A *mondhat* önhivatkozó modális logikai operátor elemzése matematikai logikai eszközökkel

doktori (PhD) értekezés

Aszalós László

Debreceni Egyetem
Debrecen, 2001

A mondhat önhivatkozó modális logikai operátor elemzése matematikai logikai eszközökkel

Értekezés a doktori (Ph.D.) fokozat megszerzése érdekében
a matematika tudományában.

Írta: Aszalós László okleveles matematikus
Készült a Debreceni Egyetem matematika programja
(informatika alprogramja) keretében

Témavezető: Dr. Dragálin Albert
Dr. Arató Mátyás (Dr. Dragálin Albert halála után)

A doktori szigorlati bizottság:

elnök: Dr. Arató Mátyás

tagok: Pásztorné Dr. Varga Katalin

Dr. Várterész Magda

A doktori szigorlat időpontja: 1999. december 16.

Az értekezés bírálói:

. . . .

. . . .

A bírálóbizottság:

elnök: . . . .
tagok: . . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .

Az értekezés védésének időpontja:

Ezen értekezést a DE Matematika doktori program Informatika alprogramja keretében készítettem 1999–2001 között és ezúton benyújtom a DE doktori PhD fokozatának elnyerése céljából.

Debrecen, 2001. július 18.

. . . .
Aszalós László

Tanúsítom, hogy Aszalós László doktorjelölt 1999–2001 között a fent megnevezett doktori alprogram keretében irányításommal végezte munkáját. Az értekezésben foglaltak a jelölt önálló munkáján alapulnak, az eredményekhez önálló alkotó tevékenységével meghatározóan hozzájárult. Az értekezés elfogadását javaslom.

Debrecen, 2001. július 18.

. . . .
Dr. Dragálin Albert

Tartalomjegyzék

1.
Bevezetés

Smullyan a „Mi a címe ennek a könyvnek?” [39] című könyvét egyszerű beugratós feladatokkal kezdi, majd fokozatosan nehezedő fejtörők magával ragadó folyamát indítja el. Mire az olvasó a könyv végére ér, megérti Gödel híres tételét és annak hátterét. Ez a könyv a logikai fejtörők egyik leggazdagabb gyűjteményének tekinthető, így nem csoda, hogy a könyv megjelenését követően virágzásnak indult automatikus tételbizonyítás számára kihívást jelentett a könyvben szereplő fejtörők megoldása. Több cikk és könyv mutat be különféle módszereket egyik-másik fejtörő megoldására [1, 22, 24, 29, 30, 34, 35, 40], de egyik mű sem vállalkozott a könyv összes logikai fejtörőjének megoldására. A dolgozatom ezt a hiányt próbálja pótolni.

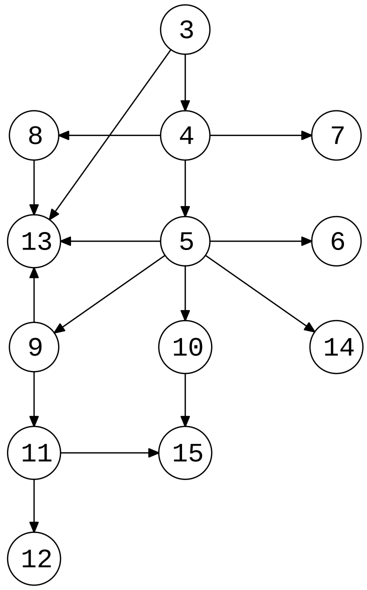
A fejtörőkben a szereplők állításokat tesznek, és ezekből kell messzemenő következtetéseket levonnunk a fejtörő megoldásához. A dolgozatom megmutatja, hogyan formalizálhatóak ezek a fejtörők speciális modális logikai nyelveken, melyek modális operátora a *mond* illetve a *mondhat* [4, 5]. Ismertetjük a nyelvekhez tartozó szekventkalkulusokat [2], továbbá két speciális igazságtáblát [6], melyek segítségével a formalizált feladatok megoldását automatizálhatjuk. A dolgozatban belátjuk ezen eszközök helyességét és teljességét [2]. Megvizsgálunk továbbá pár, tőlem származó kerettörténethez kapcsolódó logikai nyelvet [2, 9], s megállapításokat teszünk a nyelvek speciális alakú, érvényes formuláival kapcsolatban. Végül egy alkalmazást vázolunk fel [10].

A dolgozatomban ismertetett egységes tárgyalásmódban [39] összes fejtörője megoldható [4, 5]. A dolgozat a szekventkalkulust mutatja be megoldási módszerként [2], ám ugyanilyen jól használható az analitikus táblázat módszere [3], illetve a természetes levezetés [7]. A dolgozatban ismertetett logikai nyelvekhez tartozó szekventkalkulusokat, illetve analitikus táblázatokat Prolog [3], illetve Lotrec [8] nyelven implementáltam.

Az előbb említett logikai nyelvek konstrukciója, azok érvényes formuláinak generálása, a szekventkalkulusok, igazságtáblák alkalmazása, ezek helyességének, teljességének belátása a szerző önálló kutatásának eredményei [2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10].

A dolgozat a szerző, Smullyan könyve feladatainak automatizált megoldására irányuló kutatásait foglalja össze. Az ezeken a kereteken túlmutató cikk [10] bizonyíték arra, hogy a dolgozatban vizsgált *mond* modális operátor jól társítható a *hisz* illetve *tud* modális operátorokkal, és így hasznos eszköze lehet az ágensek kommunikációja vizsgálatának. A cikkben alkalmazott jelölésrendszer — amely egyszerűbb, mint a hasonló céllal létrejött [31] és [20] — tovább bővíthető időlogikai eszközökkel, s az így nyert újabb logikai nyelv már képes dinamikusan változó hálózatok jellemzőinek leírására is.

Az irodalmi áttekintés (2. fejezet) és a feladatok típusainak ismertetése (3. fejezet) után Smullyan könyvének fejezeteit vesszük sorra és bemutatjuk az adott kerettörténetet leíró logikai nyelvet (4-9. fejezet). Az adott kerettörténethez tartozó feladatok megoldásakor használt Gentzen-féle szekventkalkulus ismertetése után egyből be is bizonyítjuk annak tulajdonságait. A dolgozat további részében túllépünk Smullyan könyvének keretein. Először magán a modális operátoron változtatunk, amelynek eredményeképp jelentősen elbonyolódnak a korábbi definíciók, tételek (10. fejezet).



1.1. ábra. A fejezetek kapcsolata.

Ezután megadunk pár új kerettörténetet, amelyben új típusú szigetlakók szerepelnek (11. és 12. fejezet). Természetesen itt sem maradhat el a megfelelő Gentzen-féle szekventkalkulus ismertetése illetve a helyességének, teljességének bizonyítása, valamint egy-két fejtörő közlése. Ezután bemutatjuk, hogy hogyan oldhatóak meg a harmadik típusú fejtörők (13. fejezet) és hogyan generálhatóak speciális alakú érvényes formulák (14. fejezet). Végezetül bemutatjuk a módszerünk egy lehetséges alkalmazását a kommunikáció területén (15. fejezet). A fejezetek egymásra épülését az 1.1. ábra vázolja fel.

2.

Irodalmi áttekintés

Ahogy a dolgozat címe is tartalmazza, a *mondhat* modális operátor egyik fontos tulajdonsága az önhivatkozás, azaz az állításokat tevők saját magukról is állíthatnak különféle tényeket. A fejezet első felében az önhivatkozást, illetve az ezen alapuló hazug-paradoxont járjuk körül, míg a második felében a Smullyan rejtvényeiről, illetve azok különféle, az automatikus tételbizonyítás eszközeivel történő megoldásáról szólunk.

2.1. Az önhivatkozás és a paradoxonok

Maga az önhivatkozás (angolul self-reference) szó gyakran kimarad a különféle szótárakból, szószedetekből, de ott szerepelnek például az *önarckép*, *öncsalás*, *öndicséret*, *önéletrajz*, *önindító*, *önkiszolgáló*, *önkormányzat*, *önműködő*, *önvédelem* szavak. Ezekben az a közös, hogy a hozzájuk tartozó cselekvés, folyamat a cselekvőre hat vissza. Például az önarckép egy olyan kép, melyet a festő saját magáról festett, az önéletrajzot pedig mindenki saját magáról írja. Nemcsak főnevek és melléknevek lehetnek ilyen tulajdonságúak, hanem igék is, mint például a *mosakodik*, *kifizetődik*, *unatkozik*, vagy az *altatja magát*, *kéreti magát*. Ilyen (visszaható) igék nagyon nagy számban léteznek a magyar nyelvben.

Az egyszerű szavakon túllépve, a mondatok is között is találunk olyat, mely magára utal. Egyes gyűjteményekben százszámra találhatóak ilyen, többnyire humoros mondatok. Lássunk közülük néhányat!

Ez a mondat négy szóból áll.

Ez a mondat hat szóból áll.

.ennel lubara ah ,ik enzén ygí tadnom a zE

Z nem mondat, mert a 'z' nem szó.

Az első kettőről mindenki egyből el tudja dönteni, hogy igaz vagy hamis. A utolsó kettő mondat voltán már lehetne vitatkozni. A következő, a krétai Epideménesznek tulajdonított kijelentés viszont egyértelműen mondat: *Minden krétai hazudik.* Ha feltesszük, hogy nem csak egy krétai létezik, akkor nem kerülünk ellentmondásba. Ha viszont a megaraiaknak megfelelően [27, 118. o.] az állítást az állítást tevőre szűkítjük („én hazudok" vagy „én most hazudok"), vagy csak magára az állításra, akkor az állítás már se nem igaz, se nem hamis: *Ez az állítás hamis.* Pontosabban, ha igaz, akkor a tartalma miatt hamis, ha viszont hamis, akkor a tartalma alapján igaz, így pontosan akkor igaz, amikor hamis.

Az „Ez az állítás hamis." állítást, illetve az eredeti alakját a „hazug paradoxonja" néven ismerik. Az idők folyamán sokakat megragadott, sokan foglalkoztak vele, például Titushoz írt levelében Pál apostol is hivatkozik rá: *Azt mondta valaki közülök, az ő saját prófétájok: A krétaiak mindig hazugok, gonosz vadak, rest hasak.* Pál apostol viszont nem veszi észre a paradoxont, mert így folytatja: *E bizonyság igaz: annak okáért fedd őket kímélés nélkül, hogy a hitben épek legyenek.* Bár napjainkig is sok embert megragad a hazug paradoxonja [36, 37], a huszadik századig nem sok említésre méltó eredmény született vele kapcsolatban.

A tizenkilencedik század utolsó éveiben Cantor rájött, hogy a halmazelmélete ellentmondásokat tartalmaz, sőt a nevével fémjelzett paradoxon is megszületett: Közismert, hogy egy halmaz számossága szigorúan kisebb mint hatványhalmaza számossága. Ha ezt a tényt az S-re — az összes halmaz halmazára — alkalmazzuk, S hatványhalmazaként természetesen egy halmazt kapunk, ami viszont része S-nek, így számossága sem lehet nagyobb nála.

A paradoxonok azután váltak divatossá, hogy Russell megjelentette saját paradoxonát. Ennek a paradoxonnak az ismeretterjesztő művekben a következő változatával találkozhatunk: „Egy faluban a borbély pontosan azokat borotválja, akik maguk nem borotválkoznak. Borotválkozik-e a borbély?"

Hasonló elveken alapul Grelling paradoxonja is: bizonyos szavak saját magukra is igazak, így például a „négyszótagos" vagy a „magyar". Azokat a szavakat, melyekre ez nem igaz, nevezzük *heterologikusnak*! A heterologikus heterologikus-e?

Ezen paradoxonok megoldására, a „körben forgó okoskodás" kizárására Russell típuselméletet hozott létre, ahol hierarchiába szerveződnek az állítások. Kripke az igaz és hamis állítások monoton osztályait hozta létre, ahol vannak olyan állítások, amelyek mindkét osztályból kimaradnak, azaz nem igazak és nem is hamisak. A hazug paradoxonja nem adja meg olyan könnyen magát, apróbb változtatásokkal újabb, ezekkel az eszközökkel sem kezelhető változatokat kaphatunk.

Térjünk vissza a ókori görögökhöz! A Protagorasz paradoxona egy görög jogásztanárról szól, aki elvállalta egy szegény, de tehetséges diák tanítását. Megegyeztek, hogy a tanulmányai végeztével, ha megnyerte az első perét a tanítvány, akkor egy adott összeget fizet mesterének. A diák tanulmányai elvégzése után egyetlen ügyet sem vállalt. Egy idő után Protagorasz beperelte a diákját, hogy fizessen. A következőképpen érveltek:

Diák: *Ha megnyerem a pert, akkor nem kell fizetnem, hiszen erről szól a per. Ha elvesztem, akkor mivel ez az első perem, a megállapodás miatt nem vagyok adósa Protagorasznak. Tehát ha megnyerem, ha elvesztem a pert, nem kell fizetnem.*

Protagorasz: *Ha elveszíti a pert, akkor fizetnie kell, hiszen épp erről folyik a per. Ha megnyeri a pert, akkor megnyeri az első perét, ezért kell fizetnie. Bármelyik esetben fizetnie kell.*

A legenda szerint a bíróság száz évre elnapolta a tárgyalást. Miután a valós élet nem feltétlenül a logika alapján szerveződik, a bíróságnak lehetősége nyílt volna ügyvéd felfogadására utasítani a diákot, így megszüntetni az ügy paradoxon jellegét. Másik megoldás lehet elutasítani a vádat, és ekkor ha Protagorasz újra bíróság elé viszi az ügyet, már mindenképp megkapja a pénzét.

Az ember úgy gondolja, hogy az ilyen bírósági ügyek a legendák körébe tartoznak, de az élet megcáfolja ezt a feltevést. Az 1946-os Ohio állam kontra Jones ügyben Jones doktort hatrendbeli tiltott abortusszal vádolták. Jacquelin Harris — a hat hölgy egyikének — tanúvallomása volt az egyetlen bizonyíték az abortuszra. A bíró az esküdteknek a következő útmutatásokat adta:

1. *Az a nő, aki önként veti magát alá abortusznak, bűntárs tiltott abortuszban.*
2. *Ha Jones bűnös, akkor Harris a bűntársa.*
3. *A bűntárs terhelő vallomása csupán gyanú, további megerősítésre van szükség.*

Ezek az állítások megfeleltek Ohio állam 1946-ban érvényes törvényeinek. Jones kérte, hogy beismerő vallomása miatt nyilvánítsák Harrist bűntársnak, és ezzel a ténnyel helyettesítsék a második pontot. Ez alapján a vallomás elégtelensége miatt Jonest nem lehetett volna elítélni. A Jones javaslatát elutasították. (A fellebbezést később azzal utasították el, hogy a javaslat elfogadásával Jones ártatlanságának vélelme sérült volna, és az esküdtek nem lehetnek elfogultak egyik féllel szemben sem.)

Hasonlítsuk össze ezt a pert az előbbivel. Az ügyész szerint, ha Jones bűnös, akkor az állam nyert. Ha Jones nem bűnös, akkor Harris nem bűntárs, így tanúvallomása elegendő Jones elítéléséhez, és ekkor megint az állam nyert, azaz mindenképpen nyer. A másik oldalról, ha Jones nem bűnös, akkor szabad. Ha bűnös, akkor Harris a bűntársa, ám vallomása nem elég az elítéléshez, így ekkor szabad, tehát mindenképp ő nyer.

A esküdteket valójában egy önmagát megsemmisítő ítélet meghozatalára kérte a bíró, mert ha ártatlannak találják Jonest, akkor Harris vallomása alapján bűnös, ha pedig bűnösnek, akkor az elégtelen bizonyíték alapján nem bűnös, azaz ha ártatlan, akkor bűnös, ha bűnös, akkor ártatlan, röviden pont akkor ártatlan, mint amikor bűnös. Ez pedig nem más, mint a hazug paradoxonjának egy másik megfogalmazása.

Már láttuk, hogy az önmagára történő hivatkozás — ami az alapja a hazug paradoxonjának is — nem idegen a jogtól, és ez igaz a törvényhozásra is. A Parlament például maga hozza meg azokat a szabályokat, ami alapján működik, így például azt is, hogy hogyan hozhatja meg ezeket a szabályokat. (Ez nem olyan egyszerű, külön Házbizottság létezik a koordinálásra.) Sokan emlékeznek még, amikor kézfeltartással szavaztak arról, hogy hogyan is történjen a következő szavazás, kézfeltartással vagy szavazógéppel. Igen érdekes a törvényhozást, mint egy önszabályozó rendszert vizsgálni (amely nem feltétlenül mentes a paradoxonoktól). Suber könyve [44] igen részletesen foglalkozik ezzel a problémával, és a függelékében megad egy azóta igen divatossá vált társasjátékot is (Nomic), amely a törvényhozást modellezi. Ebben a játékban egy lépés a meglévő szabályok (törvények) valamilyen irányú megváltoztatának javaslatából és a többiek szavazata alapján a javaslat elvetéséből, vagy alkalmazásából áll.

Vannak persze olyan törvények is, amelyet nem az ember alkotott, csak felismert. Ezekkel kapcsolatban is felmerülhet az önhivatkozás. Például a fizikában a lendületmegmaradás elve teszi lehetetlenné, hogy egy magára hagyott test megváltoztassa sebességét, és ezért nem mozdulhat meg szélcsendben az a hajó, melynek a vitorláját a hajóra rögzített ventillátorral fújjuk, hogy hajtsa magát előre. Hasonló indokok miatt csak a mesében szerepelhet olyan, hogy valaki a saját hajánál fogva húzza ki magát a mocsárból.

Az informatika sem mentes az önhivatkozástól. Ennek leginkább üldözött formája az önmódosító programok, melyek futás közben átírják saját magukat. Ezt a technikát leghatékonyabban a gépi kódban írt programokban lehet kihasználni, ám a Prolog nyelv is tartalmaz olyan utasításokat (`assert`, illetve `retract`), melyekkel dinamikusan változozathatjuk meg futás közben programunkat.

A programok inputja és outputja is lehet forrásprogram. Ilyen programok például az értelmezők, fordítók, forrásprogram-formázók, parciális kiértékelők, optimalizálók, programhelyesség-ellenőrök. Közülük a legegyszerűbbek azok, melyek outputja saját maguk forráskódja, azaz magyarul a program saját magát listázza ki. Egy ilyen program adott programnyelvű változatának elkészítése figyelemre méltó versenyfeladat. Egyesek ezt a feladatot még azzal is megfejelik, hogy a programszöveg legyen palindrom, azaz előről és hátulról olvasva is ugyanazt adja. Érdekes kutatási terület, hogy mely programnyelveken lehet az előbbi feltételeknek megfelelő programokat írni.

Izgalmas kérdés, hogy érdemes-e egy programhelyesség-ellenőr programmal saját magát megvizsgálni. Ha válaszként azt kapjuk, hogy a program hibás, akkor ennek a válasznak hihetünk, de ha a program azt állítja saját magáról, hogy helyes, akkor egyrészt lehet, hogy a program helyes és igazat állít magáról, de az is megeshet, hogy program rossz, és ezért nem találja meg magában a hibát.

A hazug paradoxonja bírálatakor jó érv, hogy a nyelv tökéletlensége (vagy még inkább a tökéletessége) miatt jutunk ilyen mondatokhoz. Ha a programozási nyelvekhez hasonlóan egy merev szabályok által megadott mesterséges nyelvet — mint például egy logikai nyelvet — használunk, akkor sok csapdától megmenekülünk. Gödel megalkotott egy kódolást, mellyel minden egyes formulához hozzárendel egy számot, ezért is használjuk a kódolás helyett a Gödel-számozás elnevezést. Gödel továbbá megalkotott egy formulát, amely saját, adott rendszeren belüli bizonyíthatatlanságát állítja. Ezzel első hallásra a már közismert paradoxonokhoz hasonló állításhoz jutottunk. Szerencsére jobb a helyzetünk, mint a korábbi esetekben. Ha a formula bizonyítható lenne (a konzisztens rendszerben), akkor igaz is, de ez ellentmondásra vezetne a formula állításával, tehát az nem bizonyítható. Rövid okfejtéssel belátható, hogy a formula nem is cáfolható. Innen következik, hogy a rendszer nem teljes. Mivel a formulák igazsága és bizonyíthatósága nem esik egybe, nem jutunk paradoxonhoz. Gödel tételének egy igen meglepő bizonyításával találkozhatunk G. J. Chaitin könyvében [17]. Itt egy érdekes gondolatmenettel lett összefűzve Cantor tétele, Russel paradoxonja, Hilbert formális rendszere, Gödel tétele, Turing megállási problémája és Kolgomorov bonyolultsági definíciója.

Gödel definíciók hosszú sorával tudta belátni, hogy az aritmetika felhasználásával önhivatkozáshoz juthatunk. Ha az önhivatkozás vizsgálata a cél, akkor érdemes olyan logikai nyelvet használni, melyben ez könnyebben megtehető. Habár Carnap műve [14] tekinthető a *tud és hisz* (knowledge and belief) vizsgálata kezdetének, mégis Hintikka művére [23] hivatkozik minden mostani publikáció. A szórakoztató irodalomból jól ismert „három bölcs” vagy „koszos arcok” rejtvények jó példái az itt kutatott kérdéseknek. Számunkra a tud és hisz alapvető tulajdonsága, hogy mások tudása és hite mellett saját tudásunkra és hitünkre is hivatkozhatunk, ilyen értelemben a tud és a hisz önhivatkozó operátorok. Igen sokan egyetértenek abban, hogy az S5 és a KD45 modális logikák írják le a tud és hisz tulajdonságait [21]. Viszont mind az S5 mind a KD45 axiomatikus felépítése alapján a következtetőknek remek logikai képességei vannak, és a köztük zajló kommunikáció hibátlan, amit többen — gyakorlati megfontolások miatt — elutasítanának.

2.2. Fejtörők és automatizált megoldásuk

Smullyan Gödel tételeinek fontosságát, mélységét és a mögötte megbújó következményeket több rejtvénykönyvön keresztül mutatja be igen változatos és élvezetes formában. Ez az oka annak, hogy sok helyen ezek a rejtvények a bevezető logikai kurzusok anyagában [24, 46] is helyet kapnak, így többek között nálunk, Debrecenben is. A rejtvényekhez különböző kerettörténetek tartoznak. A leggyakoribb helyszín a lovagok és lókötők szigete, ahol az elhangzott (ám nem feltétlenül igaz állítások) alapján lehet a beszélők típusára következtetni, ezért a *mond* áll a figyelem központjában. Smullyan több feladata helyet kapott az automatikus tételbizonyító programok számára összeállított a TPTP [45] feladatgyűjteményben. Hasonló feladatokkal nagy számban találkozhatunk szórakoztató kiadványokban éppúgy, mint általános iskolásoknak rendezett versenyek feladatai között.

Raymond M. Smullyan egyik könyvében [40] leírja azt a módszert, mellyel rejtvényei kijelentéslogikai formulákkal formalizálhatóak. Michael Barnett ezt az átírást és David Gries átalakítási módszerét [22] felhasználva megadja, hogyan oldhatóak meg ezek a rejtvények. Adam Kolany a B. Majcher által publikált logikai nyelvet [33] bővíti, illetve axiomatizálja [28]. Smullyan átírásához hasonló eszközzel végeredményben ő is kijelentéslogikai formulákká alakítja a rejtvényeket, és így oldja meg azokat. Larry Wos az Otter elsőrendű automatikus tételbizonyító program szájíze alapján elsőrendű formulákkal írja le a rejtvényeket [30], ami egy kívülálló számára igen nehezen követhető. Smullyan és Kolany óvatosan elkerüli a normálisakat tartalmazó rejtvényeket, mert módszerük ekkor nem használható! Wos módszere előtt nem áll ez az akadály, így nála találhatunk normálisakat is tartalmazó rejtvényeket is.

A lovagok és lókötők mellett a többi fejtörő méltánytalanul háttérbe szorul. Az Oroszlán és az Egyszarvú rejtvényeinek megoldásával tudomásom szerint csak Ohlbach cikke [35] és a Molog felhasználói kézikönyve [1, 51. o] foglalkozik.

Azon rejtvények megoldására, melyben adott tulajdonságú kérdést vagy állítást kell megfogalmazni, Fabio Massacci a kvantoros kijelentéslogikai formulák (QBF) rezolúcióját [26] javasolja. (A QBF formulák kutatása napjainkban újra divatossá vált [13].) Ezek a rejtvények igen közel állnak az információelmélethez. Viszont míg Smullyan fejtörőiben általában egyetlen kérdés vagy állítás szövegét keressük, az információelméletben a minimálisan felteendő kérdések/mérések száma illetve a megfelelő kérdezési/mérési stratégia a kutatás tárgya, mint például az eltérő súlyú golyók megkeresésénél [11], vagy a Martin Gardner által felvetett, az irodalomban Ulam-Rényi problémaként nevezett [18, 19] feladatnál. Tudomásom szerint Smullyan ilyen fejtörőivel kapcsolatosan csak Kolany [29] publikált, ám módszere teljességéről nem ejt szót.

Mi Smullyan feladatainak formalizáláshoz egy olyan módszert alkalmazunk, ahol a rejtvények formalizált alakja közelebb áll a tud és hisz formalizálásakor kapott formulákhoz, és ez a formalizálás nem igényel különleges logikai előismereteket. Ezzel a választással jelezni kívánjuk, hogy a mond a tud és a hisz méltó párja, nyugodtan szerepelhetnének együtt a rejtvényekben, ekkor a mond használatával megszabadulhatnánk a hibátlan kommunikáció feltevésétől. A szerző ezen dolgozatán túlmutató cikke [10] már egy lépés ebbe az irányban.

3.

A fejtörők típusai

Ebben a fejezetben kategorizáljuk a fejtörőket, és megadjuk, hogy adott típusú fejtörők milyen eszközzel oldhatóak meg.

Smullyan logikai feladatait Kolany [29] három csoportba osztotta. Lássunk egy-egy jellemző feladatot, és Kolany elnevezéseit!

Találd ki, hogy ki vagyok! *Tegyük fel, hogy A ezt mondja: „Lókötő vagyok, vagy B lovag". Miféle A, illetve B?* [41, 29. feladat]

Elfelejtettem, hogy mit is mondtál. (Metafejtörők) *Egyszer, amikor ellátogattam a lovagok és lókötők szigetére, találkoztam két lakossal, akik egy fa alatt heverésztek. Megkérdeztem egyiküket: „Lovag valamelyikük?" Ő válaszolt, és én tudtam, hogy mi a helyes válasz a kérdésemre.* [41, 36. feladat]

Mit mondjak/mit kérdezzek? *Ki tudná találni egyetlen kérdéssel egy erdélyiről, hogy vámpír-e vagy sem?* [41, 187. feladat]

A feladatok jelentős része az első csoportba esik. A kérdés rendszerint a szereplők típusára vonatkozik. Ha a feladat előfeltételeit az $X_1, \ldots, X_n$ formulák írják le, míg a kérdéses szereplő i-dik csoportba tartozását Y_i, akkor az a kérdés, hogy mely i esetén lesz érvényes az

$$X_1 \wedge \cdots \wedge X_n \supset Y_i \tag{3.1}$$

formula. Ha a feladat összes szereplőjének típusa kérdéses, akkor az előbbi következményrelációt az összes szereplőre külön-külön meg kell vizsgálnunk.

Smullyan későbbi könyveiben [42, 43] kezdi el használni a *metafejtörő* elnevezést, de [41] is tartalmaz pár ilyen rejtvényt. Itt a történetek nagy részében a főszereplő elfelejti a történet bizonyos feltételét, de a következményreláció meglétét nem. Ha $X_1, \ldots, X_{n-1}$ az ismert előfeltételeket, $W_1, \ldots, W_m$ az lehetséges következményeket jelöli, és $X_n \in \{Y_1, \ldots, Y_k\}$, akkor az a kérdés, hogy mely i, j számpárra lesz az

$$X_1 \wedge \cdots \wedge X_{n-1} \wedge Y_i \supset W_j \tag{3.2}$$

formula érvényes. Az (3.1) illetve (3.2) formula érvényessége helyett annak szekventkalkulusbeli bizonyíthatóságát fogjuk vizsgálni, mert mint a későbbiekben belátjuk, ez a két fogalom esetünkben egybeesik.

A fejtörők közül a harmadik csoportba tartozóak tűnnek a legnehezebbeknek. A második csoportba eső feladatokhoz képest itt az a változás, hogy nincsenek megadva a lehetőségek, azaz az előbbi jelölést használva nekünk kell megkeresnünk azt az X_n ismeretlen formulát, ami speciálisan $\mathtt{C}_a Y$ alakú, azaz az a személy mondhatja az Y állítást.

Ahogy a kategória elnevezése is jelzi, két alkategóriánk van. Első esetben egy megfelelő állítás kimondásával kell valamit (W) bebizonyítanunk. Ehhez úgy kell megválasztani az Y formulát, hogy az

$$X_1 \wedge \cdots \wedge X_{n-1} \wedge \mathtt{C}_a Y \supset W \tag{3.3}$$

formula érvényes legyen.

Második esetben egy megfelelő eldöntendő kérdést kell feltennünk (Y), hogy a válaszból kiderüljön, hogy a kérdéses dolog teljesül-e (W) vagy sem ($\neg W$). Ebben az esetben úgy kell megválasztani Y-t, hogy az

$$X_1 \wedge \cdots \wedge X_{n-1} \wedge \mathtt{C}_a \neg Y \supset \neg W \tag{3.4}$$

formula mellett (3.3) is érvényes legyen.

A 4–9, 11. és 12. fejezetekben logikai nyelveket konstruálunk a fejtörők formalizálására, és mindegyikben megadnuk egy-egy szekventkalkulust, melyekről belátjuk, hogy helyesek és teljesek. A szekventkalkulus alkalmazását a fejtörők megoldásakor a 4. fejezet végén található példa szemlélteti. A harmadik kategóriába eső feladatok megoldására szolgáló módszereket a 14. fejezet ismerteti.

4.
$\mathcal{L}_0$, a kijelentéslogika nyelve

Ebben a fejezetben a kijelentéslogikán keresztül bemutatjuk azt az eszköztárt, melyet a későbbiekben használni fogunk; megfogalmazzuk az alapvető tételeket, megadjuk ezek bizonyításait. Végül megmutatjuk, hogy hogyan használható a szekventkalkulus fejtörők megoldására.

4.1. Portia és Craig felügyelő

Smullyan feladatainak megoldására a hagyományos kijelentéslogikát használta fel [40], ám erről a nagyközönségnek szánt rejtvénykönyveiben bölcsen hallgat. A bonyolultabb feladatok leírására mi ettől eltérően modális logikákat fogunk felhasználni. Vizsgálódásunk középpontjában álló [41] viszont 42 olyan feladatot tartalmaz, melyek könnyedén — minden átalakítás nélkül — formalizálhatóak kijelentéslogikai állításokként, mint például Portia ládikáinak fejtörői illetve Craig felügyelő egyes esetei.

Hatalmas mennyiségű árut loptak el egy áruházból. A tettes (vagy tettesek) autóval szállította, (vagy szállították) el a zsákmányt. Három jól ismert bűnözőt vittek be a Scotland Yard-ra kihallgatni: A-t, B-t és C-t. A következők derültek ki:

1. *A-n, B-n és C-n kívül senki nem vehetett részt a rablásban.*
2. *C sosem dolgozik A (és esetleg más tettestársak) nélkül.*
3. *B nem tud autót vezetni.*

A bűnös vagy ártatlan? [41, 72. feladat]

4.2. Szintaxis

4.1. Definíció. A kijelentéslogika nyelvét $\mathcal{L}_0$-al jelöljük. A nyelv szimbólumai a $\top$ (azonosan igaz), $\bot$ (azonosan hamis), $\neg$ (tagadás), $\wedge$ (és), $\vee$ (vagy), $\supset$ (implikáció), a zárójelek, valamint a kijelentésváltozók, melyeknek halmazát $\mathcal{S}$ jelöli. Ennek a halmaznak az elemeire Q_1, Q_2, ... formában hivatkozunk. Az $\mathcal{L}_0$ *nyelv formuláinak halmaza* ($\mathcal{F}$), az a legszűkebb halmaz, melyre teljesülnek a következők:

F0. $\top \in \mathcal{F}$ és $\bot \in \mathcal{F}$.
F1. $\mathcal{S} \subset \mathcal{F}$,
F2. Ha $B \in \mathcal{F}$, akkor $\neg B \in \mathcal{F}$.
F3. Ha $B \in \mathcal{F}$ és $C \in \mathcal{F}$, akkor $(B \supset C) \in \mathcal{F}$, $(B \vee C) \in \mathcal{F}$ és $(B \wedge C) \in \mathcal{F}$.

Egy *formula fokán* a formulában szereplő logikai összekötőjelek (beleértve a modális operátorokat is) számát értjük.

4.2. Megjegyzés. A dolgozatban gyakran fogjuk használni az ekvivalenciát ($A \equiv B$), ami az $((A \supset B) \wedge (B \supset A))$ formula rövidítése. A formulák jobb olvashatósága érdekében rendszerint az alábbiak szerint elhagyjuk a zárójelek egy részét:

- Elhagyjuk a külső zárójeleket.
- Felhasználjuk a precedenciát: leggyengébb az ekvivalencia, utána következik az implikáció, őket követi egyforma erősséggel a diszjunkció és a konjunkció, míg a legerősebb a negáció.
- Kihasználjuk a konjunkció és diszjunkció asszociativitását.

4.3. Szemantika

4.3. Definíció. Legyen ϑ_S az $\mathcal{S}$ halmaz egy részhalmaza. ϑ (ami most egybeesik ϑ_S-vel) egy *igazságértékelés*, mely az $\mathcal{L}_0$ nyelv minden formulájához igaz vagy hamis értéket rendel. Azt, hogy a ϑ igazságértékelés a B formulához igazat rendel, $_\vartheta\models B$, míg ha hamisat rendel $_\vartheta\not\models B$ formában jelöljük. Az $\mathcal{L}_0$ nyelv formuláinak értékét a ϑ igazságértékelésnél a következőképpen adjuk meg:

V0. $_\vartheta\models \top$, $_\vartheta\not\models \bot$.
V1. Ha $Q_i \in \mathcal{S}$, $_\vartheta\models Q_i$ akkor és csak akkor, ha $Q_i \in \vartheta_S$.
V2. $_\vartheta\models \neg B$ akkor és csak akkor, ha $_\vartheta\not\models B$.
V3. $_\vartheta\models B \supset C$ akkor és csak akkor, ha $_\vartheta\not\models B$ vagy $_\vartheta\models C$.
V4. $_\vartheta\models B \vee C$ akkor és csak akkor, ha $_\vartheta\models B$ vagy $_\vartheta\models C$.
V5. $_\vartheta\models B \wedge C$ akkor és csak akkor, ha $_\vartheta\models B$ és $_\vartheta\models C$.

Egy *formula kielégíthető*, ha van egy olyan igazságértékelés, melyben igaz. Egy *formulahalmaz kielégíthető*, ha van olyan igazságértékelés, melyben a formulahalmaz összes formulája igaz. Ha egy formula vagy formulahalmaz nem kielégíthető, akkor *kielégíthetetlen.* Egy formulát *érvényesnek* nevezünk, ha minden ϑ igazságértékelésben igaz. A C formula *logikai következménye* a $B_1, B_2, ...$ formuláknak, ha minden olyan igazságértékelésben, melyben a $B_1, B_2, ...$ formulák igazak, a C is igaz.

4.4. Megjegyzés. Az előbbi definíció alapján könnyű belátni, hogy tetszőleges B formulára a $B \equiv \neg\neg B$ érvényes. Ezért nem fogjuk külön kezelni a kettős tagadást, mostantól minden külön figyelmeztetés nélkül B-t írunk minden $\neg\neg B$ formula helyett. Hasonló okok miatt a $\neg\top$ helyett $\bot$-t és a $\neg\bot$ helyett $\top$-t használunk.

4.4. Szekventkalkulus

4.5. Definíció. *Szekventen* egy rendezett formulahalmaz-párt értünk, ahol ezek a halmazok végesek. A Γ és Θ formulahalmazokból álló szekventet $\Gamma \to \Theta$ formában írjuk. Ha $\Gamma = \{A_1, \ldots A_n\}$ és $\Theta = \{B_1, \ldots B_m\}$, akkor $\Gamma \to \Theta$ szekvent *igazságértékén* a $\top \wedge A_1 \wedge \ldots \wedge A_n \supset B_1 \vee \ldots \vee B_m \vee \bot$ formula igazságértékét értjük. Ezt a formulát a $\Gamma \to \Theta$ szekvent *asszociáltjának* nevezzük. A $\Gamma \to \Theta$ szekvent *cáfolható*, ha van egy olyan ϑ értékelés, melyben Γ minden eleme igaz, és Θ minden eleme hamis. A nem cáfolható szekventeket *érvényesnek* nevezzük. A *szekvent fokán* a formulahalmazaiban szereplő formulák fokainak összegét értjük.

4.6. Megjegyzés. Azok a $\Gamma \to \Theta$ szekventek, melyekben a Γ és a Θ formulahalmazok nem diszjunktak, érvényesek, mivel a közös formula nem lehet egyszerre igaz és hamis is, így a szekvent nem cáfolható. Hasonlóképp, ha $\bot \in \Gamma$ vagy $\top \in \Theta$, akkor nincs olyan értékelés, melyben Γ összes formulája igaz és Θ összes formulája hamis lenne, így ezek a szekventek is érvényesek.

4.7. Definíció. A szekventkalkulus levezetési szabályait a 4.1. ábra tartalmazza, míg az axiómák a következők:

- $A, \Gamma \to \Theta, A$,
- $\bot, \Gamma \to \Theta$ és
- $\Gamma \to \Theta, \top$.

Fastruktúrán egy olyan fán értelmezett függvényt értünk, mely a fa minden egyes pontjához egy szekventet rendel. *Szekventfa* az a fastruktúra, melynek minden egyes, nem levél pontjához hozzárendelhető valamely szabály vonal alatti szekventje, és ezen szabály vonal feletti szekventjei a pont közvetlen rákövetkezőihez illeszkednek. Az A formula akkor *bizonyítható*, ha létezik egy, az előbbi szabályoknak megfelelő szekventfa, melynek gyökerében a $\rightarrow A$ szekvent, míg leveleiben pedig axiómák szerepelnek.

$$\frac{A, \Gamma \rightarrow \Theta, B}{\Gamma \rightarrow \Theta, A \supset B} \rightarrow\supset \qquad \frac{\Gamma \rightarrow \Theta, A \ ; \ B, \Gamma \rightarrow \Theta}{A \supset B, \Gamma \rightarrow \Theta} \supset\rightarrow$$

$$\frac{\Gamma \rightarrow \Theta, A \ ; \ \Gamma \rightarrow \Theta, B}{\Gamma \rightarrow \Theta, A \wedge B} \rightarrow\wedge \qquad \frac{A, B, \Gamma \rightarrow \Theta}{A \wedge B, \Gamma \rightarrow \Theta} \wedge\rightarrow$$

$$\frac{\Gamma \rightarrow \Theta, A, B}{\Gamma \rightarrow \Theta, A \vee B} \rightarrow\vee \qquad \frac{A, \Gamma \rightarrow \Theta \ ; \ B, \Gamma \rightarrow \Theta}{A \vee B, \Gamma \rightarrow \Theta} \wedge\rightarrow$$

$$\frac{A, \Gamma \rightarrow \Theta}{\Gamma \rightarrow \Theta, \neg A} \rightarrow\neg \qquad \frac{\Gamma \rightarrow \Theta, A}{\neg A, \Gamma \rightarrow \Theta} \neg\rightarrow$$

$$\frac{A, \Gamma \rightarrow \Theta, B \ ; \ B, \Gamma \rightarrow \Theta, A}{\Gamma \rightarrow \Theta, A \equiv B} \rightarrow\equiv \qquad \frac{A, B, \Gamma \rightarrow \Theta \ ; \ \Gamma \rightarrow \Theta, A, B}{A \equiv B, \Gamma \rightarrow \Theta} \equiv\rightarrow$$

4.1. ábra. A szekventkalkulus szabályai.

A 4.1. ábrán szereplő szabályok mindegyikére érvényes a [25, 48.§3.] lemma:

4.8. Lemma. *A vonal alatti szekvent akkor és csak akkor érvényes, ha a vonal feletti szekvent (illetve szekventek mindegyike) is érvényes. Ekvivalens átfogalmazásban: A vonal alatti szekvent akkor és csak akkor cáfolható, ha a vonal feletti szekvent (illetve szekventek valamelyike) is cáfolható.*

Bizonyítás. A bizonyítás hasonlóképp megy mind a tíz szabályra, mi a $\supset\rightarrow$ szabályra látjuk be.

- Tegyük fel, hogy a $A \supset B, \Gamma \rightarrow \Theta$ szekvent cáfolható, tehát van olyan ϑ értékelés, melyben Γ elemei igazak, Θ elemei hamisak, és ${}_{\vartheta}\models A \supset B$. Ez a V3. pont alapján akkor teljesül, ha
  1. ${}_{\vartheta}\not\models A$, ekkor $\Gamma \rightarrow \Theta, A$ (az első fenti szekvent) cáfolható.
  2. ${}_{\vartheta}\models B$, ekkor $B, \Gamma \rightarrow \Theta$ (a második fenti szekvent) cáfolható.
- Ha a $\Gamma \rightarrow A, \Theta$ szekvent cáfolható, akkor van olyan ϑ értékelés, melyben Γ minden eleme igaz, Θ minden eleme hamis, és ${}_{\vartheta}\not\models A$, viszont ekkor a V3. pont alapján ${}_{\vartheta}\models A \supset B$, így $A \supset B, \Gamma \rightarrow \Theta$ is cáfolható. A $B, \Gamma \rightarrow \Theta$ szekvent cáfolhatóságából hasonló okfejtéssel ugyanerre az eredményre juthatunk. $\dashv$

4.9. Tétel. *Ha az A formula bizonyítható a szekventkalkulusban, akkor érvényes.*

Bizonyítás. Az axiómák érvényesek. A lemma alapján a szekventfán felülről-lefele haladva sorra érvényes szekventeket kapunk, így a $\rightarrow A$ szekvent is érvényes. Ez alapján nincs olyan ϑ értékelés, amelyben az A formula hamis lenne, így az A formula érvényes. $\dashv$

A szabályok mindegyikére teljesül az alábbi lemma:

4.10. Lemma. *Minden vonal feletti szekvent foka szigorúan kisebb, mint a vonal alatti szekvent foka.*

Bizonyítás. A bizonyítás hasonlóképp megy mind a tíz szabályra, mi megint a $\supset\rightarrow$ szabályra látjuk be a lemmát.

Ha a $\Gamma \rightarrow \Theta$ szekvent foka n, valamint az A és a B formula foka k és l, akkor a $A \supset B, \Gamma \rightarrow \Theta$, azaz a vonal alatti szekvent foka $n + (k + l + 1)$, míg $\Gamma \rightarrow \Theta, A$ illetve $B, \Gamma \rightarrow \Theta$ szekventek fokai rendre $n+k$ illetve $n+l$. Miután k, l, n mindegyike nemnegatív szám, így a lemma állítása teljesül. $\dashv$

4.11. Lemma. *Minden (a szabályoknak megfelelő) szekventfa véges.*

Bizonyítás. Minden egyes szabály alkalmazásakor az új szekvent(ek) foka szigorúan kisebb, mint a régié. Mivel a kiinduló szekvent foka véges, csak véges sokszor alkalmazhatóak a szabályok, tehát a szekventfa minden ága véges. $\dashv$

4.12. Tétel. *Minden F érvényes formula bizonyítható a szekventkalkulusban.*

Bizonyítás. Mivel az F érvényes formula, a $\rightarrow F$ szekvent is érvényes. Ha a szekvent foka pozitív, akkor a pozitív fokú formulájára alkalmazva a szekventkalkulus megfelelő szabályát, a 4.8. lemma alapján újra érvényes szekvent(ek)et kapunk, melyekre (ha nem axiómák) megismételjük ezt az eljárást. Ezt az előző lemma alapján ez csak véges sokszor tehetjük meg, így végül egy véges fát kapunk, melynek minden szekventje érvényes. Ha a levelek között lenne olyan, amely nem axióma, akkor ezen szekvent bal- és jobboldala diszjunkt. Ennek alapján ϑ_S legyen a szekvent bal oldalán szereplő kijelentésváltozók halmaza. A V1. pont alapján a ϑ értékelésben a szekvent bal oldalán álló kijelentésváltozók mind igazak, míg a szekvent jobb oldalán álló kijelentésváltozók mind hamisak, azaz a szekvent cáfolható. A 4.8. lemma többszöri alkalmazásával ebből azt kapjuk, hogy $_\vartheta\not\models F$, azaz a feltevéssel ellentétben az F formula nem érvényes. Ezért a fa minden levele axióma, ami pedig azt jelenti, hogy az F formula bizonyítható a szekventkalkulusban. $\dashv$

Ezek után oldjuk meg a fejezet elején megadott fejtörőt! Ha rendre az A, B és a C kijelentésváltozó jelöli azt, hogy az A, B illetve a C személy bűnös, akkor a feladatunk feltételei a következőképp formalizálhatóak:

1. $A \vee B \vee C$,
2. $C \supset A$,
3. $B \supset A \vee C$.

Az A személy ez alapján minden kétséget kizárólag akkor bűnös illetve ártatlan, ha az

$$(A \vee B \vee C) \wedge (C \supset A) \wedge (B \supset A \vee C) \supset A \tag{4.1}$$

illetve az

$$(A \vee B \vee C) \wedge (C \supset A) \wedge (B \supset A \vee C) \supset \neg A \tag{4.2}$$

formula logikai törvény.

A szekventkalkulus bizonyításai, akárcsak a természetes levezetés bizonyításai igen nehéz feladat elé állítják a tördelőt. Ebben a dolgozatban azt a módszert követjük, melyben a szekventfa ágait nem egymás mellé, hanem egymás alá helyezzük, s a

$$A \vee B \vee C, A, A \vee C \to A$$

$$A \vee B \vee C, A \to A, C$$

$$A \vee B \vee C, C \to A, C$$

$$A \vee B \vee C, A \vee C \to A, C$$

$$A \vee B \vee C, C \supset A, A \vee C \to A$$

$$A \vee B \vee C, A \to A, B$$

$$A \to A, B, C$$

$$B \to A, B, C$$

$$C \to A, B, C$$

$$B \vee C \to A, B, C$$

$$A \vee B \vee C \to A, B, C$$

$$A \vee B \vee C, C \supset A \to A, B$$

$$A \vee B \vee C, C \supset A, B \supset A \vee C \to A$$

$$\to (A \vee B \vee C) \wedge (C \supset A) \wedge (B \supset A \vee C) \supset A$$

4.2 ábra. A 72. fejtörő megoldása.

részfákat keretezéssel jelöljük. Bizonyítsuk be a 4.1 formulát, azaz azt, hogy ekkor A mindenképp bűnös! A 4.2. ábráról leolvasható, hogy a legbelső keretekben, azaz a levélszekventekben axiómák szerepelnek, így az eredeti formula bizonyítható.

5.

Az $\mathcal{L}^{tf}$ nyelv

Smullyan legtöbbet idézett fejtörői a lovagokról és a lókötőkről szólnak. Ebben a fejezetben ezen fejtörők formalizálására konstruált nyelvet mutatjuk be.

5.1. Lovagok és lókötők

Rejtvények hosszú sora szól egy szigetről, amelynek bizonyos lakói, a „lovagok”, mindig igazat mondanak, míg a többiek, a „lókötők”, mindig hazudnak. Feltesszük, hogy a sziget minden lakója vagy lovag, vagy lókötő. [41, 30. o.]

A feladatokban a lakosok mondanak, állítanak valamit. Ezen állítások alapján kell dönteni hovatartozásukról, vagy azt kell megadni, hogy egy adott (általában eldöntendő) kérdésre hogyan fognak válaszolni.

A fejtörők szövegeiben egyaránt megtalálhatjuk a *mondja*, *mondta* alakokat. Noha az egyes állításokat és a kérdésekre adott válaszokat az időrend alapján sorba állíthatnánk, ezekben a feladatokban valójában nem játszik szerepet az idő. Azon fejtörők formalizálásában, melyekben a *tud* és *hisz* (knowledge and belief) játsza a főszerepet, és lényeges szerepe van az egymásutániságnak, mint például a koszos gyerekarcok (vagy más megfogalmazásban a felszarvazott férjek [11, 151. o.]) feladatában, sincs szükség arra, hogy a formalizálásra használt logikai nyelv tartalmazza az időt. Ezért a lovagok és lókötők feladatai formalizálásakor nem kell különbséget tenni a múlt és jelen idejű alak között.

Smullyan a hivatalos megoldásokban gyakran hivatkozik arra, hogy ha az adott személy ilyen vagy olyan típusú lenne, akkor mondhatná-e az adott állítást vagy sem. A már nem a nagyközönségnek szánt [40] művében megemlíti, hogy az ilyen fejtörőkben, ha valaki tesz egy valamilyen állítást, akkor ez az állítás pontosan akkor igaz, ha az adott személy lovag. Ezt felhasználva a lovag–lókötő fejtörőket kijelentéslogikai állításokként írja fel, és azokról már könnyedén (például igazságtáblával) kideríti, hogy logikai törvények-e vagy sem. A fejtörők egyikében sem szerepel olyan állítás, hogy valaki valamit nem mond ki. Ugyanis egy ki nem mondott állításból semmire nem következtethetünk. (Feltéve, ha megmaradunk a logika keretein belül.)

Ha alaposabban megvizsgáljuk, hogy Smullyan mire vezeti vissza a feladatot (a kimondott állítás pontosan akkor igaz, ha az adott személy lovag), akkor látjuk, hogy a kulcskérdés az, hogy az adott személynek van-e lehetősége az adott állítás kimondására. Ha már kimondta, akkor természetesen lehetősége is van az állítás kimondására. Fordítva viszont, ha valakinek lehetősége van egy állítás kimondására, akkor abból még nem következik, hogy ki is mondja.

Miután a *mondhat* a kulcs a feladatok megoldásában, ezért ez áll vizsgálódásunk középpontjában. Az 10. fejezetben még visszatérünk a *mond* vizsgálatára, és segítségével egy igen gyenge logikát konstruálunk, amely viszont annyira még erős, hogy megoldjuk vele a fejtörőket.

5.2. Szintaxis

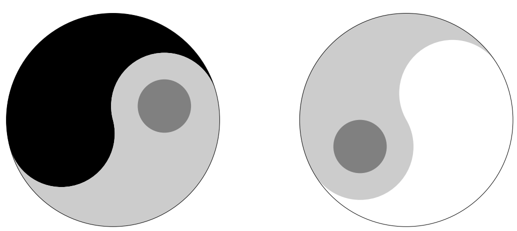
5.1. Definíció. A jelöljük a szigetlakókat a, b, c,…-vel, halmazukat pedig $\mathcal{P}$-vel. Nyilvánvaló, hogy véges sok szigetlakó létezik, ezért $\mathcal{P}$ is egy véges halmaz. Legyen minden x szigetlakó ($x \in \mathcal{P}$) esetén T_x és F_x formula, ahol T_x azt jelenti, hogy x lovag, míg F_x pedig azt, hogy x lókötő. Azt, hogy az x személy *mondhatja* a B állítást, $\mathtt{C}_x B$ formában írjuk. A logikai nyelv elnevezésében jelezzük, hogy kiről szólnak a rejtvények. Az emberek típusait jelző szimbólumok a felső indexbe kerülnek. Ezért lesz a lovagok és lókötők nyelve az $\mathcal{L}^{tf}(\mathcal{P})$. Az $\mathcal{L}^{tf}(\mathcal{P})$ formuláinak a definícióját úgy kapjuk meg, hogy a 4.1. definíciót kiegészítjük a következő pontokkal:

F4. Ha $x \in \mathcal{P}$, akkor $T_x \in \mathcal{F}$.
F5. Ha $x \in \mathcal{P}$, akkor $F_x \in \mathcal{F}$.
F6. Ha $x \in \mathcal{P}$ és $B \in \mathcal{F}$, akkor $\mathtt{C}_x B \in \mathcal{F}$.

A különböző $\mathcal{P}$ halmazok esetén egyes fejtörők formalizálásakor különböző formulákat kaphatunk, például ha az egyik lakos azt mondja, hogy „mindannyian lókötők vagyunk.” Ezért szerepeltetjük a nyelv elnevezésében a $\mathcal{P}$ halmazt. Mivel az adott feladat mindig egyértelműen meghatározza a megfelelő $\mathcal{P}$ halmazt, mostantól az $\mathcal{L}^{tf}(\mathcal{P})$ logikai nyelv nyelv helyett röviden $\mathcal{L}^{tf}$ nyelvről beszélünk.

5.3. Szemantika

Az $\mathcal{L}^{tf}$ nyelv szemantikájának meghatározásakor továbbra is minden formulához igaz vagy hamis értéket kell rendelni. Ehhez már nem csak a kijelentésváltozók igaz vagy hamis voltát kell meghatározni, hanem minden egyes emberről meg kell mondani, hogy lovag-e vagy lókötő. Ez utóbbira ϑ_T függvényt használjuk, ami azt adja meg, hogy ki milyen típusú. ϑ_S és ϑ_T együtt határozza meg az igazságértékelést, amit most is ϑ-val fogunk jelölni. A feltételek szerint a lovagok csak igaz állításokat mondanak, ám ezen belül semmi korlátozás nincs. Hasonló állítás áll fenn a lókötőkre, ám ők csak hamis állításokat tehetnek. Ezt illusztrálja az 5.1 ábra. A fehér rész jelöli az igaz, a fekete a hamis állításokat. A világosszürke rész jelzi, hogy mit mondhatna az adott személy, míg a sötétszürke pedig azt mutatja, hogy valójában mit állított. Balra a lovag, jobbra a lókötő ábrája található.



5.1. ábra. Mit mondhat egy lovag és egy lókötő?

Mivel a feltételek alapján csak a személyek típusa és az állítások igaz vagy hamis volta számít, a ϑ igazságértékelésben $\mathtt{C}_x B$ pontosan akkor lesz igaz, ha x lovag és

B igaz vagy pedig ha x lókötő és B hamis. Fordítva, azaz ha x lovag és B hamis vagy pedig x lókötő és B igaz, akkor $\mathtt{C}_x B$ hamis lesz, és $\mathtt{C}_x B$ csak ekkor lehet hamis. Ezért az $\mathcal{L}^{tf}$ szemantikáját úgy kapjuk meg, hogy a 4.3. definíciót az alábbiak szerint megváltoztatjuk:

5.2. Definíció. Legyen $\vartheta = \langle \vartheta_S, \vartheta_T \rangle$, ahol $\vartheta_S \subset \mathcal{S}$ és $\vartheta_T : \mathcal{P} \to \{t, f\}$. Egészítsük ki a V0-V5. pontok listáját a V6-V8. pontokkal:

V6. Ha $x \in \mathcal{P}$, ${}_\vartheta\models T_x$ akkor és csak akkor, ha $\vartheta_T(x) = t$,
V7. Ha $x \in \mathcal{P}$, ${}_\vartheta\models F_x$ akkor és csak akkor, ha $\vartheta_T(x) = f$ és
V8. ${}_\vartheta\models \mathtt{C}_x B$ akkor és csak akkor ha (${}_\vartheta\models T_x$ és ${}_\vartheta\models B$) vagy (${}_\vartheta\models F_x$ és ${}_\vartheta\not\models B$).

5.4. Szekventkalkulus

Új szekventkalkulusi szabályokat egyedül a *mondhat* modális operátorhoz kell készítenünk. Ismét meg kell fogalmazni azt, amit a szemantikánál egyszer már megadtunk. Ennek alapján szabályaink a következők:

$$\frac{T_x, \Gamma \to \Theta, A \ ; \ F_x, A, \Gamma \to \Theta}{\Gamma \to \Theta, \mathtt{C}_x A}{\scriptstyle \to C_1} \quad \text{és} \quad \frac{T_x, A, \Gamma \to \Theta \ ; \ F_x, \Gamma \to \Theta, A}{\mathtt{C}_x A, \Gamma \to \Theta}{\scriptstyle C_1 \to}$$

Lássuk be a 4.8. lemmát például a $\to C_1$ szabályra!

Bizonyítás.

- Tegyük fel, hogy a $\Gamma \to \Theta, \mathtt{C}_x A$ szekvent cáfolható! Ekkor van egy olyan ϑ értékelés, melyben Γ minden formulája igaz, Θ minden formulája hamis és ${}_\vartheta\not\models \mathtt{C}_x A$. A V8. pont alapján így vagy ${}_\vartheta\models T_x$ és ${}_\vartheta\not\models A$, vagy ${}_\vartheta\models F_x$ és ${}_\vartheta\models A$. Innen adódik, hogy a $T_x, \Gamma \to \Theta, A$ szekvent cáfolható. A másik esetben hasonlóan adódik, hogy a $F_x, A, \Gamma \to \Theta$ szekvent cáfolható.
- Ha abból indulunk ki, hogy a $T_x, \Gamma \to \Theta, A$ szekvent cáfolható, akkor van olyan ϑ értékelés, melyben Γ minden formulája igaz, Θ minden formulája hamis, ${}_\vartheta\models T_x$ és ${}_\vartheta\not\models A$. A V8. pont alapján kapjuk, hogy ${}_\vartheta\not\models \mathtt{C}_x A$, így a $\Gamma \to \Theta, \mathtt{C}_x A$ szekvent cáfolható. Ha az $F_x, A, \Gamma \to \Theta$ szekvent cáfolható, akkor van olyan ϑ értékelés, melyben Γ minden formulája igaz, Θ minden formulája hamis, ${}_\vartheta\models F_x$ és ${}_\vartheta\models A$. Ebből ${}_\vartheta\not\models \mathtt{C}_x A$ adódik, így a $\Gamma \to \Theta, \mathtt{C}_x A$ szekvent megint cáfolható. $\dashv$

Ennek alapján a 4.9. tétel ugyanúgy bizonyítható mint korábban, azaz ez a szekventkalkulus helyes. A 4.10. lemma a két új szabályra is érvényes, ennek belátásához csak azt kell felismerni, hogy egy $n+1$ fokú formula helyett egy n fokú és egy nulladfokú formula kerül a fenti szekventekbe. A szemantika alapján nyilvánvaló, hogy egyetlen személy sem lehet egyszerre lovag és lókötő. A szekventkalkulus ezt az információt viszont nem tartalmazza, így például a $T_x \vee F_x$ érvényes formulát nem bizonyíthatjuk a szekventkalkulusban. Ha a $\to C_1$ és $C_1 \to$ szabályokat kiegészítenénk a szemantika szerint például azzal, hogy a lovag nem lókötő, akkor ezzel az új, továbbra is helyes szekventkalkulussal Smullyan összes idetartozó fejtörőjét megoldhatnánk, ám a módszer továbbra sem lenne teljes, azaz nem tudnánk minden érvényes formulát bizonyítani.

Éppen ezért bevezetjük a

$$\bigwedge_{x \in \mathcal{P}} \big((T_x \wedge \neg F_x) \vee (\neg T_x \wedge F_x)\big)$$

formulát, melyre az egyszerűség kedvéért Z-vel hivatkozunk. Ezzel minden készen áll arra, hogy kimondjuk a szekventkalkulus teljességét:

5.3. Tétel. *Ha F érvényes formula, akkor a $Z \supset F$ formula bizonyítható a szekventkalkulusban.*

Bizonyítás. Könnyedén ellenőrizhető, hogy a Z formula érvényes, így az F formula pontosan akkor érvényes, amikor a $Z \supset F$ formula. Tegyük fel, hogy ez utóbbi érvényes, de nem levezethető! A 4.12. tétel bizonyításához hasonlóan készítsük el a szekventfát. Indirekt feltételünk szerint ennek a fának van egy olyan levele, mely nem axiómaszekventet tartalmaz. A Z speciális megválasztása miatt bármely x személyre T_x és F_x valamelyike szerepel a szekvent bal oldalán. Amennyiben T_x található itt, legyen $\vartheta_T = t$, különben legyen f. ϑ_S konstrukciója azonos a 4.12. definícióban szereplővel. Az így konstruált ϑ értékelésben az adott szekvent cáfolható, így a 4.8. lemma többszöri alkalmazásával azt kapjuk, hogy ${}_{\vartheta}\not\models Z \supset F$, így ${}_{\vartheta}\not\models F$, azaz az F formula nem érvényes. Ezért a fa minden levele axiómaszekventet tartalmaz, tehát a $Z \supset F$ formula bizonyítható a szekventkalkulusban. $\dashv$

5.4. Megjegyzés. A Z formula konstrukciójában a konjunkciót a $x \in \mathcal{P}$ helyett elegendő csak a fejtörőben szereplő személyekre tekinteni. Ebben az esetben, hogy az előző bizonyítás az értékelést jól határozza meg, a következőkben kell megváltoztatni: a $\vartheta_T(x)$ pontosan akkor legyen t, amikor T_x szerepel a szekvent bal oldalán. Ezért, ha a szekvent se T_x-t, se F_x-t nem tartalmazza, akkor $\vartheta_T(x)$ legyen f.

5.5. A fejtörő megoldása

Ezek után lássuk, hogyan alkalmazható a szekventkalkulus a feladatok megoldására!

> *A, B és C együtt álldogált egy kertben. Egy arra járó idegen megkérdezte A-t, „Ön lovag vagy lókötő?” A válaszolt, de olyan érthetetlenül, hogy az idegen nem tudta kivenni, mit is mondott. Megkérdezte B-t: „Mit mondott A?” B válasza: „A azt mondta, hogy ő lókötő”. Ekkor közbeszólt C, a harmadik ember: „Ne higgyen B-nek, hazudik!” A kérdés az, hogy miféle B és C. [41, 26. feladat]*

A megoldásból majd lehet látni, hogy az A személy nem játszik valódi szerepet a fejtörőben. Ezt viszont előre nem láthatjuk, ezért szerepelni fog a feladat formalizáltjában az, hogy az A személy mondott valamit. Ezt a valamit jelölje Q_1!

A feladat feltétele ezek után így írható fel: $\mathtt{C}_a Q_1 \wedge \mathtt{C}_b \mathtt{C}_a F_a \wedge \mathtt{C}_c F_b$. Azt kell kideríteni, hogy a T_b, F_b, T_c és F_c közül melyik az előbbi formula következménye. Elvileg négy implikáció levezethetőségét kell megvizsgálni, de mivel ezek a levezetések igen hasonlítanak egymáshoz, a következmény helyett egy kérdőjelet írunk a levezetendő

$$T_b, C_aF_a, T_c, F_b, Z_a, Z_c, C_aQ_1 \to ?, F_b$$
$$F_b, T_b, C_aF_a, T_c, Z_a, Z_c, C_aQ_1 \to ?, T_b$$
$$T_b, C_aF_a, T_c, F_b, Z_a, Z_b, Z_c, C_aQ_1 \to ?$$
$$F_b, T_c, Z_a, Z_b, Z_c, C_aQ_1 \to ?, C_aF_a \quad \dagger$$
$$T_c, F_b, Z_a, Z_b, Z_c, C_aQ_1, C_bC_aF_a \to ?$$
$$T_a, F_a, T_b, F_c, Z_b, Z_c, C_aQ_1 \to ?, F_b, F_a$$
$$T_a, F_a, T_b, F_c, Z_b, Z_c, C_aQ_1 \to ?, F_b, F_a$$
$$T_a, F_a, T_b, F_c, Z_a, Z_b, Z_c, C_aQ_1 \to ?, F_b$$
$$F_a, T_b, C_aF_a, F_c, Z_a, Z_b, Z_c, C_aQ_1 \to ?, F_b, F_a$$
$$T_b, C_aF_a, F_c, Z_a, Z_b, Z_c, C_aQ_1 \to ?, F_b$$
$$F_b, F_c, Z_a, Z_b, Z_c, C_aQ_1 \to ?, F_b, C_aF_a$$
$$F_c, Z_a, Z_b, Z_c, C_aQ_1, C_bC_aF_a \to ?, F_b$$
$$Z_a, Z_b, Z_c, C_aQ_1, C_bC_aF_a, C_bF_b \to ?$$
$$Z_a \wedge Z_b \wedge Z_c \to C_aQ_1 \wedge C_bC_aF_a \wedge C_bF_b \supset ?$$

5.2. ábra. A 26. fejtörő megoldása.

formulába, így visszük végig a levezetést, és a végén teszteljük a négy lehetséges következményt. A bizonyításban jelölje a $(T_x \wedge \neg F_x) \vee (\neg T_x \wedge F_x)$ formulát Z_x.
Az 5.2. ábra szekventfája még nem teljes, de már ennyi is elég a megoldáshoz. A levelei közül egyelőre a † jelzésű nem tartalmaz axiómát. A kérdőjel helyére a négy lehetséges formula közül azt kell beírni, melyre ez a szekvent axióma lesz. Ilyen az F_b és a T_c, tehát ezek szerint b lókötő, c pedig lovag.

5.5. Megjegyzés. Óvatosan kell bánni Smullyan fejtörőivel, mert többször előfordul, hogy ellentmondásosak az előfeltételek. Mivel hamis feltételből minden következik, és a következményreláció és a levezethetőség egybeesik $\mathcal{L}^{tf}$-ben, az előfeltételek ellentmondásosságát úgy deríthetjük ki, hogy ha $A_1, \ldots A_n$ jelöli az előfeltételeket, akkor a $A_1, \cdots A_n \to$ szekvent érvényes.

5.6. Bű és Bá

Smullyan a lovag–lókötő történeteket szereti variálni:

> *Haiti közelében, egy szigeten a lakosok fele vudu varázslat áldozata lett, és zombivá változott. Ezek a zombik azonban nem a szokásos módon viselkednek, nem csendes élőhalottak, éppen olyan elevenen mozognak és beszélnek, mint az emberek, csak éppen a zombik mindig hazudnak, az emberek pedig mindig igazat mondanak.*

> *Ez eddig úgy hangzik, mint egy más körítéssel feltálalt lovag–lókötő történet, de nem erről van szó! A helyzet sokkal bonyolultabb, mert bár az összes bennszülött tökéletesen érti az angolt, egy régi tabu megtiltja nekik a külföldi szavak használatát. Ezért valahányszor felteszünk egy igen–nem kérdést, ők „Bű”-t vagy „Bá”-t válaszolnak — amiből az egyik* igent*, a másik* nemet *jelent. A baj az, hogy nem tudjuk, hogy a „Bű” és a „Bá” közül melyik jelenti az* igent *és melyik a* nemet*. [41, 156. o.]*

Smullyan bármennyire is tiltakozik, ezek a feladatok egyszerű lovag–lókötő fejtörők. Vizsgáljuk meg, hogy mikor lesz egy kérdésre „Bű” a válasz! Ez két esetben lehetséges, az első esetben „Bű” *igent* jelent és a kérdésre adott válasz *igen* lenne; míg a második esetben „Bű” *nemet* jelent és a kérdésre adott válasz *nem* lenne.

Az *„Igaz-e, hogy A?”* kérdésre adott *igen* válasz azt jelenti, hogy az adott személy mondhatja az A állítást, míg a nemleges válasz azt jelenti, hogy az adott személy mondhatja a $\neg A$ állítást.

Ha a B kijelentésváltozó igaz értéke jelöli azt, hogy a „Bű” *igent* jelent, míg a hamis értéke pedig azt, hogy *nemet*, akkor az *„Igaz-e, hogy A?”* kérdésre adott „Bű” válasz úgy formalizálható, hogy $(\mathtt{C}_x A \wedge B) \vee (\mathtt{C}_x \neg A \wedge \neg B)$. Könnyen ellenőrizhető, hogy az $\mathcal{L}^{tf}$ logikai nyelvben érvényes $\mathtt{C}_x \neg A \equiv \neg \mathtt{C}_x A$ formula. Ha az előbbi logikai törvényt felhasználjuk, ez a formula $\mathtt{C}_x A \equiv B$ alakra rövidül. Ha az előző gondolatmenetet a „Bá”-ra végigvisszük, és felhasználjuk azt, hogy ha a „Bű” igent jelent akkor a „Bá” nemet, akkor az *„Igaz-e, hogy A?”* kérdésre adott „Bá” válasz úgy formalizálható, hogy $(\mathtt{C}_x A \wedge \neg B) \vee (\mathtt{C}_x \neg A \wedge B)$, amiből egyszerűsítéssel a $\mathtt{C}_x A \equiv \neg B$ vagy a $\neg(\mathtt{C}_x A \equiv B)$ formula kapható.

Ezzel az átírással a zombik szigetének fejtörői formalizálhatóak a már ismert $\mathcal{L}^{tf}$ logikai nyelven. Hasonló variánsa van a 8. fejezetnek, ez a módszer ott is használható.

6.
Az $\mathcal{L}^{tfm}$, $\mathcal{L}^{tfv}$ és $\mathcal{L}^{tfb}$ nyelvek

Smullyan a lovagok, lókötők történetéből kiindulva további történeteket konstruált. Ez a fejezet három ilyet mutat be, és megadja a megfelelő logikai nyelveket.

6.1. Baal szigete és egyéb variánsok

A lovagok és lókötők szigetei közül Baal szigete a leghátborzongatóbb és legfigyelemreméltóbb. A szigetet kizárólag emberek és majmok lakják. A majmok termetre épp akkorák mint az emberek, és épp olyan folyékonyan beszélnek. Ugyanúgy, mint az emberek minden majom lovag vagy lókötő. [41, 146. o.]

Tegyük fel, hogy Ön ellátogat egy erdőbe, ahol minden lakos vagy lovag, vagy lókötő. Ráadásul néhány lakos farkasember, akiknek megvan az a kellemetlen szokásuk, hogy éjszakánként néha emberevő farkassá válnak. A farkasemberek is lovagok vagy lókötők. [41, 92. o.]

...ha Bellini elkészített egy ládikát, akkor mindig igaz feliratot rakott rá, ha pedig Cellini készített egy ládikát, akkor mindig hamis feliratot rakott rá. Bellininek és Cellininek fiai is voltak, akik szintén ládikákat készítettek. A fiúk apjuk szokásait követték; Bellini fiai csak igaz feliratokat tettek az általuk készített ládikákra, Cellini fiai csak hamisakat.

Azt is tudjuk, hogy csak a Bellini és Cellini család foglalkozott ládikakészítéssel a reneszánsz Itáliában; minden ládikát vagy Bellini, vagy Cellini, illetve valamelyik Bellini vagy Cellini fiú készített. [41, 128. o.]

Az első két kerettörténet jelzi, hogy továbbra is lovagokkal, illetve lókötőkkel foglalkozunk, csupán a korábbiakhoz képest van egy új tulajdonság, melyre figyelemmel kell lennünk a feladatok formalizálásakor és megoldásakor.

A Baal szigeti történetekben azt kell kifejeznünk, hogy a kérdéses lakos majom vagy ember. Azt, hogy az x lakos majom, jelölje az M_x kijelentésváltozó igaz értéke. Miután minden lakos vagy majom, vagy ember, annak kifejezésére, hogy az x lakos ember, az M_x hamis értékét használhatjuk.

Az erdőlakók esetén az adott személy farkasember volta a kérdéses tulajdonság. Azt, hogy az x személy farkasember, jelölje a W_x kijelentésváltozó igaz értéke. Természetesen azt, hogy x nem farkasember, a W_x hamis értéke jelöli.

A Bellini—Cellini fejtörőknél elsőre nem nyilvánvaló a lovag–lókötő kapcsolat. Ha viszont a ládikák szempontjából vizsgáljuk a dolgokat, akkor a ládikák a feliratukkal állítanak (mondanak) valamit. A Bellini család ládikái igazmondók (igaz feliratokkal látták el), míg a Cellini család ládikái hazugok; ilyen értelemben a ládák tekinthetők lovagoknak illetve lókötőknek. A *mondhat* helyett talán szerencsésebb lenne a *hordozhat* kifejezés, mármint hogy az *x láda hordozhatná azt a feliratot, hogy...*, de ha már farkasemberek és beszélő majmok is előfordulnak, a beszélő ládikák sem okozhatnak különösebb gondot.

A fejtörők megoldásakor valahogy hivatkozni kell a ládákra: a már használt elnevezéseknél, azaz $\mathcal{P}$ halmaznál maradunk. A ládikáknál egy további tulajdonságra van még szükségünk, mégpedig hogy valamely apa vagy valamely fiú készítette. Azt, hogy az x ládikát az egyik fiú készítette, jelölje a B_x kijelentésváltozó igaz értéke. Ennek alapján a B_x hamis értéke jelöli azt, hogy az x ládikát valamely apa készítette.

6.2. Szintaxis

6.1. Definíció. A Baal szigeti feladatok megoldására használt $\mathcal{L}^{tfm}(\mathcal{P})$ formuláinak a definícióját úgy kapjuk meg, hogy a 5.1. definíciót a következő ponttal egészítjük ki:

F7. Ha $x \in \mathcal{P}$, akkor $M_x \in \mathcal{F}$.

A farkasemberekről szóló rejtvények megoldására használt $\mathcal{L}^{tfw}(\mathcal{P})$ formuláinak a definícióját úgy kapjuk meg, hogy az $\mathcal{L}^{tf}$ formuláinak definícióját a következő ponttal egészítjük ki:

F8. Ha $x \in \mathcal{P}$, akkor $W_x \in \mathcal{F}$.

A Bellini–Cellini fejtörők megoldására használt $\mathcal{L}^{tfb}(\mathcal{P})$ formuláinak a definícióját úgy kapjuk meg, hogy az $\mathcal{L}^{tf}$ formuláinak definícióját a következő ponttal egészítjük ki:

F9. Ha $x \in \mathcal{P}$, akkor $B_x \in \mathcal{F}$.

6.3. Szemantika

A 5.2. definíciót a következőképpen kell megváltoztatni:

6.2. Definíció.

$\mathcal{L}^{tfm}$ szemantika: Legyen $\vartheta = \langle \vartheta_S, \vartheta_T, \vartheta_U \rangle$, ahol $\vartheta_S \subset \mathcal{S}$, $\vartheta_T : \mathcal{P} \to \{t, f\}$ és $\vartheta_U \subset \mathcal{P}$. Egészítsük ki a V0-V8. pontok listáját a V9. ponttal:

V9. Ha $x \in \mathcal{P}$, ${}_{\vartheta}\models M_x$ akkor és csak akkor, ha $x \in \vartheta_U$.

$\mathcal{L}^{tfw}$ szemantika: Legyen $\vartheta = \langle \vartheta_S, \vartheta_T, \vartheta_U \rangle$, ahol $\vartheta_S \subset \mathcal{S}$, $\vartheta_T : \mathcal{P} \to \{t, f\}$ és $\vartheta_U \subset \mathcal{P}$. Egészítsük ki a V0-V8. pontok listáját a V10. ponttal:

V10. Ha $x \in \mathcal{P}$, ${}_{\vartheta}\models W_x$ akkor és csak akkor, ha $x \in \vartheta_U$.

$\mathcal{L}^{tfb}$ szemantika: Legyen $\vartheta = \langle \vartheta_S, \vartheta_T, \vartheta_U \rangle$, ahol $\vartheta_S \subset \mathcal{S}$, $\vartheta_T : \mathcal{P} \to \{t, f\}$ és $\vartheta_U \subset \mathcal{P}$. Egészítsük ki a V0-V8. pontok listáját a V11. ponttal:

V11. Ha $x \in \mathcal{P}$, ${}_{\vartheta}\models B_x$ akkor és csak akkor, ha $x \in \vartheta_U$.

6.4. Szekventkalkulus

Ha felidézzük a fejezet elején szereplő kerettörténeteket, akkor rájövünk, hogy valakinek a majom vagy ember illetve farkasember vagy egészséges volta, valamint az apa illetve fia „által készítettség” nem befolyásolja az igazmondást vagy hazudozást. Ennek megfelelően nem kell újabb szabályokat alkotni, azaz ehhez a három nyelvhez ugyanaz a szekventkalkulus tartozik, ami a $\mathcal{L}^{tf}$ logikai nyelvhez. Ezek alapján a 4.9. tétel azonnal adódik erre a három új nyelvre. Az 5.3. tétel is igaz lesz mindhárom nyelv esetén, csak a korábban megadott bizonyítást kell kiegészíteni azzal, hogy a ϑ_U halmazt úgy adjuk meg, hogy pontosan azokat a $\mathcal{P}$ halmazbeli x értékeket tartalmazza, melyre a kérdéses szekvent bal oldalán szerepel az M_x (illetve a nyelvtől függően a W_x vagy a B_x).

7. Az $\mathcal{L}^{lu}$ és $\mathcal{L}^{luf}$ nyelvek

Smullyan a további típusok hozzáadása mellett szereti a hét napjait is belekeverni a rejtvényekbe. A fejezetben ismertetett módszerrel [43] hasonló tőről származó, ám kicsit eltérő feladatai is megoldhatóak.

7.1. Az Oroszlán, az Egyszarvú és az ikrek

Az Oroszlán és az Egyszarvú sűrűn látogatták az erdőt. Ezek ketten furcsa teremtmények. Az Oroszlán minden hétfőn, kedden és szerdán hazudik, és a hét többi napján igazat mond. Az Egyszarvú pedig csütörtökön, pénteken és szombaton hazudik, a hét többi napján igazat mond. [41, 46. o.]

Subidam és Subidu ... sűrűn látogatták az erdőt. Egyikük olyan volt, mint az Oroszlán, minden hétfőn, kedden és szerdán hazudott, és a hét többi napján igazat mondott. Másikuk olyan volt, mint az Egyszarvú, csütörtökön, pénteken és szombaton hazudott, a hét többi napján igazat mondott. Csakhogy Alice nem tudta, hogy melyikük olyan, mint az Oroszlán, és melyikük, mint az Egyszarvú. Hogy még rosszabb legyen a dolog, a testvérek annyira hasonlítottak egymásra, hogy Alice meg sem tudta különböztetni őket... [41, 47. o.]

Egy nap Dingidungi összetalálkozott Alice-szel, és ezt mondta: „Gyermekem, szeretnék neked elmondani egy titkot. A legtöbben nem tudják, de Subidunak és Subidamnak van még egy testvére, akinek a neve Subidi. Távoli vidéken él, de alkalmanként idelátogat. Pontosan annyira hasonlít Subidura és Subidamra, mint amennyire Subidu és Subidam hasonlít egymásra." [41, 128. o.]

Ha belegondolunk, az Oroszlán és az Egyszarvú, illetve Subidam és Subidu története megint csak lovag–lókötő fejtörő, mert a szereplők vagy következetesen igazat mondanak, vagy következetesen hazudnak. A problémát az jelenti, hogy napról napra változnak a személyek tulajdonságai. Valójában három különböző esettel kellene foglalkozni

- hétfő, kedd, szerda,
- csütörtök, péntek, szombat,
- vasárnap.

Ami miatt mégsem elégedünk meg ezzel a három esettel, az az, hogy a feladatok relatív hivatkozásokat tartalmaznak, mint például *tegnap*, vagy *holnapután*. A *tegnap* hivatkozás egy vasárnapi napon egy más tulajdonságú napra vonatkozik, míg ugyanez kedden egy ugyanolyan tulajdonságú napra. A feladatok formalizálásakor ez jelentősen bonyolítja az esetek felírását, ezért egy könnyebben átlátható módszert vezetünk be. Mivel más fejtörőgyűjteményben [43] olyan szereplő is akad, aki csak hétfőn hazudik, épp ezért minden napot külön kezelünk és a *mondhat* modális operátor helyét a hét napjainak megfelelően hét darab operátor veszi át, név szerint a *hétfőn mondhatja*, *kedden mondhatja*, ..., *vasárnap mondhatja*. Annak jelölésére, hogy az x személy az A állítást az adott napon mondhatja a $\mathtt{C}_x^h A$, $\mathtt{C}_x^k A$, ..., $\mathtt{C}_x^v A$ alakokat használjuk.

Ha a feladat szövege nem tartalmazza, hogy mely napon történik, akkor ki kell próbálni mind a hét esetet. Noha [41] nem tartalmaz olyan feladatot, melyben több egymástól független és ismeretlen nap szerepel, de nem zárhatjuk ki ezt az esetet sem. Ekkor a hét helyett $49, 343, \ldots$ esetet kell megvizsgálnunk. Ha a történet napja adott, akkor már könnyedén feloldhatóak a relatív hivatkozások.

7.2. Szintaxis

Mivel csak az Oroszlán és az Egyszarvú, illetve Subidam és Subidu az, aki válaszol a kérdéseinkre, ők ketten alkotják a $\mathcal{P}$ halmazt. Subidam és Subidu feladatai általánosabbak az Oroszlán és Egyszarvú feladatainál. Ezért megfelelő megszorításokkal az ikrek feladatainak formalizálására készített logikai nyelven megfogalmazhatóak az Oroszlán és Egyszarvú feladatai is. Mivel a szereplők típusai napról-napra váltakoznak, nem érdemes továbbra is a T_x, F_x jelölést használni. Jelölje L_x azt, hogy x olyan, mint az Oroszlán, és U_x azt, hogy x olyan, mint az Egyszarvú.

7.1. Definíció. Legyen $\mathcal{P} = \{a, b\}$. Az $\mathcal{L}^{lu}$ formuláinak a definícióját úgy kapjuk meg, hogy a 4.1. definíciót kiegészítjük a következő pontokkal:

F10. Ha $x \in \mathcal{P}$, akkor $L_x \in \mathcal{F}$ és $U_x \in \mathcal{F}$.
F11. Ha $x \in \mathcal{P}$ és $B \in \mathcal{F}$, akkor $\mathtt{C}_x^h B \in \mathcal{F}$, $\mathtt{C}_x^k B \in \mathcal{F}$, $\ldots \mathtt{C}_x^v B \in \mathcal{F}$.

7.3. Szemantika

Az $\mathcal{L}^{lu}$ nyelv szemantikájának meghatározásakor meg kell adnunk, hogy melyik testvér milyen típusú. (Miután az, hogy mely testvérnek mi a neve, rendszerint csak a fejtörő megoldásakor derül ki, így az a illetve a b személyhez kell az oroszlánszerűséget (l) illetve az egyszarvúszerűséget (u) rendelni.)

Az $\mathcal{L}^{lu}$ nyelv szemantikáját úgy kapjuk, hogy a 5.2. definíciót a következőképpen változtatjuk meg:

7.2. Definíció. Legyen $\vartheta = \langle \vartheta_S, \vartheta_T \rangle$, ahol $\vartheta_S \subset \mathcal{S}$ és $\vartheta_T : \{a, b\} \to \{l, u\}$ bijektív függvény, Egészítsük ki a V0-V5. pontok listáját a V12-V14. pontokkal:

V12. Ha $x \in \mathcal{P}$, ${}_\vartheta\models L_x$ akkor és csak akkor, ha $\vartheta_T(x) = l$.
V13. Ha $x \in \mathcal{P}$, ${}_\vartheta\models U_x$ akkor és csak akkor, ha $\vartheta_T(x) = u$.
V14. $({}_\vartheta\models \mathtt{C}_x^h B$, ${}_\vartheta\models \mathtt{C}_x^k B$ és ${}_\vartheta\models \mathtt{C}_x^s B)$ akkor és csak akkor,
ha $({}_\vartheta\models L_x$ és ${}_\vartheta\not\models B)$ vagy $({}_\vartheta\models U_x$ és ${}_\vartheta\models B)$.
$({}_\vartheta\models \mathtt{C}_x^c B$, ${}_\vartheta\models \mathtt{C}_x^p B$ és ${}_\vartheta\models \mathtt{C}_x^z B)$ akkor és csak akkor,
ha $({}_\vartheta\models L_x$ és ${}_\vartheta\models B)$ vagy $({}_\vartheta\models U_x$ és ${}_\vartheta\not\models B)$.
${}_\vartheta\models \mathtt{C}_x^v B$ akkor és csak akkor, ha ${}_\vartheta\models B$.

7.4. Szekventkalkulus

A hét operátornak megfelelő 14 új szabályt a 7.1. ábra ismerteti. A hétfői, keddi és szerdai illetve a csütörtöki, pénteki és szombati szabályok közül csak egyet-egyet írtunk le. (Igen egyszerűen megérthetőek ezek a szabályok, ha arra gondolunk, hogy a hét első hat napjának szabályai a $C_1 \to$ és a $\to C_1$ szabályok variánsai, míg vasárnap mindketten igazat mondanak.)

$$\frac{U_x, \Gamma \to \Theta, A \ ; \ L_x, A, \Gamma \to \Theta}{\Gamma \to \Theta, \mathtt{C}_x^h A} {\to} C_1^h, \quad \ldots$$

$$\frac{L_x, \Gamma \to \Theta, A \ ; \ U_x, A, \Gamma \to \Theta}{\Gamma \to \Theta, \mathtt{C}_x^c A} {\to} C_1^c, \quad \ldots$$

$$\frac{\Gamma \to \Theta, A}{\Gamma \to \Theta, \mathtt{C}_x^v A} {\to} C_1^v$$

,

$$\frac{U_x, A, \Gamma \to \Theta \ ; \ L_x, \Gamma \to \Theta, A}{\mathtt{C}_x^h A, \Gamma \to \Theta} C_1^h {\to}, \quad \ldots$$

$$\frac{L_x, A, \Gamma \to \Theta \ ; \ U_x, \Gamma \to \Theta, A}{\mathtt{C}_x^c A, \Gamma \to \Theta} C_1^c {\to}, \quad \ldots$$

$$\frac{A, \Gamma \to \Theta}{\mathtt{C}_x^v A, \Gamma \to \Theta} C_1^v {\to}$$

7.1. ábra. A szekventkalkulus új szabályai.

A 4.8. lemma ezekre a szabályokra is érvényes. Ennek bizonyítása a $C_1 \to$ és a $\to C_1$ variánsaira ugyanúgy megy, mint a $C_1 \to$ és a $\to C_1$ eredeti bizonyításai, csupán a V7. és V8. pontok helyett a V12. és V13. pontokra kell hivatkoznunk.

A $C_1^v \to$ és $\to C_1^v$ szabályok bizonyításakor egyedül a V14. pont harmadik alpontjára kell hivatkoznunk, miszerint x pontosan akkor mondhatja a B állítást, mikor B igaz.

Legyen Z a következő formula:

$$(L_a \wedge U_b \wedge \neg U_a \wedge \neg L_b) \vee (U_a \wedge L_b \wedge \neg L_a \wedge \neg U_b).$$

7.3. Lemma. *Az Z formula érvényes az $\mathcal{L}^{lu}$ logikai nyelvben.*

Bizonyítás. A ϑ_T függvény egyik lehetséges értéke $\vartheta_T(a) = l$ és $\vartheta_T(b) = u$. Ekkor $(L_a \wedge U_b \wedge \neg U_a \wedge \neg L_b)$ teljesül. A ϑ_T függvény másik lehetséges értéke $\vartheta_T(a) = u$ és $\vartheta_T(b) = l$. Ekkor $(U_a \wedge L_b \wedge \neg L_a \wedge \neg U_b)$ teljesül. Mivel más lehetőség nincs, a kérdéses formula érvényes. $\dashv$

Az $\mathcal{L}^{lu}$ nyelvben érvényes a 4.9. és az 5.3. tétel, mely hasonlóképpen bizonyítható, mint korábban.

7.5. Az Oroszlán és az Egyszarvú

Használjuk az $\mathcal{L}^{lu}$ nyelvet az Oroszlán és az Egyszarvú fejtörőinek leírására! Az Oroszlán és az Egyszarvú annyiban különbözik Subidutól és Subidamtól, hogy egyből tudjuk, hogy melyikük ki. Ez azt jelenti, hogy az $\mathcal{L}^{lu}$ logikai nyelv Oroszlánra és Egyszarvúra vonatkozó szemantikájának megadásakor a ϑ_T függvényre további korlátot teszünk: $\vartheta_T(a) = l$ és $\vartheta_T(b) = u$, minden más marad ugyanaz.

Ennek a szemantikának megfelelően legyen Z a $L_a \wedge U_b \wedge \neg U_a \wedge \neg L_b$ formula, melyre a 4.9. és az 5.3. tételek teljesülnek.

Subidi színrelépésével lényegesen változik a helyzet. Smullyan alapvető kérdése az, hogy létezik-e egyáltalán Subidi, így a róla szóló fejtörőkben véletlenül sem jelenik meg egyszerre három iker, mert ekkor nyilvánvaló lenne a válasz. Ennek megfelelően $\mathcal{P}$ maradhatna továbbra is kételemű, és Smullyan mind a négy feladatát megfogalmazhatnánk ezen az új nyelven. A minél általánosabb definíciók érdekében mégis háromeleműre választjuk a $\mathcal{P}$ halmazt, így lehetővé válik mind a három iker szerepeltetése a fejtörőkben.

Az oroszlánszerű és az egyszarvúszerű testvér mellett megjelent az állandóan hazudó, azaz lókötő testvér is. Az x személy lókötő voltának jelölésére korábban az F_x-t használtuk. Alkalmazzuk itt is ezt a jelölést!

A három testvérről szóló rejtvények leírására szolgáló $\mathcal{L}^{luf}$ nyelv formuláinak definícióját úgy kapjuk meg, hogy a 7.1. definícióban a $\mathcal{P} = \{a, b\}$ részt a $\mathcal{P} = \{a, b, c\}$ részre cseréljük, és hozzávesszük az F5. pontot.

A szemantika megadásakor a 7.2. definíciót úgy kell megváltoztatni, hogy a $\vartheta_T : \{a, b, c\} \to \{l, u, f\}$ bijektív függvény legyen, vegyük hozzá a V7. pontot, és a V14. pontot cseréljük le a V15. pontra:

V15. $({}_\vartheta\models \mathtt{C}_x^h B,\ {}_\vartheta\models \mathtt{C}_x^k B$ és ${}_\vartheta\models \mathtt{C}_x^s B)$ akkor és csak akkor,
ha $(\ {}_\vartheta\models L_x$ és ${}_\vartheta\not\models B)$ vagy $(\ {}_\vartheta\models U_x$ és ${}_\vartheta\models B)$ vagy $(\ {}_\vartheta\models F_x$ és ${}_\vartheta\not\models B)$.
$({}_\vartheta\models \mathtt{C}_x^c B,\ {}_\vartheta\models \mathtt{C}_x^p B$ és ${}_\vartheta\models \mathtt{C}_x^z B)$ akkor és csak akkor,
ha $(\ {}_\vartheta\models L_x$ és ${}_\vartheta\models B)$ vagy $(\ {}_\vartheta\models U_x$ és ${}_\vartheta\not\models B)$ vagy $(\ {}_\vartheta\models F_x$ és ${}_\vartheta\not\models B)$.
${}_\vartheta\models \mathtt{C}_x^v B$ akkor és csak akkor,
ha $(\ {}_\vartheta\models L_x$ és ${}_\vartheta\models B)$ vagy $(\ {}_\vartheta\models U_x$ és ${}_\vartheta\models B)$ vagy $(\ {}_\vartheta\models F_x$ és ${}_\vartheta\not\models B)$.

Mivel a szemantika megváltozott, ezt követnie kell a szekventkalulus új szabályainak is (7.2. ábra).

A 4.8. lemma bizonyítása az összes szabály esetén hasonló. Mi a $\to C_2^h$ szabályt vizsgáljuk meg alaposabban:

BIZONYÍTÁS.

- Tegyük fel, hogy $\Gamma \to \Theta, \mathtt{C}_x^h A$ szekvent cáfolható! Ekkor van egy olyan ϑ értékelés, hogy Γ összes formulája igaz, Θ összes formulája hamis és ${}_\vartheta\not\models \mathtt{C}_x^h A$. A V15. pont alapján ekkor vagy ${}_\vartheta\models L_x$ és ${}_\vartheta\models A$, vagy ${}_\vartheta\models U_x$ és ${}_\vartheta\not\models A$, vagy ${}_\vartheta\models F_x$ és ${}_\vartheta\models A$ teljesül. Az első esetben a V12. pont alapján $\vartheta_T(x) = l$. Ezért a $L_x, A, \Gamma \to \Theta$ szekvent cáfolható. Hasonló gondolatmenettel a második esetben azt kapjuk, hogy a $U_x, \Gamma \to \Theta, A$ szekvent, míg harmadik esetben az $F_x, A, \Gamma \to \Theta$ szekvent cáfolható.
- Ha az $L_x, A, \Gamma \to \Theta$ szekvent cáfolható, akkor van olyan ϑ értékelés, melyben Γ összes formulája igaz, Θ összes formulája hamis, ${}_\vartheta\models L_x$ és ${}_\vartheta\models A$. A két utóbbi tényből a V15. pont alapján kapjuk, hogy ${}_\vartheta\not\models \mathtt{C}_x^h A$, így a $\Gamma \to \Theta, \mathtt{C}_x^h A$ szekvent cáfolható. Ugyanerre az eredményre jutunk a másik két szekventről tesszük fel, hogy cáfolható. ⊣

Miután bármely betűvel jelölt testvér bármelyikük lehet, hat különböző értéke lehet

$$\frac{U_x, \Gamma \to \Theta, A \ ; \ L_x, A, \Gamma \to \Theta \ ; \ F_x, A, \Gamma \to \Theta}{\Gamma \to \Theta, \mathtt{C}_x^h A} {\to}C_2^h \qquad \ldots$$

$$\frac{U_x, A, \Gamma \to \Theta \ ; \ L_x, \Gamma \to \Theta, A \ ; \ F_x, \Gamma \to \Theta, A}{\mathtt{C}_x^h A, \Gamma \to \Theta} C_2^h{\to} \qquad \ldots$$

$$\vdots$$

$$\frac{L_x, \Gamma \to \Theta, A \ ; \ U_x, A, \Gamma \to \Theta \ ; \ F_x, A, \Gamma \to \Theta}{\Gamma \to \Theta, \mathtt{C}_x^c A} {\to}C_2^c \qquad \ldots$$

$$\frac{L_x, A, \Gamma \to \Theta \ ; \ U_x, \Gamma \to \Theta, A \ ; \ F_x, \Gamma \to \Theta, A}{\mathtt{C}_x^c A, \Gamma \to \Theta} C_2^c{\to} \qquad \ldots$$

$$\vdots$$

$$\frac{U_x, \Gamma \to \Theta, A \ ; \ L_x, \Gamma \to \Theta A \ ; \ F_x, A, \Gamma \to \Theta \ ;}{\Gamma \to \Theta, \mathtt{C}_x^v A} {\to}C_2^v$$

$$\frac{U_x, A, \Gamma \to \Theta \ ; \ L_x, A, \Gamma \to \Theta \ ; \ F_x, \Gamma \to \Theta, A}{\mathtt{C}_x^v A, \Gamma \to \Theta} C_2^v{\to}$$

7.2. ábra. A szekventkalkulus új szabályai.

a ϑ_T függvénynek is. Ennek megfelelően a Z formula legyen

$$\begin{aligned}
&(L_a \wedge U_b \wedge F_c \wedge \neg L_b \wedge \neg L_c \wedge \neg U_a \wedge \neg U_c \wedge \neg F_a \wedge \neg F_b)\wedge\\
&(L_a \wedge U_c \wedge F_b \wedge \neg L_b \wedge \neg L_c \wedge \neg U_a \wedge \neg U_b \wedge \neg F_a \wedge \neg F_c)\wedge\\
&(L_b \wedge U_a \wedge F_c \wedge \neg L_a \wedge \neg L_c \wedge \neg U_b \wedge \neg U_c \wedge \neg F_a \wedge \neg F_b)\wedge\\
&(L_b \wedge U_c \wedge F_a \wedge \neg L_a \wedge \neg L_c \wedge \neg U_a \wedge \neg U_b \wedge \neg F_b \wedge \neg F_c)\wedge\\
&(L_c \wedge U_a \wedge F_b \wedge \neg L_a \wedge \neg L_b \wedge \neg U_b \wedge \neg U_c \wedge \neg F_a \wedge \neg F_c)\wedge\\
&(L_c \wedge U_b \wedge F_a \wedge \neg L_a \wedge \neg L_b \wedge \neg U_a \wedge \neg U_c \wedge \neg F_b \wedge \neg F_c).
\end{aligned}$$

Belátható, hogy Z logikai törvény, így az $\mathcal{L}^{luf}$ nyelvben is érvényes a 4.9. és az 5.3. tétel.

8.

Az $\mathcal{L}^{mv}$ nyelv

Smullyan más rejtvénykönyveiben bal- és jobbkezesekkel találkozhatunk, akik a *erősebb* kezükkel igazat, a *gyengébb* kezükkel hazugságot írnak. Más rejtvényekben az Oran és Seth bolygók lakosai a másik bolygón összezavarodnak, és mindent fordítva hisznek, mint ahogy van. További fejtörőkben Vénusz- illetve Marslakó férfiakról és nőkről esik szó, ahol a marsi nők és a vénuszi férfiak folyamatosan hazudnak. Ezek a fejtörők mind az erdélyi fejtörők más mesével előadott változatai, így az itt ismertett logika bármelyik ilyen fejtörő formalizálására használható.

8.1. Erdélyben

Az idő tájt, amikor Erdélyben jártam, a lakosoknak körülbelül a fele ember volt, a fele vámpír. Az emberek és a vámpírok külsejük alapján megkülönböztethetetlenek, de az emberek (legalábbis Erdélyben) mindig igazat mondanak, a vámpírok mindig hazudnak. Ami elképzelhetetlenül bonyolulttá teszi a helyzetet, az az, hogy Erdély lakosságának a fele tökéletesen őrült, kényszerképzetei vannak: minden igaz állítást hamisnak hisznek, és minden hamis állítást igaznak hisznek. A lakosság másik fele teljesen egészséges, tudja, hogy melyik állítás igaz és melyik hamis. Erdély lakossága így négy típusba sorolható: 1. egészséges emberek; 2. őrült emberek; 3. egészséges vámpírok; 4. őrült vámpírok. Amit egy egészséges ember mond, az igaz, amit őrült ember, az hamis, amit egészséges vámpír, az hamis, amit őrült vámpír, az igaz. Például egy egészséges ember azt fogja mondani, hogy kettő meg kettő négy; őrült ember pedig azt, hogy nem négy (mert ő azt hiszi, hogy nem annyi); egészséges vámpír szintén azt, hogy nem négy (mert tudja, hogy négy, de hazudik); őrült vámpír pedig azt, hogy négy (mivel azt hiszi, hogy nem négy, de hazudik arról, hogy mit hisz). [41, 165. o.]

8.2. Szintaxis

Smullyan tovább variálta a lovag–lókötő feladatokat. Itt az emberek lennének a lovagok, és a vámpírok a lókötők. Az jelenti a problémát, hogy egy elvileg igazmondó is hazudhat, feltéve ha őrült, illetve az őrült hazug is igazat mond.

Mivel ezek a szereplők nem tekinthetők valódi igazmondóknak, illetve hazugoknak, ezért más jelölést vezetünk be: jelölje az M_x kijelentésváltozó igaz értéke azt, hogy az x lakos őrült, míg a hamis értéke azt, hogy x egészséges, továbbá V_x kijelentésváltozó igaz értéke azt, hogy x vámpír, illetve a hamis értéke azt, hogy x ember.

8.1. Definíció. Az $\mathcal{L}^{mv}$ nyelv formuláinak a definícióját úgy kapjuk, hogy a 4.1. definíciót kiegészítjük az F6, F7. és F12. pontokkal, ahol

F12. Ha $x \in \mathcal{P}$ akkor $V_x \in \mathcal{F}$.

8.3. Szemantika

Minden egyes személyről külön-külön meg kell mondanunk, hogy ember-e vagy vámpír, illetve egészséges-e vagy őrült. Ugyancsak meg kell adni, hogy az egészséges emberek és az őrült vámpírok tekinthetőek igazmondóknak, míg az őrült embereket és az egészséges vámpírokat hazugnak tekinthetjük.

Az $\mathcal{L}^{mv}$ nyelv szemantikáját úgy kapjuk meg, hogy a 4.3. definíciót a következőképpen változtatjuk meg:

8.2. Definíció. Legyen $\vartheta = \langle \vartheta_S, \vartheta_U, \vartheta_V \rangle$, ahol $\vartheta_S \subset \mathcal{S}$, $\vartheta_U \subset \mathcal{P}$ és $\vartheta_V \subset \mathcal{P}$. Egészítsük ki a V0-V5. pontok listáját a V9, V16. illetve a V17. pontokkal:

V16. Ha $x \in \mathcal{P}$, ${}_{\vartheta}{\models} V_x$ akkor és csak akkor, ha $x \in \vartheta_V$

V17. ${}_{\vartheta}{\models} \mathtt{C}_x A$ akkor és csak akkor, ha
($_{\vartheta}{\not\models} M_x$, $_{\vartheta}{\not\models} V_x$ és $_{\vartheta}{\models} A$) vagy
($_{\vartheta}{\models} M_x$, $_{\vartheta}{\models} V_x$ és $_{\vartheta}{\models} A$) vagy
($_{\vartheta}{\not\models} M_x$, $_{\vartheta}{\models} V_x$ és $_{\vartheta}{\not\models} A$) vagy
($_{\vartheta}{\models} M_x$, $_{\vartheta}{\not\models} V_x$ és $_{\vartheta}{\not\models} A$).

8.4. Szekventkalkulus

Az $\mathcal{L}^{mv}$ nyelv szekventkalkulusát úgy kapjuk meg, hogy a 4.7. definíció szabályait kiegészítjük a következőkkel:

$$\frac{\Gamma \to \Theta, M_x, V_x, A \ ; \ M_x, V_x, \Gamma \to \Theta, A \ ; \ V_x, A, \Gamma \to \Theta, M_x \ ; \ M_x, A, \Gamma \to \Theta, V_x}{\Gamma \to \Theta, \mathtt{C}_x A}{\to}C_2$$

$$\frac{A, \Gamma \to \Theta, M_x, V_x \ ; \ M_x, V_x, A, \Gamma \to \Theta, \ ; \ V_x, \Gamma \to \Theta, M_x, A \ ; \ M_x, \Gamma \to \Theta, V_x, A}{\mathtt{C}_x A, \Gamma \to \Theta}C_2{\to}$$

Lássuk be a 4.8. lemmát például a $C_2 \to$ szabályra!

Bizonyítás.

- Tegyük fel, hogy $\mathtt{C}_x A, \Gamma \to \Theta$ szekvent cáfolható! Ekkor van olyan ϑ értékelés, melyben Γ összes formulája igaz, Θ összes formulája hamis és $_{\vartheta}{\models} \mathtt{C}_x A$. A V17. pont alapján ekkor vagy $_{\vartheta}{\not\models} M_x$, $_{\vartheta}{\not\models} V_x$ és $_{\vartheta}{\models} A$, vagy $_{\vartheta}{\models} M_x$, $_{\vartheta}{\models} V_x$ és $_{\vartheta}{\models} A$, vagy $_{\vartheta}{\not\models} M_x$, $_{\vartheta}{\models} V_x$ és $_{\vartheta}{\not\models} A$, vagy $_{\vartheta}{\models} M_x$, $_{\vartheta}{\not\models} V_x$ és $_{\vartheta}{\not\models} A$. A négy esetnek megfelelően rendre a $A, \Gamma \to \Theta, M_x, V_x$; az $M_x, V_x, A, \Gamma \to \Theta$; a $V_x, \Gamma \to \Theta, M_x, A$ és az $M_x, \Gamma \to \Theta, V_x, A$ szekvent cáfolható.
- Ha a $A, \Gamma \to \Theta, M_x, V_x$; az $M_x, V_x, A, \Gamma \to \Theta,$; a $V_x, \Gamma \to \Theta, M_x, A$ vagy az $M_x, \Gamma \to \Theta, V_x, A$ szekvent cáfolható, akkor rendre a következők teljesülnek: $_{\vartheta}{\not\models} M_x$, $_{\vartheta}{\not\models} V_x$ és $_{\vartheta}{\models} A$; $_{\vartheta}{\models} M_x$, $_{\vartheta}{\models} V_x$ és $_{\vartheta}{\models} A$; $_{\vartheta}{\not\models} M_x$, $_{\vartheta}{\models} V_x$ és $_{\vartheta}{\not\models} A$ illetve $_{\vartheta}{\models} M_x$, $_{\vartheta}{\not\models} V_x$ és $_{\vartheta}{\not\models} A$. A V17. pont alapján mindegyik esetben azt kapjuk, hogy a $\mathtt{C}_x A, \Gamma \to \Theta$ szekvent cáfolható. $\dashv$

Ennek alapján a 4.9. tétel ugyanúgy bizonyítható, mint korábban, azaz ez a szekventkalkulus is helyes. A 4.10. lemma a két új szabályra is érvényes, ennek belátásához csak azt kell felismerni, hogy egy $n+1$ fokú formula helyett egy n fokú és két nulladfokú formula kerül a fenti szekventekbe. Erre a lemmára épülő 4.12. tétel is igaz lesz, azaz a szekventkalkulus teljes is. Az ottani bizonyítás végét annyiban kell átírni, hogy ϑ_U legyen mindazon x elemek halmaza ($x \in \mathcal{P}$), melyekre M_x a szekvent bal oldalán szerepel, illetve hogy ϑ_V legyen mindazon x elemek halmaza ($x \in \mathcal{P}$), melyekre V_x a szekvent bal oldalán szerepel. Most nem volt szükség a Z formula használatára, mert a négy típust a két kijelentésváltozó pontosan leírja.

8.3. Megjegyzés. A [41] erdélyi fejtörői között sok olyan van, melyben a helyi arisztokraták az *igen* és *nem* helyett a „Bű” és „Bá” szavakat használják. Ezen feladatok formalizálásakor ugyanazt a meggondolást követhetjük, amely már szerepelt a 5. fejezet végén.

9.

Az $\mathcal{L}^{tfn}$ nyelv

Smullyan azon fejtörőit, melyben a lovagok és lókötők mellett még normálisak is szerepelnek, igen speciális logikai nyelvvel írhatjuk le. Ez a fejezet ezt a nyelvet ismerteti.

9.1. Lovagok, lókötők és normálisak

Ugyanilyen érdekes lehet az a feladattípus, amelynek a szereplői háromfélék lehetnek: lovagok, akik mindig igazat mondanak, lókötők, akik mindig hazudnak és normális emberek, akik hol hazudnak, hol igazat mondanak. [41, 33. o.]

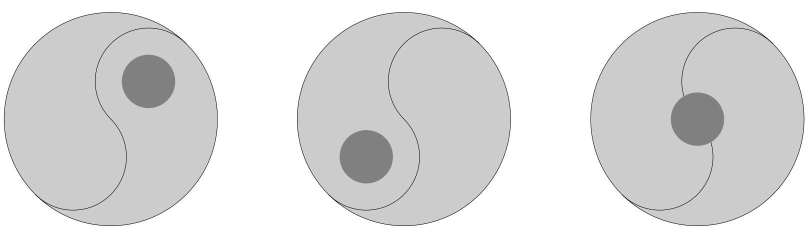
9.2. Szintaxis

Az $\mathcal{L}^{tf}$ nyelvhez képest csak a normálisak megjelenése az újdonság, ezért a korábbi elnevezési technikát követve ez a nyelv az $\mathcal{L}^{tfn}$ elnevezést kapja. Azt, hogy az x ember normális, jelöljük N_x-el.

9.1. Definíció. Az 5.1. definíciót csupán egy ponttal kell kiegészíteni:
F13. Ha $x \in \mathcal{P}$, akkor $N_x \in \mathcal{F}$.

9.3. Szemantika

A szemantika meghatározásakor — az $\mathcal{L}^{tf}$ nyelvhez hasonlóan — meg kell adni minden egyes emberről, hogy miféle. Erre most is ϑ_T függvényt használjuk. Feltesszük, hogy a sziget minden lakója a három típus egyike. A normálisak mindent mondhatnak, ezért lett a rájuk vonatkozó 9.1. ábra világosszürkére festve. Amit valójában mond egy ilyen személy, az lehet mind igaz, lehet mind hamis és lehet vegyes is, ezért is szerepel itt három kép.



9.1. ábra. Mit mondhat egy normális?

A ϑ igazságértékelésben $\mathtt{C}_x B$ akkor lesz igaz, ha x lovag és B igaz, vagy ha x lókötő és B hamis, vagy ha x normális, elvégre ő mindent mondhat. Fordítva, azaz ha x lovag és B hamis, vagy pedig x lókötő és B igaz, akkor $\mathtt{C}_x B$ hamis lesz, és $\mathtt{C}_x B$ csak ekkor lehet hamis. Ugyanis nincs olyan állítás, amit egy normális ki ne mondhatna.

Ezek alapján a 5.2. definíciót a következőkben kell megváltoztatni:

9.2. DEFINÍCIÓ. Legyen $\vartheta = \langle \vartheta_S, \vartheta_T \rangle$, ahol $\vartheta_S \subset \mathcal{S}$ és $\vartheta_T : \mathcal{P} \to \{t, f, n\}$. Egészítsük ki listát a V19. ponttal, és V8. pontot cseréljük le V18. pontra:

V18. ${}_\vartheta\models \mathtt{C}_x B$ akkor és csak akkor, ha (${}_\vartheta\models T_x$ és ${}_\vartheta\models B$) vagy (${}_\vartheta\models F_x$ és ${}_\vartheta\not\models B$) vagy ${}_\vartheta\models N_x$.

V19. Ha $x \in \mathcal{P}$, ${}_\vartheta\models N_x$ akkor és csak akkor, ha $\vartheta_T(x) = n$.

9.4. Szekventkalkulus

A három embertípusnak megfelelően három szekvent szerepelne felül mindkét új szabályban, ha lenne olyan állítás amit egy normális nem mondhat ki. Ilyen viszont nincs, így az első szabály csak két szekventet tartalmaz felül:

$$\frac{T_x, \Gamma \to \Theta, A \ ; \ F_x, A, \Gamma \to \Theta}{\Gamma \to \Theta, \mathtt{C}_x A} {\to}C_3$$

$$\frac{T_x, A, \Gamma \to \Theta \ ; \ F_x, \Gamma \to \Theta, A \ ; \ N_x, \Gamma \to \Theta}{\mathtt{C}_x A, \Gamma \to \Theta} C_3{\to}$$

A 4.8. lemma bizonyítása úgy történik, mint a C_1 szabályok esetén, csak a V8. pont helyett a V18. pontra kell hivatkozni.

Legyen Z a

$$\bigwedge_{x \in \mathcal{P}} \big((T_x \wedge \neg F_x \wedge \neg N_x) \vee (\neg T_x \wedge F_x \wedge \neg N_x) \vee (\neg T_x \wedge \neg F_x \wedge N_x)\big). \tag{9.1}$$

Belátható, hogy Z logikai törvény, így az $\mathcal{L}^{tfn}$ nyelvben is érvényes a 4.9. és az 5.3. tétel, melyeket úgy bizonyíthatunk, mint korábban.

9.5. Bahava szigete

Bahava szigetén női egyenjogúság van, így a nők is lovagok, lókötők, vagy normálisak. A sziget valamelyik régi uralkodója egyszer egy szeszélyes pillanatában azt a különös törvényt hozta, hogy lovag csak lókötővel, lókötő csak lovaggal házasodhat össze. (Emiatt persze normális csak normálissal kelhet egybe.) Így bármelyik házaspárban vagy mindketten normálisak, vagy egyikük lovag, másikuk lókötő.[41, 35. o.]

A Bahava szigeti fejtörők formalizálásához megfelelne az $\mathcal{L}^{tfn}$ logikai nyelv is, csupán a formalizáláskor figyelembe kellene venni a házaspárokat. Ha például a b hölgy azt mondja, hogy „A férje nem normális", és c úr a férje, akkor ezt az állítást a $\mathtt{C}_b\neg N_c$ formula írja le, viszont ekkor valahogy jelezni kellene, hogy b és c házaspár.

Ezt olyan módon oldjuk meg, hogy bevezetünk egy házastársa ($' : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$) függvényt, melyre $x'' = x$ teljesül minden x esetén (ezért az x'' személyt ezentúl azonosítani fogjuk x-szel), azaz a sziget minden lakosa monogám házastársi viszonyban él. Az $\mathcal{L}^{tfn'}$ nyelvben a formulák képzése ugyanúgy megy mint korábban, csak az indexekben megjelenhet a $'$ függvényjel is.

A szemantika annyiban változik a korábbihoz képest, hogy a ϑ értékelésnek teljesíteni kell a következő három pontot is:

V20. ${}_\vartheta\models T_{x'}$ akkor és csak akkor, ha ${}_\vartheta\models F_x$,

V21. ${}_{\vartheta}\!\models F_{x'}$ akkor és csak akkor, ha ${}_{\vartheta}\!\models T_x$ és
V22. ${}_{\vartheta}\!\models N_{x'}$ akkor és csak akkor, ha ${}_{\vartheta}\!\models N_x$.

A szekventkalkulus az $\mathcal{L}^{tfn}$ nyelv két új szabálya helyett a következőket tartalmazza:

$$\frac{T_x, F_{x'}, \Gamma \to \Theta, A \ ; \ F_x, T_{x'}, A, \Gamma \to \Theta,}{\Gamma \to \Theta, \mathtt{C}_x A} \to C_4$$

$$\frac{T_x, F_{x'}, A, \Gamma \to \Theta \ ; \ F_x, T_{x'}, \Gamma \to \Theta, A \ ; \ N_x, N_{x'}, \Gamma \to \Theta}{\mathtt{C}_x A, \Gamma \to \Theta} C_4 \to,$$

Ezen szabályok mögöttes jelentése az, hogy ha valakinek kiderül a típusa, akkor nem csak az általa mondott állításról lesz információnk, hanem a házastársa típusáról is.

A két C_4 szabályra is érvényes a 4.8. lemma, ennek bizonyítása úgy megy, mint korábban, csupán fel kell használni a V20-V22. pontokat is. Ugyancsak érvényes a két C_4 szabályra a 4.10. lemma is.

Legyen Z a

$$\bigwedge_{x \in \mathcal{P}} \big((T_x \wedge \neg F_x \wedge \neg N_x \wedge F_{x'}) \vee (\neg T_x \wedge F_x \wedge \neg N_x \wedge T_{x'}) \vee (\neg T_x \wedge \neg F_x \wedge N_x \wedge N_{x'}) \big)$$

formula. Belátható, hogy Z logikai törvény, így az $\mathcal{L}^{tfn}$ nyelvben is érvényes a 4.9. és az 5.3. tétel, melyeket úgy bizonyíthatunk, mint korábban.

A szekventkalkulus helyességének és teljessének kimondása után következzen a szerző egyik legkedvesebb feladata:

Először egy házaspárral, Mr. és Mrs. A-val van dolgunk. A következőket állítják:

Mr. A: A feleségem nem normális.

Mrs. A: A férjem nem normális.

Miféle Mr., ill. Mrs. A? [41, 44. feladat]

A 9.2. ábrán Z_a illetve $Z_{a'}$ jelzi a Z formula egy személyre vonatkozó részét. A pontozott részek mind lezárhatóak egy lépésben a Z_a illetve $Z_{a'}$ felbontásával, ám ez sok helyet foglalna, ezért tekintettünk el ezek leírásától. Az egyetlen nem axióma levélszekvent (†) alapján a házaspár mindkét tagja normális.

$$\cdots$$
$$T_{a'}, F_a, T_a, F_{a'}, Z_a, Z_{a'}, \to ?, N_{a'}, N_a$$

$$\cdots$$
$$F_{a'}, T_a, N_a, Z_a, Z_{a'}, \to ?, N_{a'}$$

$$N_{a'}, N_a, T_a, F_{a'}, Z_a, Z_{a'}, \to ?, N_{a'}$$

$$T_a, F_{a'}, Z_a, Z_{a'}, C_{a'}\neg N_a \to ?, N_{a'}$$

$$\cdots$$
$$F_a, T_{a'}, N_a, Z_a, Z_{a'}, C_{a'}\neg N_a \to ?$$

$$\cdots$$
$$T_{a'}, F_a, N_a, N_{a'}, Z_a, Z_{a'}, \to ?$$

$$\cdots$$
$$F_{a'}, T_a, N_a, N_{a'}, Z_a, Z_{a'}, \to ?$$

$$N_a, N_{a'}, Z_a, Z_{a'}, \to ? \quad \dagger$$

$$N_a, N_{a'}, Z_a, Z_{a'}, C_{a'}\neg N_a \to ?$$

$$Z_a, Z_{a'}, C_a\neg N_{a'}, C_{a'}\neg N_a \to ?$$
$$\to Z_a \wedge Z_{a'} \supset (C_a\neg N_{a'} \wedge C_{a'}\neg N_a \supset ?)$$

9.2. ábra. A 44. feladat megoldása.

10.

Az $\mathcal{L}_s^{tf}$ nyelv

10.1. Mond és mondhat

Smullyan könyve [41] egyetlen fejtörőjének a szövegében sem szerepel a *mondhat* szó, kizárólag a *mondja* illetve a *mondta*. Ennek ellenére [41] összes feladata megoldható a korábbi fejezetekben ismertetett nyelvekkel [4], melyek mindegyike a *mondhat* modális operátort tartalmazza. A *mondhat* ellen viszont felhozható az, hogy túl általános, nagyon sok ismert tulajdonságot teljesít, és nem is ez szerepelt Smullyan könyvében. Épp ezért vizsgáljuk meg az dolgozatban eddig bemutatott logika nyelvek azon változatait, ahol a *mondhat* helyett a *mondja* szerepel! Annak jelölésére, hogy az x személy a B állítást mondja (vagy mondta), az $\mathtt{S}_x B$ formulát fogjuk használni. Csupán a lovagok és a lókötők $\mathcal{L}^{tf}$ logikai nyelvének variánsát — melyre az $\mathcal{L}_s^{tf}$ névvel hivatkozunk — vizsgáljuk meg tüzetesebben. Az itt nyert eredmények könnyedén bizonyíthatóak a többi nyelv variánsai esetén is, ám ezektől most eltekintünk.

10.1. Definíció. Az $\mathcal{L}_s^{tf}$ logikai nyelv formuláinak a definícióját úgy kapjuk meg, hogy a 5.1. definícióban az F6. pontot az F14. pontra cseréljük, ahol

F14. Ha $x \in \mathcal{P}$ és $B \in \mathcal{F}$, akkor $\mathtt{S}_x B \in \mathcal{F}$.

Ez eddig csak egy apróbb jelölésbeli változtatás volt. A valódi különbség a szemantikában rejlik.

10.2. Szemantika

Az $\mathcal{L}^{tf}$ nyelvben érvényes a $\mathtt{C}_x B \equiv (T_x \equiv B)$ formula, ami azt jelenti, hogy ha valaki mondhat valamit, akkor ez az állítás pontosan akkor igaz, amikor ő lovag, illetve ha valaki pont akkor lovag mikor egy állítás igaz, akkor ő ki is mondhatja az állítást.

A *mond* szándékolt tulajdonsága kicsit más. Ha valaki már kimondott egy állítást, akkor persze az az állítás pontosan akkor igaz, mikor a kérdéses személy lovag. Ezt a kapcsolatot az $\mathtt{S}_x B \supset (T_x \equiv B)$ formula írja le. Fordítva viszont, ha van egy lovaguk és egy igaz állításunk (vagy egy lókötőnk és egy hamis állításunk), akkor neki nem kell kimondania ezt az állítást. Megeshet, hogy kimondta, de az is, hogy nem, tehát a $(T_x \equiv B) \supset \mathtt{S}_x B$ formula már nem lesz érvényes.

10.2. Megjegyzés. Smullyan feladatainak formalizálásakor az előbb említett $\mathtt{S}_x B \supset (T_x \equiv B)$ formulát alkalmazta, és ahelyett, hogy x azt mondta, hogy B, egyből a $T_x \equiv B$ ekvivalenciát írta le (természetesen a saját jelölésrendszerét használva). A korábbi fejezetekben mi egy ezzel ekvivalens $(\mathtt{C}_x B)$ formulát adtunk meg, ezzel végül ugyanarra az eredményre jutottunk, mint Smullyan.

Míg az $\mathcal{L}^{tf}$ logikai nyelvnél elegendő volt tudni a kijelentésváltozók igazságértékét és a lakosok típusait (mivel ebből minden formula igazságértékét meg lehetett határozni), az $\mathcal{L}_s^{tf}$ nyelvnél további információk kellenek arról, hogy ki mit mond vagy mondott. Két lehetőség közül kell választanunk: vagy azt adjuk meg, hogy ki mit mondott valójában; vagy azt, hogy melyek azok az állítások, melyet az adott személy biztos nem mondott. Mindkét lehetőséget ki lehetne dolgozni, de mivel az első természetesebbnek tűnik, így e mellett maradunk.

Azt, hogy ki mit mondott, a személyek és állítások/formulák alkotta (rendezett) párok halmaznak egy részhalmazával adhatjuk meg. Ha az x személy és a B állítás párosa eleme ennek a részhalmaznak, akkor x mondta, hogy B, különben pedig nem. Egy ilyen részhalmaz megadása nem olyan egyszerű feladat, mert figyelemmel kell lennünk a ϑ_S és a ϑ_T értékeire is, ugyanis nem történhet meg, hogy az x személy mondta a B állítást, mialatt x lovag és a B állítás hamis. Ha a párok meghatározásánál ezt is figyelembe vesszük, akkor elveszítjük a szemantikát leíró részek függetlenségét. Ezt megőrizendő inkább egy kicsit bonyolultabbnak tűnő formában adjuk meg a szemantika definícióját. Ehhez szükségünk lesz egy segédhalmazra: $\vartheta_U \subset \mathcal{P} \times \mathcal{F}$. A szemantika kulcsszabálya ezek után a következő lesz:

V23. ${}_\vartheta\!\models \mathtt{S}_x B$ akkor és csak akkor, ha $(x, B) \in \vartheta_U$ és (${}_\vartheta\!\models T_x$ pontosan akkor, mikor ${}_\vartheta\!\models B$).

Ebben a pontban nem történik semmi más, mint hogy a V8. pontbeli szabályt korlátoztuk a ϑ_U halmazzal. Ez nem annyira légből kapott ötlet, mint ahogy elsőre látszik: hasonló módszert alkalmaztak az *awareness* kezelésére [21, 9.5. fejezet]. Következzen végre a szemantika definíciója:

10.3. Definíció. Legyen $\vartheta = \langle \vartheta_S, \vartheta_T, \vartheta_U \rangle$, ahol $\vartheta_S \subset \mathcal{S}$, $\vartheta_T : \mathcal{P} \to \{t, f\}$ és $\vartheta_U \subset \mathcal{P} \times \mathcal{F}$. Teljesüljenek a ϑ értékelésre a V0-V7. és a V23. pontok.

10.3. Szekventkalkulus

Ha valaki mondott valamit, annak következényei vannak, legalábbis olyan értelemben, hogy információt kapunk az adott személy típusa és az állítás igazságtartalmának kapcsolatáról. (Pontosan akkor igaz az állítás, ha lovag mondta.) Ha viszont valaki valamit nem mond ki, akkor ebből semmit nem lehet megtudni, mert az is lehet, hogy objektív okok miatt (ő lovag, az állítás pedig hamis) nem tudja kimondani, de az is megeshet, hogy ki tudná mondani, de egyszerűen nem akarja. Rövidre fogva, az intuitív $\mathtt{S}_x B \supset \mathtt{C}_x B$ tulajdonságból csak a $\neg \mathtt{C}_x B \supset \neg \mathtt{S}_x B$ következik, így a $\neg \mathtt{S}_x B$ formulának nincs semmi, számunkra használható következménye. Ennek megfelelően szekventkalkulusunk is csak egy új szabállyal gyarapodik a 4.7. definíció szabályaihoz képest:

$$\frac{T_x, A, \Gamma \to \Theta \ ; \ F_x, \Gamma \to \Theta, A}{\mathtt{S}_x A, \Gamma \to \Theta} S\!\to$$

Ez a szabály szinte ugyanaz, mint a $C_1 \to$, ami nem is meglepő, mert $C_1 \to$ és a $\to C_1$ szabály a szemantika V8. pontjának átfordítása, és mivel a V8. pontnak megfelelő V23. pont valójában csak egyik irányba hat, ezért csak egyik szabály marad meg.

A szekventkalkulus viszont ebben a formában használhatatlan. Ha csak Smullyan feladatait oldogatnánk, nem is lenne semmi probléma. Lee Naish NU-Prolog nyelven írt programja [34] — amely a jelenlegi szekventkalkulusnak felel meg — remekül oldja meg ezeket a problémákat. Viszont az $\mathtt{S}_x B \supset \mathtt{S}_x B$ formulát már nem tudja

$$\boxed{Z, T_x, B \longrightarrow \mathtt{S}_x B}$$

$$\boxed{Z, F_x \longrightarrow B, \mathtt{S}_x B}$$

$$Z, \mathtt{S}_x B \longrightarrow \mathtt{S}_x B$$
$$\longrightarrow Z \supset (\mathtt{S}_x B \supset \mathtt{S}_x B)$$

10.1. ábra. Egy érvényes formula sikertelen bizonyítása

bebizonyítani, amit pedig joggal várna el tőle az ember. Mivel nincs $\rightarrow S$ szabályunk, a 10.1. ábra bizonyítása nem folytatható.

Mondhatnánk, hogy az első lépés után le kellett volna állni, de ezt a program nem tudja, és igencsak kényelmes lehetőség volt, hogy korábban atomi szintig elmehettünk a bizonyítás során minden kellemetlenség nélkül. Ezt a lehetőséget visszaállítandó a szekventkalkulust kell megváltoztatnunk. A változtatás nem nagy, csupán a $S \rightarrow$ szabály alkalmazását kötjük két feltétel teljesüléséhez:

- $\mathtt{S}_x A$ *(azaz az a formula, melyre a szabályt alkalmazzuk) ne szerepeljen a szekvent jobb oldalán.*
- *Az* $\mathtt{S}_x A$ *formula foka legyen nagyobb, mint a szekvent bármely, nem* $\mathtt{S}_y B$ *alakú formulájának foka.*

Eme feltételekkel az előző bizonyítás már nem konstruálható meg: a $\mathtt{S}_x B \rightarrow \mathtt{S}_x B$ szekventre egyetlen szabály sem alkalmazható, s így nem marad más, mint az szekvent axióma voltának ellenőrzése. A feltétel első része azt garantálja, hogy nehogy túllépjünk valamely axiómán; míg a második része megakadályozza, hogy a hibás lépést akkor tegyük meg, ha $\mathtt{S}_x A$ valamely formulában részformulaként szerepel, mint például a $\mathtt{S}_x A \rightarrow B \wedge \mathtt{S}_x A$ szekventben.

10.4. A szekventkalkulus helyessége

Konstruálható olyan szemantika, melyben ${}_\vartheta\models T_x$ és ${}_\vartheta\models A$, viszont ${}_\vartheta\not\models \mathtt{S}_x A$, azaz van egy lovagunk és egy olyan igaz állításunk, melyet a lovag nem mondott ki. Ekkor a Γ és Θ megfelelő megválasztásával az $S \rightarrow$ szabály egyik vonal feletti szekventje cáfolható, ám a vonal alatti szekventje nem. Ez azt jelenti, hogy a 4.8. lemma nem érvényes! Az $S \rightarrow$ szabály alsó szekventjének cáfolhatóságából viszont következik az egyik felső szekvent cáfolhatósága. Ez adja az ötletet, hogy felezzük meg a 4.8. lemmát:

10.4. Lemma. *Ha a vonal alatti szekvent cáfolható, akkor a vonal feletti szekvent (illetve szekventek egyike) is cáfolható.*

Bizonyítás. Bizonyítsuk be a lemmát az $S \rightarrow$ szabályra! Tegyük fel, hogy az alsó szekvent cáfolható, ekkor van olyan ϑ értékelés, melyben Γ összes formulája igaz, Θ összes formulája hamis és ${}_\vartheta \models \mathtt{S}_x A$, ami a V23. pont alapján azt jelenti, hogy $(x, A) \in \vartheta_U$, valamint vagy ${}_\vartheta\models T_x$ és ${}_\vartheta\models A$, vagy ${}_\vartheta\models F_x$ és ${}_\vartheta\not\models A$. Emiatt első esetben a $T_x, A, \Gamma \rightarrow \Theta$, míg a második esetben az $F_x, \Gamma \rightarrow \Theta, A$ szekvent cáfolható. $\dashv$

A 4.10. lemma erre a szabálya is érvényes, mert már a $C_1 \rightarrow$ szabályra is érvényes volt. A 10.4. lemmát használva a 4.9. tétel az $\mathcal{L}_s^{tf}$ nyelvre a szokott módon nem bizonyítható. Ezért egy másik bizonyítást kell adnunk:

Bizonyítás. Az A bizonyítható formulának van egy szekventfája, mely axiómákban végződik. Indirekt tegyük fel, hogy a formula nem érvényes, azaz valamely modellben nem igaz. Ekkor a neki megfelelő szekvent cáfolható, és az előző lemma alapján a fában alulról felfele haladva mindig találunk egy cáfolható szekventet, azaz van a fának egy ága, melyben cáfolható szekventek vannak. A fa a 4.10. lemma alapján véges, így ez az ága is, viszont az ág végén található axióma már nem lehet cáfolható. Ezért az A formula érvényes. ⊣

10.5. A szekventkalkulus teljessége

Az $\mathcal{L}_s^{tf}$ nyelvben is érvényes a 5.3. tétel, ahol a Z formula az 5. fejezetben megadott formula. Mivel az eredeti bizonyítást több helyen is át kell fogalmazni, a korábbi javítgatások helyett most az egészet megadjuk:

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy létezik olyan F érvényes formula, melyre nem bizonyítható $Z \supset F$. Mivel a $Z \supset F$ érvényes formula, így a $\to Z \supset F$ szekvent is érvényes. A 4.10. lemma alapján a szekventfa véges, s mivel az $Z \supset F$ formula nem bizonyítható, van a fának egy olyan ága, mely nem axiómában végződik, és egyetlen szabály sem alkalmazható az itt található $\Gamma \to \Theta$ szekventre. Ez pedig nem jelent mást, mint hogy a Γ formulahalmaz csupán kijelentésváltozókat tartalmaz, míg a Θ formulahalmazban a kijelentésváltozók mellett még $\mathtt{S}_x B$ alakú formulák is szerepelhetnek.

A $\Gamma \to \Theta$ szekvent alapján készítünk egy ϑ értékelést. Legyen ϑ_S azon kijelentésváltozóknak a halmaza, melyek elemei Γ-nak! Legyen $\vartheta_T(x)$ értéke t minden olyan x-re, melyre $T_x \in \Gamma$, míg a többi esetben legyen f! Legyen ϑ_U az egész $\mathcal{P} \times \mathcal{F}$ halmaz, kivéve azokat az (x, B) párokat, melyekre $\mathtt{S}_x B \in \Theta$! (Valójában ϑ_U megadásánál az $\mathcal{F}$ helyett elegendő lett volna az A kiinduló formula $\mathtt{S}_x B$ alakú részformuláinak halmazát használni. Ez azzal is együtt jár, hogy minden személy csak véges sok állítást tehet, ami igen természetes megkötésnek tűnik.)

Már csak azt kell belátnunk, hogy a most konstruált ϑ értékelésre ${}_\vartheta\not\models F$, mert ez ellentmondásra vezet az eredeti feltétellel (F érvényes formula). Az előbb már szerepelt, hogy ha a felső szekventek egyike cáfolható, akkor az alsó szekvent is cáfolható. Ezt csupán az $S \to$ szabályra kell belátnunk, mert a többire az erősebb 4.8. lemma is teljesül. A két eset közül csak azt bizonyítjuk be, ha a $T_x, A, \Gamma \to \Theta$ szekvent cáfolható a ϑ értékeléssel, akkor $\mathtt{S}_x A, \Gamma \to \Theta$ szekvent is cáfolható a ϑ értékeléssel. (A másik eset bizonyítása hasonló.) Ha $T_x, A, \Gamma \to \Theta$ cáfolható a ϑ értékeléssel, akkor T_x, A és Γ minden formulája igaz, míg Θ minden formulája hamis a ϑ értékelésben. Csupán az a kérdéses, hogy a ${}_\vartheta\models \mathtt{S}_x A$ teljesül vagy sem. A $S \to$ szabályra vonatkozó feltétel első fele miatt $\mathtt{S}_x A \notin \Theta$ teljesül, így a ϑ_U konstrukciója alapján $(x, A) \in \vartheta_U$, így ${}_\vartheta\models \mathtt{S}_x A$. ⊣

10.5. Megjegyzés. Miután ez a szekventkalkulus a hagyományoshoz képest megkötéseket tartalmaz, ezért az egyszerűbb programokkal [4, 34] nehéz implementálni ezt a szekventkalkulust. Az analitikus tabló módszerénél — ami tekinthető a szekventkalkulus duálisának [38] — ugyanilyen megkötéseket kellene alkalmazni. A LoTREC [16, 32] modális logikai automatikus tételbizonyító rendszerben, mely az analitikus tabló módszerét alkalmazza, lehetőség van a tablóépítési szabályok végrehajtási sorrendjét (a LoTREC terminológiáját követve a *stratégiát*) meghatározni. Ennek segítségével a megkötések elhagyhatóak [8].

10.6. Milyen nyelv az $\mathcal{L}_s^{tf}$?

Beláttuk az $\mathcal{L}_s^{tf}$ nyelv szekventkalkulusának helyességét és teljességét. Ezek után felmerülhet az a kérdés, mennnyire „szép” ez a nyelv, a modális nyelvek nagy családjában hova sorolható be?

Tekintsük a modális logikában K-val jelölt, alapvető tulajdonságot, mely arról szól, hogy a modalitás az „implikáción átvihető”, azaz $\mathtt{S}_x(A \supset B) \supset (\mathtt{S}_x A \supset \mathtt{S}_x B)$. Nem adjuk meg az egész bizonyítást a 10.2. ábrán, csak a lényeges részét.

$$\boxed{\begin{array}{c}\boxed{\begin{array}{c}\boxed{Z_x, T_x, B, A \longrightarrow \mathtt{S}_x B}\\ \boxed{\quad\cdots\quad}\\ Z_x, T_x, B, \mathtt{S}_x A \longrightarrow \mathtt{S}_x B\end{array}}\\ \boxed{\quad\cdots\quad}\\ Z_x, T_x, A \supset B, \mathtt{S}_x A \longrightarrow \mathtt{S}_x B\end{array}}$$

$$\boxed{\quad\cdots\quad}$$

$$Z_x, \mathtt{S}_x A, \mathtt{S}_x(A \supset B) \longrightarrow \mathtt{S}_x B$$
$$Z_x, \mathtt{S}_x A \wedge \mathtt{S}_x(A \supset B) \longrightarrow \mathtt{S}_x B$$
$$Z_x \longrightarrow \mathtt{S}_x A \wedge \mathtt{S}_x(A \supset B) \supset \mathtt{S}_x B$$

10.2. ábra. A K nem bizonyítható.

Már ennyiből is látható, hogy ez a tulajdonság itt nem igaz. Ha a *mond* helyett *mondhat* lenne, akkor egy lépésben bizonyítani lehetne a felső szekventet, de most nem lehet. Az implikációt a többi logikai összekötőjellel helyettesítve csak a $\mathtt{S}_x\neg A \supset \neg\mathtt{S}_x A$ formula lesz érvényes. Hasonlóképpen azok a nevezetes modális logikai szabályok (pl. T, 4, L) sem érvényesek $\mathcal{L}_s^{tf}$-ben, melyek már $\mathcal{L}^{tf}$-ben sem voltak érvényesek.

Ezek alapján azt mondhatjuk, hogy a $\mathcal{L}_s^{tf}$ egy igen „gyenge” logikai nyelv. Precizebben fogalmazva ez egy nem normális modális logikai nyelv [15]. Valószínűleg emiatt remekül lehetne használni modális logikai nyelvekkel foglalkozó programok tesztelésekor.

Bármilyen meglepő, [41] összes feladata megoldható az $\mathcal{L}_s^{tf}$ nyelv, illetve a többi variáns használatával. Ennek többek között az az oka, hogy a feladatokban egyrészt nem szerepel a *mondta* tagadott alakja, illetve nem kérdés, hogy valaki mondott-e egy adott állítást. Ezért a feladat szekventfájában a szekventek jobb oldalára nem kerül $\mathtt{S}_x A$ alakú formula, így a megkötések mindig teljesülnek.

Ezzel a feladatok $\mathcal{L}_s^{tf}$ és $\mathcal{L}^{tf}$ bizonyításai lényegében egybeesnek, s teljesen mindegy, hogy mely nyelvet használjuk Smullyan feladatainak formalizálására.

11.

Az $\mathcal{L}^{tfnm}$ nyelv

A lovagok, lókötők és normálisak fejtörőinek formalizálásánál a *mondhat* modális operátor használatának egyenes következménye volt egy új embertípus megjelenése, és egy új nyelv konstrukciója, melyet ez a fejezet ír le.

11.1. Lovagok, lókötők, normálisak és némák

A lovagok és lókötők valamint a zombik szigetén csupán csak két típusú lakos van. Baal szigetén, a farkasemberek erdejében illetve Erdélyben négy fajta lakos található. A Bellini és Cellini család által készített ládikákat is négyfele csoportosíthatjuk. Ehhez képest a lovagok, lókötők és normálisak szigetén csupán három embertípus található. Mintha valami hiányozna. Ha azt a két tulajdonságot figyeljük meg, hogy ki mondhat igaz állításokat, illetve ki mondhat hamis állításokat, akkor a lovagokra csak az első, a lókötőkre csak a második, míg a normálisakra mindkét tulajdonság érvényes. Ezt a két tulajdonságot kombinálva összesen négy lehetőség van, melyek közül csak az maradt ki az előbbi felsorolásból, ahol az egyik tulajdonság sem teljesül. Az ennek megfelelő embertípus se igaz, se hamis állításokat nem tehet. Miután egyetlen állítás sem hagyhatja el az ilyen szigetlakók ajkait, ez a típus a *néma* elnevezést kapta. Azt, hogy az x személy néma, jelölje az M_x igaz értéke.

11.1. Megjegyzés. Ezzel egy személy típusát négy egymást kölcsönösen kizáró kijelentésváltóval jelöljük. Igen nagy a redundancia, de mindez azért van, mert mindig a korábbi jelölésrendszert bővítettük. A későbbiekben látni fogjuk, hogy két kijelentésváltozó is elég lenne egy személy típusának megadására.

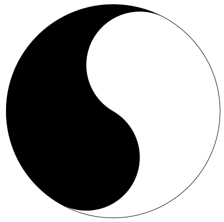
Az $\mathcal{L}^{tfnm}$ nyelv formuláinak definíciója a 9.1. definíciójából kapható az F7. pont hozzáadásával.

11.2. Szemantika

A szemantika meghatározásakor továbbra is meg kell adni minden egyes emberről, hogy miféle. Erre most is ϑ_T-t használjuk. A némára vonatkozó 11.1. ábránk igen egyszerű. A ϑ igazágértékelésben $\mathtt{C}_x B$ vagy akkor lesz igaz, ha x lovag és B igaz, vagy ha x lókötő és B hamis, vagy ha x normális, elvégre ő mindent mondhat. Fordítva, azaz ha x lovag és B hamis, vagy x lókötő és B igaz, vagy pedig x néma, akkor $\mathtt{C}_x B$ hamis lesz, és $\mathtt{C}_x B$ csak ekkor lehet hamis. Ezek alapján a 5.2. definíciót a következőkben kell megváltoztatni:

11.2. Definíció. Legyen $\vartheta = \langle \vartheta_S, \vartheta_T \rangle$, ahol $\vartheta_S \subset \mathcal{S}$ és $\vartheta_T : \mathcal{P} \to \{t, f, n, m\}$. Egészítsük ki listát a V25. ponttal, és a V8. pontot cseréljük le V24. pontra:

- V24. ${}_\vartheta\!\models \mathtt{C}_x B$ akkor és csak akkor, ha (${}_\vartheta\!\models T_x$ és ${}_\vartheta\!\models B$) vagy (${}_\vartheta\!\models F_x$ és ${}_\vartheta\!\not\models B$) vagy ${}_\vartheta\!\models N_x$.
- V25. Ha $x \in \mathcal{P}$, ${}_\vartheta\!\models M_x$ akkor és csak akkor, ha $\vartheta_T(x) = m$.



11.1. ábra. Mit mondhat egy néma?

11.3. Szekventkalkulus

Mint ahogy a $\mathtt{C}_x B$ szemantikája viszonylag szimmetrikussá vált (a $\mathcal{L}^{tfn}$ nyelv szemantikájához képest), hasonló a helyzet a szekventkalkulus új szabályaival is:

$$\frac{T_x, \Gamma \to \Theta, A\ ;\ F_x, A, \Gamma \to \Theta,\ ;\ M_x, \Gamma \to \Theta,}{\Gamma \to \Theta, \mathtt{C}_x A}{\to}C_5,$$

$$\frac{T_x, A, \Gamma \to \Theta,\ ;\ F_x, \Gamma \to \Theta, A,\ ;\ N_x, \Gamma \to \Theta,}{\mathtt{C}_x A, \Gamma \to \Theta} C_5{\to}$$

A 4.8. lemma bizonyítása úgy történik, mint C_2 szabályok esetén, csak a V8. pont helyett a V24. pontra kell hivatkozni. Mivel minden szabályra igaz a 4.8. lemma, így szekventkalkulusunk helyes (4.9. tétel).

Legyen a Z formula

$$\bigwedge_{x \in \mathcal{P}} \big((T_x \wedge \neg F_x \wedge \neg N_x \wedge \neg M_x) \vee (\neg T_x \wedge F_x \wedge \neg N_x \wedge \neg M_x) \vee$$
$$(\neg T_x \wedge \neg F_x \wedge N_x \wedge \neg M_x)) \vee (\neg T_x \wedge \neg F_x \wedge \neg N_x \wedge M_x)\big).$$

Ekkor a szekventkalkulus teljes (5.3. tétel).

Miután hiába keresnénk Smullyan könyveiben olyan feladatokat, melyben ez a négy típus szerepel, ezért szerepeljen itt egy feladat! Miután már nem kötik meg a kezünket Smullyan példái, a feladatban szerepeljen a mondhat tagadása is:

> *Ha A azt mondta, hogy B nem mondhatja, hogy C néma; B azt mondta, hogy C nem mondhatja, hogy A néma; C azt mondta, hogy A nem mondhatja, hogy B néma, akkor mutassuk meg, hogy ha az egyikük lovag, akkor mindhárman azok.*

Miután a feladat szimmetrikus, elegendő azt megvizsgálni, ha az első személy lovag, akkor lovag-e a másik kettő. Az ezt leíró

$$\mathtt{C}_a \neg \mathtt{C}_b M_c \wedge \mathtt{C}_b \neg \mathtt{C}_c M_a \wedge \mathtt{C}_c \neg \mathtt{C}_a M_b \wedge T_a \supset T_b \wedge T_c$$

formula érvényességének az ellenőrzését az olvasóra bízzuk.

11.3. Megjegyzés. Az $\mathcal{L}^{tfnm}$ nyelv esetén nem csak a szekventkalkulus helyes és teljes bizonyítási módszer, hanem a természetes levezetés is [7].

12.

Az $\mathcal{L}^{ih}$ nyelv

Néha a hibás fordítás is adhat ötleteket, amire példa ez a fejezet is, ahol a lovag-lókötő fejtörők igencsak különös variánsait vonultatjuk fel.

12.1 Igazmondók és hazugok

Mikor először találkoztam a lovag–lókötő rejtvényekkel, Dr. Dragálin Albert az angol nyelvű könyv [39] orosz változatát fordította le nekem magyarra, s eredeti könyv *„minden lakos vagy lovag, vagy lókötő"* feltétele a *„minden szigetlakó igazmondó vagy hazug"* feltételre változott. Most itt nem a személyek elnevezésén van a hangsúly, hanem azon, hogy az eredeti változatban kizáró vagy szerepelt, a fordításban pedig megengedő vagy. Ez az eltérés kezdetben nem tűnt fel, de idővel felmerült a kérdés, hogy van-e lényeges eltérés a két változat között, magyarán lehet-e valaki egyszerre mindkét típusba tartozó, azaz egyszerre igazmondó és hazug is? Ha lehet, akkor pedig mit mondhat?

Miután ebben a fejezetben eltérünk az eredeti lovag-lókötő feladatoktól, a korábbiaktól egy kicsit eltérő jelölést használunk.

A kerettörténet szerint az igazmondók igazat mondanak, a hazugok pedig hazudnak. Ezek szerint ha valaki kimondott egy A állítást, akkor ha ő igazmondó, akkor ez az A állítás igaz, ha pedig ő hazug, akkor ez az állítás hamis. Ha tehát ő egyszerre igazmondó és hazug is, akkor az állításnak is egyszerre kell igaznak és hamisnak is lennie, ami viszont nem lehetséges. Ez pedig azt jelenti, hogy az egyszerre igazmondó és hazug személyek némák, azaz nem állíthatnak semmit sem.

12.1. Megjegyzés. Ha valakit attól, hogy igazmondó és hazug is egyszerre, még igazmondónak (hazugnak) tekintünk, és így kezdjük el oldogatni [41] feladatait, akkor az ideillő közel 50 feladatból csak egy-két esetben kapunk Smullyan eredeti megoldásaitól eltérő megoldást! Ha ezeket a feladatokat lovag-lókötő feladatokként formalizáltunk, és közben kihasználtuk az $\mathcal{L}^{tf}$ nyelvben érvényes $T_x \equiv \neg F_x$ formulát, mint ahogy azt a szerző is tette [4], akkor ezek a formalizált alakok már más feladatokat jelentenek! Miután Smullyan nem foglalkozott az igazmondókkal és hazugokkal, így egy-két lovag-lókötő feladat igazmondó-hazug feladatként formalizálása nem egyértelmű. Például [41] 35. feladatában azonos típusú személyekről van szó. Lovagok és lókötők esetén ez azt jelenti, hogy mindkettő lovag, vagy mindkettő lókötő. Igazmondók és hazugok esetén mondhatjuk-e azt, hogy mindkettő lovag vagy mindkettő lókötő, vagy pedig úgy kell mondani, hogy vagy mindkettő igazmondó, de egyik se hazug, vagy mindkettő hazug, de egyik se igazmondó, vagy mindkettő igazmondó és mindkettő hazug is egyszerre? Mindkét válasz mellett és ellen is szólnak érvek.

Az egyik feladat, melyben a hivatalostól eltérő megoldást kapunk az a következő:

> *Ebben a feladatban három ember szerepel, A, B és C. Csak ketten szólalnak meg, de állításban az „egyikünk" szó mindhármójukra vonatkozik. A következőket állítják:*
> A: *Legalább egyikünk lókötő.*
> B: C *farkasember.*
> *Pontosan egyikük farkasember, aki lovag. Ki ő? [41, 92. feladat]*

Ez a feladat eredetileg az $\mathcal{L}^{tfw}$ nyelven formalizálható. A későbbiekben ismertetett $\mathcal{L}^{ih}$ nyelvnek el lehetne készíteni hasonló variánsát, mely a farkasember-tulajdonság leírására is képes, de mivel a fejezet célkitűzése más, ettől most eltekintünk, csupán a megoldás ismertetésére szorítkozunk, hogy felvillantsuk, valóban más nyelvről van szó. Smullyan eredeti megoldása szerint A csakis lovag lehet, különben ellentmondásra jutunk. B nem lehet lovag, mert különben mindhárman lovagok lennének. Mivel B lókötő, így nem lehet farkasember, és az állítása alapján C sem az, így az A a farkasember.

Tekintsük ezt a feladatot, mint egy igazmondó-hazug fejtörőt: A továbbra is csak igazmondó lehet. Ha B is igazmondó, akkor C-nek is annak kell lennie. Mivel A és B megszólalt, egyik sem néma, de C lehet az, s ekkor teljesülhet az is, amit A mondott, és az is, amit B, feltéve ha C egy néma (igazmondó-hazug) farkasember. Ez pedig egy újabb megoldás az előzőhöz képest.

12.2. Szintaxis

Jelölje I_x/H_x azt, hogy az x személy igazmondó/hazug!

12.2. Definíció. Az $\mathcal{L}^{ih}$ logikai nyelv formuláinak a definícióját úgy kapjuk meg, hogy a 5.1. definícióban az F4-F5. pontokat az F15. pontra cseréljük, ahol

F15. Ha $x \in \mathcal{P}$, akkor $I_x \in \mathcal{F}$ és $H_x \in \mathcal{F}$.

12.3. Szemantika

Nyilvánvaló, hogy csak azok az igazmondók mondhatnak igazat, akik nem hazugok, és hogy csak azok a hazugok hazudhatnak, akik nem igazmondók. Az is természetes, hogy az igazmondók és a hazugok halmaza együtt kiadja az összes embert.

12.3. Definíció. Az $\mathcal{L}^{ih}$ logikai nyelv szemantikáját úgy kapjuk meg, ha a 5.2. definícióját a következőképp változtatjuk meg: A ϑ értékelés legyen $\langle \vartheta_S, \vartheta_U, \vartheta_V \rangle$, ahol $\vartheta_S \subset \mathcal{S}$, $\vartheta_U, \vartheta_V \subset \mathcal{P}$ és $\vartheta_U \cup \vartheta_V = \mathcal{P}$. Továbbá cseréljük ki a V6-V8. pontokat a V26-V28. pontokra.

V26. ${}_\vartheta\models I_x$ akkor és csak akkor, ha $x \in \vartheta_U$.

V27. ${}_\vartheta\models H_x$ akkor és csak akkor, ha $x \in \vartheta_V$.

V28. ${}_\vartheta\models \mathtt{C}_x B$ akkor és csak akkor, ha (${}_\vartheta\models I_x$, ${}_\vartheta\not\models H_x$ és ${}_\vartheta\models B$) vagy (${}_\vartheta\not\models I_x$, ${}_\vartheta\models H_x$ és ${}_\vartheta\not\models B$).

A 4.7. definíció szabályait egészítsük ki a következő kettővel:

$$\frac{I_x, \Gamma \to \Theta, A \ ; \ H_x, A, \Gamma \to \Theta}{\Gamma \to \Theta, \mathtt{C}_x A} {\scriptstyle \to C_6}$$

$$\frac{I_x, A, \Gamma \to \Theta, H_x \ ; \ H_x, \Gamma \to \Theta, A, I_x}{\mathtt{C}_x A, \Gamma \to \Theta} {\scriptstyle C_6 \to}$$

Észrevehetjük, hogy a $C_6 \to$ szabály szinte ugyanaz, mint a $C_1 \to$, a $\to C_6$ pedig apróbb változtatása a $\to C_1$ szabálynak! Bizonyítsuk be erre a két szabályra a 4.8. lemmát:

Bizonyítás. Három egymástól független érték határozza meg a $\mathtt{C}_x A$ formula igazságértékét, s hogy ne vesszünk el a nyolc lehetőség között, táblázatba foglaljuk az eseteket (12.1. ábra).

	A	I_x	H_x	$\mathtt{C}_x A$
1.	1	1	1	0
2.	1	1	0	1
3.	1	0	1	0
4.	1	0	0	-
5.	0	1	1	0
6.	0	1	0	0
7.	0	0	1	1
8.	0	0	0	-

12.1. ábra. A $\mathtt{C}_x A$ formula igazságértékei

- Tegyük fel, hogy a $\mathtt{C}_x A, \Gamma \to \Theta$ szekvent cáfolható, ekkor létezik olyan ϑ értékelés, melyre Γ összes formulája igaz, Θ összes formulája hamis, és ${}_\vartheta\models \mathtt{C}_x A$. A V28. pont alapján ez a 2. és 7. esetben lehetséges. A 2. esetben a $I_x, A, \Gamma \to \Theta, H_x$, a 7. esetben az $H_x, \Gamma \to \Theta, I_x, A$ szekvent cáfolható. Fordított irányban hasonlóan megy a bizonyítás.
- Tegyük fel, hogy a $\Gamma \to \Theta, \mathtt{C}_x A$ szekvent cáfolható, ekkor létezik olyan ϑ értékelés, melyre Γ összes formulája igaz, Θ összes formulája hamis, és ${}_\vartheta\not\models \mathtt{C}_x A$. A ϑ értékelés definíciója alapján a 4. és a 8. eset kizárt, így V28. pont alapján ez az 1, 3, 5. és 6. esetben lehetséges. Az 1. és 3. esetben az $H_x, A, \Gamma \to \Theta$, az 5. és 6. esetben a $I_x, \Gamma \to \Theta, A$ szekvent cáfolható. A fordított irány bizonyítása hasonló. $\dashv$

A 4.10. lemma erre a két új szabályra is érvényes, bizonyítása hasonlóképp történik, mint korábban. Ezek alapján könnyedén belátható a 4.9. és a 5.3. tétel, ahol a Z formula legyen

$$\bigwedge_{x \in \mathcal{P}} (I_x \vee H_x). \tag{12.1}$$

Az 5.3. bizonyításában a ϑ_T és a ϑ_U konstrukciója a következő: legyen ϑ_U/ϑ_V mindazon x személyek halmaza, melyre I_x/H_x szerepel a kérdéses szekvent bal oldalán.

12.4. Megjegyzés. Az igazmondók és hazugok logikai nyelvét hasonló jelölésrendszerrel tárgyalja [9].

12.5. Egy újabb variáns

A szigetlakók igazmondó és hazug mivoltát fel lehet úgy is fogni mint valami szubjektív etikai korlát: az igazmondó nem képes hamis, a hazug nem képes igaz állításokat mondani. Ezzel már könnyű megérteni, hogy aki mindkét korláttal rendelkezik, az csendben marad. Lehet-e olyan ember, aki mentes ezektől a korlátoktól? Smullyan története szerint nem, de ha már az előbb is eltértünk az eredeti változattól, tegyük meg most is!

Maga a logikai nyelv nem változik meg, ugyanazok a formulák, csak a szemantikában van apróbb változtatásokra szükség:

12.5. Definíció. Az 12.3. definícióból hagyjuk el azt a megkötést, hogy $\vartheta_U \cup \vartheta_V = \mathcal{P}$, és a V28. pontot helyettesítse a V29. pont!

V29. ${}_\vartheta\models \mathtt{C}_x B$ akkor és csak akkor, ha (${}_\vartheta\models I_x$, ${}_\vartheta\not\models H_x$ és ${}_\vartheta\models B$) vagy (${}_\vartheta\not\models I_x$, ${}_\vartheta\models H_x$ és ${}_\vartheta\not\models B$) vagy (${}_\vartheta\not\models I_x$, ${}_\vartheta\not\models H_x$).

Nincs másról szó, mint van egy új embertípus, amely mondhat mindent. A 4.7. definíció szabályait egészítsük ki a következő kettővel:

$$\frac{I_x, \Gamma \to \Theta, A \;;\; H_x, A, \Gamma \to \Theta}{\Gamma \to \Theta, \mathtt{C}_x A}{\to}C_7$$

$$\frac{I_x, A, \Gamma \to \Theta, H_x \;;\; H_x, \Gamma \to \Theta, A, I_x \;;\; \Gamma \to \Theta, I_x, H_x}{\mathtt{C}_x A, \Gamma \to \Theta}C_7{\to}$$

Bizonyítsuk be erre a két szabályra is a 4.8. lemmát:

Bizonyítás. Szinte csak az előző bizonyítást kell megismételnünk, s közben a 12.2. ábrára hivatkoznunk.

- Tegyük fel, hogy a $\mathtt{C}_x A, \Gamma \to \Theta$ szekvent cáfolható, ekkor létezik olyan ϑ értékelés, melyre Γ összes formulája igaz, Θ összes formulája hamis, és ${}_\vartheta\models \mathtt{C}_x A$. A V29. pont alapján ez a 2, 4, 7, és 8. esetben lehetséges. A 2. esetben a $I_x, A, \Gamma \to \Theta, H_x$, a 7. esetben az $H_x, \Gamma \to \Theta, I_x, A$, míg a 4. és 8. esetben az $\Gamma \to \Theta, I_x, H_x$ szekvent cáfolható.
- Tegyük fel, hogy a $\Gamma \to \Theta, \mathtt{C}_x A$ szekvent cáfolható, ekkor létezik olyan ϑ értékelés, melyre Γ összes formulája igaz, Θ összes formulája hamis, és ${}_\vartheta\not\models \mathtt{C}_x A$. így V29. pont alapján ez az 1, 3, 5. és 6. esetben lehetséges. Az 1. és 3. esetben az $H_x, A, \Gamma \to \Theta$, az 5. és 6. esetben a $I_x, \Gamma \to \Theta, A$ cáfolható.

A fordított irányok bizonyítása hasonló. $\dashv$

Ezek alapján a 4.9. és az 5.3. tétel bizonyítása ugyanúgy történik, mint a korábban.

	A	I_x	H_x	$\mathtt{C}_x A$
1.	1	1	1	0
2.	1	1	0	1
3.	1	0	1	0
4.	1	0	0	1
5.	0	1	1	0
6.	0	1	0	0
7.	0	0	1	1
8.	0	0	0	1

12.2. ábra. A $\mathtt{C}_x A$ formula igazságértékei

12.6. Kapcsolat a nyelvek között

Ha a $\rightarrow C_7$ szabályt egy kicsit bővebben írjuk fel, hogy a szimmetria előtűnjön, akkor ismerős szabályhoz jutunk:

$$\frac{I_x, \Gamma \rightarrow \Theta, A, H_x \ ; \ H_x, A, \Gamma \rightarrow \Theta, I_x \ ; \ I_x, H_x, \Gamma \rightarrow \Theta}{\Gamma \rightarrow \Theta, \mathtt{C}_x A}$$

Ez a szabály ugyanis nem más, mint $\rightarrow C_5$ szabály egy kicsit más formában felírva. Ha azt az új embertípust — amelynek nincsenek etikai korlátai — *normálisnak* nevezzük, akkor a 11. fejezetben leírtakhoz jutunk vissza. (Az ebben a fejezetben ismertetett módon írja le az $\mathcal{L}^{tfnm}$ nyelvet [2].) Ugyanazt fogalmaztuk meg két különböző nyelven. Míg ott a négy típust négy jellel írtuk le, itt erre elegendő volt kettő is. A típusok különböző leírását a 13.3. és 13.4. ábra adja meg.

Elnevezés	$\mathcal{L}^{tfnm}$	$\mathcal{L}^{ih}$
lovag	T_x	$I_x \wedge \neg H_x$
lókötő	F_x	$\neg I_x \wedge H_x$
normális	N_x	$\neg I_x \wedge \neg H_x$
néma	M_x	$I_x \wedge H_x$

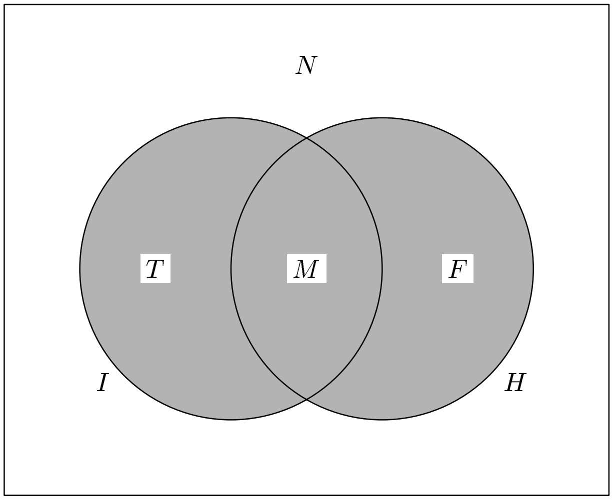
13.3. ábra. Az $\mathcal{L}^{tfnm}$ és $\mathcal{L}^{ih}$ nyelvek azonos embertípusai.

12.7. Még egy újabb nyelv

Ha az $\mathcal{L}^{ih}$ nyelv szemantikájának definíciójában nincs kikötés a ϑ_T és ϑ_U halmazokra, akkor lényegében a $\mathcal{L}^{tfnm}$ nyelvet kapjuk vissza. Ha kikötjük, hogy $\vartheta_U \cap \vartheta_V = \emptyset$, azaz nem lehet senki sem egyszerre igazmondó és hazug (ám lehet „kivülálló"), akkor az $\mathcal{L}^{tfn}$ nyelvet kapjuk vissza. Ha pedig az a kikötésünk, hogy ϑ_U és ϑ_V egymás komplementer halmazai, akkor az $\mathcal{L}^{tf}$ nyelvet kapjuk meg.

Ha a $\vartheta_U \cup \vartheta_V = \mathcal{P}$ megkötést tekintjük, akkor pedig egy eddig nem vizsgált nyelvet nyerünk. A négy embertípusból a normálisakat kell kihagynunk, így a nyelv az $\mathcal{L}^{tfm}$ elnevezést kapja. Ilyen elnevezésű nyelvvel már foglalkoztunk, a formulák is ugyanazok lesznek.

Az $\mathcal{L}^{tfm}$ nyelvhez a korábbi szemantikától igen különbözőt konstruálunk most meg. Ehhez a 5.2. definíciót a következőkben kell megváltoztatni:



13.4. ábra. Az embertípusok kapcsolata.

12.6. Definíció. Legyen $\vartheta = \langle \vartheta_S, \vartheta_T \rangle$, ahol $\vartheta_S \subset \mathcal{S}$ és $\vartheta_T : \mathcal{P} \to \{t, f, m\}$. Egészítsük ki listát a V31. ponttal, és V8. pontot cseréljük le V30. pontra:

V30. ${}_\vartheta\!\models \mathtt{C}_x B$ akkor és csak akkor, ha (${}_\vartheta\!\models T_x$ és ${}_\vartheta\!\models B$) vagy (${}_\vartheta\!\models F_x$ és ${}_\vartheta\!\not\models B$).
V31. Ha $x \in \mathcal{P}$ ${}_\vartheta\!\models M_x$ akkor és csak akkor, ha $\vartheta_T(x) = m$

Az $\mathcal{L}^{tfm}$ nyelv szekventkalkulusához a 4.7. definíciót a következő két szabállyal kell kiegészíteni:

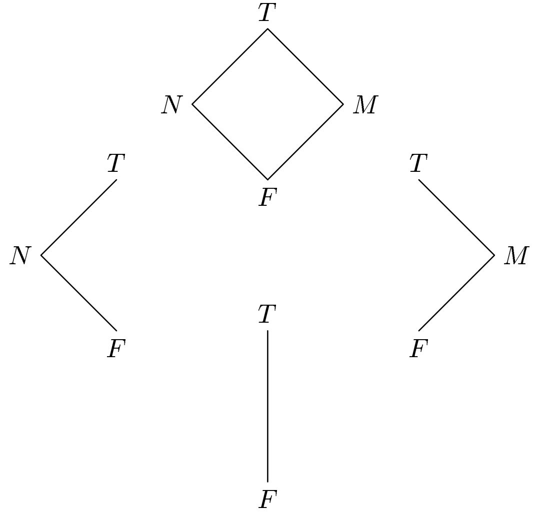
$$\frac{T_x, \Gamma \to \Theta, A \ ; \ F_x, A, \Gamma \to \Theta M_x, \Gamma \to \Theta}{\Gamma \to \Theta, \mathtt{C}_x A} {\scriptstyle \to C_8}$$

$$\frac{T_x, A, \Gamma \to \Theta \ ; \ F_x, \Gamma \to \Theta, A}{\mathtt{C}_x A, \Gamma \to \Theta} {\scriptstyle C_8 \to}$$

A szekventkalkulus helyességének és teljességének bizonyítása hasonlóan megy, mint korábban.

Ábrázoljuk a négy logikai nyelvet együtt a 13.5. ábrán: ha a négyelememű (diamond) algebrát vesszük figyelembe, akkor annak minden részalgebrájához hozzárendelhetünk egy-egy logikai nyelvet.

Belnap négyértékű „hasznos” logikájában [12] az igaz és hamis érték mellett szerepelt még egy „mindkettő” és egy „egyiksem” logikai érték. Ezeket párhuzamba lehet állítani a mindent mondani képes normálisakkal, illetve a némákkal. Viszont az a határozott véleményünk, hogy ez a kapcsolat csupán a véletlen játéka.



13.5. ábra. A négy logikai nyelv és az embertípusaik.

13.

A harmadik típusú fejtörők megoldása

A harmadik kategóriába eső feladatok megoldására eddig még nem létezett helyes és teljes módszer. A fejezetben két ilyet mutatunk be.

13.1. Mit mondjak?

Smullyan könyve [41] negyven olyan fejtörőt tartalmaz, melyben nekünk kell egy olyan mondatot kitalálnunk, melyet kimondva bizonyíthatjuk ártatlanságunkat, megmenekülhetünk Drakula gróftól, vagy kérdésként feltéve megtudhatjuk, hogy hol van elásva a kincs. Az ilyen feladatok megoldása különösen nehéz, talán ezért is jelenti [41] csúcspontját a Drakula rejtélye:

> *...Létezik ugyanis egy olyan S mondat, ami rendelkezik azzal a — szinte varázslatos — tulajdonsággal, hogy ha meg szeretné tudni, hogy egy tetszőleges X állítás igaz-e, akkor csak azt kell megkérdeznie valakitől a kastélyban, hogy „S ekvivalens X-szel?" Ha „Bű"-t kap válaszul, akkor X igaz, ha „Bá"-t, akkor hamis. [41, 175. o.]*

A feladatunk ennek az S mondatnak a megkeresése. Ez a rejtvény az erdélyi feladatok közé tartozik, tehát emberek és vámpírok, valamint őrültek és egészségesek a szereplők, akik az *igen* és *nem* helyett „Bű"-vel és „Bá"-val válaszolnak kérdéseinkre. Ebben a fejezetben egy általános módszert mutatunk be, mellyel mind a negyven feladat megoldható, s megoldjuk Drakula rejtélyét is. Míg az első két típusba tartozó feladatok megoldásával sokan foglalkoztak, az ilyen feladatok megoldásával kapcsolatosan csak Adam Kolany cikkéről [29] tudok. Habár ez a címében általános módszert ígér, ám se a módszer helyességét, se a teljességét nem bizonyítja, sőt a bonyolultabb feladatokra az általa közölt átírásos technika a gyakorlatban nem használható.

A módszerünk helyességének belátásához szükségünk van egy segédeszközre, mely garantálja, hogy a szekventkalkulus szabályainak alkalmazásával nem vesztünk információt. (Ez természetesen a 10. fejezetben ismertetett szabályokra nem teljesül.)

13.1. Lemma. *A szabály vonal alatti szekventjének asszociáltja ekvivalens a vonal feletti szekvent asszociáltjával, illetve a vonal feletti szekventek asszociáltjainak konjunkciójával.*

Ennek a lemmának következménye a 4.8. lemma, mert ha az alsó szekvent érvényes, azaz minden modellben igaz, akkor ezen lemma alapján a felső szekventek is igazak minden modellben, így azok is érvényesek.

Bizonyítás. Ha $\Gamma = \{A_1, \ldots A_n\}$ és $\Theta = \{B_1, \ldots B_m\}$, akkor legyen $X = \top \wedge A_1 \wedge \cdots \wedge A_n$ és $Y = B_1 \vee \cdots \vee B_m \vee \bot$. A szekvent asszociáltja definíciója alapján könnyedén bizonyítható, hogy a $C_1, \ldots C_s, \Gamma \to \Theta, D_1, \ldots D_t$ szekvent asszociáltja ekvivalens a

- a $(X \supset Y) \vee (C_1 \wedge \cdots \wedge C_s \supset D_1 \vee \cdots \vee D_t)$ formulával, ha $s, t > 0$;
- a $(X \supset Y) \vee D_1 \vee \cdots \vee D_t$ formulával, ha $s = 0$, $t > 0$;
- a $(X \supset Y) \vee \neg(C_1 \wedge \cdots \wedge C_s)$ formulával, ha $s > 0$, $t = 0$;

illetve általánosan a $(X \supset Y) \vee \neg C_1 \vee \cdots \vee \neg C_s \vee D_1 \vee \cdots \vee D_t$ formulával.

- A lemmát a

$$\frac{T_x, \Gamma \to \Theta, A \ ; \ F_x, A, \Gamma \to \Theta}{\Gamma \to \Theta, \mathtt{C}_x A}{\scriptstyle \to C_1}$$

szabályra bebizonyítjuk, ha megmutatjuk az

$$\big((X \supset Y) \vee (T_x \supset A)\big) \wedge \big((X \supset Y) \vee (F_x \wedge A \supset \bot)\big)$$

és $(X \supset Y) \vee \mathtt{C}_x A$ formulák ekvivalenciáját. Ehhez elegendő a

$$(T_x \supset A) \wedge (\neg F_x \vee \neg A) \tag{13.1}$$

és a $\mathtt{C}_x A$ formula ekvivalenciáját megmutatni. A ϑ_T definíciója alapján a $T_x \equiv \neg F_x$ formula érvényes az $\mathcal{L}^{tf}$ nyelvben, s ezt felhasználva a 13.1 formula a

$$(T_x \supset A) \wedge (A \supset T_x)$$

formulára egyszerűsödik, ami nem más, mint a $T_x \equiv A$ formula. Ez pedig a V8. pont alapján ekvivalens a $\mathtt{C}_x A$ formulával.

- Az előző gondolatmenetet követve a lemma

$$\frac{T_x, A, \Gamma \to \Theta, F_x \ ; \ F_x, \Gamma \to \Theta, A, T_x}{\mathtt{C}_x A, \Gamma \to \Theta}{\scriptstyle C_1 \to}$$

szabályra vonatkozó bizonyításához a $\neg\mathtt{C}_x A$ és a

$$(T_x \wedge A \supset \bot) \wedge (F_x \supset A)$$

formulák ekvivalenciáját kell belátnunk. Az előbbi egyszerűsítést felhasználva a $\neg T_x \equiv A$ formulához jutunk, amit a $\neg(T_x \equiv A)$ alakra átírva egyből adódik a kivánt ekvivalencia.

Drakula rejtélyének megoldása érdekében lássuk be a lemmát a C_2 szabályokra is!

- A korábbiakhoz hasonlóan a lemmát bebizonyítjuk a

$$\frac{\Gamma \to \Theta, M_x, V_x, A; M_x, V_x, \Gamma \to \Theta, A; V_x, A, \Gamma \to \Theta, M_x; M_x, A, \Gamma \to \Theta, V_x}{\Gamma \to \Theta, \mathtt{C}_x A}{\scriptstyle \to C_2}$$

szabályra, ha megmutatjuk a $\mathtt{C}_x A$ és a

$$(M_x \vee V_x \vee A) \wedge (M_x \wedge V_x \supset A) \wedge (V_x \wedge A \supset M_x) \wedge (M_x \wedge A \supset V_x) \tag{13.2}$$

formulák ekvivalenciáját. Egyszerűsítésekkel a 13.2 formulából a

$$A \equiv (M_x \equiv V_x)$$

formula kapható. A V17. pont alapján könnyen látható, ez pontosan akkor lesz igaz, amikor a $\mathtt{C}_x A$ is.

- A

$$\frac{A, \Gamma \to \Theta, M_x, V_x; M_x, V_x, A, \Gamma \to \Theta, ; V_x, \Gamma \to \Theta, M_x, A; M_x, \Gamma \to \Theta, V_x, A}{\mathtt{C}_x A, \Gamma \to \Theta}{\scriptstyle C_2 \to}$$

szabály esetén a $\neg\mathtt{C}_x A$ és a

$$(A \supset M_x \vee V_x) \wedge (\neg M_x \vee \neg V_x \vee \neg A) \wedge (V_x \supset M_x \vee A) \wedge (M_x \supset V_x \vee A) \tag{13.3}$$

formulák ekvivalenciáját kell belátnunk. A 13.3 formulából egyszerűsítéssel a

$$\neg(A \equiv (V_x \equiv M_x))$$

formula adódik, innen pedig már a kívánt ekvivalenciát kapjuk. $\dashv$

Az előző lemma többszöri alkalmazásával kapjuk a következő lemmát.

13.2. Lemma. *A szekventfa gyökeréhez tartozó szekvent asszociáltja ekvivalens a szekventfa leveleiben szereplő szekventek asszociáltjainak konjunkciójával.*

13.3. Lemma. *Tetszőleges szekventhez létezik olyan*

$$(A_{11} \vee \dots \vee A_{1n_1}) \wedge \dots \wedge (A_{m1} \vee \dots \vee A_{mn_m}) \tag{13.4}$$

alakú formula, amely ekvivalens a szekvent asszociáltjával, és ahol az A_{ij} vagy kijelentésváltozó, vagy annak tagadása.

Bizonyítás. Készítsünk el egy szekventfát a kérdéses szekventből kiindulva. A $\mathcal{L}^{tf}$ és $\mathcal{L}^{mv}$ szekventkalkulusában tetszőleges pozitív fokú formulához van olyan szabály, mellyel a formulát tartalmazó szekvent foka csökkenthető, ezt az eljárást a nem axiómákra folyamatosan alkalmazva, olyan szekventfát kapunk, melynek leveleiben vagy axiómák, vagy nulladfokú szekventek vannak.

Az előző lemma alapján az eredeti szekvent asszociáltja ekvivalens a szekventfa leveleiben szereplő szekventek asszociáltjainak konjunkciójával. Az axiómák asszociáltjai konstans igaz értékűek, így a konjunkcióból elhagyhatóak. Mivel az

$$A_1, \dots, A_n \to B_1, \dots, B_m$$

szekvent asszociáltja az

$$\neg A_1 \vee \dots \vee \neg A_n \vee B_1 \vee \dots \vee B_m$$

alakban is felírható, ezek konjunkciója adja a keresett formulát. ⊣

13.2. Az első módszer

Mint már a 3. fejezetben utaltunk rá, a „Mit mondjak?” illetve a „Mit kérdezzek?” típusú feladatokban azt az ismeretlen W formulát kell megkeresni, melyre a 3.3 formula érvényes illetve a 3.3 és 3.4 formulák mindegyike érvényes. Az első módszerünk két lépésből áll:

1. A feladatnak megfelelő 3.3 formulának illetve a 3.3 és 3.4 formulák konjunkciójának készítsük el a k.n.f. alakját:

$$(Y \vee B_1) \wedge \dots \wedge (Y \vee B_n) \wedge (\neg Y \vee C_1) \wedge \dots \wedge (\neg Y \vee C_m), \tag{13.5}$$

   ahol az Y formulát atomi formulának tekintjük, és B_i-k, C_j-k elemi diszjunkciók.
2. Készítsük el a $\neg(B_1 \wedge \dots \wedge B_n)$ és $(C_1 \wedge \dots \wedge C_m)$ formulák Craig interpoláltját, ami a keresett Y formula.

Tegyük fel, hogy valamely Y formulára a 3.3 formula (és adott esetben a 3.4) formula érvényes. A 13.3. lemma értelmében a 3.3 formula illetve a 3.3 és 3.4 formulák konjunkciója felírható $\bigwedge_i \bigvee_j A_{ij}$ alakban. Hagyjuk el a $\bigwedge_i \bigvee_j A_{ij}$ formulából azokat az *elemi diszjunkciókat* ($\bigvee_j A_{ij}$), melyek egyszerre tartalmazzák valamely nulladfokú formulát és tagadását. Mivel az ilyen elemi diszjunkció tautológia, így az eredeti $\bigwedge_i \bigvee_j A_{ij}$ formulával ekvivalens formulához jutunk, amire továbbra is ebben a formában hivatkozunk.

Ha valamely elemi diszjunkció nem tartalmazza se Y-t, se $\neg Y$-t, akkor mivel az előbbiek alapján nem tartalmazhatja egyszerre egyik nulladfokú formulát és tagadását sem, megválasztható a ϑ értékelés úgy, hogy az elemi diszjunkció összes tagja hamis legyen, így maga $\bigwedge_i \bigvee_j A_{ij}$ is, ami viszont ekvivalens 3.3 formulával (vagy 3.3 és 3.4 konjunkciójával). Ezek pedig feltevésünk szerint érvényesek.

Ezért $\bigwedge_i \bigvee_j A_{ij}$ minden elemi diszjunkciója vagy Y-t, vagy $\neg Y$-t tartalmazza, azaz ha valamely Y formulára érvényes a 3.3 (és esetleg 3.4) formula, akkor az átalakítható az 13.5 formulára.

Innen ekvivalens átalakításokkal a

$$\big(\neg(B_1 \wedge \cdots \wedge B_n) \supset Y\big) \wedge \big(Y \supset (C_1 \wedge \cdots \wedge C_m)\big) \tag{13.6}$$

formulához jutunk. Ha (13.5) és ezért (13.6) is érvényes, akkor

$$\neg(B_1 \wedge \cdots \wedge B_n) \supset Y \tag{13.7}$$

és

$$Y \supset (C_1 \wedge \cdots \wedge C_m) \tag{13.8}$$

formula külön-külön is érvényes. Az eredeti feladatunk tehát arra redukálódott, hogy keressünk egy olyan Y formulát, melyre a 13.7 és a 13.8 formula egyszerre érvényes. Mivel a B_i és C_j formulák kijelentésváltozók (vagy tagadásuk) diszjunkciója, a 13.7 és 13.8 formulák megfelelően megválasztott $\mathcal{S}$ halmazzal tekinthetőek az $\mathcal{L}_0$ logikai nyelv formuláinak. A Craig interpolációs tétele értelmében ha a

$$\neg(B_1 \wedge \cdots \wedge B_n) \supset (C_1 \wedge \cdots \wedge C_m) \tag{13.9}$$

formula érvényes, akkor van olyan Y formula, melyre 13.7 és 13.8 érvényes formulák. Smullyan konstruktív bizonyítása [38, 128. o.] meg is határozza ezt az Y-t. A B_i és C_j formulák speciális szerkezete miatt viszont nem szükséges Smullyan bizonyításának megfelelően a 13.9 formula szekventkalkulusbeli bizonyítását elkészíteni.

Craig tétele értelmében a Y formula csakis olyan kijelentésváltozókat tartalmazhat, amelyek a 13.9 formulában is előfordulnak. Ezért készítsük el $\neg(B_1 \wedge \cdots \wedge B_n)$, Y és $C_1 \wedge \cdots \wedge C_m$ formulák szimultán igazságtábláját, ahol a sorokat a 13.9 formulában szereplő kijelentésváltozók különböző értékelései adják. A táblázatban Y oszlopát a másik két oszlop függényében töltjük fel:

- Ha $\neg(B_1 \wedge \cdots \wedge B_n)$ igaz, akkor a 13.7 formula érvényessége értelmében az adott értékelésnél Y-nak is igaznak kell lennie.
- Ha $C_1 \wedge \cdots \wedge C_m$ hamis, akkor a 13.8 formula érvényessége értelmében az adott értékelésnél Y-nak is hamisnak kell lennie.
- Ha $\neg(B_1 \wedge \cdots \wedge B_n)$ igaz és $C_1 \wedge \cdots \wedge C_m$ hamis, akkor a 13.9 formula nem igaz az adott értékelésben, és így a 13.5 formula sem lehetett érvényes.
- Ha az előbbiek nem határozzák meg Y értékét, akkor az adott rublika tetszőlegesen feltölthető.

Ezek után a keresett Y formula azon értékelésekből származtatható, ahol az Y oszlopában igaz érték található. Minden értékelés esetén képezzük a 13.9 kijelentésváltozóinak azon konjunkcióit, melyben tagadva szerepelnek azok, melyek az adott értékelésben hamisak. Ezen konjunkciók diszjunkciója adja a keresett formulát, hasonlóképpen, mikor az igazságtáblája alapján konstruálunk meg egy adott tulajdonságú formulát a kijelentéslogikában.

Az ekvivalens átalakítások miatt könnyen belátható, hogy a módszer jó megoldásokat szolgáltat, és ha valamely Y formulára a 3.3 formula érvényes, akkor ez az Y meghatározható ezzel a módszerrel.

13.3 A szabadság ajtaja

Az előbb ismertetett módszert kövessük végig egy feladaton! Szinte mindenki ismeri a következő fejtörőt:

> *Ime egy másik rab, aki egy nehéz dilemma előtt áll. A szultán, akinek a rabságában sínylődik, felajánlja a rabnak, hogy egy cellába zárja őt a két szolgájával, akik közül az egyik mindig hazudik, a másik pedig igazat mond. A cellának két ajtaja van, az egyik a szabadságé, a másik a rabszolgaságé. Az lesz a rab sorsa, amelyik ajtót választja. A rabnak joga van egyetlen kérdést feltenni az egyik szolgának. Természetesen nem tudja, hogy melyik szolga hazudik, és melyik mond igazat. Visszanyerheti-e a rab a szabadságát kockázat nélkül? [11, 148. o]*

Bonyolítsuk ezt a feladatot azzal, hogy csak az egyik szolgát zárjuk be a cellába. A feladat alapján nyilvánvaló, hogy ez a szolga a lovagok és lókötők szigete egy lakosának is tekinthető. Ennek alapján $\mathcal{L}^{tf}$ lesz az a nyelv, melyben a feladatot formalizáljuk.

Használjuk ki azt, hogy az $\mathcal{L}^{tf}$ nyelvben érvényes az $F_a \equiv \neg T_a$ formula, és F_a helyett következetesen írjunk $\neg T_a$-t. Ezzel az átírással a Z formula azonossággá válik, s elhagyható a bizonyítás során. A formalizáláshoz szükségünk lesz apróbb pontosításokra. Állítsuk oda a rabot az egyik ajtóhoz, és legyen a kérdés olyan, hogy pontosan akkor legyen a válasz igen, ha ez az ajtó szabadságé. Jelölje D azt, hogy ez az ajtó a szabadságé, és az egyetlen őrt nevezzük a-val. Feltételeink alapján az „Igaz-e, hogy Z?" kérdésre adott igen válasznál D, a nem válasznál pedig $\neg D$ teljesül, tehát $(C_a Z \wedge D) \vee (C_a \neg Z \wedge \neg D)$ jelöli kérdésünk remélt tulajdonságait. Ennek a formulának kell elkészíteni a bizonyítását. A 13.1. ábrán látható, hogy szekventfa egyik levele se axióma, minden levele olyan nulladfokú szekventet tartalmaz, melyben az Y szerepel, tehát van remény a megoldásra.

A szekventfa leveleiben szereplő szekventek alapján

$$(C_a Y \wedge D) \vee (C_a \neg Y \wedge \neg D)$$

formula a

$$(\neg T_a \vee \neg Y \vee D) \wedge (Z \vee D \vee T_a) \wedge (\neg T_a \vee \neg D \vee Z) \wedge (\neg Z \vee \neg D \vee T_a)$$

formulával, illetve ezt továbbalakítva a

$$\big((T_a \equiv D) \supset Y\big) \wedge \big(Y \supset (T_a \equiv D)\big) \tag{13.10}$$

$$\boxed{T_a, Y \to D}$$
$$\boxed{\neg T_a \to D, Y}$$
$$\mathtt{C}_a Y \to D$$
$$\to \mathtt{C}_a Y \supset D$$

$$\boxed{\begin{array}{c} T_a, D \to Y \\ T_a, \neg Y, D \to \end{array}}$$
$$\boxed{\begin{array}{c} Y, \neg T_a, D \to \\ \neg T_a, D \to \neg Y \end{array}}$$
$$\mathtt{C}_a \neg Y, D \to$$
$$\mathtt{C}_a \neg Y \to \neg D$$
$$\to \mathtt{C}_a \neg Y \supset \neg D$$

$$\to (\mathtt{C}_a Y \supset D) \land (\mathtt{C}_a \neg Y \supset \neg D)$$

13.1. ábra. A szabadság ajtaja feladat bizonyítása.

formulával ekvivalens. A 13.10 formulában található kijelentésváltozók a T_a és a D, így négy értékelést kell figyelembe venni. Ennek megfelelően a 13.2. ábrán látható táblázatot kell elkészíteni, melyben a 13.10 formula alapján két oszlopot feltöltöttük. A hiányzó második oszlop feltöltése esetünkben egyértelmű, ugyanannak kell itt szerepelnie, mint a másik két oszlopban. Ennek alapján a keresett Y formula a táblázat első és negyedik sorából megkonstruálva $(T_a \land D) \lor (\neg T_a \land \neg D)$ lesz. Az $\mathcal{L}^{tf}$ tulajdonságainak megfelelően ez a $T_a \equiv D$, illetve az $\mathtt{C}_a D$ formula, amit már a 13.10 formulából le lehetett volna olvasni. Ezek szerint azt kell megkérdezni a szolgától, hogy igennel válaszolna-e, ha megkérdeznénk tőle, hogy ez-e a szabadságot jelentő ajtó.

T_a	D	1.	2.	3.
1	1	1		1
1	0	0		0
0	1	0		0
0	0	1		1

13.2. ábra. „A szabadság ajtaja” szimultán igazságtáblája.

Az eredeti feladat — azaz a két szolga (legyenek a és b) — esetén a feladat formalizáltja szinte ugyanez, csak azt a feltételt kell hozzávenni a formulához, hogy a szolgák különböző típusúak, amit például úgy formalizálhatunk, hogy $T_a \equiv \neg T_b$. Az előző lépéseket megismételve végül a 13.3. ábra táblázatához jutunk. Az első és a harmadik oszlop a nyolc érték közül négyet meghatároz, de a további négy értékére a következmények alapján nincs megkötés. A négy ismeretlen érték (a, b, c és d) tetszőleges értékelése mellett megoldást kapunk. Ha azt a megoldást tekintjük, melyben $a = 0$, $b = 1$, $c = 1$ és $d = 0$, akkor az Y formula konstruálásakor a $\neg(T_b \equiv D)$ formulát kapjuk, ami pedig ekvivalens a $\neg\mathtt{C}_b D$ formulával, amelynek olvasata a közismert megoldás. Ha az $a = 1$, $b = 0$, $c = 0$ és $d = 1$ értékeket választjuk, akkor az egy szolga esetén nyert megoldást kapjuk vissza.

T_a	T_b	D	1.	2.	3.
1	1	1	0	a	1
1	1	0	0	b	1
1	0	1	1	$\rightarrow$ 1	1
1	0	0	0	0 $\leftarrow$	0
0	1	1	0	0 $\leftarrow$	0
0	1	0	1	$\rightarrow$ 1	1
0	0	1	0	c	1
0	0	0	0	d	1

13.3. ábra. „A szabadság ajtaja” eredeti igazságtáblája

13.4. Drakula rejtélye

Drakula feladatában pontosan akkor válaszolnak „Bű”-vel az „S ekvivalens X-szel” kérdésre, ha X igaz. A korábban ismertetett meggondolások alapján mindez a

$$(\mathtt{C}_x(S \equiv X) \equiv B) \equiv X \tag{13.11}$$

alakban formalizálható. A 13.11 formulának a szekventkalkulusbeli bizonyítása 32-levelű szekventfához vezet, amit most nem mellékelünk. A 32 szekvent fele axióma, a többiek pedig a következők:

(a) $B \rightarrow X, M_x, V_x, S$
(b) $M_x, V_x, B \rightarrow X, S$
(c) $V_x, B, S \rightarrow X, M_x$
(d) $M_x, B, S \rightarrow X, V_x$
(e) $S \rightarrow X, B, M_x, V_x$
(f) $S, M_x, V_x \rightarrow X, B$
(g) $V_x \rightarrow X, B, M_x, S,$
(h) $M_x \rightarrow X, B, V_x, S$
(i) $S, X \rightarrow B, M_x, V_x$
(j) $M_x, V_x, S, X \rightarrow B$
(k) $X, V_x \rightarrow B, M_x, S$
(l) $X, M_x \rightarrow B, V_x, S$
(m) $X, B \rightarrow M_x, V_x, S$
(n) $X, M_x, V_x, B \rightarrow S$
(o) $V_x, X, B, S \rightarrow M_x$
(p) $M_x, X, B, S \rightarrow V_x$

Az (a), (b), (g), (h), (k), (l), (m) és (n) szekventek asszociáltjaiból az S formulát kiemelhetjük, s mivel a maradványok konjunkcióval kapcsolódnak, egyszerűsítéssel a következő formulákat nyerhetjük belőlük:

(q)	$M_x \vee V_x \vee \neg B$	(a-m)
(r)	$\neg M_x \vee \neg V_x \vee \neg B$	(b-n)
(s)	$M_x \vee \neg V_x \vee B$	(g-k)
(t)	$\neg M_x \vee V_x \vee B$	(h-l)

Innen (q) és (r) összevonásából $\neg B \vee \neg(M_x \equiv V_x)$, míg (s) és (t) összevonásából $B \vee (M_x \equiv V_x)$ adódik, míg kettőjük konjunkciója $B \equiv \neg(M_x \equiv V_x)$. Hasonlóképpen a $\neg S$ kiemelhető a (c) (d) (e) (f) (i) (j) (o) és (p) szekventek asszociáltjaiból.

(u)	$M_x \vee \neg V_x \vee \neg B$	(c-o)
(v)	$\neg M_x \vee V_x \vee \neg B$	(d-p)
(w)	$M_x \vee V_x \vee B$	(e-i)
(x)	$\neg M_x \vee \neg V_x \vee B$	(f-j)

Az (u) és a (v) összevonásából $\neg B \vee (M_x \equiv V_x)$, míg a (w) és a (x) összevonásából $B \vee \neg(M_x \equiv V_x)$ adódik, és e kettő együtt $B \equiv (M_x \equiv V_x)$. Ezért a keresett S formula egy olyan formula, melyre érvényes a

$$(\neg(B \equiv \neg(M_x \equiv V_x)) \supset S) \wedge (S \supset (B \equiv (M_x \equiv V_x))),$$

illetve kisebb átalakítás után a

$$((B \equiv (M_x \equiv V_x)) \supset S) \wedge (S \supset (B \equiv (M_x \equiv V_x)))$$

formula. Ez utóbbiból már egyből leolvasható az egyértelmű megoldás, még a táblázatot sem kell elkészíteni.

13.4. Megjegyzés. Az ismertetett módszer általános, de most nem a legrövidebben jutottunk el vele a megoldáshoz. A fejezet elején már láttuk, hogy az $\mathcal{L}^{mv}$ nyelvben érvényes a $\mathtt{C}_x A \equiv (A \equiv (M_x \equiv V_x))$ formula. Ezt felhasználva a feladat formalizáltja a következő alakot ölti:

$$((S \equiv X) \equiv (M_x \equiv V_x) \equiv B) \equiv X$$

Mivel az ekvivalencia asszociatív és kommutatív, az előbbi formulából eltávolítva a zárójeleket, átrendezve a tagokat, az egyszerűsítés után újrazárójelezve kapjuk az $S \equiv ((M_x \equiv V_x) \equiv B))$ megoldást. Az $((M_x \equiv V_x) \equiv B))$ formulát az $((\top \equiv (M_x \equiv V_x)) \equiv B))$ alakra bővítve, az előbb említett átírással ez a $\mathtt{C}_x \top \equiv B$ formára alakítható, amely már a „hivatalos” megoldást adja.

13.5. Megjegyzés. Smullyan egyes feladatait nem lehet teljes egészében logikai törvényekkel formalizálni. Ekkor az előbbi algoritmussal kapott megoldások közül a feladat szövegének nem formalizált részei alapján kell kiválasztani a fejtörő megoldását.

13.5. A másik módszer

Smullyan néhány feladatában nem csak egyetlen ismeretlen részformula van, hanem több, rendszerint kettő. Ekkor az előző módszer — amelyben elkülönítjük az ismeretlen részformulát, és bizonyos korlátokat határozunk meg számára — nem működik.

A 13.3. lemma értelmében tetszőleges formula felírható kijelentésváltozók logikai kombinációjaként. Azt, hogy melyek ezek a kijelentésváltozók, a formula szekvent-kalkulusbeli bizonyítása során nyert levélszekventek határozzák meg.

Tegyük fel, hogy a feladat formalizáltja n darab ismeretlen formulát tartalmaz, és a 13.5 formulában további m darab kijelentésváltozó szerepel! Az ismeretlen formulákat független atomi formuláknak tekintve az $n+m$ darab kijelentésváltozónak megfelelően az eredeti formula igazságtáblája 2^{n+m} sorból állna.

Ezt a 2^{n+m} értéket rendezzük el egy 2^n sorból és 2^m oszlopból álló táblázatba, ahol a sorok az ismert kijelentésváltozók, az oszlopok az ismeretlen formulák egy-egy értékelésének felel meg.

Tegyük fel, hogy az ismeretlen formulák a kijelentésváltozók logikai kombinációja. (Ellenkező esetben ez elérhető további kijelentésváltozók bevezetésével.)

Ez azt jelenti, hogy kijelentésváltozók tetszőleges értékelése esetén, mivel az eredeti formula érvényes volt, a táblázat adott értékeléshez tartozó sora tartalmaz igaz értéket (egyest). Ezért minden sorból válasszunk ki egy-egy egyest. Tekintsük azokat a kiválasztott egyeseket, melyek olyan oszlopokban vannak, ahol a megkonstruálandó formula igaz értéket vesz fel. Az ezekhez az egyesekhez tartozó sorok értékelése alapján az előbbihez hasonló módon konstuáljuk meg a keresett formulát. Összefoglalva a módszer lépései a következők:

1. A kijelentésváltozók meghatározása.
2. A táblázat feltöltése és minden sorból egy egyes kiválasztása.
3. Az ismeretlen formulák meghatározása a táblázat alapján.

A konstrukció lépéseiből adódik, hogy a feladat formalizáltja valamely Y formula esetén érvényes, a módszerünk meghatározza ez a formulát, feltéve ha az Y-ban szereplő nullafokú formulák szerepelnek a sorokat meghatározó formulák között.

Tekintsük újra a már vizsgált két szolga feladatát! Itt a

$$(T_a \equiv \neg T_b) \supset (\mathtt{C}_a Y \supset D) \wedge (\mathtt{C}_a \neg Y \supset \neg D) \tag{13.12}$$

formula a fejtörő formalizáltja, ahol Z a keresett formula. Mivel csak egy ismeretlen formulánk van, a táblázatnak két oszlopa lesz, az elsőben az Y formula igaz, míg a másikban hamis. A két őr típusa és ajtók szerepe alapján nyolc értékelést kell megvizsgálni, és összesen tizenhat esetben kell kiszámolni a 13.12 formula értékét (13.4. ábra). A táblázat négy sorában több egyes is található, ekkor tetszés szerint választhatunk az egyesek közül, s így kapjuk meg a korábban is említett 16 megoldást.

T_a	T_b	D	$(Z=1)$	$(Z=0)$
1	1	1	1	1
1	1	0	1	1
1	0	1	1	0
1	0	0	0	1
0	1	1	0	1
0	1	0	1	0
0	0	1	1	1
0	0	0	1	1

13.4. ábra. „A szabadság ajtaja” másik fajta igazságtáblája.

A módszert jobban megismerhetjük, ha egy több változót tartalmazó feladatot oldunk meg, mint például [41] 173. feladatát:

A „Ha P, akkor Q” állítás megfordítása a „Ha Q, akkor P” állítás. Van két állításunk, X és Y, amik egymás megfordításai, és olyanok, hogy

1. *Egyik sem következik a másikból.*
2. *Ha egy erdélyi állítja valamelyiket, akkor ebből következik, hogy a másik igaz. Tudna két ilyen állítást mondani?*

Sokkal jobban járunk, ha a keresett formuláink függetlenek, ezért az ismeretlen állítások előfeltételeit illetve következményeit jelölje az X és Y, így a keresett két állítás az $X \supset Y$ és $Y \supset X$ lesz.

A példa első feltétele nem fejezhető ki érvényes formulával, ezért ezt a rejtvény formalizálásakor figyelmen kívül hagyjuk, s majd csak a kapott eredmények ellenőrzésekor vesszük figyelembe, minden megoldást megvizsgálunk, teljesíti-e a feltételt vagy sem.

		$(X = 1)$		$(X = 0)$	
V_a	M_a	$(Y = 1)$	$(Y = 0)$	$(Y = 1)$	$(Y = 0)$
1	1	$1'$	0	0	1
0	1	1	$1'$	1	1
1	0	1	1	$1'$	1
0	0	1	0	0	$1'$

13.5. ábra. A 173. feladat igazságtáblája.

A 13.5. ábra táblázatának soraiban rendre 2, 4, 4 és 2 egyes található, így $2 \times 4 \times 4 \times 2 = 64$ esetet kell megvizsgálni, hogy teljesül-e rá az első feltétel. Ezeket a vizsgálatokat az olvasóra bízzuk, mi most csak egy megoldást vizsgálunk meg alaposabban. Azokat az egyeseket válasszuk ki, melyek meg lettek jelölve! Az X formula meghatározásához azokat a kiválasztott egyeseket vegyük figyelembe, melyek az $X = 1$ oszlopában találhatóak. Magyarul az első és második sorról van szó. Az ezekhez a sorokhoz tartozó értékelések alapján az X formula a $(V_a \wedge M_a) \vee (\neg V_a \wedge M_a)$ alakot ölti, ami nem lesz más, mint az M_a formula. Az Y meghatározásához hasonló módon, azokat a kiválasztott egyeseket kell figyelembe venni, melyek az $Y = 1$ oszlopában találhatóak, magyarul az első és a harmadik sorban szereplő egyesekről van szó. Innen az Y formulára a $(V_a \wedge M_a) \vee (V_a \wedge \neg M_a)$ formula adódik, ami nem más, mint a V_a formula. Ezek alapján a fejtörőben keresett két mondat a következő: „Ha vámpír vagyok, akkor őrült vagyok.” illetve „Ha őrült vagyok, akkor vámpír vagyok.”

Smullyan könyve olyan feladatokat is tartalmaz, melyben nem csak egy, hanem több kérdést is fel kell tenni, hogy a feladatot megoldhassuk. Az emberek számára ez stratégia kidolgozását igényelné. A most ismertett módszer képes ilyen feladatok megoldására is:

Egy másik alkalommal a lovagok, lókötők és normálisak egy másik szigetére látogattam. Elterjedt az a hír, hogy a szigeten arany van, és szerettem volna kitalálni, hogy tényleg van-e. A sziget királya, aki lovag volt, kegyesen bemutatott három bennszülöttnek, A-nak, B-nek és C-nek, és elárulta, hogy legfeljebb az egyikük normális. Megengedte, hogy feltegyek két igen-nem kérdést, akinek csak akarok.

Ki lehet-e találni két kérdéssel, hogy van-e arany a szigeten?

Ha valaki eddig a 125. feladatig eljut [41] olvasása közben, már tudja, hogy a normálisak megbízhatatlanok, és az első kérdéssel az kell tisztázni, hogy ki normális és ki nem, majd ezután a második kérdés az egy szolga feladatának megoldásához fog hasonlítani.

A módszerünk viszont ilyen meggondolásokra nem képes, ezért másképp kell a feladathoz fogni. Mivel a fejtörő szimmetrikus, az első kérdést bárkinek fel lehet tenni, mondjuk tegyük fel A-nak. Az A válasza alapján kell majd kiválasztani, hogy kinek tesszük fel a második kérdést, és az arra kapott válasz alapján kellene eldönteni, van-e arany a szigeten. Válasszuk meg a második kérdést úgy, hogy a válasz rá pontosan akkor legyen *igen*, ha van arany a szigeten.

Jelölje az X formula az első kérdést. Ha erre a kérdésre *igen* választ kapunk, akkor mint korábban a $\mathtt{C}_a X$ formula igaz lesz. Ha (az Y kérdésre adott) második válasz is *igen*, akkor a szigeten van arany (jelölje ezt G). Mindez a $\mathtt{C}_a X \wedge \mathtt{C}_x Y \supset G$ formulával írható le. Ha a második válasz *nem*, akkor nincs arany a szigeten: $\mathtt{C}_a X \wedge \mathtt{C}_x \neg Y \supset \neg G$. Hasonló módon fel lehet írni azt is, hogy az első nemleges válasz után a második válasz *igen* vagy *nem* lesz, de ekkor az Y helyett W-t kell írni, mert egyáltalán nem biztos, hogy ekkor is ugyanazt kell kérdezni.

Az egész feladat formalizálásához szükséges még annak kifejezése, hogy legfeljebb egy normális van köztük, vagyis minden esetben legalább ketten nem normálisak:

$$(\neg N_a \wedge \neg N_b) \vee (\neg N_b \wedge \neg N_c) \vee (\neg N_c \wedge \neg N_a)$$

Az előbbi és a 9.1 formula konjunkcióját jelölje M, s ekkor a feladat formalizáltja a következő:

$$\big(M \wedge \mathtt{C}_a X \supset (\mathtt{C}_x Y \supset G) \wedge (\mathtt{C}_x \neg Y \supset \neg G)\big) \wedge \big(M \wedge \mathtt{C}_a \neg X \supset (\mathtt{C}_y W \supset G) \wedge (\mathtt{C}_y \neg W \supset \neg G)\big)$$

Ebben a formulában még x és y helyére a-t, b-t vagy c-t kell helyettesíteni, annak megfelelően, hogy a második kérdést kinek tesszük fel. Összesen kilenc esetet kellene megvizsgálni, ám mi megelégszünk az $x = b$ és $y = c$ választással (13.5 ábra). Ekkor a feladatunk táblázatának minden sora tartalmaz egyest, így a feladat azon kérdésére, hogy két válasszal kideríthető-e, hogy van-e arany a szigeten, igen a válasz. Ezek alapján az első kérdést az A személynek kell feltenni, és ha ő igenlő választ ad, akkor B-t kell tovább faggatni, különben C-t.

Természetesen bennünket nem csak ez érdekel, hanem maguk a kérdések is. Miután a feladat kitűzére során semmilyen korlátozó feltétel nem került elő, az egyesek tetszőleges kiválasztása megoldást ad, melyek között nagyon bonyolultak is akadnak. Ha a megjelölt egyeseket választjuk ki, akkor viszonylag egyszerű kérdéseket kapunk eredményül:

X: $T_a \equiv N_c$, „Ön akkor és csak akkor lovag, ha C normális?”

Y: $T_b \equiv G$, „Ön akkor és csak akkor lovag, ha van arany a szigeten?”

W: $T_c \equiv G$, „Ön akkor és csak akkor lovag, ha van arany a szigeten?”

A megoldás helyességének ellenőrzését az olvasóra bízzuk.

A második módszer (jellege következtében) könnyedén programozható. A szerző Prolog nyelven implementálta az algoritmust a korábbi fejezetekben vizsgált logikai nyelvek egy részére [4].

$\neg G$		X	0	0	0	0	1	1	1	1
		Y	0	0	1	1	0	0	1	1
		W	0	1	0	1	0	1	0	1
F_a	F_b	F_c	0	0	1	1	0	1	0	1'
F_a	F_b	N_c	0	0	1	1'	0	0	0	0
F_a	F_b	T_c	0	0	1	1	1	0	1'	0
F_a	N_b	F_c	0	0	0	0	0	1	0	1'
F_a	N_b	N_c	1	1	1	1'	1	1	1	1
F_a	N_b	T_c	0	0	0	0	1	0	1'	0
F_a	T_b	F_c	1	1	0	0	0	1'	0	1
F_a	T_b	N_c	1	1'	0	0	0	0	0	0
F_a	T_b	T_c	1	1	0	0	1'	0	1	0
N_a	F_b	F_c	0	0	0	1	0	0	0	1'
N_a	F_b	N_c	1	1	1	1'	1	1	1	1
N_a	F_b	T_c	0	0	1	0	0	0	1'	0
N_a	N_b	F_c	1	1	1	1	1	1	1	1'
N_a	N_b	N_c	1	1	1	1'	1	1	1	1
N_a	N_b	T_c	1	1	1	1	1	1	1'	1
N_a	T_b	F_c	0	1	0	0	0	1'	0	0
N_a	T_b	N_c	1	1'	1	1	1	1	1	1
N_a	T_b	T_c	1	0	0	0	1'	0	0	0
T_a	F_b	F_c	0	1	0	1'	0	0	1	1
T_a	F_b	N_c	0	0	0	0	0	0	1	1'
T_a	F_b	T_c	1	0	1'	0	0	0	1	1
T_a	N_b	F_c	0	1	0	1'	0	0	0	0
T_a	N_b	N_c	1	1	1	1	1	1	1	1'
T_a	N_b	T_c	1	0	1'	0	0	0	0	0
T_a	T_b	F_c	0	1'	0	1	1	1	0	0
T_a	T_b	N_c	0	0	0	0	1	1'	0	0
T_a	T_b	T_c	1'	0	1	0	1	1	0	0

G		X	0	0	0	0	1	1	1	1
		Y	0	0	1	1	0	0	1	1
		W	0	1	0	1	0	1	0	1
F_a	F_b	F_c	1	1	0	0	1'	0	1	0
F_a	F_b	N_c	1'	1	0	0	0	0	0	0
F_a	F_b	T_c	1	1	0	0	0	1'	0	1
F_a	N_b	F_c	0	0	0	0	1'	0	1	0
F_a	N_b	N_c	1'	1	1	1	1	1	1	1
F_a	N_b	T_c	0	0	0	0	0	1'	0	1
F_a	T_b	F_c	0	0	1	1	1	0	1'	0
F_a	T_b	N_c	0	0	1'	1	0	0	0	0
F_a	T_b	T_c	0	0	1	1	0	1	0	1'
N_a	F_b	F_c	1	0	0	0	1'	0	0	0
N_a	F_b	N_c	1'	1	1	1	1	1	1	1
N_a	F_b	T_c	0	1	0	0	0	1'	0	0
N_a	N_b	F_c	1	1	1	1	1'	1	1	1
N_a	N_b	N_c	1'	1	1	1	1	1	1	1
N_a	N_b	T_c	1	1	1	1	1	1'	1	1
N_a	T_b	F_c	0	0	1	0	0	0	1'	0
N_a	T_b	N_c	1	1	1'	1	1	1	1	1
N_a	T_b	T_c	0	0	0	1	0	0	0	1'
T_a	F_b	F_c	1'	0	1	0	1	1	0	0
T_a	F_b	N_c	0	0	0	0	1'	1	0	0
T_a	F_b	T_c	0	1'	0	1	1	1	0	0
T_a	N_b	F_c	1'	0	1	0	0	0	0	0
T_a	N_b	N_c	1	1	1	1	1'	1	1	1
T_a	N_b	T_c	0	1'	0	1	0	0	0	0
T_a	T_b	F_c	1	0	1'	0	0	0	1	1
T_a	T_b	N_c	0	0	0	0	0	0	1'	1
T_a	T_b	T_c	0	1	0	1'	0	0	1	1

13.5. ábra. A 125. feladat megoldása.

14.

$\mathrm{C}_x\mathrm{A}$ alakú érvényes formulák

Smullyan fejtörőiben egy-két rövidke állításból messzemenő következtetéseket vonhatunk le a fejtörő szereplőiről. Éppen ezért felmerült az a kérdés, hogy vannak-e olyan állítások, melyekből semmit sem tudunk meg az állítást tevő személyekről. Ezt úgy is meg lehetne fogalmazni, hogy melyek azok az állítások, melyeket mindenki mondhat, illetve, hogy mely A állításokra érvényes a $\mathtt{C}_x A$ formula.

Ebben a fejezetben a korábban ismertetett nyelveink egy-egy résznyelvével foglalkozunk, ehhez adunk meg szemantikát. A résznyelveket úgy konstruáljuk meg, hogy kijelentéslogikai nyelveknek is tekinthetjük azokat, így az eredeti kérdést egy egyszerűbb problémára vezetjük vissza.

14.1. Lovagok és lókötők

Ha az 5.1. definícióból elhagyjuk az F5. pontot, azaz a formulákban nem szerepelhet az F_x, akkor az $F_x \equiv \neg T_x$ ekvivalenciának köszönhetően lényegében továbbra is az $\mathcal{L}^{tf}$ nyelvet kapjuk vissza. Ha viszont az F6. pontot is elhagyjuk, azaz nem szerepelhetnek $\mathtt{C}_x B$ alakú részformulák a formulákban, akkor már egy más nyelvhez jutunk, amelyet jelöljön az $\mathcal{L}'$. Az $\mathcal{L}'$ formuláinak halmazát jelölje $\mathcal{F}'$. Ha az $\mathcal{L}^{tf}$ nyelv kijelentéslogikai változóinak a halmazát az $\mathcal{S}$ jelöli, akkor az $\mathcal{L}'$ nyelv tekinthető egy olyan kijelentéslogikai nyelvnek, amely kijelentésváltozóinak $\mathcal{S}'$ halmaza nem más mint $\mathcal{S} \cup \{T_x | x \in \mathcal{P}\}$. Definiáljunk egy $\mathcal{F} \to \mathcal{F}'$ leképezést a következőképpen:

A	A'
Q_i	Q_i
T_x	T_x
$\neg B$	$\neg B'$
$(B \wedge C)'$	$B' \wedge C'$
$(B \vee C)'$	$B' \vee C'$
$(B \supset C)'$	$B' \supset C'$
$(B \equiv C)'$	$B' \equiv C'$
$\mathtt{C}_x B$	$T_x \equiv B'$

ahol $Q_i \in \mathcal{S}$, $x \in \mathcal{P}$ és $B, C \in \mathcal{F}$.

14.1. Tétel. *Az A $\mathcal{L}^{tf}$-formula pontosan akkor érvényes, mikor az A' $\mathcal{L}'$-formula érvényes.*

Bizonyítás. Könnyedén megmutatható, hogy az A és A' $\mathcal{L}^{tf}$-formulák ekvivalensek. A formula foka szerinti induktív bizonyítást kell alkalmazni. Az egyetlen problematikus eset a $\mathtt{C}_x B$, ám a 13.1. lemma bizonyításában már szerepelt, hogy $\mathtt{C}_x B \equiv (Tx \equiv B)$, és az induktív feltevés szerint $B \equiv B'$. Ezek alapján, ha A érvényes formula, akkor A' is.

Az $\mathcal{L}^{tf}$ nyelv ϑ értékelése tekinthető az $\mathcal{L}'$ kijelentéslogikai nyelv értékelésének is, csupán le kell szűkíteni az értékelést az $\mathcal{F}'$ formulahalmazra. Ugyanez fordítva is megy, mert az $\mathcal{L}'$ nyelv egy értékelése egyértelműen kiterjeszthető az $\mathcal{L}^{tf}$ nyelv egy értékelésévé, ugyanis a ϑ_S és a ϑ_T illetve $\vartheta_{S'}$ között egyértelmű megfeleltetés létesíthető.

Tehát ha az A' $\mathcal{L}^{tf}$-formula érvényes, azaz ha minden ϑ értékelésben igaz, akkor mivel tekinthető $\mathcal{L}'$-formulának is, és ugyanezek az értékelések tekinthetőek $\mathcal{L}'$ nyelv értékeléseinek, az A' $\mathcal{L}'$-formula is igaz lesz minden modellben, így érvényes. $\dashv$

Ezek alapján ha az $\mathcal{L}^{tf}$ nyelv érvényes formuláit keressük, akkor azok csak olyan formulák lehetnek, melyeknek képei is érvényesek. A leképezésünk nem bijektív, mert például $\mathtt{C}_x B$ és $T_x \equiv B$ képe is ugyanúgy $T_x \equiv B'$, továbbá $\neg T_x$ és F_x képe is egybeesik. Viszont csak ilyen típusú formulák képe eshet egybe, ezért $\mathcal{L}^{tf}$ minden további érvényes formuláját megkaphatjuk, ha az $\mathcal{L}'$ nyelv A érvényes formuláiban a $\neg T_x / T_x \equiv B$ alakú részformulák helyett $F_x / \mathtt{C}_x B$ részformulákat írunk, Ha például az A érvényes $\mathcal{L}'$-formula a $T_x \equiv ((T_x \equiv B) \equiv B)$, akkor ebben a két lehetséges helyettesítést kihasználva három újabb érvényes $\mathcal{L}^{tf}$ formulát kapunk: $T_x \equiv (\mathtt{C}_x B \equiv B)$, $\mathtt{C}_x((T_x \equiv B) \equiv B)$ és $\mathtt{C}_x(\mathtt{C}_x B \equiv B)$.

Nézzünk meg pár speciális szerkezetű megoldást! Mivel a csak ekvivalenciát tartalmazó kijelentéslogikai formulák pontosan akkor érvényesek, ha bennük minden predikátum páros számszor fordul elő, a következő formulák érvényesek:

$\mathcal{L}'$	$\mathcal{L}^{tf}$
$T_x \equiv T_x$	$\mathtt{C}_x T_x$
$T_x \equiv T_x \equiv \top$	$\mathtt{C}_x \mathtt{C}_x \top$
$T_x \equiv T_x \equiv T_y \equiv T_y$	$\mathtt{C}_x \mathtt{C}_x \mathtt{C}_y T_y$
	$\mathtt{C}_x \mathtt{C}_y \mathtt{C}_x T_y$
$T_x \equiv T_x \equiv T_y \equiv T_y \equiv \top$	$\mathtt{C}_x \mathtt{C}_x \mathtt{C}_y \mathtt{C}_y \top$
	$\mathtt{C}_x \mathtt{C}_y \mathtt{C}_x \mathtt{C}_y \top$
	$\mathtt{C}_x \mathtt{C}_y \mathtt{C}_y \mathtt{C}_x \top$
$\vdots$	$\vdots$

A táblázat persze a vég nélkül folytatható. A táblázatban található első két formula alapján mindenki állíthatja magáról, hogy ő lovag, illetve hogy ő mondhatja azt, hogy „kétszer kettő négy”. Továbbá a $\mathtt{C}_x \neg F_x$ $\mathcal{L}^{tf}$-formula is érvényes lesz, azaz mindenki tagadja, hogy ő lökötő lenne.

Általánosan ha $T_x \equiv B$ érvényes formula, akkor $\mathtt{C}_x A$ érvényes, ha $A' \equiv B$.

14.2. Lovag-lókötő variánsok

Baal szigetén, a farkasemberek között, az előbbi mondatok mind elhangozhatnak, illetve a ládákra kerülhetnek, mert az azok fejtörőit leíró nyelv az $\mathcal{L}^{tf}$ bővítése, az abban érvényes formulák itt is érvényesek. (A ládákon valójában nem az fog szerepelni, hogy „Én lovag vagyok.”, hanem hogy „Ezt a ládikát a Bellini család egyik tagja készítette.”)

További megoldásokat kapunk, ha a nyelvnek megfelelően újradefiniáljuk az $\mathcal{L}'$ nyelvet, és mondjuk Baal szigetén legyen $\mathcal{S}' = \mathcal{S} \cup \{T_x | x \in \mathcal{P}\} \cup \{M_x | x \in \mathcal{P}\}$. A leképezést itt annyiban kell bővíteni, hogy M_x képe legyen M_x. A korábbi tétel variánsa ezekre a nyelvekre is igaz lesz.

14.3. Erdély

Az $\mathcal{L}^{mv}$ nyelv esetén a belőle származtatott $\mathcal{L}'$ nyelv kijelentésváltozóinak a halmaza a következőképpen írható fel: $\mathcal{S}' = \mathcal{S} \cup \{M_x | x \in \mathcal{P}\} \cup \{V_x | x \in \mathcal{P}\}$.

A leképezést értelemszerűen kell megváltoztani, azaz a T_x pontot törölni kell, hozzá hasonló M_x és V_x pontokat pedig a helyére írni. A $\mathtt{C}_x B$ formula képe most az $(M_x \equiv V_x) \equiv B'$ formula lesz. A előző tétel megfelelőjének a bizonyítása hasonlóan megy, mint korábban, csak a $\mathtt{C}_x B \equiv (B \equiv (V_x \equiv M_x))$ összefüggésre kell hivatkozni.

Az érvényes formulák generálása is pontosan úgy megy, mint korábban, azaz az érvényes $\mathcal{L}'$-formulák $(M_x \equiv V_x) \equiv B$ részformuláit kell helyettesíteni a $\mathtt{C}_x B$ formulával. Ennek alapján az a legrövidebb érvényes $\mathtt{C}_x A$ alakú $\mathcal{L}^{mv}$-formula esetén az A' az $M_x \equiv V_x$ formula, és eszerint minden erdélyi mondhatja, hogy ő pontosan akkor vámpír, amikor őrült, vagy Smullyan terminológiáját használva, hogy ő megbízható.

14.4. Subidu és Subidam

Az $\mathcal{L}^{lu}$ logikai nyelvben ha külön-külön tekintjük a *hétfőn mondhatja*, *kedden mondhatja*,... *szombaton mondhatja* modális operátorokat, akkor ezek olyanok, mint az $\mathcal{L}^{tf}$ logikai nyelv mondhatja operátora. Hétfőn, kedden és szerdán az, akire az U_x teljesül, viselkedik úgy, mint a lovag és akire az L_x teljesül, viselkedik úgy, mint a lókötő; míg csütörtökön, pénteken és szombaton pedig fordítva.

Az $\mathcal{L}^{tf}$ nyelvre kapott eredmények ezért adaptálhatóak itt is. Ha az $U_x \equiv \neg L_x$ érvényes formulát felhasználjuk, akkor az érvényes $\mathcal{L}'$-formulák $U_x \equiv B$ részformuláit $\mathtt{C}_x^h B$-re, $\mathtt{C}_x^k B$-re és $\mathtt{C}_x^s B$-re, illetve a $\neg U_x \equiv B$ részformuláit $\mathtt{C}_x^c B$-re, $\mathtt{C}_x^p B$-re és $\mathtt{C}_x^z B$-re, lecserélve újabb érvényes formulákat kapunk. Mivel vasárnap mindegyikük igazat mond, ha B érvényes $\mathcal{L}'$-formula, akkor $\mathtt{C}_x^v B$, $\mathtt{C}_x^v \mathtt{C}_x^v B$, $\mathtt{C}_x^v \mathtt{C}_x^v \mathtt{C}_x^v B$ ... is érvényes formula lesz. A legrövidebb „mindenki mondhatja” formulák a következők: $\mathtt{C}_x^h U_x$, $\mathtt{C}_x^k U_x$, $\mathtt{C}_x^s U_x$, $\mathtt{C}_x^c L_x$, $\mathtt{C}_x^p L_x$, $\mathtt{C}_x^z L_x$ és $\mathtt{C}_x^v \top$. Ennek alapján a hét három első napján mindkét testvér mondhatja, hogy ő olyan, mint az Egyszarvú, a hét következő három napján mindkettő mondhatja, hogy ő olyan, mint az Oroszlán és vasárnap mindkettő mondhatja, hogy „kétszer kettő négy”.

Van-e viszont olyan formula, amit mindegyikük mindennap mondhat? Ha az A formulát hétfőn és csütörtökön is mondhatja mindenki, akkor a $\mathtt{C}_x^h A$ és $\mathtt{C}_x^c A$ formula is érvényes, ezért a tétel alapján $U_x \equiv A'$ és $\neg U_x \equiv A'$, azaz $\neg(U_x \equiv A')$ is érvényes, ám ez lehetetlen, így nincs olyan mondat, amit minden nap mondhatnának.

14.5. Lovagok, lókötők és normálisak

Az eredeti kérdésre könnyű válaszolni. Mivel a normálisak mindent mondhatnak, így azt is, amit a lovagok és lókötők egyaránt mondhatnak.

Ha viszont a lovagok és lókötők esetén ismertetett módszert szeretnénk adaptálni, akkor nehéz dolgunk lesz.

Az $\mathcal{F}'$ formulahalmaz és az $\mathcal{L}'$ nyelv definíciójakor csak a $\mathtt{C}_x B$ formulára vonatkozó F6. pontot hagyhatjuk el. A leképezés definícióját ki kell egészíteni a T_x ponthoz hasonló F_x és N_x pontokkal. A $\mathtt{C}_x A$ formula képe pedig legyen $(T_x \wedge A) \vee (F_x \wedge \neg A) \vee N_x$.

Míg az $\mathcal{L}^{tfn}$ szemantikájában T_x, F_x és N_x logikai értéke nem volt független egymástól, az $\mathcal{L}'$ kijelentéslogikai nyelv szemantikájában ugyanezen kijelentésváltozóknak már függetlenek a logikai értékei. Ezért az előbbi tétel az eredeti formájában nem alkalmazható, tehát legyen Z a 9.1 formula!

14.2. Tétel. *Az A $\mathcal{L}^{tfn}$-formula pontosan akkor érvényes, mikor az $Z \supset A'$ $\mathcal{L}'$-formula érvényes.*

Bizonyítás. Induktív definícióval belátható, hogy az $A \equiv A'$ $\mathcal{L}^{tfn}$-formula érvényes. A legnehezebb pont itt is az állítást a $\mathtt{C}_x A$ alakú formulákra belátni. Mint korábban, most is a 13.1. lemmára kell hivatkozni.

Az $\mathcal{L}^{tfn}$ nyelv egy ϑ értékelése alapján megkonstruálható az $\mathcal{L}'$ kijelentéslogikai nyelv egy ϑ' értékelése úgy, hogy az $\mathcal{L}'$ nulladfokú formulái pontosan akkor legyenek igazak ϑ'-ben, mikor ϑ-ban. Ugyanez fordítva is érvényes, azaz $\mathcal{L}'$ minden olyan ϑ' értékeléséhez, mely Z-t kielégíti, megkonstruálható $\mathcal{L}^{tfn}$ egy ϑ értékelése, hogy az $\mathcal{L}'$ nulladfokú formulái pontosan akkor legyenek igazak ϑ'-ben, mikor ϑ-ban. Ekkor induktív bizonyítással belátható, hogy az $\mathcal{L}'$-formulák egyszerre igazak vagy hamisak ϑ és ϑ' értékelésben. A Z formula érvényes az $\mathcal{L}^{tfn}$ nyelvben, ezért az A $\mathcal{L}^{tfn}$-formula pontosan akkor érvényes, amikor a $Z \supset A$ formula érvényes. Ha a $Z \supset A$ $\mathcal{L}^{tfn}$-formula egy valamely ϑ értékelésben igaz/hamis, akkor $(Z \supset A)'$, azaz a $Z \supset A'$ $\mathcal{L}^{tfn}$-formula is igaz/hamis a ϑ értékelésben, így igaz a hozzá konstruált ϑ' értékelésben is. Fordítva, ha a $Z \supset A'$ $\mathcal{L}'$-formula igaz/hamis, akkor a $Z \supset A'$ $\mathcal{L}^{tfn}$-formula, s Z érvényessége miatt az A' formula is igaz/hamis, de $A \equiv A'$, így A is igaz/hamis. ⊣

Ezek alapján az $\mathcal{L}^{tfn}$ érvényes formuláit úgy generálhatjuk, hogy azokban az A $\mathcal{L}'$-formulákban, melyre $Z \supset A$ érvényes, a $(T_x \wedge B) \vee (F_x \wedge \neg B) \vee N_x$ részformulákat $\mathtt{C}_x B$-re cseréljük.

14.3. Megjegyzés. Subidam, Subidu és Subidi történeteit leíró $\mathcal{L}^{luf}$ nyelvnél is hasonló módszereket kell alkalmazni. Az eredeti kérdésre viszont e nélkül is válaszolhatunk, hasonlóképpen, mint most. Mivel Subidi mindig hazudik és se nem oroszlánszerű, se nem egyszarvúszerű, a tesvéreivel együtt mondhatja a hét elején, hogy ő egyszarvúszerű, a hét közepén, hogy oroszlánszerű. Vasárnap ő továbbra sem mondhat igazat, eltérően testvéreitől, de mivel a nyelv bővült, mindhármójuk mondhatja vasárnap, hogy ő biza nem Subidi (az a lókötő). A harmadik testvér megjelenése ellenére sincs olyan mondat, melyet bármelyikük a hét bármely napján mondhatna.

14.6. Némák

Könnyedén válaszolhatunk az eredeti kérdésünkre akkor is, ha a vizsgált nyelv némákat is tartalmaz. Mivel a némák egyetlen egy állítást sem mondhatnak, így nincs olyan mondat, amit mindenki mondhatna.

Ha a nyelv logikai törvényeit keressük, akkor az $\mathcal{L}^{tfn}$ vizsgálatakor követett módszert kell újra alkalmazni. Az igazmondók és hazugok nyelvét használva első esetben (lovagok, lókötők és némák leírásakor) $\mathtt{C}_x B$ képe a $(I_x \wedge B \wedge \neg H_x) \vee (H_x \wedge \neg B \wedge \neg I_x)$ lesz. A nyelv érvényes formuláit úgy generálhatjuk, hogy azon A $\mathcal{L}'$-formulákban, melyre $Z \supset A$ érvényes a $(I_x \wedge B \wedge \neg H_x) \vee (H_x \wedge \neg B \wedge \neg I_x)$ részformulák helyére $\mathtt{C}_x B$ formulát helyettesítünk, ahol Z a 12.1 formula.

A másik esetben (lovagok, lókötők, normálisak és némák leírásakor) $\mathtt{C}_x B$ képe a $(I_x \wedge B \wedge \neg H_x) \vee (H_x \wedge \neg B \wedge I_x) \vee (\neg I_x \wedge \neg H_x)$ lesz, és Z-re nincs szükség. Ekkor a nyelv érvényes formuláit úgy generálhatjuk, hogy az érvényes $\mathcal{L}'$-formulákban a $(I_x \wedge B \wedge \neg H_x) \vee (H_x \wedge \neg B \wedge \neg I_x) \vee (\neg I_x \wedge \neg H_x)$ részformulák helyére $\mathtt{C}_x B$ formulát helyettesítünk.

Természetesen miután megoldottuk az eredeti feladatot, felvetődik egy másik kérdés is. Mivel egyes feladatokban bennszülöttként emlegetik a szigetlakókat, a kérdés az, hogy van-e olyan mondat, melyet senki sem mondhat, azaz van-e tabu a bennszülöttek számára. Matematikus megfogalmazásban ez a feladat úgy fest, hogy mely A formulákra érvényes a $\neg\mathtt{C}_x A$ formula. Ennek a feladatnak a megoldását a fejezetben ismertett eszközrendszer birtokában már az olvasóra bízzuk.

15.

Egy alkalmazás

Ebben a fejezeben felvázoljuk a korábban ismertett nyelvek egy alkalmazását.

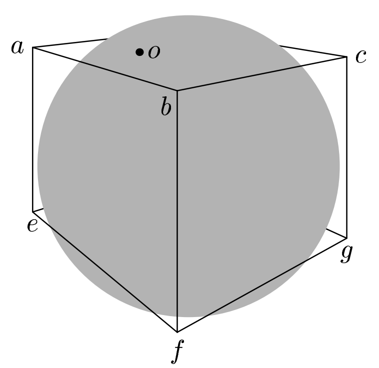
15.1. Ügynökök

A mesterséges intelligencia kutatásoknak jelenleg virágzó területe a különféle ügynökök, ágensek vizsgálata. Ezek az ügynökök lehetnek testileg is létező önálló robotok, de lehetnek csupán számítógép-programok is. Az ügynök egyik fontos tulajdonsága, hogy kapcsolatban áll a környezetével, onnan adatot gyűjt, amit majd feldolgozott formában megoszt társaival. Korábban az 1 MHz-es házi számítógépek 300 bit/s sebességű modemeken keresztül kommunikáltak. Jelenleg az 1 GHz-es számítógépek 56 kbit/s modemeket használnak ugyanerre, bár mobil kommunikáció esetén ez 9600 bit/s sebességre korlátozódik. Innen is látható, hogy rendszerint a kommunikációs csatornák jelentik az ilyen rendszerek szűk keresztmetszetét, ezért meg kell „gondolni", hogy mi az, amit mindenképp közölni kell a többiekkel, és mi az, amit csak tárolni kell.

Murphy törvénye szerint egyszer minden elromlik, s most ezt a tényt alkalmazzuk az ügynökökre. Két fajta hibát különböztetünk meg. Az elsőben az ügynök *megbízhatatlan*, azaz időnként valótlant is állíthat. A másik fajta hibás ügynök *üzemképtelen*, azaz nem állít semmit.

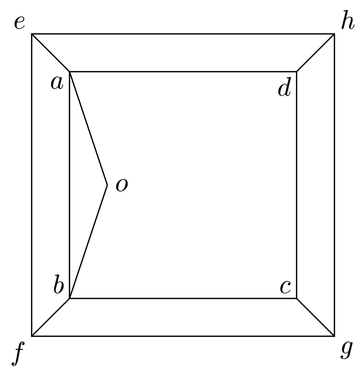
15.2. Szintaxis

A jobb érthetőség kedvéért bevezetünk egy egyszerű példát. 2001-ben mi lehetne jobb példa, mint pár mesterséges intelligenciával rendelkező, világűrben található számítógép? Legyen adott nyolc műhold a Föld körül úgy, hogy a műholdak egy képzeletbeli kocka csúcsaiban helyezkedjenek el, és csak a közös élen fekvő műholdak tudjanak egymással kommunikálni.



15.1. ábra. Műholdak a Föld körül.

Tegyük fel, hogy a műholdaknak véges sok eseményt kell követniük, melyeket a $Q_1, \ldots, Q_n$ kijelentésváltozókkal jelölünk. Azt, hogy az adott esemény teljesül-e vagy sem, a megfelelő kijelentésváltozó igaz vagy hamis értéke jelzi. A földi állomás (o) csak az a és b műholdak adását képes venni. Épp ezért a Földön rendszerint csak közvetett információt kapnak kézhez. Mivel nem mindegy, hogy az adott információ milyen úton jut le a Földre, minden átjátszóállomás hozzáfűzi az üzenethez, hogy kitől hallotta. Például egy ilyen üzenet lehet: *az a jelenti, hogy a d jelentette, hogy a h jelentette, hogy* Q_1 *teljesül.* Mire egy ilyen üzenetet az ember végigolvas, az elejét már el is felejti. Többek között ezért is formalizáljuk. Arra, hogy az x műhold az A üzetenet jelenti, használjuk a $\mathtt{S}_x A$ formulát! Az üzenetek halmaza pedig tartalmazza a kijelentésváltozókat, és legyen zárt a *mond* modális operátorra!



15.2. ábra. Kommunikációs csatornák.

Ezzel az előbb szereplő üzenet a $\mathtt{S}_a\mathtt{S}_d\mathtt{S}_h Q_1$ formában írható le. A műholdak állapotra is hivatkoznunk kell, ezért jelölje T_x, N_x és M_x rendre azt, hogy az x műhold megbízható (azaz hibátlan), megbízhatatlan, illetve hogy üzemképtelen.

Az előbbi jelölésrendszer nem véletlenül ismerős. A megbízható műholdak mindig igazat jelentenek, a megbízhatatlanok néha jelentenek valós és néha jelentenek valótlan dolgokat, az üzemképtelenek meg nem jelentenek semmit, tehát a lovagokra, a normálisakra és a némákra hasonlítanak a műholdjaink. Ezekkel a típusokkal az $\mathcal{L}^{tfnm}$ nyelvben már találkoztunk, csak ott volt F_x is. A gyakorlatban viszont nincs olyan szerkezet vagy program, amely állandóan az igazság tagadását mondaná. (Ez a mondat azért ilyen nyakatekert, mert egy pontatlan óra például állandóan hazudik a pontos időről, mégsem tekinthető lókötőnek.) Elvileg az $\mathcal{L}^{tfnm}$ nyelv is megfelelő lenne a műholdak és üzeneteik leírására, ám ekkor minden formulánál külön jelezni kellene, hogy a műholdak egyike sem hazug. E helyett inkább egy újabb nyelvet konstruálunk. A nyelv formuláinak és szemantikájának definíciója igencsak hasonlít az $\mathcal{L}^{tfnm}$ nyelv megfelelő definícióihoz, ezért most nem írjuk le. Viszont megadjuk az ehhez a nyelvhez tartozó szekventkalkulus szabályát:

$$\frac{T_x, A, \Gamma \to \Theta \ ; \ N_x, \Gamma \to \Theta}{\mathtt{S}_x A, \Gamma \to \Theta} C_9 \!\to$$

A szabály szerint akkor jelenthet valamit a műhold, ha megbízható, és az adott esemény igaz, vagy ha megbízhatatlan. A szekventkalkulus helyességének és teljességének bizonyítása és ez utóbbihoz szükséges Z formula megkonstruálása a korábbiakhoz hasonlóan történik, ezért most itt nem írjuk le.

Minden műhold meghibásodásának van valamilyen, általában kicsi valószínűsége. Ha a meghibásodásokat független eseményeknek tekintjük, akkor az együttes meghibásodások esélye egyre kisebb és kisebb lesz. Ezért gyakorlatilag ki lehet zárni, hogy a műholdak jelentős része hibás legyen. Például az egyik távközlési szervezet 10 műholdja mellett két tartalék kering a Föld körül, és további kettő vár a fellövésre.

Ha megengedjük, hogy a nyolc műholdunk közül kettő elromoljon, megvan az esélye, hogy az a és b műhold megbízhatatlanná váljék, és ekkor hiába kapjuk az üzenetek tucatjait, semmilyen következtetést nem vonhatunk le belőlük. Ezért feltesszük, hogy a nyolc műhold közül legalább hét megbízható, és egy feladaton belül egyetlen műhold állapota sem változik meg. Ezt a feltételt a következő formulával adhatjuk meg:

$$
\begin{aligned}
&(T_b \wedge T_c \wedge T_d \wedge T_e \wedge T_f \wedge T_g \wedge T_h) \vee (T_a \wedge T_c \wedge T_d \wedge T_e \wedge T_f \wedge T_g \wedge T_h) \vee \\
&(T_a \wedge T_b \wedge T_d \wedge T_e \wedge T_f \wedge T_g \wedge T_h) \vee (T_a \wedge T_b \wedge T_c \wedge T_e \wedge T_f \wedge T_g \wedge T_h) \vee \\
&(T_a \wedge T_b \wedge T_c \wedge T_d \wedge T_f \wedge T_g \wedge T_h) \vee (T_a \wedge T_b \wedge T_c \wedge T_d \wedge T_e \wedge T_g \wedge T_h) \vee \\
&(T_a \wedge T_b \wedge T_c \wedge T_d \wedge T_e \wedge T_f \wedge T_h) \vee (T_a \wedge T_b \wedge T_c \wedge T_d \wedge T_e \wedge T_f \wedge T_g)
\end{aligned}
\tag{15.1}
$$

15.3 Egyszerű feladatok

Tegyük fel, hogy a földi állomás az $\mathtt{S}_a\mathtt{S}_e Q_1$ és az $\mathtt{S}_b\mathtt{S}_f Q_1$ üzeneteket fogta, azaz két különböző forrásból is ugyanazt az információt (Q_1) kapta. Mire lehet ebből következtetni? Az 15.3. ábra bizonyításból látható, hogy az kapjuk, hogy ekkor Q_1 igaz. Ez pedig a régi igazságot látszik bizonyítani, hogy ha valamit már ketten mondanak, akkor az úgy is van. A bizonyítás összes szekventjének bal oldalát ki kellene egészíteni az 15.1 formulával, de hely hiányában nem tettük, sőt a szekventeknek is csak azt a részét írtuk fel, amely szükséges a bizonyítás megértéséhez. A bizonyításban † jelöli azokat a levélszekventeket, melyek az 15.1 vagy a korábbiakhoz hasonlóan generálható Z formula felbontásával válnak axiómává.

$$T_e, Q_1, T_a, \mathtt{S}_b\mathtt{S}_f Q_1 \to Q_1$$

$$T_f, Q_1, T_b, N_e, T_a \to Q_1$$

$$\dagger\ N_f, T_b, N_e, T_a \to Q_1$$

$$T_b, \mathtt{S}_f Q_1, N_e, T_a \to Q_1$$

$$\dagger\ N_b, N_e, T_a \to Q_1$$

$$N_e, T_a, \mathtt{S}_b\mathtt{S}_f Q_1 \to Q_1$$

$$T_a, \mathtt{S}_e Q_1, \mathtt{S}_b\mathtt{S}_f Q_1 \to Q_1$$

$$T_f, Q_1, T_b, N_a \to Q_1$$

$$\dagger\ N_f, T_b, N_a \to Q_1$$

$$T_b, \mathtt{S}_f Q_1, N_a \to Q_1$$

$$\dagger\ N_b, N_a, \mathtt{S}_b\mathtt{S}_f Q_1 \to Q_1$$

$$N_a, \mathtt{S}_b\mathtt{S}_f Q_1 \to Q_1$$

$$\mathtt{S}_a\mathtt{S}_e Q_1, \mathtt{S}_b\mathtt{S}_f Q_1 \to Q_1$$

$$\to \mathtt{S}_a\mathtt{S}_e Q_1 \wedge \mathtt{S}_b\mathtt{S}_f Q_1 \supset Q_1$$

15.3. ábra. Két független forrásból származó azonos üzenet.

Ha a két üzenet $\mathtt{S}_a\mathtt{S}_e Q_1$ és $\mathtt{S}_a\mathtt{S}_d\mathtt{S}_h Q_1$ lett volna, akkor ebből a két üzenetből még nem következik, hogy Q_1 teljesül (15.4. ábra) Nem írtuk le az egész bizonyítást, csak a kritikus ágat. Ebben az esetben egy forrásból (az a műholdtól) kaptuk mindkét információt, s nincs kizárva, hogy az a megbízhatatlan.

$$\boxed{\cdots}$$

$$\boxed{\begin{array}{c} \boxed{\cdots} \\ \boxed{N_a \to Q_1} \\ N_a, \mathtt{S}_a\mathtt{S}_d\mathtt{S}_h Q_1 \to Q_1 \end{array}}$$

$$\mathtt{S}_a\mathtt{S}_e Q_1, \mathtt{S}_a\mathtt{S}_d\mathtt{S}_h Q_1 \to Q_1$$
$$\to \mathtt{S}_a\mathtt{S}_e Q_1 \wedge \mathtt{S}_a\mathtt{S}_d\mathtt{S}_h Q_1 \supset Q_1$$

15.4. ábra. Két függő forrásból származó azonos üzenet.

Érdekesebb a helyzet, ha két forrásból két egymásnak ellentétes értelmű állítást kapunk, mondjuk a $\mathtt{S}_a\mathtt{S}_e Q_1$ és $\mathtt{S}_b\mathtt{S}_f \neg Q_1$ üzeneteket (15.5. ábra). Ha azokat a szekventeket tekintjük, melyek még nem axiómák, akkor mindegyikük közös tulajdonsága, hogy bal oldalukon az szerepel, hogy a feladatban megemlített valamelyik műhold megbízhatatlan. Ennek alapján az $N_a \vee N_b \vee N_e \vee N_f$ formula írható a kérdőjel helyére, mert ez a következménye a feltételeknek.

Ha az előbbi két üzenetet kiegészítjük a $\mathtt{S}_a\mathtt{S}_d Q_2$ és $\mathtt{S}_b\mathtt{S}_c Q_2$ üzenetekkel, akkor tudni fogjuk, az első példánkhoz hasonlóan, Q_2 teljesül. Mivel korábbról tudjuk, hogy a hibás, pontosabban a megbízhatatlan műhold az a, b, e és f műholdak egyike, így a c és a d műhold csakis megbízható lehet.

Ha az utolsó üzenet a $\mathtt{S}_b\mathtt{S}_c \neg Q_2$ lett volna, akkor nem tudnánk bizonyítani a Q_2 teljesülését, viszont az kiderült volna, hogy a megbízhatatlan műhold csakis az a vagy a b lehet.

Ezek után távolodjunk el a Földtől, és nézzük meg, mire a képesek a műholdak!

15.4 Hibadetektálás

Sok kérdés felmerülhet a műholdakkal kapcsolatban, ám mi most csak arra koncentrálunk, hogy hogyan tudja egy műhold informálni a földi személyzetet arról, hogy ő, vagy egy másik műhold elromlott; valamint mennyire tudja ezt eltitkolni.

Az üzenetek definíciója alapján műholdjaink egyszerű átjátszóállomásként működnek, mert földi megfigyelés mellett csak a többiek üzeneteit továbbíthatják. Ha az a műhold megbízhatatlanná válik, akkor két üzenettel be tudja látni, hogy vagy ő, vagy egy szomszédja megbízhatatlan: $\mathtt{S}_a\mathtt{S}_d Q_1$ és $\mathtt{S}_a\mathtt{S}_d \neg Q_1$. Ugyanezt egy másik szomszédra is eljátszva, négy üzenettel megmutathatja, hogy megbízhatatlan. Ha az a és b műhold nem csak a többiek üzeneteit sugározza a Földre, hanem földi megfigyeléseket is végez, ugyanerre két egymásnak ellentmondó megfigyelés is elegendő: $\mathtt{S}_a Q_1$ és $\mathtt{S}_a \neg Q_1$. Az a műhold azt nem tudja elérni, hogy a Földön őt mindenképp megbízhatónak tartsák, hasonlóan [41] 100. vagy 106. feladatához, ám igen sokáig kétségben tudja tartani a földi személyzetet, hogy melyik műhold is hibás.

Ha az a műhold mindenképpen el akarja titkolni megbízhatatlanságát (nehogy kivonják a forgalomból), és csak valós állításokat továbbít (azaz csak névleg megbíz-

$$T_f, T_b, T_e, Q_1, T_a \to ?, Q_1$$
$$T_f, \neg Q_1, T_b, T_e, Q_1, T_a \to ?$$
$$N_f, T_b, T_e, Q_1, T_a \to ?$$
$$T_b, \mathtt{S}_f \neg Q_1, T_e, Q_1, T_a \to ?$$
$$N_b, T_e, Q_1, T_a \to ?$$
$$T_e, Q_1, T_a, \mathtt{S}_b \mathtt{S}_f \neg Q_1 \to ?$$
$$T_f, \neg Q_1, T_b, N_e, T_a \to ?$$
$$\dagger\ N_f, T_b, N_e, T_a \to ?$$
$$T_b, \mathtt{S}_f \neg Q_1, N_e, T_a \to ?$$
$$\dagger\ N_b, N_e, T_a \to ?$$
$$N_e, T_a, \mathtt{S}_b \mathtt{S}_f \neg Q_1 \to ?$$
$$T_a, \mathtt{S}_e Q_1, \mathtt{S}_b \mathtt{S}_f \neg Q_1 \to ?$$
$$T_f, \neg Q_1, T_b, N_a \to ?$$
$$\dagger\ N_f, T_b, N_a \to ?$$
$$T_b, \mathtt{S}_f \neg Q_1, N_a \to ?$$
$$\dagger\ N_b N_a, \mathtt{S}_b \mathtt{S}_f \neg Q_1 \to ?$$
$$N_a, \mathtt{S}_b \mathtt{S}_f \neg Q_1 \to ?$$
$$\mathtt{S}_a \mathtt{S}_e Q_1, \mathtt{S}_b \mathtt{S}_f \neg Q_1 \to ?$$
$$\to \mathtt{S}_a \mathtt{S}_e Q_1 \wedge \mathtt{S}_b \mathtt{S}_f \neg Q_1 \supset ?$$

15.5. ábra. A Két ellentétes üzenet.

hatatlan), akkor nem lehet rábizonyítani megbízhatatlanságát. Ha viszont egyszer már elszólta magát, azaz valótlan megfigyelésről adott hírt, akkor a b műhold a valós megfigyelést továbbítva, az üzenetekben szereplő műholdakra tudja leszűkíteni a megbízhatatlanok körét, mint azt az előbb az $\mathtt{S}_a\mathtt{S}_e Q_1$ és az $\mathtt{S}_b\mathtt{S}_f\neg Q_1$ üzeneteknél láttuk. Speciális esetben, egy az a és a b műholdról is megfigyelhető eseményt választva, az $\mathtt{S}_a\neg Q_2$ és $\mathtt{S}_b Q_2$ üzenetek alapján vagy az a vagy a b műhold lehet a megbízhatatlan.

Ha egy harmadik műhold lesz megbízhatatlan, akkor annak elszólásait lehet kihasználni, és az alapján behatárolni a megbízhatatlan műholdat. Ha például a g műhold a megbízhatatlan, és a $\mathtt{S}_b\mathtt{S}_c\mathtt{S}_g Q_3$ és $\mathtt{S}_b\mathtt{S}_f\mathtt{S}_g\neg Q_4$ elszólásait a $\mathtt{S}_a\mathtt{S}_e\mathtt{S}_h\neg Q_3$ és $\mathtt{S}_a\mathtt{S}_d\mathtt{S}_h Q_4$ üzenetekkel hasonlítjuk össze, akkor egyrészt az a, b, c, e, g és h; másrészt az a, b, d, f, g és h műholdak között kell keresni a megbízhatatlant, azaz az a, b, g és h műholdak egyik az. A g műhold egy harmadik elszólása, melyet nem a h műhold továbbít, tisztázni fogja h-t.

Ha nem köteles minden műhold rendszeresen jelentést küldeni, akkor az üzeneteket nem küldő műholdról nem fog kiderülni, hogy üzemképtelen, megbízhatatlan, vagy megbízható; így a többiekről sem, hogy megbízhatóak, és ezért a meg nem erősített megfigyelésekről nem tudhatunk meg semmit.

Éppen ezért bővítsük az üzenetek fogalmát, legyen T_x, N_x és M_x is üzenet! Ez annak felel meg, hogy a műholdak (értelem szerint csak a szomszédosak) képesek egymás kontrollálására, azaz tudják, hogy a másik mikor és hogyan romlik el. A definíció elvileg megengedi az önvizsgálatot is. Ez alapján a műhold rendszeresen küldheti azt az üzenetet magáról, hogy minden rendben van ($\mathtt{S}_x T_x$), ám ennek nem kell hinni, mert ez egyedül azt bizonyítja, hogy az adott műhold nem üzemképtelen.

Az önkritikával rendelkező megbízhatatlan műhold mondhatja magáról, hogy megbízhatatlan ($\mathtt{S}_x N_x$), és ekkor ezt el is lehet hinni neki. Ugyancsak a műhold megbízhatlansága a következménye annak, ha a műhold saját üzemképtelenségét jelenti. Ha nem közvetlenül kapjuk ezeket az információkat, akkor például $\mathtt{S}_a\mathtt{S}_d\mathtt{S}_h N_h$ üzenetből csak annyi deríthető ki, hogy az üzenetet küldő és továbbító műholdak, azaz esetünkben a, d és h egyike megbízhatatlan.

Ha az a és a b műhold egyike lesz megbízhatatlan, akkor a megbízhatatlan műhold elszólása nélkül nem derithető ki, hogy melyik a hibás, de könnyedén erre a két műholdra terelheti a gyanút közülük a megbízható, például az a műhold az $\mathtt{S}_a N_b$ üzenettel.

Egy harmadik műhold hibás voltának belátásához már nem kell annak elszólnia magát, elegendő, ha erről a hibáról két egybehangzó megfigyelést kapunk, például a $\mathtt{S}_a\mathtt{S}_d\mathtt{S}_h N_g$ és $\mathtt{S}_b\mathtt{S}_f N_g$ üzeneteknek az a következménye, hogy a g műhold megbízhatatlan.

A példákat hosszasan lehetne még sorolni, ám talán már ennyiből is látszik, hogy ezt a nyelvet használva be lehet határolni a hiba helyét. A hálózat felépítéséről, robusztusságáról is nyerhetünk információkat, például megvizsgálhatjuk, hogy egy üzenetet valamely műhold megváltoztathat-e úgy, hogy arra ne derüljön fény.

Ahhoz, hogy ez a logika a gyakorlatban is használható legyen, még ki kell bővíteni a kérdezés lehetőségével, és a válaszolás kényszerével. A szerző jelenleg ezen dolgozik.

16.
Utószó

A dolgozat ezzel végetért, de a kutatás nem állhat meg. Az alábbiakban felsorolunk pár, felfedezésre váró területet, majd köszönetet mondunk azoknak, akik nélkül ez a dolgozat nem készülhetett volna el. Végül megválaszolunk egy korábbi kérdést.

16.1. További kutatási irányok

- A dolgozatban igen sok, egymásra hasonlító logikai nyelvet használtunk fel, hogy formalizáljuk a fejtörőket. Valószínűleg egy közös keretbe lehetne ágyazni az összes nyelvet, és egy egységes módszerrel lehetne megoldani Smullyan összes fejtörőjét. Például a igazmondók és hazugok szigetének szabályait a

$$\forall x \forall A (I_x \vee H_x) \wedge (I_x \wedge \mathtt{C}_x A \supset A) \wedge (H_x \wedge \mathtt{C}_x A \supset \neg A) \tag{16.1}$$

  formula írhatná le. Egy fejtörő megoldásának ellenőrzéséhez azt kellene eldönteni, hogy a feladat és megoldásának formalizáltja logikai következménye-e az 16.1 formulának.
- A szerző által írt automatikus tételbizonyító programok megléte mellett a fejtörők megoldásához még emberi segítség szükséges, mivel csak a feladatok formalizált alakjait képesek a programok feldolgozni; illetve a megoldásokat is embernek kell természetes nyelvi válaszokká alakítani. (Ez utóbbi a harmadik típusú feladatoknál lényeges.) Érdekes kutatási terület a magyar nyelven leírt fejtörők automatikus formalizálása, illetve a program által generált megoldás alapján a fejtörő eredeti kérdésére ékes magyar nyelvű válaszok generálása.
- Meg lehet vizsgálni, hogy a bevezetőben említett QBF formulák használata segíti-e a fejtörők megoldását.
- A 10. fejezetben szerepelt, hogy a *mondta* és *mondhatja* között létezik egy implikatív kapcsolat ($\mathtt{S}_x B \supset \mathtt{C}_x B$). Míg az $\mathcal{L}_s^{tf}$ egy igen „szegény", az $\mathcal{L}^{tf}$ pedig egy igen „gazdag" nyelv, ezért felmerül az a kérdés, hogy a *mondta* és *mondhatja* között van-e valami, azaz létezik-e olyan $\mathtt{I}_x$ modális operátor, melyre $\mathtt{S}_x B \supset \mathtt{I}_x B$ és $\mathtt{I}_x B \supset \mathtt{C}_x B$ teljesül. Ha igen, akkor ezt hogy érdemes elnevezni? További kérdés lehet az, hogy ha létezik, akkor hány ilyen $\mathtt{I}_x$ létezik, és közöttük milyenek a kapcsolatok. (Valószínűleg az előbbi kérdésre válasz *igen*, és az egyik lehetséges elnevezés az *informál* vagy *közöl*).
- A 13. fejezetben ismertetett módszerek a fejtörők összes megoldását megadják, melyek között igen bonyolultak is szerepelnek. A gyakorlati életben a legegyszerűbb megoldások az érdekesek. Az esetleg több ezer megoldás generálása, s utána közülük a legegyszerűbb kiválasztása nem hatékony módszer. Az egy ismeretlen részformulára visszavezethető feladatok esetén, mindkét módszernél a megoldásokat felírhatjuk egy speciális táblázatba (Karnaugh map), s a módszerek által nem meghatározott rublikákat határozatlannak (don't care) tekintve a standard eljárással a legrövidebb d.n.f. alakú megoldáshoz juthatunk. (Ugyanerre az eredményre vezet a Quine-McCluskey módszer is) Viszont több ismeretlen részformulát tartalmazó feladatok esetén nem ismeretes olyan módszer, mely egyszerre az összes formulát minimalizálja.

- Az előző fejezet végén szerepelt, hogy a vizsgált nyelvet ki lehet egészíteni kérdésekkel, s a válaszolás kényszerével.

16.2. Köszönetnyilvánítás

Szeretném megköszönni mindazoknak a segítségét és türelmét akik közvetlenül vagy közvetetten segítették e dolgozat elkészülését:

Szüleimnek, akik megteremtették a lehetőségét, hogy tanulhassak.

Feleségemnek és lányomnak, akik átvészelték azt az időszakot, amíg ez dolgozat elkészült.

A korán elhunyt *Dr. Dragálin Albernek*, témavezetőmnek, aki 12 éven keresztül oktatott logikára, s ő vetette fel, hogy ezekkel a fejtörőkkel foglalkozzam.

Dr. Arató Mátyásnak, aki Dr. Dragálin Albert halála után vállalta e téma vezetését, és segített eredményeim megjelentetésében.

Dr. Pásztorné Varga Katalinnak, *Dr. Várterész Magdának* és *Dr. Mihálydeák Tamásnak*, akik bármikor hajlandóak voltak végighallgatni, átolvasni a cikkeimet, és rámutatni hibás elképzeléseimre.

A korán elhunyt *Dr. Alexandar Kronnak*, akitől megtanultam, hogy a logikával filozófia nélkül nem szabad foglalkozni.

Andreas Hercignek, aki gyakorlatias gondolkodásra nevelt, és lehetőséget biztosított a toulouse-i logikai életbe bekerülni.

Tanáraimnak, kollegáimnak, akiktől sokat tanultam.

Madarász Péternek, akitől több mint 8 éve kölcsönkértem a dolgozat alapjául szolgáló [41, 42] könyveket, és még mindig nem adtam vissza.

16.3. Tabu

Mint ahogy Smullyan sem hagyott megválaszolatlanul egyetlen kérdést, adjuk meg mi is, hogy melyek azok az állítások, melyet egyetlen személy sem mondhat. Az $\mathcal{L}^{mv}$ és $\mathcal{L}^{tf}$ nyelvekben (ezért az lovag-lókötő variánsokban is) érvényes a $\neg \mathtt{C}_x A \equiv \mathtt{C}_x \neg A$ formula. Ennek alapján azokat az állításokat tagadva, melyeket mindenki mondhat, olyan állításokat kapunk, melyeket senki sem mondhat, így senki sem mondhatja, hogy ő lókötő, vagy hogy megbízhatatlan erdélyi. Mivel a némák semmit nem mondanak, ezek az állítások jók lesznek az $\mathcal{L}^{ih}$ nyelv esetén is. Ha már normális is található a nyelvben, akkor nem létezik olyan állítás, melyet senki sem mondhat. Hasonlóan a korábbiakhoz nem létezik olyan állítás sem, melyet Subidu és Subidam egyetlen nap sem mondhat.

Summary

Smullyan wrote his book [39] about the background of Gödel's theorem before the boom of theorem provers. The puzzles of this book are cited frequently in papers of Automated Theorem Proving, but nobody tried to solve all the puzzles before. One aim of this thesis to end this shortage.

In the following we shall give the categories of the puzzles and the logical languages to formulate puzzles (Subsect. 17.1). After this we show the tools we need to solve the puzzles: sequent calculi (Subsect. 17.2) and special truth-tables (Subsect. 17.3). Then we give more logical languages (Subsect. 17.4) and a method to generate special valid formulae (Subsect 17.5). Finally we show an application (Subsect 17.6).
Adam Kolany [29] classified Smullyan's puzzles into three categories:

Guess, who I am! In this case we know all the hypothesis, and we need to select a formula from a set of formulae which is a conclusion of the hypothesis.

I've forgotten what You said. (Metapuzzles) In this case we know all the hypothesis but one, which is a member of a known set of formulae. We know that an element of another set of formulae is a conclusion of the hypothesis.

What am I to say?/What shall I ask for? In this case we know the conclusion and all the hypothesis but one. We need to find the unknown hypotheses.

In the first case we need to choose from a set of formulae a formula C, for which the formula

$$H_1 \wedge \cdots \wedge H_n \supset C \tag{17.1}$$

is valid, where H_1, $\ldots H_n$ are the hypothesis are the puzzles. In the second case we need to choose from two set of formulae formulae C and H_n for which (17.1) is valid. Instead of checking the validity of Formula 17.1 we shall check its provability in sequent calculi.

To solve the puzzles in the third category we need to find an unknown formula X, for which (in the case of "What I am to say?") the formula

$$H_1 \wedge \cdots \wedge H_n \wedge C_a X \supset C \tag{17.2}$$

is valid or (in the case of "What shall I ask for?")

$$H_1 \wedge \cdots \wedge H_n \supset ((C_a X \supset C) \wedge (C_a \neg X \supset \neg C) \tag{17.3}$$

is valid, where C, H_1,…,H_n are the known conclusion, and the known hypothesis, respectively and $C_a X$ means that person a can say A.

17.1 Logical languages

To apply an automated theorem prover for the puzzles at first we need to formulate the puzzles, and for this we need suitable logical languages. Smullyan [40] and others (e.g. [22]) used propositional logic for this, but the formula associated to some of the puzzles will be extremely complicated using this method. The author constructed ten modal languages for this reason and created five more languages for his own variants

No	Language	Syntax	Semantics
1.	$\mathcal{L}_0$	F0–F3	V0-V5
2.	$\mathcal{L}^{tf}$	F0–F6	V0-V8
3.	$\mathcal{L}^{tfm}$	F0–F7	V0-V9
4.	$\mathcal{L}^{tfw}$	F0–F6, F8	V0-V8, V10
5.	$\mathcal{L}^{tfb}$	F0–F6, F9	V0-V8, V11
6.	$\mathcal{L}^{lu}$	F0–F3, F10, F11	V0-V5, V12, V14
7.	$\mathcal{L}^{luf}$	F0–F3, F5, F10, F11	V0-V5, V7, V12, V14
8.	$\mathcal{L}^{mv}$	F0–F3, F6, F7, F12	V0-V5, V9, V16, V17
9.	$\mathcal{L}^{tfn}$	F0–F3, F6, F7, F12	V0-V7, V18, V19
10.	$\mathcal{L}^{tfn'}$	F0–F3, F6, F7, F12	V0-V7, V18-V22
11.	$\mathcal{L}_s^{tf}$	F0–F5, F14	V0-V7, V23
12.	$\mathcal{L}^{tfnm}$	F0–F7, F13	V0-V7, V24, V25
13.	$\mathcal{L}^{ih}$	F0–F3, F6, F15	V0-V5, V26-V28
14.	$\mathcal{L}^{ih}$	F0–F3, F6, F15	V0-V5, V26, V27, V29
15.	$\mathcal{L}^{tfm}$	F0–F7	V0-V7, V30, V31

Table 17.1. Logical languages

of puzzles. Table 17.1 summarizes the languages. (The definitions of the rules and formulae occur in Table 17.1 and 17.2 are in the previous chapters.)

Note, that in the puzzles the word *said* or *says* occurs, but Smullyan and the others used *can say* instead at solving them. This is the reason why we shall use the modal operator *can say*, too. The paper about logic $\mathcal{L}_s^{tf}$ [8] studies the modal operator said, and shows, that we could use $\mathcal{L}_s^{tf}$ instead of $\mathcal{L}^{tf}$. Similar statement holds for the other logical languages, too. But for the sake of simplicity we shall focus on *can say* in the following. Note also that in two case the same syntax has two different semantics, so in the following we shall identify our languages with its number in the table before.

17.2 Sequent calculi

In this thesis our proving method is the sequent calculus [25] as it was defined in Definition 3.7. In almost each logic we need to extend the standard set of rules with some new rule, as the Table 17.2 shows. The method of sequent calculi is sound, i.e.

Theorem 17.1 *If the formula A is provable in sequent calculi then it is valid.*

There is sometimes some gap between the semantics and the sequent calculus. For example in the logic of knights and knaves (Logic 2) the formula $T_x \equiv \neg F_x$ is valid, but this is not provable in the calculi. To make the method complete, we need to add this extra information to the formula:

Theorem 17.2 *If the formula A is valid, then the formula $Z \supset A$ is provable.*
In the Logic 1, 8 and 14 Theorem 17.2 holds if Z is constant true, i.e. in this case we don't need Z. In the Logic 2-5, 11 and 14 Theorem 17.2 holds if formula Z is

$$\bigwedge_{x\in\mathcal{P}} ((T_x \wedge \neg F_x) \vee (\neg T_x \wedge F_x)).$$

In the Logic 6 in the case of brothers Theorem 17.2 holds if formula Z is

$$((L_a \wedge \neg L_b \wedge \neg U_a \wedge U_b) \vee (\neg L_a \wedge L_b \wedge U_a \wedge \neg U_b)).$$

In the Logic 6 in the case of Lion and Unicorn Theorem 17.2 holds if formula Z is

$$(L_a \wedge \neg L_b \wedge \neg U_a \wedge U_b).$$

In the Logic 7 Theorem 17.2 holds if formula Z is

$$\begin{array}{l}(L_a \wedge U_b \wedge F_c \wedge \neg L_b \wedge \neg L_c \wedge \neg U_a \wedge \neg U_c \wedge \neg F_a \wedge \neg F_b) \wedge \\ (L_a \wedge U_c \wedge F_b \wedge \neg L_b \wedge \neg L_c \wedge \neg U_a \wedge \neg U_b \wedge \neg F_a \wedge \neg F_c) \wedge \\ (L_b \wedge U_a \wedge F_c \wedge \neg L_a \wedge \neg L_c \wedge \neg U_b \wedge \neg U_c \wedge \neg F_a \wedge \neg F_b) \wedge \\ (L_b \wedge U_c \wedge F_a \wedge \neg L_a \wedge \neg L_c \wedge \neg U_a \wedge \neg U_b \wedge \neg F_b \wedge \neg F_c) \wedge \\ (L_c \wedge U_a \wedge F_b \wedge \neg L_a \wedge \neg L_b \wedge \neg U_b \wedge \neg U_c \wedge \neg F_a \wedge \neg F_c) \wedge \\ (L_c \wedge U_b \wedge F_a \wedge \neg L_a \wedge \neg L_b \wedge \neg U_a \wedge \neg U_c \wedge \neg F_b \wedge \neg F_c)\end{array}.$$

In the Logic 9 and 10 Theorem 17.2 holds if formula Z is

$$\bigwedge_{x \in \mathcal{P}} ((T_x \wedge \neg F_x \wedge \neg N_x) \vee (\neg T_x \wedge F_x \wedge \neg N_x) \vee (\neg T_x \wedge \neg F_x \wedge N_x)).$$

In the Logic 12 Theorem 17.2 holds if formula Z is

$$\bigwedge_{x \in \mathcal{P}} ((T_x \wedge \neg F_x \wedge \neg N_x \wedge \neg M_x) \vee (\neg T_x \wedge F_x \wedge \neg N_x \wedge \neg M_x) \vee$$

$$(\neg T_x \wedge \neg F_x \wedge N_x \wedge \neg M_x)) \vee (\neg T_x \wedge \neg F_x \wedge \neg N_x \wedge M_x)).$$

In the Logic 13 Theorem 17.2 holds if formula Z is

$$\bigwedge_{x \in \mathcal{P}} (I_x \vee F_x).$$

In the Logic 15 Theorem 17.2 holds if formula Z is

$$\bigwedge_{x \in \mathcal{P}} ((T_x \wedge \neg F_x \wedge \neg M_x) \vee (\neg T_x \wedge F_x \wedge \neg M_x) \vee (\neg T_x \wedge \neg F_x \wedge M_x)).$$

No	New Rules
2.	$\rightarrow C_1, C_1 \rightarrow$
3.	$\rightarrow C_1, C_1 \rightarrow$
4.	$\rightarrow C_1, C_1 \rightarrow$
5.	$\rightarrow C_1, C_1 \rightarrow$
6.	$\rightarrow C_1^h, \ldots \rightarrow C_1^v, C_1^h \rightarrow, \ldots C_1^v \rightarrow$
7.	$\rightarrow C_2^h, \ldots \rightarrow C_2^v, C_2^h \rightarrow, \ldots C_2^v \rightarrow$
8.	$\rightarrow C_2, C_2 \rightarrow$
9.	$\rightarrow C_3, C_3 \rightarrow$
10.	$\rightarrow C_4, C_4 \rightarrow$
11.	$S \rightarrow$
12.	$\rightarrow C_5, C_5 \rightarrow$
13.	$\rightarrow C_6, C_6 \rightarrow$
14.	$\rightarrow C_7, C_7 \rightarrow$
15.	$\rightarrow C_8, C_8 \rightarrow$

Table 17.2. Extra rules for sequent calculi

17.3 "What I am to say?"

17.3.1 First method

Consider the following puzzle whose solution is well-known:

> *In a cell there are two doors. If we choose the right one we get free, but in the other case we will die. There are two guards in the cell, one of them always tells the truth, the other always lies. We can put a yes-no question to one of them before we choose a door. What is the right question?*

We shall formalize this example in the Logic 2 as follows: Let the propositional letter D denote that the left door is the right one, and call the guards a and b. We would like to get a formula X such that if we ask the guard "Is it true that X?" then he answers "yes" if the left door is the right one (D), and he answers "no" if the right door is the right one ($\neg D$).

We can formulate the puzzle as $\neg(T_a \equiv T_b) \supset (C_a X) \equiv D)$. The puzzle has a solution, if this formula is valid for some formula X. By constructing the tableau of this formula we should obtain that the following two formulae are valid:

$$\underbrace{\big((T_a \wedge \neg T_b \wedge \neg D) \vee (\neg T_a \wedge T_b \wedge D)\big)}_{E} \supset X$$

$$X \supset \neg \underbrace{\big((\neg T_a \wedge T_b \wedge \neg D) \vee (T_a \wedge \neg T_b \wedge D)\big)}_{F}$$

Note that we separated the conjunctions containing X and its negation, and we treat the formula X as atomic at this stage. These two formulae $E- > X$ and $X- > F$ can be treated as a formulae of propositional logic, and by the Craig interpolation theorem, if formula $E \supset \neg F$ is valid, then there is a solution. Smullyan gave a constructive method [38] to find the interpolant, but we now construct the solutions with truth-tables.

Let us build a truth-table (Table 17.3), where the rows belongs to the different valuations of propositional letters of E and F. Now propositional letters are T_a, T_b and D. The truth-table has three columns respectively for E, X and $\neg F$. Let us fill the columns of E and $\neg F$ according to the valuations. For each row let us do the following:

1) If the column of E contains 1 then write 1 into the column of X.
2) If the column of $\neg F$ contains 0 then write 0 into the column of X.

If these two rules contradict each other then there doesn't exist a suitable X, therefore the puzzle has no solution, and we can stop. With these two rules we need to fill four places (marked with arrows). The remaining four places (marked with a, b, c and d) can be filled arbitrary, so we have 16 different solutions.

Let us compose the formula X according to the truth-table in a standard way.

T_a	T_b	D	E	X	$\neg F$
1	1	1	0	a	1
1	1	0	0	b	1
1	0	1	0	0 $\leftarrow$	0
1	0	0	1	$\rightarrow$ 1	1
0	1	1	1	$\rightarrow$ 1	1
0	1	0	0	0 $\leftarrow$	0
0	0	1	0	c	1
0	0	0	0	d	1

Table 17.3. Solution of the puzzle of Door of Freedom.

At first let us choose the following values: $a = d = 1$ and $b = c = 0$. Then the synthesized form of the formula X will be the following:

$$(T_a \wedge T_b \wedge D) \vee (T_a \wedge \neg T_b \wedge \neg D) \vee (\neg T_a \wedge T_b \wedge D) \vee (\neg T_a \wedge \neg T_b \wedge \neg D).$$

This formula can be simplified in different ways, and each variant corresponds to an English sentence:

- $\neg(T_b \equiv D)$:
  - "It isn't true, that the other guard is a knight iff the left door is the right one?"
- $\neg T_b \equiv D$:
  - "The other guard is a knave iff the left door is the right one?",
  - "The other guard could say the left door isn't the right one?" or
  - "The other guard could say the right door is the right one?"

If we set $a = d = 0$, $b = c = 1$ then the formula X will be the following:

$$(T_a \wedge T_b \wedge \neg D) \vee (T_a \wedge \neg T_b \wedge \neg D) \vee (\neg T_a \wedge T_b \wedge D) \vee (\neg T_a \wedge \neg T_b \wedge D). \qquad (17.4)$$

Hence we have two more solutions:

- $T_a \equiv D$:
  - "Are you a knight iff the left door is the right one?" or
  - "Could you answer 'yes' if I ask you 'the left door is the right one'?"

THEOREM 17.3 *Formula 17.2 is valid for some formula X iff the first method constructs X.*

A similar statement holds for Formula 17.3.

17.3.2 Second method

The first method has some restrictions:

- the original formula must be valid,
- we can have exactly one unknown formula, or the other unknown formulae must drop out at simplification.

Some of Smullyan's puzzles contain more unknown sentences. By formalizing we get more unknown formulae, so the former method is unusable. To solve these puzzles we need a new method based on the fact that the unknown formulae are logical combinations of the propositional letters. We build a special truth-table which has 2^n rows and 2^m columns according to the n propositional letters and m unknown formulae. Let us construct this truth-table (Table 17.4) for the previous example!

			$\neg(T_a \equiv T_b) \supset ((T_a \equiv X) \equiv D)$	
T_a	T_b	D	$(X = 1)$	$(X = 0)$
1	1	1	1	$1'$
1	1	0	$1'$	1
1	0	1	$1'$	0
1	0	0	0	$1'$
0	1	1	0	$1'$
0	1	0	$1'$	0
0	0	1	$1'$	1
0	0	0	1	$1'$

Table 17.4. Another solution of the puzzle of Door of freedom.

We can see that if T_a, $\neg T_b$ and D are true then the formula X must be true, too (third row). To get the solution we need to choose exactly one "1" from each row. If one row doesn't contain "1", then the original formula cannot be valid, so there is no solution. If there are more "1" in one row, then we can choose arbitrarily, and we have several solutions. If we choose the ones marked with $'$ then we get back our previous solutions.

The synthesis of the unknown formula is similar as before, we need to take the ones we choosed and are in the column where the unknown formula has value 1 and construct a d.n.f. where each conjunction corresponds to the values of the atomic variables. By choosing the marked ones, the formula X will be (17.4).

Let us examine a puzzle ([39, Puzzle 173]) where there are more unknown variables!

> *The converse of a statement "If P then Q" is the statement "If Q then P". Now, there exist two statements X, Y, which are converses of each other and such that:*
>
> *1) Neither statement is deducible from the other.*

2) *If a Transylvanian makes either one of the statements, it follows that the other one must be true.*
Can you supply two such statements?

We prefer the unrelated unknown formulae, so we shall denote by X and Y the antecedent and the succedent part of the unknown sentences. We cannot express the Restriction 1 by a logical law, so we solve the puzzle without it, and we shall check afterwards whether the solution fulfills this restriction or not. Note that this is a Transylvanian puzzle, so we shall use Logic 8 to formulate it.

		$\big(C_a(X \supset Y) \supset (Y \supset X)\big) \wedge \big(C_a(Y \supset X) \supset (X \supset Y)\big)$			
		$(X = 1)$		$(X = 0)$	
		$(Y = 1)$	$(Y = 0)$	$(Y = 1)$	$(Y = 0)$
V_a	M_a	$1'$	0	0	1
$\neg V_a$	M_a	1	$1'$	1	1
V_a	$\neg M_a$	1	1	$1'$	1
$\neg V_a$	$\neg M_a$	1	0	0	$1'$

Table 17.5. Solution of Puzzle 173.

On the Table 17.5 the are 2, 4, 4 and 2 "1" in the rows so we have $2 \times 4 \times 4 \times 2 = 64$ solution candidates. We need to check whether they fulfill the Restriction 1 or not. We left it to the reader to check them but we marked one solution. To get the formula X we need to collect the marked numbers from the columns where $X = 1$, they are in the first and the second row. Hence $X \sim (V_a \wedge M_a) \vee (\neg V_a \wedge M_a) \sim M_a$. To get the formula Y we need to collect the marked numbers from the columns where $Y = 1$, they are in the first and the third row. Hence $Y \sim (V_a \wedge M_a) \vee (V_a \wedge \neg M_a) \sim V_a$. Therefore our solution is the following: "If I am a vampire then I am sane." and "If I am sane then I am a vampire." These formulae satisfies Restriction 1, so they are solutions of the puzzle.

THEOREM 17.4 *Formula 17.2 is valid for some formula X iff the second method construct X supposing X is logical combination of atomic formula $p_1, \ldots, p_n$ and the rows of the truth-table are determined (at least) by $p_1, \ldots, p_n$.*

A similar statement holds for Formula 17.3.

17.4 Variants

17.4.1 A non-normal modal logic

As we noted in the first subsection the knight-knave puzzles can be solved in Logic 11, too, where instead of the modal operator *can say* the modal operator *said* occurs.

To construct the semantics of the logic of *said*, we need to attach statements to persons. One solution can be to give the set of pairs (x, B), (where the person x said the statement B) but in this case we need correspondence between this set and ϑ_T, where ϑ_T is a classification of the persons. Traditionally we are using independent parts at defining semantics, so we shall use another solution: Let ϑ_U be a subset of $\mathcal{P} \times \mathcal{F}$, and ${}_\vartheta\models S_x B$ iff $((x, B) \in \vartheta_U$ and ${}_\vartheta\models C_x B)$. Note that we have no any requirement for set ϑ_U, but it would be natural to say, that the set $\{B \| (x, B) \in \vartheta_U\}$ is finite for each inhabitant, because everybody can state only finitely statements.

If somebody didn't say a sentence B, then we have no information whether he cannot say B, or he can say B, but just for some reason he didn't. This is the reason why we have no $\to S$ rule in the sequent calculus.

If we extend the traditional rule-set with $\to S$ and apply them as usual, then we cannot prove $S_x B \supset S_x B$ (Table 17.6).

$$\boxed{T_x, B \longrightarrow S_x B}$$
$$\boxed{F_x \longrightarrow B, S_x B}$$
$$S_x B \longrightarrow S_x B$$
$$\longrightarrow (S_x B \supset S_x B)$$

Table 17.6. We cannot continue this proof.

We can make our sequent calculus complete by introducing a restriction:

We can apply the rule $S \to$ if

- $S_x A \notin \Theta$
- *The formula $S_x A$ has the highest degree in the sequent (not counting the formulae of the form $S_y B$ in Θ, where $y \in \mathcal{P}$)*

Note that the degree of a formula is the number of connectives it contains.

Table 17.7 shows, that in this logic the property K doesn't hold.

$$\boxed{T_x, B, A \longrightarrow S_x B}$$
$$\boxed{\dots}$$
$$T_x, B, S_x A \longrightarrow S_x B$$
$$\boxed{\dots}$$
$$T_x, A \supset B, S_x A \longrightarrow S_x B$$
$$\boxed{\dots}$$
$$S_x A, S_x(A \supset B) \longrightarrow S_x B$$
$$S_x A \wedge S_x(A \supset B) \longrightarrow S_x B$$
$$\longrightarrow S_x A \wedge S_x(A \supset B) \supset S_x B$$

Table 17.7. K doesn't hold.

Note also that in this logic the rule of extensionality doesn't hold, too. Finally note that by using a similar method we could construct similar variants of Logic 2-10 and 12-15. These new logics lack the property K and the rule of extensionality, too.

17.4.2 Knights, knaves and the others

In Smullyan's book [39] the knights always tell the truth. Consequently they cannot say false statements. Smullyan does not mention any taboo in his puzzles, so we can assume that the knights can say any true statement. For the knaves the opposite holds, so they can say any false statement and cannot say any true statement. We can arrange our information in columns:

	can say false statements	can say no false statements
can say true statements		knights
can say no true statements	knaves	

Later Smullyan introduced a third type of islanders: the normals, who sometimes tell the truth and sometimes lie. If we put this type into the table one slot will remain empty. To fill this gap we need a new type of islanders, who cannot say anything; hence we call them mutes. So the complete table is the following:

	can say false statements	can say no false statements
can say true statements	normals	knights
can say no true statements	knaves	mutes

In Logic 12 we can formulate this scenario.

When Albert G. Dragalin showed me at first time the Smullyan's puzzles he used his Russian translation of [39]. The original text is the following: *It is assumed that every inhabitant is either a knight or a knave.* He translated to me the corresponding Russian text to Hungarian as: *every inhabitant is a truthteller or a liar.* In Logic 13 we can formulate this scenario, and with the same syntax in Logic 14 the previous one.

If we call knights truthtellers who aren't liars, knaves the liars who aren't truthtellers, and mutes the persons who are truthtellers and liars, then this closes up the line of logics of puzzles. If we denote the knights, knaves, normals and mutes with T, F, N and M, respectively, then we can draw Figure 17.1.

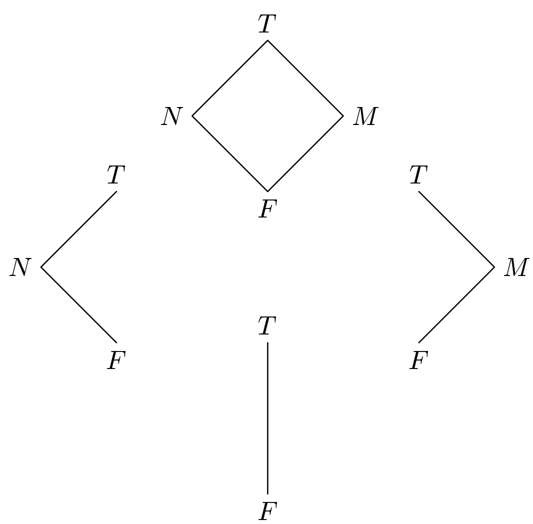


Figure 17.1. The variants of the logical languages

If we treat T as 1 and F as 0 then the four figures are subalgebras of the "diamond algebra". The lower figure corresponds to the logic of knights and knaves (Logic 2), and the right one to the logic of knights, knaves and normals (Logic 9). The logic of other figures originate from the author's work (Logic 12 and 15).

17.5 Generation of valid formulae

Based on Logic 2 we can construct a new propositional logical language $\mathcal{L}'$, in which the set of atomic formulae is $\mathcal{S} \cup \{T_x | x \in \mathcal{P}\}$. Let $'$ be a function assigning $\mathcal{L}'$ formulae to formulae of Logic 2 as follows:

$$\begin{aligned} p' &= p, \text{ if } p \in \mathcal{S} \\ (T_x)' &= T_x \\ (F_x)' &= \neg T_x \\ (\neg A)' &= \neg A' \\ (A \triangle B)' &= A' \triangle B' \\ (C_x A)' &= T_x \equiv A' \end{aligned}$$

For this function the following theorem holds:

THEOREM 17.5 *The formula A of Logic 2 is valid iff formula A' of $\mathcal{L}'$ is valid*

Note that function $'$ isn't bijective, for example $(C_x A)'$ and $(T_x \equiv A)'$ are the same. $\mathcal{L}'$ can be treated as a sublanguage of Logic 2. Then we can construct valid formulae of Logic 2 that are not in $\mathcal{L}'$ by replacing subformulae $\neg T_x / T_x \equiv A$ of a valid $\mathcal{L}'$-formula with $F_x / C_x A$. For example from the valid $\mathcal{L}'$-formula $T_x \equiv ((T_x \equiv B) \equiv B)$ we can get $T_x \equiv ((C_x B) \equiv B)$, $C_x((T_x \equiv B) \equiv B)$ and $C_x(C_x B \equiv B)$ valid formulae of Logic 2.

According to Smullyan's puzzles the following problem arises: What are the sentences that every inhabitant can say? We can ask this question as: Which formulae of Logic 2 of the form $C_x A$ are valid?

It is easy to check that infinitely many such formulae exist. For example from $T_x \equiv T_x$, $T_x \equiv \neg(\neg T_x)$, $T_x \equiv (T_x \equiv \top)$ and $T_x \equiv (T_x \equiv (T_y \equiv T_y))$ valid $\mathcal{L}'$-formulae we can get $C_x T_x$, $C_x \neg F_x$, $C_x C_\top$ s $C_x C_x C_y T_y$ valid formulae of Logic 2. Hence every inhabitant can say, that *he is a knight*, *he isn't a knave*, *he can say, that two times two is four* and *he can say, that another inhabitant can state about himself that he is a knight*.

We can answer the question in the case of other logics, too. Note that until now we used the fact that $T_x \equiv \neg F_x$ which is not valid in general. If we drop this and the function $'$ maps atomic formulae to itself (for example $(F_x)'$ is F_x), then the following theorem holds, where Z is the same formula as in Subsect. 17.2.

THEOREM 17.5 *The formula A is valid iff formula $Z \supset A'$ of $\mathcal{L}'$ is valid*

In the special case of Lion and Unicorn (Logic 6) from Theorem 17.5 it follows, that both animals can say statement A on Mondays iff $U_x \equiv A$. Similarly they can say statement A on Wednesdays iff $\neg U_x \equiv A$. Hence it follows that there is no such statement (in Logic 6) that both of them can say at any time.

In real life it is implausible that there are agents similar to the knaves of the puzzles. More likely they are similar to knights (reliable), normals (unreliable) and mutes [2] (dead agent). In the puzzles all the habitants know the type of the others, hence they know what the others can say. In real life the agents can ignore whether another agent is reliable. So they don't know what the others can say, but they know what the others said if they observe the utterance.

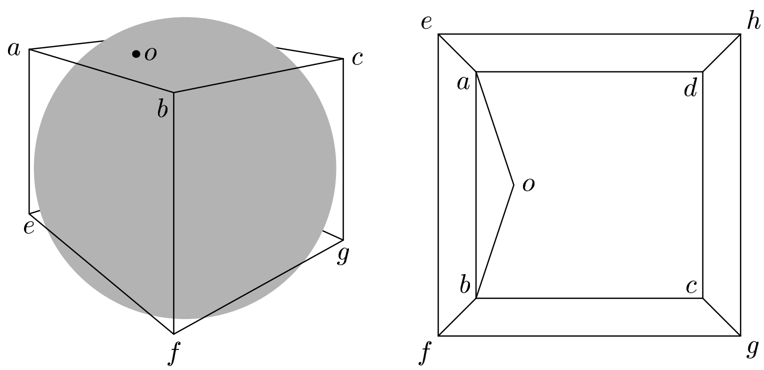


Figure 17.2. The satellites around the Earth

In our toy-example there are eight agents and an observer (o). Only the adjacent agents can communicate. The adjacent agents are connected with a line in Fig. 17.2. We suppose that at most one of the agents isn't reliable. The agents report about facts we denote with Q, R, ...

If the observer gets the following messages: S_aS_eQ and S_bS_fQ, then he can conclude that Q is true. If the messages are S_aS_eQ and $S_aS_dS_hQ$ then from these o cannot conclude that Q is true, because the agent a can be unreliable and in this case we cannot get information from his reports. If the messages are S_aS_eQ and $S_bS_f\neg Q$ then we have no information about Q, but we know that one of agent a, b, e and f is unreliable. If we have two more messages: S_aS_dR and $S_bS_c\neg R$, then we know that only agent a or agent b can be unreliable.

An extension of the logic of this section is discussed in [10].

18.

Tárgymutató

19. Irodalomjegyzék

[1] Rodolphe Arthaud, Pierre Bieber, Luis Farinas Del Cerro, Jean Henry, and Andreas Herzig. *Molog - Manuel d'utilisation.* Universite Paul Sabatier, Toulouse, février 1986.

[2] László Aszalós. The Logic of Knights, Knaves, Normals and Mutes. *Acta Cybernetica*, 14:533–540, 2000.

[3] László Aszalós. A Method to Solve the Puzzles of Knights and Knaves. Publi. Math., Debrecen, közlésre beadva, 2000.

[4] Aszalós László. Smullyan logikai rejtvényei és automatikus megoldásuk. Technical Report 2000/14, Matematikai és Informatikai Intézet, Debreceni Egyetem, 2000.

[5] László Aszalós. Automated Puzzle Solving. Journal of Applied Non-Classical Logic, Toulouse, közlésre beadva, 2001.

[6] László Aszalós. Automated Solution of the Riddle of Dracula and Other Puzzles. In Rajeev Goré, Alexander Leitsch, and Tobias Nipkow, editors, *Proc. Int. Joint Conf. on Automated Reasoning (IJCAR'01)*, pages 1–10, Siena, June 2001.

[7] László Aszalós. Four type of inhabitants. Technical Report 267, Institute of Mathematics and Informatics, University of Debrecen, Hungary, 2001.

[8] László Aszalós. Said and Can Say in Puzzles of Knights and Knaves. In B. Chaib-draa and P. Enjalbert, editors, *Proc. 1ères Journées Francophones des Modèles formels pour l'interaction*, volume 3, pages 353–362, Toulouse, May 2001.

[9] László Aszalós. Truthtellers and liars. 2001.

[10] László Aszalós and Andreas Herzig. Reasoning about Failure. In *Workshop Notes of Engieneering Societies in the Agents' World*, pages 67–78, Prague, July 2001. LNAI 2203 közlésre elfogadva.

[11] J. C. Baillif. *Logikai sziporkák.* Gondolat, Budapest, 1989.

[12] N. D. Belnap. A useful four-valued logic. In G. Epstein and J. M. Dunn, editors, *Modern Uses of Multiple-Valued Logic*, pages 5–37. Reidel, Dordrecht, 1977.

[13] Marco Cadoli, Andrea Giovanardi, and Marco Schaerf. An algorithm to evaluate quantified Boolean formulae. In *AAAI-98/IAAI-98 Proceedings (Madison, WI, 1998)*, pages 262–267, Cambridge, MA, 1998. MIT Press.

[14] Rudolf Carnap. *Meaning and Necessity: a Study in Semantics and Modal Logic.* University of Chicago Press, Chicago, 1947.

[15] Brian F. Cellas. *Modal logic: an introduction.* Cambridge University Press, Cambridge, 1980.

[16] Luis Fariñas del Cerro, David Fauthoux, Olivier Gasquet, Andreas Herzig, Dominique Longin, and Fabio Massacci. Lotrec: The Generic Tableau Prover for Modal and Description Logics (system abstract). In *Proc. Int. Joint Conf. on Automated Reasoning (IJCAR'01)*, Siena, June 2001.

[17] Gregory J. Chaitin. *The unknowable*. Springer-Verlag Singapore, Singapore, 1999.

[18] Ferdinando Cicalese and Ugo Vaccaro. An improved heuristic for the "Ulam-Rényi game". *Inform. Process. Lett.*, 73(3-4):119–124, 2000.

[19] Ferdinando Cicalese and Ugo Vaccaro. Optimal strategies against a liar. *Theoret. Comput. Sci.*, 230(1-2):167–193, 2000.

[20] Robert Demolombe. To Trust Information Sources: a proposal for a modal logical framework. In Cristiano Castelfranchi and Yao-Hua Tan, editors, *Trust and Deception in Virtual Societies*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2001.

[21] Ronald Fagin, Joseph Y. Halpern, Yoram Moses, and Moshe Y. Vardi. *Reasoning about knowledge*. MIT Press, Cambridge, MA, 1995.

[22] David Gries and Fred B. Schneider. *A Logical Approach to Discrete Math*. Springer Verlag, 1993.

[23] Jaakko Hintikka. *Knowledge and Belief: an Introduction to the Two Notation*. Cornell University Press, New York, 1962.

[24] H. James Hoover and Piotr Rudnicki. Teching freshman logic with Mizar-MSE. In *DIMACS Symposium on Teaching Logic and Reasoning in an Illogical World*, Rutgers University, Piscataway, New Jersey, 1996.

[25] S. C. Kleene. *Mathematical Logic*. John Wiley & Sons, Inc., 1967.

[26] Hans Kleine Büning, Marek Karpinski, and Andreas Flögel. Resolution for quantified Boolean formulas. *Inform. and Comput.*, 117(1):12–18, 1995.

[27] William Calvert Kneale and Martha Hurst Kneale. *A logika fejlődése*. Gondolat, Budapest, 1987.

[28] Adam Kolany. On the logic of Lie. *Bull. Sect. Logic Univ. Łódź*, 22(2):72–79, 1993.

[29] Adam Kolany. A general method of solving Smullyan's puzzles. *Logic Log. Philos.*, (4):97–103, 1996.

[30] E. Lusk L. Wos, R. Overbeek and J. Boyle. *Automated Reasoning: Introduction and Applications*. McGraw-Hill., 1992.

[31] Churn-Jung Liau. Logical Systems for Reasoning about Multi-agent Belief, Information Acquisition and Trust. In *Proc. ECAI'00*, Siena, 2000.

[32] Lotrec – a general tableaux theorem prover in java. `www.irit.fr/ACTIVITES/LILaC/Lotrec`.

[33] B. Majcher. Quarrel thorem - the first attempt to the Logic of Lie. *Bull. of Sect. Log.*, 4:139–146, 1990.

[34] L. Naish. A NU-Prolog program to solve knights-knaves puzzles. comp.lang.prolog hírcsoport, 2000. február 11.

[35] H. J. Ohlbach and M. Schmidt-Schauss. The lion and the unicorn. *J. Automat. Reason.*, 1(3):327–332, 1985.

[36] György Serény. Gödel, Tarski, Church, and the Liar. Technical Report TUB/Math-99/01, Technical University of Budapest, 1999.

[37] Keith Simmons. Deflationary thruth and the liar. *Journal of Philosophical Logic*, (28):455–488, 1999.

[38] R. M. Smullyan. *First-order logic.* Springer-Verlag New York, Inc., New York, 1968. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Band 43.

[39] R. M. Smullyan. *What is the name of this book? (The riddle of Dracula and other logical puzzles).* Prentice Hall, Inc., 1978.

[40] R. M. Smullyan. *Forever Undecided – A Puzzle Guide to Gödel.* Alfred A. Knopf, Inc., New York, 1987.

[41] Raymond Smullyan. *Mi a címe ennek a könyvnek?* Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1988.

[42] Raymond Smullyan. *A hölgy vagy a tigris? és egyéb logikai feladatok.* TypoTEX Kiadó, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1991.

[43] Raymond Smullyan. *Sehezerezádé rejtélye és más bámulatos fejtörők, régiek és újak.* TypoTEX Kiadó, Budapest, 1999.

[44] Peter Suber. *The Paradox of Self-Amendment: A Study of Law, Logic, Omnipotence, and Change.* Peter Lang Publishing, 1990.

[45] Christian B Suttner and Geoff Sutcliffe. The TPTP Problem Library (TR97/08). Technical report, Department of Computer Sience, James Cook University, Australia, 1997.

[46] A. Zalewska. An application of Mizar MSE in a course in logic. In J. Srzednicki, editor, *Initiatives in Logic*, pages 224–230. Martinus Nijhoff Publishers, 1987.