ASZIMPTOTIKUS EREDMÉNYEK A VALÓSZÍNŰSÉGELMÉLETBEN

Doktori (PhD) értekezés tézisei

Tómács Tibor

Debreceni Egyetem
Természettudományi Kar
Debrecen, 2003

Tartalomjegyzék

1. Nagy számok erős törvényei páronként független többindexes valószínűségi változók esetén 2

1.1. Egy általános konvergenciatétel 2

1.2. Kolmogorov-féle nagy számok erős törvénye 2

1.3. Marcinkiewicz-féle nagy számok erős törvénye 3

2. A többindexes valószínűségi változókra vonatkozó nagy számok erős törvényeinek egy általános megközelítése 3

2.1. Fő eredmény 4

2.2. Alkalmazások 5

3. A konvergencia sebessége a nagy számok törvényeiben, Banach-térbeli értékű véletlen elemekből álló szériasorozatok esetén 6

4. Majdnem biztos központi határeloszlás-tételek m-függő, többindexes valószínűségi változókra 8

5. A Rosenthal-egyenlőtlenség keverő mezőkre 9

Contents

1. Strong laws of large numbers for pairwise independent random variables with multidimensional indices 12

1.1. A general almost surely convergence theorem 12

1.2. Kolmogorov's SLLN 12

1.3. The Marcinkiewicz SLLN without assuming independence . . 13

2. A general approach to strong laws of large numbers for fields of random variables 13

2.1. The basic SLLN 14

2.2. Applications 15

3. Convergence rates in the law of large numbers for arrays of Banach space valued random elements 16

4. Almost sure central limit theorems for m-dependent random fields 17

5. On the Rosenthal inequality for mixing fields 19

6. References 21

7. Publications of Tibor Tómács 22

1. Nagy számok erős törvényei páronként független többindexes valószínűségi változók esetén

Legyen $\mathbb{N}$ a pozitív egész számok halmaza és $d \in \mathbb{N}$ rögzített. Bevezetjük a következő jelöléseket: $|\mathbf{n}| := n_1 \cdots n_d$, ahol $\mathbf{n} = (n_1, \ldots, n_d) \in \mathbb{N}^d$, $\sum_{\mathbf{n}} := \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{N}^d}$, $\log^+ x := \max\{1, \log x\}$, ha $x > 0$ és $\log^+ x := 1$, ha $x \le 0$. Az $\mathbf{n} \le \mathbf{m}$ ($\mathbf{n}, \mathbf{m} \in \mathbb{N}^d$) relációt értelmezzük koordinátánként.

Tegyük fel, hogy az $\{X_{\mathbf{n}}, \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d\}$ valószínűségi változók ugyanabban az $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ valószínűségi mezőben vannak értelmezve. Legyen $S_{\mathbf{n}} := \sum_{\mathbf{k} \le \mathbf{n}} X_{\mathbf{k}}$.

1.1. definíció. (Gut (1992) [8].) Azt mondjuk, hogy az $\{X_{\mathbf{n}}, \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d\}$ valószínűségi változók sorozata az X valószínűségi változóval *átlagban gyengén dominált*, ha létezik $c > 0$ úgy, hogy

$$\frac{1}{|\mathbf{n}|} \sum_{\mathbf{k} \le \mathbf{n}} \mathrm{P}(|X_{\mathbf{k}}| > x) \le c\mathrm{P}(|X| > x)$$

teljesül minden $\mathbf{n} \in \mathbb{N}^d$ és $x \ge 0$ esetén.

Az alábbi többindexes konvergenciatételek Kruglov (1994) [11] egyindexes tételeinek kiterjesztései.

1.1. Egy általános konvergenciatétel

Fazekas és Tómács (1998) [7] Theorem 3.1.

1.1.1. tétel. *Legyen $\{X_{\mathbf{n}}, \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d\}$ nemnegatív valószínűségi változók egy sorozata, $\{b_{\mathbf{n}}, \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d\}$ nemnegatív számoknak egy korlátos sorozata, továbbá $B_{\mathbf{n}} := \sum_{\mathbf{k} \le \mathbf{n}} b_{\mathbf{k}}$. Ha*

$$\sum_{\mathbf{n}} \frac{1}{|\mathbf{n}|} \mathrm{P}\left(|S_{\mathbf{n}} - B_{\mathbf{n}}| > \varepsilon |\mathbf{n}|^{1/r}\right) < \infty$$

minden $\varepsilon > 0$ esetén, ahol $0 < r \le 1$, akkor

$$\frac{1}{|\mathbf{n}|^{1/r}} (S_{\mathbf{n}} - B_{\mathbf{n}}) \to 0 \quad (|\mathbf{n}| \to \infty) \quad \textit{majdnem biztosan.}$$

1.2. Kolmogorov-féle nagy számok erős törvénye

Fazekas és Tómács (1998) [7] Theorem 4.1.

1.2.1. tétel. *Legyen* $\{X_{\mathbf{n}} : \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d\}$ *páronként független valószínűségi változók sorozata* X*-szel átlagban gyengén dominált. Tegyük fel, hogy*

$$\mathrm{E}\left(|X|(\log^+|X|)^{d-1}\right) < \infty.$$

Ekkor

$$\sum_{\mathbf{n}} \frac{1}{|\mathbf{n}|}\mathrm{P}\big(|S_{\mathbf{n}} - \mathrm{E}S_{\mathbf{n}}| > \varepsilon|\mathbf{n}|\big) < \infty$$

minden $\varepsilon > 0$ *esetén, továbbá, ha még* $\sup\{\mathrm{E}|X_{\mathbf{n}}|, \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d\} < \infty$ *is teljesül, akkor*

$$\frac{1}{|\mathbf{n}|}(S_{\mathbf{n}} - \mathrm{E}S_{\mathbf{n}}) \to 0 \quad (|\mathbf{n}| \to \infty) \quad \textit{majdnem biztosan.}$$

1.3. Marcinkiewicz-féle nagy számok erős törvénye

Fazekas és Tómács (1998) [7] Theorem 5.1.

1.3.1. tétel. *Legyen* $\{X_{\mathbf{n}}, \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d\}$ *valószínűségi változók* X*-szel átlagban gyengén dominált sorozata. Tegyük fel, hogy* $\mathrm{E}(|X|^r(\log^+|X|)^{d-1}) < \infty$, *ahol* $0 < r < 1$. *Ekkor*

$$\sum_{\mathbf{n}} \frac{1}{|\mathbf{n}|}\mathrm{P}\left(|S_{\mathbf{n}}| > \varepsilon|\mathbf{n}|^{1/r}\right) < \infty$$

bármely $\varepsilon > 0$ *esetén, továbbá*

$$\frac{S_{\mathbf{n}}}{|\mathbf{n}|^{1/r}} \to 0 \quad (|\mathbf{n}| \to \infty) \quad \textit{majdnem biztosan.}$$

2. A többindexes valószínűségi változókra vonatkozó nagy számok erős törvényeinek egy általános megközelítése

Az előző fejezet jelöléseit használjuk itt is. Legyen $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\mathbb{R}$ a valós számok halmaza, $\mathbf{0} := (0, \ldots, 0) \in \mathbb{N}_0^d$ és $\mathbf{1} := (1, \ldots, 1) \in \mathbb{N}^d$. Jelöljük az $\mathbf{m}, \mathbf{n}, \ldots \in \mathbb{N}^d$ rácspontok koordinátáit ugyanazon indexelt betűkkel, azaz például $\mathbf{n} = (n_1, \ldots, n_d)$. Jelentse $\mathbf{n} \to \infty$ azt, hogy $n_i \to \infty$ minden $i \in \{1, \ldots, d\}$ esetén. Legyen $|\log \mathbf{n}| := \prod_{i=1}^d \log^+ n_i$. $\Delta a_{\mathbf{n}}$ jelölje az $\{a_{\mathbf{n}} \in \mathbb{R}, \mathbf{n} \in \mathbb{N}_0^d\}$ sorozat *differenciasorozatát*, azaz $\sum_{\mathbf{k} \le \mathbf{n}} \Delta a_{\mathbf{k}} = a_{\mathbf{n}}$. Azt mondjuk, hogy $\{a_{\mathbf{n}} \in \mathbb{R}, \mathbf{n} \in \mathbb{N}_0^d\}$ *szorzat típusú sorozat*, ha léteznek olyan $a_n^{(i)}$, $n \in \mathbb{N}_0$, $i \in \{1, \ldots, d\}$ számok, melyekre $a_{\mathbf{n}} = \prod_{i=1}^d a_{n_i}^{(i)}$ teljesül minden $\mathbf{n} \in \mathbb{N}_0^d$-re. Ebben az esetben azt mondjuk, hogy $\{a_{\mathbf{n}} \in \mathbb{R}, \mathbf{n} \in \mathbb{N}_0^d\}$ nemcsökkenő, illetve nem korlátos, ha $a_n^{(i)}$, $n \in \mathbb{N}_0$ nemcsökkenő illetve nem korlátos sorozatok minden $i \in \{1, \dots, d\}$ esetén.

2.1. definíció. A $g: \mathbb{N}^d \times \mathbb{N}^d \to \mathbb{R}$ függvényt *szuperadditívnak* nevezzük, ha

$$\begin{aligned} &g\big(\mathbf{i}, (j_1, \dots, j_{m-1}, k, j_{m+1}, \dots, j_d)\big) + \\ &+ g\big((i_1, \dots, i_{m-1}, k+1, i_{m+1}, \dots, i_d), \mathbf{j}\big) \le g(\mathbf{i}, \mathbf{j}) \end{aligned}$$

bármely $\mathbf{i}, \mathbf{j} \in \mathbb{N}^d$, $\mathbf{i} \le \mathbf{j}$, $m = 1, \dots, d$ és $i_m \le k \le j_m$ esetén. Azt mondjuk, hogy az $\{X_\mathbf{n}, \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d\}$ valószínűségi változók többindexes sorozata *szuperadditív r-edik momentum struktúrával rendelkezik*, ha minden $\mathbf{i} \le \mathbf{j}$ ($\mathbf{i}, \mathbf{j} \in \mathbb{N}^d$) esetén

$$\mathrm{E} \left| \sum_{\mathbf{i} \le \mathbf{k} \le \mathbf{j}} X_\mathbf{k} \right|^r \le g^\alpha(\mathbf{i}, \mathbf{j}),$$

ahol $g: \mathbb{N}^d \times \mathbb{N}^d \to \mathbb{R}$ szuperadditív függvény, $\alpha > 1$ és $r > 0$.

2.2. definíció. Legyen $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ egy valószínűségi mező, $\{X_\mathbf{n}, \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d\}$ valószínűségi változók többindexes sorozata és $\mathcal{F}_\mathbf{n} \subseteq \mathcal{F}$ σ-algebra minden $\mathbf{n} \in \mathbb{N}^d$ esetén. Tegyük fel, hogy $\mathbf{m} \le \mathbf{n}$ esetén $\mathcal{F}_\mathbf{m} \subseteq \mathcal{F}_\mathbf{n}$. Ha $X_\mathbf{n}$ $\mathcal{F}_\mathbf{n}$-mérhető minden $\mathbf{n} \in \mathbb{N}^d$-re, $\mathrm{E}X_\mathbf{1} = 0$, továbbá $\mathrm{E}(X_\mathbf{n} \mid \mathcal{F}_\mathbf{m}) = 0$ minden $\mathbf{m} \le \mathbf{n}$, $\mathbf{m} \ne \mathbf{n}$ esetén, akkor azt mondjuk, hogy $(X_\mathbf{n}, \mathcal{F}_\mathbf{n})$ *martingáldifferencia.*

Az alábbi többindexes konvergenciatételek Fazekas és Klesov (2000) [3] egyindexes eredményeinek megfelelői.

2.1. Fő eredmény

Noszály és Tómács (2000) [12] Proposition 1, illetve Fazekas, Klesov, Noszály és Tómács (1999) [4] Theorem 3.1.

2.1.1. tétel. *Legyen $\mathbf{n} \in \mathbb{N}^d$ és $r > 0$ rögzítettek. Legyen $\{a_\mathbf{m}, \mathbf{m} \in \mathbb{N}_0^d\}$ nemnegatív valós értékű többindexes sorozat, továbbá $\{b_\mathbf{m}, \mathbf{m} \in \mathbb{N}_0^d\}$ pozitív valós értékű szorzat típusú nemcsökkenő sorozat. Ha*

$$\mathrm{E}\left(\max_{\mathbf{l} \le \mathbf{m}} |S_\mathbf{l}|^r\right) \le \sum_{\mathbf{l} \le \mathbf{m}} a_\mathbf{l}$$

teljesül minden $\mathbf{m} \le \mathbf{n}$ esetén, akkor

$$\mathrm{E}\left(\max_{\mathbf{m} \le \mathbf{n}} \left|\frac{S_\mathbf{m}}{b_\mathbf{m}}\right|^r\right) \le 4^d \sum_{\mathbf{m} \le \mathbf{n}} \frac{a_\mathbf{m}}{b_\mathbf{m}^r}.$$

Noszály és Tómács (2000) [12] Theorem 3, illetve Fazekas, Klesov, Noszály és Tómács (1999) [4] Theorem 3.2.

2.1.2. tétel. *Legyen* $r > 0$ *rögzített,* $\{a_{\mathbf{n}}, \mathbf{n} \in \mathbb{N}_0^d\}$ *nemnegatív valós értékű többindexes sorozat, továbbá* $\{b_{\mathbf{n}}, \mathbf{n} \in \mathbb{N}_0^d\}$ *pozitív valós értékű szorzat típusú nemcsökkenő és nem korlátos sorozat. Tegyük fel, hogy* $\sum_{\mathbf{n}} a_{\mathbf{n}}/b_{\mathbf{n}}^r < \infty$ *és* $\mathrm{E}(\max_{\mathbf{m}\le\mathbf{n}} |S_{\mathbf{m}}|^r) \le \sum_{\mathbf{m}\le\mathbf{n}} a_{\mathbf{m}}$ *minden* $\mathbf{n} \in \mathbb{N}^d$ *esetén. Ekkor*

$$\frac{S_{\mathbf{n}}}{b_{\mathbf{n}}} \to 0 \quad (\mathbf{n} \to \infty) \quad \textit{majdnem biztosan.}$$

2.2. Alkalmazások

Logaritmikus súlyozású összegek. Noszály és Tómács (2000) [12] Theorem 7, illetve Fazekas, Klesov, Noszály és Tómács (1999) [4] Theorem 4.2.

2.2.1. tétel. *Tegyük fel, hogy az* $\{X_{\mathbf{n}}, \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d\}$ *valószínűségi változók többindexes sorozatára valamely* $C > 0$ *és* $\beta > 0$ *esetén*

$$|\mathrm{E}(X_{\mathbf{k}} X_{\mathbf{l}})| \le C \left(\frac{|\mathbf{k}|}{|\mathbf{l}|}\right)^{\beta} \frac{1}{(\log^+ |\mathbf{l}|)^{d-1}}$$

minden $\mathbf{k} \le \mathbf{l}$ $(\mathbf{k}, \mathbf{l} \in \mathbb{N}^d)$ *esetén. Ekkor*

$$\frac{1}{|\log \mathbf{n}|} \sum_{\mathbf{k}\le\mathbf{n}} \frac{X_{\mathbf{k}}}{|\mathbf{k}|} \to 0 \quad (\mathbf{n} \to \infty) \quad \textit{majdnem biztosan.}$$

Szuperadditív momentum struktúrával rendelkező sorozatok. Noszály és Tómács (2000) [12] Proposition 11, illetve Fazekas, Klesov, Noszály és Tómács (1999) [4] Theorem 4.1.

2.2.2. tétel. *Legyen* $r > 0$, $\alpha > 1$ *és tegyük fel, hogy* $\{X_{\mathbf{n}}, \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d\}$ *valószínűségi változók többindexes sorozata szuperadditív* r*-edik momentum struktúrával rendelkezik. Ha* $\Delta g^{\alpha}(\mathbf{1}, \mathbf{n}) \ge 0$ *minden* $\mathbf{n} \in \mathbb{N}^d$*-re, és valamely* $q > 0$ *esetén*

$$\sum_{\mathbf{n}} \frac{g^{\alpha}(\mathbf{1}, \mathbf{n})}{|\mathbf{n}|^{1+r/q}} < \infty$$

teljesül, akkor

$$\frac{S_{\mathbf{n}}}{|\mathbf{n}|^{1/q}} \to 0 \quad (\mathbf{n} \to \infty) \quad \textit{majdnem biztosan.}$$

Brunk—Prohorov típusú tételek. Noszály és Tómács (2000) [12] Proposition 13.

2.2.3. tétel. *Legyen* $(X_{\mathbf{n}}, \mathcal{F}_{\mathbf{n}})$ *martingáldifferencia, teljesüljön*

$$\mathrm{E}\Big(\mathrm{E}(X_{\mathbf{l}} \mid \mathcal{F}_{\mathbf{m}}) \Bigm| \mathcal{F}_{\mathbf{n}}\Big) = \mathrm{E}\left(X_{\mathbf{l}} \mid \mathcal{F}_{\min(\mathbf{m},\mathbf{n})}\right) \tag{2.2.1}$$

minden $\mathbf{l}, \mathbf{m}, \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d$ *esetén,* $p \geq 1$, $C > 0$ *és* $r < p+1$. *Tegyük fel, hogy* $\sum_{\mathbf{m} \leq \mathbf{n}} \mathrm{E}|X_{\mathbf{m}}|^{2p} \leq C|\mathbf{n}|^r$. *Ekkor* $S_{\mathbf{n}}/|\mathbf{n}| \to 0$ $(\mathbf{n} \to \infty)$ *majdnem biztosan.*

Noszály és Tómács (2000) [12] Proposition 14.

2.2.4. tétel. *Legyen* $(X_{\mathbf{n}}, \mathcal{F}_{\mathbf{n}})$ (2.2.1) *tulajdonságú martingáldifferencia és* $p \geq 1$. *Amikor* $p > 1$, *tegyük fel, hogy* $\mathrm{E}|X_{\mathbf{n}}|^{2p}$ *szorzat típusú sorozat. Legyen* $b_{\mathbf{n}}$ *pozitív valós értékű, nemcsökkenő és nem korlátos szorzat típusú sorozat, továbbá tegyük még fel azt is, hogy* $p > 1$ *esetén van olyan* $\delta > (p-1)/2p$, *hogy* $|\mathbf{n}|^\delta / b_{\mathbf{n}}$ *nemnövekvő. Ekkor*

$$\sum_{\mathbf{n}} \frac{\mathrm{E}|X_{\mathbf{n}}|^{2p}}{b_{\mathbf{n}}^{2p}} |\mathbf{n}|^{p-1} < \infty$$

esetén $S_{\mathbf{n}}/b_{\mathbf{n}} \to 0$ $(\mathbf{n} \to \infty)$ *majdnem biztosan.*

3. A konvergencia sebessége a nagy számok törvényeiben, Banach-térbeli értékű véletlen elemekből álló szériasorozatok esetén

Φ_0 legyen a nemcsökkenő $f\colon [0,\infty) \to [0,\infty)$ függvények halmaza. Az $f \in \Phi_0$ függvényről azt mondjuk, hogy teljesíti a Δ_2-feltételt ($f \sim \Delta_2$), ha létezik egy $c > 0$ konstans, hogy $f(2t) \leq cf(t)$ minden $t > 0$ esetén.

Legyen B egy valós, szeparábilis Banach-tér $\|.\|$ normával, és $\{X_{nk}, n \in \mathbb{N}, k = 1, \ldots, n\}$ B-értékű valószínűségi változók szériasorozata. Ezt *soronként függetlennek* nevezzük, ha $X_{n1}, \ldots, X_{nn}$ függetlenek minden $n \in \mathbb{N}$ esetén. Legyen $S_n := \sum_{k=1}^n X_{nk}$.

3.1. definíció. (Gut (1992) [8].) $\{X_{nk}, n \in \mathbb{N}, k = 1, \ldots, n\}$ *átlagban gyengén dominált* az X valószínűségi változóval, ha létezik $\gamma > 0$, hogy

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \mathrm{P}(\|X_{nk}\| > t) \leq \gamma \mathrm{P}(|X| > t) \text{ minden } t \geq 0,\ n \in \mathbb{N} \text{ esetén.}$$

Tómács (2003) [14] Theorem 3.1.

3.2. tétel. *Legyen* $\{X_{nk}, n \in \mathbb{N}, k = 1, \dots, n\}$ *soronként független, B-értékű valószínűségi változók szériasorozata, mely átlagban gyengén dominált az X valószínűségi változóval. Tegyük fel, hogy létezik egy pozitív valós számokból álló* $\{\gamma_n, n \in \mathbb{N}\}$ *sorozat, hogy* $\{\|S_n\|/\gamma_n, n \in \mathbb{N}\}$ *valószínűségben korlátos. Legyen* $\alpha, \vartheta, \varphi \in \Phi_0$, α *nem korlátos,* $\vartheta, \varphi \sim \Delta_2$, $\vartheta \not\equiv 0$ *és*

$$\beta(n) := \varphi(\alpha(n+1)) - \varphi(\alpha(n)), \quad n = 0, 1, 2, \dots.$$

Tegyük fel, hogy

$$\mathrm{E}\,\varphi(|X|) < \infty, \quad \mathrm{E}\,\vartheta(|X|) < \infty \quad \textit{és} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{\alpha(n)}{\gamma_n} = \infty.$$

Legyen

$$\mu(n) := \beta(n-1) \quad \textit{minden} \quad n \in \mathbb{N} \quad \textit{esetén},$$

vagy

$$\mu(n) := \beta(n) \quad \textit{minden} \quad n \in \mathbb{N} \quad \textit{esetén}.$$

$\mu(n) = \beta(n)$ *esetben tegyük fel, hogy létezik* $c > 0$, *hogy elég nagy* $n \in \mathbb{N}$*-ek esetén*

$$c\beta(n) \le \beta(n-1).$$

Legyen $n_0 \in \mathbb{N}$ *olyan, hogy* $\vartheta(\alpha(n)) > 0$ *minden* $n \ge n_0$ *esetén. Ha létezik* $j \in \mathbb{N}$ *és* $r > 0$ *úgy, hogy*

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n} \left(\frac{rn + \vartheta(\gamma_n)}{\vartheta(\alpha(n))} \right)^{2^j} < \infty,$$

akkor

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n} \mathrm{P}\big(\|S_n\| > \varepsilon\alpha(n)\big) < \infty \quad \textit{minden} \quad \varepsilon > 0 \quad \textit{esetén}.$$

3.3. megjegyzés. A fenti tétellel könnyen bizonyíthatóak például a következő Baum—Katz típusú eredmények.

- Fazekas (1992) [2] Theorem 3.1, Theorem 3.5, Theorem 6.2,
- Hu, Rosalsky, Szynal és Volodin (1999) [9] Corollary 4.1 és 4.2 verziói,
- Jain (1975) [10] Theorem 3.3.

Ezek közül Fazekas (1992) [2] Theorem 3.1 az alábbi.

3.4. tétel. *Legyen* $0 < p \le 2$, $s \ge p$, $rp > s$ *és* B p*-típusú. Legyen* $\{X_{nk}, n \in \mathbb{N}, k = 1, \dots, n\}$ *soronként független, B-értékű valószínűségi változók szériasorozata, mely átlagban gyengén dominált* X*-szel. Tegyük fel, hogy* $p \ge 1$ *esetén* $\mathrm{E}X_{nk} = \mathbf{0}$ $(k = 1, \dots, n)$. *Ha* $\mathrm{E}\,|X|^s < \infty$, *akkor*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{r-2} \mathrm{P}\left(\|S_n\| > \varepsilon n^{r/s}\right) < \infty \quad \textit{minden} \quad \varepsilon > 0 \quad \textit{esetén}.$$

4. Majdnem biztos központi határeloszlás-tételek m-függő, többindexes valószínűségi változókra

Legyen $\mathcal{B}$ az $\mathbb{R}$ Borel-halmazainak σ-algebrája. δ_x jelölje az $x \in \mathbb{R}$ *pontra koncentrált egységnyi tömeget*, azaz $\delta_x : \mathcal{B} \to \mathbb{R}$, $\delta_x(B) = 1$ ha $x \in B$ és $\delta_x(B) = 0$ ha $x \notin B$. Jelöljük $\Rightarrow$ módon a gyenge konvergenciát. Legyen $\{X_{\mathbf{n}}, \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d\}$ 0 várható értékű és véges szórású valószínűségi változók többindexes sorozata, ahol $d \in \mathbb{N}$ rögzített. Legyen $||\mathbf{n}|| := \max\{n_1, \dots, n_d\}$ és $d(V_1, V_2) := \inf\{||\mathbf{n} - \mathbf{m}|| : \mathbf{n} \in V_1, \mathbf{m} \in V_2\}$, ahol $V_1, V_2 \subset \mathbb{N}^d$. Legyen $\sigma(V)$ (ahol $V \subset \mathbb{N}^d$) a legszűkebb olyan σ-algebra, melyre nézve $X_{\mathbf{n}}$ mérhető minden $\mathbf{n} \in V$ esetén.

Emlékeztetünk a jól ismert m-függő sorozat definíciójára.

4.1. definíció. Legyen $m \in \mathbb{N}$ rögzített. Az $\{X_{\mathbf{n}}, \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d\}$ valószínűségi változók sorozatát *m-függőnek* nevezzük, ha a $\sigma(V_1)$ és $\sigma(V_2)$ σ-algebrák minden olyan $V_1, V_2 \subset \mathbb{N}^d$ esetén függetlenek, melyekre $d(V_1, V_2) > m$.

Használni fogjuk még a következő jelöléseket: $S_{\mathbf{n}} := \sum_{\mathbf{k} \le \mathbf{n}} X_{\mathbf{k}}$, $B_{\mathbf{n}} := \mathrm{D}^2 S_{\mathbf{n}}$, $\zeta_{\mathbf{n}} := S_{\mathbf{n}} / \sqrt{B_{\mathbf{n}}}$ és $\mu_{\zeta_{\mathbf{n}}}$ jelölje a $\zeta_{\mathbf{n}}$ valószínűségi változó eloszlását.

A következő két tétel lényegében Fazekas és Rychlik (2001) [6] független $X_{\mathbf{n}}$-ekre vonatkozó eredményeinek a kiterjesztése.

Tómács (2002) [13] Theorem 2.1.

4.2. tétel. *Legyen $\{X_{\mathbf{n}}, \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d\}$ m-függő, 0 várható értékű valószínűségi változók sorozata. Tegyük fel, hogy*

$$\text{létezik } M, \delta \ge 0, \text{ hogy } \mathrm{E}|X_{\mathbf{n}}|^{2+\delta} \le M < \infty \text{ minden } \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d \text{ esetén} \tag{4.1}$$

és

$$\text{létezik } \sigma > 0 \text{ és } \mathbf{n}_\sigma \in \mathbb{N}^d \text{ úgy, hogy } \frac{B_{\mathbf{n}}}{|\mathbf{n}|} \ge \sigma \text{ minden } \mathbf{n} \ge \mathbf{n}_\sigma \text{ esetén.} \tag{4.2}$$

Legyen $0 \le d_k^{(i)} \le c \log \frac{k+1}{k}$ olyan, hogy $\sum_{k=1}^{\infty} d_k^{(i)} = \infty$ minden $i \in \{1, \dots, d\}$-re. Legyen $d_{\mathbf{k}} := \prod_{i=1}^{d} d_{k_i}^{(i)}$ és $D_{\mathbf{n}} := \sum_{\mathbf{k} \le \mathbf{n}} d_{\mathbf{k}}$. Ekkor minden μ eloszlás esetén a következő két állítás ekvivalens:

$$\frac{1}{D_{\mathbf{n}}} \sum_{\mathbf{k} \le \mathbf{n}} d_{\mathbf{k}} \delta_{\zeta_{\mathbf{k}}(\omega)} \Rightarrow \mu \ (\mathbf{n} \to \infty) \text{ majdnem minden } \omega \in \Omega \text{ esetén,}$$

$$\frac{1}{D_{\mathbf{n}}} \sum_{\mathbf{k} \le \mathbf{n}} d_{\mathbf{k}} \mu_{\zeta_{\mathbf{k}}} \Rightarrow \mu \ (\mathbf{n} \to \infty).$$

Tómács (2002) [13] Theorem 2.2.

Theorem 4.3. *Legyen* $\{X_{\mathbf{n}}, \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d\}$ *m-függő, 0 várható értékű valószínűségi változók sorozata. Tegyük fel, hogy a (4.1) és a (4.2) feltételek teljesülnek valamely* $\delta > 0$ *esetén. Ekkor*

$$\frac{1}{|\log \mathbf{n}|} \sum_{\mathbf{k} \le \mathbf{n}} \frac{1}{|\mathbf{k}|} \delta_{\zeta_{\mathbf{k}}(\omega)} \Rightarrow \mathcal{N}(0,1) \quad (\mathbf{n} \to \infty) \quad \textit{majdnem minden } \omega \in \Omega \textit{ esetén.}$$

5. A Rosenthal-egyenlőtlenség keverő mezőkre

Legyen $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ egy valószínűségi mező és $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2 \subseteq \mathcal{F}$ σ-algebrák. Az *α-keverési együtthatót* a következő módon definiáljuk:

$$\alpha(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2) := \sup\{|\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(AB)| : A \in \mathcal{F}_1, B \in \mathcal{F}_2\}.$$

Legyen $d \in \mathbb{N}$ rögzített pozitív egész szám, továbbá $I \subseteq \mathbb{Z}^d$ nem üres halmaz. Tekintsük $\mathbb{Z}^d$-ben a $||.||$ maximum normát és az általa generált ϱ távolságot, azaz $||\mathbf{n}|| := \max\{|n_1|, \ldots, |n_d|\}$, ahol $\mathbf{n} = (n_1, \ldots, n_d) \in \mathbb{Z}^d$, továbbá $\varrho(\mathbf{n}, \mathbf{m}) := ||\mathbf{n} - \mathbf{m}||$. Legyen $Y := \{Y_{\mathbf{t}} : \mathbf{t} \in I\}$ valószínűségi változók többindexes sorozata. Az Y *α-keverési együtthatója* alatt a következőt értjük:

$$\alpha_Y(r, u, v) := \sup\{\alpha(\mathcal{F}_{I_1}, \mathcal{F}_{I_2}) : \varrho(I_1, I_2) \ge r,\ \mathrm{card}(I_1) \le u,\ \mathrm{card}(I_2) \le v\},$$

ahol I_1 és I_2 nem üres véges részhalmazai I-nek, $\mathcal{F}_{I_i} = \sigma\{Y_{\mathbf{t}} : \mathbf{t} \in I_i\}$, $i = 1, 2$.

Legyen T véges részhalmaza I-nek. Bevezetjük a következő jelöléseket:

$$L(\mu, \varepsilon, T) := \sum_{\mathbf{t} \in T} \left(\mathrm{E}|Y_{\mathbf{t}}|^{\mu+\varepsilon}\right)^{\mu/(\mu+\varepsilon)} = \sum_{\mathbf{t} \in T} ||Y_{\mathbf{t}}||_{\mu+\varepsilon}^{\mu}.$$

$$D(h, \varepsilon, T) := \begin{cases} L(h, 0, T), & \text{ha } 0 < h \le 1, \\ L(h, \varepsilon, T), & \text{ha } 1 < h \le 2, \\ \max\{L(h, \varepsilon, T), L^{h/2}(2, \varepsilon, T)\}, & \text{ha } 2 < h. \end{cases}$$

Legyen $s_r := \mathrm{card}(\{\mathbf{t} \in \mathbb{Z}^d : ||\mathbf{t}|| = r\} \cap I)$ és $b_r := \mathrm{card}(\{\mathbf{t} \in \mathbb{Z}^d : ||\mathbf{t}|| \le r\} \cap I)$, továbbá

$$c_{u,h-u}^{(\alpha)} := 8u!(h-u-1)!(h-1)! \sum_{r=1}^{\infty} \left(\alpha_Y(r, u, h-u)\right)^{\varepsilon/(h+\varepsilon)} s_r b_r^{h-2}.$$

Doukhan (1994) [1] Theorem 1 egy Rosenthal-egyenlőtlenség mezőkre. A tétel vázlatos bizonyításában azonban egy általunk át nem hidalható ugrást találtunk. Ezért megadjuk a Rosenthal-egyenlőtlenség egy változatát, amelyet részletesen bizonyítani tudunk.

Fazekas, Kukush és Tómács [5] Theorem.

5.1. tétel. *Legyen* $l > 1$, $\varepsilon > 0$, $\{Y_{\mathbf{t}}, \mathbf{t} \in I\}$ *valószínűségi változók többindexes sorozata,* $\mathrm{E}Y_{\mathbf{t}} = 0$ *és* $\mathrm{E}|Y_{\mathbf{t}}|^{l+\varepsilon} < \infty$ *minden* $\mathbf{t} \in I$ *esetén. Legyen* h *a legkisebb páros egész szám, melyre* $h \geq l$ *teljesül. Tegyük fel, hogy* $c_{u,h-u}^{(\alpha)} < \infty$, $u = 1, \dots, h-1$. *Ekkor létezik egy* $K_{(\alpha)}$ *konstans, hogy*

$$\mathrm{E}\left|\sum_{\mathbf{t} \in T} Y_{\mathbf{t}}\right|^l \leq K_{(\alpha)} D(l, \varepsilon, T) \tag{5.1}$$

I-nek minden véges T részhalmaza esetén.

5.2. megjegyzés. $K_{(\alpha)}$ nem függ T-től, csak a keverési együtthatótól és l-től. Ha $0 < \varepsilon < l/2$, akkor az explicit alakja: $K_{(\alpha)} = H_h^{(\alpha)} C_l$, ahol

$$\begin{aligned} H_h^{(\alpha)} &= 1 + \sum_{u=1}^{h-1} c_{u,h-u}^{(\alpha)} + \sum_{u=2}^{h-2} \binom{h}{u} H_u^{(\alpha)} H_{h-u}^{(\alpha)}, \\ C_l &= 2^{(h-l+\varepsilon)(2h+2l-1)/\varepsilon}. \end{aligned}$$

Amennyiben l páros egész szám, akkor C_l javítható $C_l = 1$-re. Az (5.1) $0 < l \leq 1$ esetén teljesül a $c_{u,h-u}^{(\alpha)} < \infty$ feltétel nélkül is. Ekkor $K_{(\alpha)} = 1$.

ASYMPTOTIC RESULTS
IN PROBABILITY THEORY

Theses of PhD dissertation

Tibor Tómács

University of Debrecen
Faculty of Science
Debrecen, 2003

1. Strong laws of large numbers for pairwise independent random variables with multidimensional indices

Let $\mathbb{N}^d$ be the positive integer d-dimensional lattice points, where d is a positive integer. The following notation will be used: $|\mathbf{n}| = n_1 \cdots n_d$, where $\mathbf{n} = (n_1, \ldots, n_d) \in \mathbb{N}^d$, $\sum_{\mathbf{n}} = \sum_{\mathbf{n}\in\mathbb{N}^d}$, $\log^+ x = \max\{1, \log x\}$, if $x > 0$ and $\log^+ x = 1$, if $x \le 0$. For $\mathbf{n}, \mathbf{m} \in \mathbb{N}^d$, $\mathbf{n} \le \mathbf{m}$ is defined coordinatewise.

We shall assume that random variables (r.v.'s) $\{X_{\mathbf{n}}, \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d\}$ are defined on the same probability space. Let $S_{\mathbf{n}} = \sum_{\mathbf{k}\le\mathbf{n}} X_{\mathbf{k}}$.

Definition 1.1. (Gut (1992) [8].) It is said that the sequence $\{X_{\mathbf{n}}, \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d\}$ is *weakly mean dominated* by the r.v. X, if for some $c > 0$,

$$\frac{1}{|\mathbf{n}|} \sum_{\mathbf{k}\le\mathbf{n}} \mathrm{P}(|X_{\mathbf{k}}| > x) \le c\mathrm{P}(|X| > x)$$

for all $\mathbf{n} \in \mathbb{N}^d$ and $x \ge 0$.

The following multiindex convergence theorems are extensions of the single index theorems in Kruglov (1994) [11].

1.1. A general almost surely convergence theorem

Fazekas and Tómács (1998) [7] Theorem 3.1.

Theorem 1.1.1. *Let $\{X_{\mathbf{n}}, \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d\}$ be a sequence of nonnegative r.v.'s, and let $\{b_{\mathbf{n}}, \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d\}$ be a bounded sequence of nonnegative numbers, and $B_{\mathbf{n}} = \sum_{\mathbf{k}\le\mathbf{n}} b_{\mathbf{k}}$. If*

$$\sum_{\mathbf{n}} \frac{1}{|\mathbf{n}|} \mathrm{P}\left(|S_{\mathbf{n}} - B_{\mathbf{n}}| > \varepsilon|\mathbf{n}|^{1/r}\right) < \infty$$

for every $\varepsilon > 0$, where $0 < r \le 1$, then

$$\frac{1}{|\mathbf{n}|^{1/r}}(S_{\mathbf{n}} - B_{\mathbf{n}}) \to 0 \quad (|\mathbf{n}|\to\infty) \quad \textit{almost surely (a.s.)}.$$

1.2. Kolmogorov's SLLN

Fazekas and Tómács (1998) [7] Theorem 4.1.

Theorem 1.2.1. *Let $\{X_{\mathbf{n}}, \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d\}$ be a sequence of pairwise independent r.v.'s, which is weakly mean dominated by X. Assume that*

$$\mathrm{E}\left(|X|(\log^+ |X|)^{d-1}\right) < \infty.$$

Then

$$\sum_{\mathbf{n}} \frac{1}{|\mathbf{n}|} \mathrm{P}\big(|S_{\mathbf{n}} - \mathrm{E}S_{\mathbf{n}}| > \varepsilon |\mathbf{n}|\big) < \infty$$

for any $\varepsilon > 0$, *moreover if* $\sup\{\mathrm{E}|X_{\mathbf{n}}| : \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d\} < \infty$, *then*

$$\frac{1}{|\mathbf{n}|}(S_{\mathbf{n}} - \mathrm{E}S_{\mathbf{n}}) \to 0 \quad (|\mathbf{n}| \to \infty) \quad \text{a.s.}$$

1.3. The Marcinkiewicz SLLN without assuming independence

Fazekas and Tómács (1998) [7] Theorem 5.1.

1.3.1. tétel. *Let* $\{X_{\mathbf{n}}, \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d\}$ *be weakly mean dominated by* X *such that* $\mathrm{E}(|X|^r (\log^+ |X|)^{d-1}) < \infty$, *where* $0 < r < 1$. *Then*

$$\sum_{\mathbf{n}} \frac{1}{|\mathbf{n}|} \mathrm{P}\left(|S_{\mathbf{n}}| > \varepsilon |\mathbf{n}|^{1/r}\right) < \infty$$

for any $\varepsilon > 0$, *and*

$$\frac{S_{\mathbf{n}}}{|\mathbf{n}|^{1/r}} \to 0 \quad (|\mathbf{n}| \to \infty) \quad \text{a.s.}$$

2. A general approach to strong laws of large numbers for fields of random variables

We shall use notation of the previous chapter. Let $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\mathbf{0} := (0, \dots, 0) \in \mathbb{N}_0^d$ and $\mathbf{1} = (1, \dots, 1) \in \mathbb{N}^d$. Denote $\mathbb{R}$ the set of real numbers. Coordinates of $\mathbf{m}, \mathbf{n}, \dots \in \mathbb{N}^d$ are denoted by same letters with indices, i.e. $\mathbf{n}$ always means the vector $(n_1, \dots, n_d)$. $\mathbf{n} \to \infty$ is interpreted as $n_i \to \infty$ for all $i \in \{1, \dots, d\}$. Let $|\log \mathbf{n}| := \prod_{i=1}^d \log^+ n_i$. The *difference sequence* of sequence $\{a_{\mathbf{n}} \in \mathbb{R}, \mathbf{n} \in \mathbb{N}_0^d\}$ will be denoted by $\Delta a_{\mathbf{n}}$, i.e. $\sum_{\mathbf{k} \le \mathbf{n}} \Delta a_{\mathbf{k}} = a_{\mathbf{n}}$. We shall say that a sequence $\{a_{\mathbf{n}} \in \mathbb{R}, \mathbf{n} \in \mathbb{N}_0^d\}$ is of *product type*, if there exist $a_n^{(i)} \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}_0$, $i \in \{1, \dots, d\}$, such that $a_{\mathbf{n}} = \prod_{i=1}^d a_{n_i}^{(i)}$ for each $\mathbf{n} \in \mathbb{N}_0^d$. In this case the sequence $\{a_{\mathbf{n}} \in \mathbb{R}, \mathbf{n} \in \mathbb{N}_0^d\}$ is said to be nondecreasing, (resp. unbounded), if $a_n^{(i)}$, $n \in \mathbb{N}_0$ is nondecreasing, (resp. unbounded) for all $i \in \{1, \dots, d\}$.

Definition 2.1. A function $g: \mathbb{N}^d \times \mathbb{N}^d \to \mathbb{R}$ is said to be *superadditive*, if

$$\begin{aligned} &g\big(\mathbf{i}, (j_1, \dots, j_{m-1}, k, j_{m+1}, \dots, j_d)\big) + \\ &+ g\big((i_1, \dots, i_{m-1}, k+1, i_{m+1}, \dots, i_d), \mathbf{j}\big) \le g(\mathbf{i}, \mathbf{j}) \end{aligned}$$

for any $\mathbf{i},\mathbf{j} \in \mathbb{N}^d$, $\mathbf{i} \leq \mathbf{j}$, $m = 1,\ldots,d$, $i_m \leq k \leq j_m$. A sequence of r.v.'s $\{X_{\mathbf{n}}, \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d\}$ is said to have *r-th moment function of superadditive structure*, if for all $\mathbf{i} \leq \mathbf{j}$ ($\mathbf{i},\mathbf{j} \in \mathbb{N}^d$)

$$\mathrm{E}\left|\sum_{\mathbf{i}\leq\mathbf{k}\leq\mathbf{j}} X_{\mathbf{k}}\right|^r \leq g^{\alpha}(\mathbf{i},\mathbf{j}),$$

where $g: \mathbb{N}^d \times \mathbb{N}^d \to \mathbb{R}$ is superadditive, $\alpha > 1$ and $r > 0$.

Definition 2.2. Let $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ be a probability space. Let $\{X_{\mathbf{n}}, \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d\}$ and $\{\mathcal{F}_{\mathbf{n}}, \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d\}$ be a sequence of r.v.'s and be a sequence of σ-subalgebras of $\mathcal{F}$, respectively. We assume that $\mathcal{F}_{\mathbf{m}} \subseteq \mathcal{F}_{\mathbf{n}}$ if $\mathbf{m} \leq \mathbf{n}$. If $X_{\mathbf{n}}$ is measurable with respect to $\mathcal{F}_{\mathbf{n}}$ for all $\mathbf{n} \in \mathbb{N}^d$, $\mathrm{E}X_{\mathbf{1}} = 0$ and $\mathrm{E}(X_{\mathbf{n}} \mid \mathcal{F}_{\mathbf{m}}) = 0$ if $\mathbf{m} \leq \mathbf{n}$, $\mathbf{m} \neq \mathbf{n}$, then we say that $(X_{\mathbf{n}}, \mathcal{F}_{\mathbf{n}})$ is a *martingale difference.*

The following convergence theorems are multiindex versions of the single index results in Fazekas and Klesov (2000) [3].

2.1. The basic SLLN

Noszály and Tómács (2000) [12] Proposition 1 and Fazekas, Klesov, Noszály and Tómács (1999) [4] Theorem 3.1.

Theorem 2.1.1. *Let $\mathbf{n} \in \mathbb{N}^d$ be fixed. Let r be a positive real number, $\{a_{\mathbf{m}}, \mathbf{m} \in \mathbb{N}_0^d\}$ be a nonnegative sequence. Suppose that $\{b_{\mathbf{m}}, \mathbf{m} \in \mathbb{N}_0^d\}$ is a positive, nondecreasing sequence of product type. If*

$$\mathrm{E}\left(\max_{\mathbf{l}\leq\mathbf{m}} |S_{\mathbf{l}}|^r\right) \leq \sum_{\mathbf{l}\leq\mathbf{m}} a_{\mathbf{l}}$$

for all $\mathbf{m} \leq \mathbf{n}$, then

$$\mathrm{E}\left(\max_{\mathbf{m}\leq\mathbf{n}} \left|\frac{S_{\mathbf{m}}}{b_{\mathbf{m}}}\right|^r\right) \leq 4^d \sum_{\mathbf{m}\leq\mathbf{n}} \frac{a_{\mathbf{m}}}{b_{\mathbf{m}}^r}.$$

Noszály and Tómács (2000) [12] Theorem 3 and Fazekas, Klesov, Noszály and Tómács (1999) [4] Theorem 3.2.

Theorem 2.1.2. *Let $\{a_{\mathbf{n}}, \mathbf{n} \in \mathbb{N}_0^d\}$, $\{b_{\mathbf{n}}, \mathbf{n} \in \mathbb{N}_0^d\}$ be nonnegative sequences and let $r > 0$. Suppose that $\{b_{\mathbf{n}}, \mathbf{n} \in \mathbb{N}_0^d\}$ is a positive, nondecreasing, unbounded sequence of product type. If $\sum_{\mathbf{n}} a_{\mathbf{n}}/b_{\mathbf{n}}^r < \infty$ and $\mathrm{E}\left(\max_{\mathbf{m}\leq\mathbf{n}} |S_{\mathbf{m}}|^r\right) \leq \sum_{\mathbf{m}\leq\mathbf{n}} a_{\mathbf{m}}$ for all $\mathbf{n} \in \mathbb{N}^d$, then*

$$\frac{S_{\mathbf{n}}}{b_{\mathbf{n}}} \to 0 \quad (\mathbf{n} \to \infty) \quad a.s.$$

2.2. Applications

Logarithmically weighted sums. Noszály and Tómács (2000) [12] Theorem 7 and Fazekas, Klesov, Noszály and Tómács (1999) [4] Theorem 4.2.

Theorem 2.2.1. *Let $\{X_{\mathbf{n}}, \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d\}$ be a sequence of random variables and suppose that for some $C > 0$, $\beta > 0$*

$$|\mathrm{E}(X_{\mathbf{k}} X_{\mathbf{l}})| \le C \left(\frac{|\mathbf{k}|}{|\mathbf{l}|}\right)^{\beta} \frac{1}{(\log^+ |\mathbf{l}|)^{d-1}}$$

for all $\mathbf{k} \le \mathbf{l}$ $(\mathbf{k}, \mathbf{l} \in \mathbb{N}^d)$. Then

$$\frac{1}{|\log \mathbf{n}|} \sum_{\mathbf{k} \le \mathbf{n}} \frac{X_{\mathbf{k}}}{|\mathbf{k}|} \to 0 \quad (\mathbf{n} \to \infty) \quad \text{a.s.}$$

Sequences with superadditive moment structures. Noszály and Tómács (2000) [12] Proposition 11 and Fazekas, Klesov, Noszály and Tómács (1999) [4] Theorem 4.1.

Theorem 2.2.2. *Let $r > 0$, $\alpha > 1$ and suppose that $\{X_{\mathbf{n}}, \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d\}$ has r-th moment function of superadditive structure and $\Delta g^{\alpha}(\mathbf{1}, \mathbf{n})$ is nonnegative for any $\mathbf{n} \in \mathbb{N}^d$. Then for arbitrary $q > 0$*

$$\sum_{\mathbf{n}} \frac{g^{\alpha}(\mathbf{1}, \mathbf{n})}{|\mathbf{n}|^{1+r/q}} < \infty$$

implies

$$\frac{S_{\mathbf{n}}}{|\mathbf{n}|^{1/q}} \to 0 \quad (\mathbf{n} \to \infty) \quad \text{a.s.}$$

Brunk—Prohorov type theorems. Noszály and Tómács (2000) [12] Proposition 13.

Theorem 2.2.3. *Let $(X_{\mathbf{n}}, \mathcal{F}_{\mathbf{n}})$ be a martingale difference,*

$$\mathrm{E}\Big(\mathrm{E}(X_{\mathbf{l}} \mid \mathcal{F}_{\mathbf{m}}) \Bigm| \mathcal{F}_{\mathbf{n}}\Big) = \mathrm{E}\left(X_{\mathbf{l}} \mid \mathcal{F}_{\min(\mathbf{m},\mathbf{n})}\right) \tag{2.2.1}$$

for all $\mathbf{l}, \mathbf{m}, \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d$. Let $p \ge 1$, $C > 0$ and $r < p + 1$. Suppose that $\sum_{\mathbf{m} \le \mathbf{n}} \mathrm{E}|X_{\mathbf{m}}|^{2p} \le C|\mathbf{n}|^r$. Then $S_{\mathbf{n}}/|\mathbf{n}| \to 0$ $(\mathbf{n} \to \infty)$ a.s.

Noszály and Tómács (2000) [12] Proposition 14.

Theorem 2.2.4. *Let $(X_{\mathbf{n}}, \mathcal{F}_{\mathbf{n}})$ be a martingale difference having property (2.2.1) and let $p \geq 1$. When $p > 1$, suppose that $\mathrm{E}|X_{\mathbf{n}}|^{2p}$ is sequence of product type. Then*

$$\sum_{\mathbf{n}} \frac{\mathrm{E}|X_{\mathbf{n}}|^{2p}}{b_{\mathbf{n}}^{2p}} |\mathbf{n}|^{p-1} < \infty$$

implies $S_{\mathbf{n}}/b_{\mathbf{n}} \to 0$ $(\mathbf{n} \to \infty)$ a.s., provided that $b_{\mathbf{n}}$ is a nondecreasing, positive, unbounded sequence of product type and either $p = 1$ or $|\mathbf{n}|^{\delta}/b_{\mathbf{n}}$ is nonincreasing for some $\delta > (p-1)/2p$.

3. Convergence rates in the law of large numbers for arrays of Banach space valued random elements

Let Φ_0 denote the set of functions $f\colon [0,\infty) \to [0,\infty)$, that are nondecreasing. A function $f \in \Phi_0$ is said to satisfy the Δ_2-condition ($f \sim \Delta_2$) if there exists a constant $c > 0$, such that $f(2t) \leq cf(t)$ for all $t > 0$.

Let B be a real separable Banach space with norm $||.||$, and let $\{X_{nk}, n \in \mathbb{N}, k = 1, \ldots, n\}$ be an array of B-valued r.v.'s. It is *rowwise independent*, if $X_{n1}, \ldots, X_{nn}$ are independent r.v.'s for all $n \in \mathbb{N}$. Let $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_{nk}$.

Definition 3.1. (Gut (1992) [8].) We say that the array $\{X_{nk}, n \in \mathbb{N}, k = 1, \ldots, n\}$ is *weakly mean dominated* by the r.v. X, if for some $\gamma > 0$,

$$\frac{1}{k_n} \sum_{k=1}^{k_n} \mathrm{P}(||X_{nk}|| > t) \leq \gamma \mathrm{P}(|X| > t) \quad \text{for all} \quad t \geq 0 \quad \text{and} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Tómács (2003) [14] Theorem 3.1.

Theorem 3.2. *Let $\{X_{nk}, n \in \mathbb{N}, k = 1, \ldots, n\}$ be an array of rowwise independent B-valued r.v.'s which is w.m.d. by the r.v. X. We assume that there exists a sequence $\{\gamma_n, n \in \mathbb{N}\}$ of positive real numbers such that $\{||S_n||/\gamma_n, n \in \mathbb{N}\}$ is bounded in probability. Let $\alpha, \vartheta, \varphi \in \Phi_0$, α be not bounded, $\vartheta, \varphi \sim \Delta_2$, $\vartheta \not\equiv 0$ and*

$$\beta(n) = \varphi(\alpha(n+1)) - \varphi(\alpha(n)), \quad n = 0, 1, 2, \ldots.$$

We assume that

$$\mathrm{E}\,\varphi(|X|) < \infty, \quad \mathrm{E}\,\vartheta(|X|) < \infty \quad \textit{and} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{\alpha(n)}{\gamma_n} = \infty.$$

Let

$$\mu(n) = \beta(n-1) \quad \textit{for all} \quad n \in \mathbb{N}$$

or

$$\mu(n) = \beta(n) \quad \textit{for all} \quad n \in \mathbb{N}.$$

In case $\mu(n) = \beta(n)$ *assume that there exists a constant* $c > 0$ *such that*

$$c\beta(n) \leq \beta(n-1)$$

for $n \in \mathbb{N}$ *large enough. Let* $n_0 \in \mathbb{N}$ *be such that* $\vartheta(\alpha(n)) > 0$ *for all* $n \geq n_0$. *If there exist* $j \in \mathbb{N}$ *and* $r > 0$ *such that*

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n} \left(\frac{rn + \vartheta(\gamma_n)}{\vartheta(\alpha(n))} \right)^{2^j} < \infty$$

then

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n} \mathrm{P}\big(\|S_n\| > \varepsilon\alpha(n)\big) < \infty \quad \textit{for all} \quad \varepsilon > 0.$$

Remark 3.3. The following known Baum—Katz type results are corollaries of the previous theorem.

- Theorem 3.1, Theorem 3.5 and Theorem 6.2 of Fazekas (1992) [2],
- a version of Corollary 4.1 and 4.2 of Hu, Rosalsky, Szynal and Volodin (1999) [9],
- Theorem 3.3 of Jain (1975) [10].

E.g. Theorem 3.1 of Fazekas (1992) [2] is the following.

Theorem 3.4. *Let* $0 < p \leq 2$, $s \geq p$, $rp > s$ *and let* B *be of type* p. *Let* $\{X_{nk}, n \in \mathbb{N}, k = 1, \ldots, n\}$ *be an array of rowwise independent* B*-valued r.v.'s which is weakly mean dominated by the r.v.* X. *Assume that* $\mathrm{E}X_{nk} = \mathbf{0}$ $(k = 1, \ldots, n)$ *in case* $p \geq 1$. *If* $\mathrm{E}\,|X|^s < \infty$, *then*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{r-2} \mathrm{P}\left(\|S_n\| > \varepsilon n^{r/s}\right) < \infty \quad \textit{for all} \quad \varepsilon > 0.$$

4. Almost sure central limit theorems for m-dependent random fields

Denote $\mathcal{B}$ the σ-algebra of Borel-sets of $\mathbb{R}$. Let δ_x be the *unit mass* at point $x \in \mathbb{R}$, that is $\delta_x : \mathcal{B} \to \mathbb{R}$, $\delta_x(B) = 1$ if $x \in B$ and $\delta_x(B) = 0$ if $x \notin B$. $\Rightarrow \mu$

denotes weak convergence to the probability measure μ. Let $\{X_{\mathbf{n}}, \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d\}$ be a multiindex sequence of r.v.'s, where d is a fixed positive integer. Suppose that $\mathrm{E}X_{\mathbf{n}} = 0$ and $\mathrm{D}^2 X_{\mathbf{n}} < \infty$ for all $\mathbf{n} \in \mathbb{N}^d$. Let $||\mathbf{n}|| = \max\{n_1, \ldots, n_d\}$ and $d(V_1, V_2) = \inf\{||\mathbf{n} - \mathbf{m}|| : \mathbf{n} \in V_1, \mathbf{m} \in V_2\}$, where $V_1, V_2 \subset \mathbb{N}^d$. Let $\sigma(V)$ (where $V \subset \mathbb{N}^d$) be the smallest σ-algebra with respect to which $\{X_{\mathbf{n}}, \mathbf{n} \in V\}$ are measurable.

Recall the well-known concept of m-depence.

Definition 4.1. Let $m \in \mathbb{N}$ be fixed. The random field $\{X_{\mathbf{n}}, \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d\}$ is said to be *m-dependent*, if the σ-algebras $\sigma(V_1)$ and $\sigma(V_2)$ are independent whenever $d(V_1, V_2) > m$, $V_1, V_2 \subset \mathbb{N}^d$.

In the following let $S_{\mathbf{n}} = \sum_{\mathbf{k} \leq \mathbf{n}} X_{\mathbf{k}}$, $B_{\mathbf{n}} = \mathrm{D}^2 S_{\mathbf{n}}$, $\zeta_{\mathbf{n}} = S_{\mathbf{n}} / \sqrt{B_{\mathbf{n}}}$ and let $\mu_{\zeta_{\mathbf{n}}}$ denote the distribution of the r.v. $\zeta_{\mathbf{n}}$.

The following two theorems are extensions of the results on independent $X_{\mathbf{n}}$'s in Fazekas and Rychlik (2001) [6].

Tómács (2002) [13] Theorem 2.1.

Theorem 4.2. *Let $\{X_{\mathbf{n}}, \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d\}$ be an m-dependent random field, $\mathrm{E}X_{\mathbf{n}} = 0$, $\mathbf{n} \in \mathbb{N}^d$. Suppose that*

$$\text{there exist } M, \delta \geq 0, \text{ such that } \mathrm{E}|X_{\mathbf{n}}|^{2+\delta} \leq M < \infty \text{ for all } \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d \tag{4.1}$$

and

$$\text{there exist } \sigma > 0 \text{ and } \mathbf{n}_\sigma \in \mathbb{N}^d \text{ such that } \frac{B_{\mathbf{n}}}{|\mathbf{n}|} \geq \sigma \text{ for all } \mathbf{n} \geq \mathbf{n}_\sigma. \tag{4.2}$$

Let $0 \leq d_k^{(i)} \leq c \log \frac{k+1}{k}$, assume that $\sum_{k=1}^{\infty} d_k^{(i)} = \infty$ for all $i \in \{1, \ldots, d\}$. Let $d_{\mathbf{k}} = \prod_{i=1}^d d_{k_i}^{(i)}$ and $D_{\mathbf{n}} = \sum_{\mathbf{k} \leq \mathbf{n}} d_{\mathbf{k}}$. Then for any probability distribution μ the following two statements are equivalent:

$$\frac{1}{D_{\mathbf{n}}} \sum_{\mathbf{k} \leq \mathbf{n}} d_{\mathbf{k}} \delta_{\zeta_{\mathbf{k}}(\omega)} \Rightarrow \mu \ (\mathbf{n} \to \infty) \text{ for almost every } \omega \in \Omega,$$

$$\frac{1}{D_{\mathbf{n}}} \sum_{\mathbf{k} \leq \mathbf{n}} d_{\mathbf{k}} \mu_{\zeta_{\mathbf{k}}} \Rightarrow \mu \ (\mathbf{n} \to \infty).$$

Tómács (2002) [13] Theorem 2.2.

Theorem 4.3. *Let $\{X_{\mathbf{n}}, \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d\}$ be an m-dependent random field, $\mathrm{E}X_{\mathbf{n}} = 0$, $\mathbf{n} \in \mathbb{N}^d$. Assume that (4.1) and (4.2) hold for some $\delta > 0$. Then*

$$\frac{1}{|\log \mathbf{n}|} \sum_{\mathbf{k} \leq \mathbf{n}} \frac{1}{|\mathbf{k}|} \delta_{\zeta_{\mathbf{k}}(\omega)} \Rightarrow \mathcal{N}(0,1) \ (\mathbf{n} \to \infty) \quad \text{for almost every } \omega \in \Omega.$$

5. On the Rosenthal inequality for mixing fields

Let $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ be a probability space. Let $\mathcal{F}_1$ and $\mathcal{F}_2$ be two σ-algebras in $\mathcal{F}$. The *α-mixing coefficient* is defined as follows.

$$\alpha(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2) := \sup\{|\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(AB)| : A \in \mathcal{F}_1, B \in \mathcal{F}_2\}.$$

Let $d \in \mathbb{N}$ be a fixed positive integer, $I \subseteq \mathbb{Z}^d$, $||\mathbf{n}|| = \max\{|n_1|, \ldots, |n_d|\}$, where $\mathbf{n} = (n_1, \ldots, n_d) \in \mathbb{Z}^d$, and $\varrho(\mathbf{n}, \mathbf{m}) = ||\mathbf{n} - \mathbf{m}||$. Let $Y = \{Y_\mathbf{t} : \mathbf{t} \in I\}$ be a multiindex sequence of r.v.'s. The *α-mixing coefficient of* Y is

$$\alpha_Y(r, u, v) := \sup\{\alpha(\mathcal{F}_{I_1}, \mathcal{F}_{I_2}) : \varrho(I_1, I_2) \geq r,\ \operatorname{card}(I_1) \leq u,\ \operatorname{card}(I_2) \leq v\},$$

where I_1 and I_2 are finite subsets in I, $\mathcal{F}_{I_i} = \sigma\{Y_\mathbf{t} : \mathbf{t} \in I_i\}$, $i = 1, 2$.

Let T be a finite set in I. Introduce the following notation.

$$L(\mu, \varepsilon, T) = \sum_{\mathbf{t} \in T} \left(\mathrm{E}|Y_\mathbf{t}|^{\mu+\varepsilon}\right)^{\mu/(\mu+\varepsilon)} = \sum_{\mathbf{t} \in T} ||Y_\mathbf{t}||^{\mu}_{\mu+\varepsilon}.$$

$$D(h, \varepsilon, T) = \begin{cases} L(h, 0, T), & \text{if } 0 < h \leq 1, \\ L(h, \varepsilon, T), & \text{if } 1 < h \leq 2, \\ \max\{L(h, \varepsilon, T), L^{h/2}(2, \varepsilon, T)\}, & \text{if } 2 < h. \end{cases}$$

Let $s_r = \operatorname{card}(\{\mathbf{t} \in \mathbb{Z}^d : ||\mathbf{t}|| = r\} \cap I)$, $b_r = \operatorname{card}(\{\mathbf{t} \in \mathbb{Z}^d : ||\mathbf{t}|| \leq r\} \cap I)$ and

$$c^{(\alpha)}_{u,h-u} := 8u!(h-u-1)!(h-1)! \sum_{r=1}^{\infty} \left(\alpha_Y(r, u, h-u)\right)^{\varepsilon/(h+\varepsilon)} s_r b_r^{h-2}.$$

The following theorem is a version of Theorem 1 of Doukhan (1994) [1]. In the proof of that theorem we have found a gap. For our version we gave detailed proof.

Fazekas, Kukush and Tómács [5] Theorem.

Theorem 5.1. *Let $l > 1$ and $\varepsilon > 0$. Let $\{Y_\mathbf{t}, \mathbf{t} \in I\}$ be centered random variables with $\mathrm{E}|Y_\mathbf{t}|^{l+\varepsilon} < \infty$, $\mathbf{t} \in I$. Let h be the smallest even integer with $h \geq l$. Assume that $c^{(\alpha)}_{u,h-u} < \infty$ for $u = 1, \ldots, h-1$. Then there is a constant $K_{(\alpha)}$ such that*

$$\mathrm{E}\left|\sum_{\mathbf{t} \in T} Y_\mathbf{t}\right|^l \leq K_{(\alpha)} D(l, \varepsilon, T) \tag{5.1}$$

for any finite subset T of I.

Remark 5.2. $K_{(\alpha)}$ does not depend on T but it depends on the mixing coefficients and l. If $0 < \varepsilon < l/2$, then $K_{(\alpha)} = H_h^{(\alpha)} C_l$, where

$$H_h^{(\alpha)} = 1 + \sum_{u=1}^{h-1} c_{u,h-u}^{(\alpha)} + \sum_{u=2}^{h-2} \binom{h}{u} H_u^{(\alpha)} H_{h-u}^{(\alpha)},$$
$$C_l = 2^{(h-l+\varepsilon)(2h+2l-1)/\varepsilon}.$$

If l is an even integer, then one can put $C_l = 1$. Inequality (5.1) is always satisfied for $0 < l \leq 1$, if we replace $K_{(\alpha)}$ with 1.

6. References

[1] P. Doukhan, Mixing. Properties and examples, New York: Springer, (1994).

[2] I. Fazekas, Convergence rates in the law of large numbers for arrays, Publ. Math. Debrecen, 41/1-2 (1992) 53–71.

[3] I. Fazekas, O. I. Klesov, A general approach to the strong law of large numbers, Theory of Probability Applications, 45/3, (2000) 568–583.

[4] I. Fazekas, O. I. Klesov, Cs. Noszály, T. Tómács, Strong laws of large numbers for sequences and fields, (Proceedings of the Third Ukrainian-Scandinavian Conference in Probability Theory and Mathematical Statistics 8–12 June 1999. Kyiv, Ukraine) Theory of Stochastic Processes, Vol.5 (21) No.3-4, (1999) 91–104.

[5] I. Fazekas, A. G. Kukush, T. Tómács, On the Rosenthal inequality for mixing fields, Ukrainian Math. Journal, 52 No3 (2000) 266–276.

[6] I. Fazekas, Z. Rychlik, Almost sure central limit theorems for random fields, Technical Report No. 2001/12, University of Debrecen, Hungary (submitted to Math. Nachr.).

[7] I. Fazekas, T. Tómács, Strong laws of large numbers for pairwise independent random variables with multidimensional indices, Publ. Math. Debrecen, 53/1-2 (1998) 149–161.

[8] A. Gut, Complete convergence for arrays, Periodica Math. Hungar. 25 (1), (1992) 51–75.

[9] T. C. Hu, A. Rosalsky, D. Szynal, A. I. Volodin, On complete convergence for arrays of rowwise independent random elements in Banach spaces, Stoch. Anal. Appl., 17 (1999) no 6., 963–992.

[10] N. C. Jain, Tail probabilities for sums of independent Banach space valued random variables, Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete 33 (1975) 155–166.

[11] V. M. Kruglov, Strong law of large numbers, Stability Problems for Stochastic Models, V.M. Zolotarev, V.M. Kruglov, V.Yu. Korolev (Eds.) TVP/VSP, Moscow/Utrecht, (1994) 139–150.

[12] Cs. Noszály, T. Tómács, A general approach to strong laws of large numbers for fields of random variables, Annales Univ. Sci. Budapest, 43 (2000) 61–78.

[13] T. Tómács, Almost sure central limit theorems for m-dependent random fields, Acta Acad. Paed. Agr., Sectio Mathematicae, 29 (2002) 91–96.

[14] T. Tómács, Convergence rates in the law of large numbers for arrays of Banach space valued random elements, Preprints No. 305, Technical Report No. 2003/9, University of Debrecen, Hungary. (Közlésre benyújtva.)

7. Publications of Tibor Tómács

1. Tómács T., A rekurzív sorozatok egy alkalmazásáról, Acta Acad. Paed. Agriensis, Sectio Mathematicae, 21 (1993) 5–13.

2. Tómács T., Egy rekurzív sorozat tagjainak átlagáról, Acta Acad. Paed. Agriensis, Sectio Mathematicae, 22 (1994) 31–37.

3. Fazekas I., Tómács T., A valószínűségszámítás szemléletes oktatásáról, A matematika tanítása, IV. évfolyam 1996/4. 8–11.

4. K. Liptai, T. Tómács, Pure powers in recurrence sequences, Acta Acad. Paed. Agriensis, Sectio Mathematicae, 24 (1997) 35–40.

5. I. Fazekas, T. Tómács, Strong laws of large numbers for pairwise independent random variables with multidimensional indices, Publicationes Mathematicae, Debrecen, 53/1-2 (1998) 149–161.

6. I. Fazekas, O. I. Klesov, Cs. Noszály, T. Tómács, Strong laws of large numbers for sequences and fields, (Proceedings of the Third Ukrainian-Scandinavian Conference in Probability Theory and Mathematical Statistics 8–12 June 1999. Kyiv, Ukraine) Theory of Stochastic Processes, Vol.5 (21) No.3-4, (1999) 91–104.

7. T. Tómács, A moment inequality for the maximum partial sums with a generalized superadditive structure, Acta Acad. Paed. Agriensis, Sectio Mathematicae, 26 (1999) 75–79.

8. I. Fazekas, A. G. Kukush, T. Tómács, On the Rosenthal inequality for mixing fields, Ukrainian Math. Journal, 52 No3 (2000) 266–276.

9. T. Tómács, Convergence of homogeneous matrix-valued Λ-martingales, Acta Acad. Paed. Agriensis, Sectio Mathematicae, 27 (2000) 53–56.

10. Cs. Noszály, T. Tómács, A general approach to strong laws of large numbers for fields of random variables, Annales Univ. Sci. Budapest, 43 (2000) 61–78.

11. T. Tómács, Almost sure central limit theorems for m-dependent random fields, Acta Acad. Paed. Agriensis, Sectio Mathematicae, 29 (2002) 91–96.

Technical report

1. I. Fazekas, T. Tómács, Strong law of large numbers for pairwise independent random variables with multidimensional indices, Technical Report No. 1996/15, University of Debrecen, Hungary.

2. Cs. Noszály, T. Tómács, A general approach to strong laws of large numbers for fields of random variables, Technical Report No. 1999/10, University of Debrecen, Hungary.

3. T. Tómács, Convergence rates in the law of large numbers for arrays of Banach space valued random elements, Preprints No. 305, Technical Report No. 2003/9, University of Debrecen, Hungary. (Közlésre benyújtva.)

Konferenciák

1. I. Fazekas, T. Tómács, Strong laws of large numbers for pairwise independent random variables with multidimensional indices, XVIII Seminar on Stability Problems of Stochastic Models, 26th of January – 1st of February 1997. Debrecen-Hajdúszoboszló, Hungary.

2. Tómács T., Mátrix értékű homogén Λ-martingálok konvergenciája, Magyar Tudomány Napja 2001., Eszterházy Károly Főiskola, Eger, 2001. november 8.

3. Tómács T., Majdnem biztos centrális határeloszlási tételek m-függő mezőre, „Kiss Péter, az egri és debreceni számelmélész" tudományos emlékülés, Eszterházy Károly Főiskola, Eger, 2002. november 22-23.

Jegyzetek

1. Tómács T., A valószínűségszámítás alapjai, Eger, EKTF Líceum Kiadó, (1997).

2. Liptai K., Mátyás F., Rados M., Sashalminé Kelemen É., Szepessy B., Tómács T., Zay B., Matematika nem matematika szakos hallgatóknak, Eger, EKF Líceum Kiadó (2000).