dr. Szíki Gusztáv Áron
Nagyné dr. Kondor Rita
dr. Kézi Csaba Gábor

Matematikai eszközök mérnöki alkalmazásokban

Debreceni Egyetem Műszaki Kar
Műszaki Alaptárgyi Tanszék

DEBRECENI EGYETEM
MŰSZAKI KAR

Dr. Szíki Gusztáv Áron, Nagyné Dr. Kondor Rita,
Dr. Kézi Csaba Gábor

MATEMATIKAI ESZKÖZÖK MÉRNÖKI ALKALMAZÁSOKBAN

Debreceni Egyetemi Kiadó
Debrecen University Press
2017

Lektorok:
Dr. Kocsis Imre
Tanszékvezető főiskolai tanár
Debreceni Egyetem Műszaki Kar Műszaki Alaptárgyi Tanszék

Dr. Mankovits Tamás
Egyetemi docens, tanszékvezető
Debreceni Egyetem Műszaki Kar Gépészmérnöki Tanszék

ISBN 978 963 318 619 0

Kiadta: a Debreceni Egyetemi Kiadó Debrecen University Press
Felelős kiadó: Karácsony Gyöngyi
Nyomdai munkálatokat
a Debreceni Egyetem sokszorosítóüzeme végezte 2017-ben.
www.dupress.hu

Előszó

Az alapképzésben oktatott analízis, lineáris algebra, vektoranalízis témaköreit feldolgozó könyvek, jegyzetek száma nagy. Ha egy új születik, természetes módon vetődik fel a kérdés: mi adja az új munka egyediségét, mitől lesz jobban használható a többitől.

A könyv, amit az olvasó kezében tart nem a megszokott módon közelít a matematikai ismeretanyaghoz: elsősorban azt hangsúlyozza, hogy miért kell matematikai módszereket, fogalmakat megtanulni, hol és hogyan alkalmazhatók a matematikai ismeretek.

Mivel a könyv a matematika tárgy előadásaihoz és gyakorlataihoz készült, a témakörök követik a tárgy természetes menetét, de az egyes fejezetek kidolgozásakor nem a fogalmak, tételek rendszerezett felsorolása a cél, hanem annak a műszaki vagy gazdasági problémakörnek a bemutatása, ahol az ismereteket a hallgatóknak a későbbi tanulmányaik során alkalmazniuk kell.

Egy-egy témakör bemutatása nem néhány példa leírását jelenti, hanem a problémakör rövid, lényegre törő, de szakmailag korrekt leírását. Az ilyen igényű feldolgozás nehézségét az adja, hogy a szerzőnek értenie kell a matematikához és a feldolgozott szakterülethez is. E könyv szerzőinél ez adott volt, hiszen mindhárman művelői a bemutatott szakterületnek amellett, hogy sok éves tapasztalatuk van a matematika oktatásában.

A Debreceni Egyetem Műszaki Karán az utóbbi évtizedben számos "hagyományos" oktatási segédanyag, jegyzet készült, melyek tételesen tartalmazzák a matematika tárgy anyagát. Az oktatásnak (nem csak a matematika vizsgák eredményére vonatkozó) eredményességére és hasznosságára való törekvés mégis arra késztette a szerzőket, hogy a műszaki mechanika, fizika, kémia, biológia, közgazdaságtan tárgyak tematikájából néhány fontos ismeretkört beépítsenek a matematika előadások és gyakorlatok anyagába. Emellett az is céljuk volt, hogy a geometriai példák valós műszaki problémákhoz kötődjenek. Így például a vizsgált testek, felületek épületelemekhez, mérnöki műtárgyakhoz, gépészeti alkatrészekhez kötődnek. Ebben a munkában mára odáig jutottak, hogy a feldolgozott anyag mennyiségében és minőségében megalapozta egy tankönyv megírását.

A mérnöki szakokon folyó matematikaoktatás a témakörök kidolgozásának, az ismeretek átadásának módszertanában lényegében ma is a klasszikus szemléletmódot követi. Azonban minél több hallgató számára akarjuk (elfogadható eredményességgel) átadni a matematikai ismereteket, annál inkább jelentkezik a probléma, hogy csak kevés hallgató képes a megszokott absztrakciós szinten az ismereteket befogadni. A praktikumhoz való közelítés így nem csak az oktatási célok által motivált törekvés, hanem kényszer is az oktatási folyamatban.

E könyv egyik erőssége, hogy a műszaki és a gazdasági témakörök bemutatására az adott szakterületen elfogadott terminológiát és jelölésrendszert használják a szerzők. Ez azért különösen fontos, mert a tapasztalatok szerint a szakmai tárgyak tanulása során a hallgatók többsége nem veszi észre, hogy a vizsgált példa a matematika órán már ismertetésre került, ha nem ugyanazokat az elnevezéseket hallja.

A könyv megírásakor lényeges szempont volt, hogy a témakörök könnyen visszakereshetők legyenek, amikor valamely szaktárgy keretében tárgyalásra kerülnek. Ha a hallgató újra és újra előveszi a könyvet az aktuális témakörhöz kapcsolódó számítási módszerek átismétlésére, egyre világosabbá válik számára a szaktárgyak és a matematika közötti kapcsolat, és az ismeretei is jobban rögzülnek.

Jelen könyvet kiváltképpen ajánljuk azoknak a matematikát oktató középiskolai, főiskolai vagy egyetemi tanároknak, akik nem rendelkeznek műszaki, természettudományos, vagy közgazdasági végzettséggel, de mindig is érdekelte őket, hogy hol, és hogyan alkalmazhatók a matematikai eszközök és módszerek, amiket tanítanak. Számukra ez a könyv afféle „kincsesláda”, amelyben bármikor keresgélhetnek, és rátalálva egy-egy érdekes alkalmazásra bevihetik azt magukkal az órára, vagy kiadhatják otthoni feladatnak. Mai rohanó világunkban ritkán van arra idő, lehetőség, hogy egy tőlünk távol álló műszaki, természettudományos vagy közgazdaságtudományi szakterületen elmélyedjünk.

Ez a könyv kézen fogva vezeti az olvasót, levéve válláról a terhet, és lényegre törő, olvasmányos formában nyújt betekintést a műszaki és természettudományos szemléletmódba és az alkalmazások széles tárházába.

A szerzők köszönetüket fejezik ki Józsa Bettina Csilla vegyészmérnök egyetemi hallgatónak, aki a jegyzetet gondosan átolvasta, illetve a kémiai alkalmazásoknál hasznos észrevételeivel segítetette a feladatok precíz megfogalmazását és megoldását.

Dr. Kocsis Imre
tanszékvezető főiskolai tanár
és a tankönyv szerzői

1. fejezet

Elemi geometria

1.1. Síkbeli szerkezetek geometriai viszonyai

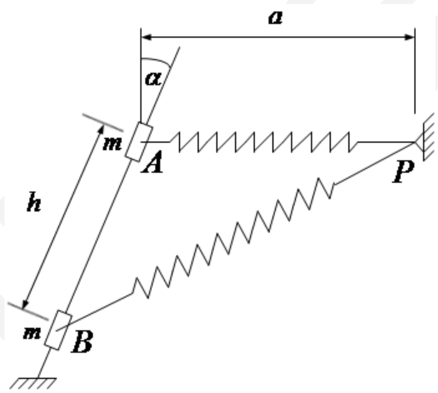
Elméleti összefoglaló. Egy rugó *megnyúlása* (*összenyomódása*) az alábbi összefüggéssel számolható:

$$\Delta l = |l - l_0|,$$

ahol Δl a rugó megnyúlása (összenyomódása);
l a rugó megnyúlt (összenyomott) hossza;
l_0 a rúgó nyújtatlan (összenyomatlan) hossza.

Szükséges matematikai ismeretek. Szögfüggvények alkalmazása, szinusztétel, koszinusz-tétel.

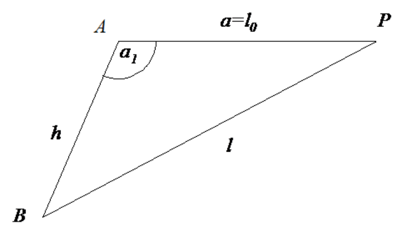
Mintafeladat. Egy kisméretű test a függőleges iránnyal α szöget bezáró AB vezetőrúd mentén mozoghat. A testhez az alábbi ábrán látható módon egy rugót erősítünk. Amikor a test az A pontban van, akkor a rugó megnyúlása nulla.



Adatok:

$$\alpha = 30^\circ;\ h = 0,5\,[\text{m}];\ a = 0,7\,[\text{m}].$$

Mekkora a rugó megnyúlása, amikor a test a B pontban van?
Megoldás:



Az α_1 szög nagysága:

$$\alpha_1 = \alpha + 90^\circ = 120^\circ.$$

Első lépésben felírjuk a koszinusz–tételt a PAB háromszögre:

$$l^2 = a^2 + h^2 - 2a \cdot h \cdot \cos\alpha_1.$$

Behelyettesítve az adatokat azt kapjuk, hogy

$$l^2 = 0,7^2 + 0,5^2 - 2 \cdot 0,7 \cdot 0,5 \cdot \cos 120^\circ$$

$$l^2 = 0,49 + 0,25 + 0,35$$

$$l^2 = 1,09,$$

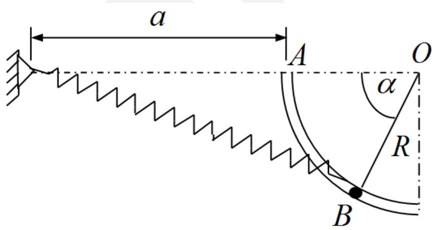
amiből $l \approx 1,04\,[\mathrm{m}]$. Ezt felhasználva

$$\Delta l = |l - l_0| = |1,04 - 0,7| = 0,34\,[\mathrm{m}].$$

A rugó megnyúlása tehát $0,34\,[\mathrm{m}]$.

Gyakorló feladatok.

1.1.1. **Feladat.** Egy kis golyó az ábrán látható R sugarú negyed körív alakú pálya mentén mozoghat. Amikor a golyó a pálya felső, A pontjában van, a rugó megnyúlása nulla. Ezt szemlélteti az alábbi ábra:



Adatok:

$$\alpha = 60^\circ;\; a = 0,2\,[\mathrm{m}];\; R = 0,1\,[\mathrm{m}].$$

Határozzuk meg a rugó megnyúlását az α szöggel jellemzett B pontban!

<u>**Megoldás**</u>:

A rugó nyújtatlan hossza $l_0 = 0,2\,[\mathrm{m}]$. A rugó megnyúlt hossza

$$l^2 = 0,3^2 + 0,1^2 - 2 \cdot 0,3 \cdot 0,1 \cdot \cos 60^\circ$$

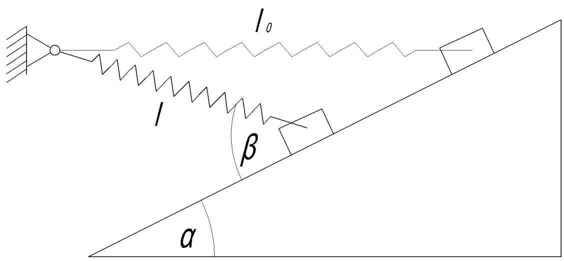
$$l^2 = 0,07,$$

így $l \approx 0,26\,[\mathrm{m}]$. Tehát a rugó megnyúlt hossza

$$\Delta\, l = |l - l_0| \approx 0,26 - 0,2 = 0,06\,[\mathrm{m}],$$

így a rugó megnyúlt hossza $\Delta\, l \approx 0,06\,[\mathrm{m}]$.

1.1.2. **Feladat.** Az α hajlásszögű, sima lejtőre helyezett pontszerű testhez az ábrán látható módon egy nyomórugót erősítünk. A rúgó összenyomódása vízszintes helyzetében nulla.



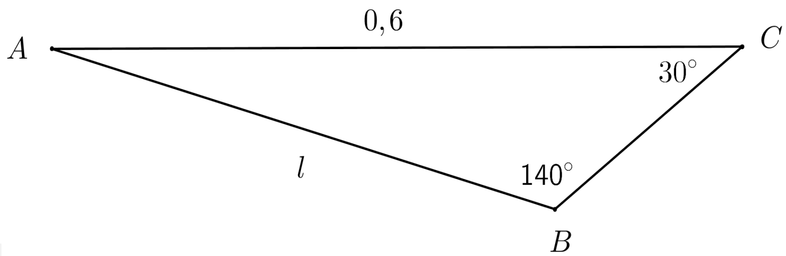
Adatok:

$$\alpha = 30°;\ \beta = 40°;\ l_0 = 0,6\,[\mathrm{m}].$$

A testet elengedve, az a rugó l hosszúsága mellett kerül egyensúlyba. Mekkora a rugó összenyomódása ekkor?

Megoldás:

Tekintsük az alábbi ABC háromszöget:



A fenti háromszögben felírva a szinusz-tételt azt kapjuk, hogy

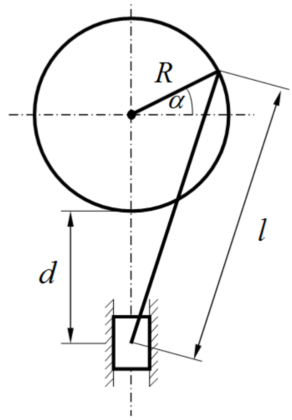
$$\frac{l}{0,6} = \frac{\sin 30°}{\sin 140°}.$$

Az adatok behelyettesítése után az

$$\frac{l}{0,6} = \frac{0,5}{0,6428}$$

egyenlethez jutunk. Az egyenlet megoldása után azt kapjuk, hogy a rugó összenyomódása $l \approx 0,47\,[\mathrm{m}]$.

1.1.3. **Feladat.** A mellékelt ábra egy forgattyús hajtóművet szemléltet.



Adatok:

$$R = 20\,[\text{cm}];\ l = 50\,[\text{cm}];\ \alpha = 20^\circ.$$

Számítsuk ki az alábbi ábrán jelölt d távolságot!

<u>**Megoldás**</u>:

A koszinusz-tételt felírva azt kapjuk, hogy

$$l^2 = R^2 + (d + R)^2 - 2 \cdot R \cdot (d + R) \cdot \cos 110^\circ.$$

Az adatok behelyettesítése után

$$50^2 = 20^2 + (d + 20)^2 - 2 \cdot 20 \cdot (d + 20) \cdot \cos 110^\circ$$

adódik. A nevezetes azonosság elvégzése és a zárójel felbontása után azt kapjuk, hogy

$$2500 = 400 + d^2 + 40d + 400 + 13{,}68d + 273.$$

Összevonát követően a

$$d^2 + 53{,}68d - 1427 = 0$$

másodfokú egyenlethez jutunk. Az egyenlet megoldására $d_1 \approx 19{,}5$, illetve $d_2 \approx -73{,}18$ adódik, így $d > 0$ miatt a keresett d távolság $19{,}5\,[\text{cm}]$.

1.1.4. **Feladat.** Egy állandóan fejlődő üzem vízszükséglete több, mint az a vízmennyiség, amelyet a vezetékcső jelenlegi keresztmetszetével szállítani tud. Szükségessé vált a csövek kicserélése. Az üzem további fejlődésével számolva, olyan csöveket akarnak beépíteni, amelyekkel a jelenlegi vízmennyiség háromszorosát is szállíthatják. Mennyivel kell növelni a cső jelenlegi $3\,[\text{cm}]$-es sugarát?

Megoldás:

Jelöljük x-el azt az értéket, amennyivel meg kell növelnünk a cső sugarát! Ekkor a feltétel szerint

$$(3+x)^2 \cdot \pi = 3 \cdot 3^2 \cdot \pi.$$

A kapott egyenlet mindkét oldalát osszuk el π-vel:

$$(3+x)^2 = 3 \cdot 3^2.$$

Elvégezve a nevezetes azonosságot, az összevonást, majd nullára redukálva az egyenletet azt kapjuk, hogy

$$9 + 6x + x^2 = 27$$
$$x^2 + 6x - 18 = 0.$$

A másodfokú egyenlet megoldóképletét alkalmazva

$$x_{1,2} = \frac{-6 \pm \sqrt{36+72}}{2} = \frac{-6 \pm \sqrt{108}}{2} \approx \frac{-6 \pm 10,4}{2}$$

adódik. A geometriai tartalom miatt a negatív gyököt nem értelmezzük, így azt kapjuk, hogy $x \approx 2,2\,[\mathrm{m}]$. A cső jelenlegi sugarát tehát $x \approx 2,2\,[\mathrm{cm}]$-rel kell megnövelni.

1.1.5. **Feladat.** Egy láda alapja olyan téglalap, amelynek területe $7,2\,[\mathrm{m}^2]$, kerülete pedig $11,6\,[\mathrm{m}]$. Mekkor a láda hosszúsága és szélessége?

Megoldás:

A keresett láda alaplajának oldalait jelöljük a-val és b-vel. Ekkor a feltételek szerint egyrészt

$$2 \cdot (a+b) = 11,6,$$

másrészt

$$a \cdot b = 7,2.$$

Az első egyenletből kifejezzük például a b ismeretlent: $b = 5,8 - a$. Ezt behelyettesítve a második egyenletbe, majd a kapott egyenletet rendezve az

$$a^2 - 5,8a + 7,2 = 0$$

másodfokú egyenlethez jutunk. Ennek megoldása után $a_1 = 4$ vagy $a_2 = 1,8$ adódik. Ezt felhasználva a téglalap másik oldala: $b_1 = 1,8$ vagy $b_2 = 4$. Következésképpen azt kaputt, hogy a láda oldalai $4\,[\mathrm{m}]$ és $1,8\,[\mathrm{m}]$ hosszúak.

1.1.6. **Feladat.** Egy változtatható nyílású, szabályos hatszög alakú csavaranya oldala $a = 2\,[\mathrm{cm}]$ hosszúságú. Milyen x nyílást kell választanunk ahhoz, hogy a csavaranya és a csavarkulcs között pontosan $0,6\,[\mathrm{mm}]$ hézag legyen?

Megoldás:

Első lépésben a szabályos hatszög magasságát kell kiszámolnunk. Ehhez a hatszöget felbontjuk hat egybevágó szabályos háromszögre. A szabályos háromszög magassága

$$m_{\text{háromszög}} = \frac{a \cdot \sqrt{3}}{2} = \frac{20 \cdot \sqrt{3}}{2} \approx 17,32\,[\mathrm{mm}].$$

A hatszög magassága a háromszög magasságának kétszerese, így

$$m_{\text{hatszög}} \approx 34,64\,[\mathrm{mm}].$$

A csavarkulcs nyílásának

$$34,64 + 0,6 = 35,24\,[\mathrm{mm}]$$

nagyságúnak kell lennie.

1.2. Lemezek és testek tömege

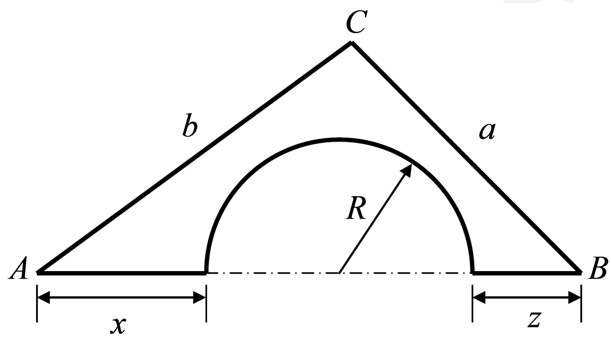
Elméleti összefoglaló. Egy homogén tömegeloszlású test (lemez) tömege az alábbi összefüggéssel számolható:

$$m = \rho \cdot V,$$

ahol m a test (lemez) tömege, ρ a sűrűsége, V a térfogata.

Szükséges matematikai ismeretek. Síkidomok kerület- és területképletei, testek térfogatának kiszámolása.

Mintafeladat. Az alábbi ábra egy vaslemezből kivágott idomot mutat:



A lemez vastagságát d, a vas sűrűségét ρ jelöli.
Adatok:

$$a = 4,5\,[\mathrm{cm}]; \quad b = 6\,[\mathrm{cm}]; \quad x = 2,5\,[\mathrm{cm}]; \quad z = 1,5\,[\mathrm{cm}];$$

$$R = 2\,[\mathrm{cm}]; \quad d = 0,3\,[\mathrm{cm}]; \quad \rho = 7,86\left[\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}\right].$$

Számítsuk ki az idom tömegét!

Megoldás:

A háromszög harmadik oldala:

$$c = x + 2R + z = 2,5 + 4 + 1,5 = 8\,[\mathrm{cm}].$$

Ekkor az ABC háromszög kerülete:

$$K = a + b + c = 4,5 + 6 + 8 = 18,5\,[\mathrm{cm}].$$

Legyen

$$s = \frac{K}{2} = 9,25\,[\mathrm{cm}].$$

Ekkor a Héron–képlet felhasználásával azt kapjuk, hogy az ABC háromszög területe:

$$\begin{aligned}T_\triangle &= \sqrt{s\cdot(s-a)\cdot(s-b)\cdot(s-c)} =\\ &= \sqrt{9,25\cdot(9,25-4,5)\cdot(9,25-6)\cdot(9,25-8)} =\\ &= \sqrt{9,25\cdot 4,75\cdot 3,25\cdot 1,25}\approx 13,36\,[\mathrm{cm}^2].\end{aligned}$$

A felkör területe:

$$T_{\text{félkör}} = \frac{R^2\cdot\pi}{2} = \frac{2^2\cdot\pi}{2}\approx 6,28\,[\mathrm{cm}^2].$$

A lemez területe:

$$T_{\text{lemez}} = T_\triangle - T_{\text{félkör}} \approx 13,36-6,28 = 7,08\,[\mathrm{cm}^2].$$

A vasidom térfogata:

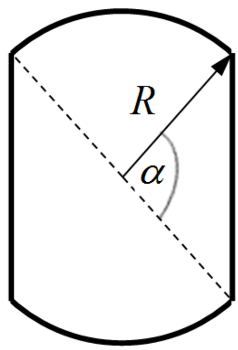
$$V = d\cdot T_{\text{lemez}} = 0,3\cdot 7,08\approx 2,12\,[\mathrm{cm}^3].$$

A vasidom tömege:

$$m = \rho\cdot V\approx 7,86\cdot 2,12\approx 16,66\,[\mathrm{g}].$$

Gyakorló feladatok.

1.2.1. **Feladat.** Az alábbi ábrán egy alumíniumból kivágott idom látható:



Az alumínium sűrűségét ρ jelöli.
Adatok:

$$R = 10\,[\mathrm{cm}];\quad \alpha = 105\,^\circ;\quad m = 250\,[\mathrm{g}];\quad \rho = 2,7\left[\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}\right].$$

Határozzuk meg a lemez d vastagságát!

Megoldás:

Egyrészt $m = \rho \cdot V$, amiből az adatok behelyettesítése után

$$250 = 2,7 \cdot V \qquad \Rightarrow \qquad V \approx 92,59\,[\mathrm{cm}^3]$$

adódik. Következő lépésben kiszámoljuk az alumínium lemez területét. Ehhez felhasználjuk, hogy az alumínium lemez felbontható két egybevágó háromszögre és két egyenlő területű körcikkre. Egyrészt

$$T_{\text{háromszög}} = \frac{10 \cdot 10 \cdot \sin 75^\circ}{2} \approx 48,3\,[\mathrm{cm}^2],$$

másrészt

$$T_{\text{körcikk}} = \frac{R^2 \cdot \pi \cdot \sin 75^\circ}{2} \approx 65,45\,[\mathrm{cm}^2].$$

A síkidom területe:

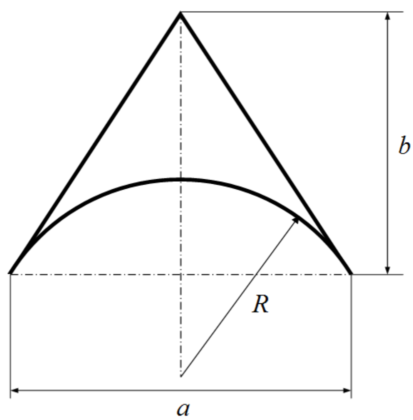
$$T = 2 \cdot (48,3 + 65,45) = 227,5\,[\mathrm{cm}^2].$$

Mivel

$$V = T \cdot d \qquad \Rightarrow \qquad 92,59 = 227,5 \cdot d,$$

ezért az alumíniumidom vastagsága $d \approx 0,41\,[\mathrm{cm}]$.

1.2.2. **Feladat.** Az alábbi ábrán egy rézlemezből kivágott idom látható:



A réz sűrűségét ρ jelöli. A lemez vastagsága d.
Adatok:

$$a = 3,5\,[\mathrm{cm}];\ b = 3\,[\mathrm{cm}];\ R = 2\,[\mathrm{cm}];\ d = 0,3\,[\mathrm{cm}];\ \rho = 8,92\left[\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}\right].$$

Számoljuk ki a rézidom tömegét!

Megoldás:

A körszelet középponti szögét α-val jelölve:

$$\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1,75}{2} \qquad \Rightarrow \qquad \alpha \approx 142,08^\circ.$$

A körcikk területe:

$$T_{\text{körcikk}} = \frac{2^2 \cdot \pi \cdot 142,08^\circ}{360^\circ} \approx 4,96\,[\text{cm}^2].$$

A körszelet területe:

$$T_{\text{körszelet}} = 4,96 - \frac{4 \cdot \sin 142,08^\circ}{2} = 1,23\,[\text{cm}^2].$$

Az idom területe:

$$T = \frac{3,5 \cdot 3}{2} - 3,73 = 1,52\,[\text{cm}^2].$$

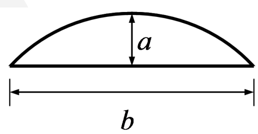
A rézidom térfogata:

$$V = 1,52 \cdot 0,3 = 0,456\,[\text{cm}^3].$$

A rézidom tömege:

$$m = 0,456 \cdot 8,92 \approx 4,07\,[\text{g}].$$

1.2.3. **Feladat.** Az alábbi ábrán alumínium lemezből kivágott idom látható:



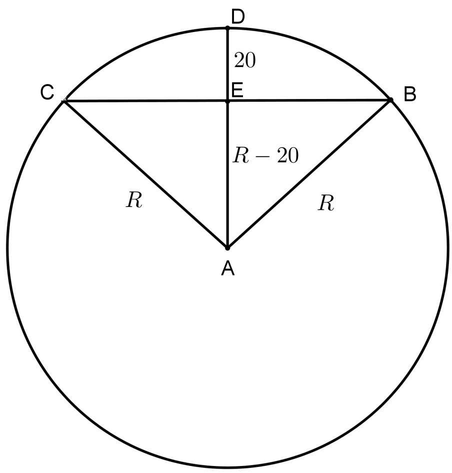
A lemez vastagságát d, az alumínium sűrűségét ρ jelöli.
Adatok:

$$a = 20\,[\text{cm}]; \quad b = 80\,[\text{cm}]; \quad d = 0,5\,[\text{cm}]; \quad \rho = 2,7\left[\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}\right].$$

Határozzuk meg az alumínium idom tömegét!

Megoldás:

Jelöljük R-el annak a körnek a sugarát, amelyből a körszelet származik:



Ekkor az ABC háromszögben a Pitagorasz-tétel alapján

$$(R-20)^2+40^2=R^2$$

adódik. Elvégezve az azonosságot, majd az összevonást, azt kapjuk, hogy

$$R^2-40R+400+1600=R^2 \qquad \Rightarrow \qquad 40R=2000,$$

amiből $R=50\,[\mathrm{cm}]$ adódik. A szokásás módon, az ABC háromszög A csúcsánál lévő szögét α-val jelölve azt kapjuk, hogy

$$\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{4}{5} \qquad \Rightarrow \qquad \alpha\approx 106,26^\circ.$$

A megfelelő körcikk területe:

$$T_{\text{körcikk}}=\frac{R^2\dot{\pi}\cdot\alpha}{360^\circ}=\frac{50^2\cdot\pi\cdot 106,26^\circ}{2}\approx 2318,23\,[\mathrm{cm}^2].$$

Az ABC háromszög területe:

$$T_{\text{háromszög}}=\frac{R^2\cdot\sin\alpha}{2}=\frac{50^2\cdot\sin 106,26^\circ}{2}\approx 1200\,[\mathrm{cm}^2].$$

A körszelet területe:

$$T=2318,23-1200=1118,23\,[\mathrm{cm}^2].$$

Az alumíniumidom térfogata:

$$V=T\cdot d=1118,23\cdot 0,5=559,115\,[\mathrm{cm}^3].$$

A alumíniumidom tömege:

$$m = \rho \cdot V = 2,7 \cdot 559,115 \approx 1510\,[\mathrm{g}].$$

1.2.4. **Feladat.** Mekkora annak a vasból készült két méter hosszú egyenes cső-nek a tömege, amelynek belső átmérője $5,4\,[\mathrm{cm}]$ és a falvastagsága $3\,[\mathrm{mm}]$, ha a vas sűrűsége $7,2\left[\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{dm}^3}\right]$.

Megoldás:

A cső külső átmérője

$$5,4 + 0,6 = 6\,[\mathrm{cm}].$$

A test térfogata:

$$V = 3^2 \cdot \pi \cdot 200 - 2,7^2 \cdot \pi \cdot 200 \approx 1074,42\,[\mathrm{cm}^3].$$

A cső temege:

$$m = \rho \cdot V = 1074,42 \cdot 7,2 \approx 7736[\mathrm{g}] = 7,736\,[\mathrm{kg}].$$

1.2.5. **Feladat.** Egy $100 \times 40 \times 10\,[\mathrm{mm}]$ méretekkel rendelkező aranyrudat szeretnénk vásárolni. Tudjuk, hogy 1 uncia arany ára 1000 dollár. (1 uncia=31,1 gramm). Az arany sűrűsége $19,3\left[\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}\right]$. Hány gramm egy ilyen aranyrúd tömege? Hány forintot ér az aranyrúd, ha 1 dollár 320 forint?

Megoldás:

Az aranyrúd térfogata:

$$V = 100 \cdot 40 \cdot 10 = 40.000\,[\mathrm{mm}^3] = 40\,[\mathrm{cm}^3].$$

Az aranyrúd tömege:

$$m = \rho \cdot V = 19,3 \cdot 40 = 772\,[\mathrm{g}].$$

Az aranyrúd

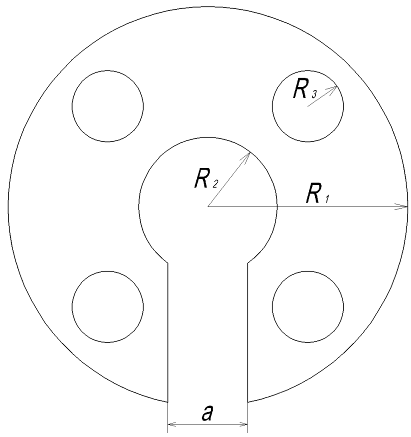
$$\frac{772}{31,1} \approx 24,82$$

uncia tömegű, melynek ára

$$24,82 \cdot 1000 \cdot 320 = 7.942.400$$

forint.

1.2.6. **Feladat.** * Számoljuk ki az alábbi vaslemezből kivágott idom vastagságát:



Adatok:

$$a = 1,2\,[\mathrm{cm}]; \qquad R_1 = 3\,[\mathrm{cm}]; \qquad R_2 = 1\,[\mathrm{cm}];$$
$$R_3 = 0,5\,[\mathrm{cm}]; \qquad m = 43,7\,[\mathrm{g}]; \qquad \rho = 7,86\left[\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}\right].$$

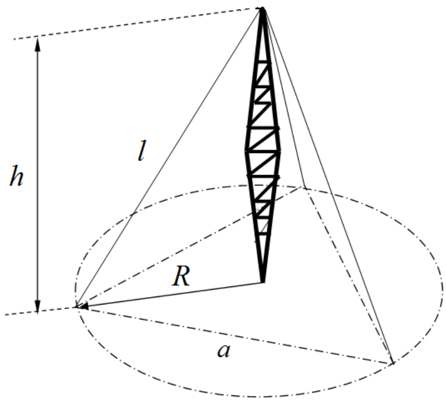
Megoldás:

A vasidom vastagsága $0,3\,[\mathrm{cm}]$.

1.3. Térbeli szerkezetek geometriai viszonyai

Szükséges matematikai ismeretek. Síkidomok területképletei, szögfüggvények, Pitagorasz-tétel, szinusz-tétel és koszinusz-tétel.

Mintafeladat. Az ábrán látható torony stabil helyzetét három, egymással megegyező hosszúságú kötél biztosítja az alábbi ábra szerint.



Adatok:

$$a = 60\,[\mathrm{m}];\ h = 80\,[\mathrm{m}].$$

Határozzuk meg a kötelek hosszúságát és egymással bezárt szögét!

<u>**Megoldás**</u>:

Az alapkör sugara

$$R = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2}{3} a = \frac{\sqrt{3}}{3} a = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot 60 \approx 34,64\,[\mathrm{m}].$$

A kötelek hosszúságát Pitagorasz-tétellel kaphatjuk meg:

$$l^2 = R^2 + h^2.$$

Behelyettesítve az adatokat azt kapjuk, hogy

$$l^2 = 34,64^2 + 80^2 \qquad \Rightarrow \qquad l \approx 87,18\,[\mathrm{m}].$$

A kötelek egymással bezárt szögére felírhatjuk a

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{\frac{a}{2}}{l} \approx 0,344$$

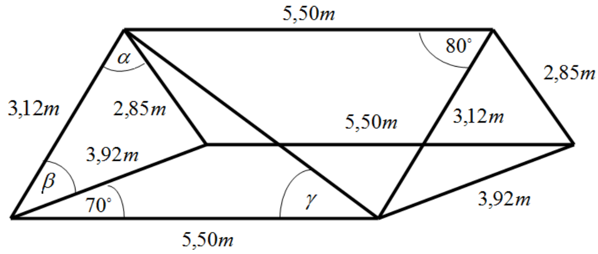
összefüggést, amiből azt kapjuk, hogy

$$\frac{\alpha}{2} \approx 20,13^\circ \qquad \Rightarrow \qquad \alpha \approx 40,26^\circ.$$

Tehát a kötelek hosszúsága $87,18\,[\mathrm{m}]$, az egymással bezárt szögük $40,26^\circ$.

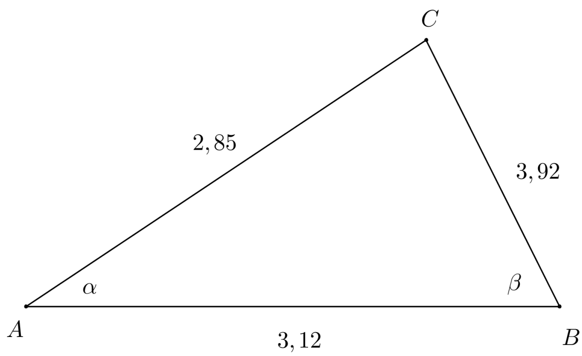
Gyakorló feladatok.

1.3.1. **Feladat.** Számítsuk ki az α, β és γ szögeket az alábbi, rudakból álló szerkezet esetén!



<u>**Megoldás**</u>:

Tekintsük az alábbi háromszöget:



Felírva a koszinusz tételt azt kapjuk, hogy

$$2,85^2 = 3,12^2 + 3,92^2 - 2 \cdot 3,12 \cdot 3,92 \cdot \cos\beta.$$

Elvégezve a kijelölt műveleteket az

$$\begin{aligned} 8,1225 &= 9,7344 + 15,3664 - 24,4608 \cdot \cos\beta \\ -16,9783 &= -24,4608 \cdot \cos\beta \end{aligned}$$

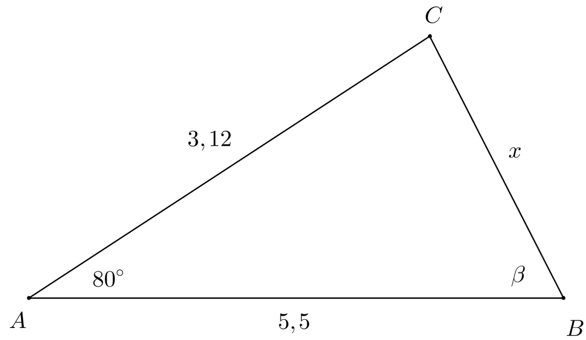
egyenlet adódik, amiből azt kapjuk, hogy

$$\beta \approx 46,04^\circ.$$

Az α szöget a fenti ABC háromszögből szinusz tétel segítségével határozhatjuk meg:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin 46,04^\circ} = \frac{3,92}{2,85} \quad \Rightarrow \quad \alpha \approx 81,95^\circ.$$

A γ szög kiszámolásához tekintsük először az alábbi háromszöget:



Ebben a háromszögben az x értékét koszinusz tétellel kaphatjuk meg:

$$x^2 = 3,12^2 + 5,5^2 - 2 \cdot 3,12 \cdot 5,5 \cdot \cos 80^\circ.$$

A megfelelő műveletek elvégzése után azt kapjuk, hogy $x \approx 5,83\,[\mathrm{m}]$. A γ szöget szinusz tétellel felhasználásával számolhatjuk ki: $\gamma \approx 31,81^\circ$.

1.3.2. **Feladat.** Új úszómedencénk alapja 3 méter sugarú kör.

a) Mennyi idő alatt tudjuk megtölteni 1 méter magasan vízzel, ha a csapból percenként 30 liter víz folyik?

b) Hány forinttal emelkedik az éves vízdíjunk, ha évente 5-ször kell cserélni a vizet a medencében és 1 $[\mathrm{m}^3]$ víz ára 600 forint?

Megoldás:

a) A medence térfogata a „szokásos" jelölések felhasználásával:

$$V = r^2 \cdot \pi \cdot m = 1,5^2 \cdot pi \cdot 1 = 2,25\pi\,[\mathrm{m}^3] \approx 7,07\,[\mathrm{m}^3],$$

így $V = 7070$ liter. Percenként 30 liter víz folyik át a csövön, így

$$\frac{7070}{30} \approx 235,67$$

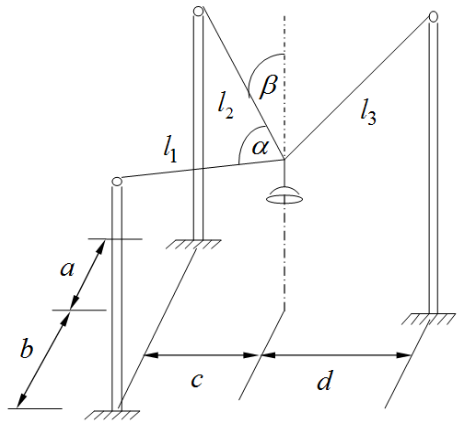
perc alatt telik meg a medence vízzel.

b) Az éves vízdjunk

$$600 \cdot 7,07 \cdot 5 = 21.210$$

forinttal emelkedik.

1.3.3. **Feladat.** Az ábrán látható lámpát három kötél tartja egyensúlyban, amelyek másik vége egy-egy oszlophoz van erősítve.



Adatok:

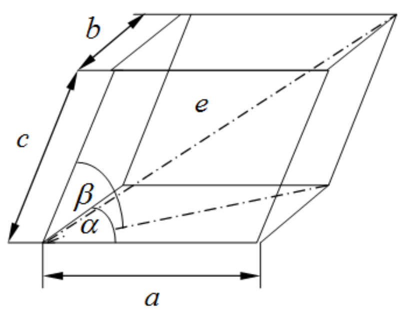
$$l_1 = 1,6\,[\mathrm{m}]; \quad l_2 = 1,8\,[\mathrm{m}]; \quad l_3 = 1,9\,[\mathrm{m}]; \quad a = 0,8\,[\mathrm{m}];$$
$$b = 1\,[\mathrm{m}]; \quad c = 0,5\,[\mathrm{m}]; \quad d = 0,9\,[\mathrm{m}].$$

Határozzuk meg az ábrán látható α és β szögeket!
Megoldás:

A keresett szögek

$$\alpha \approx 63,61^\circ; \qquad \beta \approx 31,48^\circ.$$

1.3.4. **Feladat.** Egy rudakból álló szerkezet az ábrán látható paralelepipedon alakú cellákból épül fel.



Adatok:

$$\alpha = 70^\circ; \quad \beta = 75^\circ; \quad a = 0,72\,[\mathrm{m}]; \quad b = 0,5\,[\mathrm{m}]; \quad c = 0,6\,[\mathrm{m}].$$

Számítsuk ki a cella ábrán jelölt e testátlóját!

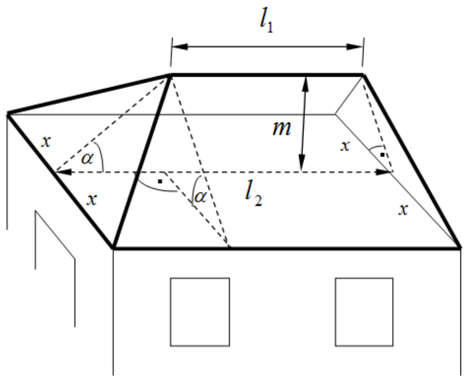
Megoldás:

A cella testátlója $e \approx 1,3\,[\mathrm{m}]$.

1.4. Épületek és mérnöki műtárgyak geometriai viszonyai

Szükséges matematikai ismeretek. Szögfüggvények, Pitagorasz-tétel, síkidomok területképletei.

Mintafeladat. Az alábbi ábrán látható tetőszerkezet geometriai adatai ismertek:



Adatok:

$$m = 8\,[\mathrm{m}]; \quad l_1 = 20\,[\mathrm{m}]; \quad l_2 = 28\,[\mathrm{m}]; \quad f = 3.000\,[\mathrm{Ft}]; \quad p = 10\%.$$

a) A tető fedéséhez síkpalát használunk. Határozzuk meg a fedendő felület nagyságát!

b) A síkpala négyzetméterenként f forintba kerül. A vágás során keletkező veszteség miatt a szükséges mennyiségnél p százalékkal többet kell rendelnünk. Számítsuk ki mennyibe fog kerülni a fedéshez megrendelt palamennyiség!

A trapéz alakú tetőrészek szöge $45°$.

Megoldás:

a) Vezessük be az

$$x = \frac{l_2 - l_1}{2}$$

jelölést. Ekkor $x = 4\,[\mathrm{m}]$. Az ábrán látható háromszög magassága Pitagorasz–tétellel számolható ki:

$$m^2_{\text{háromszög}} = m^2 + x^2.$$

Behelyettesítve az adatokat azt kapjuk, hogy

$$m^2_{\text{háromszög}} = 8^2 + 4^2 \qquad \Rightarrow \qquad m^2_{\text{háromszög}} = 80,$$

így $m_{\text{háromszög}} = \sqrt{80} \approx 8,94\,[\mathrm{m}]$. Ezt felhasználva

$$T_{\text{háromszög}} = \frac{x \cdot m_{\text{háromszög}}}{2} \approx 17,88\,[\mathrm{m}^2].$$

A trapéz alakú rész magassága megegyezik a háromszög magasságával, azaz

$$m_{\text{trapéz}} = m_{\text{háromszög}}.$$

A trapéz alakú rész területe

$$T_{\text{trapéz}} = \frac{l_1 + l_2}{2} \cdot m_{\text{trapéz}} \approx \frac{20 + 28}{2} \cdot 8,94 \approx 214,56\,[\mathrm{m}^2].$$

A teljes tetőfelület nagysága

$$T_{\text{össz}} = 2T_{\text{háromszög}} + 2T_{\text{trapéz}} \approx 2 \cdot 17,88 + 2 \cdot 214,56 \approx 464,88\,[\mathrm{m}^2].$$

b) Az adatok felhasználásával azt kapjuk, hogy a tető fedéséhez szükséges palamennyiség

$$T = 1,1 \cdot T_{\text{össz}} \approx 1,1 \cdot 464,88 \approx 511,37\,[\mathrm{m}^2].$$

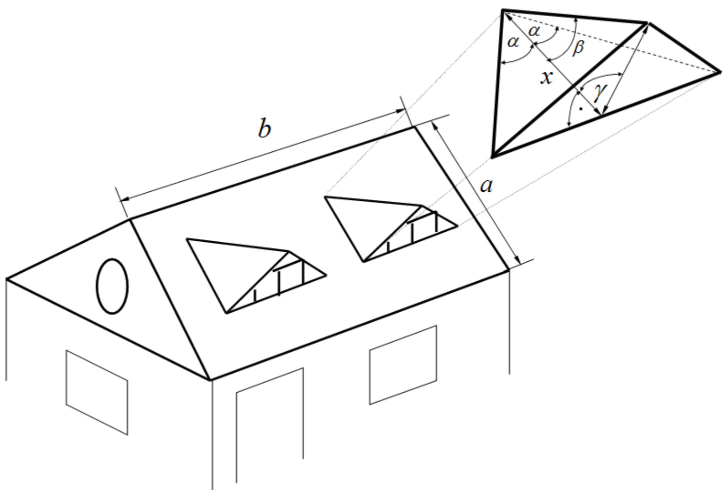
Mivel

$$f \cdot T = 3.000 \cdot 511,37 = 1.534.110,$$

ezért a tető fedéséhez szükséges palamennyiség 1.652.850 Ft-ba kerül.

Gyakorló feladatok.

1.4.1. **Feladat.** A feladat szövege megegyezik a mintafeladatéval.



Adatok:

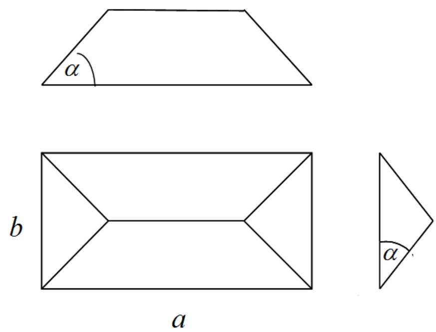
$$a = 8\,[\mathrm{m}]; \quad b = 14\,[\mathrm{m}]; \quad x = 3,5\,[\mathrm{m}]; \quad \alpha = 30^\circ;$$
$$\beta = 30^\circ; \quad \gamma = 60^\circ; \quad f = 3.500\,[\mathrm{Ft}]; \quad p = 15\%.$$

Megoldás:

a) Az összterület $T_{\text{össz}} \approx 114,06\,[\mathrm{m}^2]$.

b) A fedéshez szükséges palamennyiség $459.092\,\mathrm{Ft}$-ba kerül.

1.4.2. **Feladat.** A feladat szövege megegyezik a mintafeladatéval.



Adatok:

$$a = 20\,[\mathrm{m}]; \quad b = 10\,[\mathrm{m}]; \quad \alpha = 45^\circ; \quad f = 2.500\,[\mathrm{Ft}]; \quad p = 10\%.$$

Megoldás:

a) A trapéz területe:

$$T_{\text{trapéz}} = \frac{20+10}{2} \cdot 7,07 = 106,05\,[\mathrm{m}^2],$$

a háromszög területe

$$T_{\text{háromszög}} = \frac{10 \cdot 7,07}{2} = 35,35\,[\mathrm{m}^2],$$

így az összterület

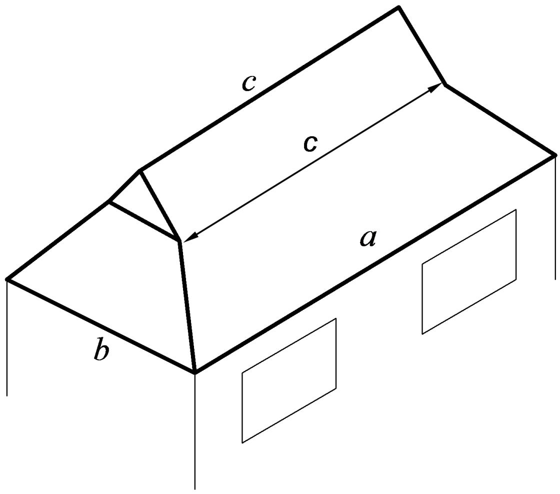
$$T_{\text{össz}} = 282,8\,[\mathrm{m}^2].$$

b) Mivel

$$282,8 \cdot 2.500 \cdot 1,1 = 777.700,$$

ezért a fedéshez szükséges palamennyiség 777.700 forintba kerül.

1.4.3. **Feladat.** A feladat szövege megegyezik a mintafeladatéval.



Adatok:

$$a = 20\,[\mathrm{m}]; \quad b = 15\,[\mathrm{m}]; \quad c = 10\,[\mathrm{m}]; \quad f = 3.200\,[\mathrm{Ft}]; \quad p = 10\%.$$

Megoldás:

a) Az összterület $T_{\text{össz}} \approx 260,3\,[\mathrm{m}^2]$.

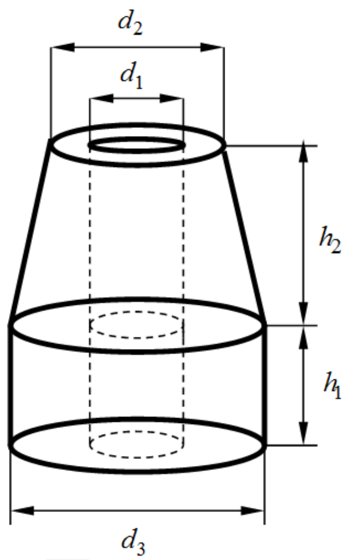
b) A fedéshez szükséges palamennyiség $916.256\,\mathrm{Ft}$-ba kerül.

1.5. Testek felülete

Elméleti összefoglaló. Lásd 1.2. fejezet!

Szükséges matematikai ismeretek. Síkidomok területképletei, testek térfogat- és felszínképletei.

Mintafeladat. Az ábrán látható, fémből készült öntvény geometriai méretei és sűrűsége ismert:



Adatok:

$$d_1 = 20\,[\mathrm{cm}]; \quad d_2 = 40\,[\mathrm{cm}]; \quad d_3 = 60\,[\mathrm{cm}]; \quad h_1 = 30\,[\mathrm{cm}];$$

$$h_2 = 55\,[\mathrm{cm}]; \quad n = 75; \quad \rho = 7,2\left[\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}\right]; \quad f = 0,1\left[\frac{\mathrm{l}}{\mathrm{m}^2}\right].$$

a) Határozzuk meg, hogy mennyi fém szükséges n darab öntvény elkészítéséhez!

b) Az öntvények kívül-belül zománcfesték bevonatot kapnak. Hány liter festék szükséges n darab öntvény lefestéséhez, ha a négyzetméterenkénti festékszükséglet f?

Megoldás:

a) Első lépésben kiszámoljuk a h_1 magasságú test V_1 térfogatát. Ehhez

$$T_1 = T_{\text{nagykör}} - T_{\text{kiskör}} = \left(\frac{d_3}{2}\right)^2 \cdot \pi - \left(\frac{d_1}{2}\right)^2 \cdot \pi \approx$$
$$\approx 2.827,43 - 314,16 = 2.513,27\,[\text{cm}^2].$$

Ezt felhasználva

$$V_1 = T_1 \cdot h_1 \approx 2.513,27 \cdot 30 = 75.398,1\,[\text{cm}^3].$$

Következő lépésben kiszámoljuk a h_2 magasságú test térfogatát. Ehhez először a csonkakúp rész térfogatát határozzuk meg:

$$V_{\text{csonkakúp}} = \frac{\pi}{3} \cdot h_2 \cdot \left[\left(\frac{d_3}{2}\right)^2 + \left(\frac{d_2}{2}\right)^2 + \frac{d_3}{2} \cdot \frac{d_2}{2}\right] \approx$$
$$\approx 109.432\,[\text{cm}^3].$$

A „belső" rész térfogata

$$V_{\text{belső}} = \left(\frac{d_1}{2}\right)^2 \cdot \pi \cdot h_2 \approx 17.278,76\,[\text{cm}^3].$$

Ezt felhasználva

$$V_2 = V_{\text{csonkakúp}} - V_{\text{belső}} \approx 92.153,38\,[\text{cm}^3].$$

A test térfogata

$$V = V_1 + V_2 \approx 75.398,1 + 92.153,38 = 167.551,48\,[\text{cm}^3].$$

Így tehát egy darab öntvény tömege

$$m = \rho \cdot V \approx 7,2 \cdot 167.551,48 \approx 1.206.370\,[\text{g}] \approx 1.206,37\,[\text{kg}].$$

Mivel

$$75 \cdot m \approx 75 \cdot 1.206,37 = 90.477,75,$$

ezért azt kaptuk, hogy 75 darab öntvény elkészítéséhez $90.477,75$ [kg] fém szükséges.

b) Ahogy azt az $a)$ részben már kiszámoltuk, az alsó körgyűrű területe

$$T_{\text{alsó körgyűrű}} \approx 2.513,27\,[\text{cm}^2].$$

A felső körgyűrű területe

$$T_{\text{felső körgyűrű}} = \left(\frac{d_2}{2}\right)^2 \cdot \pi - \left(\frac{d_1}{2}\right)^2 \cdot \pi \approx 942,48\,[\text{cm}^2].$$

A külső henger palástjának területe

$$T_{\text{külső henger}} = d_3 \cdot \pi \cdot h_1 \approx 5.654,87\,[\mathrm{cm}^2].$$

A belső henger palástjának területe

$$T_{\text{belső henger}} = d_1 \cdot \pi \cdot (h_1 + h_2) \approx 5.340,71\,[\mathrm{cm}^2].$$

A csonkakúp palástjának területe

$$T_{\text{csonkakúp palástja}} = \left(\frac{d_3}{2} + \frac{d_2}{2}\right) \cdot \pi \cdot h_2 \approx 8639,38\,[\mathrm{cm}^2].$$

Az összterület

$$T_{\text{össz}} \approx 23.090,71\,[\mathrm{cm}^2] \approx 2,31\,[\mathrm{m}^2].$$

Egy darab öntvény lefestéséhez

$$T_{\text{össz}} \cdot f \approx 0,23\,[\mathrm{l}]$$

festék szükséges. Ezt felhasználva azt kapjuk, hogy 75 darab öntvény lefestéséhez

$$75 \cdot 0,23 \approx 17,25\,[\mathrm{l}]$$

zománcfesték szükséges.

Gyakorló feladatok.

1.5.1. **Feladat.** Szüreteléshez henger alakú felül nyitott vaskádat kívül-belül lefestenek. A kád magassága és átmérője egyaránt $100\,[\mathrm{cm}]$ és $1\,[\mathrm{m}^2]$ lefestéséhez $5\,[\mathrm{dkg}]$ festéket használnak fel. Mennyi festéket kell venni, ha kétszer szükséges a kádat átfesteni? (A kádfal vastagságát elhanyagolhatjuk.)

Megoldás:

Első lépésben ki kell számolnunk a kád felszínét, ami az alaplap területének kétszeresе és a palást területének összege. Az alaplap sugarát r-el, a magasságot m-mel jelölve azt kapjuk, hogy

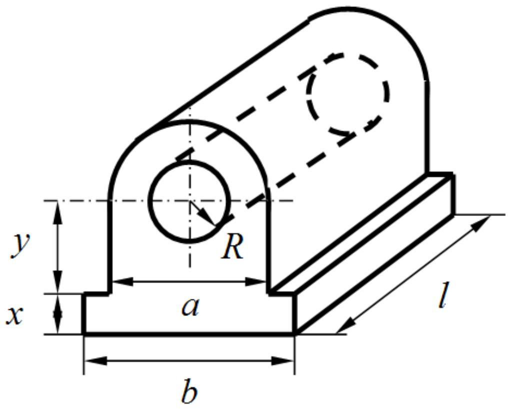
$$\begin{aligned} A = r^2 \cdot \pi + 2r \cdot \pi \cdot m = 50^2 \cdot \pi + 2 \cdot 50 \cdot \pi \cdot 100 = \\ = 12.500\pi\,[\mathrm{cm}^2] \approx 39.250\,[\mathrm{cm}^2]. \end{aligned}$$

A kád felszíne tehát $A = 39,25\,[\mathrm{m}^2]$. A kád egyszeri lefestése esetén a lefestendő felület a kád felszínének kétszerese, azaz $78,5\,[\mathrm{m}^2]$. A kádat kétszer festjük le, így a lefestendő felület összesen $157\,[\mathrm{m}^2]$. Összesen tehát

$$157 \cdot 5 = 785\,[\mathrm{dkg}],$$

azaz $7,85\,[\mathrm{kg}]$ festéket kell felhasználnunk.

1.5.2. **Feladat.** A feladat szövege megegyezik a mintafeladatéval.



Adatok:

$$a = 40\,[\text{cm}];\quad b = 50\,[\text{cm}];\quad l = 80\,[\text{cm}];\quad x = 6\,[\text{cm}];\quad y = 20\,[\text{cm}];$$

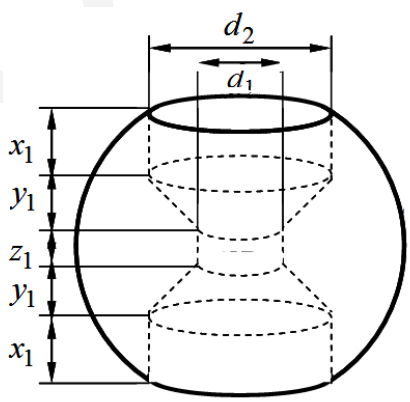
$$R = 10\,[\text{cm}];\quad \rho = 7,2\left[\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}\right];\quad f = 0,15\left[\frac{\text{l}}{\text{m}^2}\right];\quad n = 105.$$

Megoldás:

a) A 105 darab öntvény elkészítéséhez $85.528\,[\text{kg}]$ fém szükséges.

b) A 105 darab öntvény lefestéséhez $34,44\,[\text{l}]$ zománcfesték szükséges.

1.5.3. **Feladat.** A feladat szövege megegyezik a mintafeladatéval.



Adatok:

$$x_1 = 10\,[\text{cm}]; \quad y_1 = 8\,[\text{cm}]; \quad z_1 = 5\,[\text{cm}]; \quad d_1 = 10\,[\text{cm}]; \quad d_2 = 20\,[\text{cm}];$$

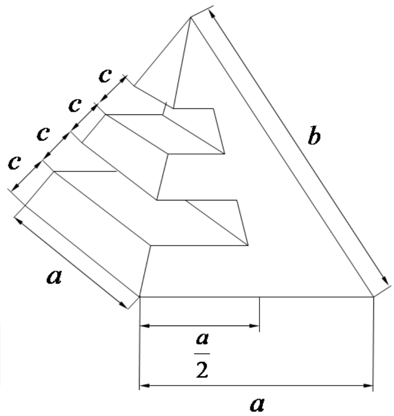
$$\rho = 7,2\left[\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}\right]; \quad f = 0,17\left[\frac{\text{l}}{\text{m}^2}\right]; \quad n = 10.$$

Megoldás:

a) A 10 darab öntvény elkészítéséhez 2.834 [kg] fém szükséges.

b) A 10 darab öntvény lefestéséhez $1,31$ [l] zománcfesték szükséges.

1.5.4. **Feladat.** A feladat szövege megegyezik a mintafeladatéval. Megjegyezzük, hogy az ábrán látható négyzet alapú gúla egyenes.



Adatok:

$$a = 18\,[\text{cm}]; \quad b = 30\,[\text{cm}]; \quad c = 5\,[\text{cm}]; \quad \rho = 2,7\left[\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}\right];$$

$$f = 0,1\left[\frac{\text{l}}{\text{m}^2}\right]; \quad n = 85.$$

Megoldás:

a) A 85 darab öntvény elkészítéséhez $549,44$ [kg] fém szükséges.

b) A 85 darab öntvény lefestéséhez $1,27$ [l] zománcfesték szükséges.

2. fejezet

Vektoralgebra és koordinátageometria

2.1. Erők és eredőjük; anyagi pont egyensúlya

Elméleti összefoglaló. Ha egy test méretei elhanyagolhatóak az adott mechanikai problémában szereplő egyéb méretekhez képest, akkor a testet *anyagi pont*tal modellezzük. Az anyagi pont egy geometriai pont, amelyhez hozzárendeljük a test tömegét.
A klasszikus mechanika Newton törvényeire épül. A törvényeket anyagi pontra fogalmazzuk meg, azzal a feltétellel, hogy annak tömege időben állandó. Newton alapfeltevése szerint mindig található olyan vonatkoztatási (viszonyítási) rendszer, amelyben a törvényei teljesülnek. A fenti kitüntetett vonatkoztatási rendszert *inerciarendszer*nek nevezzük. A műszaki gyakorlatban a Földhöz rögzített vonatkoztatási rendszer inerciarendszernek tekinthető.

Newton I. törvénye (Tehetetlenség törvénye):
Ha egy anyagi pont nincs mechanikai kölcsönhatásban más testekkel, akkor sebessége időben állandó:

$$\overline{v}(t) = \overline{v} = \text{állandó},$$

azaz nyugalomban van, vagy egyenes vonalú egyenletes mozgást végez.

Newton II. törvénye (Mozgásegyenlet):
Ha egy anyagi pont mechanikai kölcsönhatásban van más testekkel, akkor azok együttes hatása minden időpillanatban egyértelműen meghatározza a pont tömegének és gyorsulásának szorzatát. A hatás jellemzésére az *eredő erő* nevű fizikai mennyiséget vezetjük be:

$$\overline{F} = m \cdot \overline{a} \qquad \overline{F} = [\text{N}].$$

Newton III. törvénye (Hatás-ellenhatás törvénye):
Egy test által egy anyagi pontra kifejtett $\overline{F}_{tp}$ és az anyagi pont által a testre kifejtett $\overline{F}_{pt}$ erők között fennáll az alábbi összefüggés:

$$\overline{F}_{tp} = -\overline{F}_{pt}.$$

Newton IV. törvénye (Erőhatások függetlenségének elve):
A Newton II. törvényében szereplő $\overline{F}$ erő egyenlő azon erők vektori összegével, amelyet az egyes testek külön-külön, a többi test hiányában fejtenének ki az anyagi pontra:

$$\overline{F} = \sum_i \overline{F}_i.$$

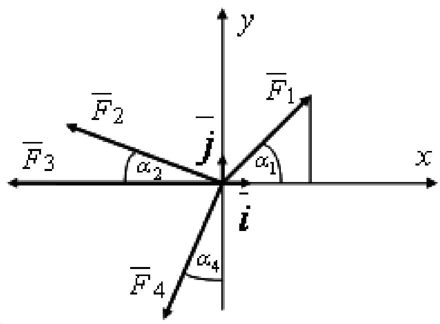
Anyagi pont egyensúlya:
Az anyagi pont egyensúlyban van, ha a rá ható eredő erő zérus:

$$\overline{F} = \sum_i \overline{F}_i = \overline{0}.$$

Ekkor Newton II. törvénye alapján a pont gyorsulása zérus, azaz nyugalomban van, vagy egyenes vonalú egyenletes mozgást végez.

Szükséges matematikai ismeretek. Szögfüggvények, vektorműveletek, vektor hosszának kiszámítása és komponensekre bontása Descartes-féle derékszögű koordinátarendszerben.

Mintafeladat. Az alábbi ábrán látható négy erő vektorkoordinátás alakban adott.



Adatok:

$$\overline{F}_1 = 4\overline{i} + 4\overline{j}\,[\text{N}]; \qquad \overline{F}_2 = -6\overline{i} + 2\overline{j}\,[\text{N}];$$
$$\overline{F}_3 = -8\overline{i}\,[\text{N}]; \qquad \overline{F}_4 = -2\overline{i} - 6\overline{j}\,[\text{N}].$$

a) Adjuk meg az erőrendszer eredő erejét vektorkoordinátás alakban!
b) Határozzuk meg az eredő erő nagyságát és az $\overline{i}$ és $\overline{j}$ egységvektorokkal bezárt szögét!
c) Határozzuk meg az ábrán látható α_1, α_2 és α_4 szögeket!
d) Szerkesztéssel is határozzuk meg az eredő erőt!

Megoldás:

a) Az eredő erő

$$\overline{F} = \overline{F}_1 + \overline{F}_2 + \overline{F}_3 + \overline{F}_4 =$$
$$= 4\overline{i} + 4\overline{j} - 6\overline{i} + 2\overline{j} - 8\overline{i} - 2\overline{i} - 6\overline{j} = -12\overline{i}\,[\text{N}].$$

b) Az eredő erő nagysága

$$|\overline{F}| = F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = \sqrt{(-12)^2 + 0^2} = 12\,[\mathrm{N}].$$

Itt F_x és F_y az $\overline{F}$ eredő erő x és y irányú komponensét jelöli.
Az eredő erő $\overline{i}$ egységvektorral bezárt szöge 180°, míg a $\overline{j}$ egységvektorral bezárt szöge 90°.

c) Az α_1 szög nagysága:

$$\operatorname{tg}\alpha_1 = \left|\frac{F_{1y}}{F_{1x}}\right| = \frac{4}{4} = 1 \quad \Rightarrow \quad \alpha_1 = 45^\circ.$$

Az α_2 szög nagysága:

$$\operatorname{tg}\alpha_2 = \left|\frac{F_{2y}}{F_{2x}}\right| = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad \alpha_2 \approx 18,43^\circ.$$

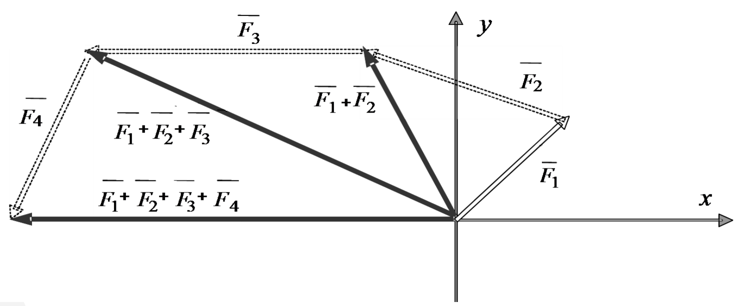
Mivel

$$\left|\frac{F_{4y}}{F_{4x}}\right| = \frac{6}{2} = 3,$$

ezért az α_4 szög nagysága:

$$\alpha_4 = 90^\circ - \operatorname{arctg}(3) \approx 18,43^\circ.$$

d) Az eredő erő megszerkesztését az alábbi ábra mutatja:



Gyakorló feladatok.

2.1.1. **Feladat.** Négy erő vektorkoordinátás alakban adott.
Adatok:

$$\overline{F}_1 = 4\overline{i} + 2\overline{j} + \overline{k}\,[N]; \qquad \overline{F}_2 = -6\overline{i} + \overline{j} - 4\overline{k}\,[\mathrm{N}];$$

$$\overline{F}_3 = -2\overline{i} + 3\overline{j} - 5\overline{k}\,[\mathrm{N}]; \qquad \overline{F}_4 = -2\overline{i} - 6\overline{j}\,[\mathrm{N}].$$

a) Adjuk meg az erőrendszer eredő erejét vektorkoordinátás alakban!

b) Határozzuk meg az eredő erő nagyságát!

Megoldás:

a) Az eredő erő

$$\begin{aligned}\overline{F} &= \overline{F}_1 + \overline{F}_2 + \overline{F}_3 + \overline{F}_4 = 4\overline{i} + 2\overline{j} + \overline{k} - \\ &- 6\overline{i} + \overline{j} - 4\overline{k} - 2\overline{i} + 3\overline{j} - 5\overline{k} - 2\overline{i} - 6\overline{j} = -6\overline{i} - 8\overline{k}\,[\mathrm{N}].\end{aligned}$$

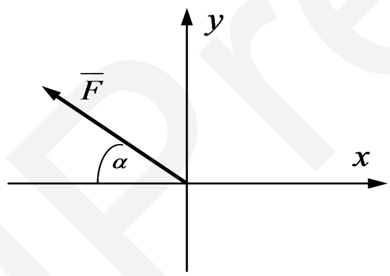
Azt kaptuk tehát, hogy az eredő vektor

$$\overline{F} = \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ -8 \end{pmatrix} [\mathrm{N}].$$

b) Az eredő erő nagysága

$$F = \sqrt{(-6)^2 + (-8)^2} = 10\,[\mathrm{N}].$$

2.1.2. **Feladat.** Az $\overline{F}$ erő nagysága és az x-tengellyel bezárt szöge ismert.



Adatok:

$$|\overline{F}| = F = 500\,\mathrm{N};\ \alpha = 40^\circ.$$

Határozzuk meg a koordinátáit az ábrán látható koordinátarendszerben!

Megoldás:

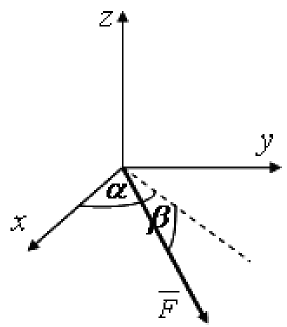
Az x irányú komponens

$$F_x = -F \cdot \cos\alpha \approx -383\,[\mathrm{N}].$$

Az y irányú komponens

$$F_y = F \cdot \sin\alpha \approx 321,4\,[\mathrm{N}].$$

2.1.3. **Feladat.** Az $\overline{F}$ erő nagysága, az xy síkkal bezárt β szöge, valamint az xy síkra eső merőleges vetületének x-tengellyel bezárt α szöge ismert.



Adatok:

$$|\overline{F}| = F = 700\,[\mathrm{N}];\ \alpha = 50^\circ;\ \beta = 20^\circ.$$

Határozzuk meg az $\overline{F}$ erő koordinátáit!

Megoldás:

Az eredő erő z irányú komponense

$$F_z = -F \cdot \sin\beta \approx -239,41\,[\mathrm{N}].$$

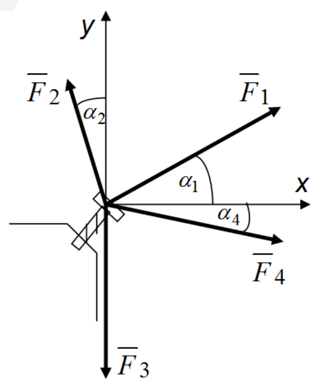
Jelöljük az $\overline{F}$ erőnek az xy síkra eső merőleges vetületét F_{xy}-nal. Ekkor

$$F_x = F_{xy} \cdot \cos\alpha = F \cdot \cos\beta \cdot \cos\alpha \approx 422,8\,[\mathrm{N}].$$

Másrészt

$$F_y = F_{xy} \cdot \sin\alpha = F \cdot \cos\beta \cdot \sin\alpha \approx 503,9\,[\mathrm{N}].$$

2.1.4. **Feladat.** Egy csavarfejre négy erő hat az ábra szerint. Az erők nagysága, valamint a koordinátatengelyekkel bezárt szöge ismert.



Adatok:

$$F_1 = 150\,[\text{N}]; \quad F_2 = 80\,[\text{N}]; \quad F_3 = 110\,[\text{N}]; \quad F_4 = 100\,[\text{N}];$$
$$\alpha_1 = 30^\circ; \quad \alpha_2 = 20^\circ; \quad \alpha_4 = 15^\circ.$$

a) Adja meg az erőrendszer eredő erejét koordinátáival!

b) Adja meg az eredő nagyságát és x-tengellyel bezárt szögét!

Megoldás:

a) Az eredő erő x koordinátája:

$$F_x = 199,13\,[\text{N}].$$

Az eredő erő y koordinátája:

$$F_y = 14,3\,[\text{N}].$$

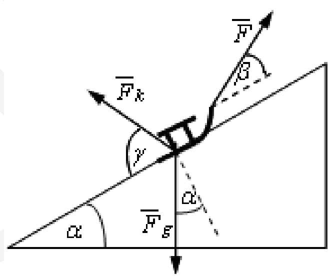
b) Az eredő erő nagysága:

$$|\overline{F}| = F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = 199,64\,[\text{N}].$$

Az eredő erő x-tengellyel bezárt szöge:

$$\operatorname{tg}\alpha = \left|\frac{F_y}{F_x}\right| = \left|\frac{14,3}{199,13}\right| \quad \Rightarrow \quad \alpha \approx 4,11^\circ.$$

2.1.5. **Feladat.** Az ábrán látható szánkó a rá ható $\overline{F}$, $\overline{F}_g$ és $\overline{F}_k$ erők hatására nyugalomban van.



Adatok:

$$F = 200\,[\text{N}]; \ F_g = 210\,[\text{N}]; \ \alpha = 30^\circ; \ \beta = 20^\circ.$$

Válasszunk célszerű koordinátarendszert, majd írjuk fel benne a szánkó x, y és z irányú egyensúlyi egyenleteit! A kapott egyenletrendszerből határozzuk meg az ismeretlen $\overline{F}_k$ erő nagyságát, valamint a lejtő síkjával bezárt γ szögét.

Megoldás:

A keresett szög $\gamma \approx 53,83°$.
A keresett kényszererő nagysága $|\overline{F}_k| \approx 140,53°$ [N].

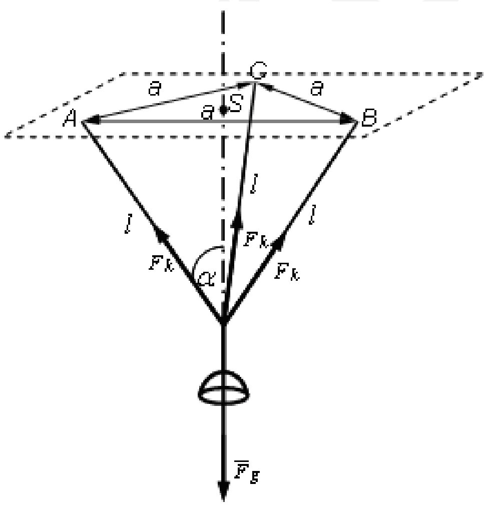
2.1.6. **Feladat.** Egy elektromos csónak sebessége állóvízben 12 $\left[\frac{\text{km}}{\text{h}}\right]$. A csónak 3 $\left[\frac{\text{km}}{\text{h}}\right]$ sebességű folyóban a partra merőlegesen indul. Határozzuk meg a csónak parthoz viszonyított sebességének nagyságát!

Megoldás:

A csónak eredő (parthoz viszonyított) vektoriális sebessége a folyó parthoz és a csónak folyóhoz viszonyított vektoriális sebességének összege. Így az eredő sebesség nagysága:

$$|F| = \sqrt{12^2 + 3^2} = \sqrt{153} \approx 12,37 \left[\frac{\text{km}}{\text{h}}\right].$$

2.1.7. **Feladat.** Az ábrán látható lámpát három, egyenlő l hosszúságú kötéllel a mennyezethez rögzítettünk úgy, hogy a felfüggesztési pontok az ABC egyenlő oldalú háromszög csúcsaiba esnek.



Adatok:

$$|\overline{F}_g| = F_g = 300\,[\text{N}]; \quad a = 0,8\,[\text{m}]; \quad l = 1,2\,[\text{m}].$$

a) Mekkora szöget zárnak be a kötelek a függőlegessel (α)?

b) Mekkora az $\overline{F}_k$ kötélerő nagysága? (Az elrendezés szimmetriájából adódóan a kötélerők egymással egyenlőek.)

Megoldás:

a) A keresett szög $\alpha \approx 22,64^\circ$.

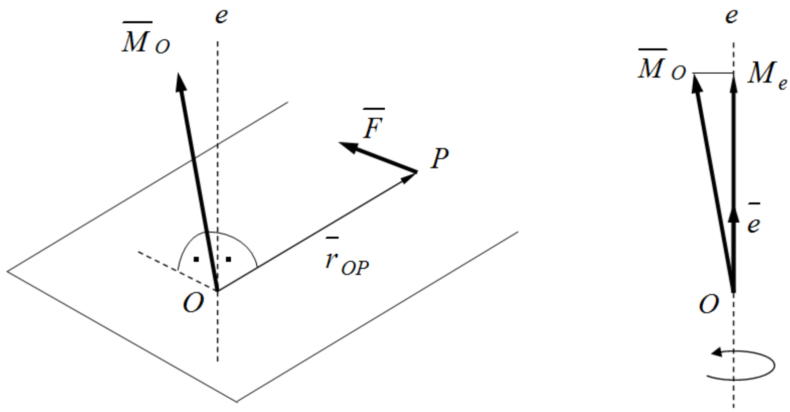
b) Az $\overline{F}_k$ kötélerő nagysága: $|\overline{F}_k| = F_k \approx 108,35\,[\mathrm{N}]$.

2.2. Forgatónyomaték; merev testek egyensúlya

Elméleti összefoglaló. Egy erő forgató hatását annak *forgatónyomaték*ával jellemezzük. A forgatónyomatékot megadhatjuk egy pontra (pl.: gömbcsukló), vagy egy tengelyre (pl.: ajtósarok) vonatkozóan.
A *pontra vonatkozó forgatónyomaték* vektormennyiség. Definíciója az O pontra vonatkozóan:

$$\underset{O}{\overline{M}} = \overline{r}_{OP} \times \overline{F},$$

ahol $\overline{r}_{OP}$ az O vonatkoztatási pontból az erő P támadáspontjába mutató helyvektor.



Adjuk meg a fenti ábrán látható e tengelyt a vele párhuzamos $\overline{e}$ egységvektorral.
Az *e tengelyre vonatkozó forgatónyomaték* előjeles skalármennyiség, amelyet az alábbi egyenlőség definiál:

$$M_e = \underset{O}{\overline{M}} \bullet \overline{e},$$

ahol $\bullet$ a skaláris szorzatot jelenti.
A skaláris szorzat definícióját felhasználva

$$M_e = \underset{O}{\overline{M}} \bullet \overline{e} = |\underset{O}{\overline{M}}| \cdot |\overline{e}| \cdot \cos\alpha = |\underset{O}{\overline{M}}| \cdot \cos\alpha.$$

Azaz M_e az $\overline{M}$ vektor e tengelyre eső előjeles merőleges vetülete.

Merev test egyensúlyának definíciója:
Egy merev test egyensúlyban van, ha az alábbi két feltétel egyidejűleg teljesül:

1. A testre ható eredő erő zérus:

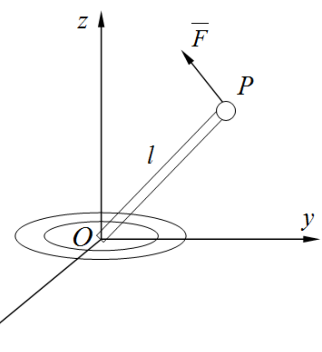
$$\overline{F} = \sum_i \overline{F}_i = \overline{0}.$$

2. A testre ható eredő forgatónyomaték a tér egy tetszőleges O pontjára vonatkozóan zérus:

$$\underset{O}{\overline{M}} = \sum_i \underset{O}{\overline{M_i}} = \overline{0}.$$

Szükséges matematikai ismeretek. Vektorok összeadása, kivonása, skaláris és vektoriális szorzása. A skaláris és vektoriális szorzat kiszámítása Descartes-féle derékszögű koordinátarendszerben.

Mintafeladat. Egy sofőr a sebességváltókar P végpontjára $\overline{F}$ erővel hat. A P pont és az $\overline{F}$ erő koordinátái adottak.



Adatok:

$$\overline{F} = \begin{pmatrix} -20 \\ -30 \\ 20 \end{pmatrix} \text{[N]}; \qquad P = (-5; 30; 40)\ \text{[cm]}.$$

a) Határozzuk meg az $\overline{F}$ erő O gömbcsuklóra vonatkozó forgatónyomatékát!

b) Határozzuk meg az $\overline{F}$ erő z tengelyre vonatkozó forgatónyomatékát!

Megoldás:

a) Mivel

$$\overline{r}_{OP} = \begin{pmatrix} -0,05 \\ 0,30 \\ 0,40 \end{pmatrix} \text{[m]},$$

ezért az $\overline{F}$ erő O gömbcsuklóra vonatkozó forgatónyomatéka:

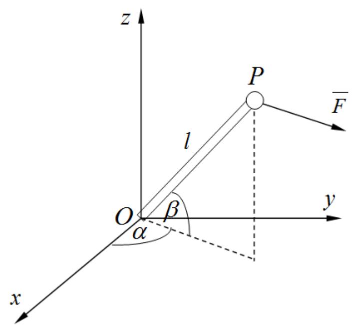
$$\underset{O}{\overline{M}} = \overline{r}_{OP} \times \overline{F} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ -0,05 & 0,30 & 0,40 \\ -20 & -30 & 20 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ -7 \\ 7,5 \end{pmatrix} [\mathrm{Nm}].$$

b) Az $\overline{F}$ erő z tengelyre vonatkozó forgatónyomatéka:

$$M_z = \underset{O}{\overline{M}} \bullet \overline{k} = \begin{pmatrix} 18 \\ -7 \\ 7,5 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 7,5\,[\mathrm{Nm}].$$

Gyakorló feladatok.

2.2.1. **Feladat.** Az ábrán látható l hosszúságú merev rúd O végpontja egy gömbcsuklóhoz kapcsolódik, amely körül ellenállásmentesen elfordulhat. A rúd másik, P végpontjában egy ismert $\overline{F}$ erő támad. A rúd irányát meghatározó α és β szögek adottak. A pontok koordinátái méterben, az erőé Newtonban értendők.



Adatok:

$$l = 2\,[\mathrm{m}]; \quad \alpha = 70°; \quad \beta = 30°; \quad \overline{F} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} [\mathrm{N}].$$

a) Határozzuk meg a P pont koordinátáit a megadott koordinátarendszerben!
b) Határozzuk meg az $\overline{F}$ erő O gömbcsuklóra vonatkozó forgatónyomatékát!
c) Határozzuk meg az $\overline{F}$ erő y tengelyre vonatkozó forgatónyomatékát!

<u>**Megoldás**</u>:

a) A P pont koordinátái a megadott koordinátarendszerben:

$$P = (0,59; 1,63; 1)\,[\mathrm{m}].$$

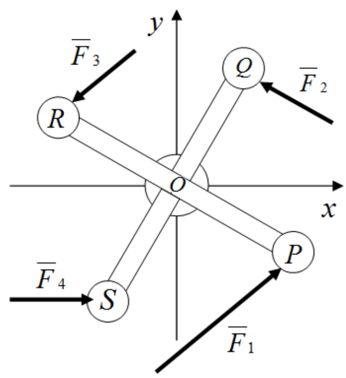
b) Az $\overline{F}$ erő O gömbcsuklóra vonatkozó forgatónyomatéka:

$$\underset{O}{\overline{M}} = \begin{pmatrix} -1,37 \\ -2,59 \\ 5,03 \end{pmatrix} \text{[Nm]}.$$

c) Az $\overline{F}$ erő y tengelyre vonatkozó forgatónyomatéka:

$$M_y = -2,59\,\text{[Nm]}.$$

2.2.2. **Feladat.** Az alábbi ábra egy játszótéri forgót szemléltet felülnézetből, amelyet egy adott időpillanatban négy gyerek, négy különböző erővel tol. Az erők és támadáspontjaik koordinátái ismertek. Az erők koordinátái Newtonban, a támadáspontoké méterben értendők.



Adatok:

$$\overline{F}_1 = \begin{pmatrix} 300 \\ 300 \end{pmatrix} \text{[N]}; \qquad P = (1,3; -0,75)\,\text{[m]};$$

$$\overline{F}_2 = \begin{pmatrix} -183 \\ 106 \end{pmatrix} \text{[N]}; \qquad Q = (0,75; 1,3)\,\text{[m]};$$

$$\overline{F}_3 = \begin{pmatrix} -150 \\ -150 \end{pmatrix} \text{[N]}; \qquad R = (-1,3; 0,75)\,\text{[m]};$$

$$\overline{F}_4 = \begin{pmatrix} 212 \\ 0 \end{pmatrix} \text{[N]}; \qquad S = (-0,75; -1,3)\,\text{[m]}.$$

a) Számoljuk ki a gyerekek által a forgóra kifejtett eredő erőt és a forgó középpontjára vonatkozó eredő (vektoriális) forgatónyomatékot!

b) Mennyi a lap síkjára merőleges, a forgó középpontján átmenő tengelyre vonatkozó eredő (skaláris) forgatónyomaték?

Megoldás:

a) A gyerekek által kifejtett eredő erő:

$$\overline{F} = \sum_i \overline{F}_i = \begin{pmatrix} 179 \\ 256 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ [N]}.$$

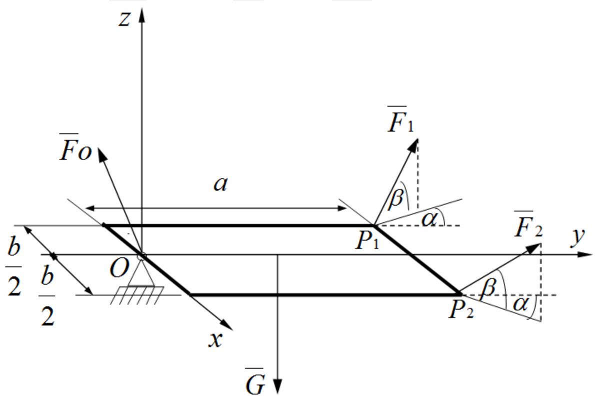
Az eredő vektoriális forgatónyomaték:

$$\underset{O}{\overline{M}} = \sum_i \underset{O}{\overline{M}_i} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1515,5 \end{pmatrix} \text{ [Nm]}.$$

b) A z tengelyre vonatkozó eredő forgatónyomaték:

$$M_z = \sum_i \overline{M}_i \bullet \overline{k} = \underset{O}{\overline{M}} \bullet \overline{k} = 1515,5 \,[\mathrm{Nm}].$$

2.2.3. **Feladat.** Az alábbi ábrán látható, téglalap alakú fémlemez geometriai méretei ismertek. Továbbá ismert a $\overline{G}$ gravitációs erő nagysága és iránya, valamint az $|\overline{F}_1| = |\overline{F}_2| = F$ nagyságú erők irányát meghatározó α és β szögek. A lemez az O gömbcsukló körül szabadon elfordulhat. Az ábrán vázolt helyzetben a lemez egyensúlyban van.



Adatok:

$$G = 500\,[\mathrm{N}]; \quad \alpha = 30°; \quad \beta = 40°;$$
$$a = 0,9\,[\mathrm{m}]; \quad b = 0,4\,[\mathrm{m}].$$

a) Határozzuk meg a $\overline{G}$ erő, valamint az $\overline{F}_1$ és $\overline{F}_2$ erők és támadáspontjaik koordinátáit a megadott koordinátarendszerben!

b) A $\sum\limits_i \overline{M}_{O\,i} = \overline{0}$ egyenletet felírva, határozzuk meg az ismeretlen F nagyságot!

c) A $\sum\limits_i \overline{F}_i = \overline{0}$ feltételt felírva, határozzuk meg az ismeretlen $\overline{F}_O$ kényszererő koordinátáit!

Megoldás:

a) A $\overline{G}$, valamint az $\overline{F}_1$ és $\overline{F}_2$ erők és támadáspontjaik koordinátái:

$$\overline{G} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -500 \end{pmatrix} [\mathrm{N}] \qquad S = (0, 0, 45; 0)\,[\mathrm{m}]$$

$$\overline{F}_1 = \begin{pmatrix} -74,22 \\ 128,9 \\ 125 \end{pmatrix} [\mathrm{N}] \qquad P_1 = (-0,2; 0,9; 0)\,[\mathrm{m}]$$

$$\overline{F}_2 = \begin{pmatrix} 74,22 \\ 128,9 \\ 125 \end{pmatrix} [\mathrm{N}] \qquad P_2 = (0,2; 0,9; 0)\,[\mathrm{m}].$$

b) Az ismeretlen $\overline{F}$ erő nagysága $F = 195,31$ [N].

c) Az ismeretlen $\overline{F}_O$ erő koordinátái:

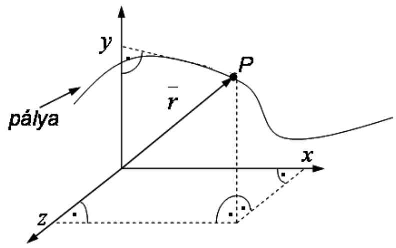
$$\overline{F}_O = \begin{pmatrix} 0 \\ -257,8 \\ 250 \end{pmatrix} [\mathrm{N}].$$

2.3. Anyagi pont hely-idő függvénye és pályája

Elméleti összefoglaló. A *pálya* az a sík- vagy térgörbe, amelyen az anyagi pont halad mozgása során.

Az $\overline{r}$ *helyvektor* a koordinátarendszer origójából az anyagi ponthoz mutató vektor. A helyvektor koordinátái megegyeznek az anyagi pont koordinátáival. Descartes-féle derékszögű koordinátarendszerben:

$$\overline{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

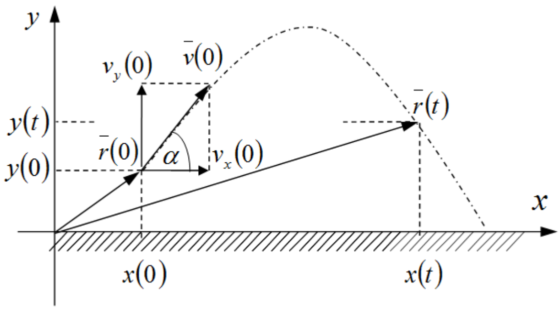


Ahogy az anyagi pont halad a pályán helyét időről-időre más helyvektor jellemzi. A helyvektort megadva az idő függvényében megkapjuk a pont $\overline{r}(t)$ *hely-idő függvény*ét. Descartes-féle derékszögű koordinátarendszerben a hely-idő függvény komponensei:

$$\overline{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}.$$

Az $x(t)$, $y(t)$ és $z(t)$ koordináta-idő függvényekből az idő, mint paraméter kiküszöbölésével megkapjuk a *pálya egyenletrendszeré*t. Ez általános térbeli mozgás esetén két egyenletből álló, három ismeretlenes egyenletrendszer, síkmozgás esetén pedig egy darab két ismeretlenes egyenlet. Itt meg kell jegyezni, hogy síkbeli pálya esetén a pálya egyenlete csak akkor adható meg $y = f(x)$ alakban, ha egy adott x koordinátához csak egy adott y koordináta tartozik, azaz, ha a pálya valójában $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ típusú függvény grafikonjaként adható meg.

Ferde hajítás: Ha egy pontszerű testet a vízszinteshez képest α szögben mozgásba hozunk, akkor az a $\overline{v}_0$ kezdősebesség és a $\overline{g}$ gravitációs gyorsulás által meghatározott síkban fog mozogni. A mozgást célszerű az ábrán látható derékszögű koordinátarendszerben leírni:



A fenti koordinátarendszerben a légellenállást elhanyagolva, a test hely-idő függvénye az alábbi:

$$\bar{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(0) + v_x(0) \cdot t \\ y(0) + v_y(0) \cdot t - \dfrac{g}{2} \cdot t^2 \end{pmatrix},$$

ahol $v_x(0)$ és $v_y(0)$ a kezdősebesség koordinátái, g pedig a gravitációs gyorsulás nagysága (Magyarország területén: $9,81 \left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right]$).

Szükséges matematikai ismeretek. Egyenes egyenlete, másodrendű görbék egyenletei.

Mintafeladat. A „szokásos” koordinátarendszer kezdőpontjából a vízszinteshez képest $\alpha = 63,43°$-os szögben fellőtt agyaggalamb kezdősebességének nagysága $v(0) = 15,65 \left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right]$. A légellenállástól eltekintünk.

a) Adjuk meg az agyaggalamb kezdősebességének x és y komponenseit, majd határozzuk meg a galamb pályájának egyenletét! Milyen alakzat a pálya?

b) A koordinátarendszer kezdőpontjából, a vízszinteshez képest $30°$-os szögben egy puskával az agyaggalambra lövünk és el is találjuk azt. A lövedék pályája egyenesnek tekinthető. Határozzuk meg az agyaggalamb számára „végzetes” koordinátákat!

c) Ha nem lőttük volna le, akkor hol ért volna földet a galamb, és mekkora lett volna a maximális magasság, amit elér?

Megoldás:

a) Az agyaggalamb kezdősebességének x komponense:

$$v_x(0) = 15,65 \cdot \cos 63,43° \approx 7 \left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right].$$

Az agyaggalamb kezdősebességének y komponense:

$$v_y(0) = 15,65 \cdot \sin 63,43° \approx 14 \left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right].$$

Az elméleti összefoglalóban leírtak szerint:

$$x(t) = x(0) + 7 \cdot t$$
$$y(t) = y(0) + 14 \cdot t - \frac{9,81}{2} \cdot t^2.$$

Az agyaggalamb az origóból indul, így $x(0)$ és $y(0)$ egyaránt zérus, tehát:

$$x(t) = 7 \cdot t$$
$$y(t) = 14 \cdot t - \frac{9,81}{2} \cdot t^2.$$

A fenti egyenletrendszer első egyenletéből az időt kifejezve azt kapjuk, hogy

$$t = \frac{x(t)}{7}.$$

Ezt behelyettesítve a második egyenletbe

$$y(t) = 14 \cdot \frac{x(t)}{7} - 4,9 \cdot \frac{x^2(t)}{49} = 2x(t) - 0,1x^2(t)$$

adódik. Azt kaptuk tehát, hogy az agyaggalamb pályája parabola, melynek egyenlete:

$$y = 2x - 0,1x^2.$$

b) A lövedék pályája egyenes, amelynek egyenlete az alábbi:

$$y = \operatorname{tg} 30^\circ \cdot x = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot x.$$

A találati pont koordinátáinak meghatározásához meg kell oldanunk az alábbi egyenletrendszert:

$$y = 2x - 0,1x^2$$
$$y = \frac{1}{\sqrt{3}}\, x$$

Tehát az agyaggalamb számára „végzetes” koordináták kiszámolásához meg kell oldanunk a

$$2x - 0,1x^2 = \frac{1}{\sqrt{3}}\, x$$

egyenletet. Az egyenlet megoldására $x = 0$ és $x \approx 14,23$ adódik. Feltételezve, hogy a galambot nem a földön lőjük le, a „végzetes” koordináták az alábbiak

$$x = 14,23\,[\mathrm{m}];\ y = 8,22\,[\mathrm{m}].$$

c) A földet érés helyének kiszámolásához meg kell oldanunk az alábbi egyenletet

$$2x - 0,1x^2 = 0$$

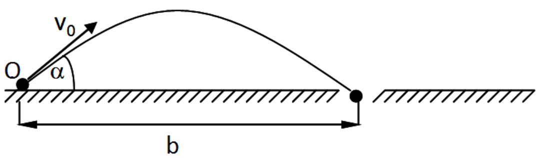
Ebből $x \neq 0$ miatt $x = 20$ adódik. Tehát a fellövés helyétől 20 méterre ért volna földet a galamb. A parabola tulajdonságai alapján a maximális magasságot a parabola zérushelyeinek számtani közepénél éri el (azaz az $x = 10$ helyen). A maximális magasság, amit elért volna:

$$2 \cdot 10 - 0,1 \cdot 10^2 = 10\,[\mathrm{m}].$$

Gyakorló feladatok.

2.3.1. **Feladat.** A talajszinttől egy aknát v_0 nagyságú kezdősebességgel indítunk a talajba fúrt, b távolságban lévő lövészárok irányába.
Adatok:

$$b = 125\,[\mathrm{m}];\; v_0 = 50\left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right];\; g = 9,81\left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right].$$



Az aknagránát pontosan a lövészárokba pottyan.

a) Írjuk fel az akna pályájának $y = f(x)$ alakú egyenletét! Az egyenletben az ismeretlen α szög paraméterként szerepel.

b) A becsapódási pont koordinátáinak ismeretében határozzuk meg az α szög lehetséges értékeit!

c) A fenti α szögek mellett határozzuk meg, hogy milyen maximális magasságokat ér el az aknagránát!

<u>**Megoldás**</u>:

a) Az elméleti összefoglalóban leírtak szerint a mozgás pályája

$$\overline{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 + v_x(0) \cdot t \\ y_0 + v_y(0) \cdot t - \dfrac{g}{2} \cdot t^2 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} (50 \cos \alpha) \cdot t \\ (50 \sin \alpha) \cdot t - 4,9\, t^2 \end{pmatrix},$$

azaz

$$x(t) = (50\cos\alpha)\cdot t$$
$$y(t) = (50\sin\alpha)\cdot t - 4,9\,t^2.$$

Az első egyenletből kifejezve a t paramétert, majd azt behelyettesítve a második egyenletbe azt kapjuk, hogy

$$y = x\cdot \operatorname{tg}\alpha - 4,9\cdot \frac{x^2}{2500\cdot\cos^2\alpha}.$$

Felhasználva az

$$\frac{1}{\cos^2\alpha} = \operatorname{tg}^2\alpha + 1$$

trigonometrikus azonosságot, az előbbi egyenletből azt kapjuk, hogy a pálya egyenlete

$$y \approx x\cdot\operatorname{tg}\alpha - \left(\frac{\operatorname{tg}^2\alpha+1}{510,2}\right)\cdot x^2,$$

amely egy parabola pályát ad meg.

b) A becsapódás koordinátái: $x = 125\,[\mathrm{m}]$, $y = 0\,[\mathrm{m}]$. Ezt felhasználva a parabola fenti egyenletéből azt kapjuk, hogy

$$0 = 125\operatorname{tg}\alpha - \frac{\operatorname{tg}^2\alpha+1}{510,2}\cdot 125^2.$$

Az egyenletet átalakítva az alábbi, $\operatorname{tg}\alpha$-ban másodfokú egyenlethez jutunk:

$$-125\operatorname{tg}^2\alpha + 510,2\operatorname{tg}\alpha - 125 = 0.$$

Ennek megoldásaként $\operatorname{tg}\alpha_1 \approx 0,26$, illetve $\operatorname{tg}\alpha_2 \approx 3,82$ adódik. Ezekből azt kapjuk, hogy a keresett szögek:

$$\alpha_1 \approx 14,57^\circ; \qquad \alpha_2 \approx 75,33^\circ.$$

c) Ha $\alpha_1 \approx 14,57^\circ$, akkor a pálya egyenlete

$$y = 0,26x - 0,00209x^2.$$

A parabola szimmetria tulajdonsága miatt a maximum értéket a zérushelyei számtani közepénél veszi fel, így jelen esetben $x = 62,5\,[\mathrm{m}]$-nél. Ezt felhasználva a maximális magasság

$$y = 0,26\cdot 62,5 - 0,00209\cdot 62,5^2 \approx 8,09\,[\mathrm{m}].$$

Ha $\alpha_2 \approx 75,33^\circ$, akkor a pálya egyenlete

$$y = 3,82x - 0,0306x^2.$$

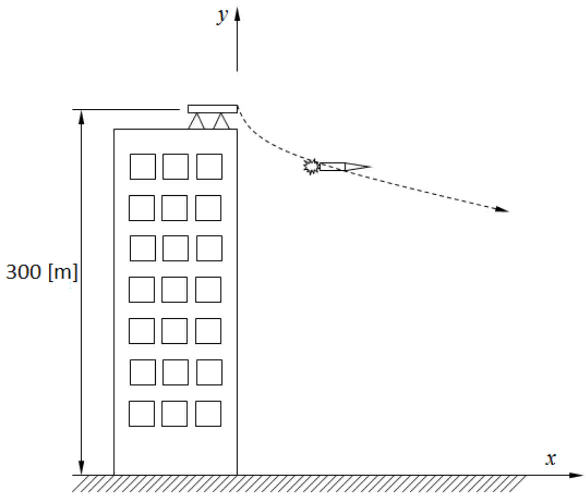
A maximum értéket szintén a zérushelyek számtani közepénél veszi fel a parabola, így a maximális magasság

$$y = 3,82 \cdot 62,5 - 0,0306 \cdot 62,5^2 \approx 119,22\,[\mathrm{m}].$$

2.3.2. **Feladat.** Egy rakétát egy $h = 300\,[\mathrm{m}]$ magas épület tetejéről indítunk. A rakéta síkmozgást végez, hely-idő függvénye az ábrán vázolt koordinátarendszerben

$$\overline{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t^4 + 2t^2 \\ 300 - 4,9t^2 \end{pmatrix} [\mathrm{m}]$$

alakú. Az időt másodpercben mérjük.



a) Adjuk meg a rakéta pályájának $y = f(x)$ alakú egyenletét!

b) A koordinátarendszer kezdőpontjából egy nagy kaliberű lőfegyverrel a rakétára lövünk. A lőfegyver csöve a vízszintessel $60°$-os szöget zár be. Találat esetén adjuk meg a találati pont koordinátáit! Feltételezzük, hogy a lövedék pályája egyenes.

Megoldás:

a) Az

$$x(t) = t^4 + 2t^2$$
$$y(t) = 300 - 4,9t^2$$

egyenletrendszer első egyenletét átrendezve

$$t^4 + 2t^2 - x(t) = 0$$

adódik. A t^2-ben másodfokú egyenlet megoldóképletének alkalmazásával azt kapjuk, hogy

$$t_{1,2}^2 = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 4x(t)}}{2} = -1 \pm \sqrt{1 + x(t)}.$$

Mivel $t^2 > 0$, ezért csak $t^2 = -1 + \sqrt{1 + x(t)}$ lehetséges, továbbá $t > 0$ miatt

$$t = \sqrt{-1 + \sqrt{1 + x(t)}}.$$

Ezt behelyettesítve a második egyenletbe

$$\begin{aligned} y(t) &= 300 - 4,9 \cdot \big(-1 + \sqrt{1 + x(t)} \big) = \\ &= 300 + 4,9 - 4,9 \cdot \sqrt{1 + x(t)} = \\ &= 304,9 - 4,9 \cdot \sqrt{1 + x(t)}. \end{aligned}$$

Azt kaptuk tehát, hogy a pálya egyenlete:

$$y = 304,9 - 4,9 \cdot \sqrt{1 + x}.$$

b) A lövedék pályája $y = f(x)$ alakban:

$$y = \sqrt{3} \cdot x.$$

A keresett koordinátákat az

$$\begin{aligned} y &= 304,9 - 4,9 \cdot \sqrt{1 + x} \\ y &= \sqrt{3} \cdot x \end{aligned}$$

egyenletrendszer megoldásával kapjuk. A

$$304,9 - 4,9 \cdot \sqrt{1 + x} = \sqrt{3} \cdot x$$

egyenletet átrendezve azt kapjuk, hogy

$$4,9 \cdot \sqrt{1 + x} = 304,9 - \sqrt{3} \cdot x.$$

Ha az egyenlet mindkét oldalát négyzetre emeljük, akkor

$$24,01 \cdot (1 + x) = 92.964,01 - 1.056,2x + 3x^2$$

adódik. Összevonás után azt kapjuk, hogy

$$3x^2 - 1.080,21x + 92.940 = 0.$$

A másodfokú egyenlet megoldóképletének felhasználásával $x_1 \approx 217,88$, illetve $x_2 \approx 142,19$ adódik. Azonban x_1 esetén

$$y_1 \approx \sqrt{3} \cdot 217,88 \approx 377,38 > 300,$$

ami nem lehetséges, így csak $x \approx 142,19\,[\mathrm{m}]$ lehet megoldás. Ekkor

$$y \approx \sqrt{3} \cdot 142,19 \approx 246,28\,[\mathrm{m}].$$

2.3.3. **Feladat.** Egy P anyagi pont egy, a kör középpontja felé mutató erő hatására az

$$(x+4)^2 + (y+3)^2 = 25$$

egyenletű körön egyenletesen mozog. Amikor a $(-1;1)\,[\mathrm{m}]$ pontba érkezik, az erő hatása megszűnik.

a) Írjuk fel a pont további pályájának $y = f(x)$ alakú egyenletét! (Az erő hatásának megszüntével a pont a kör P pontbeli érintőjének irányába halad tovább.)

b) Adjuk meg a körpályán haladó pont hely-idő függvényét, ha annak szögsebessége $\omega = 2\left[\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}\right]$ és a $t = 0$ időpillanatban a $P_0 = (0;0)\,[\mathrm{m}]$ pontból indul és az óramutató járásával ellentétes irányba halad. A pont szögelfordulását az $\alpha(t) = \omega \cdot t$ összefüggés adja.

<u>**Megoldás**</u>:

a) A kör egyenletéből azt kapjuk, hogy a kör középpontja, illetve sugara:

$$K = (-4;-3)\,[\mathrm{m}]; \qquad R = 5\,[\mathrm{m}].$$

A középpontból a P pontba mutató irányvektor

$$\overline{v}_{KP} = P - K = (3;4).$$

Ez a vektor normálvektora a keresett egyenesnek, így az egyenes normálvektoros egyenletét felírva azt kapjuk, hogy

$$3x + 4y = 3 \cdot (-1) + 4 \cdot 1,$$

azaz $3x + 4y = 1$.

b) A körpálya sugara $R = 5\,[\mathrm{m}]$. A körpályán haladó pont hely-idő függvénye – abban a koordinátarendszerben, melynek x^* tengelye az O és P_0 pontok által meghatározott egyenesre illeszkedik, y^* tengelye pedig az x^* tengely $+90°$-os elforgatásával kapható meg – az alábbi módon írható fel:

$$\overline{r}(t) = \begin{pmatrix} x^*(t) \\ y^*(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \cdot \cos(2\,t) \\ 5 \cdot \sin(2\,t) \end{pmatrix}.$$

2.3.4. **Feladat.** Egy elektromos töltéssel rendelkező részecske homogén mágneses mezőben, az indukciós vonalakra merőleges síkban az

$$4x^2 + 4y^2 = 1$$

egyenletű körön kering. A pont koordinátái méterben értendők. Eltalálhatja-e ezt a récsecskét az a foton, amelyik a

$$12x - 16y = 1$$

egyenletű egyenes pályán mozog?

Megoldás:

Ahhoz, hogy megtudjuk, hogy eltalálhatja-e a részecskét a foton, meg kell oldanunk az

$$x^2 + y^2 = 16$$
$$x - 2y = 4$$

egyenletrendszert! A második egyenletből

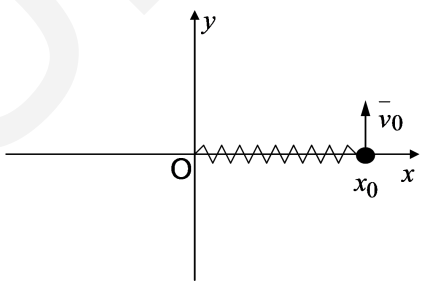
$$x = 4 + 2y$$

adódik. Ezt behelyettesítve az első egyenletbe azt kapjuk, hogy

$$(4 + 2y)^2 + y^2 = 16 \quad \Rightarrow \quad 5y^2 + 16y = 0.$$

Az egyenlet megoldására $y_1 = 0$ és $y_2 = -\frac{16}{5}$ adódik. Ezt felhasználva azt kapjuk, hogy $x_1 = 4$ és $x_2 = -\frac{12}{5}$. Azt kaptuk tehát, hogy a foton kétszer is eltalálhatja a részecskét, mégpedig a $\left(-\frac{12}{5}; -\frac{16}{5}\right)$ $[\mathrm{m}]$ és a $(4; 0)$ $[\mathrm{m}]$ pontokban.

2.3.5. **Feladat.** Egy spirálrugó egyik végét egy sima (súrlódásmentes), vízszintes síklap O pontjához erősítjük, a másik végéhez pedig egy pontszerű testet kapcsolunk.



A rugó nyújtatlan hossza legyen zérus. A rugót megnyújtjuk, majd a testet a vízszintes sík egy tetszőleges pontjából, a síkba eső, és a rugó hossztengelyére merőleges $v(0) = 10 \left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right]$ nagyságú kezdősebességgel mozgásba hozzuk. A mozgás körfrekvenciája $\omega = 2 \left[\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}\right]$, továbbá a test kezdeti helyének x koordinátája $x(0) = 6\,[\mathrm{m}]$.

a) Írjuk fel a mozgás hely-idő függvényét, majd hatátozzuk meg, hogy milyen pályán mozog a test!
b) Mekkora a rugó megnyúlása, amikor a test áthalad az $x = 2\,[\mathrm{m}]$ abszcisszájú ponton?

<u>**Megoldás**</u>:

a) A mozgás hely-idő függvénye:

$$\overline{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(0)\cdot\cos(\omega\cdot t) \\ \dfrac{v(0)}{\omega}\cdot\sin(\omega\cdot t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6\cdot\cos(2\,t) \\ 5\cdot\sin(2\,t) \end{pmatrix} [\mathrm{m}].$$

Ezt felhasználva azt kapjuk, hogy

$$x(t) = 6\cdot\cos(2\,t)$$
$$y(t) = 5\cdot\sin(2\,t).$$

Mindkét egyenlet mindkét oldalát négyzetre emelve

$$x^2(t) = 36\cdot\cos^2(2\,t)$$
$$y^2(t) = 25\cdot\sin^2(2\,t).$$

adódik. Az első egyenletet 36-tal, a második egyenletet 25-tel elosztva az alábbi egyenletekhez jutunk:

$$\frac{x^2(t)}{36} = \cos^2(2\,t)$$
$$\frac{y^2(t)}{25} = \sin^2(2\,t).$$

A kapott egyenleteket összeadva (felhasználva, hogy $\cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1$) azt kapjuk, hogy

$$\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{25} = 1,$$

amely egy ellipszis pályát ad meg, amely fél kistengelyének hossza $5\,[\mathrm{m}]$, fél nagytengelyének hossza $6\,[\mathrm{m}]$.

b) Az $x = 2$ abszcisszájú pontban $y = \pm\frac{10\cdot\sqrt{2}}{3}$. A rugó megnyúlása a $(6;0)$ és $\left(2;\frac{10\cdot\sqrt{2}}{3}\right)$ pontok távolsága:

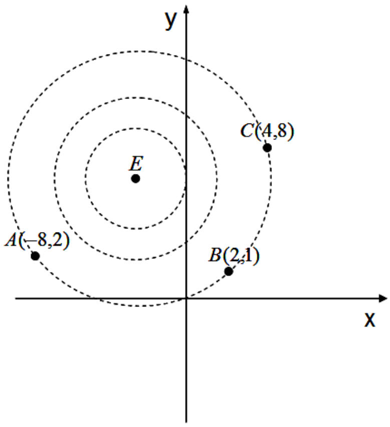
$$\sqrt{(6-2)^2 + \left(\frac{10\cdot\sqrt{2}}{3}\right)^2} \approx 6,18,$$

tehát a rugó megnyúlása $6,18\,[\mathrm{m}]$.

2.3.6. **Feladat.** Egy térségben erős földrengést észleltek. A térségben elhelyezkedő három város helye koordinátáival adott. A rengések amplitúdóját mindhárom városban ugyanannyinak mérték.
Adatok:

$$A = (-8; 2)\,[\mathrm{km}];\;\; B = (2; 1)\,[\mathrm{km}];\;\; C = (4; 8)\,[\mathrm{km}].$$

a) Határozzuk meg a rengés epicentrumának koordinátáit, ha tudjuk, hogy a lökéshullámok az epicentrumból koncentrikus körök formájában terjedtek tova és a rengések amplitúdója a távolsággal csökken.
b) Adjuk meg a városok epicentrumtól mért távolságát és a rájuk illeszkedő, azonos rengés-amplitúdóval jellemzett kör egyenletét!



Megoldás:

a) A keresett pontot az ABC háromszög oldalfelező merőlegeseinek metszéspontja adja. Az AB szakasz felezési pontja, valamint az AB egyenes irányvektora

$$F_{AB} = \left(-3; \frac{3}{2}\right)\;[\mathrm{km}]$$
$$\overline{v}_{AB} = (10; -1)\,[\mathrm{km}],$$

így az AB szakasz felezőmerőlegesének egyenlete:

$$10x - y = -30 - 1,5 \quad\Rightarrow\quad 10x - y = -31,5.$$

Az AC szakasz felezési pontja, valamint az AC egyenes irányvektora

$$F_{AC} = (-2; 5)\;[\mathrm{km}]$$
$$\overline{v}_{AC} = (2; 1)\,[\mathrm{km}],$$

így az AC szakasz felezőmerőlegesének egyenlete:

$$2x + y = -4 + 5 \quad \Rightarrow \quad 2x + y = 1.$$

A keresett pontot a

$$\begin{aligned} 10x - y &= -31,5 \\ 2x + y &= 1 \end{aligned}$$

egyenletrendszer megoldásával kapjuk. A két egyenletet összeadva

$$12x = -30,5 \quad \Rightarrow \quad x = -\frac{61}{24}$$

adódik, amit behelyettesítve a második egyenletbe azt kapjuk, hogy

$$y = 1 - 2x = 1 + \frac{61}{12} = \frac{73}{12}.$$

Így a rengés epicentruma

$$E = \left(-\frac{61}{24}; \frac{73}{12}\right) \text{ [km]}.$$

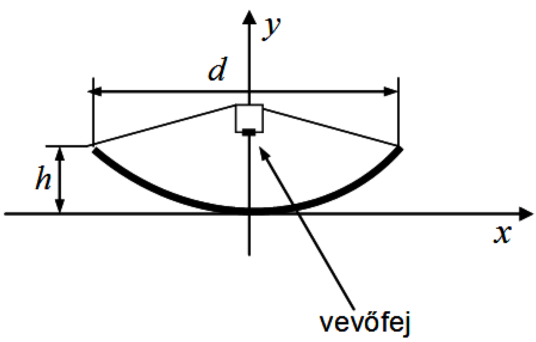
b) A városok távolsága az epicentrumtól

$$\sqrt{\left(-\frac{61}{24} - 2\right)^2 + \left(\frac{73}{12} - 1\right)^2} = \sqrt{\frac{26.765}{576}} \approx 6,82 \text{ [m]}.$$

A kör egyenlete

$$\left(x + \frac{61}{24}\right)^2 + \left(y - \frac{73}{12}\right)^2 \approx 46,51.$$

2.3.7. **Feladat.** Egy parabolaantenna tányérjának átmérője és mélysége ismert. Az antennát az alábbi ábrán látható módon egy koordinátarendszerbe helyezzük. A koordináták kilométer egységben értendők.



Adatok:

$$h = 15\,[\mathrm{cm}];\ d = 65\,[\mathrm{cm}].$$

a) Határozzuk meg a vevőfej koordinátáit! (A vevőfej a parabola fókuszpontjába esik.)

b) Az antennára az y tengellyel párhuzamos, az $x = 20$ egyenletű pályán haladó rádiójel érkezik, amelyet az antenna visszaver. Adjuk meg a visszavert jel pályájának egyenletét! (Az antenna a tengelyével párhuzamos jeleket a fókuszpontba gyűjti.)

Megoldás:

a) Annak a parabolának az egyenletét keressük, amelyre illeszkednek a $(0;0)$, $(-32,5;15)$ és $(32,5;15)$ pontok. Ezt felhasználva a

$$\begin{aligned} 0 &= a\cdot 0 + b\cdot 0 + c\\ 15 &= a\cdot 32,5^2 + b\cdot 32,5 + c\\ 15 &= a\cdot(-32,5)^2 + b\cdot(-32,5) + c \end{aligned}$$

egyenletrendszerhez jutunk. Az első egyenletből azt kapjuk, hogy $c = 0$. Ezt behelyettesítve a második és harmadik egyenletbe, majd azokat összeadva, illetve kivonva $a \approx 0,0142$, illetve $b = 0$ adódik. A keresett parabola egyenlete tehát: $y = 0,0142x^2$. Ha a parabolát $y = \frac{1}{2p}\cdot x^2$ alakban írjuk fel, akkor azt kapjuk, hogy

$$\frac{1}{2p} \approx 0,0142 \quad \Rightarrow p \approx 35,21,$$

így $\frac{p}{2} \approx 17,61$. A vevőfej koordinátái: tehát

$$F = (0; 17,61)\,[\mathrm{cm}].$$

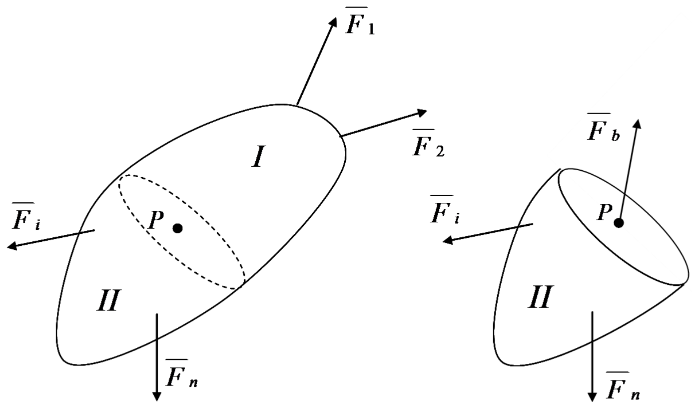
b) A visszavert jel pályájának egyenlete: $y = 17,61 - 0,5965x$. A koordináták centiméterben értendők.

3. fejezet

Mátrixok alkalmazásai

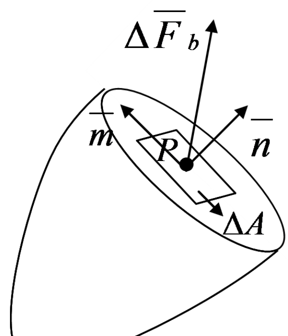
3.1. Feszültségállapot

Elméleti összefoglaló. Az alábbi ábra egy szilárd testet szemléltet, amelyet külső erőkkel terhelünk. A test nyugalomban van. Legyen P a test egy tetszőleges pontja. Vágjuk gondolatban két részre a testet egy síklappal úgy, hogy a metsző sík tartalmazza a P pontot. Mivel a test nyugalomban van, az I és II jelzésű darabjai is nyugalomban vannak.



Az I-es részt gondolatban eltávolítva látható, hogy a II-es rész egyensúlyát a ráható külső erők és a metsző felületen megoszló belső erőrendszer együttesen biztosítja. A külső erők és belső erőrendszer eredőjét $\overline{F}_{II}$-vel és $\overline{F}_b$-vel jelölve felírható az alábbi összefüggés:

$$\overline{F}_{II} + \overline{F}_b = \overline{0} \qquad \Rightarrow \qquad \overline{F}_b = -\overline{F}_{II}.$$



Vegyünk fel a metsző síkban egy, a P pontot tartalmazó $\Delta\, A$ nagyságú területelemet és jelöljük $\overline{n}$-el annak normálisát (síkra merőleges egységvektorát). A

P pontban az $\overline{n}$ normálishoz tartozó *feszültség*en a

$$\overline{\rho}_n = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta \overline{F}_b}{\Delta A}$$

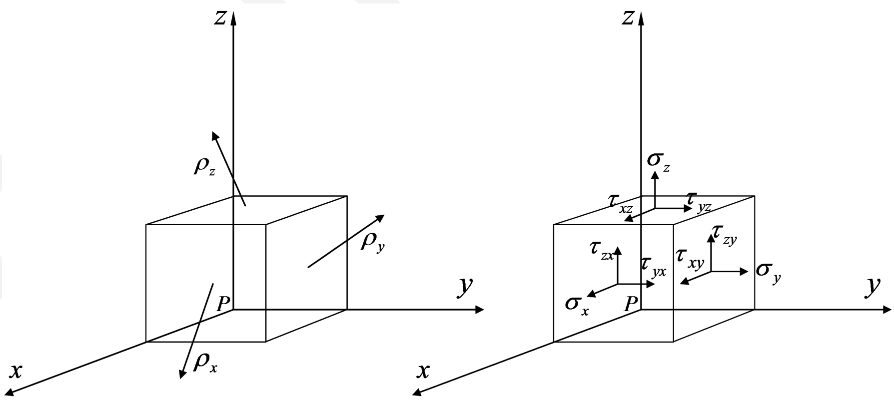
vektort értjük, ahol $\Delta \overline{F}_b$ a ΔA területelemen megoszló belső erőrendszer eredője.
A $\overline{\rho}_n$ feszültségvektor mindig felírható egy normális irányú és egy rá merőleges komponens összegeként:

$$\overline{\rho}_n = \sigma_n \cdot \overline{n} + \tau_n \cdot \overline{m},$$

ahol $|\overline{n}| = |\overline{m}| = 1$, azaz $\overline{n}$ és $\overline{m}$ egységvektorok. A $\sigma_n \cdot \overline{n}$, illetve a $\tau_n \cdot \overline{m}$ feszültségkomponenseket *normál- és csúsztatófeszültségek*nek nevezzük.
A test P pontján át végtelen sok különböző metsző síklap vehető fel. Minden egyes metsző síkhoz más $\overline{n}$ egységvektor tartozik, az egyes vektorokhoz pedig különböző feszültségvektorok. A P ponthoz tartozó *feszültségi állapot*on az egyes $\overline{n}$ irányhoz tartozó $\overline{\rho}_n$ feszültségvektorok összességét értjük.
A $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *feszültségi tenzor* egy lineáris függvény, amely az $\overline{n}$ normálisokhoz a $\overline{\rho}_n$ feszültségvektorokat rendeli, azaz amelyet az alábbi összefüggés definiál:

$$T\colon, \qquad T(\overline{n}) = \overline{\rho}_n.$$

A *feszültségmátrix* a feszültségi tenzornak valamely konkrét koordinátarendszerre (bázisra) vonatkozó mátrixa. Rögzítsünk a P pontban egy Descartes-féle derékszögű koordinátarendszert, és vegyünk fel benne egy kicsiny, kocka alakú térfogatelemet az ábra szerint:



Jelölje az egyes oldallapok normálisaihoz (azaz az $\overline{i}$, $\overline{j}$ és $\overline{k}$ bázisvektorokhoz) tartozó P pontbeli feszültségeket $\overline{\rho}_x$, $\overline{\rho}_y$ és $\overline{\rho}_z$. Az egyes feszültségvektorokat x, y és z irányú komponensekre bonthatjuk. A $\overline{\rho}_x$ feszültségvektor koordinátái például: σ_x, τ_{yx} és τ_{zx}. Az első index az adott komponensnek, a második a felület normálisának az irányára utal (σ_x, σ_y, σ_z esetén a két irány egybeesik). Tehát a feszültségvektorok, mint oszlopvektorok, az alábbi alakot öltik:

$$\overline{\rho}_x = \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \tau_{yx} \\ \tau_{zx} \end{pmatrix}; \quad \overline{\rho}_y = \begin{pmatrix} \tau_{xy} \\ \sigma_y \\ \tau_{zy} \end{pmatrix}; \quad \overline{\rho}_z = \begin{pmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \\ \sigma_z \end{pmatrix}.$$

A feszültségvektorokból összeállítható a P ponthoz tartozó T feszültségi mátrix:

$$T = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix}.$$

Megjegyezzük, hogy a fenti mátrix függ a koordinátarendszer megválasztásától. Különböző koordinátarendszerek esetén általában különböző feszültségi mátrixokat kapunk. A feszültségi mátrix szimmetrikus, tehát teljesülnek a következő egyenlőségek:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}; \quad \tau_{xz} = \tau_{zx}; \quad \tau_{yz} = \tau_{zy}.$$

A feszültségi mátrix ismeretében a P pontbeli, $\overline{n}$ normálishoz tartozó feszültséget az alábbi összefüggéssel számolhatjuk ki:

$$\overline{\rho}_n = T \cdot \overline{n}.$$

Azaz a feszültségmátrix ismeretében a P pont feszültségállapota ismert. A feszültségmátrixot tehát három, egymásra páronként merőleges irányhoz tartozó feszültségvektor meghatározza. A fentiekből adódik, hogy a feszültségállapot megadásához elegendő három, egymásra páronként merőleges irányhoz tartozó feszültségvektort megadni.

Egy P pont feszültségállapotát vizsgálva mindig találhatunk olyan $\overline{n}$ irányokat, amelyekhez tartozó $\overline{\rho}_n$ feszültségvektorok normális irányúak, azaz felírható az alábbi egyenlet:

$$\overline{\rho}_n = T \cdot \overline{n} = \sigma_n \cdot \overline{n} \qquad |\overline{n}| = 1.$$

A fenti tulajdonságú $\overline{n}$ irányokat a feszültségi állapot *főirány*ainak, a hozzájuk tartozó σ_n feszültségeket pedig *főfeszültség*eknek nevezzük. Az $\overline{n}$ főirányok esetén a $\overline{\rho}_n$ feszültség tisztán normálfeszültség, azaz a csúsztató feszültség nagysága nulla.

A feszültségi főirányok egymásra páronként merőlegesek.

A főfeszültségek a feszültségi mátrix sajátértékei, a főirányok pedig egységnyi hosszúságú sajátvektorai.

A főfeszültségeket a feszültségi mátrix $|T - \sigma \cdot E| = 0$ karakterisztikus egyenletének gyökei szolgáltatják.

Mivel a feszültségi mátrix szimmetrikus, ezért a karakterisztikus egyenletének mindig három különböző valós gyöke van. Ebből adódóan a főfeszültségek száma három.

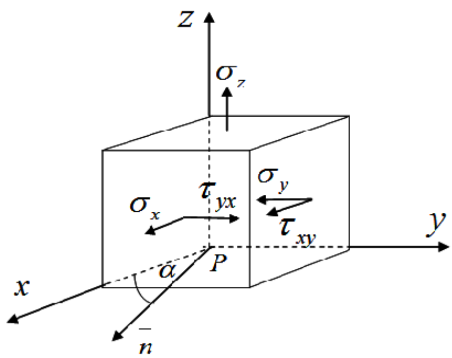
A főfeszültségeket nagyságuk szerint indexezzük az alábbiak szerint:

$$\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3.$$

Az egyes σ_i főfeszültségekhez tartozó $\overline{n}_i$ főirányok a $(T - \sigma_i \cdot E) \cdot \overline{n} = \overline{0}$ lineáris egyenletrendszer azon megoldásai, melyek egységnyi hosszúságúak.

Szükséges matematikai ismeretek. Mátrixok determinánsának kiszámítása, mátrixok összeadása és szorzása, sajátérték, sajátvektor meghatározása.

Mintafeladat. Egy szerkezet valamely P pontjához tartozó feszültségállapotot az alábbi ábrán látható elemi hasábon bejelölt feszültségi adatok jellemzik:



Adatok:

$$\sigma_x = 50\,[\text{MPa}];\ \sigma_y = -30\,[\text{MPa}];\ \sigma_z = 25\,[\text{MPa}];$$
$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = 30\,[\text{MPa}];\ \alpha = 30°.$$

a) Adjuk meg az x tengelyhez α szöggel hajló, xz-síkban fekvő $\overline{n}$ normális egységvektor koordinátáit, valamint a feszültségi mátrixot a P pontban!

b) Határozzuk meg az $\overline{n}$ vektor által irányított felületelemhez tartozó $\overline{\rho}_n$ feszültségvektort!

c) Határozzuk meg az $\overline{n}$ vektor által irányított felületelemhez tartozó normál- és csúsztatófeszültségek nagyságát!

d) Határozzuk meg a főfeszültségek nagyságát és a feszültségi főirányokat!

Megoldás:

a) A normális egységvektor koordinátái:

$$n_x = \cos\alpha = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2};$$
$$n_z = -\sin\alpha = -\sin 30^\circ = -\frac{1}{2}.$$

Nyilván $n_y = 0$, így a keresett normális egységvektor:

$$\overline{n} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 \\ -0,5 \end{pmatrix}.$$

A feszültségi mátrix:

$$T = \begin{pmatrix} 50 & 30 & 0 \\ 30 & -30 & 0 \\ 0 & 0 & 25 \end{pmatrix} [\text{MPa}].$$

b) Az $\overline{n}$ vektor által irányított felületelemhez tartozó $\overline{\rho}_n$ feszültségvektor:

$$\overline{\rho}_n = T \cdot \overline{n} = \begin{pmatrix} 50 & 30 & 0 \\ 30 & -30 & 0 \\ 0 & 0 & 25 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 \\ -0,5 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 25 \cdot \sqrt{3} \\ 15 \cdot \sqrt{3} \\ 25 \cdot (-0,5) \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 43,3 \\ 25,98 \\ -12,5 \end{pmatrix} [\text{MPa}].$$

Ezt felhasználva azt kapjuk, hogy

$$|\overline{\rho}_n| = \sqrt{(43,3)^2 + (25,98)^2 + (-12,5)^2} \approx 52,02\,[\text{MPa}].$$

c) Mivel $\sigma_n = \overline{n} \bullet \overline{\rho}_n$, ezért

$$\sigma_n \approx \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 \\ -0,5 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 43,3 \\ 25,98 \\ -12,5 \end{pmatrix} \approx 43,75\,[\text{MPa}].$$

Mivel

$$|\overline{\rho}_n| = \sqrt{\sigma_n^2 + \tau_n^2},$$

ezért

$$\tau_n = \sqrt{\rho_n^2 - \sigma_n^2} \approx 28,14\,[\mathrm{MPa}].$$

d) A főfeszültségek a feszültségi mátrix sajátértékei, amiket a karakterisztikus egyenlet megoldásával kapunk meg. Tehát meg kell oldanunk a

$$|T - \sigma \cdot E| = 0$$

egyenletet. Behelyettesítve az T mátrixot és az E egységmátrixot azt kapjuk, hogy

$$|T - \sigma \cdot E| = \det \left[\begin{pmatrix} 50 & 30 & 0 \\ 30 & -30 & 0 \\ 0 & 0 & 25 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & \sigma & 0 \\ 0 & 0 & \sigma \end{pmatrix} \right] =$$
$$= \det \begin{pmatrix} 50-\sigma & 30 & 0 \\ 30 & -30-\sigma & 0 \\ 0 & 0 & 25-\sigma \end{pmatrix}.$$

A kapott determinánst kiszámolhatjuk például a harmadik sor szerinti kifejtéssel. Ekkor azt kapjuk, hogy

$$|T - \sigma \cdot E| = (25-\sigma) \cdot (-1)^{3+3} \cdot \left[(50-\sigma) \cdot (-30-\sigma) - 900 \right] =$$
$$= (25-\sigma) \cdot (\sigma^2 - 20 \cdot \sigma - 2.400).$$

A főfeszültségek tehát a

$$(25-\sigma) \cdot (\sigma^2 - 20 \cdot \sigma - 2.400) = 0$$

egyenlet megoldásai. Egy szorzat úgy lehet zérus, ha valamelyik tényezője zérus, így $\sigma = 25\,[\mathrm{MPa}]$ vagy

$$\sigma^2 - 20 \cdot \sigma - 2.400 = 0.$$

A másodfokú egyenlet megoldóképlete alapján

$$\sigma_{1,2} = \frac{20 \pm \sqrt{400 + 9.600}}{2} = \frac{20 \pm 100}{2},$$

így $\sigma = 60\,[\mathrm{MPa}]$, illetve $\sigma = -40\,[\mathrm{MPa}]$. Az elméleti összefoglalóban szereplő konvenciót követve a főfeszültségek:

$$\sigma_1 = 60\,[\mathrm{MPa}];\ \sigma_2 = 25\,[\mathrm{MPa}];\ \sigma_3 = -40\,[\mathrm{MPa}].$$

Az egyes főfeszültségekhez tartozó főirányokat a

$$(T - \sigma \cdot E) \cdot \overline{n} = \overline{0}$$

homogén lineáris egyenletrendszer megoldásaként kapjuk. Behelyettesítve a $\sigma_1 = 60\,[\mathrm{MPa}]$ értéket az

$$\begin{pmatrix} -10 & 30 & 0 \\ 30 & -90 & 0 \\ 0 & 0 & -35 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

egyenletrendszerhez jutunk. Az egyenleteket részletesen kiírva azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} -10n_x + 30n_y &= 0 \\ 30n_x - 90n_y &= 0 \\ -35n_z &= 0 \end{aligned}$$

Az utolsó egyenletből $n_z = 0$ adódik. Az első és második egyenletek ekvivalensek egymással, így közülük az egyik egyenlet elhagyható. Az n_x és n_y ismeretlenek között az $n_x = 3n_y$ kapcsolatokat kapjuk. A könnyebb áttekinthetőség kedvéért legyen például $n_y = t$, ahol $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tetszőleges. Ekkor $n_x = 3t$. Az $\overline{n}$ vektornak egységvektornak kell lenni, így teljesülnie kell, hogy

$$\sqrt{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2} = 1,$$

azaz

$$\sqrt{9t^2 + t^2} = 1 \qquad \Rightarrow \qquad \sqrt{10} \cdot t = 1 \qquad \Rightarrow \qquad t = \frac{1}{\sqrt{10}}.$$

Tehát a σ_1 főfeszültséghez tartozó főirány

$$\overline{n}_1 = \begin{pmatrix} \dfrac{3}{\sqrt{10}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{10}} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

A $\sigma_2 = 25\,[\mathrm{MPa}]$ értékű főfeszültség esetén az alábbi lineáris egyenletrendszerhez jutunk:

$$\begin{pmatrix} 25 & 30 & 0 \\ 30 & -55 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Az egyenleteket részletesen kiírva azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} 25n_x + 30n_y &= 0 \\ 30n_x - 55n_y &= 0. \end{aligned}$$

Ekkor $n_z = t$ adódik, ahol $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tetszőleges. Továbbá $n_x = 0$ és $n_y = 0$. Az $\overline{n}$ vektornak egységvektornak kell lenni, így teljesülnie kell, hogy

$$\sqrt{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2} = 1,$$

azaz $t = 1$. Tehát a σ_2 főfeszültséghez tartozó főirány:

$$\overline{n}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

A $\sigma_3 = -40\,[\mathrm{MPa}]$ értékű főfeszültség esetén az alábbi lineáris egyenletrendszerhez jutunk:

$$\begin{pmatrix} 90 & 30 & 0 \\ 30 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 65 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Az egyenleteket részletesen kiírva azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} 90n_x + 30n_y &= 0 \\ 30n_x + 10n_y &= 0 \\ 65n_z &= 0. \end{aligned}$$

Az utolsó egyenletből $n_z = 0$ adódik. Az első és második egyenletek ekvivalensek egymással, így közülük az egyik egyenlet elhagyható. Az n_x és n_y ismeretlenek között az $n_y = -3n_x$ összefüggést kapjuk. A könnyebb áttekinthetőség miatt legyen például $n_x = t$, ahol $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tetszőleges. Ezt az első vagy második egyenletbe behelyettesítve azt kapjuk, hogy $n_y = -3t$. Annak is teljesülni kell továbbá, hogy az $\overline{n}$ vektornak egységvektornak kell lenni, így fenn áll a

$$\sqrt{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2} = 1,$$

összefüggés, azaz

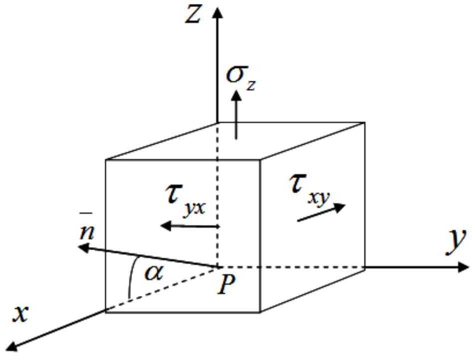
$$\sqrt{9t^2 + t^2} = 1 \qquad \Rightarrow \qquad \sqrt{10} \cdot t = 1 \qquad \Rightarrow \qquad t = \frac{1}{\sqrt{10}}.$$

Tehát a σ_3 főfeszültséghez tartozó főirány

$$\overline{n}_3 = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{10}} \\ -\dfrac{3}{\sqrt{10}} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Gyakorló feladatok.

3.1.1. **Feladat.** Egy szerkezet valamely P pontjához tartozó feszültségállapotot az ábrán látható elemi hasábon bejelölt feszültségi adatok jellemzik.



Adatok:

$$\sigma_z = 45\,[\text{MPa}];\;\; \tau_{xy} = \tau_{yx} = -30\,[\text{MPa}];\;\; \alpha = 30^\circ.$$

Az $\overline{n}$ vektor az xz-síkban van.

a) Adjuk meg az ábrán bejelölt $\overline{n}$ normális egységvektor koordinátáit, valamint a feszültségi mátrixot a P pontban!

b) Határozzuk meg az $\overline{n}$ vektor által irányított felületelemhez tartozó $\overline{\rho}_n$ feszültségvektort!

c) Határozzuk meg az $\overline{n}$ vektor által irányított felületelemhez tartozó normál- és csúsztatófeszültségek nagyságát!

d) Határozzuk meg a főfeszültségek nagyságát és a feszültségi főirányokat!

<u>**Megoldás**</u>:

a) A normális egységvektor koordinátái:

$$n_x = \cos\alpha = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$n_z = \sin\alpha = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}.$$

Mivel $n_y = 0$, így a keresett normális egységvektor:

$$\overline{n} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 \\ 0,5 \end{pmatrix}.$$

A feszültségi mátrix:

$$T = \begin{pmatrix} 0 & -30 & 0 \\ -30 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 45 \end{pmatrix} \text{ [MPa]}.$$

b) Az $\overline{n}$ vektor által irányított felületelemhez tartozó $\overline{\rho}_n$ feszültségvektor:

$$\overline{\rho}_n = T \cdot \overline{n} = \begin{pmatrix} 0 & -30 & 0 \\ -30 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 45 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 \\ 0,5 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ -15 \cdot \sqrt{3} \\ 22,5 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0 \\ -25,98 \\ 22,5 \end{pmatrix} \text{ [MPa]}.$$

c) A normál- és csúsztatófeszültségek nagysága:

$$\sigma_n \approx 11,25 \text{ [MPa]}; \quad \tau_n \approx 32,48 \text{ [MPa]}.$$

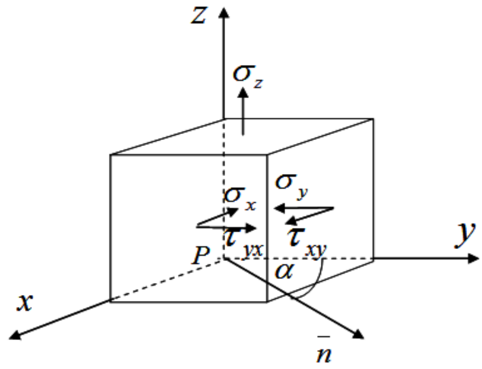
d) A főfeszültségek a feszültségi mátrix sajátértékei:

$$\sigma_1 = 45 \text{ [MPa]};\ \sigma_2 = 30 \text{ [MPa]};\ \sigma_3 = -30 \text{ [MPa]}.$$

A főirányok a megfelelő sajátértékekhez tartozó egységnyi hosszúságú sajátvektorok:

$$\overline{n}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix};\ \overline{n}_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix};\ \overline{n}_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

3.1.2. **Feladat.** Egy szerkezet valamely P pontjához tartozó feszültségállapotot az ábrán látható elemi hasábon bejelölt feszültségi adatok jellemzik.



Adatok:

$$\sigma_x = -100\,[\text{MPa}];\ \sigma_y = 60\,[\text{MPa}];\ \sigma_z = 50\,[\text{MPa}];$$
$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = -60\,[\text{MPa}];\ \alpha = 30^\circ.$$

Az $\overline{n}$ vektor az yz-síkban van.

a) Adjuk meg az ábrán bejelölt $\overline{n}$ normális egységvektor koordinátáit, valamint a feszültségi mátrixot a P pontban!

b) Határozzuk meg az $\overline{n}$ vektor által irányított felületelemhez tartozó $\overline{\rho}_n$ feszültségvektort!

c) Határozzuk meg az $\overline{n}$ vektor által irányított felületelemhez tartozó normál- és csúsztatófeszültségek nagyságát!

d) Határozzuk meg a főfeszültségek nagyságát és a feszültségi főirányokat!

Megoldás:

a) A normális egységvektor koordinátái:

$$n_y = \cos\alpha = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2};$$
$$n_z = -\sin\alpha = -\sin 30^\circ = -\frac{1}{2}.$$

Nyilván $n_x = 0$, így a keresett normális egységvektor:

$$\overline{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -0,5 \end{pmatrix}.$$

A feszültségi mátrix:

$$T = \begin{pmatrix} -100 & 60 & 0 \\ 60 & -60 & 0 \\ 0 & 0 & 50 \end{pmatrix} [\mathrm{MPa}].$$

b) Az $\overline{n}$ vektor által irányított felületelemhez tartozó $\overline{\rho}_n$ feszültségvektor:

$$\overline{\rho}_n = T \cdot \overline{n} = \begin{pmatrix} -100 & 60 & 0 \\ 60 & -60 & 0 \\ 0 & 0 & 50 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ -0,5 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 30 \cdot \sqrt{3} \\ -30 \cdot \sqrt{3} \\ -25 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 51,96 \\ -51,96 \\ -25 \end{pmatrix} [\mathrm{MPa}].$$

c) A normál- és csúsztatófeszültségek nagysága:

$$\sigma_n \approx 57,5\,[\mathrm{MPa}]; \quad \tau_n \approx 52,14\,[\mathrm{MPa}].$$

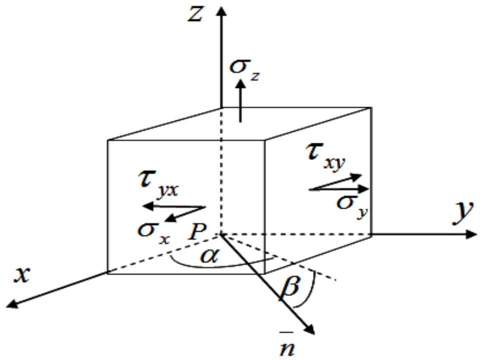
d) A főfeszültségek a feszültségi mátrix sajátértékei:

$$\sigma_1 = 80\,[\mathrm{MPa}];\ \sigma_2 = 50\,[\mathrm{MPa}];\ \sigma_3 = -120\,[\mathrm{MPa}].$$

A főirányok a megfelelő sajátértékekhez tartozó egységnyi hosszúságú sajátvektorok:

$$\overline{n}_1 = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{10}} \\ \dfrac{3}{\sqrt{10}} \\ 0 \end{pmatrix};\ \overline{n}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix};\ \overline{n}_3 = \begin{pmatrix} -\dfrac{3}{\sqrt{10}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{10}} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

3.1.3. **Feladat.** Egy szerkezet valamely P pontjához tartozó feszültségállapotot az ábrán látható elemi hasábon bejelölt feszültségi adatok jellemzik.



Adatok:

$$\sigma_x = 25\,[\mathrm{MPa}];\ \sigma_y = 25\,[\mathrm{MPa}];\ \sigma_z = 12,5\,[\mathrm{MPa}];$$
$$\tau_{xy} = -15\,[\mathrm{MPa}];\ \alpha = 60^\circ;\ \beta = 30^\circ.$$

a) Adjuk meg az ábrán bejelölt $\overline{n}$ normális egységvektor koordinátáit, valamint a feszültségi mátrixot a P pontban!

b) Határozzuk meg az $\overline{n}$ vektor által irányított felületelemhez tartozó $\overline{\rho}_n$ feszültségvektort!

c) Határozzuk meg az $\overline{n}$ vektor által irányított felületelemhez tartozó normál- és csúsztatófeszültségek nagyságát!

d) Határozzuk meg a főfeszültségek nagyságát és a feszültségi főirányokat!

<u>**Megoldás**</u>:

a) A keresett normális egységvektor:

$$\overline{n} \approx \begin{pmatrix} 0,43 \\ 0,75 \\ -0,5 \end{pmatrix}.$$

A feszültségi mátrix:

$$T = \begin{pmatrix} 25 & -15 & 0 \\ -15 & 25 & 0 \\ 0 & 0 & 12,5 \end{pmatrix} [\mathrm{MPa}].$$

b) Az $\overline{n}$ vektor által irányított felületelemhez tartozó $\overline{\rho}_n$ feszültségvektor:

$$\overline{\rho}_n \approx \begin{pmatrix} -0,5 \\ 12,3 \\ -6,25 \end{pmatrix} [\mathrm{MPa}].$$

c) A normál- és csúsztatófeszültségek nagysága:

$$\sigma_n \approx 12,14\,[\mathrm{MPa}]; \quad \tau_n \approx 6,57\,[\mathrm{MPa}].$$

d) A főfeszültségek a feszültségi mátrix sajátértékei:

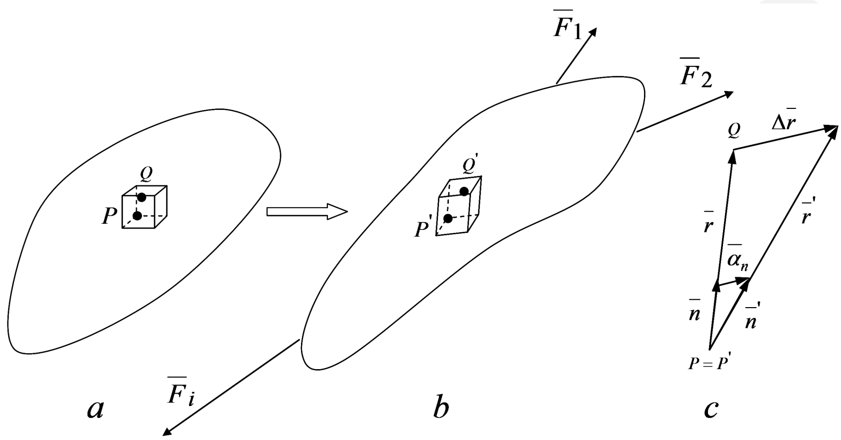
$$\sigma_1 = 40\,[\mathrm{MPa}];\ \sigma_2 = 12,5\,[\mathrm{MPa}];\ \sigma_3 = 10\,[\mathrm{MPa}].$$

A főirányok a megfelelő sajátértékekhez tartozó egységnyi hosszúságú sajátvektorok:

$$\overline{n}_1 = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix};\ \overline{n}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix};\ \overline{n}_3 = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

3.2. Alakváltozási állapot, általános Hooke-törvény

Elméleti összefoglaló. Vegyünk egy szilárdtestet és biztosítsuk annak stabil egyensúlyi helyzetét megfelelő kényszerekkel. A kényszerek megakadályozzák a test merev mozgásait (elmozdulás, elfordulás), de lehetővé teszik annak alakváltozását. Az alábbi ábra a testet szemlélteti terheletlen, és külső erőkkel terhelt állapotában.



Válasszuk ki a test egy tetszőleges P pontját, majd terheletlen állapotban vegyük fel a hozzá tartozó kicsiny, kocka alakú térfogatelemet és benne egy P-re nem illeszkedő Q pontot. A belső feszültségek hatására a P pont a P', míg a Q pont a Q' pontba mozdul el, a térfogatelem alakja pedig – feltéve, hogy az megfelelően kicsiny – paralelepipedonná torzul. Az ábra c) részén feltüntettük a Q pontnak a P ponthoz viszonyított $\Delta\overline{r}$ relatív elmozdulását. Az ábra alapján, egy aránypár segítségével értelmezhetjük az $\overline{n}$ irányhoz tartozó $\overline{\alpha}_n$ alakváltozási vektort:

$$\overline{\alpha}_n = \frac{\overline{\alpha}_n}{|\overline{n}|} = \frac{\Delta\overline{r}}{|\overline{r}|}; \qquad |\overline{n}| = 1.$$

Tehát $\overline{\alpha}_n$ az $\overline{n}$ egységvektor végpontjának elmozdulása. Az $\overline{\alpha}_n$ vektort a PQ szakasz hosszával megszorozva megkapjuk a Q pont elmozdulását:

$$\Delta\overline{r} = \overline{\alpha}_n \cdot |\overline{r}|.$$

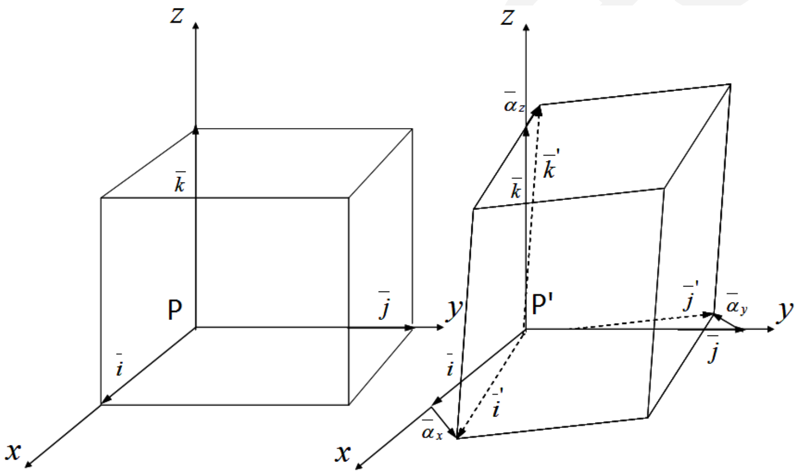
Azaz az $\overline{\alpha}_n$ vektor ismeretében bármely, az $\overline{n}$ irányú egyenesre illeszkedő pont elmozdulása meghatározható. Ez az eljárás közelítés, amely annál pontosabb, minél közelebb vagyunk a P ponthoz.

A test P pontjából a tér minden irányába indíthatók $\overline{n}$ egységvektorok. Az egyes vektorokhoz különböző alakváltozási vektorok tartoznak. Az alakváltozási vektort tetszőleges irányban ismerve, a P pont környezetében bármely pont elmozdulása meghatározható. Ekkor az mondjuk, hogy a P pontban az alakváltozási állapot ismert. Tehát a P ponthoz tartozó *alakváltozási állapot* alatt az egyes $\overline{n}$ irányhoz tartozó $\overline{\alpha}_n$ alakváltozási vektorok összességét értjük.

Az $A\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ alakváltozási tenzor egy lineáris függvény, amely az $\overline{n}$ irányokhoz az $\overline{\alpha}_n$ alakváltozási vektorokat rendeli:

$$A\big(\overline{n}\big) = \overline{\alpha}_n.$$

Az *alakváltozási mátrix* az alakváltozási tenzornak valamely konkrét koordinátarendszerre (bázisra) vonatkozó mátrixa. Rögzítsünk a P és P' pontokban két azonos tengelyállású, Descartes-féle derékszögű koordinátarendszert, majd a P ponthoz tartozóban vegyünk fel egy egységnyi oldalhosszúságú kockát.



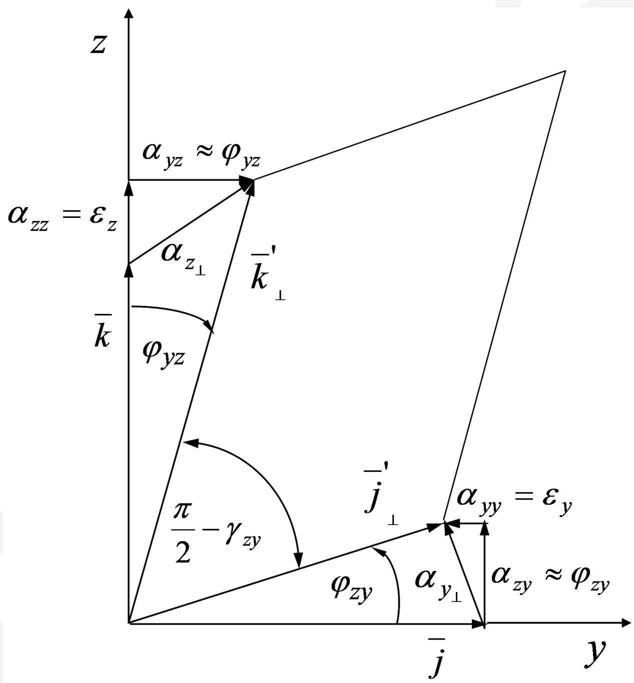
Jelölje $\overline{\alpha}_x$, $\overline{\alpha}_y$ és $\overline{\alpha}_z$ az $\overline{i}$, $\overline{j}$ és $\overline{k}$ irányokhoz tartozó alakváltozási vektorokat deformált állapotban. Az egyes alakváltozási vektorokat x, y és z irányú összetevőkre bonthatjuk. A $\overline{\alpha}_x$ alakváltozási vektor koordinátái például: α_{xx}, α_{yx} és α_{zx}. Az első index az adott komponensnek az irányára, a második az $\overline{i}$ irányra utal. Tehát az alakváltozási vektorok, mint oszlopvektorok, az alábbi alakot öltik:

$$\overline{\alpha}_x = \begin{pmatrix} \alpha_{xx} \\ \alpha_{yx} \\ \alpha_{zx} \end{pmatrix}; \quad \overline{\alpha}_y = \begin{pmatrix} \alpha_{xy} \\ \alpha_{yy} \\ \alpha_{zy} \end{pmatrix}; \quad \overline{\alpha}_z = \begin{pmatrix} \alpha_{xz} \\ \alpha_{yz} \\ \alpha_{zz} \end{pmatrix}.$$

A alakváltozási vektorokból összeállítható a P ponthoz tartozó A alakváltozási mátrix:

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{xx} & \alpha_{xy} & \alpha_{xz} \\ \alpha_{yx} & \alpha_{yy} & \alpha_{yz} \\ \alpha_{zx} & \alpha_{zy} & \alpha_{zz} \end{pmatrix}.$$

Megjegyezzük, hogy ez a mátrix függ a koordinátarendszer megválasztásától. Különböző koordinátarendszerek esetén általában különböző alakváltozási mátrixokat kapunk. Az alakváltozási mátrix elemeinek szemléletes geometriai jelentést adhatunk, ha ábrázoljuk például a $\overline{j}$ és $\overline{k}$ vektorok által kifeszített paralelogramma yz síkra eső merőleges vetületét:



Az ábra alapján

$$\alpha_{zz} = \frac{(1+\alpha_{zz}) - 1}{1} = \varepsilon_z$$
$$\alpha_{yy} = \frac{(1+\alpha_{yy}) - 1}{1} = \varepsilon_y,$$

továbbá kis deformációk esetén jó közelítéssel teljesül, hogy

$$\alpha_{yz} \approx 1 \cdot \varphi_{yz} = \varphi_{yz}$$
$$\alpha_{zy} \approx 1 \cdot \varphi_{zy} = \varphi_{zy}.$$

Az összefüggésekben ε_y és ε_z az y és z irányú fajlagos nyúlás, φ_{zy} és φ_{yz} pedig az y tengelynek a z tengely irányába, és a z tengelynek az y irányába történő elfordulása. A fenti egyenletekből adódik, hogy φ_{zy} és φ_{yz} értéke pozitív, ha az y tengely z felé, illetve a z tengely y felé fordul el; ε_y és ε_z előjelét pedig a koordinátatengelyek irányításához igazítjuk, azaz az ábrán adott esetben ε_y negatív, ε_z pozitív. Mindig teljesül továbbá az alábbi szimmetria tulajdonság:

$$\varphi_{zy} = \varphi_{yz} = \frac{1}{2} \cdot \gamma_{zy},$$

ahol γ_{zy} az yz-síkbeli szögelfordulás. Ezek akapján az alakváltozási mátrix:

$$A = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2} \cdot \gamma_{xy} & \frac{1}{2} \cdot \gamma_{xz} \\ \frac{1}{2} \cdot \gamma_{yx} & \varepsilon_y & \frac{1}{2} \cdot \gamma_{yz} \\ \frac{1}{2} \cdot \gamma_{zx} & \frac{1}{2} \cdot \gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{pmatrix}.$$

Az alakváltozási mátrix szimmetrikus.

Az alakváltozási mátrix ismeretében a P pontbeli, $\overline{n}$ irányhoz tartozó alakváltozási vektort az alábbi összefüggéssel számíthatjuk:

$$\overline{\alpha}_n = A \cdot \overline{n},$$

ahol $|\overline{n}| = 1$.

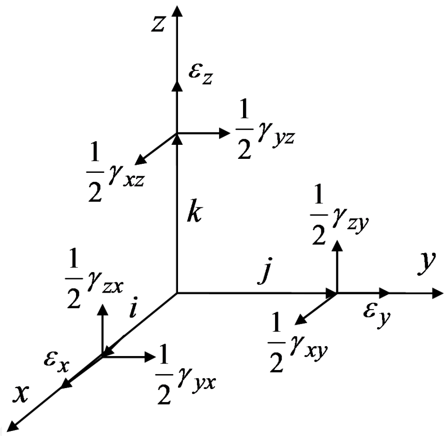
A alakváltozási mátrix segítségével bármely tetszőleges n irányban létrejövő fajlagos ε_n nyúlás, illetve két egymásra merőleges n és m tengely egymás felé fordulásának

$$\frac{1}{2} \cdot \gamma_{mn} = \frac{1}{2} \cdot \gamma_{nm}$$

szöge az alábbi módon határozható meg:

$$\varepsilon_n = \overline{n} \bullet \overline{\alpha}_n = \overline{n} \cdot A \cdot \overline{n}$$
$$\frac{1}{2} \cdot \gamma_{mn} = \overline{m} \bullet \overline{\alpha}_n = \overline{m} \cdot A \cdot \overline{n}$$
$$\frac{1}{2} \cdot \gamma_{nm} = \overline{n} \bullet \overline{\alpha}_m = \overline{n} \cdot A \cdot \overline{m}.$$

Azaz az alakváltozási mátrix ismeretében a P pont alakváltozási állapota ismert. Az alakváltozási mátrixot három, egymásra páronként merőleges irányhoz tartozó alakváltozási vektor meghatározza. A fentiekből adódik, hogy az alakváltozási állapot megadásához elegendő három, egymásra páronként merőleges irányhoz tartozó alakváltozási vektort megadni. Az alakváltozási állapotot az egységnyi élhosszúságú kocka egymást metsző három élének végpontjaihoz tartozó alakváltozási vektor koordinátáival szokás szemléltetni, az alábbi ábra szerint:



Egy P pont alakváltozási állapotát vizsgálva mindig találhatunk olyan $\overline{n}$ irányokat, amelyekhez tartozó $\overline{\alpha}_n$ alakváltozási vektorok párhuzamosak az $\overline{n}$ iránnyal, azaz felírható az alábbi egyenlet:

$$\overline{\alpha}_n = A \cdot \overline{n} = \varepsilon_n \cdot \overline{n},$$

ahol $|\overline{n}| = 1$. A fenti tulajdonságú $\overline{n}$ irányokat az alakváltozási állapot *főirány*ainak, a hozzájuk tartozó ε_n fajlagos nyúlásokat *főnyúlás*oknak nevezzük. Az $\overline{n}$ főirányokban csak nyúlás lép fel, irányváltozás nem.

Az alakváltozási főirányok egymásra páronként merőlegesek.

A főnyúlások az alakváltozási mátrix sajátértékei, az alakváltozási főirányok pedig egységnyi hosszúságú sajátvektorai.

A főnyúlásokat az alakváltozási mátrix

$$|A - \varepsilon \cdot E| = 0$$

karakterisztikus egyenletének gyökei adják.

A alakváltozási mátrix karakterisztikus egyenletének mindig három különböző valós gyöke van. Ebből adódóan a főnyúlások száma három. A főnyúlásokat nagyságuk szerint indexezzük az alábbiak szerint:

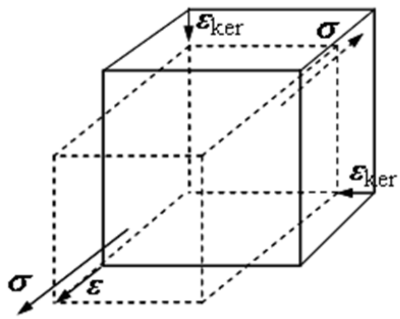
$$\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \varepsilon_3.$$

Az egyes ε_i főnyúlásokhoz tartozó $\overline{n}_i$ főirányok az

$$(A - \varepsilon_i \cdot E) \cdot \overline{n} = \overline{0}$$

homgén lineáris egyenletrendszer egységnyi hosszúságú megoldásai.

Terheljük az egységnyi oldalhosszúságú kocka két szemközti oldalát σ nagyságú, normálirányú feszültséggel. A tapasztalatok szerint a kocka a feszültség irányában megnyúlik, a feszültség irányára merőleges keresztmetszete pedig csökken.



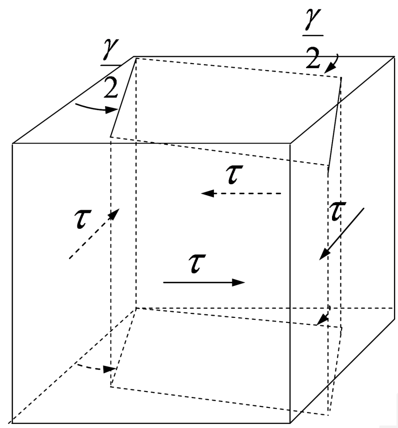
Jelölje ε a feszültségirányú, ε_{ker} az arra merőleges (keresztirányú) fajlagos nyúlást. Tapasztalat szerint, kicsiny deformációk esetén teljesülnek az alábbi összefüggések:

$$\sigma = E \cdot \varepsilon; \quad \varepsilon_{ker} = -\nu \cdot \varepsilon,$$

ahol az E és ν anyagi minőségre jellemző állandók elnevezése *Young-modulus* és *Poisson-tényező*. Ezek az értékek acéloknál:

$$2 \cdot 10^{11}\,[\mathrm{Pa}] \le E \le 2,1 \cdot 10^{11}\,[\mathrm{Pa}]$$
$$0,2 \le \nu \le 0,33.$$

Ha a kocka két szemközti oldalpárján azonos nagyságú és irányú, de ellentétes értelmű τ feszültségek ébrednek, akkor a kocka rombusz alapú hasábbá torzul. Ezt szemlélteti az alábbi ábra:



Tapasztalat szerint, kicsiny deformációk esetén a τ csúsztatófeszültség arányos a γ szögtorzulással:

$$\tau = G \cdot \gamma.$$

A G arányossági tényező neve *csúsztató rugalmassági modulus*.
A három anyagi állandó között minden esetben fennáll az alábbi összefüggés:

$$G = \frac{E}{2 \cdot (1 + \nu)}.$$

Ezek után felírhatjuk a feszültségi és alakváltozási állapot kapcsolatát meghatározó, egymással egyenértékű összefüggéseket:

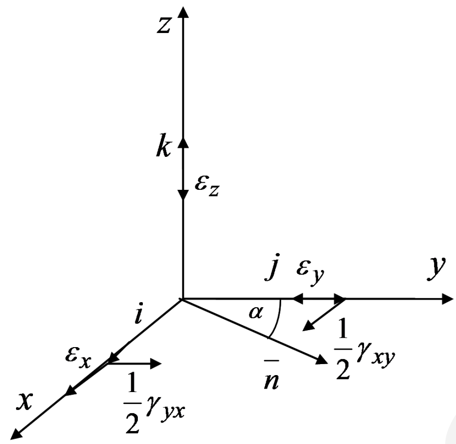
$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2G} \cdot \left(T - \frac{\nu}{1+\nu} \cdot F_I \cdot E \right) \\ T &= 2G \cdot \left(A + \frac{\nu}{1-2\nu} \cdot A_I \cdot E \right). \end{aligned}$$

Az összefüggéseket *általános Hooke-törvény*nek nevezzük. Az egyenletekben szereplő F_I és A_I paramétereket az alábbi összefüggések definiálják:

$$\begin{aligned} F_I &= \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 \\ A_I &= \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3. \end{aligned}$$

Szükséges matematikai ismeretek. Szögfüggvények ismeretek, mátrixok összeadása és szorzása, sajátérték, sajátvektor meghatározása, vektorok skaláris szorzata.

Mintafeladat. Egy acélszerkezet valamely P pontjához tartozó alakváltozási állapotot az alábbi ábra szemlélteti:



Adatok:

$$\varepsilon_x = 2,58 \cdot 10^{-4}; \quad \varepsilon_y = -2,62 \cdot 10^{-4}; \quad \varepsilon_z = -0,954 \cdot 10^{-4};$$
$$\gamma_{xy} = 3,9 \cdot 10^{-4}; \quad \alpha = 30^\circ; \quad E = 2 \cdot 10^{11}\,[\mathrm{Pa}]; \quad \nu = 0,3.$$

a) Adjuk meg az y tengelyhez α szöggel hajló, yz síkban fekvő $\overline{n}$ egységvektor koordinátáit, valamint az alakváltozási mátrixot a P pontban!

b) Adjuk meg az $\overline{n}$ irányhoz tartozó alakváltozási vektort!

c) Határozzuk meg az $\overline{n}$ irányú ε_n fajlagos nyúlást, valamint az $\overline{i}$ és $\overline{j}$ egységvektorok egymás felé fordulásának szögét!

d) Határozzuk meg a főnyúlások nagyságát és az alakváltozási főirányokat!

e) Számoljuk ki a csúsztató rugalmassági modulus értékét!

f) Adjuk meg a feszültségmátrixot a P pontban!

Megoldás:

a) Mivel az egységvektor az yz síkban fekszik, ezért $n_x = 0$. A keresett vektor második koordinátája:

$$n_y = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} = 0,8\dot{6}.$$

A keresett vektor harmadik koordinátája

$$n_z = -\sin 30^\circ = -0,5.$$

Tehát a keresett egységvektor:

$$\overline{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ -0,5 \end{pmatrix}.$$

Az alakváltozási mátrix a P pontban:

$$A = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & \dfrac{1}{2}\gamma_{xy} & \dfrac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \dfrac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & \dfrac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \dfrac{1}{2}\gamma_{zx} & \dfrac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2,58 & 1,95 & 0 \\ 1,95 & -2,62 & 0 \\ 0 & 0 & -0,95 \end{pmatrix} \cdot 10^{-4}.$$

b) Az $\overline{n}$ irányhoz tartozó alakváltozási vektor:

$$\overline{\alpha}_n = A \cdot \overline{n} = \begin{pmatrix} 2,58 & 1,95 & 0 \\ 1,95 & -2,62 & 0 \\ 0 & 0 & -0,95 \end{pmatrix} \cdot 10^{-4} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ -0,5 \end{pmatrix} \approx$$

$$\approx \begin{pmatrix} 1,69 \\ -2,27 \\ 0,48 \end{pmatrix} \cdot 10^{-4}.$$

c) A fajlagos nyúlás értéke

$$\varepsilon_n = \overline{n} \bullet \overline{\alpha}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -0,5 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1,69 \\ -2,27 \\ -0,48 \end{pmatrix} \cdot 10^{-4} \approx -1,73 \cdot 10^{-4}.$$

Az $\overline{i}$ és $\overline{j}$ egységvektorok egymás felé fordulásának szöge:

$$\frac{1}{2} \cdot \gamma_{yx} = \frac{1}{2} \cdot \gamma_{xy} = \overline{j} \cdot A \cdot \overline{i} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2,58 & 1,95 & 0 \\ 1,95 & -2,62 & 0 \\ 0 & 0 & -0,95 \end{pmatrix} \cdot 10^{-4} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$= 1,95 \cdot 10^{-4}.$$

Megjegyezzük, hogy a vektorokat a korábbiakban oszlopvektoroknak tekintettük, azonban a $\overline{j}$ vektor esetén most a sorvektort írtunk, így a korábbi koncepciót követve $\overline{j}^T$ lenne a precíz írásmód, azonban az egyszerűség kedvéért a $\overline{j}^T$ helyett $\overline{j}$-t írunk. tekintettük amiatt, hogy a megfelelő mátrixszorzásnak legyen értelme.

d) A főnyúlások az alakváltozási mátrix sajátértékei, amelyeket az

$$|A - \varepsilon \cdot E| = 0$$

karakterisztikus egyenlet megoldásával kapunk meg. A karakterisztikus polinom:

$$\begin{aligned}
&|A - \varepsilon \cdot E| = \\
&= \det \left[\begin{pmatrix} 2,58 & 1,95 & 0 \\ 1,95 & -2,62 & 0 \\ 0 & 0 & -0,95 \end{pmatrix} \cdot 10^{-4} - \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon \end{pmatrix} \right] = \\
&= \det \begin{pmatrix} 2,58 \cdot 10^{-4} - \varepsilon & 1,95 \cdot 10^{-4} & 0 \\ 1,95 \cdot 10^{-4} & -2,62 \cdot 10^{-4} - \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & -0,95 \cdot 10^{-4} - \varepsilon \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

A kapott determinánst például a harmadik sora szerint kifejtve azt kapjuk, hogy

$$(-0,95 \cdot 10^{-4} - \varepsilon) \cdot (\varepsilon^2 - 0,04 \cdot 10^{-4} \cdot \varepsilon - 10,56 \cdot 10^{-8}).$$

A megoldandó egyenlet tehát:

$$(-0,95 \cdot 10^{-4} - \varepsilon) \cdot (\varepsilon^2 - 0,04 \cdot 10^{-4} \cdot \varepsilon - 10,56 \cdot 10^{-8}) = 0.$$

Egy szorzat csak akkor lehet zérus, ha valamelyik tényezője zérus, így a sajátértékek

$$\begin{aligned}
\varepsilon_1 &\approx \quad 3,23 \cdot 10^{-4} \\
\varepsilon_2 &\approx -0,95 \cdot 10^{-4} \\
\varepsilon_3 &\approx -3,27 \cdot 10^{-4}.
\end{aligned}$$

Az egyes főnyúlásokhoz tartozó alakváltozási főirányokat az

$$(A - \varepsilon_i \cdot E) \cdot \overline{n} = \overline{0} \qquad (i = 1, 2, 3)$$

homogén lineáris egyenletrendszer megoldásaként kapjuk. Behelyettesítve az $\varepsilon_1 = 3,23 \cdot 10^{-4}$ értéket az

$$\begin{pmatrix} -0,65 & 1,95 & 0 \\ 1,95 & -5,85 & 0 \\ 0 & 0 & -2,28 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

egyenletrendszerhez jutunk. Az egyenleteket részletesen kiírva azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} -0,65n_x + 1,95n_y &= 0 \\ 1,95n_x - 5,85n_y &= 0 \\ -2,28n_z &= 0 \end{aligned}$$

Az utolsó egyenletből $n_z = 0$ adódik. Az első és második egyenletek ekvivalensek egymással, így az egyik egyenlet elhagyható. Az n_x és n_y ismeretlenek között az $n_x = 3n_y$ összefüggést kapjuk. A jelölések egyszerűsítése miatt legyen például $n_y = t$, ahol $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tetszőleges. Ekkor $n_x = 3t$. Az $\overline{n}$ vektornak egységvektornak kell lenni, így teljesülnie kell, hogy

$$\sqrt{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2} = 1,$$

azaz

$$\sqrt{9t^2 + t^2} = 1 \qquad \Rightarrow \qquad \sqrt{10} \cdot t = 1 \qquad \Rightarrow \qquad t = \frac{1}{\sqrt{10}}.$$

Tehát a ε_1 főnyúláshoz tartozó alakváltozási főirány

$$\overline{n}_1 = \begin{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{10}} \\ \frac{1}{\sqrt{10}} \\ 0 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0,95 \\ 0,32 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Az $\varepsilon_2 = -0,95 \cdot 10^{-4}$ értékű főnyúlás esetén az alábbi lineáris egyenletrendszerhez jutunk:

$$\begin{pmatrix} 3,53 & 1,95 & 0 \\ 1,95 & -1,67 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Az egyenleteket részletesen kiírva azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} 3,53n_x + 1,95n_y &= 0 \\ 1,95n_x - 1,67n_y &= 0 \end{aligned}$$

Ekkor az n_z ismeretlenre nem kaptunk semmilyen „megkötést", így az tetszőleges zérustól különböző értékét felvehet, azaz legyen $n_z = t$, ahol $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tetszőleges. Továbbá $n_x = 0$ és $n_y = 0$. Az $\overline{n}$ vektornak egységvektornak kell lenni, így teljesülnie kell, hogy

$$\sqrt{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2} = 1,$$

azaz $t = 1$. Tehát a ε_2 főfeszültséghez tartozó főirány:

$$\overline{n}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

A $\varepsilon_3 = -3,27 \cdot 10^{-4}$ értékű főnyúlás esetén az alábbi lineáris egyenletrendszerhez jutunk:

$$\begin{pmatrix} 5,85 & 1,95 & 0 \\ 1,95 & 0,65 & 0 \\ 0 & 0 & 4,22 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Az egyenleteket részletesen kiírva azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} 5,85 n_x + 1,95 n_y &= 0 \\ 1,95 n_x + 0,65 n_y &= 0 \\ 4,22 n_z &= 0 \end{aligned}$$

Az utolsó egyenletből $n_z = 0$ adódik. Az első és második egyenletek ekvivalensek egymással, így közülük az egyik egyenlet elhagyható. Az n_x és n_y ismeretlenek között az $n_y = -3n_x$ összefüggést kapjuk. Az egyszerűbb felírás kedvéért legyen például $n_x = t$, ahol $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tetszőleges. Ekkor $n_y = -3t$. Mivel $\overline{n}$ egységvektor, ezért

$$\sqrt{9t^2 + t^2} = 1.$$

Ebből meghatározhatjuk a t értékét:

$$\sqrt{10} \cdot t = 1 \qquad \Rightarrow \qquad t = \frac{1}{\sqrt{10}}.$$

Ezt felhasználva a ε_3 főfeszültséghez tartozó főirány

$$\overline{n}_3 = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{10}} \\ -\dfrac{3}{\sqrt{10}} \\ 0 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0,32 \\ -0,95 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

e) A csúsztató rugalmassági modulus értéke:

$$G = \frac{E}{2 \cdot (1+\nu)} = \frac{2 \cdot 10^{11}}{2,6} \approx 0,77 \cdot 10^{11} \text{ [Pa]}.$$

f) Az elméleti összefoglalóban szereplő A_I paraméter értéke:

$$A_I = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = 0,91 \cdot 10^{-4}.$$

Az elméleti összefoglalóban leírtak alapján a feszültségmátrix és alakváltozási mátrix között az alábbi kapcsolat adható meg:

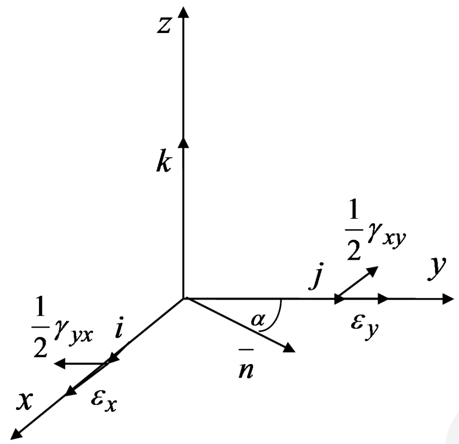
$$T = 2G \cdot \left(A + \frac{\nu}{1-2\nu} \cdot A_I \cdot E \right).$$

Ezt felhasználva, a megfelelő adatok behelyettesítésével a feszültségmátrix a P pontban:

$$T = 2G \cdot \left(A + \frac{\nu}{1-2\nu} \cdot A_I \cdot E \right) = 1,54 \cdot 10^{11} \cdot$$
$$\cdot \left[\begin{pmatrix} 2,58 & 1,95 & 0 \\ 1,95 & -2,62 & 0 \\ 0 & 0 & -0,95 \end{pmatrix} \cdot 10^{-4} + 0,75 \cdot 0,91 \cdot 10^{-4} \cdot E \right] =$$
$$= 1,54 \cdot 10^{11} \cdot \left[\begin{pmatrix} 2,58 & 1,95 & 0 \\ 1,95 & -2,62 & 0 \\ 0 & 0 & -0,95 \end{pmatrix} \cdot 10^{-4} + \right.$$
$$\left. + \, 0,6825 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot 10^{-4} \right] =$$
$$= \begin{pmatrix} 3,2625 & 1,95 & 0 \\ 1,95 & -1,9375 & 0 \\ 0 & 0 & -0,2675 \end{pmatrix} \cdot 1,54 \cdot 10^{7} =$$
$$= \begin{pmatrix} 5,02425 & 3,003 & 0 \\ 3,003 & -2,98375 & 0 \\ 0 & 0 & -0,41195 \end{pmatrix} \cdot 10^{7}.$$

Gyakorló feladatok.

3.2.1. **Feladat.** Egy acélszerkezet valamely P pontjához tartozó alakváltozási állapotot az alábbi ábra szemlélteti:



Adatok:

$$\varepsilon_x = 22,51 \cdot 10^{-5}; \quad \varepsilon_y = 6,75 \cdot 10^{-5}; \quad \gamma_{xy} = -39 \cdot 10^{-5};$$
$$\alpha = 30°; \quad E = 2 \cdot 10^{11} \text{ [Pa]}; \quad \nu = 0,3.$$

a) Adjuk meg az y tengelyhez α szöggel hajló, xy síkban fekvő $\overline{n}$ egységvektor koordinátáit, valamint az alakváltozási mátrixot a P pontban!

b) Adjuk meg az $\overline{n}$ irányhoz tartozó alakváltozási vektort!

c) Határozzuk meg az $\overline{n}$ irányú ε_n fajlagos nyúlást, valamint az $\overline{i}$ és $\overline{j}$ egységvektorok egymás felé fordulásának szögét!

d) Határozzuk meg a főnyúlások nagyságát és az alakváltozási főirányokat!

e) Számoljuk ki a csúsztató rugalmassági modulus értékét!

f) Adjuk meg a feszültségmátrixot a P pontban!

Megoldás:

a) A normális egységvektor:

$$\overline{n} = \begin{pmatrix} 0,5 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Az alakváltozási mátrix a P pontban:

$$A = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22,51 & -19,5 & 0 \\ -19,5 & 6,75 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot 10^{-5}.$$

b) Az $\overline{n}$ irányhoz tartozó alakváltozási vektor:

$$\overline{\alpha}_n = A \cdot \overline{n} = \begin{pmatrix} 22,51 & -19,5 & 0 \\ -19,5 & 6,75 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot 10^{-5} \cdot \begin{pmatrix} 0,5 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \approx$$

$$\approx \begin{pmatrix} -5,63 \\ -3,9 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot 10^{-5}.$$

c) A fajlagos nyúlás értéke

$$\varepsilon_n = \overline{n} \bullet \overline{\alpha}_n = \begin{pmatrix} 0,5 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} -5,63 \\ -3,9 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot 10^{-5} \approx -6,19 \cdot 10^{-5}.$$

Az $\overline{i}$ és $\overline{j}$ egységvektorok egymás felé fordulásának szöge:

$$\frac{1}{2} \cdot \gamma_{yx} = \frac{1}{2} \cdot \gamma_{xy} = \overline{j} \cdot A \cdot \overline{i} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 22,51 & -19,5 & 0 \\ -19,5 & 6,75 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot 10^{-5} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$= -19,5 \cdot 10^{-5}.$$

d) A főnyúlások értékei:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &\approx 35,66 \cdot 10^{-5} \\ \varepsilon_2 &= \ 0 \\ \varepsilon_3 &\approx -6,4 \cdot 10^{-5}. \end{aligned}$$

A főirányok:

$$\overline{n}_1 \approx \begin{pmatrix} -0,83 \\ 0,56 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \overline{n}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \overline{n}_3 \approx \begin{pmatrix} 0,56 \\ 0,83 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

e) A csúsztató rugalmassági modulus értéke:

$$G = \frac{E}{2 \cdot (1+\nu)} = \frac{2 \cdot 10^{11}}{2,6} \approx 0,77 \cdot 10^{11} \text{ [Pa]}.$$

f) Az elméleti összefoglalóban szereplő A_I paraméter értéke:

$$A_I = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = 29,26 \cdot 10^{-5}.$$

Az elméleti összefoglalóban leírtak alapján a feszültségmátrix és alakváltozási mátrix között az alábbi kapcsolat adható meg:

$$T = 2G \cdot \left(A + \frac{\nu}{1-2\nu} \cdot A_I \cdot E \right).$$

Ezt felhasználva, a megfelelő adatok behelyettesítésével a feszültségmátrix a P pontban:

$$T = 2G \cdot \left(A + \frac{\nu}{1-2\nu} \cdot A_I \cdot E \right) = 1,54 \cdot 10^{11} \cdot$$

$$\cdot \left[\begin{pmatrix} 22,51 & -19,5 & 0 \\ -19,5 & 6,75 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot 10^{-5} + 0,75 \cdot 29,26 \cdot 10^{-5} \cdot E \right] =$$

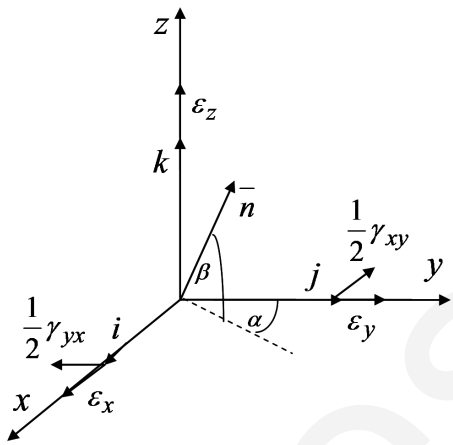
$$= 1,54 \cdot 10^{11} \cdot \left[\begin{pmatrix} 22,51 & -19,5 & 0 \\ -19,5 & 6,75 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot 10^{-5} + \right.$$

$$\left. + \; 21,945 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot 10^{-5} \right] =$$

$$= \begin{pmatrix} 44,455 & -19,5 & 0 \\ -19,5 & 28,695 & 0 \\ 0 & 0 & 21,945 \end{pmatrix} \cdot 1,54 \cdot 10^{6} =$$

$$= \begin{pmatrix} 68,4607 & -30,03 & 0 \\ -30,03 & 44,1903 & 0 \\ 0 & 0 & 33,7953 \end{pmatrix} \cdot 10^{6}.$$

3.2.2. **Feladat.** Egy acélszerkezet valamely P pontjához tartozó alakváltozási állapotot az alábbi ábra szemlélteti:



Adatok:

$$\varepsilon_x = 8,38 \cdot 10^{-5}; \quad \varepsilon_y = 1,88 \cdot 10^{-5}; \quad \varepsilon_z = 0,25 \cdot 10^{-5};$$
$$\gamma_{xy} = -19,5 \cdot 10^{-5}; \quad \alpha = 30°; \quad \beta = 60°; \quad E = 2 \cdot 10^{11} \text{ [Pa]};$$
$$\nu = 0,3.$$

a) Adjuk meg az ábrán látható $\overline{n}$ egységvektor koordinátáit, valamint az alakváltozási mátrixot a P pontban!

b) Adjuk meg az $\overline{n}$ irányhoz tartozó alakváltozási vektort!

c) Határozzuk meg az $\overline{n}$ irányú ε_n fajlagos nyúlást, valamint az $\overline{i}$ és $\overline{j}$ egységvektorok egymás felé fordulásának szögét!

d) Határozzuk meg a főnyúlások nagyságát és az alakváltozási főirányokat!

Megoldás:

a) A normális egységvektor:

$$\overline{n} \approx \begin{pmatrix} 0,25 \\ 0,43 \\ 0,87 \end{pmatrix}.$$

Az alakváltozási mátrix a P pontban:

$$A = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8,38 & -9,75 & 0 \\ -9,75 & 1,88 & 0 \\ 0 & 0 & 0,25 \end{pmatrix} \cdot 10^{-5}.$$

b) Az $\overline{n}$ irányhoz tartozó alakváltozási vektor:

$$\overline{\alpha}_n = A \cdot \overline{n} = \begin{pmatrix} 8,38 & -9,75 & 0 \\ -9,75 & 1,88 & 0 \\ 0 & 0 & 0,25 \end{pmatrix} \cdot 10^{-5} \cdot \begin{pmatrix} 0,25 \\ 0,43 \\ 0,87 \end{pmatrix} \approx$$

$$\approx \begin{pmatrix} -2,1 \\ -1,63 \\ 0,22 \end{pmatrix} \cdot 10^{-5}.$$

c) A fajlagos nyúlás értéke

$$\varepsilon_n = \overline{n} \bullet \overline{\alpha}_n = \begin{pmatrix} 0,25 \\ 0,43 \\ 0,87 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} -2,1 \\ -1,63 \\ 0,22 \end{pmatrix} \cdot 10^{-5} \approx -1,03 \cdot 10^{-5}.$$

Az $\overline{i}$ és $\overline{j}$ egységvektorok egymás felé fordulásának szöge:

$$\frac{1}{2} \cdot \gamma_{yx} = \frac{1}{2} \cdot \gamma_{xy} = \overline{j} \cdot A \cdot \overline{i} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8,38 & -9,75 & 0 \\ -9,75 & 1,88 & 0 \\ 0 & 0 & 0,25 \end{pmatrix} \cdot 10^{-5} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$= -9,75 \cdot 10^{-5}.$$

d) A főnyúlások az A alakváltozási mátrix sajátértékei, azaz a

$$\det \begin{pmatrix} 8,38 - \varepsilon & -9,75 & 0 \\ -9,75 & 1,88 - \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & 0,25 - \varepsilon \end{pmatrix} = 0$$

egyenlet megoldásai, amire azt kapjuk, hogy

$$\varepsilon_1 \approx 15,41 \cdot 10^{-5}$$

$$\varepsilon_2 \approx 2,5 \cdot 10^{-4}$$

$$\varepsilon_3 \approx -5,15 \cdot 10^{-5}.$$

A főirányok az A alakváltozási mátrix egységnyi hosszúságú sajátvektorai:

$$\overline{n}_1 \approx \begin{pmatrix} -0,81 \\ 0,58 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \overline{n}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \overline{n}_3 \approx \begin{pmatrix} 0,58 \\ 0,81 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

3.3. Mátrixok gazdasági alkalmazásai

Elméleti összefoglaló. A gazdasági problémák megoldását megkönnyíti, ha a rendelkezésre álló adatokat megfelelő módon rendszerezzük, táblázatba foglaljuk. Célszerű az adatokat mátrixként reprezentálni, a velük végzett műveleteket pedig mátrixműveletkként leírni. Az úgynevezett *szállítási mátrix*ot olyan esetekben alkalmazzák, amikor több raktárban tárolnak termékeket és ezeket több rendeltetési helyre kell kiszállítani. A mátrixban a fajlagos költségeket tüntetik fel, vagyis azt, hogy az áru egy egységének elszállítása mennyibe kerül.
Másik példaként tekintsünk egy üzemet, amely különböző termékeket állít elő és a termékek előállításához különféle nyersanyagok szükségesek. Ha ezeket az adatokat táblázatba foglaljuk, akkor az így kapott mátrixot *technológiai mátrix*nak nevezzük.
Tegyük fel, hogy egy gazdaság n különböző ágazatra bontható fel. *Ráfordítási mátrix*nak nevezzük azt a mátrixot, melynek a_{ij} eleme azt jelenti, hogy az i-edik ágazat termelt értékéből mennyi szükséges a j-edik ágazat egységnyi termeléséhez. Tegyük fel, hogy az adott elérni kívánt nettó kibocsátási vektor d és az x pedig a teljes kibocsátás vektora, ami jelen esetben ismeretlen. Ekkor ennek legyártása során a ráfordítási mátrix definíciója szerint $A \cdot x$ inputra van szükségünk az egyes ágazatokból. Közgazdaságtani szempontból az a fontos, hogy még nettóban maradjon plusz d, tehát az $Ax + d = x$ mátrixegyenlethez jutunk. Ezt átrendezve $x - Ax = d$ adódik, amiből x-et kiemelve azt kapjuk, hogy $x \cdot (E - A) = d$. Ebből x-et kifejezve $x = (E - A)^{-1}d$ adódik. Az így keletkezett $(E - A)^{-1}$ mátrixot *Leontief-inverz*nek nevezzük. Ha a Leontief-inverz valamelyik eleme nulla, akkor a megfelelő ágazat teljesen független a másik ágazattól. Ha a Leontief-inverznek létezik negatív eleme, akkor a gazdaság nem működőképes, ugyanis többe kerül a működés, mint a termelés.

Egy gazdaság akkor és csak akkor produktív, ha létezik a Leontief-inverz és annak minden eleme nemnegatív.

A produktivitás egy lényeges közgazdaságtani fogalom, a *Gale-féle produktivitási kritérium* szerint, egy A ráfordítási mátrix (illetve az azt meghatározó gazdaság) produktív, ha létezik olyan $y \geq 0$ termelési vektor, amelyre teljesül, hogy $y > Ay$, azaz létezik olyan bruttó kibocsátási vektor, ami meghaladja a hozzá közvetlenül szükséges ráfordítások mértékét.

Szükséges matematikai ismeretek. Műveletek mátrixokkal, mátrixok inverzének kiszámolása, mátrixok invertálhatóságának kritériumai, mátrixegyenletek megoldása.

1. Mintafeladat. Egy cég 3 alapanyagból 4 féle terméket állít elő. Az alábbi táblázat (technológiai mátrix) mutatja, hogy az egyes termékek előállításához mennyi alapanyag szükséges, az egyes alapanyagok költségeit, a nyersanyagokból rendelkezésre álló mennyiségeket, valamint a kész termékek eladási árait. Az egyes termékekből rendre 10, 10, 5, 10 darabot gyártunk.

	T1	**T2**	**T3**	**T4**	**Költség (Ft/db)**	**Kapacitás**
A1	1	2	1	1	30	60
A2	3	0	3	2	20	80
A3	2	2	1	4	10	100
Egységár (Ft/db)	200	100	300	150		

Mátrixműveletek felhasználásával válaszoljunk az alábbi kérdésekre:

a) Elegendő-e a rendelkezésre álló kapacitás?

b) Mennyi a megmaradt alapanyag?

c) Mennyi a termékek egységnyi előállítási költsége?

d) Mekkora az összköltség?

e) Mennyi a bevétel?

f) Mennyi a haszon (profit)?

<u>**Megoldás**</u>:

a) Az eredményt egy mátrix és egy vektor szorzata adja

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 45 \\ 65 \\ 85 \end{pmatrix}.$$

Azt kaptuk tehát, hogy az egyes alapanyagokból rendre 45, 65 és 85 egység szükséges, így elegendő a rendelkezésre álló alapanyag mennyiség.

b) Mivel

$$\begin{pmatrix} 60 \\ 80 \\ 100 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 45 \\ 65 \\ 85 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 15 \\ 15 \end{pmatrix},$$

ezért azt kaptuk, hogy minden alapanygból 15 egységnyi maradt meg.

c) A megfelelő eredményt egy vektor és egy mátrix szorzata adja:

$$\begin{pmatrix} 30 & 20 & 10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 110 & 80 & 100 & 110 \end{pmatrix}.$$

Azt kaptuk tehát, hogy az egyes termékek előállítási költsége rendre 110 forint, 80 forint, 100 forint és 110 forint.

d) Mivel

$$\begin{pmatrix} 110 & 80 & 100 & 110 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix} =$$
$$= 110 \cdot 10 + 80 \cdot 10 + 100 \cdot 5 + 110 \cdot 10 = 3.500,$$

ezért az összköltség 3.500 Ft.

e) Mivel

$$\begin{pmatrix} 200 & 100 & 300 & 150 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix} =$$
$$= 200 \cdot 10 + 100 \cdot 10 + 300 \cdot 5 + 150 \cdot 10 = 6.000,$$

ezért a bevétel 6.000 Ft.

f) A profitot a bevétel és a költség különbségeként kapjuk meg:

$$6.000 - 3.500 = 2.500,$$

tehát a profit 2.500 Ft.

2. Mintafeladat. Tegyük fel, hogy egy zárt gazdaságban három ágazat működik: mezőgazdaság, ipar és szolgáltatás. Az alábbi táblázatban szereplő számokat millió forintban kell érteni:

	Mezőgazdaság	**Ipar**	**Szolgáltatás**
Mezőgazdaság	300	100	300
Ipar	300	100	150
Szolgáltatás	600	100	150

A fenti táblázatot oszloponként értelmezzük úgy, hogy például az első oszlop azt jelenti, hogy a vizsgált időszakban (jelen esetben 1 év alatt) a mezőgazdaság 1.200 millió forint értékű egységet termelt összesen. A fenti összegből a gazdaság 300-at mezőgazdasági termékre, 300-at ipari termékre, 600-at szolgáltatási termékekre költött.

a) Írjuk fel a ráfordítási mátrixot!

b) Működőképes-e (produktív-e) a gazdaság?

Megoldás:

a) A ráfordítási mátrix

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

b) Elsőként kiszámoljuk az $E - A$ mátrixot:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{3} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}.$$

Az $E - A$ mátrix inverze:

$$\frac{4}{250} \cdot \begin{pmatrix} 28 & -15 & 13 \\ -20 & 40 & -20 \\ -13 & -15 & 28 \end{pmatrix}.$$

Az elméleti összefoglalóban leírtak szerint a gazdaság nem produktív.

Gyakorló feladatok.

3.3.1. **Feladat.** Egy étteremben háromféle levesből eladott adagok számát az alábbi táblázat mutatja:

	gulyásleves	**zöldségleves**	**gyümölcsleves**
hétfő	10	5	5
kedd	20	10	5
szerda	10	10	10
csütörtök	5	20	10
péntek	30	10	20
Egységár (Ft/db)	400	200	300

Válaszoljunk mátrixműveletekkel az alábbi kérdésekre!

a) Mennyi a levesekből származó napi bevétel?

b) Mennyi a levesekből származó összbevétel az öt nap alatt?

c) Határozzuk meg az egyes levesfélékből eladott adagok számát az öt nap alatt összesen!

d) Az egyes napokon zöldséglevesből hány adaggal többet adtak el, mint gyümölcslevesből?

<u>**Megoldás**</u>:

a) A megfelelő eredményt egy mátrix és egy vektor szorzata adja:

$$\begin{pmatrix} 10 & 5 & 5 \\ 20 & 10 & 5 \\ 10 & 10 & 10 \\ 5 & 20 & 10 \\ 30 & 10 & 20 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 400 \\ 200 \\ 300 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6.500 \\ 11.500 \\ 9.000 \\ 9.000 \\ 20.000 \end{pmatrix}.$$

Azt kaptuk tehát, hogy hétfőn 6.500 forint, kedden 11.500 forint, szerdán 9.000 forint, csütörtökön 9.000 forint és pénteken 20.000 forint volt az említett levesekből származó bevétel.

b) Mivel

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6.500 \\ 11.500 \\ 9.000 \\ 9.000 \\ 20.000 \end{pmatrix} =$$
$$= 6.500 + 11.500 + 9.000 + 9.000 + 20.000 = 56.000,$$

ezért a levesekből származó összbevétel az 5 nap alatt 56.000 forint.

c) Az egyes levesekből eladott adagok száma

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 & 5 & 5 \\ 20 & 10 & 5 \\ 10 & 10 & 10 \\ 5 & 20 & 10 \\ 30 & 10 & 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 75 & 55 & 50 \end{pmatrix}.$$

Azt kaptuk tehát, hogy az 5 nap alatt gulyáslevesből 75 adag, zöldséglevesből 55 adag, míg gyümölcslevesből 50 adag fogyott el.

d) Mivel

$$\begin{pmatrix} 10 & 5 & 5 \\ 20 & 10 & 5 \\ 10 & 10 & 10 \\ 5 & 20 & 10 \\ 30 & 10 & 20 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \\ 10 \\ -10 \end{pmatrix},$$

ezért azt kaptuk, hogy hétfőn és szerdán ugyannyi adag fogyott el a zöldséglevesből és gyümölcslevesből. Kedden 5 adaggal, csütörtökön 10 adaggal fogyott el több zöldségleves, mint gyümömcsleves, míg pénteken gyümölcslevesből fogyott több, mégpedig 10 adaggal adtak el többet, mint zöldséglevesből.

3.3.2. **Feladat.** Négy feladóhelyről három rendeltetési állomásra szállítunk árut. A szállítási költségeket (euroban) az alábbi (szállítási) mátrix mutatja:

	R1	**R2**	**R3**
F1	10	20	30
F2	40	50	20
F3	30	10	20
F4	60	70	20

Mindegyik feladóhelyről az első rendeltetési helyre 3, a másodikra 5, a harmadikra 4 egységnyi mennyiséget kell szállítani. Mennyi a szállítási költség feladóhelyenként?

Megoldás:

A szállítási költség feladóhelyenként

$$\begin{pmatrix} 10 & 20 & 30 \\ 40 & 50 & 20 \\ 30 & 10 & 20 \\ 60 & 70 & 20 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 250 \\ 450 \\ 220 \\ 610 \end{pmatrix}.$$

Azt kaptuk tehát, hogy a szállítási költségek rendre 250, 450, 220 és 610 euro.

3.3.3. **Feladat.** Egy gazdaság ráfordítási mátrixa $A = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,6 \\ 0,4 & 0,1 \end{pmatrix}$.

a) Produktív-e (működőképes-e) a gazdaság?

b) Mennyi legyen a teljes kibocsátás ahhoz, hogy a $d = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ vektorral megadott nettó termelést elérjük?

c) Mely termékek előállítása nyereséges, ha árrendszerünk a $v = (1, 2)$ vektorral adható meg?

<u>**Megoldás**</u>:

a) Az $E - A$ mátrix inverzének az elemeit kell megvizsgálnunk, ahol E a megfelelő (jelen esetben 2×2-es) egységmátrix. Az

$$E - A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0,2 & 0,6 \\ 0,4 & 0,1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,8 & -0,6 \\ -0,4 & 0,9 \end{pmatrix}$$

mátrix inverze

$$(E - A)^{-1} = \frac{1}{0,48} \cdot \begin{pmatrix} 0,9 & 0,4 \\ 0,6 & 0,8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,875 & 0,8\dot{3} \\ 1,25 & 1,\dot{6} \end{pmatrix}.$$

Mivel a Leontief inverz minden tagja nemnegatív, ezért a gazdaság működőképes.

b) A teljes kibocsátás

$$(E - A)^{-1} \cdot d = \begin{pmatrix} 1,875 & 0,8\dot{3} \\ 1,25 & 1,\dot{6} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7,07 \\ 8,9 \end{pmatrix},$$

tehát 7 darabot kell az első, 9 darabot kell a második termékből előállítani, ahhoz hogy a megadott nettó termelést elérjük.

c) Mivel

$$v \cdot A = (1\ 2) \cdot \begin{pmatrix} 0,2 & 0,6 \\ 0,4 & 0,1 \end{pmatrix} = (1; 0,8),$$

ezért az első termék előállítása 1 egységbe kerül (így az nem is nyereséges, és nem is veszteséges), a második termék előállítása $0,8$ egységbe kerül (tehát ezen a terméken $1,2$ egység a nyereség).

3.3.4. **Feladat.** Három csoport matematika vizsgajegyeit tartalmazza az alábbi táblázat:

	jeles (5)	**jó (4)**	**közepes (3)**	**elégséges (2)**	**elégtelen (1)**
Cs1	5	8	7	3	1
Cs2	2	4	0	6	2
Cs3	4	6	5	4	0

Mátrixműveletek segítségével válaszoljunk az alábbi kérdésekre:

a) Határozzuk meg a csoportonkénti létszámot!

b) Határozzuk meg az összlétszámot!

c) Határozzuk meg az osztályzatok megoszlását, azaz, hogy az egyes osztályzatokból összesen hány darab született!

d) Számoljuk ki az egyes csoportok vizsgaátlagát!

<u>**Megoldás**</u>:

a) A csoportonkénti létszám

$$\begin{pmatrix} 5 & 8 & 7 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 0 & 6 & 2 \\ 4 & 6 & 5 & 4 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 \\ 14 \\ 19 \end{pmatrix},$$

azaz az egyes csoportok létszáma rendre 24, 14 és 19 fő.

b) Az összlétszám

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 24 \\ 14 \\ 19 \end{pmatrix} = 24 + 14 + 19 = 57.$$

Tehát az összlétszám 57 fő.

c) Az osztályzatok megoszlása:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 8 & 7 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 0 & 6 & 2 \\ 4 & 6 & 5 & 4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 18 & 12 & 13 & 3 \end{pmatrix}.$$

d) Az első csoport átlaga:

$$\frac{1}{24} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 8 & 7 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{85}{24} \approx 3,54.$$

A második csoport átlaga:

$$\frac{1}{14} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 & 6 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{40}{14} \approx 2,86.$$

A harmadik csoport átlaga:

$$\frac{1}{19} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 6 & 5 & 4 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{67}{19} \approx 3,53.$$

3.4. A titkosírás alapjai

Elméleti összefoglaló. A titkosírás (kriptográfia) mára külön tudományággá nőtte ki magát. Ebben a fejezetben ezen tudományág alapjaival ismerkedünk meg.
Ahhoz, hogy egy kódolt (titkosított) üzenetet készítsünk, majd a kódot „visszafejtsük” matematikai eszközként alkalmazhatunk mátrixokat, felhasználva a közöttük értelmezett műveleteket.
Tekintsük azt a legegyszerűbb esetet, amikor a magyar ábécé betűihez rendeljük hozzá azt a számot, ahanyadik helyen található a szóbanforgó betű az ábécében. A „kettős” mássalhangazókat és a hármas mássalhangzót hagyjuk ki ebből a felsorolásból, hiszen például a „cs” betűt egy „c” és „s” karakter egymás mellé írásával fogjuk előállítani. A „szóközhöz” a 0 számot rendeljük hozzá, a mondatközi és mondat végi írásjelektől jelen esetben eltekintünk. Az alábbiakban összefoglaljuk, hogy melyik betűhöz, melyik számot rendeljük:

a $\to 1$	h $\to 10$	ó $\to 19$	ú $\to 28$
á $\to 2$	i $\to 11$	ö $\to 20$	ü $\to 29$
b $\to 3$	í $\to 12$	ő $\to 21$	ű $\to 30$
c $\to 4$	j $\to 13$	p $\to 22$	v $\to 31$
d $\to 5$	k $\to 14$	q $\to 23$	w $\to 32$
e $\to 6$	l $\to 15$	r $\to 24$	x $\to 33$
é $\to 7$	m $\to 16$	s $\to 25$	y $\to 34$
f $\to 8$	n $\to 17$	t $\to 26$	z $\to 35$
g $\to 9$	o $\to 18$	u $\to 27$	szóköz $\to 0$

Az A mátrix tartalmazza annak a szónak a karaktersorozatát, amit az előbbi módon készítünk el.
Ha egy szó például 8 betűből áll, azt szabadon eldönthetjük, hogy abból 8×1-es, 4×2-es, 2×4-es vagy 8×1-es mátrixot készítünk-e. A dekódolás (illetve kódolás során is) sorfolytonosan, balról jobbra haladunk. Az elkészített mátrixot ezután megszorozzuk egy úgynevezett *kódoló* mátrixszal (jelöljük ezt B-vel), amelyet a „kódfejtő" tudomására kell hozni. Ezen mátrixról megköveteljük, hogy invertálható legyen. Ezt követően elkészítjük az

$$X = A \cdot B$$

mátrixot és azt továbbítjuk a célszemélynek. A kódfejtő jól ismeri a matematikát, így tudja, hogy a rendelkezésre álló X és B mátrixok segítségével az A mátrixot az

$$A = X \cdot B^{-1}$$

összefüggés segítségével számolhatja ki.

Szükséges matematikai ismeretek. Mátrixműveletek, mátrixok invertálhatóságának kritériumai, mátrix inverzének meghatározása, mátrixegyenletek megoldása.

Mintafeladat. Határozzuk meg azt a szót, amelyet az

$$X = \begin{pmatrix} 34 & 56 \\ 63 & 90 \\ 30 & 50 \\ 77 & 104 \end{pmatrix}$$

mátrix felhasználásával kapunk a

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

kódoló mátrix segítségével!

<u>**Megoldás**</u>:

A B mátrix inverze:

$$B^{-1} = -\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

A „dekódolt" A mátrix

$$A = X \cdot B^{-1} = -\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 34 & 56 \\ 63 & 90 \\ 30 & 50 \\ 77 & 104 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & 6 \\ 9 & 18 \\ 15 & 5 \\ 2 & 25 \end{pmatrix}.$$

Az elméleti összefoglalóban található kulcs alapján a keresett szó: „megoldás”.

Gyakorló feladatok.

3.4.1. **Feladat.** Határozzuk meg azt a szót, amelyet az

$$X = \begin{pmatrix} 22 & 40 \\ 98 & 148 \\ 110 & 154 \end{pmatrix}$$

mátrix felhasználásával kapunk a

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

kódoló mátrix segítségével!

Megoldás:

A B mátrix inverze:

$$B^{-1} = -\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

A „dekódolt" A mátrix

$$A = X \cdot B^{-1} = -\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 22 & 40 \\ 98 & 148 \\ 110 & 154 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & 2 \\ 26 & 24 \\ 11 & 33 \end{pmatrix}.$$

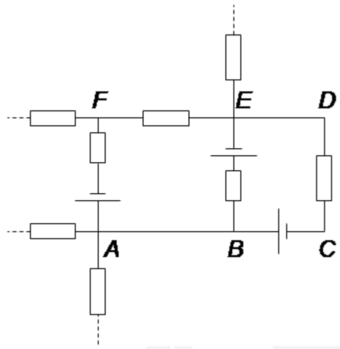
Az elméleti összefoglalóban található kulcs alapján a keresett szó: „mátrix”.

4. fejezet

Lineáris egyenletrendszerek

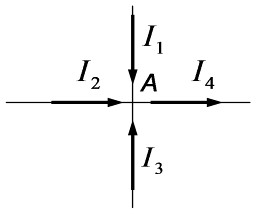
4.1. Számítások egyenáramú hálózatokban

Elméleti összefoglaló. Egyenáramú áramforrásokat és fogyasztókat (ohmos ellenállásokat) elektromos vezetőkkel összekötve *egyenáramú hálózat*ot kapunk. Egy ilyen egyenáramú hálózatot szemléltet az alábbi ábra:



A *csomópont* a hálózat olyan pontja, amelybe legalább három vezeték fut be (A, B, E, F pontok).
Az *ág* két csomópontot összekötő vezetékszakasz, amely végpontjain kívül nem tartalmaz csomópontot ($B-C-D-E$, $A-B$, $E-F$, $A-F$, $E-B$ vezetékszakaszok).
A *hurok* olyan vezetékszakasz, amelynek mindkét végpontja ugyanaz a pont ($B-C-D-E-B$ vagy $A-B-C-D-E-F-A$ vezetékszakaszok).
Egy áramforrás *belső feszültség*én (U_b) a nyitott kapcsain mérhető feszültséget értjük. Ha a kapcsokat vezetővel összekötjük, akkor a forráson keresztül áram folyik. Minden áramforrásnak van *belső ellenállás*a (R_b), amelyen az áram hatására feszültség esik. Emiatt a kapcsokon mérhető U_k kapocsfeszültség zárt esetben eltér az U_b belső feszültség értékétől és függvénye az áramerősségnek. Ebből adódóan a kapocsfeszültség helyett mindig a belső feszültség és ellenállás értékét adjuk meg, amelyeket rajzban külön jelöljük.

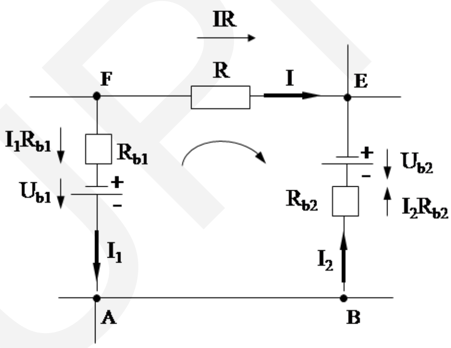
Az egyenáramú hálózatokra vonatkozó feladatok megoldása Kirchhoff két törvényén alapszik. Ezek az alábbiak:
Kirchhoff I. törvénye:
Bármely csomópont esetén a befolyó és elfolyó áramok előjeles összege zérus. Előjelszabály: a befolyó áramokat pozitívan, a elfolyókat negatívan előjelezzük.



A fenti ábra jelöléseivel Kirchhoff első törvényét alkalmazva az alábbi egyenletet kapjuk:

$$I_1 + I_2 + I_3 - I_4 = 0.$$

Kirchhoff II. törvénye:
Bármely hurok mentén körbehaladva, a feszültségesések előjeles összege zérus. Előjelszabály: a hálózat minden hurkához önkényesen hozzárendelünk egy körüljárási irányt és minden ágához egy áramirányt. Az ellenálláson eső IR feszültség iránya megegyezik a választott áramiránnyal, a feszültségforráson eső feszültség iránya pedig a pozitívtól a negatív pólus felé mutat. Ha az így kapott feszültségesés iránya a választott körüljárási iránnyal megegyező, akkor pozitív, ha ellentétes, akkor negatív előjelet kap.



A fenti ábra jelöléseivel Kirchhoff második törvényét alkalmazva az alábbi egyenlethez jutunk:

$$-U_{b1} - I_1 \cdot R_{b1} + I \cdot R + U_{b2} - I_2 \cdot R_{b2} = 0.$$

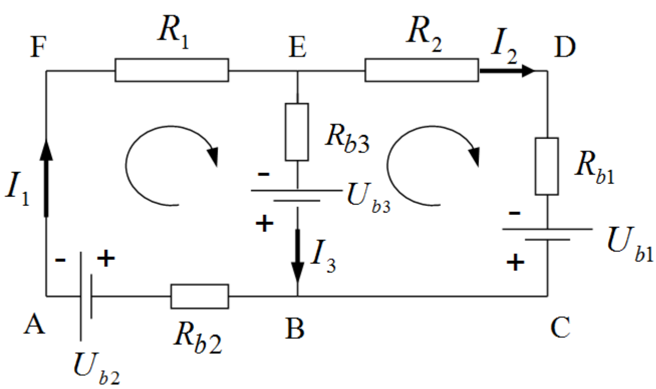
Az egyenáramú hálózatokkal kapcsolatos feladatok megoldásának lépései az alábbiak:

- A hálózat csomópontjaira felírjuk Kirchhoff I., hurkaira Kirchhoff II. törvényét. Eredményül mindig lineáris egyenletrendszert kapunk.

- Az egyenletrendszert rendezzük, majd valamelyik ismert módszerrel (Gauss elimináció, bázistranszformáció, Cramer-szabály, inverzmátrix módszer, stb.) megoldjuk. Eredményül megkapjuk az ismeretlen áramerősségeket, ellenállásokat, feszültségeket.
- Ha egy áramerősségre negatív értéket kapunk, az annyit jelent, hogy a feltételezett áramiránnyal a technikai áramirány ellentétes, így közvetett módon megkapjuk a technikai áramirányokat is. (Technikai áramirány alatt a képzeletbeli pozitív töltéshordozók mozgásirányát értjük. Itt meg kell jegyezni, hogy a valóságban a fémes vezetékben eletronok áramlanak, amelyek negatív töltésűek.)

Szükséges matematikai ismeretek. Mátrix determinánsának kiszámítása, lineáris egyenletrendszerek megoldása különböző módszerekkel.

Mintafeladat. Tekintsük az alábbi egyenáramú hálózatot!



Adatok:

$U_{b1} = 20\,[V]$; $U_{b2} = 10\,[V]$; $U_{b3} = 5\,[V]$; $R_1 = 2\,[\Omega]$; $R_2 = 4\,[\Omega]$; $R_{b1} = 7\,[\Omega]$; $R_{b2} = 6\,[\Omega]$; $R_{b3} = 4\,[\Omega]$.

a) Írjuk fel Kirchhoff első törvényét a B csomópontra!

b) Írjuk fel Kirchhoff második törvényét az $A - B - E - F - A$ hurokra!

c) Írjuk fel Kirchhoff második törvényét a $B - C - D - E - B$ hurokra!

d) Adjuk meg a kapott egyenletrendszer alapmátrixát és kibővített mátrixát!

e) Határozzuk meg az ismeretlen áramerősségeket Cramer-szabállyal!

f) Adjuk meg a valódi áramirányokat!

Megoldás:

a) Kirchhoff első törvénye szerint egy csomópontba befolyó és onnan elfolyó áramok algebrai összege zérus, így az $A - F - E - B - A$ hurokra azt kapjuk, hogy
$$-I_1 + I_2 + I_3 = 0.$$

b) Kirchhoff második törvénye szerint bármely hurokban körbehaladva és a feszültségeket előjelesen összegezve zérust kapunk, így
$$I_1 \cdot R_1 + I_3 \cdot R_{b3} - U_{b3} + I_1 \cdot R_{b2} + U_{b2} = 0.$$

c) Kirchhoff második törvényét felírva a $B - E - D - C - B$ hurokra:
$$U_{b3} - I_3 \cdot R_{b3} + I_2 \cdot R_2 + I_2 \cdot R_{b1} - U_{b1} = 0.$$

d) Az adatokat behelyettesítve a megoldandó egyenletrendszer
$$\begin{aligned} -I_1 + I_2 + I_3 &= 0 \\ 8I_1 + 4I_3 &= -5 \\ 11I_2 - 4I_3 &= 15 \end{aligned}$$
A fenti lineáris egyenletrendszer alapmátrixa
$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 11 & -4 \\ 8 & 0 & 4 \end{pmatrix},$$
kibővített mátrixa
$$\left(\begin{array}{rrr|r} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 11 & -4 & 15 \\ 8 & 0 & 4 & -5 \end{array}\right).$$

e) Az egyenletrendszer alapmátrixának determinánsa (például Sarrus-szabállyal számolva):
$$D = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 11 & -4 \\ 8 & 0 & 4 \end{vmatrix} = -44 - 32 - 88 = -164.$$
Mivel ezen determináns értéke nem zérus, ezért az egyenletrendszer megoldására alkalmazhatjuk például a Cramer-szabályt.
Az egyenletrendszerben szereplő I_1 ismeretlen értékét úgy kaphatjuk meg, hogy az alapmátrix első oszlopát töröljük, majd annak helyére az egyenletrendszer jobb oldalából képzett oszlopvektort írjuk, kiszámoljuk az így

kapott mátrix determinánsát, végül az első ismeretlent a kapott mátrix determinánsának és az alapmátrix determinánsának hányadosként kapjuk. Mivel

$$D_1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 15 & 11 & -4 \\ -5 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 20 + 55 - 60 = 15,$$

ezért

$$I_1 = \frac{D_1}{D} = -\frac{15}{164} \approx -0,09\,[\mathrm{A}].$$

Az egyenletrendszerben szereplő I_2 ismeretlen értékét úgy kaphatjuk meg, hogy az alapmátrix második oszlopát töröljük, majd annak helyére az egyenletrendszer jobb oldalából képzett oszlopvektort írjuk, kiszámoljuk az így kapott mátrix determinánsát, végül a második ismeretlent a kapott mátrix determinánsának és az alapmátrix determinánsának hányadosként kapjuk. Mivel

$$D_2 = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 15 & -4 \\ 8 & -5 & 4 \end{vmatrix} = -60 - 120 + 20 = -160,$$

ezért

$$I_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{160}{164} \approx 0,98\,[\mathrm{A}].$$

Az egyenletrendszerben szereplő I_3 ismeretlen értékét úgy kaphatjuk meg, hogy az alapmátrix harmadik oszlopát töröljük, majd annak helyére az egyenletrendszer jobb oldalából képzett oszlopvektort írjuk, kiszámoljuk az így kapott mátrix determinánsát, végül a harmadik ismeretlent a kapott mátrix determinánsának és az alapmátrix determinánsának hányadosként kapjuk. Mivel

$$D_3 = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 11 & 15 \\ 8 & 0 & -5 \end{vmatrix} = 55 + 120 = 175,$$

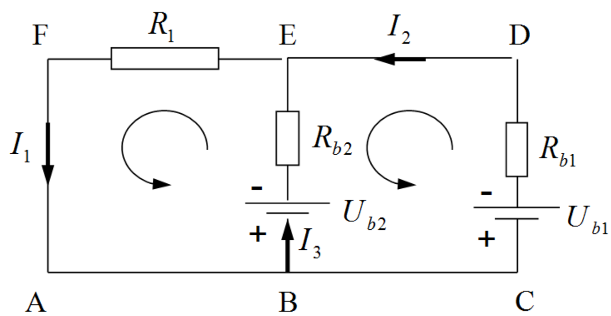
ezért

$$I_3 = \frac{D_3}{D} = -\frac{175}{164} \approx -1,07\,[\mathrm{A}].$$

f) Az I_1 és az I_3 áramerősségek értékére negatív számot kaptunk, ami azt jelenti, hogy a hozzájuk tartozó technikai áramirányok ellentétesek a feltételezettel.

Gyakorló feladatok.

4.1.1. **Feladat.** Az alábbi egyenáramú hálózatban ismert az ellenállások értéke, továbbá az áramforrás belső feszültsége és ellenállása. Két hurokban rögzítettük a pozitív körüljárási irányt, az egyes ágakban pedig a feltételezett áramirányt.



Adatok:

$$U_{b1} = 5\,[V]; \quad U_{b2} = 20\,[V]; \quad R_1 = 2\,[\Omega]; \quad R_{b1} = 5\,[\Omega]; \quad R_{b2} = 2\,[\Omega].$$

a) Írjuk fel Kirchhoff első törvényét a B csomópontra!

b) Írjuk fel Kirchhoff második törvényét az $A - B - E - F - A$ hurokra!

c) Írjuk fel Kirchhoff második törvényét a $B - C - D - E - B$ hurokra!

d) Írjuk fel a kapott egyenletrendszer alapmátrixát és kibővített mátrixát!

e) Határozzuk meg az ismeretlen áramerősségeket Cramer-szabállyal!

f) Határozzuk meg a technikai áramirányokat!

Megoldás:

a) Kirchhoff első törvényét alkalmazva

$$I_1 - I_2 - I_3 = 0$$

adódik.

b) Kirchhoff második törvényét alkalmazva az $A - B - E - F - A$ hurokra

$$U_{b2} + I_3 \cdot R_{b2} + I_1 \cdot R_1 = 0$$

adódik.

c) Kirchhoff második törvényét felírva a $B - C - D - E - B$ hurokra az

$$U_{b1} + I_2 \cdot R_{b1} - I_3 \cdot R_{b2} - U_{b2} = 0$$

egyenlethez jutunk.

d) Az adatokat behelyettesítve a megoldandó egyenletrendszer

$$\begin{aligned} I_1 - \ \ I_2 - \ \ I_3 &= 0 \\ 2I_1 \qquad + 2I_3 &= -20 \\ 5I_2 - 2I_3 &= 15 \end{aligned}$$

A fenti lineáris egyenletrendszer alapmátrixa

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 5 & -2 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

kibővített mátrixa

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & -2 & 15 \\ 2 & 0 & 2 & -20 \end{array}\right).$$

e) Az egyenletrendszer alapmátrixának determinánsa

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 5 & -2 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 24.$$

Mivel ezen determináns értéke nem zérus, ezért az egyenletrendszer megoldására alkalmazhatjuk például a Cramer-szabályt.
A mintafeladatban szereplő jelölések megtartásával azt kapjuk, hogy

$$D_1 = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 15 & 5 & -2 \\ -20 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -110,$$

ezért

$$I_1 = \frac{D_1}{D} = -\frac{110}{24} \approx -4,58\,[\mathrm{A}].$$

Mivel

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 15 & -2 \\ 2 & -20 & 2 \end{vmatrix} = 20,$$

ezért

$$I_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{20}{24} \approx 0,83\,[\mathrm{A}].$$

Az I_3 ismeretlen meghatározása céljából először kiszámoljuk a D_3 determináns értékét:

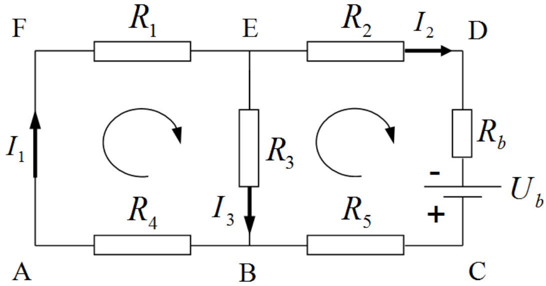
$$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & 15 \\ 2 & 0 & -20 \end{vmatrix} = -130.$$

A kapott eredményt felhasználva:

$$I_3 = \frac{D_3}{D} = \frac{130}{-24} \approx -5,42\,[\mathrm{A}].$$

f) Az I_1 és az I_3 áramerősségek értéke negatív, így a hozzájuk tartozó technikai áramirányok ellentétesek a feltételezettel.

4.1.2. **Feladat.** Az alábbi egyenáramú hálózatban ismert az ellenállások értéke, továbbá az áramforrás belső feszültsége és ellenállása. Két hurokban rögzítettük a pozitív körüljárási irányt, az egyes ágakban pedig a feltételezett áramirányt.



Adatok:

$$U_b = 20\,[V]; \quad R_b = 2\,[\Omega]; \quad R_1 = 2\,[\Omega]; \quad R_2 = 3\,[\Omega];$$
$$R_3 = 1\,[\Omega]; \quad R_4 = 6\,[\Omega]; \quad R_5 = 6\,[\Omega].$$

a) Írjuk fel Kirchhoff első törvényét a B csomópontra!

b) Írjuk fel Kirchhoff második törvényét az $A - B - E - F - A$ hurokra!

c) Írjuk fel Kirchhoff második törvényét a $B - C - D - E - B$ hurokra!

d) Írjuk fel a kapott egyenletrendszer alapmátrixát és kibővített mátrixát!

e) Határozzuk meg az ismeretlen áramerősségeket Gauss-eliminációval!

f) Határozzuk meg a valódi áramirányokat!

<u>**Megoldás**</u>:

a) Kirchhoff első törvényét alkalmazva az hurokra
$$-I_1 + I_2 + I_3 = 0$$
adódik.

b) Kirchhoff második törvényét alkalmazva a $A - F - E - B - A$ hurokra
$$I_1 \cdot R_1 + I_3 \cdot R_3 + I_1 \cdot R_4 = 0$$
adódik.

c) Kirchhoff második törvényét felírva a $B - E - D - C - B$ hurokra az
$$-I_3 \cdot R_3 + I_2 \cdot R_2 + I_2 \cdot R_b - U_b + I_2 \cdot R_5 = 0$$
egyenlethez jutunk.

d) Az adatokat behelyettesítve a megoldandó egyenletrendszer
$$\begin{aligned} -I_1 + \ \ I_2 + I_3 &= \ \ 0 \\ 8I_1 \qquad + I_3 &= 0 \\ 11I_2 - I_3 &= 20 \end{aligned}$$
A fenti lineáris egyenletrendszer alapmátrixa
$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 11 & -1 \\ 8 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$
kibővített mátrixa
$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 11 & -1 & 20 \\ 8 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

e) A fenti lineáris egyenlerendszer megoldásához első lépésben az első sor 8-szorosát hozzáadjuk a harmadik sorhoz, második lépésben a második sor 8-szorosát hozzáadjuk a harmadik sor -11-szereséhez:
$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 11 & -1 & 20 \\ 0 & 8 & 9 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 11 & -1 & 20 \\ 0 & 0 & -107 & 160 \end{array}\right).$$
Gauss elimináció után kapott mátrix rangja a nem csupa nulla sorok száma. Így az alapmátrix rangja 3, a kibővített mátrix rangja 3. Mivel az alapmátrix

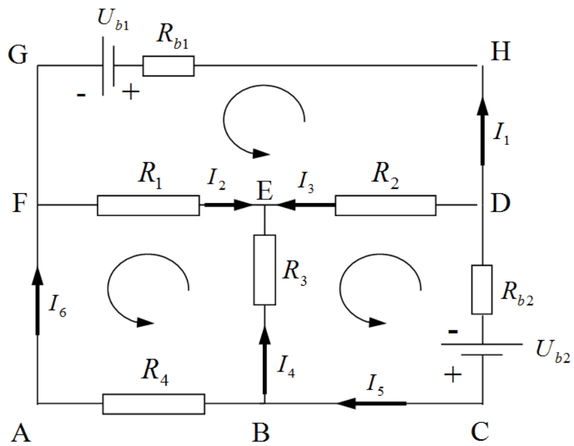
és a kibővített mátrix rangja megegyezik, ezért az egyenletrendszer megoldható. Az alapmátrix rangja megegyezik az ismeretlenek számával, így az egyenletrendszer határozott, azaz egyértelmű a megoldása.
Az utolsó mátrixból felírva az egyenletrendszert

$$\begin{aligned} -I_1 + I_2 + I_3 &= 0 \\ 11I_2 - \ \ I_3 &= 20 \\ -107I_3 &= 160. \end{aligned}$$

adódik. Az utolsó egyenletből azt kapjuk, hogy $I_3 \approx -1,5\,[\mathrm{A}]$. Ezt visszahelyettesítve a második egyenletbe $I_2 \approx 1,68\,[\mathrm{A}]$ adódik. Az első egyenletbe I_2-t és I_3-at behelyettesítve megkapjuk, hogy $I_1 \approx 0,18\,[\mathrm{A}]$.

f) Az I_3 áramerősség értéke negatív, így a hozzá tartozó valódi áramirány ellentétes a feltételezettel.

4.1.3. **Feladat.** Az alábbi egyenáramú hálózatban ismert az ellenállások értéke, továbbá az áramforrás belső feszültsége és ellenállása. Három hurokban rögzítettük a pozitív körüljárási irányt, az egyes ágakban pedig a feltételezett áramirányt.



Adatok:

$$U_{b_1} = 20\,[V]; \quad U_{b_2} = 10\,[V]; \quad R_{b1} = 2\,[\Omega]; \quad R_{b2} = 3\,[\Omega];$$
$$R_1 = 2\,[\Omega]; \quad R_2 = 4\,[\Omega]; \quad R_3 = 4\,[\Omega]; \quad R_4 = 3\,[\Omega].$$

a) Írjuk fel Kirchhoff első törvényét a D, E és F csomópontokra!

b) Írjuk fel Kirchhoff második törvényét az $A - B - E - F - A$ hurokra!

c) Írjuk fel Kirchhoff második törvényét a $B - C - D - E - B$ hurokra!

d) Írjuk fel Kirchhoff második törvényét a $D - H - G - F - E - D$ hurokra!

e) Írjuk fel a lineáris egyenletrendszer kibővített mátrixát!

f) Gauss-elimináció alkalmazásával határozzuk meg az ismeretlen áramerősségek értékét!

g) Adjuk meg a tecnikai áramirányokat!

Megoldás:

a) Kirchhoff első törvényét felírva a D, E és F csomópontokra az alábbi egyenleteket kapjuk:

$$\begin{aligned} -I_1 - I_3 - I_5 &= 0 \\ I_2 + I_3 + I_4 &= 0 \\ I_1 - I_2 + I_6 &= 0. \end{aligned}$$

b) Kirchhoff második törvényét alkalmazva az $A - B - E - F - A$ hurokra azt kapjuk, hogy

$$-I_2 \cdot R_1 + I_4 \cdot R_3 - I_6 \cdot R_4 = 0$$

c) Kirchhoff második törvényét felírva a $B - C - D - E - B$ hurokra az

$$I_3 \cdot R_2 - I_4 \cdot R_3 - I_5 \cdot R_{b2} + U_{b2} = 0$$

egyenlethez jutunk.

d) Kirchhoff második törvényét felírva a $D - E - F - G - H - D$ hurokra az alábbi egyenletet kapjuk:

$$I_1 \cdot R_{b1} + I_2 \cdot R_1 - I_3 \cdot R_2 + U_{b1} = 0.$$

e) Az adatokat behelyettesítve a megoldandó egyenletrendszer

$$\begin{array}{rrrrrrcr} & -2I_2 & & +4I_4 & & -3I_6 & = & 0 \\ & & 4I_3 & -4I_4 & -3I_5 & & = & -10 \\ 2I_1 & +2I_2 & -4I_3 & & & & = & -20 \\ -I_1 & & -I_3 & & -I_5 & & = & 0 \\ & I_2 & +I_3 & +I_4 & & & = & 0 \\ I_1 & -I_2 & & & & +I_6 & = & 0 \end{array}$$

A fenti lineáris egyenletrendszer kibővített mátrixa

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 4 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -4 & -3 & 0 & -10 \\ 2 & 2 & -4 & 0 & 0 & 0 & -20 \end{array}\right).$$

f) A fenti lineáris egyenletrendszer megoldásához első lépésben az első sort hozzáadjuk a harmadik sorhoz, illetve az első sor -2-szeresét hozzáadjuk a hatodik sorhoz:

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 4 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -4 & -3 & 0 & -10 \\ 0 & 4 & -4 & 0 & 0 & -2 & -20 \end{array}\right).$$

Második lépésben a második sort hozzáadjuk a harmadik sorhoz, a második sor 2-szeresét hozzáadjuk a negyedik sorhoz, illetve a második sor -4-szeresét hozzáadjuk a hatodik sorhoz:

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 6 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -4 & -3 & 0 & -10 \\ 0 & 0 & -8 & -4 & 0 & -2 & -20 \end{array}\right).$$

A kapott mátrix harmadik és negyedik sorát megcseréljük, majd az új harmadik sor -2-szeresét hozzáadjuk az ötödik sorhoz és az új harmadik sor 4-szeresét hozzáadjuk a hatodik sorhoz:

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 6 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -16 & -3 & 6 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 20 & 0 & -14 & -20 \end{array}\right).$$

A negyedik sor 16-szorosát hozzáadjuk az ötödik sorhoz és a negyedik sor -20-szorosát hozzáadjuk a hatodik sorhoz:

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 6 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -19 & 22 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 20 & -34 & -20 \end{array}\right).$$

Végezetül az ötödik sor 20-szorosát adjuk hozzá a hatodik sor 19-szereséhez. Ekkor az alábbi „lépcsős” mátrixhoz jutunk:

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 6 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -19 & 22 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -206 & -580 \end{array}\right).$$

A kapott alapmátrix rangja 6, a kibővített mátrix rangja szintén 6. Mivel az alapmátrix és a kibővített mátrix rangja megegyezik, ezért az egyenletrendszer megoldható. Az alapmátrix rangja megegyezik az ismeretlenek számával, így az egyenletrendszer határozott, azaz egyértelmű a megoldása. Az utolsó mátrixból felírva az egyenletrendszert azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} I_1 - I_2 \qquad\qquad\qquad + I_6 &= 0 \\ I_2 + I_3 + I_4 \qquad\qquad &= 0 \\ 2I_3 + 6I_4 \qquad - 3I_6 &= 0 \\ I_4 - I_5 + I_6 &= 0 \\ -19I_5 + 22I_6 &= 10 \\ -206I_6 &= -580. \end{aligned}$$

Az utolsó egyenletből $I_6 \approx 2,82\,[\mathrm{A}]$ adódik. Ezt visszahelyettesítve az ötödik egyenletbe azt kapjuk, hogy $I_5 \approx 3,79\,[\mathrm{A}]$. A negyedik egyenletbe behelyettesítve az I_5 és I_6 értékeit $I_4 \approx 0,97\,[\mathrm{A}]$ adódik, a harmadik egyenletből a már megkapott értékek behelyettesítése után $I_3 \approx 1,32\,[\mathrm{A}]$, a második egyenletből $I_2 \approx -2,29\,[\mathrm{A}]$ és az első egyenletből $I_1 \approx -5,11\,[\mathrm{A}]$ adódik.

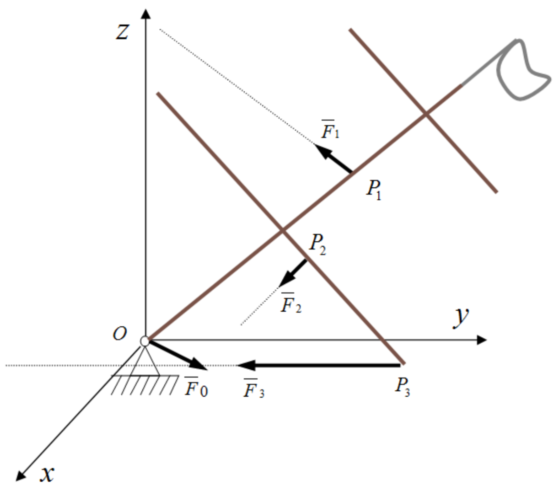
g) Az I_1 és I_2 áramerősségek értéke negatív, így a hozzájuk tartozó technikai áramirányok ellentétesek a feltételezettel.

4.2. Ismeretlen erők koordinátáinak és hatásvonalainak kiszámolása

Elméleti összefoglaló. Lásd a „Vektoralgebra és koordinátageometria” című fejezet elméleti összefoglalóját!

Szükséges matematikai ismeretek. Vektorok összeadása, vektoriális szorzása, lineáris egyenletrendszerek megoldása különböző módszerekkel.

Mintafeladat. Az alábbi ábra egy vitorlás hajó súlytalannak tekinthető árbocát szemlélteti, amelyet három kötél ($\overline{F}_1$, $\overline{F}_2$, $\overline{F}_3$ erők) és egy gömbcsukló ($\overline{F}_O$ erő) tart egyensúlyban.



Adatok:

$$\overline{F}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \text{[N]}; \qquad P_1 = (1; 4; 4)\ \text{[m]};$$

$$\overline{F}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{[N]}; \qquad P_2 = (2; 3; 2)\ \text{[m]};$$

$$\overline{F}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -10 \\ 1 \end{pmatrix} \text{[N]}; \qquad P_3 = (x_3; y_3; z_3)\ \text{[m]}.$$

a) Az egyensúly $\sum\limits_i \overline{F}_i = \overline{0}$ feltételéből határozzuk meg a csuklónál ébredő $\overline{F}_0$ támaszerőt!

b) Mekkora az $\overline{F}_1$ és $\overline{F}_2$ kötélerők gömbcsuklóra vonatkozó együttes forgatónyomatéka?

c) Az egyensúly $\sum\limits_i \underset{O}{\overline{M_i}} = \overline{0}$ feltételéből egy lineáris egyenletrendszert kapunk. Határozzuk meg ebből az $\overline{F}_3$ kötélerő lehetséges, P_3 támadáspontjainak koordinátáit! Milyen térbeli alakzatra illeszkednek a kérdéses pontok? Hogy hívjuk a mechanikában ezt az „alakzatot”?

d) Adjunk meg hármat a fenti P_3 pontok közül!

<u>**Megoldás**</u>:

a) Legyenek az $\overline{F}_0$ vektor koordinátái F_x, F_y és F_z. Ekkor

$$\sum_i \overline{F}_i = \overline{F}_0 + \overline{F}_1 + \overline{F}_2 + \overline{F}_3 =$$

$$= \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -10 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Elvégezve a vektorok összeadását azt kapjuk, hogy

$$\begin{pmatrix} F_x + 3 \\ F_y - 13 \\ F_z + 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ebből azt kapjuk, hogy

$$\overline{F}_0 = \begin{pmatrix} -3 \\ 13 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ [N]}.$$

b) Az $\overline{F}_1$ erő O gömbcsuklóra vonatkozó forgatónyomatéka:

$$\overline{M}_1 = \overline{r}_1 \times \overline{F}_1 = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 1 & 4 & 4 \\ -1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ -7 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ [Nm]}.$$

Az $\overline{F}_2$ erő O gömbcsuklóra vonatkozó forgatónyomatéka:

$$\overline{M}_2 = \overline{r}_2 \times \overline{F}_2 = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & -1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 8 \\ -11 \end{pmatrix} \text{ [Nm]}.$$

Az $\overline{F}_1$ és $\overline{F}_2$ erők O gömbcsuklóra vonatkozó együttes forgatónyomatéka:

$$\overline{M} = \overline{M}_1 + \overline{M}_2 = \begin{pmatrix} 19 \\ 1 \\ -9 \end{pmatrix} \text{ [Nm].}$$

c) Az $\overline{F}_3$ erő O gömbcsuklóra vonatkozó forgatónyomatéka:

$$\overline{M}_3 = \overline{r}_3 \times \overline{F}_3 = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ x_3 & y_3 & z_3 \\ 1 & -10 & 1 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} y_3 + 10z_3 \\ -x_3 + z_3 \\ -10x_3 - y_3 \end{pmatrix} \text{ [Nm].}$$

Az $\overline{F}_1$, $\overline{F}_2$ és $\overline{F}_3$ erők O gömbcsuklóra vonatkozó együttes forgatónyomatéka:

$$\overline{M} = \overline{M}_1 + \overline{M}_2 + \overline{M}_3 =$$
$$= \begin{pmatrix} 20 \\ -7 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 8 \\ -11 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_3 + 10z_3 \\ -x_3 + z_3 \\ -10x_3 - y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Elvégezve a vektorok összeadását azt kapjuk, hogy

$$\begin{pmatrix} 19 + y_3 + 10z_3 \\ 1 - x_3 + z_3 \\ -9 - 10x_3 - y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Mivel két vektor pontosan akkor egyenlő, ha valamennyi koordinátájuk páronként megegyezik, ezért az alábbi lineáris egyenletrendszerhez jutunk:

$$\begin{aligned} y_3 + 10z_3 &= -19 \\ -x_3 \qquad + \quad z_3 &= -\ 1 \\ -10x_3 - y_3 \qquad &= \quad 9. \end{aligned}$$

Az egyenletrendszer kibővített mátrixa:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 0 & 1 & 10 & -19 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ -10 & -1 & 0 & 9 \end{array}\right).$$

Cseréljük meg az első és második sort, majd az első sor -10-szeresét adjuk hozzá a harmadik sorhoz:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 10 & -19 \\ -10 & -1 & 0 & 9 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rrr|r} -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 10 & -19 \\ 0 & -1 & -10 & 19 \end{array}\right).$$

A lépcsős alak eléréséhez a második sort adjuk hozzá a harmadik sorhoz:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 10 & -19 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Az alapmátrix és kibővített mátrix rangja megegyezik, így az egyenletrendszer megoldható. Az alapmátrix rangja (2) eggyel kevesebb, mint az ismeretlenek száma (3), így az egyeneletrendszer határozatlan, egy ismeretlen értékét választhatjuk meg tetszőlegesen. A fenti elimináció utolsó lépésében megkapott mátrixból felírva az egyenleteket azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} -x_3 \quad + \quad z_3 &= \ -1 \\ y_3 + 10z_3 &= -19. \end{aligned}$$

A második egyenletből az y_3 és z_3 ismeretlenek között az $y_3 = -19 - 10z_3$ összefüggést kapjuk. Ezt az első egyenletbe behelyettesítve $x_3 = 1 + z_3$ adódik. Az egyszerűbb felírás érdekében vezessük be a $z_3 = t$, ahol $t \in \mathbb{R}$ tetszőleges. Ekkor $y_3 = -19 - 10t$ és $x_3 = 1 + t$. Azt kaptuk tehát, hogy

$$P_3 = (1 + t; -19 - 10t; t).$$

Észrevehetjük, hogy $P_3 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ típusú függvény, amelyet megadhatunk

$$\overline{r}_0 + t \cdot \overline{v}$$

alakban, ahol

$$\overline{r}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -19 \\ 0 \end{pmatrix}; \qquad \overline{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -10 \\ 1 \end{pmatrix},$$

következésképpen a kapott pontok egy tébeli egyenesre illeszkednek. Ez az egyenes az $\overline{F}_3$ erő hatásvonala.

d) Az előbb megkaptuk, hogy

$$P_3 = (1 + t; -19 - 10t; t).$$

Ezt felhasználva, ha $t = 0$, akkor

$$P_3 = (1; -19; 0)\,[\mathrm{m}];$$

ha $t = 1$, akkor

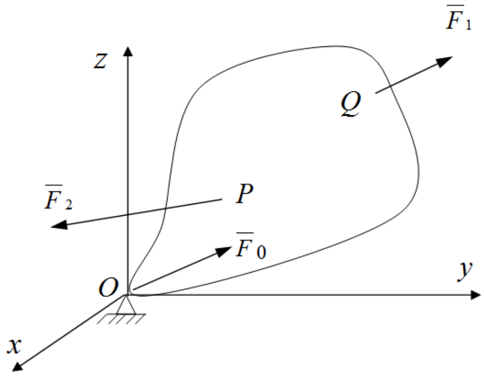
$$P_3 = (2; -29; 1)\,[\mathrm{m}];$$

ha $t = -1$, akkor

$$P_3 = (0; -9; -1)\,[\mathrm{m}].$$

Gyakorló feladatok.

4.2.1. **Feladat.** Az ábrán látható merev, súlytalan test O sarokpontján támaszkodik, amely körül ellenállásmentesen elfordulhat. A testet Q pontjában egy $\overline{F}_1$, P pontjában egy $\overline{F}_2$ erő támadja. A test az $\overline{F}_1$, $\overline{F}_2$ és az O pontnál támadó kényszererő hatására nyugalomban van. A P pont koordinátái nem ismertek.



Adatok:

$$\overline{F}_1 = \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} \text{[kN]}; \qquad Q = (4;8;8)\ \text{[m]};$$

$$\overline{F}_2 = \begin{pmatrix} 12 \\ -18 \\ -6 \end{pmatrix} \text{[kN]}; \qquad P = (x;y;z)\ \text{[m]}.$$

a) Az egyensúly $\sum\limits_i \overline{F}_i = \overline{0}$ feltételéből határozzuk meg a csuklónál ébredő $\overline{F}_0$ kényszererőt!

b) Adjuk meg az $\overline{F}_1$ erő O pontra vonatkozó forgatónyomatékát!

c) Az egyensúly $\sum\limits_i \underset{O}{\overline{M}_i} = \overline{0}$ feltételéből egy lineáris egyenletrendszert kapunk. Határozzuk meg ebből az $\overline{F}_2$ kötélerő lehetséges, P támadáspontjainak koordinátáit!

d) Adjunk meg hármat a fenti P pontok közül!

Megoldás:

a) Legyenek az $\overline{F}_0$ vektor koordinátái F_x, F_y és F_z. Ekkor

$$\sum_i \overline{F}_i = \overline{F}_0 + \overline{F}_1 + \overline{F}_2 =$$

$$= \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 12 \\ -18 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Elvégezve a vektorok összeadását azt kapjuk, hogy

$$\begin{pmatrix} F_x + 8 \\ F_y - 12 \\ F_z - 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ebből azt kapjuk, hogy

$$\overline{F}_0 = \begin{pmatrix} -8 \\ 12 \\ 4 \end{pmatrix} \text{[kN]}.$$

b) Az $\overline{F}_1$ erő O pontra vonatkozó forgatónyomatéka:

$$\overline{M}_1 = \overline{r}_1 \times \overline{F}_1 = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 4 & 8 & 8 \\ -4 & 6 & 2 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -32 \\ -40 \\ 56 \end{pmatrix} \text{[kNm]}.$$

c) Az $\overline{F}_2$ erő O gömbcsuklóra vonatkozó forgatónyomatéka:

$$\overline{M}_2 = \overline{r}_2 \times \overline{F}_2 = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ 12 & -18 & -6 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -6y_2 + 18z_2 \\ 6x_2 + 12z_2 \\ -18x_2 - 12y_2 \end{pmatrix} \text{[kNm]}.$$

Az $\overline{F}_0$, $\overline{F}_1$ és $\overline{F}_2$ erők O gömbcsuklóra vonatkozó együttes forgatónyomatéka:

$$\overline{M} = \overline{M}_0 + \overline{M}_1 + \overline{M}_2 =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -32 \\ -40 \\ 56 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6y_2 + 18z_2 \\ 6x_2 + 12z_2 \\ -18x_2 - 12y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Elvégezve a vektorok összeadását azt kapjuk, hogy

$$\begin{pmatrix} -32 - 6y_2 + 18z_2 \\ -40 + 6x_2 + 12z_2 \\ 56 - 18x_2 - 12y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Mivel két vektor pontosan akkor egyenlő, ha valamennyi koordinátájuk páronként megegyezik, ezért az alábbi lineáris egyenletrendszerhez jutunk:

$$\begin{aligned} -6y_2 + 18z_2 &= 32 \\ 6x_2 \quad + \quad 12z_2 &= 40 \\ -18x_2 - 12y_2 \quad &= -56. \end{aligned}$$

Az egyenletrendszer kibővített mátrixa:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 0 & -6 & 18 & 32 \\ 6 & 0 & 12 & 40 \\ -18 & -12 & 0 & -56 \end{array}\right).$$

Cseréljük meg az első és második sort, majd az első sor 3-szorosát adjuk hozzá a harmadik sorhoz:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 6 & 0 & 12 & 40 \\ 0 & -6 & 18 & 32 \\ -18 & -12 & 0 & -56 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rrr|r} 6 & 0 & 12 & 40 \\ 0 & -6 & 18 & 32 \\ 0 & -12 & 36 & 64 \end{array}\right).$$

A lépcsős alak eléréséhez a második sor -2-szeresét adjuk hozzá a harmadik sorhoz:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 6 & 0 & 12 & 40 \\ 0 & -6 & 18 & 32 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Az alapmátrix és kibővített mátrix rangja megegyezik, így az egyenletrendszer megoldható. Az alapmátrix rangja (2) eggyel kevesebb, mint az ismeretlenek száma (3), így az egyeneletrendszer határozatlan, egy ismeretlen értékét választhatjuk meg tetszőlegesen. A fenti elimináció utolsó lépésében megkapott mátrixból felírva az egyenleteket azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} 6x_2 \quad + 12z_2 &= 40 \\ -6y_2 + 18z_2 &= 32. \end{aligned}$$

Legyen $z_2 = t$, ahol $t \in \mathbb{R}$ tetszőleges. Ekkor

$$y_2 = 3t - \frac{16}{3},$$

valamint

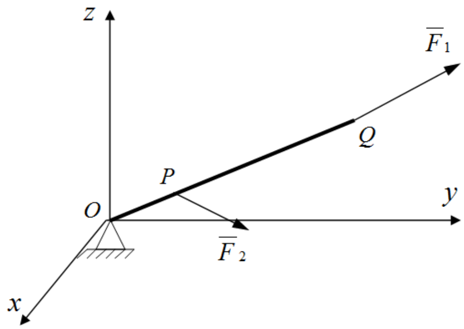
$$x_2 = -2t + \frac{20}{3}.$$

Azt kaptuk tehát, hogy

$$P_2 = \left(\frac{20}{3} - 2t; -\frac{16}{3} + 3t; t\right).$$

d) Ha $t = \frac{1}{3}$, akkor
$$P = \left(6; -\frac{13}{3}; \frac{1}{3}\right) \text{ [m]}.$$
Ha $t = 0$, akkor
$$P = \left(\frac{20}{3}; -\frac{16}{3}; 0\right) \text{ [m]}.$$
Ha $t = \frac{10}{3}$, akkor
$$P = \left(0; \frac{14}{3}; \frac{10}{3}\right) \text{ [m]}.$$

4.2.2. **Feladat.** Az ábrán látható merev, súlytalan rúd O végpontja egy gömbcsuklóhoz kapcsolódik, amely körül ellenállásmentesen elfordulhat. A rúd másik, Q végpontjában egy ismert $\overline{F}_1$ erő támad.



Adatok:
$$\overline{F}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ [kN]}; \qquad Q = (2; 4; 3) \text{ [m]};$$
$$\overline{F}_2 = \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix} \text{ [kN]}; \qquad P = (x; y; z) \text{ [m]}.$$

a) Adjuk meg az $\overline{F}_1$ erő O gömbcsuklóra vonatkozó forgatónyomatékát!
b) Az ábrán látható P pont $1 : 3$ arányban osztja az OQ rudat. Határozzuk meg a koordinátáit!
c) Írjuk fel az O pontra az egyensúly $\sum_i \underset{O}{\overline{M_i}} = \overline{0}$ feltételét, majd a kapott lineáris egyenletrendszert megoldva adjunk meg egy konkrét $\overline{F}_2$ erőt, amely esetén a rúd egyensúlyban van!

Megoldás:

a) Az $\overline{F}_1$ erő O pontra vonatkozó forgatónyomatéka:

$$\underset{O}{\overline{M_1}} = \overline{r}_1 \times \overline{F}_1 = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 2 & 4 & 3 \\ -2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -8 \\ 14 \end{pmatrix} \text{ [kNm]}.$$

b) A P pont koordinátái:

$$P = \frac{Q + 3 \cdot O}{4} = \left(\frac{1}{2}; 1; \frac{3}{4}\right) \text{ [m]}.$$

c) Az $\overline{F}_2$ erő O pontra vonatkozó forgatónyomatéka:

$$\underset{O}{\overline{M_2}} = \overline{r}_2 \times \overline{F}_2 = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{3}{4} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} F_z - \frac{3}{4}F_y \\ \frac{3}{4}F_x - \frac{1}{2}F_z \\ \frac{1}{2}F_y - F_x \end{pmatrix} \text{ [kNm]}.$$

Az egyensúlyi nyomatékokra vonatkozó feltételt felírva azt kapjuk, hogy

$$\overline{M} = \overline{M}_1 + \overline{M}_2 =$$
$$= \begin{pmatrix} -5 \\ -8 \\ 14 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F_z - \frac{3}{4}F_y \\ \frac{3}{4}F_x - \frac{1}{2}F_z \\ \frac{1}{2}F_y - F_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Elvégezve a vektorok összeadását

$$\begin{pmatrix} -5 + F_z - \frac{3}{4}F_y \\ -8 + \frac{3}{4}F_x - \frac{1}{2}F_z \\ 14 + \frac{1}{2}F_y - F_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

adódik. Mivel két vektor pontosan akkor egyenlő, ha valamennyi koordinátájuk páronként megegyezik, ezért az alábbi lineáris egyenletrendszerhez jutunk:

$$\begin{aligned} -\frac{3}{4}F_y + F_z &= 5 \\ \frac{3}{4}F_x - \frac{1}{2}F_z &= 8 \\ -F_x + \frac{1}{2}F_y &= -14. \end{aligned}$$

Az egyenletrendszer kibővített mátrixa:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 0 & -\frac{3}{4} & 1 & 5 \\ \frac{3}{4} & 0 & -\frac{1}{2} & 8 \\ -1 & \frac{1}{2} & 0 & -14 \end{array}\right).$$

Cseréljük meg a második és harmadik sort, majd az első sor $\frac{3}{4}$-szeresét adjuk hozzá a harmadik sorhoz:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} -1 & \frac{1}{2} & 0 & -14 \\ 0 & -\frac{3}{4} & 1 & 8 \\ \frac{3}{4} & 0 & -\frac{1}{2} & 5 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rrr|r} -1 & \frac{1}{2} & 0 & -14 \\ 0 & -\frac{3}{4} & 1 & 5 \\ 0 & \frac{3}{8} & -\frac{1}{2} & -\frac{5}{2} \end{array}\right).$$

A lépcsős alak eléréséhez a második sor $\frac{1}{2}$-szeresét adjuk hozzá a harmadik sorhoz:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} -1 & \frac{1}{2} & 0 & -14 \\ 0 & -\frac{3}{4} & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Az alapmátrix és kibővített mátrix rangja megegyezik, így az egyenletrendszer megoldható. Az alapmátrix rangja (2) egyel kevesebb, mint az ismeretlenek száma (3), így az egyeneletrendszer határozatlan, egy ismeretlen értékét választhatjuk meg tetszőlegesen. A fenti elimináció utolsó lépésében megkapott mátrixból felírva az egyenleteket azt kapjuk, hogy

$$-\frac{3}{4}F_y + F_z = 5$$

$$-F_x + \frac{1}{2}F_y = -14.$$

Legyen $F_y = t$, ahol $t \in \mathbb{R}$ tetszőleges. Ekkor $F_x = \frac{1}{2}t+14$ és $F_z = \frac{3}{4}t+5$. Azt kaptuk tehát, hogy

$$\overline{F}_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}t + 14 \\ t \\ \frac{3}{4}t + 5 \end{pmatrix}$$

Ha például $t = 0$, akkor

$$\overline{F}_2 = \begin{pmatrix} 14 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \text{[kN]}.$$

4.3. Kémiai reakcióegyenletek felírása

Elméleti összefoglaló. A kémiai reakciókban módosul a kiindulási anyagok kémiai összetétele, mivel az eredeti kémiai kötések felbomlanak és új kötések, más összetételű molekulák vagy ionok jönnek létre. A kémiai reakciókat általában fizikai változások is kísérik. A reakcióegyenletben (kémiai sztöchiometriai egyenlet) a kémiai folyamatokat kémiai képletekkel írjuk le, amelyekben a reagáló és a keletkezett anyagok anyagmennyiség-arányait is feltüntetjük. A kémiai reakciókra mindig érvényes a *tömegmegmaradás törvénye*, mely szerint a kémiai egyenletek két oldalán az egyes elemek elemi vagy kötött állapotban lévő atomjainak száma és így a két oldal tömege is megegyezik. Ezen a törvényen alapszik a kémiai egyenletek rendezése.

Szükséges matematikai ismeretek. Lineáris egyenletrendszerek megoldása Gauss-elimináció vagy bázistranszformáció segítségével.

Mintafeladat. A kalcium-klorid és nátrium-foszfát reakcióját az alábbi kémiai egyenlet írja le:

$$a \cdot CaCl_2 + b \cdot Na_3PO_4 \;\rightarrow\; c \cdot Ca_3(PO_4)_2 + d \cdot NaCl.$$

Határozzuk meg az egyenletben szereplő ismeretlen együtthatók értékét úgy, hogy azok mindegyike a lehető legkisebb pozitív egész szám legyen, majd írjuk fel a helyes reakció egyenletet!

<u>**Megoldás**</u>:

Az egyensúlyi feltételeknek megfelelő lineáris egyenletrendszer:

$$\begin{aligned} a &= 3c \\ 2a &= d \\ 3b &= d \\ b &= 2c \\ 4b &= 8c. \end{aligned}$$

Azonnal látható, hogy az utolsó egyenlet következmény egyenlete az utolsó előttinek, így az elhagyható az egyenletrendszer egyenletei közül. A fenti egyenletrendszer kibővített mátrixa:

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & -3 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Az első sor -2-szeresét adjuk hozzá a második sorhoz, majd cseréljük meg a második és negyedik sort:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & -1 & 0 \end{array}\right).$$

A második sor -3-szorosát adjuk hozzá a harmadik sorhoz, majd a harmadik sor -1-szeresét adjuk hozzá a negyedik sorhoz:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & -1 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Az alapmátrix és kibővített mátrix rangja is 3, így az egyenletrendszer megoldható. Az alapmátrix rangja 1-gyel kevesebb, mint az ismeretlenek száma, így az egyeletrendszer határozatlan, azaz végtelen sok megoldása van. A fenti mátrixból felírva a Gauss-elimináció után kapott egyenleteket az alábbi egyenletrendszert kapjuk:

$$\begin{aligned} a - 3c &= 0 \\ b - 2c &= 0 \\ 6c - d &= 0. \end{aligned}$$

Legyen $c = t$, ahol $t \in \mathbb{R}$. Ekkor $a = 3t$, $b = 2t$, $d = 6t$. Mivel az egyenletrendszer legkisebb pozitív egész megoldását keressük, ezért az alábbi megoldásokat kapjuk: $a = 3$, $b = 2$, $c = 1$, $d = 6$. A kapott eredményeket felhasználva a reakcióegyenlet:

$$3 \cdot CaCl_2 + 2 \cdot Na_3PO_4 \ \rightarrow \ Ca_3(PO_4)_2 + 6 \cdot NaCl.$$

Gyakorló feladatok.

4.3.1. **Feladat.** A hidrogén-peroxid (H_2O_2) bomlékony anyag, amely vízre (H_2O) és oxigénre (O_2) bomlik. Keressük meg azokat a legkisebb x_1, x_2 és x_3 poztitív egész számokat, melyek leírják a reakcióban résztvevő vegyületek mennyiségét:

$$x_1 \cdot H_2O_2 \rightarrow x_2 \cdot H_2O + x_3 \cdot O_2.$$

Megoldás:

Felírjuk az egyensúlyi egyenleteket. A hidrogén (H) és oxigén (O) atomok mennyisége a reakcióegyenlet mindkét oldalán meg kell, hogy egyezzen, ami két egyenletet ad:

$$\begin{aligned} H:\ 2x_1 &= 2x_2 \\ O:\ 2x_1 &= \ x_2 + 2x_3. \end{aligned}$$

Ez alapján a megoldandó lineáris egyenletrendszer kibővített mátrixa:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & -2 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -2 & 0 \end{array}\right).$$

Az első sor -1-szeresét adjuk hozzá a második sorhoz:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right).$$

Ekkor a

$$\begin{aligned} 2x_1 - 2x_2 \qquad &= 0 \\ x_2 - 2x_3 &= 0 \end{aligned}$$

egyenletrendszerhez jutunk. Az egyenletrendszernek végtelen sok megoldása van (hiszen az alapmátrix rangja 2, az ismeretlenek száma pedig 3), így például x_3-t tetszőleges paraméternek választjuk. Ha $x_3 = t$, ahol $t \in \mathbb{R}$, akkor a második egyenletből $x_2 = 2t$ adódik. Ezt az első egyenletbe behelyettesítve azt kapjuk, hogy $2x_1 - 4t = 0$, azaz $x_1 = 2t$. Mivel a legkisebb pozitív egész megoldást keressük, (amit $t = 1$ esetén kapunk meg), ezért a keresett ismeretlenek $x_1 = 2$, $x_2 = 2$ és $x_3 = 1$. Ennek megfelelően a helyes kémiai egyenlet:

$$2 \cdot H_2O_2 \to 2 \cdot H_2O + O_2.$$

4.3.2. **Feladat.** Határozzuk meg az alábbi kémiai reakcióegyenletben az ismeretlen együtthatók értékét úgy, hogy azok a lehető legkisebb pozitív egész számok legyenek:

$$x_1 \cdot C_3H_8 + x_2 \cdot O_2 \to x_3 \cdot CO_2 + x_4 \cdot H_2O.$$

Megoldás:

Felírjuk az egyensúlyi egyenleteket. A szén (C), a hidrogén (H) és oxigén (O) atomok száma a reakció egyenlet mindkét oldalán meg kell, hogy egyezzen, ami három egyenletet ad:

$$\begin{aligned} C:&\ 3x_1 = x_3 \\ H:&\ 8x_1 = 2x_4 \\ O:&\ 2x_2 = 2x_3 + x_4. \end{aligned}$$

Ez alapján a megoldandó lineáris egyenletrendszer kibővített mátrixa:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 8 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & -1 & 0 \end{array}\right).$$

A második sort szorozzuk 3-mal:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 8 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & -1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 24 & 0 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & -1 & 0 \end{array}\right).$$

Az első sor -8-szorosát hozzáadjuk a második sorhoz, végül megcseréljük a második és harmadik sort:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & -6 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & -1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & -6 & 0 \end{array}\right).$$

Ekkor a

$$\begin{aligned} 3x_1 - x_3 &= 0 \\ 2x_2 - 2x_3 - x_4 &= 0 \\ 8x_3 - 6x_4 &= 0 \end{aligned}$$

egyenletrendszerhez jutunk. Az egyenletrendszernek végtelen sok megoldása van (hiszen az alapmátrix rangja 3, az ismeretlenek száma pedig 4), így például x_4-et tetszőleges paraméternek választjuk. Ha $x_4 = t$, ahol $t \in \mathbb{R}$, akkor a harmadik egyenletből $x_3 = \frac{3}{4}t$ adódik. Ezt a második egyenletbe behelyettesítve azt kapjuk, hogy

$$2x_2 - \frac{3}{2}t - t = 0 \quad \Rightarrow \quad x_2 = \frac{5}{4}t.$$

Az első egyenletből

$$3x_1 - \frac{3}{4}t = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = \frac{1}{4}t.$$

Mivel a legkisebb pozitív egész megoldást keressük, (amit $t = 4$ esetén kapunk meg), ezért a keresett ismeretlenek $x_1 = 1$, $x_2 = 5$, $x_3 = 3$ és $x_4 = 4$. Ennek megfelelően a helyes kémiai egyenlet:

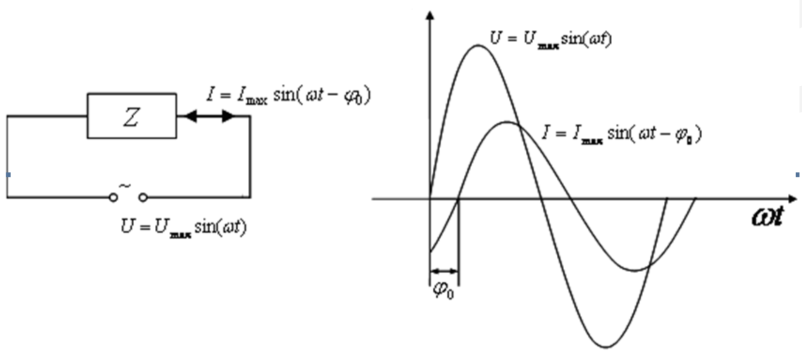
$$C_3H_8 + 5 \cdot O_2 \to 3 \cdot CO_2 + 4 \cdot H_2O.$$

5. fejezet

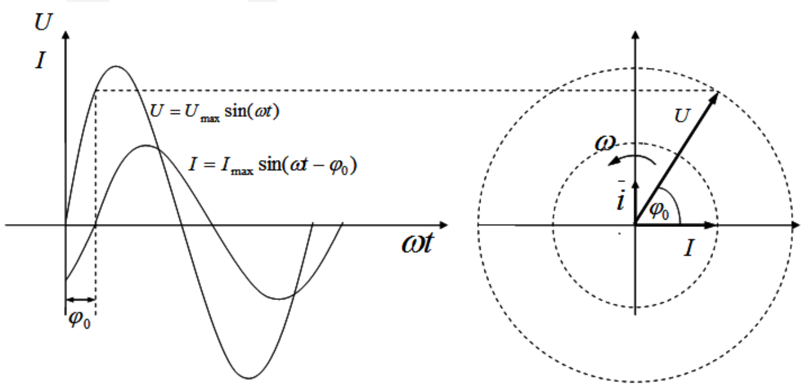
Komplex számok

5.1. Számítások váltóáramú hálózatokban

Elméleti összefoglaló. Az elektromos hálózatban a hálózati feszültség szinuszos váltófeszültség. A hálózatra egy elektromos fogyasztót (Z) kötve, azon szinuszos váltóáram folyik. Rajzoljuk fel közös koordinátarendszerben a fogyasztón eső U feszültséget és a rajta átfolyó I áramerősséget, mint az idő függvényét!



Az összefüggésekben $\omega = 2\pi \cdot f$, ahol f a hálózati frekvencia (Magyarországon $f = 50\,[\mathrm{Hz}]$). Az ábráról leolvasható, hogy a feszültség és áram között általános esetben φ_0 fáziseltolás van, azaz a feszültség és áram nem ugyanabban az időpillanatban veszi fel maximális értékét.
Váltóáramoknál az egyenáramokhoz hasonlóan megfogalmazható az Ohm törvény. Ehhez a feszültséget, áramerősséget és váltóáramú ellenállást komplex mennyiségekként kell értelmeznünk. Ehhez tekintsük az alábbi ábrát!



Az ábrán látható, hogy az $\hat{U}$ és $\hat{I}$ komplex feszültséget és áramerősséget úgy vezetjük be, hogy képzetes részük minden pillanatban megegyezzen a feszültség és áramerősség értékével. Ahogy az idő telik, az $\hat{U}$ és $\hat{I}$ vektorok az origó körül azonos nagyságú ω szögsebességgel forognak, így bezárt szögük (φ_0) nagysága változatlan. Ebből adódóan a

$$\hat{Z} = \frac{\hat{U}}{\hat{I}}$$

hányados időben állandó. A $\hat{Z}$ mennyiséget *komplex váltóáramú ellenállás*nak, vagy másképpen *komplex impedanciá*nak nevezzük. Ezek alapján az Ohm törvény váltóáramokra:

$$\hat{U} = \hat{Z} \cdot \hat{I}.$$

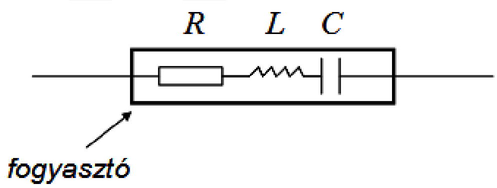
Váltóáramok esetén egy fogyasztónak nem csak ohmos, hanem induktív és kapacitív ellenállása is lehet. Ezek szintén komplex mennyiségek, értékük az alábbi összefüggésekkel számítható:

$$\hat{X}_L = \omega \cdot L \cdot i; \qquad \hat{X}_C = -\frac{1}{\omega \cdot C} \cdot i.$$

Az fenti egyenletekben L a fogyasztó induktivitása, C pedig a kapacitása. A megfelelő mértékegységek:

$$L[\mathrm{H}]; \quad C[\mathrm{F}]; \quad \omega\left[\frac{1}{\mathrm{s}}\right]; \quad \hat{X}_L[\Omega]; \quad \hat{X}_C[\Omega].$$

A fogyasztó ohmos ellenállását, induktivitását és kapacitását rajzban különválasztva jelöljük.



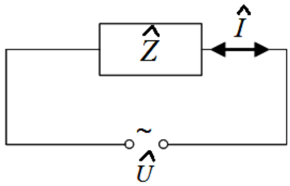
A fogyasztó teljes komplex impedanciája a három különböző ellenállás összege:

$$\hat{Z} = R + \hat{X}_L + \hat{X}_C.$$

A megfelelő mértékegységek:

$$\hat{Z}[\Omega]; R[\Omega].$$

(Természetesen L, C, vagy R értéke nulla is lehet, ekkor a fenti kifejezésben kevesebb tag szerepel.)



Ohm törvénye akkor is teljesül, ha a fenti ábrán szereplő fogyasztót egy bonyolult, több fogyasztóból álló hálózattal helyettesítjük. Ekkor azonban már a hálózat *eredő komplex impedanciá*ját jelenti. Néhány speciális esetben az eredő komplex impedancia egyszerűen számítható.
Soros kapcsolás esetén:

$$\hat{Z} = \hat{Z}_1 + \hat{Z}_2 + \ldots + \hat{Z}_n.$$

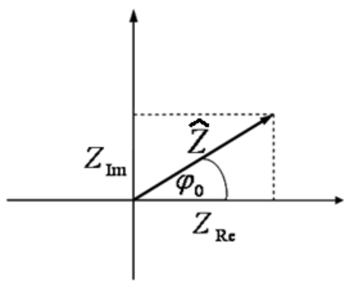
Párhuzamos kapcsolás esetén:

$$\frac{1}{\hat{Z}} = \frac{1}{\hat{Z}_1} + \frac{1}{\hat{Z}_2} + \ldots + \frac{1}{\hat{Z}_n}.$$

A φ_0 fázisszöget a $\hat{Z}$ komplex impedancia ismeretében az alábbi összefüggéssel számíthatjuk:

$$\varphi_0 = \operatorname{arctg} \frac{Z_{Im}}{Z_{Re}},$$

ahol Z_{Im} a $\hat{Z}$ komplex szám képzetes része, míg Z_{Re} a $\hat{Z}$ komplex szám valós része.



További, a gyakorlat szempontjából hasznos összefüggéshez jutunk, ha az Ohm törvényében szereplő összefüggés abszolútértékét vesszük:

$$|\hat{U}| = |\hat{Z}| \cdot |\hat{I}|,$$

amiből az következik, hogy

$$U_{\text{max}} = Z \cdot I_{\text{max}}.$$

Az összefüggésben a valós impedancia (valós váltóáramú ellenállás). A maximális értékek (csúcsértékek) helyett a gyakorlatban az effektív (hatásos) értékeket használják. Egy váltóáram effektív feszültségén és áramerősségén annak az egyenáramnak a feszültségét és áramerősségét értjük, amely egy teljes periódus alatt ugyanannyi hőt termel a fogyasztón, mint a váltóáram. Szinuszos váltóáram esetén a feszültség csúcsértékéből annak effektív értékét az alábbi módon számolhatjuk ki:

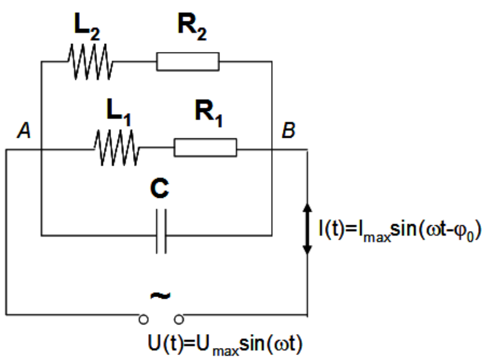
$$U_{\text{eff}} = \frac{U_{\text{max}}}{\sqrt{2}}; \qquad I_{\text{eff}} = \frac{I_{\text{max}}}{\sqrt{2}}.$$

Magyarországon a hálózati feszültség effektív értéke $220\,[\mathrm{V}]$. Ebből adódik, hogy a feszültség értéke -311 [V] és 311 [V] közötti érték között változik.
Ezt követően az Ohm törvényt az alábbi formába írhatjuk:

$$U_{\text{eff}} = Z \cdot I_{\text{eff}}.$$

Szükséges matematikai ismeretek. Komplex számok algebrai és trigonometrikus alakja, komplex számok ábrázolása, műveletek algebrai és trigonometrikus alakban megadott komplex számokkal, komplex számok konjugáltja és hossza.

Mintafeladat. Tekintsük az alábbi váltóáramú hálózatot:



Adatok:

$$U_{\text{eff}} = 220\,[\mathrm{V}];\ f = 50\,[\mathrm{Hz}];\ L_1 = 0,1\,\mathrm{H};\ L_2 = 0,15\,[\mathrm{H}];$$
$$C = 5 \cdot 10^{-5}\,[\mathrm{F}];\ R_1 = 3\,[\Omega];\ R_2 = 4\,[\Omega].$$

a) Határozzuk meg a komplex, majd a valós impedanciát az alábbi váltóáramú hálózatok A és B pontja között!

b) Határozzuk meg a φ_0 fázisszöget!

c) Határozzuk meg a főágban folyó áramerősség effektív értékét!

d) Adjuk meg az áramerősséget az idő függvényében!

Megoldás:

a) Mivel
$$\omega = 2\pi \cdot f \approx 314,16 \left[\frac{1}{\mathrm{s}}\right],$$
ezért egyrészt
$$\hat{X}_{L_1} = \omega \cdot L_1 \cdot i \approx 31,42i\,[\Omega],$$
másrészt
$$\hat{X}_{L_2} = \omega \cdot L_2 \cdot i \approx 47,12i\,[\Omega].$$
A fentiek felhasználásával az induktív ellenállás egyrészt
$$\hat{Z}_1 = R_1 + \hat{X}_{L_1} = (3 + 31,42i)\,[\Omega],$$
másrészt
$$\hat{Z}_2 = R_2 + \hat{X}_{L_2} + R_2 = (4 + 47,12i)\,[\Omega].$$
A kapacitív ellenállás
$$\hat{X}_C = -\frac{1}{\omega \cdot C} \cdot i \approx -63,66i\,[\Omega].$$
Az eredő komplex impedancia
$$\begin{aligned}\frac{1}{\hat{Z}} &= \frac{1}{\hat{Z}_1} + \frac{1}{\hat{Z}_2} + \frac{1}{\hat{X}_C} = \frac{1}{3+31,42i} + \frac{1}{4+47,12i} + \frac{1}{-63,66i} = \\ &= \frac{1}{3+31,42i} \cdot \frac{3-31,42i}{3-31,42i} + \frac{1}{4+47,12i} \cdot \frac{4-47,12i}{4-47,12i} + \\ &+ \frac{1}{-63,66i} \cdot \frac{i}{i} = \frac{3-31,42i}{9+31,42^2} + \frac{4-47,12i}{16+47,12^2} + \frac{i}{63,66} \approx \\ &\approx 0,048 - 0,0369i \left[\frac{1}{\Omega}\right],\end{aligned}$$
így
$$\hat{Z} = \frac{1}{0,048 - 0,0369i} \approx 13,09 + 10,07i\,[\Omega].$$
A valós impedancia
$$Z = \sqrt{13,09^2 + 10,07^2} \approx 13,13\,[\Omega].$$

b) A fázisszög:
$$\varphi_0 = \arctan\frac{10,07}{13,09} \qquad \Rightarrow \qquad \varphi_0 \approx 37,57^\circ.$$

c) Az effektív áramerősség

$$I_{\text{eff}} = \frac{U_{\text{eff}}}{Z} = \frac{220}{13,13} \approx 16,76\,[\text{A}].$$

d) A maximális áramerősség

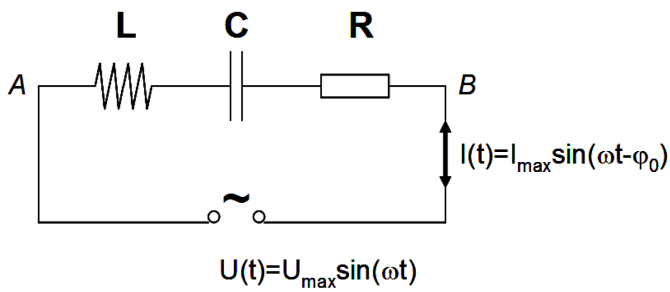
$$I_{\max} = I_{\text{eff}} \cdot \sqrt{2} \approx 23,7\,[\text{A}].$$

Az áramerősség-idő függvény

$$I(t) = I_{\max} \cdot \sin(\omega t - \varphi_0) = 23,7 \cdot \sin(314,16t - 0,21\pi).$$

Gyakorló feladatok.

5.1.1. **Feladat.** Tekintsük az alábbi váltóáramú hálózatot:



Adatok:

$$U_{\text{eff}} = 220\,[\text{V}];\ f = 50\,[\text{Hz}];\ L = 0,2\,[\text{H}];$$
$$C = 5 \cdot 10^{-5}\,[\text{F}];\ R = 5\,[\Omega].$$

a) Határozzuk meg a komplex, majd a valós impedanciát az alábbi váltóáramú hálózatok A és B pontja között!

b) Határozzuk meg a φ_0 fázisszöget!

c) Határozzuk meg a főágban folyó áramerősség effektív értékét!

d) Adjuk meg, majd rajzoljuk fel az áramerősséget az idő függvényében!

<u>**Megoldás**</u>:

a) Mivel

$$\omega = 2\pi \cdot f \approx 314,16\left[\frac{1}{\text{s}}\right],$$

ezért

$$\hat{X}_L = \omega \cdot L \cdot i \approx 62,83i\,[\Omega].$$

Az induktív ellenállás

$$\hat{Z}_1 = R + \hat{X}_L = (5 + 62,83i)\,[\Omega].$$

A kapacitív ellenállás

$$\hat{X}_C = -\frac{1}{\omega \cdot C} \cdot i \approx -63,66i\,[\Omega].$$

Az eredő komplex impedancia

$$\hat{Z} = \hat{Z}_1 + \hat{X}_C = 5 + 62,83i - 63,66i = 5 - 0,83i.$$

A valós impedancia

$$Z = \sqrt{5^2 + (-0,83)^2} \approx 5,07\,[\Omega].$$

b) A fázisszög:

$$\varphi_0 = \arctan\frac{0,83}{5} \quad \to \quad \varphi \approx 360° - 9,43° \approx 350,57°.$$

c) Az effektív áramerősség

$$I_{\text{eff}} = \frac{U_{\text{eff}}}{Z} = \frac{220}{5,07} \approx 43,39\,[\text{A}].$$

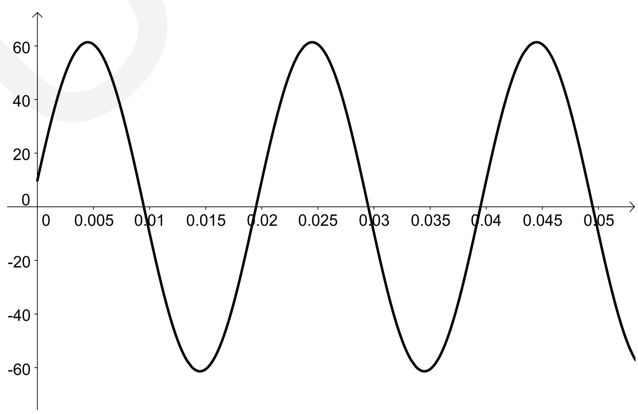
d) A maximális áramerősség

$$I_{\max} = I_{\text{eff}} \cdot \sqrt{2} \approx 61,36\,[\text{A}].$$

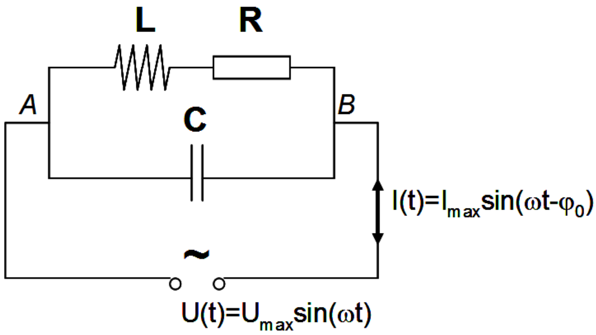
Az áramerősség-idő függvény

$$I(t) = I_{\max} \cdot \sin(\omega t - \varphi_0) = 61,36 \cdot \sin(314,16t - 1,95\pi).$$

A függvény grafikonja:



5.1.2. **Feladat.** Tekintsük az alábbi váltóáramú hálózatot:



Adatok:

$U_{\text{eff}} = 220\,[\text{V}];\ f = 50\,[\text{Hz}];\ L = 0,2\,[\text{H}];\ C = 5 \cdot 10^{-5}\,[\text{F}];\ R = 5\,[\Omega].$

a) Határozzuk meg a komplex, majd a valós impedanciát az alábbi váltóáramú hálózatok A és B pontja között!

b) Határozzuk meg a φ_0 fázisszöget!

c) Határozzuk meg a főágban folyó áramerősség effektív értékét!

d) Adjuk meg a maximális áramerősséget!

Megoldás:

a) Mivel

$$\omega = 2\pi \cdot f \approx 314,16 \left[\frac{1}{\text{s}}\right],$$

ezért

$$\hat{X}_L = \omega \cdot L \cdot i \approx 62,83i\,[\Omega].$$

Az induktív ellenállás

$$\hat{Z}_1 = R + \hat{X}_L = (5 + 62,83i)\,[\Omega].$$

A kapacitív ellenállás

$$\hat{X}_C = -\frac{1}{\omega \cdot C} \cdot i \approx -63,66i\,[\Omega].$$

Az eredő komplex impedanciára teljesül, hogy

$$\frac{1}{\hat{Z}} = \frac{1}{\hat{Z}_1} + \frac{1}{\hat{X}_C} \approx 0,0012 + 0,00014i,$$

amiből azt kapjuk, hogy

$$\hat{Z} \approx 809,58 - 91,19i.$$

A valós impedancia

$$Z \approx 814,7\,[\Omega].$$

b) A fázisszög:

$$\varphi_0 \approx 353,58^\circ.$$

c) Az effektív áramerősség

$$I_{\text{eff}} = \frac{U_{\text{eff}}}{Z} = \frac{220}{814,7} \approx 0,27\,[\text{A}].$$

d) A maximális áramerősség

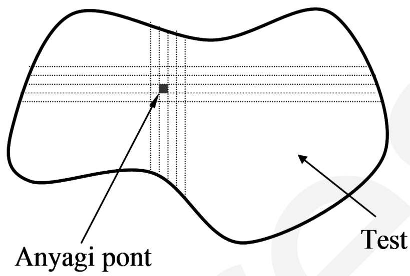
$$I_{\max} = I_{\text{eff}} \cdot \sqrt{2} \approx 0,38\,[\text{A}].$$

6. fejezet

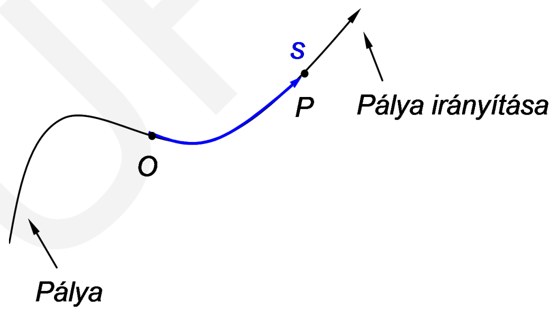
Egyváltozós függvények differenciálszámítása

6.1. Anyagi pont kinematikája: pálya menti mennyiségek

Elméleti összefoglaló. Ha a vizsgált test mérete elhanyagolható a mechanikai problémában szereplő egyéb méretekhez képest, akkor a test *anyagi pont*tal modellezhető. Az anyagi pont egy geometriai pont, amelyhez hozzárendeljük a test tömegét. (Egy gépkocsi Magyarország térképén anyagi pontnak tekinthető.) Ha egy kiterjedt testet gondolatban, a méretéhez képest elhanyagolható nagyságú darabokra bontunk, szintén anyagi pontokat kapunk.

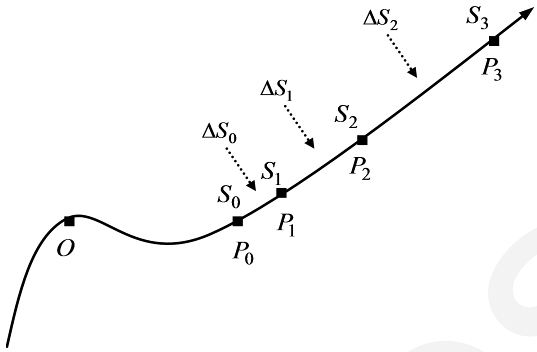


Így az anyagi pontra nyert ismereteinket felhasználhatjuk a kiterjedt testek vizsgálatánál. Az anyagi pont mozgása során egy térgörbén halad végig, amelyet a *mozgás pályájá*nak nevezünk. Ha a mozgás pályája adott, akkor azon az anyagi pont helye egy előjeles skalármennyiséggel megadható. Ehhez jelöljünk ki a pályán egy O vonatkoztatási pontot és egy pozitív irányítást.

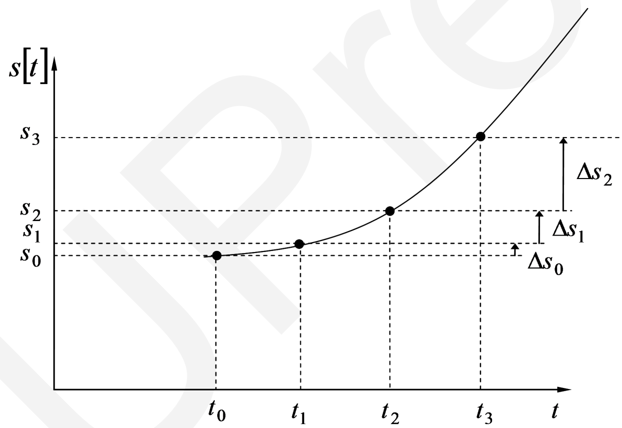


A P anyagi pont helyét a pályán az O ponttól mért előjeles ívhossz (s) egyértelműen meghatározza. Ezt az ívhosszt *pályakoordinátá*nak vagy *kitérés*nek nevezzük. Így, szemléletesen szólva, a pálya egy „görbe számegyenes” lesz, amelynek az origója az O pont. A pályakoordináta SI mértékegysége a méter. Ahogy az anyagi pont halad a pályán, helyét időről-időre más pályakoordináta jellemzi. A pályakoordinátát megadva az idő függvényében, megkapjuk az anyagi pont $s(t)$ *pályakoordináta-idő*, más szóval *hely-idő* függvényét.

A pályán mozgó P anyagi pont helyét egyenlő, Δt nagyságú időközönként megjelöltük $(P_0, P_1, P_2, \ldots)$ az alábbi ábrán:



Ábrázoljuk a pályakoordinátát az eltelt idő függvényében:



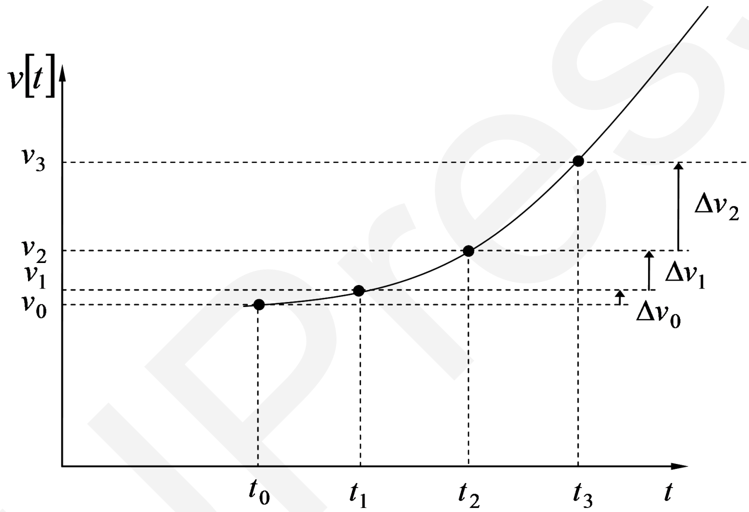
Az i-edik szakaszon a pont átlagos sebességét a $\dfrac{\Delta s_i}{\Delta t}$ hányados szolgáltatja. A Δt időtartam csökkentésével a fenti hányados „egyre inkább” a t_i időpillanatra lesz jellemző. Ez alapján például a $\dfrac{\Delta s_0}{\Delta t}$ hányados a t_0 időpillanatra. Amennyiben $\Delta t \to 0$, akkor a $\dfrac{\Delta s_0}{\Delta t}$ hányados pontosan a t_0 időpillanatbeli $v(t_0)$ sebességet adja. Matematikai megfogalmazásban:

$$v(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s_0}{\Delta t} = \lim_{t \to t_0} \frac{s(t_1) - s(t_0)}{t_1 - t_0} = \frac{ds_0}{dt}.$$

A $v(t_0)$ mennyiséget a t_0 időpillanatbeli *pálya menti sebesség*nek nevezzük. A $v(t)$ függvény a *pálya menti sebesség-idő függvény*, amely a pályakoordináta-idő függvény idő szerinti deriváltja. Az idő szerinti deriválást ponttal jelölve:

$$v(t) = \frac{ds}{dt} = \dot{s}(t).$$

Könnyen látható, hogy egy függvény egy adott pontbeli deriváltjának értéke megegyezik az adott pontbeli érintő egyenesének meredekségével. Ezek alapján az $s(t)$ függvény t_0 időpontbeli érintőjének meredekse éppen a t_0 pontbeli pályasebesség értékét. Most ábrázoljuk a pálya menti sebességet az eltelt idő függvényében:



A pont átlagos gyorsulását az i-edik szakaszon a $\dfrac{\Delta v_i}{\Delta t}$ hányados adja meg. A pillanatnyi *pálya menti gyorsulás*t a pálya menti sebességhez hasonlóan differenciálhányadosként értelmezzük. Például a t_0 időpillanatban:

$$a(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v_0}{\Delta t} = \lim_{t \to t_0} \frac{v(t_1) - v(t_0)}{t_1 - t_0}.$$

A *pálya menti gyorsulás-idő függvény*t a pálya menti sebesség-idő függvény idő szerinti deriválásával kapjuk:

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = \dot{v}(t) = \ddot{s}(t).$$

A $v(t)$ függvény t_0 pontbeli érintő egyenesének meredeksége a t_0 pontbeli pálya menti gyorsulás értékét adja. A pálya menti gyorsulást megadva az idő függvényében megkapjuk az anyagi pont pálya menti gyorsulás-idő függvényét.

Szükséges matematikai ismeretek. Határértékszámítás, elemi függvények deriváltjai, differenciálási szabályok, szélsőértékszámítás.

1. Mintafeladat. Egy vízszintes terepen, álló helyzetből gyorsító, elektromos meghajtású gépkocsi pályakoordináta-idő függvénye az alábbi:

$$s(t) = A \cdot \left[\ln(1 + \mathrm{e}^{B(t+C)}) + \ln(1 + \mathrm{e}^{-B(t+C)}) - D \cdot t \right] + E.$$

Adatok:

$$A = 250\,[\mathrm{m}]; \qquad B = 0,145 \left[\frac{1}{\mathrm{s}}\right]; \qquad C = 6,494\,[\mathrm{s}];$$

$$D = 0,064 \left[\frac{1}{\mathrm{s}}\right]; \qquad E = -400\,[\mathrm{m}].$$

a) Határozzuk meg a gépkocsi pálya menti sebesség-idő és pálya menti gyorsulás-idő függvényeit!
b) Határozzuk meg a pályakoordináta, pálya menti sebesség és gyorsulás értékét a gépkocsi indulása után 10 [s]-mal!
c) Határozzuk meg a gépkocsi végsebességét!
(A végsebességet a $v_{\max} = \lim\limits_{t \to \infty} v(t)$ összefüggés értelmezi.)
d) Milyen értékhez tart a gépkocsi pálya menti gyorsulása $t \to \infty$ esetén?

Megoldás:

a) Az összetett függvény deriválási szabálya alapján

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(\ln(1 + \mathrm{e}^{B(t+C)})\big) = \frac{1}{1 + \mathrm{e}^{B(t+C)}} \cdot \mathrm{e}^{B(t+C)} \cdot B = B \cdot \frac{\mathrm{e}^{B(t+C)}}{1 + \mathrm{e}^{B(t+C)}},$$

illetve

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\big(\ln(1+\mathrm{e}^{-B(t+c)})\big) &= \frac{1}{\mathrm{e}^{-B(t+c)}+1}\cdot \mathrm{e}^{-B(t+c)}\cdot(-B) = \\ &= -B\cdot\frac{\mathrm{e}^{-B(t+c)}}{1+\mathrm{e}^{-B(t+c)}}\end{aligned}$$

adódik. A fenti összefüggéseket felhasználva azt kapjuk, hogy a sebesség-idő függvény:

$$\begin{aligned}v(t) &= A\cdot\left[B\cdot\frac{\mathrm{e}^{B(t+C)}}{1+\mathrm{e}^{B(t+C)}} - B\cdot\frac{\mathrm{e}^{-B(t+C)}}{1+\mathrm{e}^{-B(t+C)}} - D\right] = \\ &= A\cdot\left[B\cdot\frac{\mathrm{e}^{B(t+C)}\cdot\mathrm{e}^{-B(t+C)}}{1+\mathrm{e}^{-B(t+C)}} - B\cdot\frac{\mathrm{e}^{-B(t+C)}}{1+\mathrm{e}^{-B(t+C)}} - D\right] = \\ &= A\cdot\left[B\cdot\frac{1}{1+\mathrm{e}^{-B(t+C)}} - B\cdot\frac{\mathrm{e}^{-B(t+C)}}{1+\mathrm{e}^{-B(t+C)}} - D\right] = \\ &= A\cdot B\cdot\frac{1-\mathrm{e}^{-B(t+C)}}{1+\mathrm{e}^{-B(t+C)}} - A\cdot D = \\ &= \left(36,25\cdot\frac{1-\mathrm{e}^{-0{,}145\cdot(t+6{,}494)}}{1+\mathrm{e}^{-0{,}145\cdot(t+6{,}494)}} - 16\right)\left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right].\end{aligned}$$

A gyorsulás-idő függvény a sebesség-idő függvény idő szerinti deriváltja, így azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\frac{1-\mathrm{e}^{-B(t+C)}}{1+\mathrm{e}^{-B(t+C)}}\right) = \frac{-\mathrm{e}^{-B(t+C)}\cdot(-B)\cdot(1+\mathrm{e}^{-B(t+C)})}{\big(1+\mathrm{e}^{-B(t+C)}\big)^2} - \\ &-\frac{(1-\mathrm{e}^{-B(t+C)})\cdot\mathrm{e}^{-B(t+C)}\cdot(-B)}{\big(1+\mathrm{e}^{-B(t+C)}\big)^2} = \\ &= B\cdot\frac{\mathrm{e}^{-B(t+C)}+\mathrm{e}^{-2B(t+C)}+\mathrm{e}^{-B(t+C)}-\mathrm{e}^{-2B(t+C)}}{\big(1+\mathrm{e}^{-B(t+C)}\big)^2} = \\ &= 2B\cdot\frac{\mathrm{e}^{-B(t+C)}}{\big(1+\mathrm{e}^{-B(t+C)}\big)^2}.\end{aligned}$$

A fenti eredményt felhasználva a gyorsulás-idő függvény:

$$a(t) = \dot{v}(t) = 2A \cdot B^2 \cdot \frac{\mathrm{e}^{-B(t+C)}}{\left(1+\mathrm{e}^{-B(t+C)}\right)^2} =$$

$$= 10,51 \cdot \frac{\mathrm{e}^{-0,145\cdot(t+6,494)}}{\left(1+\mathrm{e}^{-0,145\cdot(t+6,494)}\right)^2} \left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right].$$

b) A pályakoordináta értéke az indulás után 10 [s]-mal:

$$s(10) = 250 \cdot \Big[\ln(1+\mathrm{e}^{0,145\cdot(10+6,494)}) +$$

$$+ \ln(1+\mathrm{e}^{-0,145\cdot(10+6,494)}) - 0,064 \cdot 10\Big] - 400 = 81,67\,[\mathrm{m}].$$

A pálya menti sebesség értéke az indulás után 10 [s]-mal:

$$v(10) = 36,25 \cdot \frac{1-\mathrm{e}^{-0,145\cdot(10+6,494)}}{1+\mathrm{e}^{-0,145\cdot(10+6,494)}} - 16 = 14,17 \left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right].$$

A pálya menti gyorsulás értéke az indulás után 10 [s]-mal:

$$a(10) = 10,51 \cdot \frac{\mathrm{e}^{-0,145\cdot(10+6,494)}}{\left(1+\mathrm{e}^{-0,145\cdot(10+6,494)}\right)^2}\, s = 0,81 \left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right].$$

c) A sebességre vonatkozó összefüggésben szereplő kifejezés végtelenben vett határértéke:

$$\lim_{t\to\infty} \mathrm{e}^{-0,145\cdot(t+6,494)} = 0.$$

Ezt felhasználva a végsebesség:

$$v_{\max} = \lim_{t\to\infty} \left(36,25 \cdot \frac{1-\mathrm{e}^{-0,145\cdot(t+6,494)}}{1+\mathrm{e}^{-0,145\cdot(t+6,494)}} - 16\right) =$$

$$= 36,25 - 16 = 20,25 \left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right].$$

d) Szintén felhasználva, hogy

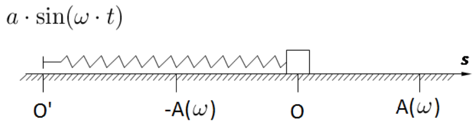
$$\lim_{t\to\infty} \mathrm{e}^{-0,145\cdot(t+6,494)} = 0$$

azt kapjuk, hogy a gyorsulás értéke $t \to \infty$ esetén

$$\lim_{t\to\infty} a(t) = \lim_{t\to\infty} \left(10,51 \cdot \frac{\mathrm{e}^{-0,145\cdot(t+6,494)}}{\left(1+\mathrm{e}^{-0,145\cdot(t+6,494)}\right)^2}\right) =$$

$$= 10,51 \cdot 0 = 0 \left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right].$$

2. Mintafeladat. Az alábbi ábra egy pontszerű testet szemléltet, amely a vízszintes, súrlódásmentes sík O pontjában nyugszik.



A testhez egy rugó kapcsolódik, amelynek másik végét az O' pont körül az $s^\star(t) = a \cdot \sin(\omega \cdot t)$ pályakoordináta-idő függvény szerint mozgatni kezdjük. A mozgatás hatására, rövid idő elteltével a test is rezgőmozgást végez az O pont körül. A test sebességével arányos nagyságú közegellenállási erőt feltételezve a test pályakoordináta-idő függvénye az alábbi alakban írható:

$$s(t) = A(\omega) \cdot \sin\big(\omega \cdot t + \varphi(\omega)\big).$$

Az $A(\omega)$ és $\varphi(\omega)$ jelölések arra utalnak, hogy az A amplitúdó és a φ kezdőfázis értéke függ az $a \cdot \sin(\omega \cdot t)$ „gerjesztő" függvényben szereplő ω körfrekvencia értékétől. (Azaz attól, hogy milyen „szaporán" mozgatjuk a rugó végpontját az O' pont körül.) Belátható, hogy a fenti feltételek mellett az $A(\omega)$ és $\varphi(\omega)$ függvények az alábbi alakban írhatók fel:

$$A(\omega) = \frac{b}{\sqrt{\left({\omega_0}^2 - \omega^2\right)^2 + 4 \cdot \beta^2 \cdot \omega^2}}$$

$$\varphi(\omega) = \operatorname{arctg}\left(\frac{2\beta \cdot \omega}{{\omega_0}^2 - \omega^2}\right).$$

A fenti összefüggésekben szereplő paraméterek részletezve:

$$b = \frac{k \cdot a}{m}; \quad \beta = \frac{c}{2m}; \quad \omega_0 = 2\pi \cdot f_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}; \quad k = 1.000 \left[\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}\right];$$

$$m = 1\,[\mathrm{kg}]; \quad c = 20 \left[\frac{\mathrm{N} \cdot \mathrm{s}}{\mathrm{m}}\right]; \quad a = 0,1\ [\mathrm{m}],$$

ahol m a test tömege, k a rugómerevség értéke, c és β a közegellenállási és csillapítási tényező, f a gerjesztő rezgés frekvenciája, f_0 pedig a rugó és a test által alkotott rendszer sajátfrekvenciája. (Azaz az a frekvencia, amellyel a test rezegne, ha a rugó O' végpontját rögzítenénk, majd mozgásba hoznánk a testet.)

a) Határozzuk meg az $A(\omega)$ függvény ω változó szerinti első és második deriváltjait!

b) Határozzuk meg az ω változó azon ω_r értékét, amely esetén az amplitúdó értéke maximális!

c) Hová tart ω_r és $A(\omega_r)$ értéke, ha a β csillapítási tényező értéke nullához tart, azaz, ha a közegellenállást elhanyagoljuk?

d) A megkapott eredmények felhasználásával vázoljuk fel az $A(\omega)$ függvény grafikonját!

e) Végezzük el a $\varphi(\omega)$ függvény teljes vizsgálatát a $[0;\omega_r[$ intervallumon, majd ábrázoljuk a függvényt!

Megoldás:

a) Felhasználva a megadott adatokat

$$b = 100\left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right]; \qquad \omega_0 = \sqrt{1.000}\left[\frac{1}{\mathrm{s}}\right]; \qquad \beta = 10\left[\frac{1}{\mathrm{s}}\right]$$

adódik. Ezeket behelyettesítve az $A(\omega)$ függvénybe

$$A(\omega) = \frac{100}{\sqrt{\left(1.000-\omega^2\right)^2+400\,\omega^2}} = \frac{100}{\sqrt{10^6-2.000\,\omega^2+\omega^4+400\,\omega^2}} = $$
$$= \frac{100}{\sqrt{10^6-1.600\,\omega^2+\omega^4}}$$

adódik. Ezt átalakítva azt kapjuk, hogy

$$A(\omega) = 100\cdot\left(10^6-1.600\,\omega^2+\omega^4\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Az $A(\omega)$ függvény deriváltja:

$$A'(\omega) = -50\cdot\left(10^6-1.600\,\omega^2+\omega^4\right)^{-\frac{3}{2}}\cdot\left(-3.200\,\omega+4\,\omega^3\right) =$$
$$= -50\cdot\frac{4\,\omega^3-3200\,\omega}{\left(\omega^4-1.600\,\omega^2+10^6\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{-200\,\omega^3+160.000\,\omega}{\left(\omega^4-1.600\,\omega^2+10^6\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

Az $A(\omega)$ függvény második deriváltja:

$$A''(\omega) = \frac{(-600\,\omega^2+160.000)\cdot(\omega^4-1.600\,\omega^2+10^6)^{\frac{3}{2}}}{(\omega^4-1.600\,\omega^2+10^6)^3} -$$
$$-\frac{(-200\,\omega^3+160.000\,\omega)\cdot\frac{3}{2}\cdot(\omega^4-1.600\,\omega^2+10^6)^{\frac{1}{2}}\cdot(4\,\omega^3-3200\,\omega)}{(\omega^4-1.600\,\omega^2+10^6)^3}.$$

Ha a számlálót és a nevezőt is elosztjuk $(\omega^4 - 1.600\,\omega^2 + 10^6)^{\frac{1}{2}}$-el, akkor azt kapjuk, hogy

$$A''(\omega) = \frac{(-600\,\omega^2 + 160.000)\cdot(\omega^4 - 1.600\,\omega^2 + 10^6)}{(\omega^4 - 1.600\,\omega^2 + 10^6)^{\frac{5}{2}}} -$$

$$- \frac{(-200\,\omega^3 + 160.000\,\omega)\cdot\frac{3}{2}\cdot(4\,\omega^3 - 3200\,\omega)}{(\omega^4 - 1.600\,\omega^2 + 10^6)^{\frac{5}{2}}} =$$

$$= \frac{600\,\omega^6 - 800.000\,\omega^4 - 88.000.000\,\omega^2 + 160.000.000.000}{(\omega^4 - 1.600\,\omega^2 + 1.000.000)^{\frac{5}{2}}}.$$

b) Ahhoz, hogy megkapjuk az $A(\omega)$ függvény szélsőértékét, meg kell oldanunk az $A'(\omega) = 0$ egyenletet:

$$\frac{-200\,\omega^3 + 160.000\,\omega}{\left(\omega^4 - 1.600\,\omega^2 + 1.000.000\right)^{\frac{3}{2}}} = 0$$

$$-200\,\omega\cdot(\omega^2 - 800) = 0.$$

Az egyenlet megoldásaként $\omega_1 = 0$, $\omega_{2,3} = \pm\sqrt{800}$ adódik. Azonban nyilván az $\omega \geq 0$ feltételnek is teljesülnie kell, így azt kapjuk, hogy $\omega_1 = 0$ és $\omega_2 = \sqrt{800}$. Mivel

$$A''(0) = \frac{\sqrt{1.000.000}}{6.250.000} > 0$$

és

$$A''(\sqrt{800}) = -\frac{\sqrt{360.000}}{405.000} < 0,$$

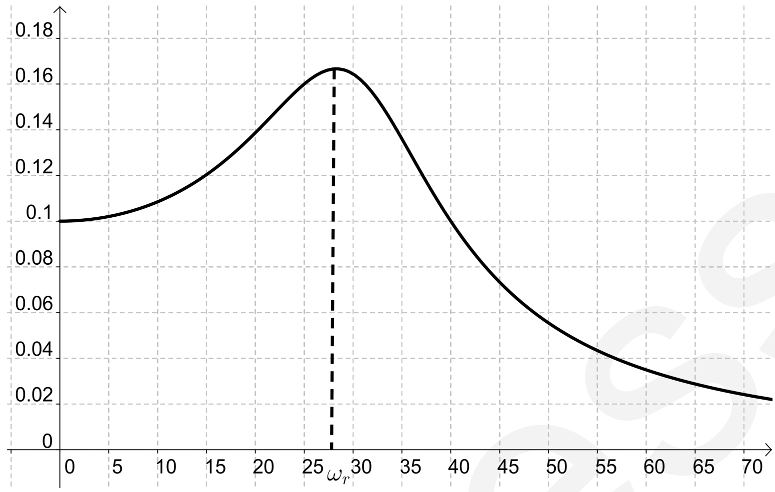
így a szélsőérték létezésének elegendő feltétele alapján azt kapjuk, hogy az $\omega = 0\left[\frac{1}{\mathrm{s}}\right]$ helyen lokális minimuma, az $\omega = \sqrt{800}\left[\frac{1}{\mathrm{s}}\right]$ helyen globális maximuma van az $A(\omega)$ függvénynek. Tehát az ω érték, amely esetén az amplitúdó értéke maximális $\omega_r = \sqrt{800}\left[\frac{1}{\mathrm{s}}\right]$. Ekkor

$$A(\omega_r) = A\big(\sqrt{800}\big) = \frac{100}{\sqrt{40.000 + 400\cdot 800}} =$$

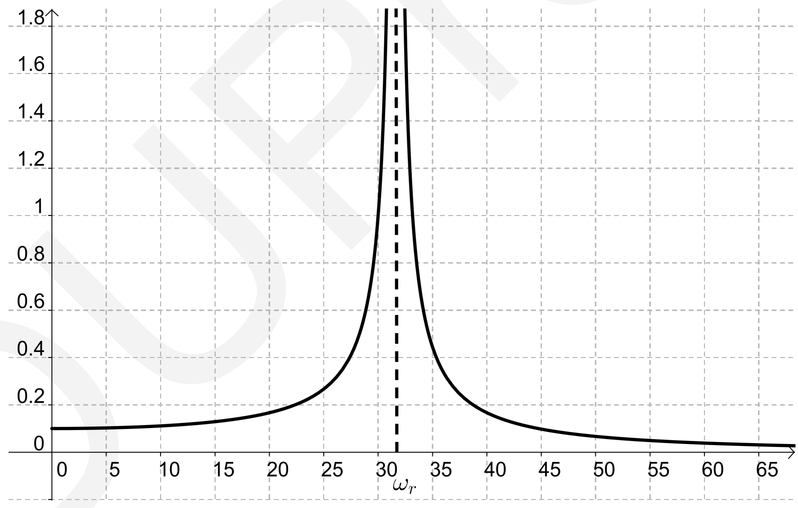
$$= \frac{100}{360.000} = \frac{1}{6}\,[\mathrm{m}].$$

c) Ha $\beta \to 0$, akkor $\omega_r \to \sqrt{1.000}$ és ekkor $A(\omega_r) \to \infty$. Tehát $\beta = 0$ esetén ω_r értéke megegyezik az ω_0 sajátfrekvencia értékével. Látható, hogy ha nincs csillapítás, akkor a rendszert sajátfrekvenciájával gerjesztve az amplitudó értéke végtelen lesz. Az ω_r frekvenciát *rezonancia frekvenciá*nak nevezzük.

d) Az $A(\omega)$ függvény grafikonja:



Az $A(\omega)$ függvény grafikonja $\beta = 0$ esetén:



e) A megfelelő adatok behelyettesítése után azt kapjuk, hogy

$$\varphi(\omega) = \operatorname{arctg}\left(\frac{20 \cdot \omega}{1.000 - \omega^2}\right).$$

A $\varphi(\omega)$ függvény deriváltja

$$\varphi'(\omega) = \frac{1}{1+\frac{400\,\omega^2}{\left(1.000-\omega^2\right)^2}} \cdot \frac{20\cdot(1.000-\omega^2)-20\,\omega\cdot(-2\,\omega)}{(1.000-\omega^2)^2} =$$

$$= \frac{\left(1.000-\omega^2\right)^2}{1.000.000-1.600\,\omega^2+\omega^4}\cdot\frac{20\,\omega^2+20.000}{\left(1.000-\omega^2\right)^2} =$$

$$= \frac{20\cdot(\omega^2+1.000)}{\omega^4-1.600\,\omega^2+1.000.000}.$$

Látható, hogy minden olyan ω esetén, ahol a $\varphi(\omega)$ függvény értelmezve van, $\varphi'(\omega) > 0$ teljesül. Ezért a $\varphi(\omega)$ függvény értelmezési tartományának minden pontjában szigorúan monoton növekvő. Továbbá

$$\varphi''(\omega) = \frac{20\cdot 2\,\omega\cdot(\omega^4-1.600\,\omega^2+10^6)}{(\omega^4-1.600\,\omega^2+10^6)^2} -$$

$$- \frac{20\cdot(\omega^2+1.000)\cdot(4\,\omega^3-3.200\,\omega)}{(\omega^4-1.600\,\omega^2+10^6)^2} =$$

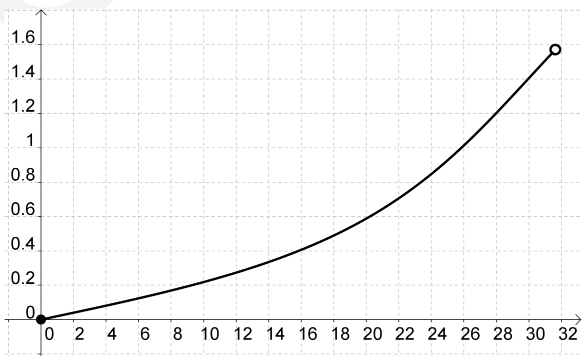
$$= \frac{-40\cdot\omega\cdot(\omega^4+2.000\cdot\omega^2-2.600.000)}{(\omega^4-1.600\cdot\omega^2+1.000.000)^2}$$

és $\varphi''(\omega) > 0$ minden $\omega \in [0;\sqrt{1.000}[$ esetén, így $\varphi(\omega)$ konvex.
A $\varphi(\omega)$ függvény határértéke az értelmezési tartományának határpontjaiban:

$$\lim_{\omega\to 0} \operatorname{arctg}\left(\frac{20\cdot\omega}{1.000-\omega^2}\right) = 0$$

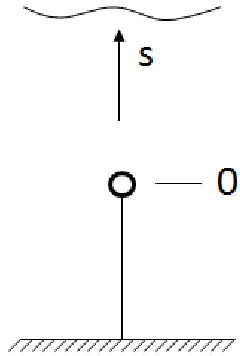
$$\lim_{\omega\to\sqrt{1.000}} \operatorname{arctg}\left(\frac{20\cdot\omega}{1.000-\omega^2}\right) = \frac{\pi}{2}$$

A $\varphi(\omega)$ függvény grafikonja:



Gyakorló feladatok.

6.1.1. **Feladat.** Az alábbi ábra egy víz alatti, gömb alakú bóját szemléltet, amelyet egy kötél segítségével a tengerfenékhez rögzítettünk.



A bója sűrűsége kisebb a vízénél, így a kötél feszes és függőleges helyzetű. A kötél hírtelen elszakad és a bója az

$$s(t) = \frac{1}{A} \cdot \left(t + \frac{1}{A \cdot B} \cdot \mathrm{e}^{-A \cdot B \cdot t} \cdot \frac{1}{A \cdot B} \right) \,[\mathrm{m}]$$

pályakoordináta-idő függvény szerint emelkedni kezd a vízben.

a) Határozzuk meg a bója pálya menti sebesség-idő és pálya menti gyorsulás-idő függvényeit!

b) Határozzuk meg a pályakoordináta, pálya menti sebesség és gyorsulás értékét a kötél elszakadását követően 10 [s]-al!

c) Határozzuk meg a bója végsebességét!
(A végsebességet a $v_{\max} = \lim\limits_{t \to \infty} v(t)$ összefüggés értelmezi.)

Adatok:

$$A = \frac{4,5 \cdot \eta}{R^2 \cdot (\rho_{\text{víz}} - \rho_{\text{bója}}) \cdot g}; \quad B = g \cdot \frac{\rho_{\text{víz}} - \rho_{\text{bója}}}{\rho_{\text{víz}}};$$

$$R = 0,01\,[\mathrm{m}]; \quad \eta = 0,00102 \left[\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m \cdot s}}\right]; \quad \rho_{\text{víz}} = 1.000 \left[\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}\right];$$

$$\rho_{\text{bója}} = 990 \left[\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}\right]; \quad g = 9,81 \left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right].$$

A fenti összefüggésekben η a víz dinamikus viszkozitását jelenti, R a bója sugara, g a gravitációs gyorsulás értéke, továbbá $\rho_{\text{víz}}$ a víz sűrűsége és $\rho_{\text{bója}}$ a bója sűrűsége.

Megoldás:

a) Az adatok behelyettesítése után azt kapjuk, hogy

$$A = 0,4679; \qquad B = 0,0981.$$

Ezt felhasználva

$$s(t) = 2,1372 \cdot \left(t + 21,786 \cdot \mathrm{e}^{-0,04569t} - 21,786\right)$$

adódik.

A sebesség-idő függvény a pályakoordináta-idő függvény deriváltja:

$$v(t) = \dot{s}(t) = \frac{1}{A} - \frac{A \cdot B}{A^2 \cdot B} \cdot \mathrm{e}^{-A \cdot B \cdot t} = \frac{1}{A} \cdot \left(1 - \mathrm{e}^{-A \cdot B \cdot t}\right) \left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right].$$

Behelyettesítve A és B értékét azt kapjuk, hogy

$$v(t) = 2,1372 \cdot \left(1 - \mathrm{e}^{-0,0459t}\right) \left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right].$$

A gyorsulás-idő függvény a sebesség-idő függvény deriváltja:

$$a(t) = \dot{v}(t) = B \cdot \mathrm{e}^{-A \cdot B \cdot t} = 0,0981 \cdot \mathrm{e}^{-0,0459t} \left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right].$$

b) Az előbbi függvényeket felhasználva

$$s(10) = 4,30\,[\mathrm{m}]$$
$$v(10) = 0,79 \left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right]$$
$$a(10) = 0,06 \left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right].$$

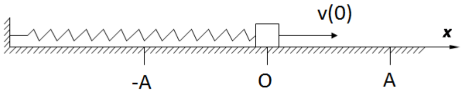
c) A bója végsebessége

$$v_{\max} = \lim_{t \to \infty} \left(2,1373 \cdot \left(1 - \mathrm{e}^{-0,0459t}\right)\right) = 2,1373 \left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right].$$

6.1.2. **Feladat.** Az alábbi ábra egy pontszerű testet szemléltet, amely vízszintes, súrlódásmentes síkon nyugszik. A testhez egy rugó kapcsolódik, amelynek másik vége a függőleges falhoz rögzített. A rugó az ábrán vázolt helyzetben terheletlen, azaz megnyúlása zérus. A testet $v(0)$ nagyságú kezdősebességgel mozgásba hozzuk, amely ezt követően

$$s(t) = A \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_0)$$

pályakoordináta-idő függvény szerint az O pont körül rezgőmozgást végez.



Adatok:

$$s(0) = 0\,[\mathrm{m}]; \quad v(0) = 10\left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right]; \quad \omega = 30\left[\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}\right].$$

a) Adjuk meg paraméteres alakban a mozgás $v(t)$ és $a(t)$ függvényeit!

b) A $v(t)$ és $s(t)$ függvények, valamint a $v(0)$ és $s(0)$ kezdeti mozgásjellemzők ismeretében határozzuk meg a φ_0 és az A paraméter értékét ($A > 0$), majd írjuk fel az $s(t)$, $v(t)$ és $a(t)$ függvények konkrét alakját!

Megoldás:

a) A sebesség-idő és gyorsulás-idő függvények

$$v(t) = A \cdot \omega \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi_0) = 30A \cdot \cos(30 \cdot t + \varphi_0)\left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right]$$
$$a(t) = -A \cdot \omega^2 \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_0) = -900A \cdot \sin(30 \cdot t + \varphi_0)\left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right].$$

b) Behelyettesítve az $s(t)$ és $v(t)$ függvényekbe a $t = 0$ értéket azt kapjuk, hogy

$$s(0) = A \cdot \sin\varphi_0$$
$$v(0) = 30A \cdot \cos\varphi_0.$$

Az $s(0)$ és $v(0)$ értékeket ismerjük, ezért

$$0 = A \cdot \sin\varphi_0$$
$$10 = 30A \cdot \cos\varphi_0.$$

adódik. Az első egyenletből $A \neq 0$ miatt azt kapjuk, hogy $\varphi_0 = 0$, vagy $\varphi_0 = \pi$. Mindkét értéket behelyettesítve a második egyenletbe azt kapjuk, hogy csak a $\varphi_0 = 0$ érték tesz eleget a feladatban előírt $A > 0$ feltételnek. Ebben az esetben a fenti egyenletrendszer második egyenletéből

$$10 = 30A \qquad \Rightarrow \qquad A = \frac{1}{3}\,[\mathrm{m}]$$

adódik. Felhasználva a megkapott eredményeket a pályakoordináta-idő, pálya menti sebesség-idő és pálya menti gyorsulás-idő függvényekre az alábbiak adódnak:

$$s(t) = \frac{1}{3} \cdot \sin(30t)\,[\mathrm{m}]$$
$$v(t) = 10 \cdot \cos(30t)\left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right]$$
$$a(t) = -300 \cdot \sin(30t)\left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right].$$

6.1.3. **Feladat.** Egy egyenes pályán mozgó részecske t másodperc elteltével a megfigyelés helyétől

$$s(t) = t^3 - 7t^2 + 11t - 3$$

méter távolságra van.

a) Határozzuk meg a pálya menti sebesség-idő és a pálya menti gyorsulás-idő függvényeket!

b) Adjuk meg azt az időpillanatot, amikor a részecske sebessége nulla!

c) Határozzuk meg azokat az időintervallumokat, amikor a részecske sebességének nagysága nő, illetve azokat, amikor csökken!

d) Adjuk meg azokat az időpillanatokat, amikor megváltozik a részecske mozgásának iránya!

e) Számoljuk ki, hogy az első 3 másodpercben összesen mennyi utat tett meg a részecske!

Megoldás:

a) A pályakoordináta-idő függvény deriváltja a pálya menti sebesség-idő függvény

$$v(t) = \dot{s}(t) = 3t^2 - 14t + 11.$$

A pálya menti gyorsulás-idő függvény a pálya menti sebesség-idő függvény deriváltja

$$a(t) = \dot{v}(t) = 6t - 14.$$

b) A részecske sebessége azon időpillanat(ok)ban zérus, amikor a $v(t) = 0$ egyenlet teljesül:

$$3t^2 - 14t + 11 = 0.$$

A másodfokú egyenlet megoldóképletet felhasználva

$$t_{1,2} = \frac{14 \pm \sqrt{196 - 132}}{6} = \frac{14 \pm 8}{6}$$

adódik, azaz a $t = 1\,[\mathrm{s}]$ és a $t = \frac{11}{3}\,[\mathrm{s}]$ időpillanatokban lesz a részecske sebessége nulla.

c) A $v(t)$ függvény monotonitását kell megvizsgálnunk:

	$t < 1$	$t = 1$	$1 < t < \frac{11}{3}$	$t = \frac{11}{3}$	$t > \frac{11}{3}$
$v'(t)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$v(t)$	$\nearrow$	lok. max.	$\searrow$	lok. min.	$\nearrow$

Az indulástól számítva 1 másodpercig a részecske sebessége növekszik, majd az indulástól számított $\frac{11}{3}$ másodpercig csökken a sebesség, ezt követően a megfigyelés végéig ismét növekszik a részecske sebessége.

d) A részecske mozgásának iránya a $t = 1\,[\mathrm{s}]$ és $t = \frac{11}{3}\,[\mathrm{s}]$ időpillanatban változott meg.

e) A részecske az első 3 másodperceben

$$s = [s(1) - s(0)] + [s(3) - s(1)]$$

méter utat tesz meg. Mivel

$$s(1) - s(0) = 2 - (-3) = 5,$$

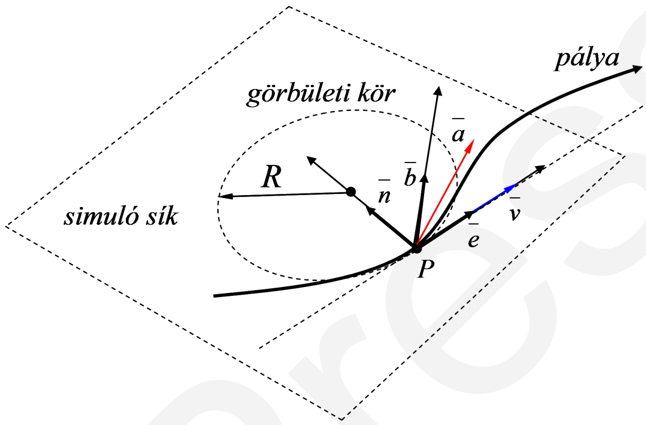
ezért $5\,[\mathrm{m}]$ utat tett meg az első másodpercen a részecske. Ezt követően megfordult és az eredetivel ellentétes irányba haladt és mivel

$$s(3) - s(1) = -6 - 2 = -8,$$

ezért $8\,[\mathrm{m}]$ utat tett meg. Összesen tehát $5 + 8 = 13\,[\mathrm{m}]$ utat tett meg a részecske az első 3 másodpercben.

6.2. Anyagi pont kinetikája: kényszermozgás sík- vagy térgörbén

Elméleti összefoglaló. Ha az anyagi pont egy adott sík- vagy térgörbén végez kényszermozgást, akkor célszerű mozgását a *kísérő triéder* által kifeszített *természetes koordinátarendszer*ben vizsgálni. A kísérő triédert három, egymásra páronként merőleges egységvektor alkotja ($\overline{e}, \overline{n}$ és $\overline{b}$ vektorok).



Az $\overline{e}$ *érintő irányú egységvektor* a pálya adott pontbeli érintőjének irányába mutat, irányítása a pálya irányításával egyező. Az $\overline{n}$ *normális irányú egységvektor* a görbületi kör középpontja felé mutat, tehát merőleges a pálya érintőjére, így az $\overline{e}$ egységvektorra. A $\overline{b}$ *binormális irányú egységvektor*t az alábbi összefüggés értelmezi:

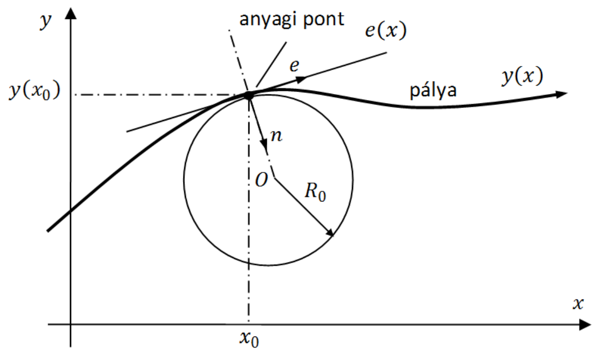
$$\overline{b} = \overline{e} \times \overline{n}.$$

Természetes koordinátarendszerben az anyagi pont vektoriális sebességére és gyorsulására az alábbi összefüggések érvényesek:

$$\overline{v} = v \cdot \overline{e}, \qquad \overline{a} = a \cdot \overline{e} + \frac{v^2}{R} \cdot \overline{n}.$$

A fenti összefüggésben R a görbületi sugár (azaz a simulókör sugara), v és a pedig az anyagi pont pálya menti sebessége és gyorsulása. A gyorsulás az $\overline{e}$ és $\overline{n}$ egységvektorok síkjába esik, így a binormális irányú gyorsulás zérus. A simuló kör sugara a pálya egyenletének ismeretében bármely pontban számolható. Itt csak azzal az esettel foglalkozunk, amikor a pálya síkgörbe, továbbá az egyenlete $y = f(x)$ alakban adott. Ekkor a görbületi sugár az x_0 abszcisszájú pontban az alábbi összefüggéssel számítható:

$$R_0 = \left| \frac{\left(1 + \left(y'(x_0)\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}{y''(x_0)} \right|.$$



A pálya érintőjének egyenletét is megadhatjuk az alábbi alakban:

$$e(x) = y(x_0) + y'(x_0) \cdot (x - x_0).$$

Természetes koordinátarendszerben a mozgásegyenlet (Newton II. törvénye) az alábbi alakban írható:

$$\sum_i \overline{F}_i = m \cdot \overline{a},$$

azaz

$$\begin{pmatrix} \sum\limits_i F_{ie} \\ \sum\limits_i F_{in} \\ \sum\limits_i F_{ib} \end{pmatrix} = m \cdot \begin{pmatrix} a \\ \frac{v^2}{r} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Tehát végül az alábbi, skalár mozgásegyenleteket kapjuk:

$$\sum_i F_{ie} = m \cdot a$$

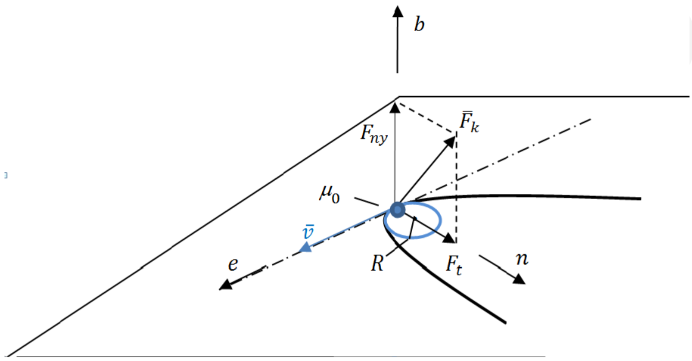
$$\sum_i F_{in} = m \cdot \frac{v^2}{R}$$

$$\sum_i F_{ib} = 0.$$

Kisodródás (kicsúszás) vizsgálata:
A természetes koordinátarendszerben felírt mozgásegyenletek megoldásával lehetőség nyílik a kisodródás kinetikai vizsgálatára. A kisodródás problémáját a következő kérdésben fogalmazhatjuk meg: maximálisan mekkora nagyságú állandó sebességgel haladhat egy pontszerű jármű egy vízszintes útkanyarulatban anélkül, hogy a menetirányra merőlegesen kicsúszna az úttesten? A kisodródás nélküli kanyarodás feltétele az alábbi:

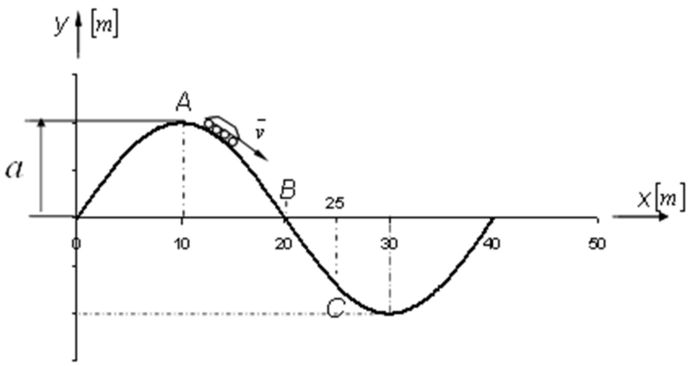
$$|F_t| \le \mu_0 \cdot F_{ny}.$$

A fenti összefüggésben F_t és F_{ny} a talaj által a járműre kifejtett kényszererő tapadási és nyomó komponense, μ_0 pedig az úttest és a kerekek között fellépő tapadási súrlódási tényező.



Szükséges matematikai ismeretek. Térgörbe érintési paraméterei, differenciálszámítás, deriválási szabályok.

1. Mintafeladat. Az alábbi ábra egy hullámvasutat szemléltet. Az ábrán vázolt koordinátarendszerben a vasúti pálya egyenlete $y = a \cdot \sin(b \cdot x)$ alakú.



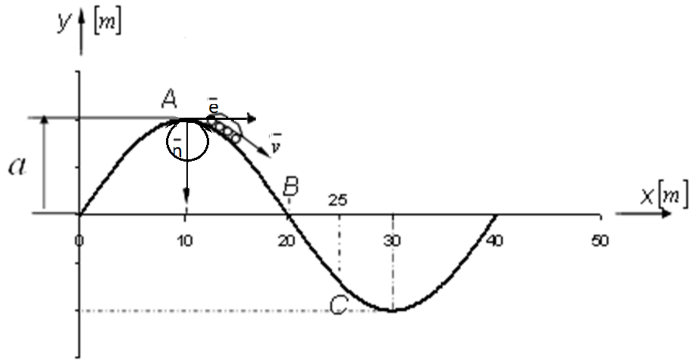
a) A B pont koordinátáiból határozzuk meg a pálya egyenletében szereplő b paraméter értékét!

b) A hullámvasutakra vonatkozó szabvány szerint a pálya emelkedési szöge sehol sem haladhatja meg a $60°$-ot. Határozzuk meg, hogy legfeljebb mekkora lehet az ábrán feltüntetett a paraméter értéke, hogy megfeleljünk a szabványnak!

c) Határozzuk meg a fenti maximális a paraméter esetén a pálya görbületi sugarát az A pontban!

d) Határozzuk meg az A pontban a pálya által a hullámvasúti kocsira kifejtett nyomóerő nagyságát, ha tudjuk, hogy az A pontban a kocsi sebességének nagysága $v_A = 5\left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right]$, tömege pedig $500\,[\mathrm{kg}]$.

<u>**Megoldás**</u>:



a) A B pont koordinátái: $x_B = 20\,[\mathrm{m}]$ és $y_B = 0\,[\mathrm{m}]$. Ezt felhasználva

$$0 = a \cdot \sin(20b) \qquad \Rightarrow \qquad 0 = \sin(20b)$$

adódik, amiből azt kapjuk, hogy

$$20b = \pi \qquad \Rightarrow \qquad b = \frac{\pi}{20}.$$

A pálya egyenlete tehát

$$y = a \cdot \sin\left(\frac{\pi}{20}x\right).$$

b) A pálya egyenletét az x változó szerint deriválva megkapjuk a pálya meredekségét az a változó függvényében:

$$m(x) = y'(x) = \frac{a \cdot \pi}{20} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{20}x\right).$$

A 60°-os emelkedési szöghöz tartozó meredekség:

$$m = \operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3}.$$

A szabvány szerint annak kell teljesülni, hogy

$$m \leq \sqrt{3},$$

így az

$$\frac{a \cdot \pi}{20} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{20}x\right) \leq \sqrt{3}$$

egyenlőtlenséget kell megoldanunk:

$$\frac{a \cdot \pi}{20} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{20}x\right) \leq \sqrt{3} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{a \cdot \pi}{20} \leq \sqrt{3},$$

így azt kapjuk, hogy

$$a \leq \frac{20 \cdot \sqrt{3}}{\pi} \approx 11,03.$$

c) Az előbbi eredményeket felhasználva azt kapjuk, hogy a maximálisan megengedett a érték esetén

$$y(x) = \frac{20 \cdot \sqrt{3}}{\pi} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{20}x\right).$$

Az $y(x)$ függvény deriváltja:

$$y'(x) = \sqrt{3} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{20}x\right).$$

Az $y(x)$ függvény második deriváltja:

$$y''(x) = -\frac{\sqrt{3} \cdot \pi}{20} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{20}x\right).$$

A görbületi sugár az A pontban

$$R_A = \left| -\frac{20}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\left(1 + 3\,\left(\cos\left(\frac{1}{20} \cdot \pi \cdot 10\right)\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\sin\left(\frac{1}{20} \cdot \pi \cdot 10\right) \cdot \pi} \right| \approx 3,68.$$

d) Mivel

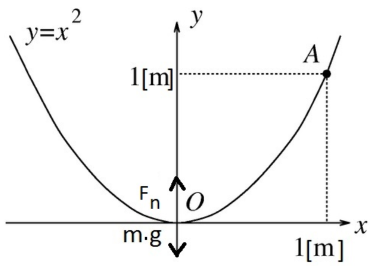
$$\sum_i F_{in} = m \cdot g - F_n = m \cdot \frac{v_A^2}{R_A},$$

ezért

$$F_n = m \cdot g - m \cdot \frac{v_A^2}{R_A} = 500 \cdot 9,81 - 500 \cdot \frac{5^2}{3,68} =$$
$$= 500 \cdot (9,81 - 6,79) = 1510\,[\mathrm{N}].$$

2. Mintafeladat. Az ábrán látható, parabola alakú vájat A pontjából kezdősebesség nélkül lecsúszik egy pontszerűnek tekinthető, $0,1\,[\mathrm{kg}]$ tömegű test. (A súrlódás elhanyagolható.) Mekkora erővel nyomja a vájat a testet az O pontban?

Megoldás:



Az $m = 0,1\,[\mathrm{kg}]$ tömegű test az A pontból, $h = 1\,[\mathrm{m}]$ magasságból indul. Az O pontban a sebesség vektora vízszintes irányú, nagysága (a munkatétel alapján) $v_O = \sqrt{2gh}$. A test normális irányú gyorsulása $\frac{v_O^2}{R_O}$, ahol R_O az O pontbeli simulókör sugara (azaz a görbületi sugár). A normális irányban felírt mozgásegyenlet:

$$\sum_i F_{in} = F_n - m \cdot g = m \cdot \frac{v_O^2}{R_O},$$

amiből azt kapjuk, hogy

$$F_n = m \cdot g + \frac{2 \cdot m \cdot g \cdot h}{R_O},$$

ahol F_n a keresett nyomóerő nagysága. A feladatunk tehát az R_O görbületi sugár meghatározása. A parabola alakú vájatot leíró függvény $f(x) = x^2$. Ennek a deriváltja $f'(x) = 2x$, második deriváltja $f''(x) = 2$. Ez alapján a görbületi sugár:

$$R_O = \left| \frac{\left[1 + \left(f'(x)\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{f''(x)} \right| = \left| \frac{\left[1 + \left(2x\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{2} \right|.$$

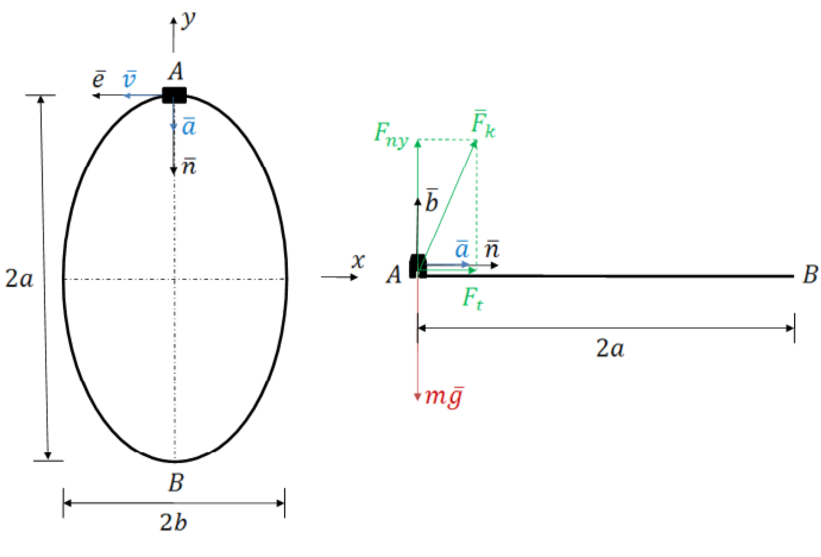
A görbületi sugár az $x = 0$ helyen

$$R_O = \frac{\left[1 + (2 \cdot 0)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{2} = \frac{1}{2}.$$

Ezt felhasználva:

$$F_n = m \cdot g + \frac{2m \cdot g \cdot h}{R_O} = 0,1 \cdot 10 + \frac{2 \cdot 0,1 \cdot 10 \cdot 1}{0,5} = 5\,[\mathrm{N}].$$

3. Mintafeladat. Az alábbi ábra a és b része egy ellipszis alakú gokart pálya felül- és oldalnézeti képét mutatja, amelyen egy gokart állandó v nagyságú sebességgel halad.



a, *b,*

Adatok:

$$m = 100\,[\mathrm{kg}]; \quad \mu_0 = 0,2; \quad g = 9,81; \left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right]; \quad a = 50\,[\mathrm{m}]; \quad b = 30\,[\mathrm{m}].$$

Mekkora lehet a gokart sebességének nagysága maximálisan ahhoz, hogy ne sodródjon ki a pálya A pontjában?

<u>**Megoldás**</u>:

Az ábra b részén feltüntettük a pálya A pontjában a gokartra ható erőket. A jármű mozgásegyenlete (Newton II. törvénye):

$$\sum_i \overline{F_i} = m \cdot \overline{g} + \overline{F_k} = m \cdot \overline{a}_A.$$

A fenti mozgásegyenlet az $(\overline{e}, \overline{n}, \overline{b})$ kísérő triéder által kifeszített természetes koordinátarendszerben az alábbi:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -m \cdot g \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ F_t \\ F_{ny} \end{pmatrix} = m \cdot \begin{pmatrix} a_e \\ a_n \\ a_b \end{pmatrix} = m \cdot \begin{pmatrix} a_A \\ \frac{v^2}{R_A} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ebből a vektoregyenletből az alábbi egyenletrendszert kapjuk:

$$\sum_i F_{ie} = 0 = m \cdot a_A$$

$$\sum_i F_{in} = m \cdot \frac{v^2}{R_A}$$

$$\sum_i F_{ib} = -m \cdot g + F_{ny} = 0.$$

Az első egyenletből $m \neq 0$ miatt azt kapjuk, hogy $a_A = 0$. Az utolsó egyenletből $F_{ny} = m \cdot g$. A gokart pontosan akkor nem sodródik ki, ha

$$|F_t| \leq \mu_0 \cdot F_{ny}.$$

Felhasználva az előbbi egyenletrendszer második és harmadik egyenletét, továbbá kihasználva, hogy $F_t > 0$ azt kapjuk, hogy

$$m \cdot \frac{v^2}{R_A} \leq \mu_0 \cdot m \cdot g,$$

amiből

$$v \leq \sqrt{\mu_0 \cdot g \cdot R_A}$$

adódik. Tehát a sebesség maximális értéke

$$v_{\max} = \sqrt{\mu_0 \cdot g \cdot R_A}.$$

A fenti összefüggésben R_A a pálya görbületi sugara az A pontban, amelyet az alábbiak szerint határozhatunk meg:

$$R_A = \left| \frac{\left[1 + \left(y'(0)\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{y''(0)} \right|.$$

A fenti összefüggésben az $y(x)$ függvény az ellipszis

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

alakú egyenletéből határozható meg. Feltételezve, hogy $y(x) \geq 0$ azt kapjuk, hogy

$$y(x) = a \cdot \sqrt{1 - \frac{x^2}{b^2}}.$$

Az $y(x)$ függvény x változó szerinti első és második deriváltja:

$$y'(x) = -\frac{a}{2b^2} \cdot \frac{2x}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{b^2}}}$$

$$y''(x) = -\frac{a}{2b^2} \cdot \frac{2 + \frac{2x^2}{b^2 \cdot \left(1 - \frac{x^2}{b^2}\right)}}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{b^2}}}.$$

Az a és b paraméterek értékét behelyettesítve, kiszámoljuk az $y(x)$ függvény első és második deriváltjának helyettesítési értékét az $x = 0$ helyen:

$$y'(0) = -\frac{50}{2 \cdot 30^2} \cdot \frac{2 \cdot 0}{\sqrt{1 - \frac{0^2}{30^2}}} = 0$$

$$y''(0) = -\frac{50}{2 \cdot 30^2} \cdot \frac{2 + \frac{2 \cdot 0^2}{30^2 \cdot \left(1 - \frac{0^2}{30^2}\right)}}{\sqrt{1 - \frac{0^2}{30^2}}} = -\frac{11}{198}.$$

A görbületi sugár a pálya A pontjában:

$$R_A = \left| \frac{\left[1 + \left(y'(0)\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{y''(0)} \right| = \left| \frac{\left[1 + 0^2\right]^{\frac{3}{2}}}{-\frac{11}{198}} \right| = \frac{198}{11} = 18 \, [\mathrm{m}].$$

Ezt felhasználva a keresett maximális sebesség:

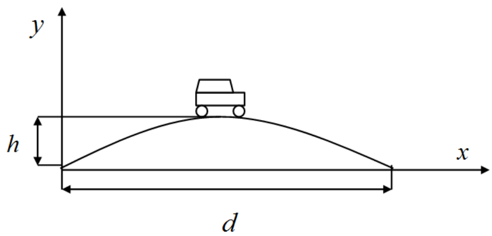
$$v_{\text{max}} = \sqrt{\mu_0 \cdot g \cdot R_A} = \sqrt{0,2 \cdot 9,81 \cdot 18} = \sqrt{35,316} \approx 5,94 \left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right].$$

Gyakorló feladatok.

6.2.1. **Feladat.** Az alábbi ábra egy folyó fölött átívelő közúti hidat szemléltet. Az ábrán vázolt koordinátarendszerben a híd útpályájának egyenlete

$$y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$$

alakú. A tervezés során a híd magasságát jellemző h paramétert szeretnék maximalizálni abból a célból, hogy a híd alatt a magasabb hajók is kényelmesen áthaladhassanak. A híd szélességét jellemző d paraméter értéke $d = 80\,[\mathrm{m}]$.



a) Fejezzük ki a pálya egyenletében szereplő a, b és c paramétereket az ismert d és az ismeretlen h paraméterekkel! (A pálya egyenletében ezt követően ismeretlenként már csak a h paraméter szerepel.)

b) Az utak építésére vonatkozó szabvány szerint az útpálya emelkedési szöge sehol sem haladhatja meg a $30°$-ot. Határozzuk meg, hogy legfeljebb mekkora lehet a híd h magassága úgy, hogy megfeleljünk a szabványnak!

c) Határozzuk meg a pálya görbületi sugarát a híd „közepén” a szabvány szerint engedélyezett maximális h érték mellett!

d) Határozzuk meg a híd „közepén” a pálya által a $v = 4\left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right]$ nagyságú sebességgel haladó, $m = 1.000\,[\mathrm{kg}]$ gépkocsira kifejtett nyomóerő nagyságát!

Megoldás:

a) A parabolára illeszkedik a $(0;0)$, $(80;0)$ és $(40;h)$ pontok mindegyike. Mivel a $(0;0)$ rajta van a parabolapályán, ezért $c = 0$. A másik két pont illeszkedéséből a

$$6.400a + 80b = 0$$
$$1.600a + 40b = h$$

egyenletekhez jutunk. Az egyenletrendszer megoldásával azt kapjuk, hogy

$$a = -\frac{h}{1.600} \qquad b = \frac{h}{20}.$$

Végül a pálya egyenlete:

$$y = -\frac{h}{1.600} \cdot x^2 + \frac{h}{20} \cdot x.$$

b) A szóbanforgó parabola alakú híd az

$$y(x) = -\frac{h}{1.600} \cdot x^2 + \frac{h}{20} \cdot x$$

függvény képe, melynek egy tetszőleges $P(x; y)$ pontbeli érintőjének a meredeksége az $y'(x)$ érték:

$$y'(x) = -\frac{h}{800} \cdot x + \frac{h}{20} \qquad \big(x \in [0; 80]\big).$$

Mivel $y'(x)$ egy elsőfokú függvény, melynek negatív a meredeksége, így a maximális értéke az $x = 0$ helyen van, ami $\frac{h}{20}$. A szabvány szerint az emelkedési szög sehol sem lehet $30°$-nál nagyobb, így teljesülnie kell a

$$\frac{h}{20} \leq \operatorname{tg} 30° \qquad \Rightarrow \qquad \frac{h}{20} \leq \frac{\sqrt{3}}{3}$$

egyenlőtlenségnek, amely megoldására azt kapjuk, hogy

$$h \leq 20 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} \approx 11,55\,[\mathrm{m}].$$

A híd magassága tehát legfeljebb $11,55\,[\mathrm{m}]$ lehet.

c) Mivel

$$y'(x) = -\frac{h}{800} \cdot x + \frac{h}{20} \qquad \Rightarrow \qquad y'(40) = 0$$

és

$$y''(x) = -\frac{h}{800} \qquad \Rightarrow \qquad y''(40) = -\frac{h}{800},$$

ezért a görületi sugár a híd „közepén”

$$R = \frac{1}{\frac{h}{20}} = \frac{20}{h} \approx \frac{20}{11,55} \approx 1,73\,[\mathrm{m}].$$

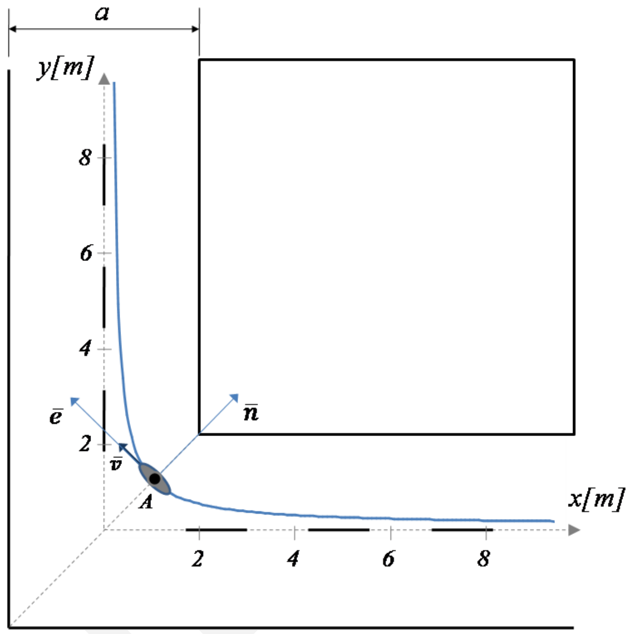
d) Mivel

$$\sum_i F_{in} = m \cdot g - F_n = m \cdot \frac{v^2}{R},$$

ezért

$$F_n = m \cdot g - m \cdot \frac{v^2}{R} = 1.000 \cdot 9,81 - 1.000 \cdot \frac{4^2}{1,73} \approx$$
$$\approx 1.000 \cdot (9,81 - 9,25) = 560\,[\mathrm{N}].$$

6.2.2. **Feladat.** Az alábbi ábra egy gördeszkás útvonalának felülnézeti képét mutatja, miközben az megkerül egy épületet az a szélességű úttesten haladva. A gördeszkás sebessége állandó v nagyságú, pályáját az ábrán vázolt koordinátarendszerben az $y(x) = \frac{1}{x}$ függvény írja le.



Adatok:

$$m = 50\,[\mathrm{kg}]; \qquad \mu_0 = 0,1; \qquad g = 9,81\left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right]; \qquad a = 4\,[\mathrm{m}].$$

a) Mekkora a görbületi sugár a pálya A pontjában?

b) Mekkora lehet a gördeszkás sebességének nagysága maximálisan, hogy még ne csússzon ki a pálya A pontjában?

Megoldás:

a) Mivel $y(x) = \dfrac{1}{x} = x^{-1}$, ezért

$$y'(x) = -1 \cdot x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$$

és

$$y''(x) = 2 \cdot x^{-3} = \frac{2}{x^3}.$$

A fentiek felhasználásával azt kapjuk, hogy

$$y'(1) = -\frac{1}{1^2} = -1, \qquad y''(1) = \frac{2}{1^3} = 2.$$

A görbületi sugár az A pontban

$$R = \left| \frac{\left[1 + \left(y'(1)\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{y''(1)} \right| = \left| \frac{\left[1 + (-1)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{2} \right| = \sqrt{2}\,[\mathrm{m}].$$

b) A gördeszka mozgásegyenlete (Newton II. törvénye):

$$\sum_i \overline{F}_i = m \cdot g + \overline{F}_k = m \cdot \overline{a}_A.$$

A fenti mozgásegyenlet az $(\overline{e}, \overline{n}, \overline{b})$ kísérő triéder által kifeszített koordinátarendszerben:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -m \cdot g \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ F_t \\ F_{ny} \end{pmatrix} = m \cdot \begin{pmatrix} a_e \\ a_n \\ a_b \end{pmatrix} = m \cdot \begin{pmatrix} a_A \\ \frac{v^2}{R_A} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

A fenti vektoregyenletből az alábbi egyenletrendszert kapjuk:

$$\begin{aligned} 0 &= m \cdot a_e = m \cdot a_A \\ F_t &= m \cdot a_n = m \cdot \frac{v^2}{R_A} \\ 0 &= m \cdot a_b = -m \cdot g + F_{ny}. \end{aligned}$$

Az első egyenletből $m \neq 0$ miatt azt kapjuk, hogy $a_A = 0$. A harmadik egyenletből $F_{ny} = m \cdot g$ adódik. A gokart akkor és csakis akkor nem sodródik ki, ha

$$|F_t| \leq \mu_0 \cdot F_{ny} = \mu_0 \cdot m \cdot g$$

Mivel $F_t > 0$ azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} m \cdot \frac{v^2}{R_A} &\leq \mu_0 \cdot m \cdot g \\ v &\leq \sqrt{\mu_0 \cdot g \cdot R_A}. \end{aligned}$$

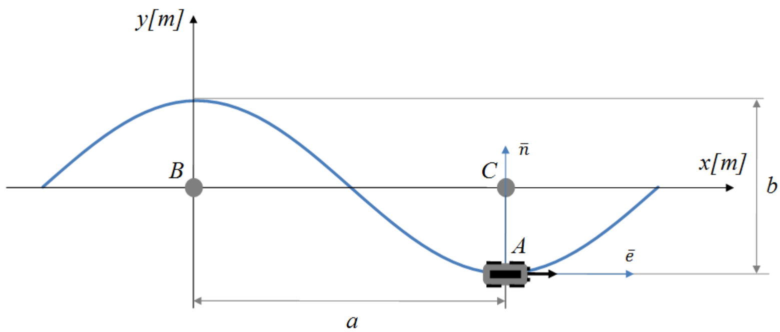
Tehát a sebesség maximális értéke

$$v_{\max} = \sqrt{\mu_0 \cdot g \cdot R_A},$$

ahol R_A a görbületi sugár értéke az A pontban. Ezt a feladat $a)$ részében már kiszámoltuk, így a sebesség maximális értéke:

$$v_{\text{max}} = \sqrt{0,1 \cdot 9,81 \cdot \sqrt{2}} \approx 1,18 \left[\frac{\text{m}}{\text{s}}\right].$$

6.2.3. **Feladat.** Az alábbi ábrán látható szlalom pályán egy sportkocsit tesztelnek. A B és C jelű bóják távolsága a, a gépkocsi oldalirányú kitérését jellemző távolság b. A sportkocsi állandó v nagyságú sebességgel halad.



Adatok:

$$m = 800\,[\text{kg}]; \qquad \mu_0 = 0,2; \qquad g = 9,81 \left[\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right];$$
$$a = 15\,[\text{m}]; \qquad b = 10\,[\text{m}].$$

a) Határozzuk meg a pálya

$$y = D \cdot \cos(Ex)$$

alakú egyenletében szereplő D és E paramétereket!

b) Határozzuk meg a görbületi sugarat a pálya A pontjában!

c) Mekkora lehet a kocsi sebességének nagysága maximálisan, hogy még ne sodródjon ki a pálya A pontjában?

Megoldás:

a) A pálya ívét leíró függvény:

$$y(x) = 5 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{15}x\right).$$

b) Az $y(x)$ függvény első és második deriváltja:

$$y'(x) = -\frac{\pi}{3} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{15}x\right)$$
$$y''(x) = -\frac{\pi^2}{45} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{15}x\right).$$

Ezen derivált függvények helyettesítési értéke az $x = 15$ helyen:

$$y'(15) = 0; \qquad y''(15) = \frac{\pi^2}{45}.$$

Felhasználva a kapott eredményeket a göbrületi sugár a pálya A pontjában:

$$R_A = \frac{45}{\pi^2} \approx 4,56\,[\mathrm{m}].$$

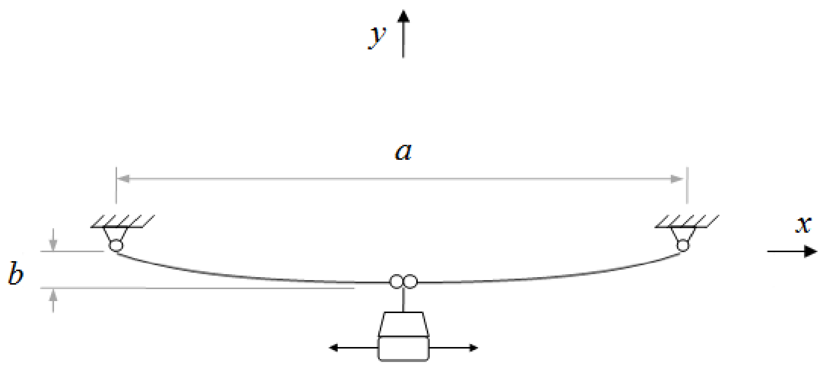
c) A keresett maximális sebesség:

$$v_{\max} = \sqrt{\mu_0 \cdot g \cdot R_A} \approx 2,99\left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right].$$

6.2.4. **Feladat.** Az alábbi ábra egy drótkötélpályát szemléltet, amelyen szén szállítására szolgáló csillék haladnak. Az erősen kifeszített drótkötél alakját a rajta haladó csille elhanyagolható mértékben torzítja, így az

$$y = \mathrm{ch}\,(Ax) + B$$

alakú.



Adatok:

$$A = \frac{2\mathrm{arch}(1+b)}{a}; \quad B = -(1+b); \quad a = 80\,[\mathrm{m}].$$

a) A drótkötélpályákra vonatkozó szabvány szerint a pálya emelkedési szöge sehol sem haladhatja meg az 3°-ot. Határozzuk meg, hogy legfeljebb mekkora lehet a drótkötél „belógásának” b nagysága ahhoz, hogy megfeleljünk a szabványnak!

b) Határozzuk meg a pálya görbületi sugarát annak „középső” pontjában a maximálisan megengedett b érték esetén!

c) Határozzuk meg a kötélpálya „közepén” a kötél által a $4\left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right]$ nagyságú sebességgel haladó, $m = 800\,[\mathrm{kg}]$ tömegű csillére kifejtett erő nagyságát!

A feladat megoldása előtt emlékeztetünk az $\operatorname{sh} x$ (szinusz hiperbolikusz) és $\operatorname{ch} x$ (koszinusz hiperbolikusz) függvények definíciójára:

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$
$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

Emlékeztetünk továbbá arra is, hogy

$$(\operatorname{sh} x)' = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \operatorname{ch} x$$

és

$$(\operatorname{ch} x)' = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \operatorname{sh} x.$$

Megoldás:

a) A kötel maximális belógása: $b = 0,36\,[\mathrm{m}]$.

b) Mivel $A \approx 0,0206\,\left[\frac{1}{\mathrm{m}}\right]$ és $B \approx -1,36\,[\mathrm{m}]$, ezért

$$y(x) = \operatorname{ch}(0,0206x) - 1,36.$$

Ezt felhasználva

$$y'(x) = 0,0206 \cdot \operatorname{sh}(0,0206x),$$

illetve

$$y''(x) = 0,0206 \cdot \operatorname{ch}(0,0206x) \cdot 0,0206 = 0,0206^2 \cdot \operatorname{ch}(0,0206x).$$

Behelyettesítve a megfelelő adatokat a görbületi sugár a pálya „középső" pontjában: $R = 1.729,72\,[\mathrm{m}]$.

c) A keresett erő nagyságát a 2. mintafeladathoz hasonlóan az

$$F_n = m \cdot g + m \cdot \frac{v^2}{R}$$

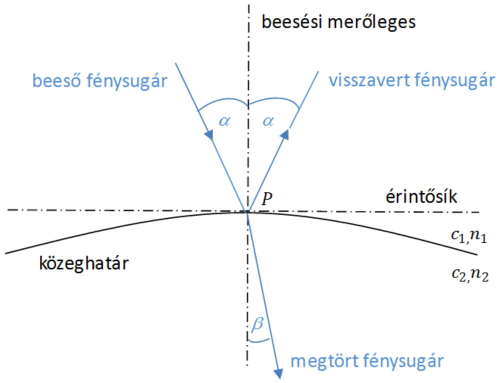
összefüggéssel kapjuk meg. Behelyettesítve a megfelelő adatokat

$$F_n = 7855,4\,[\mathrm{N}]$$

adódik.

6.3. Fénytörés és visszaverődés

Elméleti összefoglaló. Vegyünk két optikailag eltérő tulajdonságú közeget. Jelölje c_1 és c_2 a fény terjedési sebességét az egyik és a másik közegben. Tapasztalat szerint a két közeg határán a fénysugár részben megtörik és behatol a közegbe, részben pedig visszaverődik a közeghatárról.



Állítsunk merőlegest a két közeg határfelületére abban a pontban, ahova a fénysugár érkezik! Ez az egyenes a *beesési merőleges*. A beeső (visszavert) fénysugár és a beesési merőleges által bezárt szöget *beesési (visszaverődési) szög*nek (α), a megtört fénysugár és a beesési merőleges által bezártat *törési szög*nek (β) nevezzük. A fény törésére és visszaverődésére teljesülnek az alábbi egyszerű törvények:

1. A beeső, visszavert és megtört fénysugár valamint a beesési merőleges egy síkban vannak.
2. A beesési és visszaverődési szög egymással egyenlő.
3. A beesési és a törési szög szinuszának hányadosa a két közegre jellemző állandó, amelyet a 2-es közeg 1-es közegre vonatkozó *relatív törésmutató*jának nevezünk.

A 3. törvény alapján:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = n_{21} = \frac{c_1}{c_2}.$$

Ez az összefüggés a *Snellius–Descartes törvény*. Az összefüggésből leolvasható, hogy az n_{21} relatív törésmutató megegyezik a c_1 és c_2 fénysebességek hányadosával. Szokás bevezetni az *abszolút törésmutató* fogalmát is, mint egy adott közeg vákuumra vonatkozó relatív törésmutatóját. Például az egyes közeg abszolút törésmutatója:

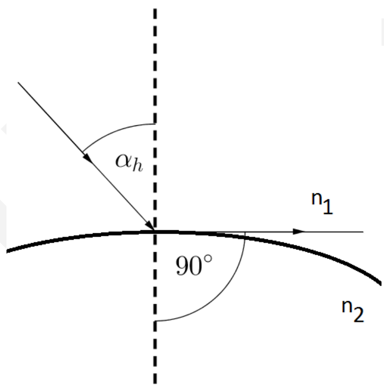
$$n_1 = n_{10} = \frac{c_0}{c_1}.$$

A fenti összefüggésben c_0 a fény terjedési sebessége vákuumban. A fentiekből adódóan a relatív és abszolút törésmutatók között fennáll az alábbi összefüggés:

$$n_{21} = \frac{n_2}{n_1} = \frac{c_1}{c_2}.$$

Vizsgáljuk meg részletesebben azt az esetet, amikor a fény egy nagyobb abszolút törésmutatójú közegből egy kisebb abszolút törésmutatójú közegbe lép! Ekkor a törési szög nagyobb, mint a beesési szög: $\beta > \alpha$. Ha növeljük a beesési szöget, a törési szög is nő, mígnem eléri a $90°$-ot. Ekkor a fény nem lép be a második közegbe, hanem annak felülete mentén halad tovább. Azt a beesési szöget, amelynél a törési szög $90°$ *határszög*nek nevezzük. A határszög értékére teljesül az alábbi összefüggés:

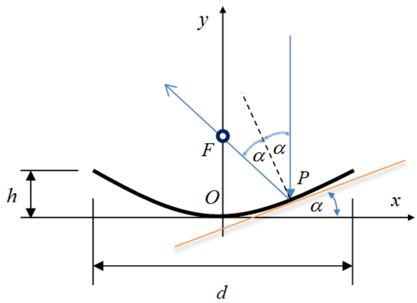
$$\frac{\sin\alpha_h}{\sin 90°} = n_{21} \quad \Rightarrow \quad \sin\alpha_h = n_{21} = \frac{n_2}{n_1}.$$



Ha a beesési szög nagyobb vagy egyenlő, mint a határszög, akkor a fénysugár teljes egészében visszaverődik a közeghatárról. Ekkor *teljes visszaverődés*ről beszélünk.

Szükséges matematikai ismeretek. Differenciálszámítás, elemi geometriai ismeretek, térgörbék érintési paraméterei, szélsőértékszámítás.

Mintafeladat. Az alábbi ábra egy napkollektort szemléltet. A kollektor egy hosszú, vályú alakú, parabola keresztmetszetű tükörből, és egy a tükör fókusztengelyében elhelyezett, vízzel töltött csőből áll. (A cső áthalad a parabola F fókuszpontján, és merőleges az ábra síkjára.) Egy mozgató mechanizmus a tükröt mindig a Nap irányába fordítja. Közismert tény, hogy a tükör a tengelyével (y) párhuzamos sugárzást az F fókuszpontjába gyűjti. A fókuszált napsugárzás hatására a csőben lévő víz gőzzé alakul, amely egy turbinát meghajtva villamos energiát termel.



Adatok:

$$d = 3\,[\mathrm{m}]; \qquad h = 0,4\,[\mathrm{m}].$$

a) Számoljuk ki az ábrán adott d és h méretekből a parabola

$$y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$$

alakú egyenletében szereplő a, b és c paramétereket, majd írjuk fel a parabola egyenletét!

b) Határozzuk meg a parabola $x_P = 0,75\,[\mathrm{m}]$ abszcisszájú P pontjában húzott érintőjének meredekségét és írjuk fel az érintő egyenes egyenletét!

c) Adjuk meg a parabola fókuszpontjának koordinátáit!

d) A fókuszpont és a P pont ismeretében írjuk fel a visszavert fénysugár egyenletét!

Megoldás:

a) Az ábráról leolvasható, hogy a parabolára illeszkednek a $(0; 0)$, $(-1,5; 0,4)$ és $(1,5; 0,4)$ pontok. Ezt felhasználva felírhatók a

$$\begin{aligned} 0 &= c \\ 0,4 &= 2,25a + 1,5b + c \\ 0,4 &= 2,25a - 1,5b + c \end{aligned}$$

egyenletek. Az első egyenlet eredményét a másik két egyenletbe behelyettesítve, majd azokat egyenletrendszerben megoldva

$$a = \frac{8}{45}; \qquad b = 0; \qquad c = 0$$

adódik. A keresett egyenlet tehát

$$y = \frac{8}{45} \cdot x^2.$$

b) A parabola grafikonját megadó függvény

$$y(x) = \frac{8}{45} \cdot x^2,$$

melynek a deriváltja

$$y'(x) = \frac{16}{45} \cdot x,$$

így a meredekség a P pontban

$$m = y'(0,75) = \frac{16}{45} \cdot \frac{3}{4} = \frac{4}{15}.$$

A keresett egyenes egyenlete

$$y = y_0 + m \cdot (x - x_0),$$

ahol y_0 a P pont ordinátája (y koordinátája). Mivel

$$y_0 = \frac{8}{45} \cdot \frac{9}{16} = \frac{1}{10},$$

ezért a keresett egyenes egyenlete

$$y = \frac{1}{10} + \frac{4}{45} \cdot \left(x - \frac{3}{4}\right) \quad \Rightarrow \quad y = \frac{4}{45}x + \frac{1}{30}.$$

c) Ha a parabola egyenletét

$$y = \frac{1}{2p} \cdot x^2$$

alakban írjuk fel, akkor $p = \frac{45}{16}$. Ekkor a fókuszpont

$$F = \left(0; \frac{p}{2}\right) = \left(0; \frac{45}{32}\right) \text{ [m]}.$$

d) A P pont koordinátái:

$$P = \left(\frac{3}{4}; \frac{8}{45} \cdot \frac{9}{16}\right) = \left(\frac{3}{4}; \frac{1}{10}\right) \text{ [m]}.$$

A P és F pontokon áthaladó egyenes egy irányvektora

$$\overline{v} = \left(\frac{3}{4}; -\frac{209}{160}\right),$$

így a keresett egyenes egyenlete:

$$y = \frac{45}{32} - \frac{209}{160} \cdot x.$$

Gyakorló feladatok.

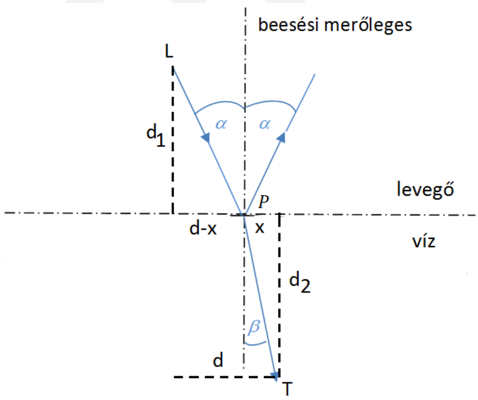
6.3.1. **Feladat.** A levegőben elhelyezett lézerrel – amelyből kilépő fénysugarak egyéb kedvező tulajdonságaik mellett nagy ponotssággal párhuzamosak – akarunk megvilágítani („eltalálni”) egy víz alatti pontszerű tárgyat. Bizonyítsuk be, hogy teljesülnie kell az elméleti összefoglalóban szereplő

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{c_1}{c_2}$$

összefüggésnek! A bizonyítás során abból az alapelvből induljunk ki, hogy a fénysugár mindig azon az útvonalon halad, amelyen az egyik pontból a másik pontba a lehető legrövidebb idő alatt jut el. A szóban forgó lézer fényének terjedési sebessége levegőben $c_1 = 3 \cdot 10^8 \left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right]$, vízben $c_2 = 2,25 \cdot 10^8 \left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right]$.

<u>**Megoldás**</u>:

Tekintsük az alábbi ábrát:



Az ábrán L jelöli a lézer–fényforrást, T pedig a megvilágítandó pontszerű tárgyat. Az ábrán használt jelölésekkel a fény terjedési ideje

$$\begin{aligned} t = t_1 + t_2 = \frac{s_1}{c_1} + \frac{s_2}{c_2} &= \\ = \frac{\sqrt{d_1^2 + (d-x)^2}}{c_1} &+ \frac{\sqrt{d_2^2 + x^2}}{c_2}. \end{aligned}$$

A kapott mennyiséget tekinthetjük egy x-től függő függvénynek, így a

$$t(x) = \frac{\sqrt{d_1^2 + (d-x)^2}}{c_1} + \frac{\sqrt{d_2^2 + x^2}}{c_2}$$

függvény minimumát keressük, amihez meg kell oldanunk a $t'(x) = 0$ egyenletet. Mivel

$$t'(x) = \frac{x-d}{c_1 \cdot \sqrt{d_1^2 + (d-x)^2}} + \frac{x}{c_2 \cdot \sqrt{d_2^2 + x^2}},$$

továbbá az ábra alapján

$$\frac{d-x}{\sqrt{d_1^2 + (d-x)^2}} = \sin\alpha \quad \text{és} \quad \frac{x}{\sqrt{d_2^2 + x^2}} = \sin\beta,$$

ezért

$$t'(x) = -\frac{\sin\alpha}{c_1} + \frac{\sin\beta}{c_2}.$$

Természetesen α és β is x-től függő értékek, ezért helyesebb a

$$t'(x) = -\frac{\sin\big(\alpha(x)\big)}{c_1} + \frac{\sin\big(\beta(x)\big)}{c_2}$$

jelölés. A $t'(x) = 0$ egyenlet megoldása:

$$-\frac{\sin\big(\alpha(x)\big)}{c_1} + \frac{\sin\big(\beta(x)\big)}{c_2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\sin\big(\alpha(x)\big)}{c_1} = \frac{\sin\big(\beta(x)\big)}{c_2},$$

amiből azt kapjuk, hogy

$$\frac{\sin\big(\alpha(x)\big)}{\sin\big(\beta(x)\big)} = \frac{c_1}{c_2} = \frac{4}{3}.$$

Azon az $x = x_0$ helyen, amely eleget tesz a fenti egyenletnek $t''(x_0) > 0$, így valóban minimumot kaptunk. A kapott összefüggés az elméleti összefoglalóban is említett, jól ismert Snellius–Descartes törvény. A kapott $\frac{4}{3}$ érték a víznek a levegőre vonatkoztatott törésmutatója, ami szintén összhangban van az elméleti részben leírtakkal.

6.3.2. **Feladat.** Az f fókusztávolságú lencsétől t távolságra lévő tárgy k képtávolsága kielégíti az

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{t} + \frac{1}{k}$$

egyenletet. Ha f adott, akkor mennyi a képtávolság és a tárgytávolság összegének minimuma?

Megoldás:

Az

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{t} + \frac{1}{k}$$

egyenlet mindkét oldalát beszorozva a közös nevezővel azt kapjuk, hogy

$$t \cdot k = f \cdot k + f \cdot t.$$

A kapott összefüggésből fejezzük ki t-t:

$$t \cdot k - f \cdot t = f \cdot k \quad \Rightarrow \quad t \cdot (k - f) = f \cdot k \quad \Rightarrow \quad t = \frac{f \cdot k}{k - f}.$$

A $t + k$ érték minimumát keressük. Ehhez felhasználva az előbb kapott eredményt azt kapjuk, hogy

$$t + k = \frac{f \cdot k}{k - f} + k.$$

Ne feledkezzünk meg arról, hogy f értékét ismertnek tekintjük, így egy k-tól függő függvényt kaptunk. Vezessük be az

$$a(k) = \frac{f \cdot k}{k - f} + k$$

jelölést. Az a függvény deriváltja

$$a'(k) = \frac{f \cdot (k - f) - f \cdot k}{(k - f)^2} + 1 = \frac{f \cdot k - f^2 - f \cdot k + (k - f)^2}{(k - f)^2} =$$
$$= \frac{-f^2 + k^2 - 2 \cdot k \cdot f + f^2}{(k - f)^2} = \frac{k^2 - 2 \cdot k \cdot f}{(k - f)^2}.$$

Az $a'(k)$ zérushelye:

$$\frac{k^2 - 2 \cdot k \cdot f}{(k - f)^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad k^2 - 2 \cdot k \cdot f = 0 \quad \Rightarrow \quad k \cdot (k - 2f) = 0,$$

amiből azt kapjuk, hogy $k = 0$ vagy $k = 2f$.
Az $a(k)$ függvény második deriváltja

$$a''(k) = \frac{(2k - 2f) \cdot (k - f)^2 - (k^2 - 2kf) \cdot 2 \cdot (k - f)}{(k - f)^4} =$$
$$= \frac{2k^2 - 2kf - 2kf + 2f^2 - 2k^2 + 4kf}{(k - f)^3} = \frac{2f^2}{(k - f)^3}.$$

Ezt felhasználva
$$a''(k) = \frac{2f^2}{f^3} = \frac{2}{f} > 0,$$
így $a(k)$-nak valóban minimuma van $2f$-ben. Ekkor a tárgy- és képtávolság összegének minimuma
$$t + k = \frac{f \cdot k}{k - f} + k = \frac{2f^2}{f} + 2f = 4f,$$
azaz a keresett távolság a fókusztávolság négyszerese.

6.4. A legkisebb négyzetek módszerének alkalmazása

Elméleti összefoglaló. A legkisebb négyzetek módszerét széles körben alkalmazzák mérési adatokból álló pontsorozatok közelítésére. A közelítéshez felhasznált modellfüggvény általában valamilyen, a konkrét feladathoz kapcsolódó elméleti megfontolásból ismert.
A továbbiakban azzal az egyszerű esettel foglalkozunk, amikor a modellfüggvényben egyetlen ismeretlen paraméter szerepel, azaz amikor az megadható $f(x) = f(x, a)$ alakban.
Az eljárás során a célunk azon a paraméter meghatározása, amely esetén az $f(x)$ függvény „négyzetesen” legjobban közelíti az adott pontsorozatot. A módszer során a kitűzött feladat tehát adott

$$(x_1; y_1), (x_1; y_1), \dots, (x_n; y_n)$$

pontsorozat esetén a

$$H(a) = \sum_{k=1}^{n} \big(y_k - f(x_k, a)\big)^2$$

függvény minimumának megkeresése. Ezt a módszert a *legkisebb négyzetek módszeré*nek nevezzük. A szélsőérték megkeresését elvégezhetjük a differenciálszámítás eszközeivel, az egyváltozós függvények szélsőértékszámítása során tanult módszerekkel.

Szükséges matematikai ismeretek. Deriválási szabályok, szélsőérték létezése szükséges és elégséges feltételeinek alkalmazása, egyváltozós függvények ábrázolása.

1. Mintafeladat. Egy villanymotorban található gerjesztő tekercs ohm-os ellenállását kívánjuk megmérni. A mérések során egy áramgenerátorral különböző, ismert nagyságú egyenáramokat folyatunk át a tekercsen, miközben mérjük a tekercsen eső feszültségeket. A mérési eredményeket az alábbi táblázat foglalja össze:

I[A]	1	2	3	4	5,5	6	9,2	10
U[V]	0,0166	0,033	0,05	0,066	0,092	0,099	0,153	0,165

A fenti adatsorból, Ohm törvényének ismeretében, felhasználva a legkisebb négyzetek módszerét, határozzuk meg a gerjesztő tekercs ellenállását!

Megoldás:

Ohm törvénye az alábbi alakban írható fel:

$$U = R \cdot I,$$

ahol I a fogyasztón (jelen esetben tekercsen) átfolyó áram erőssége, U a fogyasztón eső feszültség, R a fogyasztó elektromos ellenállása. Jelen esetben tehát a modellfüggvény:

$$U(I) = U(I, R) = R \cdot I.$$

Az elméleti összefoglalóban szereplő $H(R)$ függvényre az adatok behelyettesítése után azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} H(R) = {} & (0,0166 - R)^2 + (0,033 - 2R)^2 + (0,05 - 3R)^2 + \\ & + (0,066 - 4R)^2 + (0,092 - 5,5R)^2 + (0,099 - 6R)^2 + \\ & + (0,153 - 9,2R)^2 + (0,165 - 10R)^2. \end{aligned}$$

A $H(R)$ függvény deriváltja:

$$\begin{aligned} H'(R) = {} & -2 \cdot (0,0166 - R) - 4 \cdot (0,033 - 2R) - 6 \cdot (0,05 - 3R) - \\ & - 8 \cdot (0,066 - 4R) - 11 \cdot (0,092 - 5,5R) - \\ & - 12 \cdot (0,099 - 6R) - 18,4 \cdot (0,153 - 9,2R) - \\ & - 20 \cdot (0,165 - 10R) = -9,3084 + 561,78R. \end{aligned}$$

A $H(R)$ függvénynek ott lehet szélsőértéke, ahol a deriváltja zérus, azaz meg kell oldanunk a $H'(R) = 0$ egyenletet:

$$-9,3084 + 561,78R = 0 \qquad \Rightarrow \qquad R \approx 0,0166\,[\Omega].$$

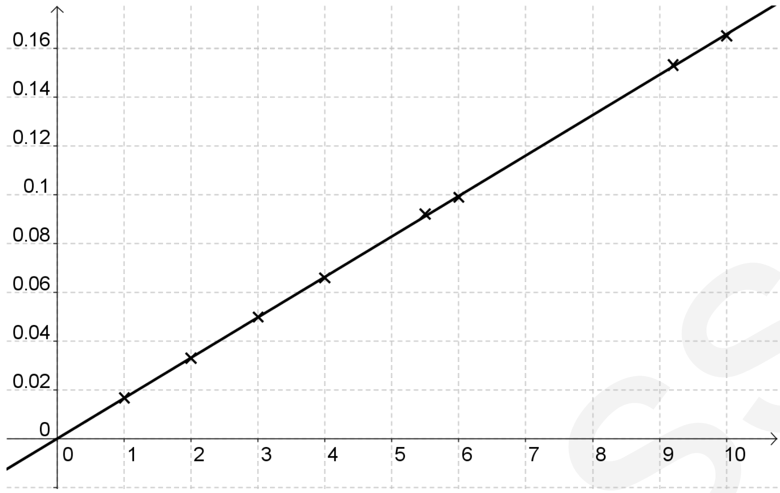
Mivel

$$H''(R) = 561,78 > 0,$$

ezért a H függvénynek valóban minimum helye van az $R \approx 0,0166$ helyen. A keresett függvény tehát:

$$U(I) = 0,0166 \cdot I.$$

A mérésekkel kapott pontsorozatot, és azokat „négyzetesen” legjobban közelítő lineáris függvényt az alábbi ábrán szemléltetjük:



2. Mintafeladat. Egy atomreaktorban bekövetkező baleset során radioaktív anyag kerül a légkörbe. Egy, a reaktortól 200 $[\mathrm{km}]$ távolságban lévő kutatóintézetben, ahol még nem tudnak a balesetről, a levegőben észlelik a megnövekedett radioaktivitást. Ezt követően egy öt mérésből álló sorozatot indítanak úgy, hogy az egymást követő aktivitás mérések között pontosan egy napos időkülönbség legyen. Az általuk kapott eredményeket az alábbi táblázat tartalmazza:

$\mathrm{t[nap]}$	0	1	2	3	4
$\mathrm{A[Bq/m^3]}$	$10,00$	$9,17$	$8,41$	$7,72$	$7,10$

Megjegyezzük, hogy 1 $[\mathrm{Bq/m^3}]$ az aktivitás, ha 1 $[\mathrm{m^3}]$ levegőben másodpercenként 1 $[\mathrm{db}]$ radioaktív bomlás történik. A fenti adatsorból a bomlástörvény ismeretében, alkalmazva a legkisebb négyzetek módszerét sikerült meghatározniuk a számukra ismeretlen izotóp felezési idejét. Határozzuk meg mi is a felezési időt! A felezési idő ismeretében következtessünk arra, hogy milyen izotóp kerülhetett a légkörbe?

<u>**Megoldás**</u>:

A bomlási törvény alakja az alábbi:

$$A(t) = A(0) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}},$$

ahol $A(0)$ és $A(t)$ a 0 és t időpillanatban mért aktivitás, T pedig az izotóp felezési ideje. Jelen esetben $A(0) = 10$, így a fenti függvény az alábbi alakot ölti:

$$A(t) = 10 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}.$$

Tekintsük a

$$H(T) = \left(9,17 - 10 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{T}}\right)^2 + \left(8,41 - 10 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{T}}\right)^2 + \\ + \left(7,72 - 10 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{T}}\right)^2 + \left(7,1 - 10 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{4}{T}}\right)^2$$

függvényt. A $H(T)$ függvény deriváltja:

$$H'(T) = 2 \cdot \left(9,17 - 10 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{T}}\right) \cdot \left(-10 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{T}} \cdot \ln\frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{T^2}\right)\right) + \\ + 2 \cdot \left(8,41 - 10 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{T}}\right) \cdot \left(-10 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{T}} \cdot \ln\frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{T^2}\right)\right) + \\ + 2 \cdot \left(7,72 - 10 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{T}}\right) \cdot \left(-10 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{T}} \cdot \ln\frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{T^2}\right)\right) + \\ + 2 \cdot \left(7,1 - 10 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{4}{T}}\right) \cdot \left(-10 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{4}{T}} \cdot \ln\frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{T^2}\right)\right).$$

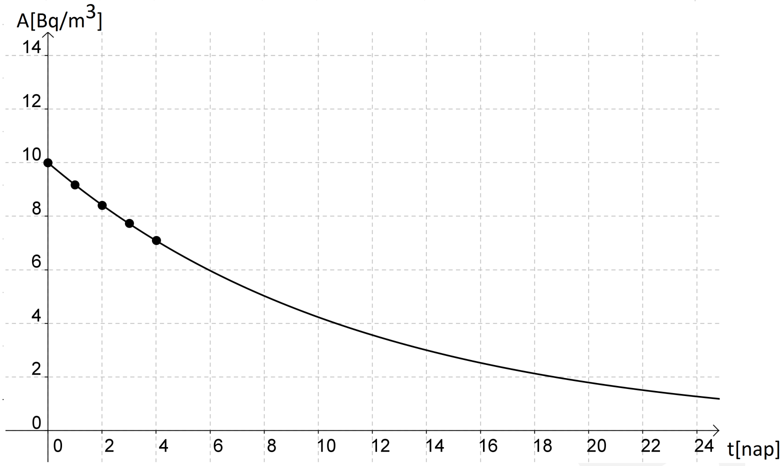
A $H'(T) = 0$ egyenlet egyetlen valós megoldása, melyet egy alkalmasan választott matematikai szoftver (Maple, Matlab, Geogebra, Wolfram alpha) vagy valamilyen numerikus matematikai eszköz (például Newton-Raphson módszer) segítségével tudunk meghatározni:

$$T \approx 8,06.$$

A keresett felezési idő tehát $T \approx 8,06\,[\text{nap}]$. Ez alapján a légkörbe került izotóp ^{131}I.
A felezési idő ismeretében azt kapjuk, hogy a keresett $A(t)$ függvény:

$$A(t) = 10 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}} = 10 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{8,06}}.$$

Az alábbi ábrán látható a mért pontsorozat és a legkisebb négyzetek módszerével kapott függvény grafikonja:



Gyakorló feladatok.

6.4.1. **Feladat.** Baktériumok szaporodását jól modellezhetjük az

$$N(t) = N(t, a) = a \cdot 2^t$$

függvénykapcsolattal. Négy egymást követő napon méréseket végeztünk a baktériumok számára vonatkozólag. A mérési eredményeket az alábbi táblázat tartalmazza:

t[nap]	1	2	3	4
N[ezer db]	3	6	10	14

A legkisebb négyzetek módszerének felhasználásával, határozzuk meg az ismeretlen a paraméter értékét, majd ábrázoljuk a kapott függvénykapcsolatot!

Megoldás:

Az elméleti összefoglalóban szereplő H függvény:

$$H(a) = (3 - 2a)^2 + (6 - 4a)^2 + (10 - 8a)^2 + (14 - 16a)^2.$$

A H függvény deriváltja

$$\begin{aligned} H'(a) = {} & 2 \cdot (3 - 2a) \cdot (-2) + 2 \cdot (6 - 4a) \cdot (-4) + \\ & + 2 \cdot (10 - 8a) \cdot (-8) + 2 \cdot (14 - 16a) \cdot (-16). \end{aligned}$$

Ha elvégezzük az összevonást, akkor azt kapjuk, hogy

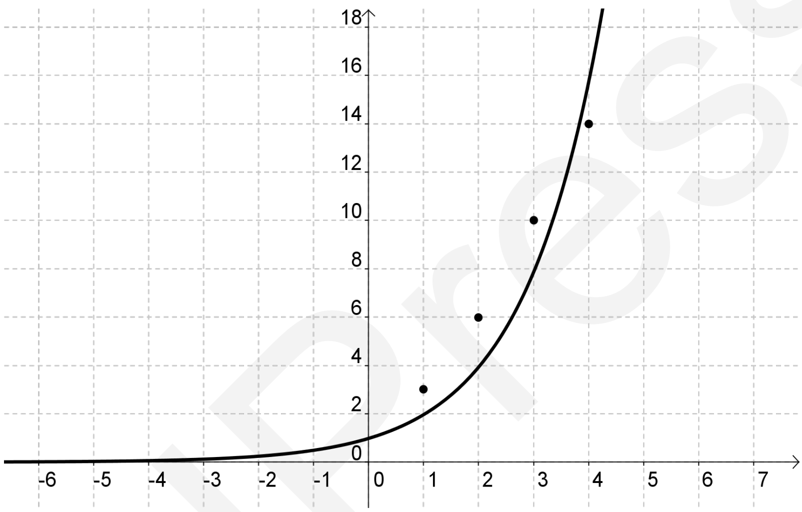
$$H'(a) = 680a - 668.$$

Ennek a zérushelye

$$680a - 668 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad 680a = 668 \qquad \Rightarrow \qquad a = \frac{668}{680} = \frac{167}{170},$$

így a keresett ismeretlen paraméter $a = \dfrac{167}{170}$.
Mivel $H''(a) = 680 > 0$, ezért valóban minimum helye van a H függvénynek, tehát a keresett függvény

$$N(t) = \frac{167}{170} \cdot 2^t.$$



6.4.2. **Feladat.** Egy dinamikusan fejlődő vállalat éves nyereségét (millió forintban) lejegyezték az indulást követő első 4 évben. Az adatokat az alábbi táblázat tartalmazza:

t[év]	1	2	3	4
P[m Ft]	3	6	12	14

A szakemberek az eltelt idő és a profit között lineáris kapcsolatot feltételeznek. Ezt alapul véve, a legkisebb négyzetek módszerét alkalmazva, határozzuk meg a

$$P(t) = P(t, m) = m \cdot t$$

függvény ismeretlen m paraméterét, majd a kapott eredmény felhasználásával adjunk becslést arra vonatkozólag, hogy várhatóan mekkora nyereséggel számolhat a cég az indulást követően 5 évvel.

Megoldás:

Az adatok behelyettesítése után az elméleti összefoglalóban szereplő H függvény:

$$H(m) = (3-m)^2 + (6-2m)^2 + (12-3m)^2 + (14-4m)^2.$$

A H függvény deriváltja

$$H'(m) = 2\cdot(3-m)\cdot(-1) + 2\cdot(6-2m)\cdot(-2) + \\ + 2\cdot(12-3m)\cdot(-3) + 2\cdot(14-4m)\cdot(-4).$$

Ha elvégezzük az összevonást, akkor azt kapjuk, hogy

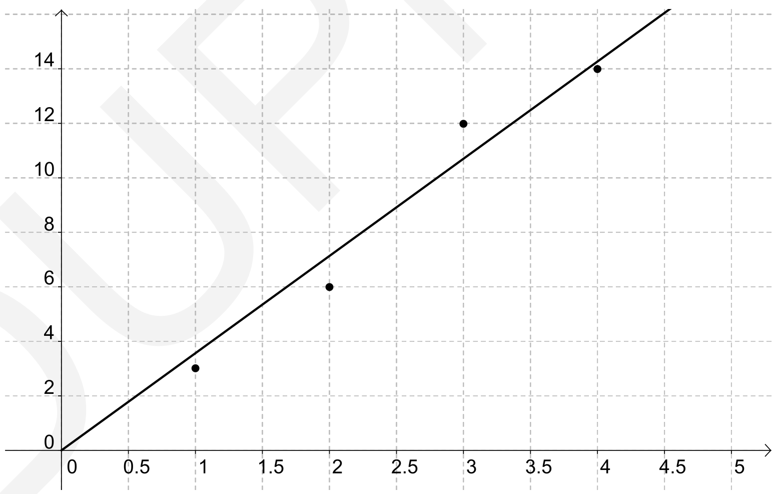
$$H'(m) = 60m - 214.$$

Ennek a zérushelye

$$60m - 214 = 0 \quad \Rightarrow \quad 60m = 214 \quad \Rightarrow \quad m = \frac{214}{60} = \frac{107}{30},$$

így a keresett ismeretlen paraméter $m = \frac{107}{30}$, az egyenes egyenlete

$$P(t) = \frac{107}{30}\cdot t.$$



A $P(t)$ függvény ismeretében azt kapjuk, hogy

$$P(5) = \frac{107}{30}\cdot 5 = \frac{107}{6} \approx 17,83,$$

azaz a vállalat indulása után 5 évvel a várható profit: $17,83$ millió forint.

6.5. Szélsőértékszámítási feladatok a mérnöki gyakorlatban

Szükséges matematikai ismeretek. Függvényvizsgálat, deriválási szabályok, szélsőértékszámítás.

1. Mintafeladat. Egy patak vizét egy 100 hektoliteres tárolóba gyűjtik össze. Az összegyűlt víz egy részét öntözésre használják, így azt a tárolóból tovább vezetik egy rizsföldre. A tárolóban lévő folyadék mennyisége (hektoliterben) az idő függvényében a

$$V(t) = 2t^3 - 21t^2 + 60t$$

függvény szerint alakul a $[0; 6]$ időintervallumban, ahol t a megfigyelés óta eltelt napok számát jelenti.

a) Mennyi folyadék volt a tárolóban a megfigyelés kezdetén, a megfigyelés kezdete után egy nappal és a megfigyelés végén?

b) Adjuk meg a folyadék mennyiségének változási gyorsaságát az idő függvényében!

c) Mennyi a változási gyorsaság értéke a folyamat kezdete után 1, illetve 2 nappal?

d) Melyik időintervallumban növekszik, illetve csökken a folyadék mennyisége?

e) Mikor maximális, illetve minimális a tárolt folyadék mennyisége a megfigyelés során, illetve mennyi a tárolóban lévő maximális és a minimális mennyiségű folyadék?

f) Vázoljuk fel a $V(t)$ függvény grafikonját a megfigyelés teljes időintervallumában!

Megoldás:

a) Mivel

$$V(0) = 2 \cdot 0^3 - 21 \cdot 0^2 + 60 \cdot 0 = 0\,[\text{hl}],$$

ezért a megfigyelés kezdetén a tároló üres volt. A megfigyelés végén

$$V(6) = 2 \cdot 6^3 - 21 \cdot 6^2 + 60 \cdot 6 = 36\,[\text{hl}],$$

így 36 hektoliter folyadék volt a tárolóban.
A megfigyelés után 1 nappal

$$V(1) = 2 \cdot 1^3 - 21 \cdot 1^2 + 60 \cdot 1 = 41\,[\text{hl}],$$

azaz 41 hektoliter folyadék volt a tárolóban.

b) A változási gyorsaság az idő függvényében

$$\dot{V}(t) = 6t^2 - 42t + 60.$$

c) A folyadék szintjének változási gyorsasága a folyamat kezdete után 1 nappal

$$\dot{V}(1) = 6 \cdot 1^2 - 42 \cdot 1 + 60 = 24 \left[\frac{\text{hl}}{\text{nap}}\right],$$

illetve 2 nappal

$$\dot{V}(2) = 6 \cdot 2^2 - 42 \cdot 2 + 60 = 0 \left[\frac{\text{hl}}{\text{nap}}\right].$$

d) Megkeressük a derivált függvény zérushelyeit, azaz megoldjuk a

$$6t^2 - 42t + 60 = 0$$

egyenletet, aminek mindkét oldalát 6-tal oszthatjuk, így

$$t^2 - 7t + 10 = 0$$

egyenlethez jutunk. A másodfokú egyenlet megoldóképletének felhasználásával azt kapjuk, hogy

$$t_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 40}}{2} = \frac{7 \pm 3}{2},$$

amiből az adódik, hogy $t = 2\,[\text{nap}]$, illetve $t = 5\,[\text{nap}]$. Az első derivált előjeleit táblázatba foglaljuk:

	$t < 2$	$t = 2$	$2 < t < 5$	$t = 5$	$t > 5$
$Q'(t)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$Q(t)$	$\nearrow$	lok. max.	$\searrow$	lok. min.	$\nearrow$

A megfigyelés kezdetétől 2 napon keresztül növekedett a tárolóban lévő folyadék mennyisége, majd a következő 3 napban csökkent, ezt követően a megfigyelés végig ismét növekedett a folyadék szintje.

e) Az előző táblázatban láthatjuk, hogy a stacionárius helyek $t = 2\,[\text{nap}]$, illetve $t = 5\,[\text{nap}]$. Kiszámoljuk ezeken a helyeken a függvény értékeket

$$V(2) = 2 \cdot 2^3 - 21 \cdot 2^2 + 60 \cdot 2 = 52\,[\text{hl}]$$
$$V(5) = 2 \cdot 5^3 - 21 \cdot 5^2 + 60 \cdot 5 = 25\,[\text{hl}].$$

Figyelembe véve, hogy a megfigyelés kezdetén 0, a megfigyelés végén 36 hektoliter folyadék volt a tárolóban azt kaptuk, hogy a legkevesebb folyadék a megfigyelés kezdetén volt (ekkor üres volt a tároló), a legtöbb folyadék (52 hektoliter) a megfigyelés utáni 2. nap volt a tárolóban.

f) A $V(t)$ függvény grafikonja:

2. Mintafeladat. Egy hegy alá a mérnökök fordított parabola keresztmetszetű, egyenes bányavasúti alagutat terveznek. Az alagút 9 méter magas és a legalján 6 méter széles. Mekkorára tervezzék a vasúti kocsik szélességét és magasságát ahhoz, hogy azok a lehető legnagyobb keresztmetszetűek legyenek, így adott hosszúság mellett a lehető legtöbb szenet szállíthassák?

<u>**Megoldás**</u>:

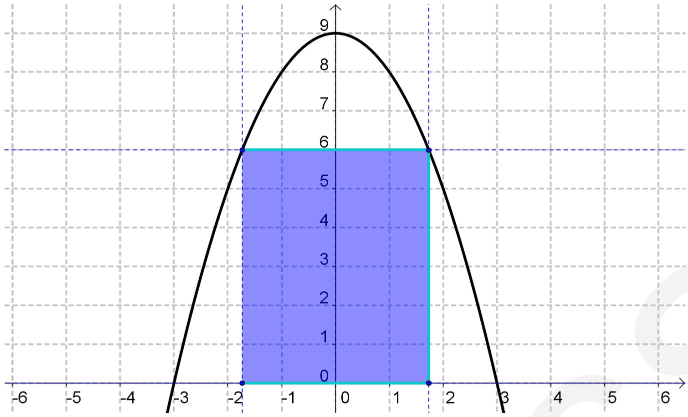
Ha az alagút keresztmetszetét leíró

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

parabolaív áthalad a $(-3; 0)$, $(0; 9)$ és $(3; 0)$ pontokon, akkor az alagút megfelel a feladat feltételeinek. A három pont koordinátáit beírva az előbbi $f(x)$ függvénybe az alábbi egyenletekhez jutunk:

$$\begin{aligned}
0 &= a \cdot (-3)^2 + b \cdot (-3) + c \\
9 &= a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c \\
0 &= a \cdot 3^2 + b \cdot 3 + c.
\end{aligned}$$

A második egyenletből azt kapjuk, hogy $c = 9$. Az első és a harmadik egyenletet kivonva $b = 0$, ugyanezen egyenleteket összeadva $a = -1$ adódik. Tehát a korábban említett parabolaív az $f(x) = -x^2 + 9$ függvény grafikonja.



Ha a vasúti kocsi szélességének fele x, magassága $-x^2 + 9$. Tehát a $2x$ szélességű, $-x^2 + 9$ magasságú téglalap területe:

$$T(x) = -2x^3 + 18x.$$

Ennek deriváltja

$$T'(x) = -6x^2 + 18,$$

amelynek zérushelyei: $\pm\sqrt{3}$. Mivel

$$T''(x) = -12x \qquad \Rightarrow \qquad T''(\sqrt{3}) < 0,$$

ezért a $\sqrt{3}$ helyen lesz T-nek lokális maximum helye, ami egyben globális maximum hely is. A vasúti kocsi szélessége tehát $2x \approx 3,46\,[\mathrm{m}]$ (az érték lefelé van kerekítve), magassága $f(\sqrt{3}) = -3 + 9 = 6\,[\mathrm{m}]$.

Gyakorló feladatok.

6.5.1. **Feladat.** Egy téglalap keresztmetszetű gerenda teherbírása egyenesen arányos a keresztmetszet magasságával és szélességének négyzetével. Határozzuk meg a $d = 30$ centiméter átmérőjű hengeres fatörzsből készíthető legnagyobb teherbírású, téglalap keresztmetszetű gerenda méreteit!

Megoldás:

Legyen a gerenda keresztmetszete a és b oldalhosszúságú téglalap úgy, hogy b a keresztmetszet magassága, a a szélessége. Ekkor egyrészt a Pitagorasz–tétel szerint

$$a^2 + b^2 = d^2 \qquad \Rightarrow \qquad a^2 = d^2 - b^2,$$

másrészt a gerenda szilárdsága arányos az

$$a^2 \cdot b = (d^2 - b^2) \cdot b = 900b - b^3$$

mennyiséggel. A feladatunk tehát az $f(b) = 900b - b^3$ függvény maximum helyének meghatározása. A függvény deriváltja $f'(b) = 900 - 3b^2$.
A stacionárius hely a $900 - 3b^2 = 0$ egyenlet megoldása. Mivel $b > 0$, ezért $b = \sqrt{300} \approx 17,32\,[\mathrm{cm}]$. Mivel $f''(b) = -6b < 0$, ezért a kapott szélsőérték hely lokális maximum, mivel azonban $b \approx 17,32\,[\mathrm{cm}]$ az egyetlen szélsőérték hely az értelmezési tartományban, ezért az egyben globális maximum hely is. Mivel $b \approx 17,32\,[\mathrm{cm}]$, ezért

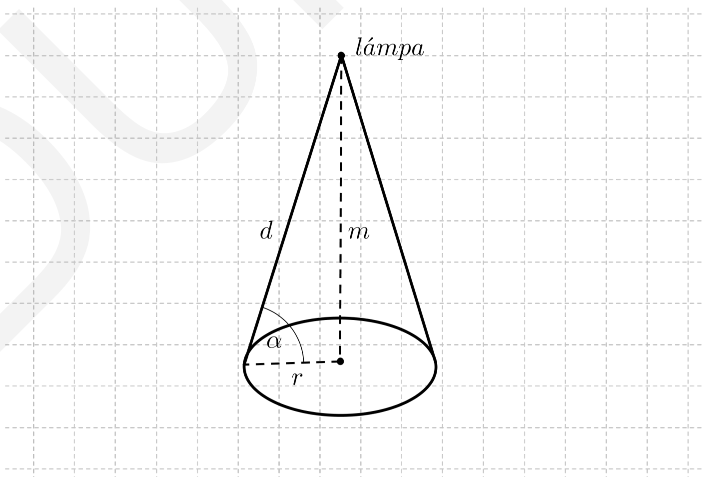
$$a = \sqrt{900 - 300} = \sqrt{600} \approx 24,49\,[\mathrm{cm}].$$

A maximális szilárdságú gerenda keresztmetszete tehát olyan téglalap, amelynek oldalai $17,32$ és $24,49$ centiméter hosszúságúak.

6.5.2. **Feladat.** Milyen magasan kell elhelyezni egy r sugarú, kör alakú cirkuszi porond középpontja fölött a lámpát, ha azt akarjuk, hogy a porond külső kerületének (ahol a lovasszámot bemutatják) megvilágítása a lehető legerősebb legyen? A megvilágítás erőssége tetszőleges pontban egyenesen arányos a beeső fénysugár és a pálya síkja hajlásszögének szinuszával és fordítottan arányos a fényforrás és a pont távolságának négyzetével.

<u>**Megoldás**</u>:

Jelöljük α-val a beeső fénysugárnak és a pálya síkjának hajlásszögét.



A keresett magasság
$$m = r \cdot \operatorname{tg} \alpha.$$
A megvilágítás erőssége a P pontban arányos a
$$\frac{\sin\alpha}{d^2} = \frac{\sin\alpha}{\left(\frac{r}{\cos\alpha}\right)^2} = \frac{\sin\alpha \cdot \cos^2\alpha}{r^2} =$$
$$= \frac{1}{r^2} \cdot (\sin\alpha \cdot (1 - \sin^2\alpha)) = \frac{1}{r^2} \cdot (\sin\alpha - \sin^3\alpha)$$
értékkel. Így tehát akkor a legerősebb a világítás, ha az
$$f\colon \left]0; \frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}, \qquad f(\alpha) = \sin\alpha - \sin^3\alpha$$
függvény maximális értéket vesz fel. Az f függvény deriváltja
$$f'(\alpha) = \cos\alpha - 3 \cdot \sin^2\alpha \cdot \cos\alpha = \cos\alpha \cdot (1 - 3\sin^2\alpha).$$
Egy szorzat pontosan akkor 0, ha valamelyik tényezője 0. Azonban $\cos\alpha \neq 0$, ugyanis ellenkező esetben $\alpha = 90^\circ$, ami nem lehetséges. Így tehát
$$1 - 3\sin^2\alpha = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \sin\alpha = \pm\frac{1}{\sqrt{3}},$$
amiből $\sin\alpha \neq -\frac{1}{\sqrt{3}}$ (ugyanis ellenkező esetben α tompaszög lenne), így
$$\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$$
kell, hogy teljesüljön, amiből azt kapjuk, hogy az egyetlen, az értelmezési tartományba eső gyök $\alpha \approx 0,1959\pi$. Az f függvény második deriváltja
$$f''(\alpha) = -\sin\alpha \cdot (1 - 3\sin^2\alpha) + \cos\alpha \cdot (-6 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha).$$
Ezt felhasználva azt kapjuk, hogy
$$f''(0,1959\pi) < 0,$$
így f-nek valóban maximuma van. Ekkor
$$m = r \cdot \operatorname{tg}\alpha = r \cdot \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = r \cdot \frac{\sin\alpha}{\sqrt{1 - \sin^2\alpha}} =$$
$$= r \cdot \frac{\frac{1}{\sqrt{3}}}{\sqrt{1 - \frac{1}{3}}} = r \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{r}{\sqrt{2}}.$$

Azt kaptuk tehát, hogy a megvilágítás akkor lesz a lehető legerősebb, ha

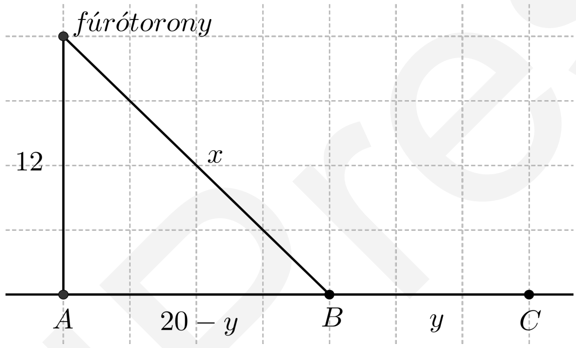
$$m = \frac{r}{\sqrt{2}}\,[\mathrm{m}]$$

magasan helyezzük el a lámpát.

6.5.3. **Feladat.** Csővezetéket kell lefektetni a tengeri fúrótorony és a parti finomító között. A torony 12 kilométerre van a parttól. A finomító a part mentén 20 kilométerre, délre található. A víz alatt futó vezeték költsége 500.000 dollár/kilométer, míg a szárazföldön futó vezetéké 300.000 dollár/kilométer. Mi a legkevésbé költséges megoldás?

Megoldás:

Legyen a víz alatti vezetékszakasz hossza x, a szárazföldön futóé pedig y.



Az x és az y közötti kapcsolathoz a fúrótoronnyal szemközti derékszög adja a kulcsot. Pitagorasz tétele szerint:

$$x^2 = 12^2 + (20 - y)^2.$$

Ebből gyököt vonva

$$x = \sqrt{144 + (20 - y)^2}.$$

Ebben a modellben csak a pozitív gyöknek van értelme. A csővezeték költsége dollárban számítva

$$c = 500.000x + 300.000y,$$

amibe behelyettesítve az előbbi x-et:

$$c(y) = 500.000 \cdot \sqrt{144 + (20 - y)^2} + 300.000y$$

adódik. A gyökös kifejezést átírva törtkitevőjű hatvány alakra:

$$c(y) = 500.000 \cdot \left(144 + (20 - y)^2\right)^{\frac{1}{2}} + 300.000y.$$

Ezt deriválva, az összetett függvény deriválási szabályát is alkalmazva

$$c'(y) = 500.000 \cdot \frac{1}{2} \left(144 + (20 - y)^2\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2(20 - y) \cdot (-1) + 300.000.$$

Elvégezve az egyszerűsítést

$$c'(y) = -500.000 \cdot \frac{20 - y}{\sqrt{144 + (20 - y)^2}} + 300.000$$

adódik. Ennek zérushelye az

$$-500.000 \cdot \frac{20 - y}{\sqrt{144 + (20 - y)^2}} + 300.000 = 0$$

egyenlet megoldása:

$$\begin{aligned} 500.000 \cdot (20 - y) &= 300.000\sqrt{144 + (20 - y)^2} \\ \frac{5}{3} \cdot (20 - y) &= \sqrt{144 + (20 - y)^2} \\ \frac{25}{9} \cdot (20 - y)^2 &= 144 + (20 - y)^2 \\ \frac{16}{9} \cdot (20 - y)^2 &= 144, \end{aligned}$$

amiből $y_1 = 11$, $y_2 = 29$. Az $y = 29$ nem megoldás, mert nem eleme a c függvény értelmezési tartományának, így $y = 11$. Kiszámolva $[0, 20]$ intervallum határpontjaiban és a stacionárius helyen függvényértéket,

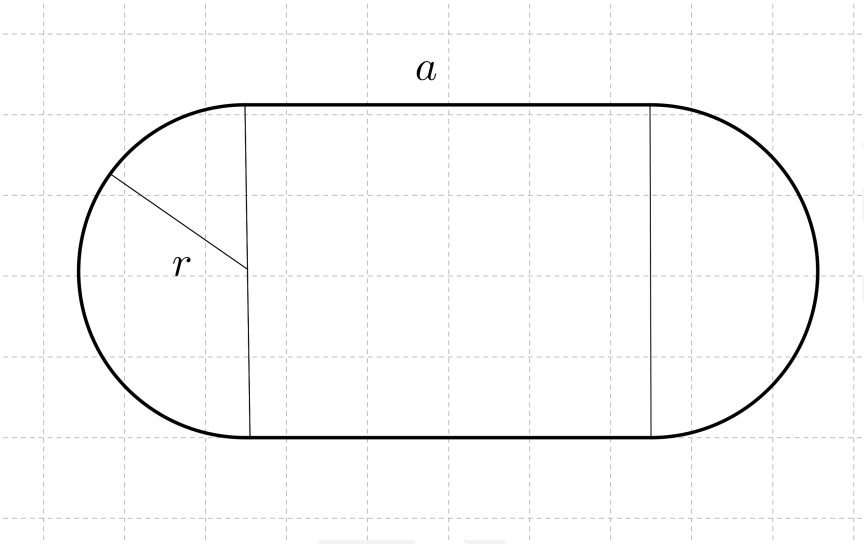
$$c(0) = 11.661.900, \; c(11) = 10.800.000, \; c(20) = 12.000.000$$

adódik, így a legolcsóbb megoldás költsége $10.800.000$ dollár. Ezt úgy érjük el, hogy a vezeték a finomítótól 11 kilométerre ér partot.

6.5.4. **Feladat.** [**16**] Egy épülő atlétika pályán két párhuzamos egyenes szakaszból és az azokat összekötő félkörívekből áll a futópálya. Hogyan kell kialakítani a pálya alakját, hogy a futópálya hossza 400 méter legyen és az atlétika pálya belsejében a téglalap alakú rész a lehető legnagyobb területű legyen?

Megoldás:

A párhuzamos egyenes szakaszok hosszát egyenként jelölje a, míg a feladatban szereplő félkörök sugarát jelölje r.



A atlétika pálya kerülete

$$K = 2 \cdot r \cdot \pi + 2 \cdot a.$$

Tudjuk azonban, hogy a kerület 400 méter, így a

$$400 = 2 \cdot r \cdot \pi + 2 \cdot a$$

egyenlethez jutunk, amiből $a = 200 - r \cdot \pi$ adódik. Ezt behelyettesítve a téglalap területébe azt kapjuk, hogy

$$T(r) = 2 \cdot r \cdot a = 2 \cdot r \cdot (200 - r \cdot \pi) = 400r - 2 \cdot r^2 \cdot \pi.$$

A T függvény deriváltja

$$T'(r) = 400 - 4 \cdot r \cdot \pi,$$

ami pontosan akkor zérus, ha $r = \dfrac{100}{\pi}$. A T függvény második deriváltja

$$T''(r) = -4\pi < 0,$$

így T-nek lokális maximum helyen van az $r = \dfrac{100}{\pi}$ helyen, ami egyben globális maximum hely is. Ekkor

$$a = 200 - r \cdot \pi = 200 - \frac{100}{\pi} \cdot \pi = 100.$$

6.6. Differenciálszámítás a közgazdaságtanban

Elméleti összefoglaló. Legyen $C(x)$ egy *költségfüggvény*, amely megmutatja, hogy x darab termék előállítása mennyibe kerül. A *határköltség* a költségfüggvény x (vagyis az előállított termék mennyisége) szerinti deriváltja.
A közgazdászok a termelés költségét általában harmadfokú polinomfüggvényekkel írják le, azaz

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

alakú függvényekkel. Itt a d a gyártás fix költségét jelenti (bérleti díj, fűtési díj, gyártósor megvásárlásának költsége, stb.), a többi tag a változó költség, vagyis az előállított mennyiségtől függő költség.
Azt a függvényt, amely egy termék iránti keresletet mutatja meg a termék árának függvényében, *keresleti függvény*nek nevezzük. Az $f(x)$ keresleti függvény differenciálhányadosának értéke a *határkereslet*.
Azt a függvényt, amely egy termékből származó bevételt mutatja meg a termék darabszámának függvényében, *bevételi függvény*nek nevezzük. A $B(x)$ bevételi függvény differenciálhányadosának értéke a *határbevétel*.
A közgazdaságtanban gyakran vizsgált kérdés, hogy összefüggő mennyiségek esetén az egyik 1%-os megváltozása a másik hány %-os megváltozását vonja maga után. Ezt az úgynevezett *elaszticitás* mutatja.
Lehetséges, hogy arra vagyunk kíváncsiak, hogy valamely termék árának megváltozása hogyan hat a termék keresletére. Ilyenkor megnézhetjük, hogy hány darabbal változik meg a termék iránti kereslet, ha 1 forinttal nő az ár. Ebben az esetben egy konkrét számot kapunk, ami a kereslet változása darabszámban. Sok esetben nem megfelelő a kereslet árral szembeni érzékenységét ilyen módon mérni, mivel míg egy autó 1 forintos árnövekedése jelentéktelen, addig 1 csésze kávé árának 1 forintos növekedése jelentősebb.
A probléma az, hogy a keresletnek az árváltozástól való függését, a termék iránti keresletet és az árat ugyanazzal a mértékkel mérjük. Ezek a nehézségek elkerülhetőek, ha relatív változásokat használunk, tehát ha azt vizsgáljuk, hogy hány százalékkal változik a kereslet, ha 1%-kal nő az ár. Az így kapott számot nevezzük a kereslet *árrugalmasság*ának vagy *elaszticitás*ának, ami független lesz attól, hogy milyen mértékkel mértük a termék árát és a kereslet mennyiségét.
Az $f(x)$ függvény jelentse egy termék iránti keresletet az ár függvényében. Az $f(x)$ abszolút változása

$$\Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x),$$

relatív változása
$$\frac{\Delta f(x)}{f(x)} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{f(x)}.$$
A kereslet mennyisége relatív változásának és az ár relatív változásának hányadosa
$$\frac{\frac{\Delta f(x)}{f(x)}}{\frac{\Delta x}{x}} = \frac{x}{f(x)} \cdot \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{x}{f(x)} \cdot \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$
Az ár egy százalékkal nő, ha $\Delta x = \frac{x}{100}$. Ekkor
$$\frac{\Delta x}{x} = \frac{1}{100},$$
amit az előző képletbe behelyettesítve a kereslet mennyiségének százalékos megváltozását kapjuk. Az előbbiekben definiált szám függ az árváltozástól és az x ártól is, de egységmentes, tehát nem számít, hogy a termék mennyiségét tonnában vagy kilogrammban mérjük, és hogy az ár dollárban vagy forintban van-e megadva. Az f függvény elaszticitását egy adott pontban úgy definiáljuk, hogy az független legyen x megváltozásától. Ekkor f-nek az x pontban vett elaszticitását az
$$\frac{x}{f(x)} \cdot \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$
hányados határértékeként definiáljuk, midőn $\Delta x \to 0$. Ekkor a differenciálhányados definíciója szerint az elaszticitásra az
$$E(x) = \frac{x}{f(x)} \cdot f'(x)$$
összefüggés adódik.

Szükséges matematikai ismeretek. Deriválási szabályok, monotonitás, szélsőérték, konvexitás, inflexiós pont meghatározása.

1. Mintafeladat. Valamely termék költségfüggvénye
$$C(x) = x^3 - 165x^2 + 10.000x + 20.000 \qquad (0 \le x < 200),$$
ahol x a gyártott termék mennyiségét jelenti ezer darabban, a $C(x)$ költséget pedig euroban értjük.
A határköltség
$$C'(x) = 3x^2 - 330x + 10.000.$$
Mivel a
$$3x^2 - 330x + 10.000 = 0$$

másodfokú egyenlet diszkriminánsa

$$D = 330^2 - 120.000 = 108.900 - 120.000 = -11.100 < 0,$$

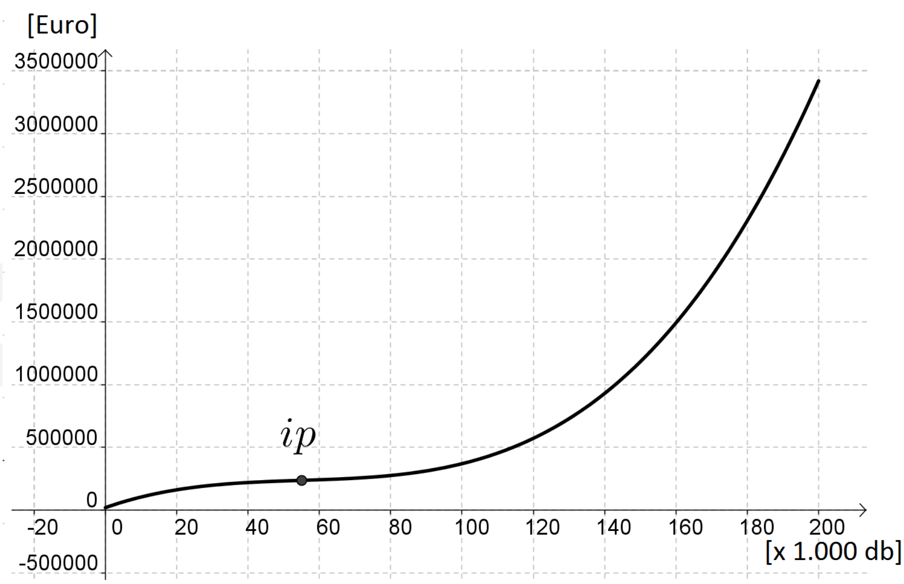
így $C'(x)$-nek nincs zérushelye, ugyanakkor $C'(x)$ egy „felülről nyitott” parabola, így $C'(x) > 0$ minden x esetén, azaz a $C(x)$ költségfüggvény szigorúan monoton növekvő. A $C(x)$ függvény második deriváltja

$$C''(x) = 6x - 330.$$

Ennek a zérushelye: $x = 55$. A második derivált előjelét tartalmazó táblázat:

	$x < 55$	$x = 55$	$x > 55$
$C''(x)$	$-$	0	$+$
$C(x)$	konkáv	inflexiós pont	konvex

Mivel $C(0) = 20.000$, ezért 20.000 euro a fixköltség. A termelés növekedésével a költség is nő, de változó intenzitással. Eleinte a költség gyorsabban nő, majd ahogy a gépek, eszközök kihasználtsága javul elkezd csökkenni a költség növekedésének üteme. Később, az inflexiós pont (ip) után azonban ismét gyorsul a költségnövekedés üteme. Ennek az oka, hogy a rendelkezésre álló keretek (berendezések, munkaerő) már kevésnek bizonyulnak a termékmennyiség növeléséhez.



2. Mintafeladat. Egy árucikk iránti keresletet az x ártól függően az

$$f(x) = \frac{100}{x+5}$$

függvény adja meg. Írjuk fel az elaszticitás függvényt! Hány százalékkal változik a kereslet, ha az áru 5 Ft-os árát 1%-kal emelik, illetve 3%-kal csökkentik?

Megoldás:

Első lépésben kiszámoljuk az f függvény deriváltját:

$$f'(x) = \frac{-100}{(x+5)^2}.$$

Ezt felhasználva felírjuk az elaszticitás függvényt:

$$E(x) = \frac{x}{f(x)} f'(x) = \frac{x}{\frac{100}{x+5}} \cdot \frac{-100}{(x+5)^2} = x \cdot \frac{x+5}{100} \cdot \frac{-100}{(x+5)^2} = \frac{-x}{x+5}.$$

Mivel a termék ára 5 Ft, ezért kiszámoljuk az $E(5)$ értéket:

$$E(5) = \frac{-5}{5+5} = -\frac{1}{2}.$$

Ez azt jelenti, hogy ha 1%-kal nő az ár, akkor várhatóan fél százalékkal csökken a termék iránti kereslet. Másrészt, ha 3%-kal csökken az ár, akkor várhatóan $3 \cdot 0,5\% = 1,5\%$-kal nő a termék iránti kereslet.

6.6.1. **Feladat.** Egy horgászbot gyártásának költsége jól modellezhető a

$$C(x) = x^3 - 10x^2 + 20x \qquad (0 \leq x \leq 10)$$

függvénnyel, ahol x a legyártott horgászbotok darabszámát jelenti ezer darabban. Határozzuk meg, hogy hány darab horgászbotot gyártsunk ahhoz, hogy az átlagköltség a lehető legkisebb legyen!

Megoldás:

Az átlagköltség

$$A(x) = \frac{C(x)}{x} = x^2 - 10x + 20.$$

Ennek a deriváltja

$$A'(x) = 2x - 10,$$

amely pontosan akkor zérus, ha $x = 5$. Mivel az átlagköltség függvény grafikonja egy „felfelé nyíló” parabola, ezért a kapott stacionárius hely globális minimum hely is egyben, tehát 5 ezer darab horgászbot esetén lesz minimális az átlagköltség.

6.6.2. **Feladat.** Egy termék eladásából származó bevétel a darabszám függvényében (a darabszámot ezer darabban értjük) $B(x) = 4\sqrt{x}$. A termék előállításához tartozó költségfüggvény $C(x) = 2x^2$. Hány darabot gyártsunk a termékből, ha azt szeretnénk, hogy a nyereség a lehető legnagyobb legyen? Adjuk meg a maximális profitot is! (Az árat mindenhol ezer euróban értjük.)

Megoldás:

A nyereségfüggvény

$$P(x) = B(x) - C(x) = 4\sqrt{x} - 2x^2.$$

A függvénynek ott lehet szélsőérték helye, ahol a deriváltja zérus. A $P(x)$ függvény deriváltja

$$P'(x) = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}} - 4x = \frac{2}{\sqrt{x}} - 4x.$$

Meghatározzuk a $P'(x)$ függvény zérushelyét:

$$\frac{2}{\sqrt{x}} - 4x = 0 \qquad \Rightarrow \qquad 2 = 4x \cdot \sqrt{x}.$$

Emeljük négyzetre a kapott egyenlet mindkét oldalát, majd fejezzük ki az x-et. Ekkor

$$4 = 16x^3 \qquad \Rightarrow \qquad x \approx 0,63.$$

Mivel

$$P''(x) = -x^{-\frac{3}{2}} - 4 < 0$$

és $x \approx 0,63$ az egyetlen stacionárius hely, ezért egyben globális maximum hely is. Azt kaptuk tehát, hogy 630 terméket kell gyártanunk ahhoz, hogy a lehető legnagyobb profitot érjük el. Ekkor

$$P(0,63) \approx 2,38,$$

tehát 2.380 euró lesz a (maximális) nyereségünk.

6.6.3. **Feladat.** Egy tűzfal melletti téglalap alakú kertet körbe szeretnénk keríteni. A tűzfallal párhuzamos oldal kerítési költsége méterenként 6.000 forint, míg a tűzfalra merőleges oldalak kerítési költsége méterenként 3.000 forint. A kert területe 100 $[\mathrm{m}^2]$. Határozzuk meg az oldalakat úgy, hogy a kerítési költség a lehető legkisebb legyen!

Megoldás:

Jelöljük a tűzfallal párhuzamos oldal hosszát a-val, a tűzfalra merőleges oldal hosszát b-vel. Ekkor a terület $T = a \cdot b$, amiből azt kapjuk, hogy

$$100 = a \cdot b \qquad \Rightarrow \qquad b = \frac{100}{a}.$$

A kerítési költség ezer forintban:

$$C(a) = 6a + 6b = 6a + \frac{600}{a}.$$

Ennek a deriváltja

$$C'(a) = 6 - \frac{600}{a^2},$$

aminek a zérsuhelye

$$6 - \frac{600}{a^2} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad 6a^2 = 600 \qquad \Rightarrow \qquad a = \pm 10.$$

Mivel $a > 0$, ezért $a = 10$. A C függvény második deriváltja

$$C''(a) = \frac{1.200}{a^3} \qquad \Rightarrow \qquad C''(10) = 1,2 > 0,$$

ezért az $a = 10$ helyen valóban minimuma van a C függvénynek. Ekkor

$$b = \frac{100}{10} = 10,$$

továbbá mivel

$$C = 6 \cdot 10 + 6 \cdot 10 = 120,$$

ezért a minimális költség 120.000 forint.

6.6.4. **Feladat.** Egy termék árbevételi függvénye

$$B(x) = x \cdot \sqrt{6.900 - 0,2x},$$

ahol x a gyártott termék darabszámát jelenti, a bevételt pedig forintban értjük. Állapítsuk meg, hogy milyen x érték esetén lesz a bevételi függvény értéke maximális!

<u>**Megoldás**</u>:

A $B(x)$ függvény deriváltja

$$B'(x) = \sqrt{6.900 - 0,2x} + x \cdot \frac{1}{2} \cdot (6.900 - 0,2x)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-0,2) = \\ = \sqrt{6.900 - 0,2x} - \frac{0,1x}{\sqrt{6.900 - 0,2x}}.$$

A $B'(x)$ függvény zérushelyét kell megkeresnünk, azaz meg kell oldanunk a

$$\sqrt{6.900 - 0,2x} - \frac{0,1x}{\sqrt{6.900 - 0,2x}} = 0$$

egyeneletet. Ha mindkét oldalt beszorozzuk a nevezővel, akkor azt kapjuk, hogy

$$6.900 - 0,3x = 0,$$

így $x = 23.000$. Az első derivált előjeleit táblázatban foglaljuk össze:

	$0 < x < 23.000$	$x = 23.000$	$x > 23.000$
$B'(x)$	$+$	0	$-$
$B(x)$	$\nearrow$	lok. max.	$\searrow$

Azonban $x = 23.000$ az egyetlen szélsőérték, így az globális maximum hely is egyben. Azt kaptuk tehát, hogy 23.000 darab terméket kell gyártanunk ahhoz, hogy a bevétel maximális legyen. Ekkor a maximális bevétel

$$B(23.000) = 23.000 \cdot \sqrt{6.900 - 0,2 \cdot 23.000} \approx 1.103.041\,\mathrm{Ft}.$$

6.6.5. **Feladat.** A raktározási költség a raktározott mennyiség (x) és egy állandó költség függvénye az $f(x) = 40x + 8000$ képlet szerint. Hány százalékkal változik a raktározási költség, ha 200 termék helyett 2%-kal kevesebb terméket tárolnak?

<u>**Megoldás**</u>:

Első lépésben kiszámoljuk az f függvény deriváltját:

$$f'(x) = 40.$$

Ezt felhasználva az elaszticitás függvény

$$E(x) = \frac{x}{f(x)} \cdot f'(x) = \frac{x}{40x + 8000} \cdot 40 = \frac{40x}{40x + 8000}.$$

Kiszámoljuk az $E(200)$ értéket

$$E(200) = \frac{40 \cdot 200}{40 \cdot 200 + 8000} = \frac{1}{2}.$$

Így ha 2%-kal kevesebb terméket raktározunk, akkor $2 \cdot \frac{1}{2} = 1\%$-kal csökken a raktározási költség.

6.6.6. **Feladat.** Egy étteremben egy új étel specialitást vezetnek be. Az előzetes számítások alapján a keresletet leíró függvény képlete:

$$f(x) = x^2 \cdot \mathrm{e}^{-x^2},$$

ahol x az egységárat jelenti ezer Ft-ban, $f(x)$ pedig a havonta ebből a specialitásból várhatóan értékesítendő adagok számát ezer darabban megadva. Számoljuk ki a keresleti függvénynek az $x = 2$ pontjához tartozó elaszticitását, és értelmezzük a kapott eredményt!

Megoldás:

Az f függvény deriváltja

$$f'(x) = 2x\mathrm{e}^{-x^2} + x^2 \cdot \mathrm{e}^{-x^2} \cdot (-2x) = \mathrm{e}^{-x^2} \cdot (2x - 2x^3).$$

Az elaszticitás függvény

$$\begin{aligned} E(x) &= \frac{x}{f(x)} \cdot f'(x) = \frac{x}{x^2 \cdot \mathrm{e}^{-x^2}} \cdot \mathrm{e}^{-x^2} \cdot (2x - 2x^3) = \\ &= \frac{2x - 2x^3}{x} = 2 - 2x^2. \end{aligned}$$

A függvény helyettesítési értéke az $x = 2$ helyen

$$E(2) = 2 - 2 \cdot 2^2 = -6.$$

A kapott eredmény azt jelenti, hogy ha az adagok egységárát 1%-kal növelik, akkor az irántuk való kereslet várhatóan 6%-kal fog csökkenni.

7. fejezet

Egyváltozós függvények integrálszámítása

7.1. Anyagi pont kinematikája

Elméleti összefoglaló. Az „Egyváltozós függvények differenciálszámítása" című fejezetben (az említett fejezet jelöléseit megtartva) az alábbi összefüggést kaptuk:

$$a(t) = \dot{v}(t) = \ddot{s}(t).$$

Ezt felhasználva az $s(t)$ függvény ismeretében a $v(t)$, a $v(t)$ függvény ismeretében pedig az $a(t)$ függvény idő szerinti deriválással meghatározható. Vajon fordított esetben tudunk-e eljárást adni? Azaz meg tudjuk-e határozni az $a(t)$ függvény ismeretében a $v(t)$, a $v(t)$ függvény ismeretében az $s(t)$ függvényt? A válaszhoz a pálya menti gyorsulás-idő és pálya menti sebesség-idő függvények közötti kapcsolatból indulunk ki:

$$a(t) = \dot{v}(t).$$

Integráljuk a t_0 és t_1 határok között az előbbi egyenlet mindkét oldalát:

$$\int_{t_0}^{t_1} a(t)\,\mathrm{d}t = \int_{t_0}^{t_1} \dot{v}(t)\,\mathrm{d}t = [v(t)]_{t_0}^{t_1} = v(t_1) - v(t_0).$$

Átrendezve a kapott egyenlőséget azt kapjuk, hogy

$$v(t_1) = v(t_0) + \int_{t_0}^{t_1} a(t)\,\mathrm{d}t.$$

Azaz a $v(t_0)$ kezdeti pálya menti sebesség, továbbá az $a(t)$ pálya menti gyorsulás-idő függvény ismeretében a pálya menti sebesség értéke tetszőleges t_1 időpillanatban számolható.
Hasonló gondolatmenettel a pálya menti sebesség-idő és pályakoordináta-idő függvények közötti

$$v(t) = \dot{s}(t)$$

összefüggésből azt kapjuk, hogy

$$s(t_1) = s(t_0) + \int_{t_0}^{t_1} v(t)\,\mathrm{d}t.$$

Azaz az $s(t_0)$ kezdeti pályakoordináta, és a $v(t)$ pálya menti sebesség-idő függvény ismeretében a pályakoordináta értéke tetszőleges t_1 időpillanatban számolható.

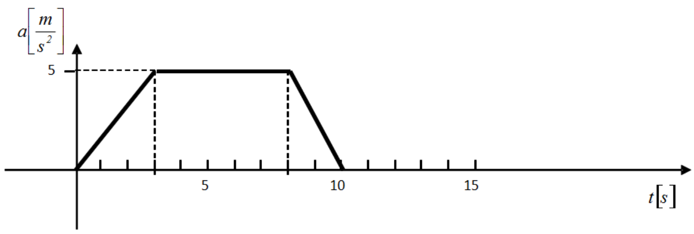
A fenti összefüggések akkor is használhatók, ha a feladat a $v(t)$ és az $s(t)$ függvények meghatározása. Ebben az esetben egyszerűen ki kell cserélni a t_1 és t változókat a t és τ változókra. (A τ változó használatára a változóütközés elkerülése miatt van szükség.) Tehát a $v(t)$ és az $s(t)$ függvényekre vonatkozó összefüggések:

$$v(t) = v(t_0) + \int_{t_0}^{t} a(\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

$$s(t) = s(t_0) + \int_{t_0}^{t} v(\tau)\,\mathrm{d}\tau.$$

Szükséges matematikai ismeretek. Módszerek egyváltozós függvények primitív függvényének meghatározására, Newton-Leibniz formula.

Mintafeladat. Az alábbi ábra egy álló helyzetből induló gépkocsi pálya menti gyorsulását mutatja az idő függvényében:



a) Adjuk meg az egyes szakaszokon a gépkocsi pálya menti gyorsulását az idő függvényében!
b) Határozzuk meg, majd ábrázoljuk az egyes szakaszokon a gépkocsi pálya menti sebességét az idő függvényében!
c) Határozzuk meg, majd ábrázoljuk az egyes szakaszokon a gépkocsi pályakoordináta-idő függvényét, ha a gépkocsi a zérus pályakoordinátájú pontból indul!

<u>**Megoldás**</u>:

a) Látható az ábrán, hogy a pálya menti gyorsulás-idő függvény minden szakaszon legfeljebb elsőfokú (azaz elsőfokú, illetve konstans) függvényekből áll elő. Az elsőfokú függvény meredekségét az i-edik szakaszon jelölje m_i, ahol $(i = 0, 1, 2)$. Jelölje t_i és $a(t_i)$ a szakasz kezdetéhez tartozó időpontot és pálya menti gyorsulást! A fenti jelölésekkel a pálya menti gyorsulás az

i-edik szakaszon:

$$a(t) = a(t_i) + m_i \cdot (t - t_i).$$

Az első szakasz esetén $t \in [0; 3]$. Ekkor

$$a(t) = a(t_0) + m_0 \cdot (t - t_0) = 0 + \frac{5}{3} \cdot (t - 0) = \frac{5}{3} t \left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right].$$

A második szakasz esetén $t \in [3; 8]$. Ekkor

$$a(t) = a(t_1) + m_1 \cdot (t - t_1) = 5 + 0 \cdot (t - 3) = 5 \left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right].$$

A harmadik szakasz esetén $t \in [8; 10]$. Ekkor

$$a(t) = a(t_2) + m_2 \cdot (t - t_2) = 5 - \frac{5}{2} \cdot (t - 8) = -\frac{5}{2} t + 25 \left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right].$$

Összefoglalva tehát azt kaptuk, hogy

$$a(t) = \begin{cases} \frac{5}{3} t, & \text{ha } 0 \le t \le 3 \\ 5, & \text{ha } 3 \le t \le 8 \\ -\frac{5}{2} t + 25, & \text{ha } 8 \le t \le 10. \end{cases}$$

b) Ha $t \in [0; 3]$, akkor

$$v(t) = v(t_0) + \int_{t_0}^{t} a(\tau) \,\mathrm{d}\tau = 0 + \int_{0}^{t} \frac{5}{3} \tau \,\mathrm{d}\tau = \left[\frac{5}{6} \tau^2\right]_0^t = \frac{5}{6} t^2 \left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right].$$

Ezt felhasználva

$$v(3) = \frac{15}{2} \left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right].$$

Ha $t \in [3; 8]$, akkor

$$v(t) = v(t_1) + \int_{t_1}^{t} a(\tau) \,\mathrm{d}\tau = \frac{15}{2} + \int_{3}^{t} 5 \,\mathrm{d}\tau =$$

$$= \frac{15}{2} + [5\tau]_3^t = \frac{15}{2} + 5t - 15 = 5t - \frac{15}{2} \left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right].$$

Ezt felhasználva

$$v(8) = 5 \cdot 8 - \frac{15}{2} = \frac{65}{2} \left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right].$$

Ha $t \in [8; 10]$, akkor

$$v(t) = v(t_2) + \int_{t_2}^{t} a(\tau)\,\mathrm{d}\tau = \frac{65}{2} + \int_{8}^{t} -\frac{5}{2}\tau + 25\,\mathrm{d}\tau =$$

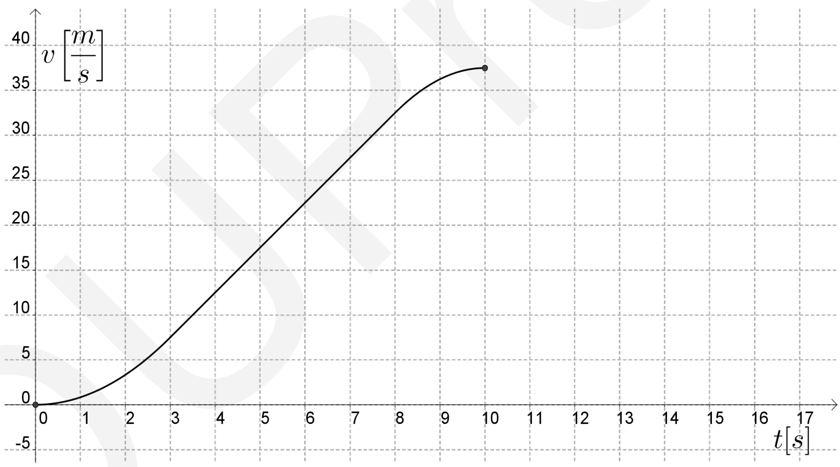
$$= \frac{65}{2} + \left[-\frac{5}{4}\tau^2 + 25\tau\right]_8^t = \frac{65}{2} - \frac{5}{4}t^2 + 25t + \frac{5}{2}\cdot 32 - 25\cdot 8 =$$

$$= -\frac{5}{4}t^2 + 25t - \frac{175}{2}\left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right].$$

Azt kaptuk tehát, hogy

$$v(t) = \begin{cases} \frac{5}{6}t^2, & \text{ha } 0 \le t \le 3 \\ 5t - \frac{15}{2}, & \text{ha } 3 \le t \le 8 \\ -\frac{5}{4}t^2 + 25t - \frac{175}{2}, & \text{ha } 8 \le t \le 10. \end{cases}$$

A pálya menti sebesség-idő függvény grafikonja:



Ha $t \in [0; 3]$, akkor

$$s(t) = s(t_0) + \int_{t_0}^{t} v(\tau)\,\mathrm{d}\tau = 0 + \int_{0}^{t} \frac{5}{6}\tau^2\,\mathrm{d}\tau = \left[\frac{5}{18}\tau^3\right]_0^t = \frac{5}{18}t^3\left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right].$$

Ezt felhasználva

$$s(3) = \frac{5}{18}\cdot 27 = \frac{15}{2}\left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right].$$

Ha $t \in [3; 8]$, akkor

$$\begin{aligned} s(t) &= s(t_1) + \int_{t_1}^{t} v(\tau)\,\mathrm{d}\tau = \frac{15}{2} + \int_{3}^{t} 5\tau - \frac{15}{2}\,\mathrm{d}\tau = \\ &= \frac{15}{2} + \left[\frac{5}{2}\tau^2 - \frac{15}{2}\tau\right]_3^t = \\ &= \frac{15}{2} + \frac{5}{2}t^2 - \frac{15}{2}t - \frac{45}{2} + \frac{45}{2} = \\ &= \frac{5}{2}t^2 - \frac{15}{2}t + \frac{15}{2}\left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right]. \end{aligned}$$

Ezt felhasználva

$$s(8) = \frac{5}{2} \cdot 64 - \frac{15}{2} \cdot 8 + \frac{15}{2} = \frac{215}{2}\left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right].$$

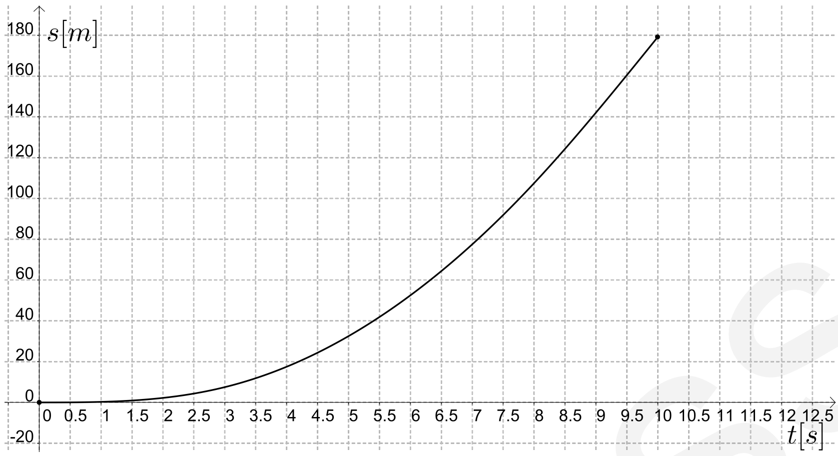
Ha $t \in [8; 10]$, akkor

$$\begin{aligned} s(t) &= s(t_2) + \int_{t_2}^{t} v(\tau)\,\mathrm{d}\tau = \frac{215}{2} + \int_{8}^{t} -\frac{5}{4}\tau^2 + 25\tau - \frac{175}{2}\,\mathrm{d}\tau = \\ &= \frac{215}{2} + \left[-\frac{5}{12}\tau^3 + \frac{25}{2}\tau^2 - \frac{175}{2}\tau\right]_8^t = \\ &= \frac{215}{2} - \frac{5}{12}t^3 + \frac{25}{2}t^2 - \frac{175}{2}t + \frac{5}{12} \cdot 512 - \frac{25}{2} \cdot 64 + \frac{175}{2} \cdot 8 = \\ &= -\frac{5}{12}t^3 + \frac{25}{2}t^2 - \frac{175}{2}t + \frac{1325}{6}\left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right]. \end{aligned}$$

Azt kaptuk tehát, hogy

$$s(t) = \begin{cases} \dfrac{5}{18}t^3, & \text{ha } 0 \le t \le 3 \\ \dfrac{5}{2}t^2 - \dfrac{15}{2}t + \dfrac{15}{2}, & \text{ha } 3 \le t \le 8 \\ -\dfrac{5}{12}t^3 + \dfrac{25}{2}t^2 - \dfrac{175}{2}t + \dfrac{1325}{6}, & \text{ha } 8 \le t \le 10. \end{cases}$$

A pályakoordináta-idő függvény grafikonja:



Gyakorló feladatok.

7.1.1. **Feladat.** Egy vízszintes terepen mozgó, elektromos hajtású gépkocsi pálya menti sebesség-idő függvénye

$$v(t) = A \cdot \frac{1 - \mathrm{e}^{-a(t+b)}}{1 + \mathrm{e}^{-a(t+b)}} \left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right] \qquad (t \geq 0)$$

alakú. Az időt másodpercben mérjük.

a) Határozzuk meg a gépkocsi pályakoordináta-idő függvényét feltételezve, hogy az indulás pillanatában a pályakoordináta értéke $s(0) = 0\,[\mathrm{m}]$.

b) Ha

$$A = 36,25 \left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right];\ a = 0,145 \left[\frac{1}{\mathrm{s}}\right];\ b = 6,494\,[\mathrm{s}],$$

akkor adjuk meg a pályakoordináta-idő függvényt!

c) Milyen hosszú pályaszakaszt fut be a gépkocsi $10\,[\mathrm{s}]$ alatt?

Megoldás:

a) Mivel

$$s(t) = s(0) + \int_0^t v(\tau)\,\mathrm{d}\tau = \int_0^t A \cdot \frac{1 - \mathrm{e}^{-a(\tau+b)}}{1 + \mathrm{e}^{-a(\tau+b)}}\,\mathrm{d}\tau,$$

ezért első lépésben az

$$f(\tau) = \frac{1 - \mathrm{e}^{-a(\tau+b)}}{1 + \mathrm{e}^{-a(\tau+b)}}$$

függvény egy primitív függvényét keressük meg. Ehhez vezessük be az

$$e^{-a(\tau+b)} = y$$

helyettesítést. A fenti egyenletből kifejezzük a τ változót:

$$\begin{aligned} e^{-a(\tau+b)} &= y \\ -a \cdot (\tau + b) &= \ln y \\ \tau &= -\frac{1}{a} \cdot \ln y - b. \end{aligned}$$

Ekkor

$$\frac{d\tau}{dy} = -\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{y}.$$

A helyettesítéses integrálás tételét alkalmazva azt kapjuk, hogy

$$-\int \frac{1-y}{1+y} \cdot \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{y}\,\mathrm{d}y = \frac{1}{a} \cdot \int \frac{y-1}{y \cdot (1+y)}\,\mathrm{d}y.$$

A kapott kifejezésre a parciális törtekre bontás módszerét alkalmazzuk. Az

$$\frac{y-1}{y \cdot (1+y)}$$

törtet

$$\frac{y-1}{y \cdot (1+y)} = \frac{A}{y} + \frac{B}{1+y}$$

alakban keressük, ahol a feladatunk az A és B együtthatók meghatározása. A fenti egyenlet mindkét oldalát szorozva a közös nevezővel, majd a kapott egyenletet rendezve azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \frac{y-1}{y \cdot (1+y)} &= \frac{A}{y} + \frac{B}{1+y} \\ y - 1 &= A \cdot (1+y) + B \cdot y \\ y - 1 &= (A+B) \cdot y + A \end{aligned}$$

A két oldalon a megfelelő fokszámú tagok együtthatóinak összehasonlításából az alábbi egyenletrendszerhez jutunk:

$$\begin{aligned} A + B &= 1 \\ A &= -1. \end{aligned}$$

Az A értékét közvetlenül megkaptuk, amit felhasználva az első egyenletből $B = 2$ adódik. Azt kaptuk tehát, hogy

$$\begin{aligned}
\frac{1}{a} \cdot \int \frac{y-1}{y \cdot (1+y)} \, \mathrm{d}y &= \frac{1}{a} \cdot \int \frac{-1}{y} + \frac{2}{1+y} \, \mathrm{d}y = \\
&= \frac{1}{a} \cdot (-\ln|y| + 2 \cdot \ln|1+y|) = \\
&= \frac{1}{a} \cdot \left(-\ln|\mathrm{e}^{-a(\tau+b)}| + 2 \cdot \ln|1+\mathrm{e}^{-a(\tau+b)}|\right) = \\
&= \frac{1}{a} \cdot \left(a \cdot (\tau+b) + 2 \cdot \ln|1+\mathrm{e}^{-a(\tau+b)}|\right) = \\
&= \frac{2 \cdot \ln|1+\mathrm{e}^{-a(\tau+b)}|}{a} + \tau + b.
\end{aligned}$$

Ezt felhasználva azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
s(t) &= \int_0^t A \cdot \frac{1-\mathrm{e}^{-a(\tau+b)}}{1+\mathrm{e}^{-a(\tau+b)}} + B \, \mathrm{d}\tau = \\
&= A \cdot \left[\frac{2 \cdot \ln|1+\mathrm{e}^{-a(\tau+b)}|}{a} + \tau + b + B \cdot \tau\right]_0^t = \\
&= A \cdot \left(\frac{2 \cdot \ln|1+\mathrm{e}^{-a(t+b)}|}{a} + t + b + B \cdot t - \right. \\
&\quad \left. - \frac{2 \cdot \ln|1+\mathrm{e}^{-a \cdot b}|}{a} - b\right) = \\
&= A \cdot \left(\frac{2 \cdot \ln|1+\mathrm{e}^{-a(t+b)}|}{a} + t - \frac{2 \cdot \ln|1+\mathrm{e}^{-a \cdot b}|}{a} + B \cdot t\right).
\end{aligned}$$

b) Behelyettesítve a megadott értékeket a pályakoordináta-idő függvényre

$$\begin{aligned}
s(t) = 36,25 \cdot \left(\frac{2 \cdot \ln|1+\mathrm{e}^{-0,145 \cdot (t+6,494)}|}{0,145} + t - \right. \\
\left. - \frac{2 \cdot \ln|1+\mathrm{e}^{-0,145 \cdot 6,494}|}{0,145} - 1,5t\right)
\end{aligned}$$

adódik.

c) Az első 10 másodpercben $s(10) \approx 27,19\,[\mathrm{m}]$ hosszúságú pályaszakaszt fut be a gépkocsi.

7.1.2. **Feladat.** Egy mélytengeri kutatóhajó a tenger fenekéről a

$$v(t) = A \cdot \left(1 - \mathrm{e}^{-Bt}\right)$$

pálya menti sebesség-idő függvény szerint emelkedik.

a) Határozzuk meg a kutatóhajó pályakoordináta-idő függvényét, feltételezve, hogy a tenger fenekén a pályakoordináta értéke $s(0) = 0\,[\mathrm{m}]$.

b) Amennyiben

$$A = 6,412 \left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right];\ B = 0,459 \left[\frac{1}{\mathrm{s}}\right],$$

úgy adjuk meg a pályakoordináta-idő függvényt!

c) Mennyit emelkedik a kutatóhajó 15 [s], illetve 20 [s] alatt?

Megoldás:

a) A pályakoordináta-idő függvény

$$s(t) = s(t_0) + \int_0^t v(\tau)\,\mathrm{d}\tau = s(t_0) + \int_0^t A \cdot \left(1 - \mathrm{e}^{-B\tau}\right)\,\mathrm{d}\tau =$$

$$= \int_0^t A \cdot \left(1 - \mathrm{e}^{-B\tau}\right)\,\mathrm{d}\tau = A \cdot \left[\tau + \frac{\mathrm{e}^{-B\tau}}{B}\right]_0^t =$$

$$= A \cdot \left(t + \frac{\mathrm{e}^{-Bt}}{B} - \frac{1}{B}\right).$$

b) A megfelelő adatok behelyettesítése után azt kapjuk, hogy

$$s(t) = 6,412 \cdot \left(t + \frac{\mathrm{e}^{-0,459t}}{0,459} - \frac{1}{0,459}\right) =$$

$$= 6,412t - 13,97\mathrm{e}^{-0,459t} - 13,97\,[\mathrm{m}].$$

c) Mivel

$$s(15) = 6,412 \cdot 15 - 13,97\mathrm{e}^{-0,459 \cdot 15} - 13,97 \approx 82,22\,[\mathrm{m}],$$

ezért a kutatóhajó 15 [s] alatt $82,22$ métert emelkedik. Hasonlóan kapjuk meg, hogy a kutatóhajó

$$s(20) = 6,412 \cdot 20 - 13,97\mathrm{e}^{-0,459 \cdot 20} - 13,97 \approx 114,27$$

métert emelkedik 20 [s] alatt.

7.1.3. **Feladat.** Egy rakéta meghajtású versenyautóval sebesség világrekordot szeretnénk felállítani, de a hajtómű az indulás után fokozatosan leáll. A versenyautó pálya menti gyorsulás-idő függvénye az alábbi alakú lesz:

$$a(t) = 112 \cdot \left(\frac{2 - \ln(t+1)}{(t+1)^{\frac{3}{2}}} \right).$$

A t paraméter a veresenyautó indulásától mért időt jelöli.

a) Határozzuk meg a versenyautó pálya menti sebesség-idő függvényét $\big(v(t)\big)$, felhasználva, hogy az autó nyugalomból indul.

b) Határozzuk meg, hogy mekkora maximális sebességet sikerült végül elérni a gépkocsival!

c) Vizsgáljuk meg a $v(t)$ függvényt monotonitás és konvexitás szerint, határozzuk meg a szélsőértékét és inflexiós pontját!

d) Vázoljuk fel a pályasebesség-idő függvény grafikonját!

Megoldás:

a) A pálya menti sebesség-idő függvényt a pálya menti gyorsulás-idő függvény integrálásával kapjuk

$$v(t) = \int_0^t 112 \cdot \left(\frac{2 - \ln(\tau+1)}{(\tau+1)^{\frac{3}{2}}} \right) \mathrm{d}\tau.$$

Első lépésben az

$$f(\tau) = \frac{2 - \ln(\tau+1)}{(\tau+1)^{\frac{3}{2}}}$$

függvény egy primitív függvényét keressük meg.

$$f(\tau) = \frac{2 - \ln(\tau+1)}{(\tau+1)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2}{(\tau+1)^{\frac{3}{2}}} - \frac{\ln(\tau+1)}{(\tau+1)^{\frac{3}{2}}}.$$

Az első tag egyszerűen integrálható, hiszen

$$\int \frac{2}{(\tau+1)^{\frac{3}{2}}} \mathrm{d}\tau = \int 2 \cdot (\tau+1)^{-\frac{3}{2}} \mathrm{d}\tau =$$

$$= -4 \cdot (\tau+1)^{-\frac{1}{2}} + c = -\frac{4}{\sqrt{\tau+1}} + c.$$

A második tag parciális integrálással integrálható:

$$\begin{aligned}
&\int \frac{\ln(\tau+1)}{(\tau+1)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}\tau = \int \ln(\tau+1)\cdot(\tau+1)^{-\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}\tau = \\
&= \ln(\tau+1)\cdot\frac{(\tau+1)^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}} - \int \frac{1}{\tau+1}\cdot\frac{(\tau+1)^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}\tau = \\
&= -2\cdot\ln(\tau+1)\cdot(\tau+1)^{-\frac{1}{2}} + 2\cdot\int(\tau+1)^{-\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}\tau = \\
&= -2\cdot\ln(\tau+1)\cdot(\tau+1)^{-\frac{1}{2}} - 4\cdot(\tau+1)^{-\frac{1}{2}} + c = \\
&= \frac{-2\cdot\ln(\tau+1)-4}{\sqrt{\tau+1}} + c.
\end{aligned}$$

Azt kaptuk tehát, hogy az $f(\tau)$ függvény egy primitív függvénye

$$F(\tau) = -\frac{4}{\sqrt{\tau+1}} - \frac{-2\cdot\ln(\tau+1)-4}{\sqrt{\tau+1}} = \frac{2\cdot\ln(\tau+1)}{\sqrt{\tau+1}}.$$

Ezt felhasználva a pálya menti sebesség-idő függvény:

$$\begin{aligned}
v(t) &= \int_0^t 112\cdot\left(\frac{2-\ln(\tau+1)}{(\tau+1)^{\frac{3}{2}}}\right)\mathrm{d}\tau = \left[112\cdot\frac{2\cdot\ln(\tau+1)}{\sqrt{\tau+1}}\right]_0^t = \\
&= 112\cdot\frac{2\cdot\ln(t+1)}{\sqrt{t+1}} = \frac{224\cdot\ln(t+1)}{\sqrt{t+1}}.
\end{aligned}$$

b) A maximális sebességet abban az időpillanatban éri el a versenyautó, amikor a gyorsulása zérus, azaz meg kell oldanunk az $a(t) = 0$ egyenletet:

$$\begin{aligned}
112\cdot\left(\frac{2-\ln(t+1)}{(t+1)^{\frac{3}{2}}}\right) &= 0 \\
2 &= \ln(t+1) \\
\mathrm{e}^2 - 1 &= t.
\end{aligned}$$

Tehát $t \approx 6,39$ másodperc elteltével éri el a rakéta meghajtású versenyautó a maximális sebességét. Ekkor a maximális sebességének nagysága

$$v(6,39) \approx 154,67\left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right].$$

c) A $v(t)$ függvény zérushelye:

$$\begin{aligned} \frac{224 \cdot \ln(t+1)}{\sqrt{t+1}} &= 0 \\ \ln(t+1) &= 0 \\ t+1 &= 1 \qquad \Rightarrow \qquad t=0, \end{aligned}$$

azaz a $v(t)$ függvény egyetlen zérushelye a $t = 0$ helyen van.
A $v(t)$ függvény inflexiós helyét az $\dot{a}(t) = 0$ egyenlet megoldása adja. Mivel

$$\begin{aligned} \dot{a}(t) &= 112 \cdot \frac{-\frac{1}{t+1} \cdot (t+1)^{\frac{3}{2}} - \big(2 - \ln(t+1)\big) \cdot \frac{3}{2} \cdot (t+1)^{\frac{1}{2}}}{(t+1)^3} = \\ &= 112 \cdot \frac{-(t+1)^{\frac{1}{2}} - \frac{3}{2} \cdot (t+1)^{\frac{1}{2}} \cdot (2 - \ln(t+1))}{(t+1)^3} = \\ &= 112 \cdot \frac{\sqrt{t+1} \cdot \left(-1 - 3 + \frac{3}{2} \cdot \ln(t+1)\right)}{(t+1)^3}, \end{aligned}$$

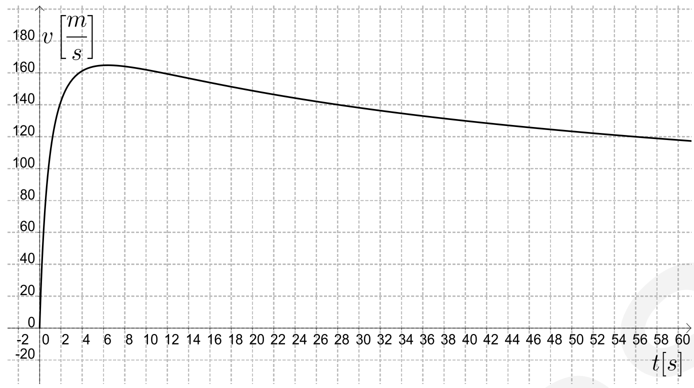
ami pontosan akkor zérus, ha

$$\begin{aligned} -4 + \frac{3}{2} \cdot \ln(t+1) &= 0 \\ \ln(t+1) &= \frac{8}{3} \\ t+1 &= \mathrm{e}^{\frac{8}{3}}, \end{aligned}$$

amiből $t \approx 13,39$ adódik. A $v(t)$ függvény második deriváltjának előjelét tartalmazó táblázat:

	$t < 13,39$	$t = 13,39$	$t > 13,39$
$\ddot{v}(t)$	$-$	0	$+$
$v(t)$	konkáv	inflexiós pont	konvex

d) A kapott eredmények felhasználásával elkészíthető a $v(t)$ pálya menti sebesség-idő függvény grafikonja:


$v\left[\frac{m}{s}\right]$
$t[s]$
180
160
140
120
100
80
60
40
20
0
-20
-2 0 2 4 6 8 10 12 14 16 18 20 22 24 26 28 30 32 34 36 38 40 42 44 46 48 50 52 54 56 58 60

7.2. Munkavégzés

Elméleti összefoglaló. Egyenes vonalú pályán mozgó tömegpontra a kezdőponttól mért x távolságtól függő $F(x)$ erő hat. Ekkor az $x = a$ és $x = b$ koordinátájú pontok között végzett munka

$$W = \int_a^b F(x)\,\mathrm{d}x.$$

Ha egy rugót terheletlen állapotában Δx hosszúsággal összenyomunk vagy megnyújtunk, akkor a rugóerő nagysága arányos lesz Δx-el. A rugóerő nagysága az alábbi összefüggéssel számolható:

$$|F| = D \cdot \Delta x,$$

ahol D a *rugómerevség*,

$$\Delta x = |x - x_0|$$

pedig a rugó megnyúlása, ahol x_0 a rugó terheletlen hossza. Megjegyezzük, hogy bizonyos szakirodalmakban a rugómerevség helyett az úgynevezett *rugóállandó*val dolgoznak, amely a rugómerevség reciproka.
Ha az x-irányú rugóerőt előjeles mennyiségként értelmezzük, akkor

$$F(x) = -D \cdot (x - x_0).$$

Speciálisan, ha a terheletlen állapot az $x_0 = 0$ ponthoz tartozik, akkor a fenti összefüggés az alábbi alakban írható fel:

$$F(x) = -D \cdot x.$$

Tehát az x-irányú rugóerő munkája:

$$W = -\int_a^b D \cdot x\,\mathrm{d}x.$$

A negatív előjel arra utal, hogy a megnyúlás és a rugóerő ellentétes „értelműek”.

Szükséges matematikai ismeretek. Egyváltozós függvény primitív függvény keresési módszerei, Newton-Leibniz formula.

Mintafeladat. Egy rugó alapállapotában 1 méter hosszú. A rugót 24 [N] erővel $1,8$ méter hosszúságúra nyújtjuk meg.

a) Határozzuk meg a rugómerevséget!

b) Mennyi munkát végez a rugó, miközben 3 méter hosszúra nyújtjuk?

c) Mekkora a rugó hosszúsága 45 [N] terhelés esetén?

Megoldás:

a) A rugómerevséget az elméleti összefoglalóban ismertetett

$$|F| = D \cdot \Delta x$$

összefüggésből határozhatjuk meg. Jelen esetben a rugó megnyúlása $0,8$ méter, így a

$$24 = D \cdot 0,8$$

egyenlethez jutunk, amiből $D = 30\left[\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}\right]$ adódik.

b) Legyen a rugó „szabad” vége nyújtatlan állapotban az $x = 0$ pontban. Ekkor

$$F(x) = -30x\,[\mathrm{N}].$$

A rugó által végzett munka az $x = 0$ és $x = 2$ koordinátájú pontok között:

$$W = -\int_0^2 30x\,\mathrm{d}x = -\left[15x^2\right]_0^2 = -60\,[\mathrm{J}].$$

c) Mivel $F(x) = -30x$, ezért

$$45 = -30x \qquad \Rightarrow \qquad x = -1,5\,[\mathrm{m}],$$

így a rugó hosszúsága $1,5$ lesz.

Gyakorló feladatok.

7.2.1. **Feladat.** Egy rugó feszítetlen állapotában 10 centiméter hosszú. A rugót $800\,[\mathrm{N}]$ erővel 14 centiméter hosszúságúra nyúlik meg.

a) Határozzuk meg a rugómerevséget!

b) Mennyi munkát végez a rugó, miközben 12 centiméter hosszúra nyújtjuk?

c) Mekkora a rugó hosszúsága $1600\,[\mathrm{N}]$ terhelés esetén?

Megoldás:

a) A rugóállandót az elméleti összefoglalóban ismertetett

$$|F| = D \cdot \Delta x$$

összefüggésből határozhatjuk meg. Jelen esetben a rugó megnyúlása $0,04$ méter, így a

$$800 = D \cdot 0,04$$

egyenlethez jutunk, amiből $D = 20.000\left[\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}\right]$ adódik.

b) Legyen a rugó „szabad” vége nyújtatlan állapotban az $x = 0$ pontban. Ekkor

$$F(x) = -20.000x\,[\mathrm{N}].$$

A rugó által végzett munka az $x = 0$ és $x = 0,02$ koordinátájú pontok között:

$$W = -\int_0^{0{,}02} 20.000x\,\mathrm{d}x = -\left[10.000x^2\right]_0^{0{,}02} = -4\,[\mathrm{J}].$$

c) Mivel $F(x) = -20.000x$, ezért

$$1.600 = -20.000x \qquad \Rightarrow \qquad x = -0,08\,[\mathrm{m}],$$

így a rugó hosszúsága 8 centiméter.

7.2.2. **Feladat.** Egy liftet, melynek motorja a legfelső szinten van, sodronykötél tartja. Tudjuk azt is, hogy 1 méteres drótkötél darab súlya $45\,[\mathrm{N}]$. Amikor a kabin a földszinten tartózkodik $60\,[\mathrm{m}]$ kábel lóg lefelé. Mire a lift a legfelső szintre ér a kábel teljes egészében feltekeredik. Mennyi munkát kell fordítani csupán a kábel felhúzására?

Megoldás:

Az erőfüggvény:

$$F(x) = 45 \cdot (60 - x).$$

A végzett munka:

$$W = \int_0^{60} 45 \cdot (60 - x)\,\mathrm{d}x = 45 \cdot \int_0^{60} 60 - x\,\mathrm{d}x =$$

$$= 45 \cdot \left[60x - \frac{x^2}{2}\right]_0^{60} = 45 \cdot (3.600 - 1.800) = 81.000\,[\mathrm{J}].$$

Azt kaptuk tehát, hogy a végzett munka $W = 81.000\,[\mathrm{J}]$.

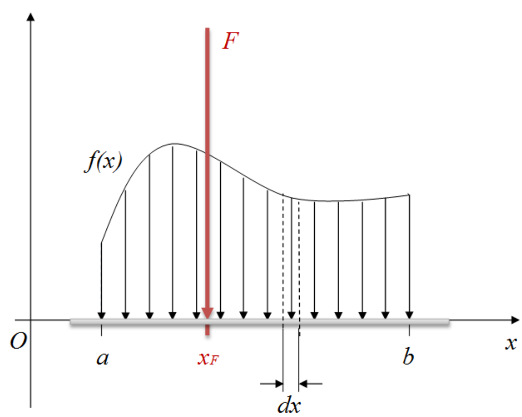
7.3. Vonal mentén megoszló párhuzamos erőrendszer

Elméleti összefoglaló. Terheljünk egy rúd alakú testet a hossztengelyére merőleges *megoszló erő*vel. A megoszló erő, a koncentrált erőtől eltérően, nem a rúd egy adott pontjában támad, hanem annak egy $[a; b]$ szakaszán megoszlik. A megoszló erőt a rúd egy adott x koordinátájú pontjában az $f(x)$ intenzitással jellemezzük.
Ha az $f(x)$ intenzitást megszorozzuk a rúd kicsiny darabkájának dx hosszúságával, akkor megkapjuk a darabkára ható erő nagyságát:

$$dF = f(x)dx.$$

Ebből adódóan a teljes $[a; b]$ szakaszra ható erő nagysága:

$$F = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$



A megoszló erőrendszernek a sík bármely pontjára kiszámítható a forgatónyomatéka. A kicsiny x koordinátájú dx hosszúságú darabra ható erő O pontra vonatkozó skaláris forgatónyomatéka:

$$d\underset{O}{M} = -dF \cdot x = -x \cdot f(x)\,dx.$$

Tehát az $[a; b]$ szakaszon megoszló erőrendszer O pontra vonatkozó forgatónyomatéka:

$$\underset{O}{M} = -\int_a^b x \cdot f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Itt meg kell jegyeznünk, hogy az óramutató járásával ellentétes „forgásértelmet” tekintjük pozitívnak.
Az F koncentrált erőt a *megoszló erőrendszer koncentrált eredőjé*nek nevezzük, ha a sík bármely pontjára (így speciálisan az O pontra) ugyanaz a forgatónyomatéka, mint a megoszló erőrendszernek. Azaz:

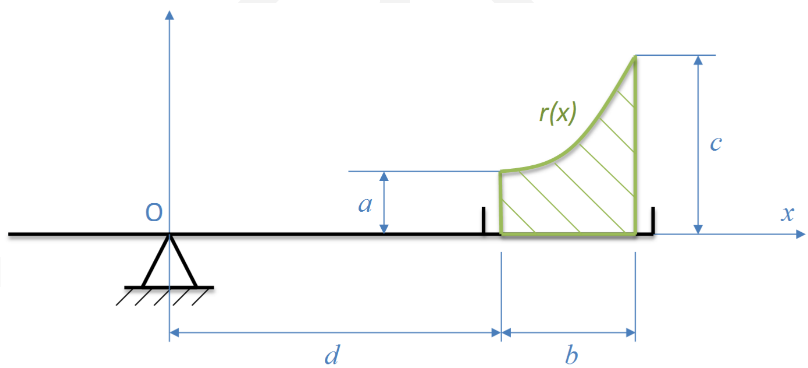
$$-F \cdot x_F = \underset{O}{M} = -\int_a^b x \cdot f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Ebből az eredő támadáspontjának x_F koordinátája:

$$x_F = \frac{-\int_a^b x \cdot f(x)\,\mathrm{d}x}{-F} = \frac{\int_a^b x \cdot f(x)\,\mathrm{d}x}{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x}.$$

Szükséges matematikai ismeretek. Egyváltozós függvények primitív függvény keresési módszerei, Newton-Leibniz formula.

Mintafeladat. Az ábra egy egyensúlyban lévő kétkarú mérleget mutat, amelynek egyik serpenyőjében egy acélból készült hasáb található.



A hasáb hossztengelye merőleges az ábra síkjára, így az ábrán a hasáb alaplapja látható. Az ábrán jelzett geometriai adatokon kívül ismert a hasáb hossztengely irányú l mérete, ρ sűrűsége, valamint a gravitációs gyorsulás g értéke. Továbbá tudjuk, hogy a hasáb által a serpenyőre kifejtett nyomóerő $f(x)$ intenzitása, és a hasáb keresztmetszetét jellemző $r(x)$ függvénygörbe közötti összefüggés az alábbi:

$$f(x) = l \cdot \rho \cdot g \cdot r(x).$$

Adatok:

$$a = 0,05\,[\mathrm{m}]; \quad b = 0,1\,[\mathrm{m}]; \quad c = 0,15\,[\mathrm{m}]; \quad l = 0,1\,[\mathrm{m}];$$
$$d = 0,25\,[\mathrm{m}]; \quad \rho = 7.800\left[\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}\right]; \quad g = 9,81\left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right].$$

a) Írjuk fel az $r(x)$ függvényt, ha tudjuk, hogy annak képe parabola, amelynek csúcspontja a $(d; a)$ koordinátájú pont!

b) Határozzuk meg a hasáb által a serpenyőre kifejtett nyomóerő eredőjének nagyságát!

c) Határozzuk meg a hasáb által a serpenyőre kifejtett nyomóerő O pontra vonatkozó skaláris forgatónyomatékát!

d) Számítsuk ki az eredő támadáspontjának O ponttól mért távolságát!

Megoldás:

a) Mivel az $r(x)$ függvény grafikonja parabola alakú és a feltétel szerint a parabola tengelypontja a $(d; a) = (0,25; 0,05)$ pont, ezért a parabola grafikonját leíró függvény:

$$r(x) = a \cdot (x - 0,25)^2 + 0,05.$$

A fenti ábráról az is leolvasható, hogy az $r(x)$ függvény grafikonjára illeszkedik a $(d + b; c) = (0,35; 0,15)$ pont is. Ezt felhasználva az alábbi egyenlethez jutunk:

$$a \cdot (0,35 - 0,25)^2 + 0,05 = 0,15.$$

Az egyenlet megoldására

$$0,01a + 0,05 = 0,15 \quad \Rightarrow \quad 0,01a = 0,1 \quad \Rightarrow \quad a = 10.$$

A parabola grafikonját leíró függvény tehát

$$r(x) = 10 \cdot (x - 0,25)^2 + 0,05 = 10x^2 - 5x + 0,675 \left[\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}\right].$$

b) A feladat feltételei szerint a serpenyőre kifejtett nyomóerő $f(x)$ intenzitása, és a hasáb keresztmetszetét jellemző $r(x)$ függvénygörbe közötti összefüggés:

$$f(x) = l \cdot \rho \cdot g \cdot r(x) = 0,1 \cdot 7800 \cdot 9,81 \cdot (10x^2 - 5x + 0,675) =$$
$$= 7651,8 \cdot (10x^2 - 5x + 0,675).$$

A nyomóerő nagysága

$$F = \int_{0,25}^{0,35} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{0,25}^{0,35} 7651,8 \cdot (10x^2 - 5x + 0,675)\,\mathrm{d}x =$$

$$= 7651,8 \cdot \int_{0,25}^{0,35} 10x^2 - 5x + 0,675\,\mathrm{d}x =$$

$$= 7651,8 \cdot \left[\frac{10}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 0,675x\right]_{0,25}^{0,35} =$$

$$= 7651,8 \cdot \left(\frac{10}{3} \cdot 0,35^3 - \frac{5}{2} \cdot 0,35^2 + 0,675 \cdot 0,35\right) -$$

$$- 7651,8 \cdot \left(\frac{10}{3} \cdot 0,25^3 - \frac{5}{2} \cdot 0,25^2 + 0,675 \cdot 0,25\right) =$$

$$= 7651,8 \cdot \frac{1}{120} = 63,765\,[\mathrm{N}].$$

c) A skaláris forgatónyomaték:

$$\underset{O}{M} = -\int_{0,25}^{0,35} x \cdot f(x)\,\mathrm{d}x = -7651,8 \cdot \int_{0,25}^{0,35} 10x^3 - 5x^2 + 0,675x\,\mathrm{d}x =$$

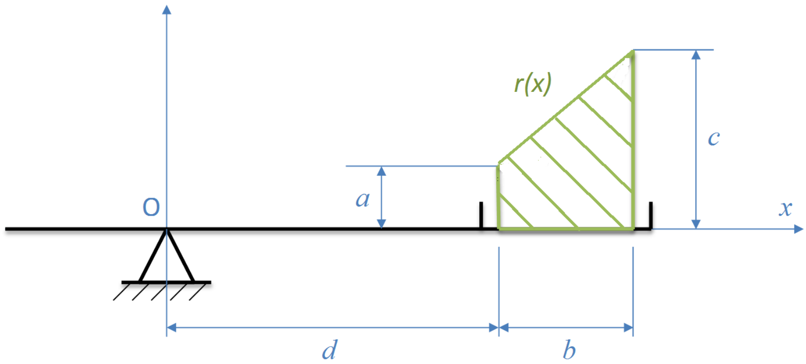
$$= -7651,8 \cdot \left[\frac{5}{2}x^4 - \frac{5}{3}x^3 + \frac{27}{80}x^2\right]_{0,25}^{0,35} = -19,76715\,[\mathrm{Nm}].$$

d) Az eredő támadáspontjának x_F koordinátája:

$$x_F = \frac{-\int_{0,25}^{0,35} x \cdot f(x)\,\mathrm{d}x}{-\int_{0,25}^{0,35} f(x)\,\mathrm{d}x} \approx \frac{-19,767}{-63,765} \approx 0,31.$$

Gyakorló feladatok.

7.3.1. **Feladat.** Az ábra egy betonból készült tartóelemet mutat. A jelölt geometriai méreteken kívül ismert a tartóelem z irányú l mérete, ρ sűrűsége és a gravitációs gyorsulás g értéke.



Tudjuk továbbá azt is, hogy a tartóra ható gravitációs erő $f(x)$ intenzitása és a hasáb keresztmetszetét jellemző $r(x)$ függvénygörbe közötti összefüggés az alábbi:

$$f(x) = -l \cdot \rho \cdot g \cdot r(x).$$

Adatok:

$$a = 2\,[\mathrm{m}]; \quad b = 3\,[\mathrm{m}]; \quad c = 4\,[\mathrm{m}]; \quad d = 8\,[\mathrm{m}]$$
$$\rho = 2.800 \left[\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}\right]; \quad g = 9,81 \left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right].$$

a) Adjuk meg az $r(x)$ függvényt!

b) Határozzuk meg a tartóelemre ható gravitációs erő eredőjének nagyságát!

c) Határozzuk meg a tartóelemre ható gravitációs erő O pontra vonatkozó skaláris forgatónyomatékát!

d) Számítsuk ki gravitációs erő eredőjének O ponttól mért távolságát! (Ez nem más, mint a tartóelem súlypontjának O ponttól mért x irányú távolsága.)

Megoldás:

a) Az $r(x)$ függvény grafikonja egy egyenes, amelyet

$$r(x) = m \cdot x + k.$$

alakban keresünk. Az ábráról leolvasható, hogy a keresett függvény grafikonjára illeszkednek a $(8;2)$ és a $(11;4)$ pontok. Ezt felhasználva azt kapjuk, hogy teljesülnie kell az alábbi egyenletrendszernek:

$$2 = 8m + b$$
$$4 = 11m + b.$$

Az egyenletrendszer megoldására $m = \frac{2}{3}$ és $k = -10$ adódik. Azt kaptuk tehát, hogy a keresett függvény:

$$r(x) = 1,5x - 10.$$

b) A feladat feltételei szerint a tartóra ható gravitációs erő $f(x)$ intenzitása, és a hasáb keresztmetszetét jellemző $r(x)$ függvénygörbe közötti összefüggés:

$$f(x) = -l \cdot \rho \cdot g \cdot r(x) = -3 \cdot 2800 \cdot 9,81 \cdot \left(\frac{2}{3}x - \frac{10}{3}\right) = \\ = -82.404 \cdot \left(\frac{2}{3}x - \frac{10}{3}\right).$$

A nyomóerő nagysága

$$F = \int_8^{11} f(x)\,\mathrm{d}x = -82.404 \cdot \int_8^{11} \frac{2}{3}x - \frac{10}{3}\,\mathrm{d}x = \\ = -82.404 \left[\frac{1}{3} \cdot x^2 - \frac{10}{3}x\right]_8^{11} == -82.404 \left(\frac{1}{3} \cdot 11^2 - \frac{10}{3} \cdot 11\right) - \\ - 82.404 \left(\frac{1}{3} \cdot 8^2 - \frac{10}{3} \cdot 8\right) - \approx -741.636\,[\mathrm{N}].$$

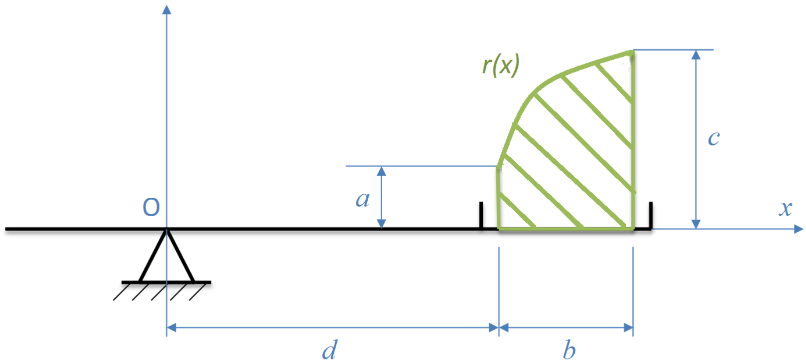
c) A skaláris forgatónyomaték nagysága:

$$\underset{O}{M} = -\int_0^2 x \cdot f(x)\,\mathrm{d}x = -82.404 \cdot \int_0^2 0,21x^{\frac{3}{2}} - 0,5x\,\mathrm{d}x = \\ = -82.404 \cdot \left[0,21\frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} - 0,5\frac{x^2}{2}\right]_0^2 \approx \\ \approx -82.404 \cdot (-0,52) \approx 42.850\,[\mathrm{Nm}].$$

d) Az eredő támadáspontjának x_F koordinátája:

$$x_F = \frac{-\int_0^2 x \cdot f(x)\,\mathrm{d}x}{\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x} = \frac{42.850}{49.773} = 0,86.$$

7.3.2. **Feladat.** Az ábra egy betonból készült tartóelemet mutat. A jelölt geometriai méreteken kívül ismert a tartóelem z irányú l mérete, ρ sűrűsége és a gravitációs gyorsulás g értéke.



Tudjuk továbbá azt is, hogy a tartóra ható gravitációs erő $f(x)$ intenzitása és a hasáb keresztmetszetét jellemző $r(x)$ függvénygörbe közötti összefüggés az alábbi:

$$f(x) = -l \cdot \rho \cdot g \cdot r(x).$$

Adatok:

$$a = 0,2\,[\mathrm{m}]; \quad b = 2\,[\mathrm{m}]; \quad c = 0,5\,[\mathrm{m}]; \quad l = 3\,[\mathrm{m}]$$
$$\rho = 2.800 \left[\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}\right]; \quad g = 9,81 \left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right].$$

a) Írjuk fel az $r(x)$ függvényt, ha tudjuk, hogy annak általános alakja

$$r(x) = A \cdot \sqrt{x} - B.$$

b) Határozzuk meg a tartóelemre ható gravitációs erő eredőjének nagyságát!

c) Határozzuk meg a tartóelemre ható gravitációs erő O pontra vonatkozó skaláris forgatónyomatékát!

d) Számítsuk ki gravitációs erő eredőjének O ponttól mért távolságát! (Ez nem más, mint a tartóelem súlypontjának O ponttól mért x irányú távolsága.)

Megoldás:

a) Az ábráról leolvasható, hogy a keresett függvény grafikonjára illeszkednek a $(0; -0,5)$ és a $(2; -0,2)$ pontok. Ezt felhasználva azt kapjuk, hogy teljesülnie kell az alábbi egyenletrendszernek:

$$-0,5 = -B$$
$$-0,2 = A \cdot \sqrt{2} - B.$$

Az első egyenletből azt kapjuk, hogy $B = 0,5$. Ezt a második egyenletbe behelyettesítve $A \approx 0,21$ adódik. Azt kaptuk tehát, hogy a keresett függvény:

$$r(x) = 0,21 \cdot \sqrt{x} - 0,5.$$

b) A feladat feltételei szerint a tartóra ható gravitációs erő $f(x)$ intenzitása, és a hasáb keresztmetszetét jellemző $r(x)$ függvénygörbe közötti összefüggés:

$$\begin{aligned} f(x) &= -l \cdot \rho \cdot g \cdot r(x) = -3 \cdot 2800 \cdot 9,81 \cdot (0,21 \cdot \sqrt{x} - 0,5) = \\ &= -82.404 \cdot (0,21 \cdot \sqrt{x} - 0,5). \end{aligned}$$

A nyomóerő nagysága

$$\begin{aligned} F &= \int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x = \\ &= -82.404 \cdot \int_0^2 0,21 \cdot \sqrt{x} - 0,5\,\mathrm{d}x = \\ &= -82.404 \left[0,21 \cdot \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - 0,5x\right]_0^2 = \\ &= -82.404 \cdot \left(0,21 \cdot \frac{2^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - 0,5 \cdot 2\right) - 0 = \\ &= -82.404 \cdot (-0,604) \approx 49.773\,[\mathrm{N}]. \end{aligned}$$

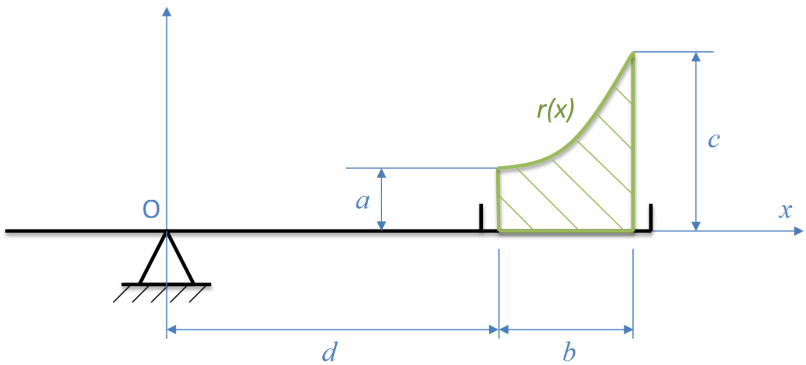
c) A skaláris forgatónyomaték nagysága:

$$\begin{aligned} \underset{O}{M} &= -\int_0^2 x \cdot f(x)\,\mathrm{d}x = -82.404 \cdot \int_0^2 0,21x^{\frac{3}{2}} - 0,5x\,\mathrm{d}x = \\ &= -82.404 \cdot \left[0,21\frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} - 0,5\frac{x^2}{2}\right]_0^2 \approx \\ &\approx -82.404 \cdot (-0,52) \approx 42.850\,[\mathrm{Nm}]. \end{aligned}$$

d) Az eredő támadáspontjának x_F koordinátája:

$$x_F = \frac{-\int\limits_0^2 x \cdot f(x)\,\mathrm{d}x}{\int\limits_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x} = \frac{42.850}{49.773} = 0,86.$$

7.3.3. **Feladat.** Az ábra egy egyensúlyban lévő kétkarú mérleget mutat, amelynek egyik serpenyőjében egy hasáb található.



A hasáb hossztengelye merőleges az ábra síkjára, így az ábrán a hasáb alaplapja látható. Az ábrán jelzett geometriai adatokon kívül ismert a hasáb hossztengely irányú l mérete, ρ sűrűsége, valamint a gravitációs gyorsulás g értéke. Továbbá tudjuk, hogy a hasáb által a serpenyőre kifejtett nyomóerő $f(x)$ intenzitása, és a hasáb keresztmetszetét jellemző $r(x)$ függvénygörbe közötti összefüggés az alábbi:

$$f(x) = l \cdot \rho \cdot g \cdot r(x).$$

Adatok:

$$a = 0,5\,[\mathrm{m}]; \quad b = 1\,[\mathrm{m}]; \quad c = 1,5\,[\mathrm{m}]; \quad l = 0,5\,[\mathrm{m}];$$

$$d = 2\,[\mathrm{m}]; \quad \rho = 5.000\left[\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}\right]; \quad g = 9,81\left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right].$$

a) Határozzuk meg $r(x) = \alpha \cdot 2^x + \beta$ függvény ismeretlen paramétereit!

b) Adjuk meg a hasáb által a serpenyőre kifejtett nyomóerő eredőjének nagyságát!

c) Számoljuk ki a hasáb által a serpenyőre kifejtett nyomóerő O pontra vonatkozó skaláris forgatónyomatékát!

d) Határozzuk meg az eredő támadáspontjának O ponttól mért távolságát!

Megoldás:

a) Mivel az $r(x)$ függvény grafikonjára illeszkedik a $(d; a) = (2; 0,5)$ és a $(d + b; c) = (3; 1,5)$ pont, ezért teljesül az alábbi egyenletrendszer:

$$0,5 = \alpha \cdot 2^2 + \beta$$
$$1,5 = \alpha \cdot 2^3 + \beta.$$

A második egyenletből kivonva az elsőt azt kapjuk, hogy $\alpha = \frac{1}{4}$, amit ha behelyettesítünk például az első egyenletbe $\beta = -\frac{1}{2}$ adódik. Így tehát azt kapjuk, hogy

$$r(x) = \frac{1}{4} \cdot 2^x - \frac{1}{2}.$$

b) A feladat feltételei szerint a serpenyőre kifejtett nyomóerő $f(x)$ intenzitása, és a hasáb keresztmetszetét jellemző $r(x)$ függvénygörbe közötti összefüggés:

$$f(x) = l \cdot \rho \cdot g \cdot r(x) = 0,5 \cdot 5000 \cdot 9,81 \cdot (0,25 \cdot 2^x - 0,5) =$$
$$= 6131,25 \cdot 2^x - 12262,5.$$

A nyomóerő nagysága

$$F = \int_2^3 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_2^3 6131,25 \cdot 2^x - 12262,5\,\mathrm{d}x =$$
$$= \left[\frac{6131,25}{\ln 2} \cdot 2^x - 12262,5x\right]_2^3 = 23.119,6\,[\mathrm{N}].$$

c) A skaláris forgatónyomaték nagysága:

$$\underset{O}{M} = -\int_2^3 x \cdot f(x)\,\mathrm{d}x = \int_2^3 6131,25 \cdot x \cdot 2^x - 12262,5x\,\mathrm{d}x =$$
$$= \int_2^3 6131,25 \cdot (x \cdot 2^x - 2x)\,\mathrm{d}x.$$

Az $x \cdot 2^x$ függvény egy primitív függvényét a parciális integrálás képletének felhasználásával tudjuk meghatározni:

$$\int x \cdot 2^x\,\mathrm{d}x = x \cdot \frac{2^x}{\ln 2} - \int \frac{2^x}{\ln 2}\,\mathrm{d}x = x \cdot \frac{2^x}{\ln 2} - \frac{2^x}{(\ln 2)^2}.$$

Ezt felhasználva

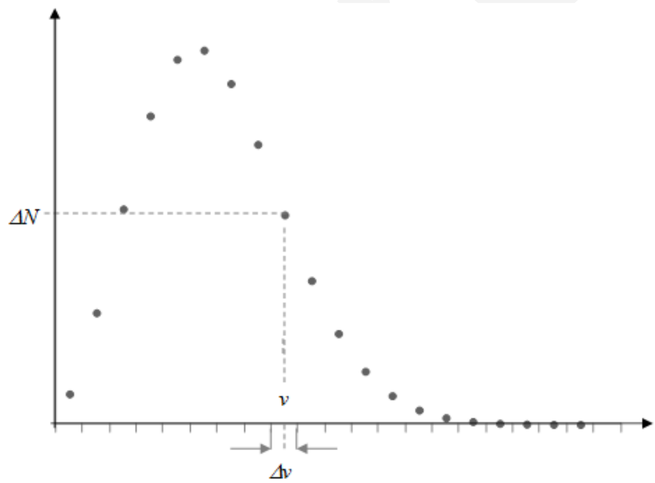
$$\underset{O}{M} = 6131,25 \cdot \left[x \cdot \frac{2^x}{\ln 2} - \frac{2^x}{(\ln 2)^2} - x^2 \right]_2^3 \approx 59.826,56\,[\mathrm{J}].$$

d) Az eredő támadáspontjának x_F koordinátája:

$$x_F = \frac{-\int\limits_2^3 x \cdot f(x)\,\mathrm{d}x}{\int\limits_2^3 f(x)\,\mathrm{d}x} \approx \frac{-58.826,56}{23.119,6} \approx 2,54.$$

7.4. Ideális gázok sebességeloszlása

Elméleti összefoglaló. Bármely gáz körülbelül $10^{-10}\,[\mathrm{m}]$ átmérőjű részecskék (atomok, molekulák) halmaza. A részecskék száma $22,41\,[\mathrm{dm}^3]$ normálállapotú $\left(P = 1,013 \cdot 10^5\,[\mathrm{Pa}], T = 273,15\,[\mathrm{K}]\right)$ ideális gázban $6 \cdot 10^{23}\,[\mathrm{db}]$. A nagyszámú részecske ellenére az ideális gázok igen ritkák. Ha teniszlabda nagyságúnak képzeljük el őket, akkor normálállapotban, egy átlagos méretű lakószobában 10–20 darab van belőlük. Ebből adódóan (figyelembe véve, hogy a részecskék közötti erőhatások rövid hatótávolságúak) a közöttük lévő kölcsönhatás elhanyagolható.
A gázrészecskék folytonos mozgásban vannak. Minden pillanatban találhatók közöttük lassabb és gyorsabb részecskék. Osszuk fel a teljes $[0; \infty[\,\left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right]$ sebességtartományt Δv hosszúságú intervallumokra. Ezt követően ábrázoljuk az egyes intervallumokba eső részecskék ΔN átlagos számát az intervallum közepéhez tartozó sebességnagyság függvényében. Így közelítőleg megkapjuk a részecskék számának sebességnagyság szerinti eloszlását:



Természetesen minél kisebbre választjuk az intervallum Δv hosszúságát, annál pontosabban megkapjuk a valós sebességnagyság szerinti eloszlást. A ΔN mennyiség helyett célszerűbb a Δv nagyságától független

$$n(v) = \lim_{\Delta v \to 0} \frac{\Delta N}{\Delta v} = \frac{dN}{dv}$$

mennyiséget ábrázolni. Szakirodalomból ismert, hogy az $n(v)$ függvény a gáz sebességnagyság szerinti eloszlásának sűrűségfüggvénye, amely az alábbi alakban írható fel:

$$n(v) = A \cdot v^2 \cdot \mathrm{e}^{-B \cdot v^2},$$

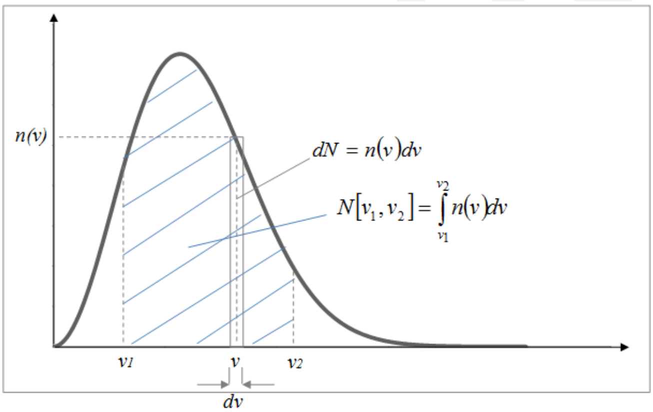
ahol

$$A = N \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi} \cdot \left(\frac{m_0}{k \cdot T}\right)^3}; \quad B = \frac{m_0}{2 \cdot k \cdot T}.$$

Az előbbi összefüggésekben m_0, v és N a gázrészecskék tömege, sebességnagysága és száma, T a gáz hőmérséklete,

$$k = 1,38 \cdot 10^{-23} \left[\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{K}}\right].$$

pedig a Boltzmann állandó. Az említett eloszlást *Maxwell-Boltzmann eloszlásnak* is nevezik.
Az $n(v)$ függvény grafikonját az alábbi ábra szemlélteti:



A sűrűségfüggvény segítségével kiszámolhatjuk a $[v_1; v_2]$ sebességtartományba eső részecskék átlagos számát:

$$N[v_1; v_2] = \int_{v_1}^{v_2} n(v)\,\mathrm{d}v.$$

Meghatározhatjuk a részecskék átlagos sebességnagyságát:

$$v_{\text{átlag}} = \frac{\int_0^\infty v \cdot n(v)\,\mathrm{d}v}{\int_0^\infty n(v)\,\mathrm{d}v} = \int_0^\infty v \cdot n(v)\,\mathrm{d}v,$$

valamint átlagos mozgási energiáját:

$$\varepsilon_{\text{átlag}} = \frac{\int\limits_0^\infty \varepsilon \cdot n(v)\,\mathrm{d}v}{\int\limits_0^\infty n(v)\,\mathrm{d}v} = \int\limits_0^\infty \varepsilon \cdot n(v)\,\mathrm{d}v.$$

Megjegyezzük, hogy mivel $n(v)$ sűrűségfüggvény, ezért

$$\int\limits_0^\infty n(v)\,\mathrm{d}v = 1.$$

A fenti összefüggésben ε az m_0 tömegű, v nagyságú sebsséggel haladó mozgási energiája, amit az

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \cdot m_0 \cdot v^2$$

összefügggés definiál.

Szükséges matematikai ismeretek. Egyváltozós függvények primitív függvény keresési módszerei, Newton-Leibniz formula, az integrálszámítás középérték tétele, Riemann integrál közelítő értékének kiszámolása (trapéz formula). Matematikai szoftverek használata numerikus integrálásra.

Mintafeladat. Egy kutatóintézetben félvezető anyagokat vizsgálnak. A vizsgálatokhoz alkalmazott mérőkamrában (turbó molekuláris szivattyúk segítségével) nagyvákuumot állítanak elő. A vizsgálat kezdetén a kamrában mindössze $N = 10^{12}$ darab nitrogénmolekula található. A maradék gáz további adatai az alábbiak:

$$m_0 = 4,652 \cdot 10^{-25}\,[\text{kg}]; \quad T = 273,15\,[\text{K}].$$

a) Írjuk fel a gáz sebességnagyság szerinti eloszlásának sűrűségfüggvényét $\big(n(v)\big)$, majd határozzuk meg annak első és második deriváltját!

b) Határozzuk meg azt a $v^\star$ sebességnagyságot, amellyel átlagosan a legtöbb részecske mozog! (A $v^\star$ sebesség az $n(v)$ függvény maximum helye.)

c) Vizsgáljuk meg az $n(v)$ függvényt konvexitás szerint, határozzuk meg a függvény inflexiós helyeit!

d) Vázoljuk fel az $n(v)$ függvény grafikonját!

e) Hány darab részecske tartózkodik átlagosan a $[100; 200]\left[\frac{\text{m}}{\text{s}}\right]$ sebességtartományban?

f) Határozzuk meg a részecskék átlagos sebességnagyságát!

g) Határozzuk meg a részecskék átlagos mozgási energiáját!

Megoldás:

a) Az elméleti összefoglalóban használt jelölések alapján az A paraméter értéke:

$$A = N \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi} \cdot \left(\frac{m_0}{k \cdot T}\right)^3} = 10^{12} \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi} \cdot \left(\frac{4,652 \cdot 10^{-26}}{1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 273,15}\right)^3} \approx$$

$$\approx 34.592 \left[\frac{\mathrm{s}^3}{\mathrm{m}^3}\right],$$

míg a B paraméter értéke:

$$B = \frac{m_0}{2k \cdot T} = \frac{4,652 \cdot 10^{-26}}{2 \cdot 1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 273,15} \approx 6,17 \cdot 10^{-5} \left[\frac{\mathrm{s}^2}{\mathrm{m}^2}\right].$$

A kapott eredményeket felhasználva a gáz sebességnagyság szerinti sűrűségfüggvénye:

$$n(v) = A \cdot v^2 \cdot \mathrm{e}^{-B \cdot v^2} = 34.592 \cdot v^2 \cdot \mathrm{e}^{-6,17 \cdot 10^{-5} \cdot v^2} \left[\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{m}}\right].$$

Az $n(v)$ függvény első deriváltja:

$$\begin{aligned} n'(v) &= 2Av \cdot \mathrm{e}^{-B \cdot v^2} - A \cdot v^2 \cdot \mathrm{e}^{-B \cdot v^2} \cdot 2Bv = \\ &= \mathrm{e}^{-B \cdot v^2} \cdot (2Av - 2ABv^3). \end{aligned}$$

Az $n(v)$ függvény második deriváltja:

$$\begin{aligned} n''(v) &= -2Bv \cdot \mathrm{e}^{-B \cdot v^2} \cdot (2Av - 2ABv^3) + \\ &+ \mathrm{e}^{-B \cdot v^2} \cdot (2A - 6ABv^2) = \\ &= \mathrm{e}^{-B \cdot v^2} \cdot (4AB^2v^4 - 10ABv^2 + 2A). \end{aligned}$$

b) Az $n(v)$ függvény maximum helyének meghatározásához először megoldjuk az $n'(v) = 0$ egyenletet. A megoldandó egyenlet

$$\mathrm{e}^{-B \cdot v^2} \cdot (2Av - 2ABv^3) = 0.$$

Mivel az $x \mapsto \mathrm{e}^x$ függvény sehol sem zérus, ezért $A \neq 0$, $v > 0$ miatt az egyenlet megoldására $v = \frac{1}{\sqrt{B}}$ adódik. Mivel

$$\begin{aligned} n''\left(\frac{1}{\sqrt{B}}\right) &= \mathrm{e}^{-1} \cdot \left(4AB^2 \cdot \frac{1}{B^2} - 10AB \cdot \frac{1}{B} + 2A\right) \\ &= \mathrm{e}^{-1} \cdot (-4A) = -\frac{4A}{\mathrm{e}} < 0, \end{aligned}$$

ezért a függvények lokális maximum helye van a $v = \frac{1}{\sqrt{B}}$ helyen. Mivel ez az egyetlen lokális maximum hely, ezért ez egyben globális maximum hely is. Azt kaptuk tehát, hogy

$$v^{\star} = \frac{1}{\sqrt{B}} = 127,3\left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right].$$

c) Az előbbiekben megkaptuk, hogy a $v = \frac{1}{\sqrt{B}}$ helyen globális maximum helye van az $n(v)$ függvény. A második derivált zérushelyeit $\mathrm{e}^{-B\cdot v^2} \neq 0$ miatt a

$$4AB^2v^4 - 10ABv^2 + 2A = 0$$

egyenlet megoldásával kapjuk. Vezessük be a $v^2 = u$ jelölést. Ekkor a

$$4AB^2u^2 - 10ABu + 2A = 0$$

egyenlethez jutunk. Mivel $A \neq 0$, ezért az egyenlet mindkét oldalát oszthatjuk A-val. Ekkor a

$$4B^2u^2 - 10Bu + 2 = 0$$

egyenletet kapjuk.A másodfokú egyenlet megoldóképletének alkalmazásával azt kapjuk, hogy

$$u_{1,2} = \frac{10B \pm \sqrt{100b^2 - 32B^2}}{8B^2} = \frac{10B \pm \sqrt{68}B}{8B^2} = \frac{5B \pm \sqrt{17}B}{4B^2},$$

azaz

$$u_1 = \frac{5+\sqrt{17}}{4B} \approx \frac{2,28}{B}; \quad u_2 = \frac{5-\sqrt{17}}{4B} \approx \frac{0,47}{\sqrt{B}}.$$

Mivel $v > 0$, ezért

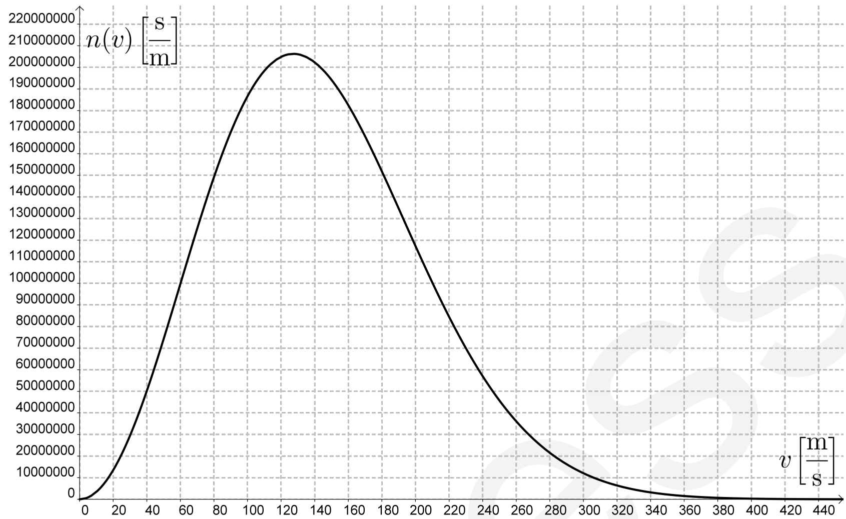
$$v_1 = \frac{1,51}{\sqrt{B}}; \quad v_2 = \frac{0,47}{\sqrt{B}}.$$

Az $n(v)$ függvény második deriváltjának előjeleit az alábbi táblázatban foglaljuk össze:

	$v < \frac{0,47}{\sqrt{B}}$	$v = \frac{0,47}{\sqrt{B}}$	$\frac{0,47}{\sqrt{B}} < v < \frac{2,28}{\sqrt{B}}$	$v = \frac{2,28}{\sqrt{B}}$	$v > \frac{2,28}{\sqrt{B}}$
$n''(v)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$n(v)$	konvex	ip	konkáv	ip	konvex

A fenti táblázatban az „ip” az inflexiós pont rövidítése.

d) Az $n(v)$ függvény grafikonja:



e) A $[100; 200]$ sebességtartományba eső részecskék átlagos száma:

$$N[100; 200] = \int_{100}^{200} n(v)\,\mathrm{d}v = \int_{100}^{200} A \cdot v^2 \cdot \mathrm{e}^{-B\cdot v^2}\,\mathrm{d}v.$$

A fenti integrált nem tudjuk kiszámolni a klasszikus módon, azaz nem alkalmazható a Newton-Leibniz tétel, ugyanis az integrálandó függvénynek nem létezik zárt alakban felírható primitív függvénye. Az integrál értékét numerikus matematikai módszerekkel vagy valamilyen matematikai programcsomag alkalmazásával számolhatjuk ki. Mi most az előbbit válaszjuk és trapéz formula segítségével adjuk meg az integrál közelítő értékét. Bontsuk fel a $[100; 200]$ intervallumot 5 egyenlő részre. Ekkor a megfelelő trapézok területének összege, ami a keresett integrál közelítő értéke:

$$\int_{100}^{200} A \cdot v^2 \cdot \mathrm{e}^{-B\cdot v^2}\,\mathrm{d}v \approx \frac{n(100)+n(120)}{2}\cdot 20 + \frac{n(120)+n(140)}{2}\cdot 20 +$$

$$+\frac{n(140)+n(160)}{2}\cdot 20 + \frac{n(160)+n(180)}{2}\cdot 20 +$$

$$+\frac{n(180)+n(200)}{2}\cdot 20 = 10\cdot\left(n(100) + 2\cdot n(120)\, +\right.$$

$$\left.+2\cdot n(140) + 2\cdot n(160) + 2\cdot n(180) + n(200)\right).$$

A megfelelő adatok behelyettesítése után azt kapjuk, hogy a $[100; 200]$ sebességtartományba eső részecskék átlagos száma közelítőleg $4,73 \cdot 10^{11}$.

f) A részecskék átlagos sebességnagysága

$$v_{\text{átlag}} = \frac{\int\limits_0^\infty v \cdot n(v)\,\mathrm{d}v}{\int\limits_0^\infty n(v)\,\mathrm{d}v} \approx 143,65 \left[\frac{m}{s}\right].$$

A számolásokat matematikai szoftver segítségével végeztük el.

g) A részecskék átlagos mozgási energiája:

$$\varepsilon_{\text{átlag}} = \frac{\int\limits_0^\infty \varepsilon \cdot n(v)\,\mathrm{d}v}{\int\limits_0^\infty n(v)\,\mathrm{d}v} \approx 5,66 \cdot 10^{-21}\,[\mathrm{J}].$$

A számolásokat matematikai szoftver segítségével végeztük el.

Gyakorló feladatok.

7.4.1. **Feladat.** Egy Van de Graaf típusú részecskegyorsító tartályában, a berendezés normál működése esetén nagy vákuum uralkodik. A tartályban található nitrogén molekulák száma $N = 2 \cdot 10^4$ [db]. A maradék gáz további adatai az alábbiak:

$$m_0 = 4,652 \cdot 10^{26}\,[\mathrm{kg}];\; T = 293,15\,[\mathrm{K}];\; k = 1,38 \cdot 10^{-23} \left[\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{K}}\right].$$

a) Írjuk fel a gáz sebességnagyság szerinti eloszlásának sűrűségfüggvényét $\big(n(v)\big)$, majd határozzuk meg annak első és második deriváltját!

b) Határozzuk meg azt a $v^\star$ sebességnagyságot, amellyel átlagosan a legtöbb részecske mozog! (A $v^\star$ sebesség az $n(v)$ függvény maximum helye.)

<u>**Megoldás**</u>:

a) Az elméleti összefoglalóban használt jelölések alapján az A paraméter értéke:

$$A = N \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi} \cdot \left(\frac{m_0}{k \cdot T}\right)^3} = 2 \cdot 10^4 \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi} \cdot \left(\frac{4,652 \cdot 10^{-26}}{1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 273,15}\right)^3} \approx$$

$$\approx 6,22 \cdot 10^{-4} \left[\frac{\mathrm{s}^3}{\mathrm{m}^3}\right],$$

míg a B paraméter értéke:

$$B = \frac{m_0}{2k \cdot T} = \frac{4,652 \cdot 10^{-26}}{2 \cdot 1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 273,15} \approx 5,74 \cdot 10^{-6} \left[\frac{\mathrm{s}^2}{\mathrm{m}^2}\right].$$

A kapott eredményeket felhasználva:

$$n(v) = A \cdot v^2 \cdot \mathrm{e}^{-B \cdot v^2} = 6,22 \cdot 10^{-4} \cdot v^2 \cdot \mathrm{e}^{-5,74 \cdot 10^{-6} \cdot v^2} \left[\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{m}}\right].$$

Az $n(v)$ függvény első deriváltja:

$$\begin{aligned} n'(v) &= 2Av \cdot \mathrm{e}^{-B \cdot v^2} - A \cdot v^2 \cdot \mathrm{e}^{-B \cdot v^2} \cdot 2Bv = \\ &= \mathrm{e}^{-B \cdot v^2} \cdot (2Av - 2ABv^3). \end{aligned}$$

Az $n(v)$ függvény második deriváltja:

$$\begin{aligned} n''(v) &= -2Bv \cdot \mathrm{e}^{-B \cdot v^2} \cdot (2Av - 2ABv^3) + \\ &\quad + \mathrm{e}^{-B \cdot v^2} \cdot (2A - 6ABv^2) = \\ &= \mathrm{e}^{-B \cdot v^2} \cdot (4AB^2v^4 - 10ABv^2 + 2A). \end{aligned}$$

b) Az $n(v)$ függvény maximum helyének meghatározásához először megoldjuk az $n'(v) = 0$ egyenletet. A megoldandó egyenlet

$$\mathrm{e}^{-B \cdot v^2} \cdot (2Av - 2ABv^3) = 0.$$

Mivel az $x \mapsto \mathrm{e}^x$ függvény sehol sem zérus, ezért $A \neq 0$, $v > 0$ miatt az egyenlet megoldására $v = \frac{1}{\sqrt{B}}$ adódik. Mivel

$$v'' \left(\frac{1}{\sqrt{B}}\right) < 0,$$

ezért a függvények lokális maximum helye van a $v = \frac{1}{\sqrt{B}}$ helyen. Mivel ez az egyetlen lokális maximum hely, ezért ez egyben globális maximum hely is. Azt kaptuk tehát, hogy

$$v^\star = \frac{1}{\sqrt{B}} = 417,04 \left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right].$$

7.4.2. **Feladat.** Egy mol normál állapotú nitrogén gázban hány darab gázrészecske sebessége haladja meg a normál állapotú levegőre vonatkozó hangsebességet? Megjegyezzük, hogy $v_{\text{hang}} = 331,5 \left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right]$? Emlékeztetünk arra, hogy egy mol normál állapotú nitrogén gáz esetén a részecskék száma, nyomása, hőmérséklete és tömege az alábbi:

$$N = 6,022 \cdot 10^{23}\,[\text{db}]; \quad p = 1,013 \cdot 10^{5}\,[\text{Pa}];$$
$$T = 273,15\,[\text{K}]; \quad m_0 = 4,652 \cdot 10^{-26}\,[\text{kg}].$$

Megoldás:

Nitrogén gáz esetén az elméleti összefoglalóban használt jelölések alapján az A paraméter értéke:

$$\begin{aligned} A &= N \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi} \cdot \left(\frac{m_0}{k \cdot T}\right)^3} = \\ &= 6,022 \cdot 10^{23} \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi} \cdot \left(\frac{4,652 \cdot 10^{-26}}{1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 273,15}\right)^3} \approx \\ &\approx 1,87 \cdot 10^{16} \left[\frac{\mathrm{s}^3}{\mathrm{m}^3}\right], \end{aligned}$$

míg a B paraméter értéke:

$$B = \frac{m_0}{2k \cdot T} = \frac{4,652 \cdot 10^{-26}}{2 \cdot 1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 273,15} \approx 5,74 \cdot 10^{-6} \left[\frac{\mathrm{s}^2}{\mathrm{m}^2}\right].$$

A kapott eredményeket felhasználva:

$$n(v) = A \cdot v^2 \cdot \mathrm{e}^{-B \cdot v^2} = 1,87 \cdot 10^{16} \cdot v^2 \cdot \mathrm{e}^{-5,74 \cdot 10^{-6} \cdot v^2} \left[\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{m}}\right].$$

Azon gázrészecskék számát, amelyek sebessége a hangsebességnél nagyobb, az alábbi improprius integrál adja:

$$\int_{331,5}^{\infty} A \cdot v^2 \cdot \mathrm{e}^{-B \cdot v^2}\,\mathrm{d}v.$$

A megfelelő adatokat behelyettesítve, majd az integrálást például a „Wolfram Alpha” számítógépes szoftver segítségével elvégezve azt kapjuk, hogy a részecskék száma: $4,45 \cdot 10^{23}$ [db].

8. fejezet

Differenciálegyenletek

8.1. Mozgástani feladatok

Elméleti összefoglaló. Newton törvényei a mozgástan alaptételei. Ha az anyagi pont tömege időben állandó Newton II. törvénye (más néven a mozgásegyenlet) az alábbi alakban írható fel:

$$\overline{F} = m \cdot \overline{a}.$$

A fenti összefüggésben $\overline{F}$ az eredő erő, amely Newton IV. törvényének értelmében az anyagi pontra ható egyes erők vektoriális összege.
Newton II. törvényét skalárisan beszorozva a pálya érintőjének irányába eső egységvektorral, megkapjuk a mozgásegyenlet pálya menti alakját:

$$\overline{F} \cdot \overline{e} = m \cdot \overline{a} \cdot \overline{e} \qquad \Rightarrow \qquad F = m \cdot a.$$

A fenti összefüggésben F az eredő erő pálya menti (érintő irányú) komponense, a pedig a pálya menti gyorsulás. Felhasználva, hogy

$$a(t) = \dot{v}(t) = \ddot{s}(t),$$

továbbá megadva a pálya menti sebesség és pályakoordináta értékét a $t = 0$ időpillanatban, a mozgásegyenlet az alábbi differenciálegyenlet, illetve kezdetiérték problémák valamelyikére vezet:

$$\begin{aligned}
(1) \quad & F(t) = m \cdot a(t) \\
(2) \quad & F\big(v(t), t\big) = m \cdot \dot{v}(t) \qquad v(0) = v_0 \\
(3) \quad & F\big(\dot{s}(t), s(t), t\big) = m \cdot \ddot{s}(t) \qquad s(0) = s_0, \quad \dot{s}(0) = v_0.
\end{aligned}$$

A fenti kezdetiérték problémák megoldásaként kapjuk az anyagi pont $a(t)$, $v(t)$ vagy $s(t)$ függvényét.

Szükséges matematikai ismeretek. Közvetlenül integrálható, szeparábilis és lineáris differenciálegyenletek megoldása, integrálási szabályok és módszerek.

1. Mintafeladat. Egy fegyverkísérlet során egy légvédelmi ágyúval egy 45 méter magas dombról tüzelünk függőlegesen felfelé. A lövedék kezdősebessége 40 $\left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right]$ nagyságú. A légellenállást elhanyagoljuk.

a) Adjuk meg a lövedék földtől való távolságát leíró függvényt!

b) Milyen magasan lesz a lövedék két másodperccel a kilövés után?

c) Milyen magasra repül fel a lövedék?

d) Mennyi idő telik el, amíg földet ér a lövedék?

<u>**Megoldás**</u>:

a) A lövedék mozgásegyenlete az alábbi:

$$-m \cdot g = m \cdot a(t).$$

Ez az elméleti összefoglalóban szereplő (1) típusú kezdetiérték probléma. A fenti egyenletből $m \neq 0$ miatt azt kapjuk, hogy

$$a(t) = -g.$$

A pálya menti sebesség-idő függvény:

$$v(t) = v(0) + \int_0^t a(\tau)\,\mathrm{d}\tau = v(0) + \int_0^t -g\,\mathrm{d}\tau = v(0) - g \cdot t.$$

A pályakoordináta-idő függvény:

$$h(t) = h(0) + \int_0^t v(\tau)\,\mathrm{d}\tau = h(0) + v(0) \cdot t - \frac{g}{2} \cdot t^2.$$

Az adatok behelyettesítése után azt kapjuk, hogy a lövedék t másodperccel a fellövés után

$$h(t) = -\frac{g}{2} \cdot t^2 + v(0) \cdot t + h(0) = -5t^2 + 40t + 45$$

méter magasságban lesz.

b) A lövedék magassága két másodperccel a fellövés után

$$h(2) = -5 \cdot 2^2 + 40 \cdot 2 + 45 = 105\,[\mathrm{m}].$$

c) A lövedék abban az időpillanatban éri el a maximális magasságot, amikor $h'(t) = 0$, azaz

$$-10t + 40 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad t = 4,$$

így 4 másodperccel a fellövés után éri el a maximális magasságot. Ekkor a magassága

$$h(4) = -5 \cdot 4^2 + 40 \cdot 4 + 45 = 125\,[\mathrm{m}].$$

d) A lövedék akkor ér földet, amikor

$$-5t^2 + 40t + 45 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad t^2 - 8t - 9 = 0$$

A másodfokú egyenlet megoldóképletének felhasználásával

$$t_{1,2} = \frac{8 \pm \sqrt{64 + 36}}{2} = \frac{8 \pm 10}{2}$$

adódik, így a fellövés után 9 másodperccel ér földet a lövedék.

2. Mintafeladat. Egy ágyúlövedéket $v_0 = 120\left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right]$ sebességgel lőnek ki függőlegesen felfelé. Határozzuk meg, mennyi idő elteltével éri el a lövedék a maximális magasságot, ha a rá ható közegellenállási erő nagyságát leíró összefüggés az alábbi alakú:

$$F = c \cdot v^2,$$

ahol v a lövedék pillanatnyi sebessége, c pedig a közegellenállási tényező.

<u>**Megoldás**</u>:

A lövedékre mozgása során a gravitációs és a légellenállási erő hat, így mozgásegyenlete az alábbi kezdetiérték probléma:

$$-m \cdot g - c \cdot v^2 = m \cdot a(t), \qquad v(0) = 120\left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right].$$

Ez az elméleti összefogllaóban szereplő (2) típusú kezdetiérték probléma. Az egyenlet mindkét oldalát osztva a tömeggel az alábbi egyenletet kapjuk:

$$a(t) = -g - \frac{c}{m} \cdot v^2.$$

Vezessük be a $k = \frac{c}{m}$ jelölést. Ekkor az

$$a(t) = -g - k \cdot v^2(t)$$

egyenlethez jutunk. A pálya menti gyorsulás-idő függvény a pályakoordinátaidő függvény deriváltja, így a

$$\dot{v}(t) = -g - k \cdot v^2(t)$$

differenciálegyenlethez jutunk. Ez egy szeparábilis differenciálegyenlet. Legyen $h(v) = -g - k \cdot v^2(t)$ és $f(t) = 1$. Ekkor a megoldandó egyenlet:

$$\int \frac{1}{-g - k \cdot v^2(t)}\,\mathrm{d}v = \int 1\,\mathrm{d}t.$$

A bal oldali integrálást végezzük el elsőként. Az integrandust arctg típusú integrálra vezetjük vissza. Ehhez elsőként végrehajtjuk az alábbi átalakításokat:

$$\int \frac{1}{-g - k \cdot v^2}\,\mathrm{d}v = -\int \frac{1}{g + k \cdot v^2}\,\mathrm{d}v = -\frac{1}{g} \cdot \int \frac{1}{1 + \frac{k}{g} \cdot v^2}\,\mathrm{d}v =$$
$$= -\frac{1}{g} \cdot \int \frac{1}{1 + \left(\sqrt{\frac{k}{g}} \cdot v\right)^2}\,\mathrm{d}v.$$

Felhasználva, hogy

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1 + x^2},$$

továbbá azt az integrálási módszert, miszerint

$$\int f(ax + b) = \frac{F(ax + b)}{a},$$

ahol F a f függvény egy primitív függvénye, azt kapjuk, hogy

$$-\frac{1}{g} \cdot \int \frac{1}{1 + \left(\sqrt{\frac{k}{g}} \cdot v\right)^2}\,\mathrm{d}v = -\frac{1}{g} \cdot \operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{k}{g}} \cdot v\right) \cdot \sqrt{\frac{g}{k}} =$$
$$= -\frac{1}{\sqrt{g \cdot k}} \cdot \operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{k}{g}} \cdot v\right).$$

A jobb oldal integrálja

$$\int 1\,\mathrm{d}t = t + c.$$

Azt kaptuk tehát, hogy

$$-\frac{1}{\sqrt{g \cdot k}} \cdot \operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{k}{g}} \cdot v\right) = t + c.$$

Az egyenletet rendezve azt kapjuk, hogy

$$\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{k}{g}} \cdot v\right) = -\sqrt{g \cdot k} \cdot t + C,$$

amiből

$$v(t) = \mathrm{tg}(-\sqrt{g \cdot k} \cdot t + C) \cdot \sqrt{\frac{g}{k}}$$

adódik. A lövedék abban a $t^\star$ időpillanatban éri el a maximális magasságot, amikor a sebessége zérus, azaz $v(t^\star) = 0$. Ekkor

$$\mathrm{tg}\left(-\sqrt{g \cdot k} + t^\star + C\right) = 0,$$

amiből azt kapjuk, hogy

$$C = \sqrt{g \cdot k} \cdot t^\star \qquad \Rightarrow \qquad t^\star = \frac{C}{\sqrt{g \cdot k}}.$$

A kezdeti érték feltételből

$$v(0) = 120,$$

így

$$120 = \sqrt{\frac{g}{k}} \cdot \mathrm{tg} C$$

adódik, amiből a C-t kifejezve azt kapjuk, hogy

$$C = \mathrm{arctg}\left(120 \cdot \sqrt{\frac{k}{g}}\right).$$

Tehát a lövedék a

$$t^\star = \frac{\mathrm{arctg}\left(120 \cdot \sqrt{\frac{k}{g}}\right)}{\sqrt{g \cdot k}}$$

időpillanatban éri el a legnagyobb magasságot.

3. Mintafeladat. Egy gépkocsi futóművét egy próbapadon vizsgálják. A vizsgálat során a futóművet függőleges irányú lengésbe hozzák. A lengetés megszűntével a futómű csillapodó lengőmozgást végez, mozgásegyenlete ekkor az alábbi alakú:

$$m \cdot \ddot{x}(t) + k \cdot \dot{x}(t) + D \cdot x(t) = 0 \qquad x(0) = -0,06\,[\mathrm{m}];\ v(0) = 0\left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right].$$

Adatok:

$$m = 250\,[\mathrm{kg}]; \quad k = 1500\left[\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}\right]; \quad D = 25000\left[\frac{\mathrm{N} \cdot \mathrm{s}}{\mathrm{m}}\right],$$

ahol m az üres gépkocsi rugózott felépítményének egy kerékre eső tömege, k a lengéscsillapító csillapítási tényezője, D a spirálrugó rugómerevsége, $x(0)$ és $v(0)$ a karosszéria függőleges irányú kitérése és sebessége a kiszállás pillanatában. Az autógumikat tekintsük tökéletesen rugalmatlannak.

a) Határozzuk meg a kitérés-idő függvényt!
b) Vázoljuk fel a kitérés-idő függvény grafikonját!

Megoldás:

a) Az

$$m \cdot \ddot{x}(t) + k \cdot \dot{x}(t) + D \cdot x(t) = 0$$

egyenlet mindkét oldalát m-el osztva azt kapjuk, hogy

$$\ddot{x}(t) + \frac{k}{m} \cdot \dot{x}(t) + \frac{D}{m} \cdot x(t) = 0.$$

Ez egy másodrendű, konstansegyütthatós, lineáris, homogén differenciálegyenlet, ami az elméleti összefoglalóban szereplő (3) típusú egyenlet. A megfelelő adatokat behelyettesítve azt kapjuk, hogy

$$\ddot{x}(t) + 6\dot{x}(t) + 100 = 0.$$

A differenciálegyenletnek megfelelő karakterisztikus egyenlet:

$$\lambda^2 + 6\lambda + 100 = 0.$$

A másodfokú egyenlet megoldása:

$$\lambda_1 \approx \frac{-6 + 19,08i}{2}, \quad \lambda_2 \approx \frac{-6 - 19,08i}{2}.$$

Mivel az egyenlet gyökei komplex számok, ezért a differenciálegyenlet általános megoldása az alábbi alakban áll elő:

$$x(t) = c_1 \cdot \mathrm{e}^{\alpha t} \cdot \cos(\beta t) + c_2 \cdot \mathrm{e}^{\alpha t} \cdot \sin(\beta t),$$

ahol α, illetve β a másodfokú egyenlet valamely komplex gyökének valós, illetve képzetes része. Behelyettesítve az α és β értékeket azt kapjuk, hogy

$$x(t) = c_1 \cdot \mathrm{e}^{-3t} \cdot \cos(9,54t) + c_2 \cdot \mathrm{e}^{-3t} \cdot \sin(9,54t).$$

Az $x(t)$ függvény deriváltja:

$$\dot{x}(t) = -3c_1 \cdot \mathrm{e}^{-3t} \cdot \cos(9,54t) - 9,54c_1 \cdot \mathrm{e}^{-3t} \cdot \sin(9,54t) -$$
$$- 3c_2 \cdot \mathrm{e}^{-3t} \cdot \sin(9,54t) + 9,54c_2 \cdot \mathrm{e}^{-3t} \cdot \cos(9,54t).$$

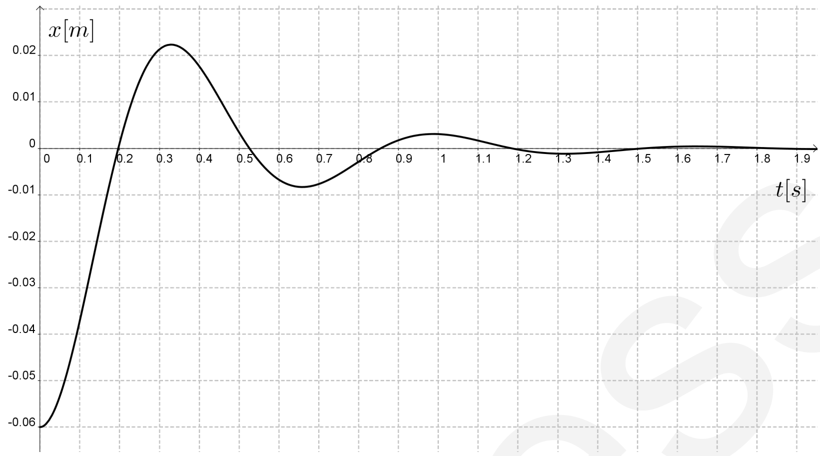
Mivel $x(0) = -0,06$ és $\dot{x}(0) = 0$, ezért

$$-0,06 = c_1$$
$$0 = -3c_1 + 9,54c_2.$$

Az egyenletrendszer megoldásával $c_2 \approx -0,01887$ adódik. A kitérés-idő függvény tehát:

$$x(t) = -0,06 \cdot \mathrm{e}^{-3t} \cdot \cos(9,54t) - 0,01887 \cdot \mathrm{e}^{-3t} \cdot \sin(9,54t).$$

b) A kitérés-idő függvény grafikonja:



Gyakorló feladatok.

8.1.1. **Feladat.** Valaki egy egyenes utca A pontjából indul az autójával és egyenletesen gyorsulva 10 másodperc alatt ér az utca B pontjába, ahol a sebessége 72 $\left[\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}\right]$. Határozzuk meg az A és B pontok távolságát!

<u>**Megoldás**</u>:

Jelöljük $s(t)$-vel a t idő alatt megtett utat. Mivel az időt SI egységben mérjük, ezért a sebességet átváltjuk $\left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right]$-ra:

$$72\left[\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}\right] = 20\left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right].$$

Az egyenletes gyorsulás miatt:

$$v(t) = a \cdot t + b.$$

A feltételek szerint $v(10) = 20\left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right]$, továbbá $s(0) = 0\,[\mathrm{m}]$ és $v(0) = 0\left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right]$. Ezeket felhasználva

$$0 = a \cdot 0 + b \qquad \Rightarrow \qquad b = 0,$$

másrészt $20 = a \cdot 10$, amiből $a = 2$ adódik. Mivel a pályasebesség-idő függvény a hely-idő függvény deriváltja, ezért az

$$\dot{s}(t) = a \cdot t + b$$

differenciálegyenlethez jutunk. Ez egy közvetlenül integrálható differenciálegyenlet. Mindkét oldalt integrálva

$$s(t) = \frac{a}{2} \cdot t^2 + b \cdot t + c = t^2 + c$$

adódik. Mivel azt is tudjuk, hogy $s(0) = 0$, ezért

$$0 = s(0) = 0^2 + c \qquad \Rightarrow \qquad c = 0$$

adódik, így a differenciálegyenlet megoldása

$$s(t) = t^2.$$

A 10 másodperc alatt megtett távolság

$$s(10) = 10^2 = 100$$

méter.

8.1.2. **Feladat.** Egy lövedéket $v_0 = 60 \left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right]$ sebességgel lőnek ki függőlegesen felfelé. Határozzuk meg a pálya menti sebesség-idő függvényt, ha a lövedékre ható közegellenállási erő nagyságát leíró összefüggés az alábbi alakú:

$$F = c \cdot v,$$

ahol v a lövedék pillanatnyi sebessége, c pedig a közegellenállási tényező.

Megoldás:

A lövedékre mozgása során a gravitációs és a légellenállási erő hat, így mozgásegyenlete az alábbi kezdetiérték probléma:

$$-m \cdot g - c \cdot v = m \cdot a(t), \qquad v(0) = 60 \left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right].$$

Ez az elméleti összefoglaóban szereplő (2) típusú kezdetiérték probléma. Az egyenlet mindkét oldalát osztva a tömeggel az alábbi egyenletet kapjuk:

$$a(t) = -g - \frac{c}{m} \cdot v.$$

Vezessük be a $k = \frac{c}{m}$ jelölést. Ekkor az

$$a(t) = -g - k \cdot v(t)$$

egyenlethez jutunk. A pálya menti gyorsulás-idő függvény a pályakoordinátaidő függvény deriváltja, így a

$$\dot{v}(t) = -g - k \cdot v(t)$$

differenciálegyenlethez jutunk. Ez egy elsőrendű, lineáris, inhomogén differenciálegyenlet. Elsőként a megfelelő homogén egyenletet oldjuk meg:

$$\dot{v}(t) = -k \cdot v(t).$$

Ez egy szeparábilis differenciálegyenlet. Az egyenlet megoldásához vezessük be a $h(v) = v$ és az $f(t) = -k$ függvényeket. Ekkor a megoldandó egyenlet:

$$\int \frac{1}{v}\,\mathrm{d}v = \int -k\,\mathrm{d}t.$$

Az integrálások elvégzése után az

$$\ln v = -k \cdot t + c$$

egyenlethez jutunk, amiből

$$v_h = \mathrm{e}^{-k\cdot t + c} = C \cdot \mathrm{e}^{-k\cdot t}$$

adódik. Az inhomogén egyenlet egy megoldását konstansvariálással határozzuk meg. Az inhomogén egyenlet egy megoldását

$$v_p = C(t) \cdot \mathrm{e}^{-k\cdot t}$$

alakban keressük. Ezt behelyettesítve az inhomogén egyenletbe

$$\mathrm{e}^{-k\cdot t} \cdot (-k) \cdot C(t) - \mathrm{e}^{-k\cdot t} \cdot C'(t) = -g - k \cdot \mathrm{e}^{-k\cdot t} \cdot C(t)$$

adódik. Az egyenletet átrendezve azt kapjuk, hogy

$$C'(t) = -g \cdot \mathrm{e}^{k\cdot t}.$$

Mindkét oldalt integrálva:

$$C(t) = -\frac{g}{k} \cdot \mathrm{e}^{k\cdot t}.$$

Az inhomogén egyenlet egy megoldása tehát:

$$v_p = -\frac{g}{k} \cdot \mathrm{e}^{-k\cdot t} \cdot \mathrm{e}^{k\cdot t} = -\frac{g}{k}.$$

A differenciálegyenlet általános megoldását a homogén egyenlet teljes megoldásának és az inhomogén egyenlet egy megoldásának összege adja:

$$v(t) = \mathrm{e}^{-k\cdot t} \cdot C - \frac{g}{k}.$$

Mivel $v(0) = 120$, ezért

$$120 = C - \frac{g}{k} \qquad \Rightarrow \qquad C = 120 + \frac{g}{k},$$

ezért a pálya menti sebesség-idő függvény:

$$v(t) = \mathrm{e}^{-k\cdot t} \cdot \left(\frac{g}{k} + 120\right) - \frac{g}{k}.$$

8.2. Bomlási és szaporodási modellek, oldódások és lehűlések

Elméleti összefoglaló. Fizikából ismert, hogy a radioaktív anyagok bomlásának gyorsasága arányos a még el nem bomlott atomok számával, ahol az arányossági tényező az adott anyagra jellemző állandó. Jelölje a radioaktív atommagok számát a t időpillanatban $N(t)$. Az előbb leírtaknak megfelelően az atommagok számának idő szerinti változási gyorsasága (deriváltja) egyenesen arányos $N(t)$-vel (minél több van belőle, annál gyorsabban bomlik). A folyamatnak megfelelő differenciálegyenlet

$$\dot{N}(t) = -\lambda \cdot N(t),$$

amely egy szeparábilis (szétválasztható változójú) differenciálegyenlet, ahol $\lambda > 0$ az úgynevezett *bomlási állandó*, a negatív előjel pedig azt jelzi, hogy a bomló anyag mennyisége csökken.

Tekintsünk egy pontszerű, amelyet állandó hőmérsékletű közeg vesz körül. Meghatározzuk a test hőmérséklet-idő függvényét, feltéve, hogy ismerjük a test kezdeti hőmérsékletét. Ehhez jelöljük a környezet (állandó) hőmérsékletét T_k-val, a test hőmérsékletét a t időpillanatban $T(t)$-vel és az ismert, $t = 0$ időpillanatbeli hőmérsékletét $T(0)$-al!
A Newton-féle hűlési törvény szerint a test hőmérsékletének változási gyorsasága, $\big(\dot{T}(t)\big)$ arányos a test és környezetének hőmérsékletkülönbségével, azaz $T(t) - T_k$-val. Így T-re a

$$\dot{T}(t) = -\kappa(T(t) - T_k)$$

differenciálegyenletet kapjuk, ahol κ rögzített, a test anyagára jellemző pozitív konstans. A jobb oldalon szereplő arányossági tényezőnek negatívnak kell lennie, hogy az egyenlet visszaadja a folyamatnak azt a tulajdonságát, miszerint a test hőmérséklete csökken (azaz $\dot{T}(t) < 0$), ha a környezet hidegebb (azaz $T(t) - T_k > 0$) és melegszik, ha a környezet a melegebb. Így a $T(t)$ függvény meghatározásához rendelkezésünkre áll az előbbi differenciálegyenlet. Ezen kívül a $T(t)$ függvénynek ismerjük még egy rögzített pontjában az értékét, hiszen tudjuk, hogy kezdetben a test hőmérséklete $T(0)$. Így egy szeparábilis differenciálegyenlethez tartozó kezdetiérték feladatot kapunk.

Szükséges matematikai ismeretek. Szeparábilis differenciálegyenletek megoldása.

1. Mintafeladat. A rádium felezési ideje 1590 év, azaz ennyi idő alatt bomlik el a még el nem bomlott atommagok számának a fele. Állapítsuk meg, hogy a rádium hány százaléka bomlik el 100 év alatt!

Megoldás:

Az elméleti összefoglalóban leírtak alapján a folyamatot leíró differenciálegyenlet

$$\dot{N}(t) = -\lambda \cdot N(t).$$

Az egyenlet megoldásához tekintsük a $g(t) = -\lambda$ és $h(N) = N$ függvényeket. Ekkor teljesülnie kell az

$$\int \frac{1}{N}\,\mathrm{d}N = \int -\lambda\,\mathrm{d}t$$

egyenletnek. Elvégezve az integrálásokat

$$\ln N = -\lambda t + c$$

adódik, amiből

$$N(t) = \mathrm{e}^{-\lambda t + c} = \mathrm{e}^{-\lambda t} \cdot \mathrm{e}^{c} = C \cdot \mathrm{e}^{-\lambda t}.$$

A $t = 0$ időpillanatban $N(0)$ atommag volt. Ekkor

$$N(0) = C \cdot \mathrm{e}^{-\lambda \cdot 0} = C,$$

így

$$N(t) = N(0) \cdot \mathrm{e}^{-\lambda t}.$$

Jelen esetben a felezési idő 1590 év, így $t = 1590$ esetén

$$N(1590) = \frac{N(0)}{2}.$$

Ezt felhasználva

$$\frac{N(0)}{2} = N(0) \cdot \mathrm{e}^{-1590\lambda},$$

amiből

$$\ln\frac{1}{2} = -1590\lambda \Rightarrow \lambda = -\frac{\ln 0,5}{1590} \approx 0,00044.$$

Ezt felhasználva 100 év múlva a jelen lévő atommagok száma

$$N(100) = N(0) \cdot \mathrm{e}^{-0,00044 \cdot 100} = N(0) \cdot 0,957,$$

így az atommagok 4,3%-a bomlik el 100 év alatt.

2. Mintafeladat. Egy frissen sült kenyér 10 perc alatt 100 [°C]-ról 60 [°C]-ra hűlt le. A környező levegő hőmérsékletét a pékek 20 [°C]-on tartják. Mennyi idő alatt hűl le a kenyér 25°C-ra?

<u>**Megoldás**</u>:

Jelölje $T(t)$ a kenyér hőmérsékletét a t időpillanatban. Ekkor $T(0) = 100\,[°\mathrm{C}]$ és $T(10) = 60\,[°\mathrm{C}]$. A külső környezet hőmérséklete $T_k = 20\,[°\mathrm{C}]$. Azt a t időpillanatot keressük, amikor $T(t) = 25\,[°\mathrm{C}]$. Az elméleti összefoglalóban ismertetett modell szerint

$$\dot{T}(t) = -k \cdot (T - T_k),$$

ami egy szeparábilis differenciálegyenlet. A $g(t) = -\kappa$ és $h(T) = T - T_k$ jelölést használva teljesülnie kell az

$$\int \frac{1}{h(T)}\,\mathrm{d}T = \int g(t)\,\mathrm{d}t$$

egyenletnek.
Behelyettesítve a megfelelő függvényeket

$$\int \frac{1}{T - T_k}\,\mathrm{d}T = \int -\kappa\,\mathrm{d}t$$

adódik. Elvégezve az integrálásokat

$$\ln|T - T_k| = -\kappa \cdot t + c,$$

amiből T-t kifejezve

$$T - T_k = C \cdot \mathrm{e}^{-\kappa \cdot t} \qquad \Rightarrow \qquad T(t) = C \cdot \mathrm{e}^{-\kappa \cdot t} + T_k.$$

Mivel $T(0) = 100\,[°\mathrm{C}]$, ezért

$$100 = C + 20 \qquad \Rightarrow \qquad C = 80.$$

Másrészt $T(10) = 60\,[°\mathrm{C}]$, ezért

$$60 = C\mathrm{e}^{-10\kappa} + 20,$$

amiből k értékét kifejezve

$$\frac{40}{80} = \mathrm{e}^{-10\kappa} \Rightarrow \ln\frac{1}{2} = -10\kappa \Rightarrow \kappa = \frac{\ln\frac{1}{2}}{-10}$$

adódik. Mivel $\ln \frac{1}{2} = \ln 2^{-1} = -\ln 2$, ezért

$$\kappa = -\frac{\ln 2}{-10} = \frac{\ln 2}{10}.$$

Tehát

$$T(t) = 80 \cdot \mathrm{e}^{-\frac{\ln 2}{10}t} + 20.$$

Azt a t időpillanatot keressük, amikor $T(t) = 25\,[^\circ\mathrm{C}]$, így megoldandó a

$$25 = 80 \cdot \mathrm{e}^{-\frac{\ln 2}{10}t} + 20$$

exponenciális egyenlet. Mindkét oldalból kivonva 20-at, majd elosztva 80-al azt kapjuk, hogy

$$\frac{5}{80} = \mathrm{e}^{-\frac{\ln 2}{10}t}.$$

Egyszerűsítve, majd mindkét oldal természetes alapú logaritmusát véve

$$\ln \frac{1}{16} = -\frac{\ln 2}{10}t$$

adódik. Felhasználva, hogy $\frac{1}{16} = 16^{-1}$ és 10-zel beszorozva az

$$10 \ln 16^{-1} = -t \ln 2 \qquad \Rightarrow \qquad \ln 16^{-10} = \ln 2^{-t}$$

egyenlethez jutunk. A logaritmus függvény szigorú monotonitása miatt azt kapjuk, hogy

$$16^{-10} = 2^{-t}.$$

Mindkét oldalt 2 hatványaként felírva

$$2^{-40} = 2^{-t}.$$

Az exponenciális függvény szigorú monotonitása miatt

$$-40 = -t \qquad \Rightarrow \qquad t = 40$$

adódik. Azt kaptuk tehát, hogy 40 másodperc alatt hűl le a kenyér 25°C-ra.

Gyakorló feladatok.

8.2.1. **Feladat.** Egy bányakőzet megvizsgált darabja $100\,[\mathrm{mg}]$ uránt és $14\,[\mathrm{mg}]$ ólmot tartalmaz. Ismert az urán felezési ideje $4,5 \cdot 10^9$ év és, hogy $238\,[\mathrm{g}]$ urán teljes elbomlásakor $206\,[\mathrm{g}]$ ólom keletkezik. Állapítsuk meg a bányakőzet korát! (Tegyük fel, hogy a keletkezése pillanatában a kőzet nem tartalmazott ólmot.)

Megoldás:

Ha 238 $[\mathrm{g}]$ uránból 206 $[\mathrm{g}]$ ólom keletkezik, akkor 14 $[\mathrm{mg}]$ ólom

$$14 \cdot \frac{238}{206} \approx 16,1748\,[\mathrm{mg}]$$

urán teljes elbomlásának terméke. Kezdetben a kőzetben

$$100 + 16,1748\,[\mathrm{mg}]$$

urán volt. Az urán bomlására felírhatjuk az

$$\dot{N}(t) = -\lambda \cdot N(t)$$

differenciálegyenletet. A mintafeladatban láttuk, hogy ennek megoldása

$$N(t) = N(0) \cdot \mathrm{e}^{-\lambda t}.$$

Mivel az urán felezési ideje $4,5 \cdot 10^9$ év, ezért

$$N(4,5 \cdot 10^9) = \frac{N(0)}{2},$$

így

$$N(0) \cdot \mathrm{e}^{-4,5 \cdot 10^9 \lambda} = \frac{N(0)}{2},$$

amiből $\lambda = 1,54 \cdot 10^{-10}$. Ezt felhasználva

$$116,1748 \cdot \mathrm{e}^{-1,54 \cdot 10^{-10} t} = 100,$$

amiből $t = 9,73 \cdot 10^8$ éves a kőzet.

8.2.2. **Feladat.** Egy baktériumtenyészetben a baktériumok számának növekedési gyorsasága egyenesen arányos a baktériumok számával. Ha a baktériumok száma 48 óra alatt 100-ról 1000-re nő, akkor hány baktérium volt a 24. óra végén?

Megoldás:

Jelölje $N(t)$ a baktériumok számát a t időpillanatban. Ekkor fennáll az

$$\dot{N}(t) = \lambda N(t)$$

egyenlet. Ez egy szeparábilis differenciálegyenlet. A $h(N) = N$, $g(t) = \lambda$ választással élve

$$\int \frac{1}{N}\,\mathrm{d}N = \int \lambda\,\mathrm{d}t$$

adódik. Elvégezve az integrálásokat

$$\ln N = \lambda t + c$$

adódik, amiből
$$N(t) = \mathrm{e}^{\lambda t + c} = \mathrm{e}^{\lambda t} \cdot \mathrm{e}^{c} = C \cdot \mathrm{e}^{\lambda t}.$$

Másrészt $N(0) = 100$ és $N(48) = 1000$, így
$$100 = N(0) = C,$$

továbbá
$$1000 = N(48) = 100 \cdot \mathrm{e}^{48\lambda},$$

követkesképpen
$$10 = \mathrm{e}^{48\lambda} \Rightarrow \lambda = \frac{\ln 10}{48}.$$

Ezt felhasználva
$$N(24) = 100 \cdot \mathrm{e}^{24 \cdot \frac{\ln 10}{48}} = 100 \cdot \mathrm{e}^{\frac{1}{2} \ln 10} =$$
$$= 100 \cdot \mathrm{e}^{\ln \sqrt{10}} = 100 \cdot \sqrt{10} \approx 316,$$

így körülbelül 316 baktérium volt a 24. óra végén.

8.2.3. **Feladat.** Teánkba 10 gramm cukrot szórunk és állandó keveréssel biztosítjuk az egyenletes oldódást. Megfigyelésünk szerint a cukor fele 15 másodperc alatt oldódik fel. Mennyi cukor lesz oldatlan állapotban 40 másoperccel azután, hogy a teába szórtuk a cukrot? Az oldatlan anyag mennyiségének változási gyorsasága arányos a még fel nem oldódott cukor mennyiségével.

Megoldás:

Legyen a t másodperc alatt még fel nem oldódott cukor tömege m gramm. Ekkor a folyamatot leíró differenciálegyenlet:
$$\dot{m}(t) = -k \cdot m(t),$$

ahol k a kölcsönhatásra jellemző arányossági tényező. Ezen differenciálegyenlet megoldására az előző fejezetben azt kaptuk, hogy
$$m(t) = m(0) \cdot \mathrm{e}^{-kt}.$$

A feltételeink szerint egyrészt $m(0) = 10\,[\mathrm{g}]$, másrészt $m(15) = 5\,[\mathrm{g}]$. Ezeket felhasználva az
$$5 = 10 \cdot \mathrm{e}^{-15k}$$

egyenlethez jutunk, melynek megoldása:
$$k = -\frac{\ln 0,5}{15} = \frac{\ln 2}{15}.$$

A keresett függvény tehát:

$$m(t) = 10 \cdot \mathrm{e}^{-\frac{\ln 2}{15} \cdot t}.$$

Ezt felhasználva azt kapjuk, hogy 40 másodperc elteltével

$$m(40) = 10 \cdot \mathrm{e}^{-\frac{\ln 2}{15} \cdot 40} = 10 \cdot \mathrm{e}^{-\frac{8}{3} \cdot \ln 2} = 10 \cdot 2^{-\frac{8}{3}} \approx 1,57\,[\mathrm{g}].$$

oldatlan cukor lesz a teában.

Irodalomjegyzék

[1] Árki Tamás – Konfárné Nagy Klára – Kovács István – Trembeczki Csaba – Urbán János, *Sokszínű matematika feladatgyűjtemény 11-12*, Mozaik Kiadó, Szeged, 2010.

[2] Babcsányi István – Gyurmánczi János – Szabó Lajos – Wettl Ferenc, *Matematika feladatgyűjtemény I.*, Műegyetemi Kiadó, 2009.

[3] Bartha Gábor – Bogdán Zoltán – Duró Lajosné dr. – Gyapjas Ferencné – Hack Frigyes – dr. Kántor Sándorné – dr. Korányi Erzsébet, *Matematika feladatgyűjtemény II.*, Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 2000.

[4] Bárczy Barnabás, *Differenciálszámítás*, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1994.

[5] Benkő Pálné – Diószegi Ferencné – Serény György, *Matematika feladattár II.*, Műegyetemi Kiadó, 2002.

[6] Császár Ákosné, *Matematika I/1*, Műegyetemi Kiadó, 2003.

[7] Csikós Pajor Gizella – Péics Hajnalka, *Analízis elméleti összefoglaló és példatár*, Bolyai Farkas Alapítvány, Zenta, 2010.

[8] Farkas István, *Differenciálszámítás gyakorlati jegyzet*, Debreceni Egyetem, 2005.

[9] Dr. Gerőcs László–Juhász István–Orosz Gyula– Paróczay József–Számadó László–Szászné Dr. Simon Judit, *Matematika emelt szintű tananyag*, Nemzedékek Tudása Tankönyvkiadó, 2013.

[10] Gilbert János – Sólyom András – Kocsányi László, *Fizika mérnököknek I-II, Egyetemi Tankönyv*, Műegyetemi Kiadó, 1999.

[11] J. Harcet – L. Heinrichs – P. M. Seiler – M. T. Skoumal, *Mathematics Higher Level*, Oxford University Press, 2012.

[12] Horváth Eszter – Inges János – Nagyné Pálmai Piroska – Róka Sándor – Tassy Gergely, *Tehetséggondozás a matematikában*, http://users.itk.ppke.hu/ adorjan/matematika/list.html, 2011.

[13] Jakus G. – Kis M. – Magyar T. – Zombori N., *Analízis példatár*, Budapest, 2014.

[14] Kézi Csaba Gábor, *Differenciálszámítás és alkalmazásai*, DUPress, 2016.

[15] Kézi Csaba Gábor, *Differenciálszámítás és alkalmazásai feladatgyűjtemény*, DUPress, 2016.

[16] Király Balázs, *Analízis (gyakorlat támogató jegyzet)*, elektronikus oktatási segédanyag, http://tamop412a.ttk.pte.hu/files/analizis.pdf, 2011.

[17] Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapok, 1996. január, 51. oldal, 2869. fizika feladat, http://db.komal.hu/KomalHU/felhivatkoz.phtml?id=41005

[18] Nagyné Kondor Rita – Szíki Gusztáv Áron, *Matematika eszközök mérnöki alkalmazásokban*, Egyetemi jegyzet, Debreceni Egyetem, 2011.

[19] Kovács József – Takács Gábor – Takács Miklós, *Analízis*, Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 1986.

[20] Kovács István – Trembeczki Csaba, *Sokszínű matematika feladatgyűjtemény, az analízis elemei 11–12 emelt szint*, Mozaik Kiadó, Szeged, 2011.

[21] Lengyel Csilla Mária, *Szélsőérték-feladatok különböző megoldási módszerei*, ELTE, szakdolgozat, 2012.

[22] Lial M. L. – Greenwell R. N. – Ritchey N. P., *Calculus with applications*, Pearson, 2012.

[23] Mendelson E., *3000 solved problems in calculus*, McGraw-Hill Companies, 1988.

[24] Nándori Frigyes – Szirbik Sándor, *Statika oktatási segédlet a Gépészmérnöki és Informatikai Kar Bsc levelezős hallgatói részére*, Mechanikai Tanszék, Miskolc-Egyetemváros, 2008.

[25] Pintér Lajos, *Analízis I.*, Typotex, 1998.

[26] Rosser M., *Basic mathematics for economists*, Routledge, 2003.

[27] Sikolya Eszter, *Analízis jegyzet Matematikatanári Szakosok részére*, elektronikus jegyzet, tankonyvtar.ttk.bme.hu, 2013.

[28] Simon Anita, *Az analízis néhány közgazdaságtani alkalmazása*, szakdolgozat, Eötvös Loránd Tudományegyetem, Természettudományi Kar, 2009.

[29] Szentelekiné Dr. Páles Ilona, *Analízis példatár*, Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 2011.

[30] Stewart J., *Calculus*, Brooks/Cole, 2012.

[31] Tan S. T., *Applied Calculus for the Managerial*, Life and Social Sciences, Brooks/Cole, 1999.

[32] Thomas G. B. – Weir M. D. – Hass J. – Giordano F. R., *Thomas féle kalkulus I. kötet*, Typotex, Budapest, 2008.

Tartalomjegyzék