY, MELYNEK $]-2b,2c[$-RE VALÓ LESZÛKÍTÉSE f. (LEGYEN UI. A III.1.2. Tételben $\varepsilon=0$.) (LÁSD MÉG [DL67], [S72])

TÉTEL III.1.3. (Kocsis, [K00]) Legyen $n \ge 3$ rögzített egész, $0 \le \varepsilon \in R$ és $d \in R$ rögzített. Ha a $\varphi:]0,1[\to R$ függvény eleget tesz a (2) egyenlõtlenségnek minden $(p_1,\ldots,p_n) \in \Gamma_n^{0[1]}$ esetén, akkor létezik olyan $a:R \to R$ additív függvény, melyre

$$\left| \varphi(p) - a(p) + \frac{a(1) - d}{n} \right| \le 240 \cdot \varepsilon, \qquad p \in]0,1[.$$

3.2. A MULTIPLIKATÍV TÍPUSÚ ÖSSZEG ALAKÚ EGYENLET STABILITÁSA EGYDIMENZIÓBAN, NYÍLT ALAPHALMAZON

A dolgozat III.2. fejezetének fõ eredménye a III.2.2. TÉTEL, amely szerint az (1) egyenlet stabil, ha $Y=]0,1[$, $n=m\ge 3$ rögzített egész, $\Omega_n=\Gamma_n^{0[1]}$, $M_1,M_2:]0,1[\to R$ rögzített normális multiplikatív függvények, $M_1 \ne M_2$ és $F(f)(p,q) = f(p \bullet q) - M_1(p)\cdot f(q) - f(p)\cdot M_2(q)$, $(p,q) \in]0,1[^2$, vagyis az (M) egyenlet stabil egydimenzióban, nyílt alaphalmazon, ha $n=m$ és $M_1 \ne M_2$.

TÉTEL III.2.2. (Kocsis, [K00]) Legyen $m \ge 3$ rögzített egész, $0 \le \varepsilon \in R$ rögzített, legyenek továbbá $M_1,M_2:]0,1[\to R$ rögzített normális multiplikatív függvények, $M_1 \ne M_2$. Ha az $f:]0,1[\to R$ függvény eleget tesz a

$$\left| \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} f(p_i q_j) - \sum_{i=1}^{m} M_1(p_i) \sum_{j=1}^{m} f(q_j) - \sum_{j=1}^{m} M_2(q_j) \sum_{i=1}^{m} f(p_i) \right| \le \varepsilon$$

egyenlõtlenségnek minden $(p_1,\ldots,p_m) \in \Gamma_m^{0[1]}$ és $(q_1,\ldots,q_m) \in \Gamma_m^{0[1]}$ esetén, akkor létezik olyan $a:R \to R$ additív és olyan $B:]0,1[\to R$ korlátos függvény, melyre

$$f(p) = a(p) + C(M_1(p) - M_2(p)) + B(p), \qquad p \in]0,1[.$$

1. Introduction

This thesis contains new results from the theory of functional equations. They are connected with the stability of certain functional equations arising in information theory.

In 1940 S.M. Ulam raised the following problem in his lecture at Wisconsin University (Ulam [U64]):

Let (G,o) be a group, $(H,*)$ be a metric group with metric d. Is the following statement true: for arbitrary $0<\varepsilon\in R$ there exists $0<\delta\in R$ such that for all functions $f:G\to H$ satisfying the inequality

$$d(\, f(xoy)\, ,\, f(x)*f(y)\,) < \varepsilon, \quad x,y\in G$$

there exists a homomorphism (that is, a solution of the so-called Cauchy equation $f(xoy)=f(x)*f(y)$) $A:G\to H$ satisfying the inequality

$$d(\, f(x)\, ,\, A(x)\,) < \delta,$$

for all $x\in G$.

Similar question can be asked in connection with other equations, too. See the following survey papers: Forti [F95], Ger [G94], Hyers-Isac-Rassias [HIR98] and Székelyhidi [S00].

We remark that Ulam did not deal with the connection between the constants ε and δ in his question. It is clear that the stability result is more informative when δ can be expressed by ε. In many cases a constant $K\in R$ can be found such that $\delta=K\varepsilon$.

1.1. NOTATIONS

In the following R denotes the set of real numbers. Let k be a fixed positive integer. If $c \in R$ then $\underline{c}=(c,c,\dots,c)=R^k$.

If $x=(x_1,x_2,\dots,x_k)\in R^k$ and $y=(y_1,y_2,\dots,y_k)\in R^k$ then let $x \bullet y = (x_1y_1,x_2y_2,\dots,x_ky_k)\in R^k$.

Let $J=[0,1]^k$, $J^0=]0,1[^k$, $Y\in\{J,J^0\}$, $\Delta^k=\{(x,y) \mid x,y,x+y\in J\}$, and for all natural numbers $n\geq 2$ define the sets

$$\Gamma_n = \Gamma_n^{[k]} = \left\{(p_1,\dots,p_n)\in J^n \,\middle|\, \sum_{i=1}^{n} p_i = \underline{1}\right\} \qquad \text{and}$$

$$\Gamma_n^0 = \Gamma_n^{0[k]} = \left\{(p_1,\dots,p_n)\in \left(J^0\right)^n \,\middle|\, \sum_{i=1}^{n} p_i = \underline{1}\right\},$$

and let $\Omega_n \in \{\Gamma_n, \Gamma_n^0\}$.

A function $A:R^k \to R$ is **additive** if

$$A(x+y) = A(x) + A(y)$$

for all $x,y\in R^k$.

A function $M:Y\to R$ is **multiplicative** on Y if

$$M(x\bullet y) = M(x)\cdot M(y)$$

for all $x,y\in Y$.

In this dissertation a function $M:]0,1[\to R$ is called **normal multiplicative** if M is multiplicative on $]0,1[$ and $M(x)\neq 0$, $x\in]0,1[$, a function $M:[0,1]\to R$ is called **normal multiplicative** if M is multiplicative on $[0,1]$, $M(0)=0$, $M(1)=1$ and $M(x)\neq 0$, $x\in]0,1[$.

A function $L:]0,1[\to R$ is **logarithmic** on $]0,1[$ if

$$L(x\cdot y) = L(x) + L(y)$$

for all $x,y\in]0,1[$.

A function $L:[0,1]\to R$ is **logarithmic** a $[0,1]$ if $L(0)=0$ and

$$L(x\cdot y) = L(x) + L(y)$$

for all $x,y\in]0,1]$.

1.2. STABILITY PROBLEM FOR SUM FORM EQUATIONS

Let $D=\{\ f\mid f:Y\to R\ \}$, $E=\{\ h\mid h:Y\times Y\to R\ \}$, $F:D\to E$ be fixed and $f\in D$. The equations investigated in this thesis can be written in the form:

$$\text{(1)}\qquad \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}F(f)(p_i,q_j)=0,\quad (p_1,\dots,p_n)\in\Omega_n,\ (q_1,\dots,q_m)\in\Omega_m$$

where $n\geq 3$ and $m\geq 3$ are fixed integers and f is unknown function. The equations having the form (1) are called **sum form functional equations**.

In the second chapter we deal with the case $\mathbf{(Y,\Omega_n)=(J,\Gamma_n)}$ (**closed domain case**), while in the third chapter we investigate the case $\mathbf{(Y,\Omega_n)=(J^0,\Gamma_n{}^0)}$ (**open domain case**).

If $k=1$ the problem is called **one dimensional**, the (general) case $k\geq 1$ is called **higher dimensional**.

Following Ulam's concept the sum form functional equation (1) is said to be stable if for each $0\leq\varepsilon\in R$ there exists $0\leq\delta\in R$ such that for each $g\in D$ satisfying the inequality

$$\left|\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}F(g)(p_i,q_j)\right|\leq\varepsilon$$

for all $(p_1,\dots,p_n)\in\Gamma_n$ and $(q_1,\dots,q_m)\in\Gamma_m$ there exists a solution f of (1) such that

$$|\ g(p)-f(p)\ |\leq\delta,\qquad p\in Y.$$

1.3. SUM FORM EQUATIONS ARISING IN INFORMATION THEORY

A sequence of functions $(I_n)_{n=2}^{\infty}$ where the real valued functions I_n are defined on Γ_n or $\Gamma_n{}^0$ (n=2,3,…) is called **information measure**. (see [AD75] and [ESS98])

Define the function $\otimes:\Omega_n\times\Omega_m\to\Omega_{nm}$ by

$$P\otimes Q=(p_1q_1,\dots,p_1q_m,p_2q_1,\dots,p_2q_m,\dots,p_nq_1,\dots,p_nq_m)\in\Omega_{nm},$$

$P=(p_1,\dots,p_n)\in\Omega_n$, $Q=(q_1,\dots,q_m)\in\Omega_m$.

An information measure $\left(I_n\right)_{n=2}^{\infty}$

is **(α,n,m)-additive** (*$\alpha \in R$, $n \geq 2$, $m \geq 2$ are fixed integers*) if

$$I_{nm}(P \otimes Q) = I_n(P) + I_m(Q) + (2^{1-\alpha} - 1) \cdot I_n(P) \cdot I_m(Q),$$

$P \in \Omega_n$, $Q \in \Omega_m$,

is **weighted (n,m)-additive of type (M_1,M_2)** (*$n \geq 2$ and $m \geq 2$ are fixed integers, $M_1, M_2 : Y \to R$ are fixed multiplicative functions*) if

$$I_{nm}(P \otimes Q) = \sum_{i=1}^{n} M_1(p_i)\, I_m(Q) + \sum_{j=1}^{m} M_2(q_j)\, I_n(P),$$

$P \in \Omega_n$, $Q \in \Omega_m$,

having **sum property** if there exists a function $f:Y \to R$ such that

$$I_n(p_1, \ldots, p_n) = \sum_{i=1}^{n} f(p_i), \qquad n=2,3,\ldots\ .$$

(see [ESS98])

Our main purpose is to prove the stability of two sum form functional equations appearing in characterization of (α,n,m)-additive and weighted (n,m)-additive of type (M_1,M_2) information measures having the sum property.

The first equation is **BEHARA-NATH II. EQUATION**:

(B-N II.)
$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} f(p_i \bullet q_j) = \sum_{i=1}^{n} f(p_i) \sum_{j=1}^{m} f(q_j)$$

where $f:Y \to R$ is an unknown function and the equation holds for all $(p_1,\ldots,p_n) \in \Omega_n$ and $(q_1,\ldots,q_m) \in \Omega_m$.

The second equation is the **SUM FORM EQUATION OF MULTIPLICATIVE TYPE**:

(M)
$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} f(p_i \bullet q_j) = \sum_{i=1}^{n} M_1(p_i) \sum_{j=1}^{m} f(q_j) + \sum_{j=1}^{m} M_2(q_j) \sum_{i=1}^{n} f(p_i)$$

where $f:Y \to R$ is unknown function, $M_1, M_2 : Y \to R$ are fixed multiplicative functions and the equation holds for all $(p_1,\ldots,p_n) \in \Omega_n$ and $(q_1,\ldots,q_m) \in \Omega_m$.

2.1. STABILITY OF A SIMPLE SUM FORM EQUATION

In the investigation of the sum form equations the simple sum form functional equation

$$\text{(S)} \qquad \sum_{i=1}^{n} \varphi(p_i) = d$$

where $\varphi:Y\to R$ is unknown function, $d\in R$ is fixed and (S) holds for all $(p_1,\ldots,p_n)\in\Omega_n$, plays central role.

In the one dimensional case the stability of equation (S) was shown by Gy. Maksa in [M94] on closed domain.

THEOREM II.1.1. (Maksa [M94]) Let $0\le\varepsilon\in R$ and $d\in R$ be fixed and $\varphi:[0,1]\to R$. If

$$\text{(2)} \qquad \left|\sum_{i=1}^{n} \varphi(p_i) - d\right| \le \varepsilon,$$

holds for all $(p_1,\ldots,p_n)\in\Gamma_n^{[1]}$ then there exists an additive function $a:R\to R$ and a function $b:[0,1]\to R$ such that

$$\varphi(x) - \varphi(0) = a(x) + b(x), \qquad x\in[0,1]$$

and

$$|b(x)| \le 18\cdot\varepsilon, \qquad x\in[0,1].$$

A basic tool in the proof of THEOREM II.1.1. is the stability of the Cauchy equation on Δ^1:

THEOREM II.1.2. (Maksa [M94]) Let $0\le\varepsilon\in R$ be fixed and $f:[0,1]\to R$. If f is ε-additive on Δ^1, that is,

$$\text{(3)} \qquad |f(x+y) - f(x) - f(y)| \le \varepsilon, \qquad (x,y)\in\Delta^1$$

then there exists an additive function $a:R\to R$ and a function $b:[0,1]\to R$ such that

$$f(x) = a(x) + b(x), \qquad x\in[0,1]$$

and

$$|b(x)| \le 9 \cdot \varepsilon, \qquad x\in[0,1].$$

To prove THEOREM II.1.5. the following generalization of THEOREM II.1.2. is needed:

THEOREM II.1.3. (Kocsis, [K]) Let $0\le\varepsilon\in R$ be fixed and $f:J\to R$. Suppose that (2) holds for all $(x,y)\in\Delta^k$. Then there exists an additive function $a:R^k\to R$ and a function $b:J\to R$ such that

$$f(x) = a(x) + b(x), \qquad x\in J$$

and

$$|b(x)| \le 3^{k+2} \cdot \varepsilon, \qquad x\in J.$$

Let $\emptyset\neq D\subset R^k\times R^k$, $D_x=\{x|\exists y:(x,y)\in D\}$, $D_y=\{y|\exists x:(x,y)\in D\}$, $D_{x+y}=\{z|\exists(x,y)\in D:z=x+y\}$, $I=D_x\cup D_y\cup D_z$, and $f:I\to R$.

A FUNCTION **F IS ADDITIVE ON D** IF THE CAUCHY EQUATION HOLDS FOR ALL $(X,Y)\in D$ (SEE [DL67]).

FURTHERMORE **D IS OF UNIQUELY ADDITIVE TYPE** (*Z. DARÓCZY, 1996*), IF THE FOLLOWING STATEMENT IS TRUE: IF THE FUNCTION F IS ADDITIVE ON D THEN THERE EXIST A UNIQUE ADDITIVE FUNCTION A SUCH THAT F IS A RESTRICTION OF A TO I.

Collorary. THE SET Δ^K ($K\ge1$ IS FIXED INTEGER) IS OF UNIQUELY ADDITIVE TYPE, THAT IS, IF A FUNCTION $F:J\to R$ IS ADDITIVE ON Δ^K THEN THERE EXISTS A UNIQUE ADDITIVE FUNCTION $A:R^K\to R^K$ SUCH THAT F IS THE RESTRICTION OF A TO J. (INDEED, LET $\varepsilon=0$ IN Theorem II.1.3.) (SEE ALSO [ESS98])

The main result in chapter II.1. is THEOREM II.1.5. which says that equation (1) is stable if $Y=J$, $\Omega_n=\Gamma_n$, and $F(f)(p,q)=\frac{1}{m}f(p)$, $(p,q)\in J^2$, that is, equation (S) is stable in the higher dimensional closed domain case.

THEOREM II.1.5. (Kocsis, [K]) Let $n\geq 3$ be fixed integer, $0\leq\varepsilon\in R$ and $d\in R$ be fixed, and $\varphi:J\to R$. If (2) holds for all $(p_1,\ldots,p_n)\in\Gamma_n$. Then there exists an additive function $a:R^k\to R$ and a function $b:J\to R$ such that

$$\varphi(x) - \varphi(\underline{0}) = a(x) + b(x), \qquad x\in J$$

and

$$|b(x)| \leq 2\cdot 3^{k+2}\cdot\varepsilon, \qquad x\in J.$$

2.2. STABILITY OF THE SUM FORM EQUATION OF MULTIPLICATIVE TYPE IN THE ONE DIMENSIONAL CLOSED DOMAIN CASE

The main result in chapter II.2. is THEOREM II.2.2. which says that equation (1) is stable if $Y=[0,1]$, $\Omega_n=\Gamma_n^{[1]}$, $\Omega_m=\Gamma_m^{[1]}$, $M_1,M_2:[0,1]\to R$ are fixed normal multiplicative functions (one of them is different from the identity function of [0,1]) and $F(f)(p,q) = f(p\bullet q) - M_1(p)\cdot f(q) - f(p)\cdot M_2(q)$, $(p,q)\in[0,1]^2$, that is, equation (M) is stable in the one dimensional closed domain case.

THEOREM II.2.2. (Kocsis-Maksa [KM98], Kocsis [K01]) Let $n\geq 3$ and $m\geq 3$ be fixed integers, $0\leq\varepsilon\in R$ be fixed, $M_1,M_2:[0,1]\to R$ be fixed normal multiplicative functions, one of them is different from the identity function of [0,1], and let $f:[0,1]\to R$. If

$$\left|\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} f(p_i q_j) - \sum_{i=1}^{n} M_1(p_i)\sum_{j=1}^{m} f(q_j) - \sum_{j=1}^{m} M_2(q_j)\sum_{i=1}^{n} f(p_i)\right| \leq \varepsilon,$$

holds for all $(p_1,\ldots,p_n)\in\Gamma_n^{[1]}$ and $(q_1,\ldots,q_m)\in\Gamma_m^{[1]}$ then there exist additive functions $a_1,a_2:R\to R$, a logarithmic function $L:[0,1]\to R$, bounded functions $B_1,B_2:[0,1]\to R$ and a constant $C\in R$ such that

$$f(p) = a_1(p) + C(M_1(p) - M_2(p)) + B_1(p), \quad p\in[0,1], \text{ if } M_1\neq M_2,$$

$$f(p) = a_2(p) + M_1(p)L(p) + B_2(p), \quad p\in[0,1], \text{ if } M_1=M_2.$$

2.3. STABILITY OF BEHARA-NATH II. EQUATION IN THE HIGHER DIMENSIONAL CLOSED DOMAIN CASE

The main result in chapter II.3. is THEOREM II.3.3. which says that equation (1) is stable if $Y=J$, $\Omega_n=\Gamma_n$, $\Omega_m=\Gamma_m$ and $F(f)(p,q) = f(p\bullet q) - f(p)\cdot f(q)$, $(p,q)\in J^2$, that is, equation (B-N II.) is stable in the higher dimensional closed domain case.

In the one dimensional case the stability of equation (B-N II.) was proved by Gy. Maksa in [M94] on closed domain:

TÉTEL II.3.2. (Maksa [M94]) Let $n\geq 3$ and $m\geq 3$ be fixed integers, $0\leq\varepsilon\in R$ be fixed and $f:[0,1]\to R$. If

$$\left|\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} f(p_i q_j) - \sum_{i=1}^{n} f(p_i)\sum_{j=1}^{m} f(q_j)\right| \leq \varepsilon$$

holds for all $(p_1,\dots,p_n)\in\Gamma_n^{[1]}$ and $(p_1,\dots,p_n)\in\Gamma_m^{[1]}$ then either

$$f(p) = a_1(p) + b(p), \qquad p\in[0,1],$$

or

$$f(p) = a_2(p) + M(p) + f(0), \qquad p\in[0,1],$$

where $a_1,a_2:R\to R$ are additive, $M:[0,1]\to R$ is a multiplicative, $b:[0,1]\to R$ is a bounded function.

The earlier results connected with the stability problem of sum form functional equations (for example THEOREM II.2.2. and II.3.2.) can be applied in the closed domain case only to study our equations.

By THEOREM II.1.5., we can extend the investigation to higher dimension. This theorem is a basic tool in the proof of the following theorem, too.

THEOREM II.3.3. (Kocsis, [K]) Let $n\geq 3$ and $m\geq 3$ be fixed integers, $0\leq\varepsilon\in R$ be fixed and $f:J\to R$. If

$$\left|\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} f(p_i \bullet q_j) - \sum_{i=1}^{n} f(p_i)\sum_{j=1}^{m} f(q_j)\right| \leq \varepsilon$$

holds for all $(p_1,\dots,p_n)\in\Gamma_n$ and $(q_1,\dots,q_m)\in\Gamma_m$ then either

$$f(p) = a_1(p) + B_1(p), \qquad p\in J,$$

or

$$f(p) = a_2(p) + M(p) + B_2(p), \qquad p\in J$$

where $a_1,a_2:R^k \to R$ are additive, $M:J \to R$ is multiplicative, and $B_1,B_2:J \to R$ are bounded functions.

The connection between a functional equation and the related functional inequality can be describe perfectly if we know the general solution of the equation and the inequality, too. However we have to remark that – by our definition – the stability problems can be solved without knowing of the explicit form of the general solutions.

In the one dimensional case the general solution of equations (B-N II.), (M), and (S) is known both on closed and on open domain.

The general solution of equation (B-N II.) under the conditions supposed in chapter II.3., that is, in the higher dimensional closed domain case, is not known if $k>2$. The general solution in the two dimensional case is given by the author:

THEOREM II.3.5. (Kocsis, unpublished) Let $n \geq 3$ and $m \geq 3$ are fixed integers and $k=2$. The general solution of equation (B-N II.) is

$$f(p) = A_1(p) + b, \qquad p \in [0,1]^2,$$

or

$$f(p) = A_2(p) + M(p), \qquad p \in [0,1]^2,$$

where $A_1,A_2:R^2 \to R$ are additive, $M:[0,1]^2 \to R$ is multiplicative, furthermore $A_2(\underline{1})=0$ and $A_1(\underline{1}) + nmb = (A_1(\underline{1})+nb)\cdot(A_1(\underline{1})+mb)$.

3. STABILITY ON OPEN DOMAIN

3.1. THE STABILITY OF EQUATION (S) IN THE ONE DIMENSIONAL OPEN DOMAIN CASE

The main result in chapter III.1. is THEOREM III.1.3. which says that equation (1) is stable if $Y=]0,1[$, $\Omega_n=\Gamma_n^{0[1]}$, and $F(f)(p,q) = \frac{1}{m} f(p)$, $(p,q) \in]0,1[^2$, that is, equation (S) is stable in the one dimensional open domain case.

The methods used in the closed domain case are usually not applicable in the open domain case, but certain results proved on closed domain are also true on open domain. Such a result is formulated in THEOREM III.1.3.

By this theorem, we can extend our investigations to the open domain case.

A basic tool in the proof of THEOREM III.1.3. is the following result on the stability of Cauchy equation on an open set:

LEMMA III.1.2. (Kocsis, [K00]) Let $0\le\varepsilon\in R$, $b,c\in R$ ($b>0$, $c>0$) be fixed and $f:]-2b,2c[\to R$. If f is ε-additive on $]-b,c[^2$, that is,

$$\left| f(x+y) - f(x) - f(y) \right| \le \varepsilon$$

holds for all $(x,y)\in]-b,c[^2$ then there exists an additive function $A:R\to R$ such that

$$\left| f(x) - A(x) \right| \le 5\varepsilon, \qquad x\in]-2b,2c[.$$

Collorary. THE SET $]-b,c[^2$ ($b,c\in R$, $b>0$, $c>0$) IS UNIQUELY ADDITIVE TYPE, THAT IS, IF $f:]-2b,2c[\to R$ IS ADDITIVE ON $]-b,c[^2$ THEN THERE EXISTS A UNIQUE ADDITIVE FUNCTION $A:R\to R$ SUCH THAT f IS THE RESTRICTION OF A TO $]-2b,2c[$. (INDEED, LET $\varepsilon=0$ IN Lemma III.1.2.) (SEE ALSO [DL67], [S72])

THEOREM III.1.3. (Kocsis, [K00]) Let $n\ge3$ be fixed integer, $0\le\varepsilon\in R$, and $d\in R$ be fixed, and $\varphi:]0,1[\to R$. If (2) holds for all $(p_1,\ldots,p_n)\in\Gamma_n^{0[1]}$ then there exists an additive function $a:R\to R$ such that

$$\left|\varphi(p) - a(p) + \frac{a(1)-d}{n}\right| \le 240\cdot\varepsilon, \qquad p\in]0,1[.$$

3.2. STABILITY OF THE EQUATION OF MULTIPLICATIVE TYPE IN THE ONE DIMENSIONAL OPEN DOMAIN CASE

The main result in chapter III.2. is THEOREM III.2.2., which says that equation (1) is stable if $Y=]0,1[$, $n=m$, $\Omega_n=\Gamma_n^{0[1]}$, $M_1,M_2:]0,1[\to R$ are fixed normal multiplicative functions, $M_1\ne M_2$ and $F(f)(p,q) = f(p\bullet q) - M_1(p)\cdot f(q) - f(p)\cdot M_2(q)$, $(p,q)\in]0,1[^2$, that is, equation (M) is stable in the one dimensional open domain case if n=m and $M_1\ne M_2$.

THEOREM III.2.2. (Kocsis, [K00]) Let $m\ge3$ be fixed integer, $\varepsilon\ge0$ be fixed, $M_1,M_2:]0,1[\to R$ be fixed normal multiplicative functions, $M_1\ne M_2$ and let $f:]0,1[\to R$. If

$$\left|\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} f(p_iq_j) - \sum_{i=1}^{m} M_1(p_i)\sum_{j=1}^{m} f(q_j) - \sum_{j=1}^{m} M_2(q_j)\sum_{i=1}^{m} f(p_i)\right| \le \varepsilon$$

holds for all $(p_1,\ldots,p_m)\in\Gamma_m^{0[1]}$ and $(q_1,\ldots,q_m)\in\Gamma_m^{0[1]}$ then there exist an additive function $a:R\to R$ and a bounded function $B:]0,1[\to R$ such that

$$f(p) = a(p) + C(M_1(p) - M_2(p)) + B(p), \qquad p\in]0,1[.$$

[A66] Aczél, J., *Lectures on Functional Equations and Their Applications,* Academic Press, New York, London, 1966.

[AD75] Aczél, J., Daróczy, Z., *On Measures of Information and Their Characterization,* Academic Press, New York – San Francisco-London, 1975.

[DL67] Daróczy, Z., Losonczi, L., *Über die Erweiterung der auf einer Punktmenge additiven Funktionen*, Publ. Math. Debrecen **14**(1967), 239-245.

[ESS98] Ebanks, B.R., Sahoo, P.K., Sander, W., *Characterizations of information measures,* World Scientific, Singapore – New Jersey – London – Hong Kong, 1998.

[F95] Forti, G.L., *Hyers-Ulam stability of functional equations in several variables,* Aequationes Math., **50**(1995), 143-190.

[G94] Ger, R., *A survey of recent results on stability of functional equations,* Proc. of the 4th International Conference of Functional Equations and Inequalities (Cracow), Pedagogical University of Cracow, 1994, 5-36.

[G91] Ger, R., *The singular case in the stability behavior of linear mappings,* Grazer Math. Ber., **316**(1991), 59-70.

[H41] Hyers, D.H., *On the stability of the linear equation,* Proc. Math. Acad. Sci. U.S.A., **27**(1941), 222-224.

[HIR98] Hyers, D.H., Isac, G., Rassias, T.M., *Stability of functional equations in several variables,* Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications 34. vol. 27. Birkhäuser Verlag, Basel – Boston, 1998.

[KM98] Kocsis, I., Maksa, Gy., *The stability of a sum form functional equation arising in information theory,* Acta Math. Hungar., **79**(1-2)(1998), 53-62.

[K00] Kocsis, I., *Stability of a sum form equation on open domain*, Publ. Math., Debrecen, **57**(2000), 1-2., 135-143.

[K01] Kocsis, I., *On the stability of a sum form functional equation of multiplicative type*, Acta Acad. Paed. Agriensis, Sectio Mathematicae, **28** (2001), 43-53.

[K] Kocsis, I., *On the stability of a sum form equation in several variables,* Commentationes Mathematicae (Prace Matematyczne), (közlésre benyújtva))

[L81] Losonczi, L., *A characterization of entropies of degree α,* Metrika **28**(1981), 237-244.

[L85] Losonczi, L., *Functional equations of sum form,* Publ. Math., Debrecen, **32**(1985), 57-71.

[LM81] Losonczi, L., Maksa, Gy., *The general solution of a functional equation of information theory,* Glasnik Mat., **16(36)**(1981), 261-266.

[LM82] Losonczi, L., Maksa, Gy., *On some functional equation of information theory,* Acta Math. Acad. Sci. Hungar., **39**(1982), 73-82.

[M94] Maksa, Gy., *On the stability of a some form equation,* Results in Mathematics, **26**(1994), 342-347.

[M89] Maksa, Gy., *The role of boundedness and nonnegativity in characterizing of entropies of degree α,* Publ. Math., Debrecen, **36**(1989), 179-185.

[RB87] Radó, F., Baker, J.A., *Pexider's equation and aggregation of allocations,* Aequationes Math., **32**(1987), 227-239.

[S72] Székelyhidi, L., *Nyílt ponthalmazon additív függvény általános elõállítása,* MTA III. Osztály Közleményei **21**(1972), 503-509.

[S82] Székelyhidi, L., *Note on a stability theorem,* Canad. Math. Bull. **25**(4)(1982), 500-501.

[S00] Székelyhidi, L., *Ulam's problem, Hyers's solution – and where they led,* Functional Equations and Inequalities, Edited by Th.M. Rassias, Dordrecht: Kluwer Academic Publishers. Math. Appl., 518(2000), 259-285.

[T97] Tabor, J., *Report on "The 34th International symposium on Functional Equations" (June 10-19, 1996, Wisla-Jawornik, Poland),* Aequationes Math., **53**(1997), 194-196.

[TT98] Tabor, J., Tabor, J., *Stability of the Cauchy equation on an interval,* Aequationes Math., **55**(1998), 153-176.

[U64] Ulam, S.M., *Problems in modern mathematics,* Wiley, New York, 1964.

REFERÁLT FOLYÓIRATBAN MEGJELENT DOLGOZATOK AZ ÉRTEKEZÉS TÉMAKÖRÉBEN

[1] Kocsis, I., Maksa, Gy., *The stability of a sum form functional equation arising in information theory*, Acta Math. Hungar., **79**(1-2)(1998), 53-62.

[2] Kocsis, I., *Stability of a sum form equation on open domain*, Publ. Math., Debrecen, **57**(2000), 1-2., 135-143.

[3] Kocsis, I., *On the stability of a sum form functional equation of multiplicative type,* Acta Acad. Paed. Agriensis, Sectio Mathematicae, **28** (2001), 43-53.

NEM REFERÁLT FOLYÓIRATBAN MEGJELENT DOLGOZATOK AZ ÉRTEKEZÉS TÉMAKÖRÉBEN

[4] Kocsis, I., *Kiterjesztés és stabilitás a Cauchy egyenletre*, YMMF Tudományos Közlemények **22**(1995), 78-83.

[5] Kocsis, I., *Összeg alakú, információelméleti eredetû függvényegyenletek,* DE MFK Tudományos Közlemények, **25(**2001), 159-164.

[6] Kocsis, I., Maksa, Gy., *Az irányított divergencia egy jellemzése függvényegyenletek segítségével,* Debreceni Mûszaki Közlemények **1**(2002), 13-23.

[7] Kocsis, I., *On functional equations in several variables arising in information theory,* Debreceni Mûszaki Közlemények (közlésre elfogadott)

DOLGOZATOK EGYÉB TÉMAKÖRBEN

[8] Kocsis, I., Nagy, J., *Az* No_x *mértékegységei*, Magyar Épületgépészet, **8-9(**1995), 31-32.

[9] Kocsis, I., Nagy, J., *Gáztechnikai számítások*, Magyar Instellateur, **1**(1996)., 13-15.

[10] Kocsis, I., *Nemdifferenciálható függvények szélsõérték-számításáról*, KLTE MFK Tudományos Közlemények **23**(1997), 42-54.

[11] Husi, G., Kocsis, I., *A matematikai szoftverek alkalmazásának lehetõségei a matematika és a termelésmenedzsment oktatásában,* KLTE MFK Tudományos Közlemények **24**(1999), 61-84.

[12] Kocsis, I., *Forgó rendszer megbízhatósági elemzése*, Repüléstudományi Közlemények, Zrínyi Miklós Nemzetvédelmi Egyetem, **2**(2002), 149-154.

ELÕADÁSOK AZ ÉRTEKEZÉS TÉMAKÖRÉBEN

[1] *On the stability of a sum form equation on open domain*, Numbers, Functions, Equations '98 International Conference, Noszvaj, Hungary, 1998.

[2] *On the stability of some functional equations*, 38th International Symposium on Functional Equations, Noszvaj, Hungary, 2000.

[3] *On the stability of a some functional equation in several variables*, 41st International Symposium on Functional Equations, Noszvaj, Hungary, 2003.

[4] *Hyers-Ulam stability of functional equations*, PAMM, Göd, Hungary, 2003.

EGYÉB ELÕADÁSOK

[5] *A megbízhatóságelmélet matematikai alapjai*, VII. Épületgépészeti és Gépészeti Szakmai Napok, DE MFK, 2001.

[6] *Reliability evaluation, reliability improvement*, PAMM, 2002, Göd, Hungary

[7] *Forgó rendszer megbízhatósági elemzése*, 1st International Symposium on „Future Aviation Technologies", 2002, Budapest-Szolnok, Hungary