



Metrikus terek pályatartó leképezései

doktori (PhD) értekezés

Papp Ildikó

Debreceni Egyetem
Debrecen, 2005.

Tartalomjegyzék

Bevezetés	3
1. Affinösszefüggő és Riemann terek geodetikus leképezései.....	9
Affinösszefüggő terek	10
Riemann terek.....	13
Geodetikus leképezések	18
Affinösszefüggő terek geodetikus leképezése	18
Riemann terek geodetikus leképezése	21
2. Finsler terek.....	29
Homogén függvények	30
Regularitás.....	33
Az alapfüggvény.....	34
Az indukált metrika.....	36
Konnexiók	40
Lineáris konnexió	40
Levi-Civita-féle konnexió.....	43
Berwald-konnexió	45
Cartan-konnexió	46
Skalár- és konstans görbületű Finsler terek.....	48
Speciális Finsler terek	50
Riemann terek.....	50
Lokálisan Minkowski terek	51
(α, β) -metrikával ellátott terek.....	53
Landsberg terek	57
Berwald terek.....	58
3. Projektív Finsler geometria.....	61
Projektív kapcsolat	62
Projektív invariansok.....	63
Síkprojektív Finsler terek	66
Speciális Finsler terek projektív megfeleltetése.....	70
4. Vizsgálatok speciális Riemann terekben.....	73
Az alapegyenletek új formája.....	73

Majdnem konformszimmetrikus Riemann terek geodetikus leképezései	79
5. Vizsgálatok speciális Finsler terekben	85
Rekurrens Finsler terek	85
Rekurrens Finsler terek geodetikus leképezése	87
Általánosított Douglas terek	91
*P-Finsler terek	93
Summary	96
Publikációs lista	104
Előadások listája	106
Irodalomjegyzék	107

Bevezetés

Bár az általánosított metrikus differenciálgeometriai - később Finsler - tér fogalmát Riemann [R] már 1854-ben felvetette a habilitációs előadásában, amelyben az n -dimenziós tér metrizálhatóságának különböző módoszatait vizsgálta, de a Finsler-geometria számos, figyelemre méltó eredménye az utóbbi száz évben született meg. Az utóbbi harminc évben a Finsler terek elméletének fejlődése felgyorsult, sorozatban jelentek meg a legújabb eredményeket tartalmazó monográfiák.

Riemann a fő hangsúlyt arra a metrikára helyezte, amely egy csak helytől függő együtthatójú pozitív definit kvadratikus forma négyzetgyökeként áll elő, de lehetséges általánosításként megemlítette azt a metrikát is, amit ma Finsler-metrikaként ismerünk. Riemann nagyjelentőségű újítása az volt, hogy geometriájában a görbület fogalmát is eleve belső nézőpontból fogalmazta meg. Ez a görbület kétdimenziós sokaságok esetében visszavezet a Gauss-görbülethez, de azonnal a metrikus tenzoron és parciális deriváltjain keresztül kifejezett formában. A Riemann-geometria elmélete tetszőleges véges dimenzióban megfogalmazható, és alapformulái minden dimenzióban azonosak.

A *Theorema Egregium*-ban Gauss eredetileg azt mutatta meg, hogy a görbület összes olyan mérőszáma közül, amely a G_1 és a G_2 főnormálgörbületekből alkotható meg, egyedül az szorzatgörbület (Gauss-görbület) az, amelyet a felületen belüli mérésekből is ki lehet számítani. Ez másképpen kifejezve annyit jelent, hogy csak a szorzatgörbület fejezhető ki egyedül a felület metrikus tenzorán és parciális deriváltjain keresztül. Gauss az összefüggést hosszadalmas számítással vezette le, és csak találgatni lehet, mi motiválta a számítás egyes lépéseit. A tételét maga Gauss is különösen nagyra értékelte, és tőle szokatlan módon ő maga adta neki a hangzatos *Theorema Egregium* nevet. Gauss tárgyalásmódjában a nehézség forrása az volt, hogy a görbület külső definíciójából indult ki, amelyről azután meg kellett mutatnia, hogy belső mérésekből is kiszámítható. Ezt a módszert Gauss nem is tudta magasabb dimenziójú sokaságokra általánosítani.

Riemann 1854-ben, egy évvel Gauss halála előtt nevezték ki magántanárrá a Göttingeni Egyetem matematikai tanszékére, amelynek Gauss volt a vezetője. Abban az időben az volt a szokás, hogy a habilitáción a jelölt három témát terjeszthetett elő, amelyek közül a tanszékvezető tetszése szerint választott ki egyet, de a szokás az volt, hogy az elsőt tűzte napirendre. Riemann harmadikként jelölte meg új geometriáját, amely annyira érdekelte Gausst, hogy ezt választotta a habilitációs előadás témájául.

A habilitációs előadásban matematikai levezetések nem szerepelhettek, csak utalni lehetett rájuk. Ennek ellenére Riemann előadásából világosan kirajzolódnak az új geometriai felfogásmód kontúrjai. Mindenekelőtt arra mutat rá, hogy a geometriát a metrikus sajátosságokra kell alapozni, és megindokolja, miért célszerű két közeli pont távolságát a koordinátakülönbségekből képzett pozitív definit kvadratikussá formát négyzetgyökeként definiálni. Ennek a metrikus formának a létezése teszi lehetővé, hogy *belső* kritérium alapján állapíthassuk meg, mikor „sík” (ez Riemann kifejezése) egy n -dimenziós sokaság. (Akkor, ha a metrikus formát koordinátatranszformációval $dx_1^2 + dx_2^2 + \dots + dx_n^2$ alakra lehet hozni.)

A szükséges és elégséges feltétel megfogalmazása érdekében vezetett be Riemann azt a speciális koordinátarendszert, amelyet ma Riemann-koordinátáknak nevezünk.

Jelöljük ki az origót és minden irányban indítsunk el belőle „legrövidebb egyeneseket”. Minden ponthoz meghatározzuk a ponton átmenő egyenes mentén az origótól mért r távolságot és az egyenes origóbéli iránykoszinuszait, és ezekből a mennyiségekből a pont x_1, x_2, \dots, x_n koordinátáit ugyanolyan képletekkel számítjuk ki, mint két és három dimenzióban a Descartes-koordinátákat ($x_i = r \cdot c_i$, $c_i \equiv \cos \vartheta_i$). A konstrukcióból világos, hogy ha a sokaság görbüetlen, akkor Descartes-koordinátarendszerre jutunk, amelyben a metrikus forma $dx_1^2 + dx_2^2 + \dots + dx_n^2$. A görbület az ettől való eltéréssel jellemezhető.

Riemann-koordinátákban az origón átmenő „legrövidebb egyenesek” egyenlete $x_i = r \cdot c_i$, és két olyan pontra, amelyek mindketten ugyanazon az $x_i = r \cdot c_i$ egyenesen fekszenek az ívelem négyzete: $dl^2 = dr^2 = \sum dx_i^2$.

Riemann arra a következtetésre jutott, hogy, hogy az origó közelében - x_i - ben kvadratikusan pontosan - az ívelemnégyzet általános alakja a következő:

$$dl^2 \approx \sum dx_i^2 + \sum \alpha_{ijkl} x_i x_k \cdot dx_j dx_l .$$

Riemann belátta, hogy a sokaság akkor és csak akkor sík, ha $\alpha_{ijkl} = 0$. Abban az időben nem létezett még a tenzor fogalma, a görbületi tenzor mégis jogosan viseli Riemann nevét. Belátható ugyanis, hogy

$$\alpha_{ijkl} = -\frac{1}{3} R_{ijkl} .$$

Mint látjuk, a Riemann-koordináták jelentősége messze túlmutat azon, hogy az origóban $g_{ij} = \delta_{ij}$ és $\Gamma_{jk}^i = 0$. Ilyen tulajdonságú koordinátarendszer sok van. A Riemann-koordináták különlegességét a

$$dl^2 \approx \left(\delta_{ik} - \frac{1}{3} R_{ijkl} x^j x^l \right) dx^i dx^k$$

képlet fejezi ki. Az α_{ijkl} mennyiségeket Riemann - mai szóhasználattal - szekcionális görbületként interpretálja.

A Finsler-téren lényegében minden pont érintőterében egy-egy általánosított normafüggvény van megadva, amely nem szükségképpen származik belső szorzatból. Meglepő módon a Riemann-tér ilyenfajta általánosítása több mint hatvan évre feledésbe merült. Riemann maga, bonyolultságra hivatkozva vetette el az - ekkor még „általánosított metrikának” nevezett - új lehetőséget.

Az első fontos eredmény ebben a témakörben Paul Finsler [F1] 1918-ban megjelent dolgozata. Finslert a tanára, Carathéodory által bevezetett és a variációszámítás paraméteres problémáinak megoldására alkalmazható új geometriai módszerek ihlették, amelyek alapjaként az induktrix fogalma szolgált. 1925-ben J. H. Taylor [T], J. L. Synge [Sy] és L. Berwald [B1], [B2] szinte egyidejűleg kezdte el az elméletnek a tenzoranalízis eszközeivel való vizsgálatát. Elsődleges céljuk a tér geometrizálása, azaz a metrikával összhangban lévő párhuzamosság

fogalom, illetve deriválási kalkulus kiépítése volt. A Finsler-tér elnevezést 1927-ben J. H. Taylor vezette be.

A vektorok párhuzamos eltolásánál a metrikusság követelményének a kielégítése szükségessé tette (teszi), hogy a Finsler teret a ponttérenél bonyolultabb térnek, vonalelemtérenként tekintsük. Ez a gondolat Cartantól [Ca] származik 1934-ből. A vonalelemtéren már meg lehet adni olyan konnexitásparámétereket (és így kovariáns deriválást is), amely hasonlít a Riemann-terek elméletéből ismertekhez. Számos fizikai probléma vizsgálata esetén azonban sokkal hasznosabb, ha mégis ponttérenként tekintjük a Finsler teret, másrészt a Cartan-féle megközelítés jelentősen csökkenti a Finsler-elmélet és a variációszámítás kapcsolatát.

A második világháborút követően a Finsler-geometria egy új fejezete kezdődött, amikor H. Busemann [Bu1] célul tűzte ki a „Finsler-geometria erdejének megtisztogatását a tenzorok dzsungelétől”, továbbá hangsúlyozta a Minkowski-geometria tanulmányozását a Finsler-geometria minél gyorsabb fejlődése érdekében [Bu2], [Bu3].

Már a Finsler-geometria kiépítésekor is jól megfigyelhető a meglévő geometriákban fennálló összefüggések vizsgálata, általánosítása. Önként kínálkozik az a gondolat, hogy akár a tér metrikus jellegét szem előtt tartva, akár arról lemondva foglalkozzunk a geodetikusok illetve a pályák elméletével. (E két, Riemann-terek esetén szinonim fogalom általánosabb terekben szétválhat.) A geodetikusok és a pályák illetve a geodetikus- és a pályatartó leképezések vizsgálata a Finsler-geometria bármely periódusában időszzerűnek bizonyult. Napjainkban (többek között) Makoto Matsumoto és Bácsó Sándor publikációi világítják meg újabb oldalról ezen leképezések tulajdonságait.

Az utóbbi évtizedekben a Finsler-geometriában számos figyelemre méltó eredmény látott napvilágot, előtérbe került a Finsler-terek kutatása. A teljesség igénye nélkül álljon itt az ezidőtájt íródott, kiváló összefoglaló, áttekintő jellegű munkák, monográfiák szerzőinek névsora, akiknek nevéhez egy-egy iskola működése is kapcsolódik: M. Matsumoto [M2], S. S. Chern, D. Bao, Z. Shen [BCS], [She3]. A valós Finsler-metrikákat vizsgáló írások mellett megszülettek a komplex Finsler-metrikákkal foglalkozó tanulmányok is.

A Finsler-geometria történetét vizsgálva szembeötlő, hogy már a korai eredmények alkalmazásai is milyen hasznosnak bizonyultak a fizikában. Az

alkalmazások köre az utóbbi időben jelentősen bővült, a fizika, a biológia mellé egyéb tudományterületek is felsorakoztak [AIM], [AM].

A szerző eredményeit, melyek részben Bácsó Sándorral közös munka termékei, a 4. és 5. fejezet tartalmazza. Az 1-3. fejezet a 4. és 5. fejezetek eredményeit előkészítő ismereteket foglalja össze. Eredményeimet a [BP1], [BP2], [BP3], [BGYPSZ] dolgozatokban jelentettem meg. A 4. fejezet 1. és 2. lemmája és 1. tétele a szerző saját, illetve az 5. fejezet 1.-5. tételei társszerzőkkel közös eredménye.

Ezúton mondok köszönetet témavezetőmnek, Dr. Bácsó Sándornak, a munkámban való segítségéért és hasznos tanácsaiért.

Hálával tartozom a családomnak, akik végig támogatták a tanulmányaimat, valamint a kollegáimnak, akik bíztattak, példát mutattak és figyelemmel kísérték a munkám.

1. Fejezet

Affinösszefüggő- és Riemann terek geodetikus leképezései

Az affinösszefüggő terek az affin terek általánosításai, melyekben az alapprobléma a vektorok párhuzamossága és párhuzamos eltolása. A Riemann-terek az euklideszi terek általánosításai, ahol az alapkérdés az ívhosszmérés. [RT]

Az affin ill. euklideszi terekben a legkényelmesebb az egyenesvonalú koordinátarendszer használata. Ennek oka az, hogy a görbevonalú koordinátarendszerben a vektorok párhuzamosságát, illetve az ívhosszmérést leíró formulák általában lényegesen bonyolultabbak, fellépnek bizonyos alapvető fontosságú Γ_{jk}^i ill. g_{ij} mennyiségek, melyeket a görbevonalú koordinátarendszer, illetve az azt leíró függvények határoznak meg. Az általánosítás úgy történik, hogy az Γ_{jk}^i és g_{ij} mennyiségeket nem egy koordinátatranszformációból (az egyenesvonalúból a görbevonalúra való áttérést leíró transzformációból) vezetjük le, hanem bizonyos feltételek figyelembevételével mi adjuk meg azokat. A párhuzamosságot és az ívhosszat olyan formulákkal definiáljuk, melyeket a görbevonalú koordinátarendszerben kaptunk, ezzel az affinösszefüggő, ill. a Riemann-terekhez jutottunk.

Egy Riemann-tér két igen egyszerű és természetes feltétel teljesülése után mindig egyértelműen meghatároz egy affin összefüggést. A Riemann-tér ilyen értelemben mindig affinösszefüggő tér is, ezért az affinösszefüggő terek legtöbb tétele és összefüggése a Riemann-terekben is igaz. A Riemann-tér gazdagabb, az affinösszefüggő tér egyszerűbb struktúrájú. Meg kell jegyezni azonban, hogy a Riemann-terek vizsgálata már egy fél évszázada folyt, amikor a Riemann-terekben a vektorok párhuzamos eltolásának kérdését Levi-Civita 1912-ben megoldotta. A párhuzamos

eltolásnak a Riemann-metrikától való elkülönítése és így az affinösszefüggés önálló tanulmányozása csak ekkor indult meg, bár ezután igen gyorsan haladt előre.

A Riemann terek apparátusát, a tenzoranalízist a XX. század első felében T. Levi-Civita és G. Ricci olasz matematikusok fejlesztették ki. A Riemann terek bőséges alkalmazásra találtak a mindenekelőtt fizikai terek elméletében és az Einstein-féle relativitás elméletben.

Affinösszefüggő terek

Mielőtt az affinösszefüggő tér definícióját megadnánk, tekintsünk egy példát.

Az euklideszi sík tetszőleges egyenesét a Descartes-féle koordináta-rendszerben a t paraméter lineáris függvényeként írhatjuk fel: $x=a \cdot t+c$ és $y=b \cdot t+d$, ahol a, b, c, d valós konstansok, és az a és b egyszerre nem tűnhetnek el. [Jeg] Ebből következik, hogy az előbbi függvények a

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = 0$$

másodrendű közönséges differenciálegyenlet-rendszer megoldásai. Ez az egyenletrendszer ugyanilyen alakú marad akkor is, ha az x és y koordinátákra nemelfajuló lineáris transzformációt alkalmazunk. Általánosabb alakú koordináta-transzformáció esetén azonban a fenti egyenletrendszer alakja megváltozik. Görbevonalú koordinátarendszerben az egyenletrendszer a következő alakot ölti:

$$\begin{aligned} \frac{d^2x^1}{dt^2} &= -\Gamma_{11}^1(x^1, x^2) \left(\frac{dx^1}{dt} \right)^2 - 2\Gamma_{12}^1(x^1, x^2) \frac{dx^1}{dt} \frac{dx^2}{dt} - \Gamma_{22}^1(x^1, x^2) \left(\frac{dx^2}{dt} \right)^2, \\ \frac{d^2x^2}{dt^2} &= -\Gamma_{11}^2(x^1, x^2) \left(\frac{dx^1}{dt} \right)^2 - 2\Gamma_{12}^2(x^1, x^2) \frac{dx^1}{dt} \frac{dx^2}{dt} - \Gamma_{22}^2(x^1, x^2) \left(\frac{dx^2}{dt} \right)^2. \end{aligned}$$

Az egyenletrendszer jobb oldalán az első deriváltak homogén másodfokú polinomjai állnak. Az egyenletrendszert 6 darab kétváltozós $\Gamma_{jk}^i = \Gamma_{kj}^i$ ($i, j, k=1, 2$), a koordinátarendszertől függő, ismert függvény adja meg. Könnyen igazolható, hogy az $\bar{x}^j = \bar{x}^j(x^1, x^2)$ lokális koordináta-transzformáció során a Γ_{jk}^i függvények a

$$\bar{\Gamma}_{ij}^k(\bar{x}) = \frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial \bar{x}^i \partial \bar{x}^j} \frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^\alpha} + \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha(x) \frac{\partial x^\beta}{\partial \bar{x}^i} \frac{\partial x^\gamma}{\partial \bar{x}^j} \frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^\alpha}$$

szabály szerint transzformálódnak. Két affin összefüggés izomorf, ha az egyik a másiktól invertálható koordináta-transzformációval származtatható. A közönséges sík affin-összefüggése rendelkezik azzal a tulajdonsággal, hogy alkalmas koordinátarendszerben minden komponens nulla. Az ilyen *affin koordinátarendszert* nevezzük.

A fenti példában azt láttuk, hogy 6 (a dimenziószámmal kifejezve: $n^2(n+1)/2$) darab Γ_{jk}^i függvényt kellett megadnunk, amelyek rendelkeztek a j, k indexekben szimmetria tulajdonsággal. A belőlük invertálható koordináta-transzformációval származtatható újabb $\bar{\Gamma}_{jk}^i$ függvények is szimmetrikusak lesznek az alsó indexekben. Az általánosítás felé haladva a térben a transzformációs szabálynak eleget tevő, n^3 darab Γ_{jk}^i függvényt adunk meg, és nem várjuk el az előbb említett szimmetriát.

Definíció:[RT] Az X^n n -dimenziós differenciálható sokaságot *affinösszefüggő térnek* nevezzük és a továbbiakban A^n -nel jelöljük, ha minden koordinátarendszerben van n^3 számú Γ_{jk}^i függvény úgy, hogy az (x) koordinátarendszerről az (\bar{x}) koordinátarendszerre való áttérés esetén a Γ_{jk}^i és $\bar{\Gamma}_{jk}^i$ összefüggési együtthatók közötti kapcsolat a

$$\frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^\alpha} \bar{\Gamma}_{ij}^\alpha(\bar{x}) = \frac{\partial^2 x^k}{\partial \bar{x}^i \partial \bar{x}^j} + \Gamma_{\beta\gamma}^k(x) \frac{\partial x^\beta}{\partial \bar{x}^i} \frac{\partial x^\gamma}{\partial \bar{x}^j} \quad (1.1)$$

alakban adható meg.

Definíció: [RT] Legyen A^n egy affinösszefüggő tér. A Γ_{jk}^i összefüggési koefficiensek felhasználásával *görbületi tenzort* (Riemann tenzor) definiálhatunk a következő képpen

$$R_{ijk}^h = \partial_j \Gamma_{ik}^h(x) + \Gamma_{ik}^\alpha(x) \Gamma_{j\alpha}^h(x) - \partial_k \Gamma_{ij}^h(x) - \Gamma_{ij}^\alpha(x) \Gamma_{k\alpha}^h(x). \quad (1.2)$$

Definíció: [RT] Az $x(t)$ görbe mentén vett $\xi^i(t)$ vektormezőt akkor nevezzük *párhuzamosnak*, ha

$$\frac{d\xi^i}{dt} + \Gamma_{jk}^i(x(t)) \xi^j(t) \frac{dx^k}{dt} = 0. \quad (1.3)$$

Definíció: [RT] Egy $\xi^i(x)$ vektormezőt *abszolút párhuzamosnak* nevezzük, ha bármely görbe mentén párhuzamos vektormezőt határoz meg.

Tétel: Az abszolút párhuzamos vektormezők korlátlan létezésének szükséges és elegendő feltétele a görbületi tenzor eltűnése.

Definíció: [RT] Legyen A^n egy affinösszefüggő tér. Az

$$S_{jk}^i := \Gamma_{jk}^i - \Gamma_{kj}^i$$

tenzort az A^n *torzió tenzorának* nevezzük.

Az affinösszefüggő tér az affin tér általánosítása. Az affin terekben az összefüggési koefficiensek a j, k indexekben szimmetrikusak (azaz $\Gamma_{jk}^i = \Gamma_{kj}^i$), valamint létezik olyan koordinátarendszer, melyben $\Gamma_{jk}^i = 0$. Az affin tereket a görbületi tenzor és a torzió tenzor eltűnése jellemzi.

Definíció: Legyen A^n egy affinösszefüggő tér. Az $x(t)$ görbét *pályának* nevezzük, ha kanonikus paraméterben (vagy kitüntetett paraméter esetén) az egyenlete

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} + \Gamma_{jk}^i \frac{dx^j}{dt} \frac{dx^k}{dt} = 0 \quad (1.4)$$

alakú, ahol a Γ_{jk}^i a tér összefüggési koefficiensei.

Riemann terek

Definíció: Az X^n n -dimenziós differenciálható sokaságot *Riemann térnek* nevezzük és a továbbiakban V^n -nel jelöljük, ha megadunk rajta egy kétszer kovariáns, szimmetrikus g_{ij} tenzormezőt, ahol a $g_{ij}(x)$ tenzor egy pozitív definit kvadratikus forma együttható rendszere, azaz

$$ds^2 = g_{\alpha\beta}(x) dx^\alpha dx^\beta > 0 \quad \forall dx^i \neq 0 \text{ esetén.}$$

Ezt a kvadratikus formát a Riemann tér *metrikus alapformájának* nevezzük. A $g_{ij}(x)$ a Riemann tér *metrikus tenzora*, amely meghatározza a mérés alapformuláit.

Legyen $x^i(t)$ ($t_1 < t < t_2$) egy görbe V^n -ben. A görbe t_1 és t_2 paraméterű pontjai közötti ívének *ívhossza*

$$s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{g_{\alpha\beta}(x(t)) x^\alpha(t) x^\beta(t)} dt.$$

A $g_{ij}(x)$ felhasználásával a V^n érintőterében *belsőszorzatot* definiálunk

$$\langle \xi, \eta \rangle = g_{\alpha\beta}(x) \xi^\alpha \eta^\beta,$$

ahol ξ és η az x pontból induló tetszőleges vektorok. A belsőszorzatból meghatározható a ξ *hossza*:

$$\|\xi\| = \sqrt{\langle \xi, \xi \rangle} = \sqrt{g_{\alpha\beta}(x) \xi^\alpha \xi^\beta}.$$

Az x pontból induló ξ és η vektorok által bezárt szög cosinusát a

$$\cos \varphi = \frac{\langle \xi, \eta \rangle}{\|\xi\| \|\eta\|} = \frac{g_{\rho\sigma}(x) \xi^\rho \eta^\sigma}{\sqrt{g_{\alpha\beta}(x) \xi^\alpha \xi^\beta} \sqrt{g_{\gamma\delta}(x) \eta^\gamma \eta^\delta}}$$

képlet adja meg.

Legyen $B(x)$ a V^n egy korlátos, zárt, mérhető tartománya. A $B(x)$ *mértéke*

$$A = \int \int \dots \int_{B(x)} \sqrt{\det(g)} dx^1 dx^2 \dots dx^n.$$

A fenti integrál $n=2$ esetben a felületet, $n=3$ esetben a térfogatot adja.

Tehát az X^n sokaságon úgy adunk meg egy Riemann-metrikát, hogy az X^n sokaság érintőnyalábján megadunk egy euklideszi, vagy pszeudoeuklideszi struktúrát, mely differenciálható módon függ az $x \in X^n$ ponttól.

A legegyszerűbb példa a Riemann-térre az n -dimenziós euklideszi-tér. Ebben az esetben tetszőleges e_i bázist választhatunk az affin koordinátarendszer megszerkesztéséhez. Az affin koordinátatér pontjaiban a g_{ij} metrikus tenzor komponensei állandók: $g_{ij} = \langle e_i, e_j \rangle$, a bázisvektorok páronként vett belsőszorzatai adják, ahol $\det(g_{ij}) \neq 0$, $(i, j=1, \dots, n)$. A Riemann tér az euklideszi tér általánosítása. Az Euklideszi teret jellemzi olyan koordinátarendszer létezése, ahol $g_{ij} = \delta_{ij}$. (A δ_{ij} a Kronecker-féle szimbólum.)

Egy másik példa az n -dimenziós euklideszi térre az $(n+1)$ -dimenziós euklideszi tér egy hiperfelületének belső geometriája.

Definíció: [RT] Legyen V^n egy Riemann tér. A g_{ij} metrikus tenzor felhasználásával

$$\Gamma_{hij} = \frac{1}{2} (\partial_j g_{ih} + \partial_i g_{jh} + \partial_h g_{ij}), \quad (1.5)$$

melyeket a V^n *elsőfajú Christoffel-féle szimbólumainak* nevezünk, és másik n^3 számú skalár származtatható a következőképpen:

$$\Gamma_{ij}^h = \frac{1}{2} g^{h\alpha} (\partial_j g_{i\alpha} + \partial_i g_{j\alpha} + \partial_\alpha g_{ij}), \quad (1.6)$$

melyeket a V^n *másodfajú Christoffel-féle szimbólumainak* nevezünk.

A V^n Riemann tér másodfajú Christoffel-féle szimbólumai kielégítik az összefüggési koefficiensek (1.1) transzformációs formuláit, ezért minden Riemann tér egyben affinösszefüggő tér is.

Definíció: Adjunk meg a V^n Riemann-térben egy görbét az $x=x(t)$ egyenlettel és a görbe mentén egy $v=v(t)$ vektormezőt. Egy vektormezőt az adott görbe mentén *párhuzamosnak* (párhuzamosan eltolhatónak) nevezünk, ha a görbe mentén vett kovariáns differenciálja eltűnik, azaz

$$\delta v^i = dv^i + \Gamma_{jk}^i v^j dx^k = 0.$$

Ellenőrizhető, hogy a görbe menti párhuzamos eltolásnál nem változik a vektorok hossza és a vektorok által bezárt szög sem, illetve ezekből következően a belsőszorzat értéke sem.

Definíció: Legyen T egy (r,s) típusú tenzora a V^n Riemann térnek. A T x^k szerinti *kovariáns deriváltja* a

$$T^{i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots j_s, k} = \partial_k T^{i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots j_s} + \Gamma_{k\alpha}^{i_1} T^{\alpha \dots i_r}_{j_1 \dots j_s} + \dots + \Gamma_{k\alpha}^{i_r} T^{i_1 \dots \alpha}_{j_1 \dots j_s} - \Gamma_{kj_1}^{\beta} T^{i_1 \dots i_r}_{\beta \dots j_s} - \dots - \Gamma_{kj_s}^{\beta} T^{i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots \beta}$$

összefüggéssel értelmezett $(r,s+1)$ típusú tenzor.

Definíció: Legyen V^n egy Riemann tér. Az

$$R_{ijk}^h = \partial_j \Gamma_{ik}^h(x) + \Gamma_{ik}^{\alpha}(x) \Gamma_{j\alpha}^h(x) - \partial_k \Gamma_{ij}^h(x) - \Gamma_{ij}^{\alpha}(x) \Gamma_{k\alpha}^h(x). \quad (1.7)$$

(1,3) típusú tenzort a V^n Riemann tér *görbületi tenzorának* nevezzük.

Egy tetszőleges V^n Riemann tér R_{ijk}^h görbületi tenzora az utolsó két kovariáns indexében antiszimmetrikus, azaz:

$$R_{ijk}^h + R_{ikj}^h = 0.$$

A görbületi tenzor komponensei kielégítik a Ricci-azonosságot:

$$R_{ijk}^h + R_{jki}^h + R_{kij}^h = 0.$$

A görbületi tenzor komponenseinek kovariáns deriváltjai kielégítik a Bianchi-azonosságot:

$$R_{ijk;l}^h + R_{ikl;j}^h + R_{ijl;k}^h = 0,$$

ahol a „;” szimbólum a Levi-Civita konnexióra vonatkozó kovariáns deriválást jelöli.

Fontosak lehetnek azok a Riemann-terek, melyekben az R_{ijk}^h görbületi tenzor csak egy K konstans szorzóban tér el a $\delta_j^h g_{ik} - \delta_k^h g_{ij}$ tenzortól.

Definíció: [Szin]Azokat a Riemann-tereket, melyek R_{ijk}^h görbületi tenzora a metrikus tenzor segítségével az

$$R_{ijk}^h = K(\delta_j^h g_{ik} - \delta_k^h g_{ij})$$

képlet szerint fejezhető ki, ahol K egy konstans érték, *konstans görbületű tereknek* nevezzük. A K értéket a *tér görbületének* nevezzük.

Például az $(n+1)$ -dimenziós euklideszi térben az $(x^1)^2 + \dots + (x^{n+1})^2 = R^2$ egyenletű gömbfelületen egy konstans pozitív görbületű tér indukálódik, ahol a görbület: $K = 1/R^2$.

Definíció: Legyen R_{ijk}^h a V^n Riemann tér görbületi tenzora. Ekkor az $R_{ij} = R_{ij\alpha}^\alpha$ összefüggéssel értelmezett $(0,2)$ típusú szimmetrikus tenzor a Riemann tér *Ricci-tenzora*, és az $R = R_{\alpha\beta} g^{\alpha\beta}$ skalármező a tér *skalár görbülete*, ahol az α indexekre összegzés történik.

Az általános relativitáselmélet alapfeladata, hogy megadja a gravitációs mezőnek az anyag eloszlásától és mozgásától való függését. Hosszas kutatások után a gravitációs mező egyenletét Einstein 1915-ben az alábbi alakban írta fel: [Hra]

$$R_{ij} - \frac{1}{2} R g_{ij} = -\lambda T_{ij},$$

ahol T_{ij} jelöli az energia-impulzus tenzort, λ egy állandó, R_{ij} a Ricci-tenzor, R a tér skalárgörbülete. Az egyenlet érdekessége, hogy az egyenlet bal oldalát a téridő geometriája határozza meg, míg a jobb oldal a λ állandó mellett a fizikai megfontolásokkal definiált T_{ij} tenzort tartalmazza.

Ha az energia-impulzus tenzor zérus, akkor a mezőegyenlet a következő alakú:

$$R_{ij} - \frac{1}{2} R g_{ij} = 0.$$

Ennek a mezőegyenletnek az általánosítása az

$$R_{ij} = \rho g_{ij}$$

alakú egyenlet, ahol ρ egy állandó mennyiség. Ekkor a Ricci-tenzor csak egy arányosságban tér el a metrikus tenzortól. Ilyen mezőmodell lehet egy olyan tér, amely mindenütt homogén, az anyagsűrűség az egész térben állandó. [Hra]

Definíció: [Be] Egy Riemann teret *Einstein térnek* nevezünk, ha van olyan ρ skalármező, hogy

$$R_{ij} = \rho g_{ij}. \quad (1.8)$$

Definíció: Egy Riemann tér *ekvidisztánsnak* nevezünk, ha van olyan $\varphi_i \neq 0$ kovariáns vektormező $\varphi_i \neq 0$ és ρ skalármező, hogy

$$\varphi_{i,j} = \rho g_{ij}. \quad (1.9)$$

Így a φ_i szükségképpen gradiens, meghatároz a V^n térben egy normál kongruenciát, amit ekvidisztánsnak nevezünk. A tér $\rho \neq 0$ esetén alaptípusú, $\rho = 0$ esetén szinguláris.

Definíció: Legyen V^n egy Riemann tér. Az $x(t)$ görbét *geodetikus vonalnak* nevezzük, ha kanonikus paraméterben (vagy kitüntetett paraméter esetén) az egyenlete

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} + \Gamma_{jk}^i \frac{dx^j}{dt} \frac{dx^k}{dt} = 0 \quad (1.10)$$

alakú, ahol a Γ_{jk}^i a tér másodfajú Christoffel-féle szimbólumai.

Speciális Riemann terekkel, illetve azok geodetikus leképezésével a 4. fejezetben foglalkozunk.

Geodetikus leképezés

Affin összefüggő terek geodetikus leképezése

Legyenek A^n és \bar{A}^n affinösszefüggő terek.

Definíció: [Szin] Az A^n térnek az \bar{A}^n térre történő *geodetikus leképezésén* értjük azt a kölcsönösen egyértelmű megfeleltetést a pontjaik között, amelynél az A^n tér minden geodetikus vonala az \bar{A}^n tér geodetikus vonalaiba megy át.

Vonatkoztassuk az A^n teret az x^1, x^2, \dots, x^n koordinátarendszerre, \bar{A}^n teret az $\bar{x}^1, \bar{x}^2, \dots, \bar{x}^n$ koordinátarendszerre. Legyen $x^i = x^i(\bar{x})$ kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés a két tér között. Ezzel \bar{A}^n -ben olyan koordinátatranszformációt hajtunk végre, amely során a két tér egymásnak megfelelő pontjai azonos koordinátákkal rendelkeznek. A továbbiakban ezt a közös koordinátarendszert fogjuk használni.

Definíció: Tekintsük a két tér Γ_{ij}^h és $\bar{\Gamma}_{ij}^h$ összefüggési koefficienseit. Ezeket szimmetrikusnak tekintve az affinösszefüggés deformációját

$$\bar{\Gamma}_{ij}^h = \Gamma_{ij}^h + P_{ij}^h \quad (h, i, j=1, \dots, n) \quad (1.10)$$

alakban adhatjuk meg, ahol $P_{ij}^h(x)$ szintén szimmetrikus, (1,2) típusú tenzor, amelyet *deformációs tenzornak* nevezünk. [Szin]

Legyen L az A^n térben egy görbe, amely paraméteres formában

$$x^h = x^h(t) \quad (1.11)$$

alakú. Mint ahogy azt korábban definiáltuk, az L görbe akkor és csak akkor geodetikus, ha $\lambda^h = \frac{dx^h}{dt}$ kielégíti a következő egyenletet:

$$\frac{d\lambda^h(t)}{dt} + \Gamma_{\alpha\beta}^h(x)\lambda^\alpha(t)\lambda^\beta(t) = \rho(t)\lambda^h(t) \quad (1.12)$$

ahol $\rho(t)$ egy skalárfüggvény.

Ha az L görbének az \bar{A}^n térben az \bar{L} görbe felel meg, s mivel a két teret ugyanarra a koordináta-rendszerre vonatkoztattuk, így az \bar{L} paraméteres alakja is (1.11) alakú.

Ha f geodetikus leképezés, és L A^n -ben geodetikus, akkor \bar{L} \bar{A}^n -ben geodetikus lesz, azaz λ^h kielégíti

$$\frac{d\lambda^h(t)}{dt} + \bar{\Gamma}_{\alpha\beta}^h(x)\lambda^\alpha(t)\lambda^\beta(t) = \bar{\rho}(t)\lambda^h(t) \quad (1.13)$$

egyenletet. [Szin]

Az (1.13) és (1.12) különbségét véve, majd az (1.10)-et felhasználva és a $2\psi(t) = \bar{\rho}(t) - \rho(t)$ jelölést bevezetve

$$P_{\alpha\beta}^h(x)\lambda^\alpha(t)\lambda^\beta(t) = 2\psi(t)\lambda^h(t). \quad (1.14)$$

Az A^n tér minden geodetikus vonalának ki kell elégítenie ezeket a feltételeket. Az (1.14) azonosság x^i -ben és λ^i -ben, mivel az A^n térben minden pontból minden irányban pontosan egy geodetikus vonal indul ki, az (1.14) feltételnek minden x^1, x^2, \dots, x^n és $\lambda^1, \lambda^2, \dots, \lambda^n$ -re fenn kell állnia.

Az (1.14)-ben az egyenlőség csak akkor állhat fenn, ha $\psi(t)$ homogén lineáris λ^h -ban, azaz ha $\psi(t) = \psi_\alpha(t)\lambda^\alpha(t)$ alakú. Ezt felhasználva

$$P_{ij}^h = \psi_i(x)\delta_j^h + \psi_j(x)\delta_i^h, \quad (1.15)$$

ahol ψ_i kovariáns vektor. [Szin]

Ez a feltétel szükséges és elegendő ahhoz, hogy f geodetikus leképezés legyen. Valóban, ha az (1.15) teljesül, akkor (1.14) azonosság x^1, x^2, \dots, x^n és $\lambda^1, \lambda^2, \dots, \lambda^n$ -ben. Ezért az (1.12)-es egyenlet minden megoldása megoldása lesz (1.13)-nak is. Következésképpen az A^n tér minden

geodetikus vonala geodetikus lesz az \bar{A}^n térben is, mert a megfelelő pontok azonos koordinátákkal rendelkeznek

Ez alapján érvényes a következő tétel:

Tétel:[Szin] Ahhoz, hogy az $f: A^n \rightarrow \bar{A}^n$ leképezés geodetikus legyen szükséges és elegendő, hogy az összefüggés $P_{ij}^h(x)$ deformációs tenzora (1.15) alakú legyen.

A deformációs tenzort egy ψ_i kovariáns vektor határozza meg, ezért az (1.15) figyelembevételével az (1.10) a következő alakba írható át:

$$\bar{\Gamma}_{ij}^h(x) = \Gamma_{ij}^h(x) + \psi_i(x)\delta_j^h + \psi_j(x)\delta_i^h. \quad (1.16)$$

Ez alapján láthatjuk, hogy minden f geodetikus leképezéshez tartozik egy ψ_i vektor. Az $f^{-1}: \bar{A}^n \rightarrow A^n$ inverz leképezéshez a $-\psi_i$ vektor tartozik.

Ha \tilde{A}^n affinösszefüggő tér és $\bar{f}: \bar{A}^n \rightarrow \tilde{A}^n$ geodetikus leképezés, akkor ehhez tartozik egy $\bar{\psi}_i$ vektor és teljesül:

$$\tilde{\Gamma}_{ij}^h(x) = \bar{\Gamma}_{ij}^h(x) + \bar{\psi}_i(x)\delta_j^h + \bar{\psi}_j(x)\delta_i^h;$$

(1.16) felhasználásával

$$\tilde{\Gamma}_{ij}^h(x) = \Gamma_{ij}^h(x) + (\psi_i(x) + \bar{\psi}_i(x))\delta_j^h + (\psi_j(x) + \bar{\psi}_j(x))\delta_i^h.$$

azaz $\tilde{f}: A^n \rightarrow \tilde{A}^n$ leképezés is geodetikus, és a hozzá tartozó vektor $\tilde{\psi}_i = \psi_i + \bar{\psi}_i$.

Ezzel az adott tér összes geodetikus leképezéseinek halmaza csoportot alkot. Az affinösszefüggő terek halmazában a geodetikus leképezések egy osztályozást indukálnak, egy osztályban azok a terek vannak, amelyeknek van ugyanarra az A^n affinösszefüggő térre geodetikus leképezésük.

Ezt az osztályt az A^n tér *geodetikus osztályának* nevezzük [Szin].

Definíció: Azokat az \bar{A}^n affinösszefüggő tereket, amelyek egy affin térre geodetikusan leképezhetők síkprojektív tereknek nevezzük. [Szin]

Mivel az affin terek esetén létezik olyan koordinátarendszer, amelyben az összefüggési együtthatók eltűnnek, ezért az (1.16) a következő alakban adható meg:

$$\bar{\Gamma}_{ij}^h = \psi_i(x)\delta_j^h + \psi_j(x)\delta_i^h. \quad (1.16')$$

Ezért a síkprojektív tereket jellemezi egy olyan speciális koordinátarendszer létezése, ahol az összefüggési együtthatók az (1.16') alakban adhatók meg, ahol a $\psi_i(x)$ egy kontravariáns vektor. Az ilyen speciális koordinátarendszer létezése szükséges és elegendő feltétele annak, hogy az adott tér síkprojektív legyen, de meg kell jegyezni, hogy az (1.16') koordináta-transzformációra nézve nem invariáns.

Riemann terek geodetikus leképezése

Tekintsünk két Riemann teret, melyeket V^n és \bar{V}^n jelöli. A Riemann tereket a $g_{ij}(x)$ és a $\bar{g}_{ij}(x)$ metrikus tenzorokkal adjuk meg. Mivel a Riemann terek egyben affinösszefüggő terek is, érvényesek az előbbi fejezetben mondottak. A Γ_{ij}^h és a $\bar{\Gamma}_{ij}^h$ összefüggési együtthatók most a másodfajú Christoffel-féle szimbólumok, amelyek a metrikus tenzor segítségével vannak meghatározva az (1.6) által. [Szin]

Minden Riemann tér metrikus tenzora abszolút párhuzamos, ezért \bar{V}^n -ben a $\bar{g}_{ij}(x)$ -re teljesül

$$\bar{g}_{ij;k}(x) = \partial_k \bar{g}_{ij}(x) - \bar{\Gamma}_{ki}^\alpha(x)\bar{g}_{\alpha j}(x) + \bar{\Gamma}_{kj}^\alpha(x)\bar{g}_{\alpha i}(x) = 0,$$

ahol a ";" \bar{V}^n -beli kovariáns deriváltat jelöli. Ekkor a (1.16) felhasználásával:

$$\bar{g}_{ij;k}(x) = 2\psi_k(x)\bar{g}_{ij} - \psi_i(x)\bar{g}_{kj} + \psi_j(x)\bar{g}_{ki}. \quad (1.17)$$

Könnyen belátható, hogy szimmetrikus reguláris $\bar{g}_{ij}(x)$ tenzor esetén a (1.17)-ből következik (1.16), amelyben a $\bar{\Gamma}_{ij}^h$ másodfajú Christoffel-féle szimbólum. Ezért kimondhatjuk a következő tételt:

Tétel: [Szin] A $V^n \rightarrow \bar{V}^n$ leképezés akkor és csak akkor geodetikus, ha a másodfajú Christoffel-féle szimbólumaik között az (1.16) fennáll, és ami ezzel ekvivalens, ha a \bar{V}^n tér $\bar{g}_{ij}(x)$ metrikus tenzora V^n -ben kielégíti az (1.17)-t.

Definíció: Az (1.16) és (1.17) a Riemann terek geodetikus leképezéseinek alapegyenletei és ezeket *Levi-Civita féle egyenleteknek* nevezzük.[Szin]

Az (1.16)-ban végezzünk kontrakciót a h, j indexekre

$$\bar{\Gamma}_{i\alpha}^\alpha(x) = \Gamma_{i\alpha}^\alpha(x) + (n+1)\psi_i(x) \quad (1.18)$$

Minden Riemann térben

$$\Gamma_{i\alpha}^\alpha(x) = \frac{1}{2} \partial_i \ln |g|$$

ahol $g = \det(g_{ij})$. Ezeket felhasználva

$$2(n+1)\psi_i(x) = \partial_i \ln |\bar{g}/g| \quad (1.19)$$

a \bar{g}/g invariáns és ebből következik, hogy a ψ_i gradiens vektor. [Szin]

A Riemann terek esetén az affinösszefüggő terekhez hasonló módon értelmezhetjük a geodetikus osztály fogalmát.

A Riemann terek geodetikus leképezéseinek vizsgálata során két problémakörrel találkozhatunk:

1. Adott két Riemann tér, és azt kell eldöntenünk, hogy ugyanabba a geodetikus osztályba tartoznak, azaz, hogy létezik-e közöttük geodetikus leképezés.
2. Egy adott Riemann-térről el kell döntenünk, hogy létezik-e nem triviális geodetikus leképezése valamilyen másik Riemann térre, és ha igen, akkor meghatározni az összes olyan teret, amelyre leképezhető geodetikusan.

Keressünk invariáns mennyiségeket a geodetikus leképezések esetén! A következő megfontolásokat affinösszefüggő terekben tesszük, de természetesen ezek érvényesek a Riemann terekben is.

Az (1.16) felhasználásával az $f: A^n \rightarrow \bar{A}^n$ geodetikus leképezésnél a Riemann tenzorokra a következő egyenlet teljesül:

$$\bar{R}_{ijk}^h = R_{ijk}^h + \delta_i^h (\psi_{kj} - \psi_{jk}) + \delta_k^h \psi_{ij} - \delta_j^h \psi_{ik}, \quad (1.20)$$

ahol

$$\psi_{ij} = \psi_{i,j} - \psi_i \psi_j.$$

Az (1.20)-ban kontrakciót végrehajtva a h, k indexekre kapjuk, hogy

$$\bar{R}_{ij} = R_{ij} + \psi_{[ij]} + (n-1)\psi_{ij}. \quad (1.21)$$

ahol $\psi_{[ij]} = \psi_{ij} - \psi_{ji}$.

A Riemann terek geodetikus leképezései esetén (1.19), és (1.20) felhasználásával igaz a következő egyenlőség:

$$\bar{R}_{ijk}^h = R_{ijk}^h + \delta_k^h \psi_{ij} - \delta_j^h \psi_{ik}. \quad (1.22)$$

A h, k indexekre kontrakciót végrehajtva a Ricci-tenzorokra kapjuk [Szin]:

$$\bar{R}_{ij} = R_{ij} + (n-1)\psi_{ij}. \quad (1.23)$$

Az összefüggési koeficiensek között fennáll (1.16) és ennek következménye (1.18). (Mindez a leképezés által meghatározott közös koordinátarendszerben érvényes.)

Az (1.18) átrendezésével

$$\psi_j(x) = \frac{1}{n+1} (\bar{\Gamma}_{j\alpha}^\alpha - \Gamma_{j\alpha}^\alpha).$$

Ezt behelyettesítve az (1.16)-ba

$$\bar{\Gamma}_{ij}^h = \Gamma_{ij}^h + \frac{1}{n+1} (\bar{\Gamma}_{i\alpha}^\alpha - \Gamma_{i\alpha}^\alpha) \delta_j^h + \frac{1}{n+1} (\bar{\Gamma}_{j\alpha}^\alpha - \Gamma_{j\alpha}^\alpha) \delta_i^h. \quad (1.24)$$

Vezessük be a következő jelölést:

$$T_{ij}^h = \Gamma_{ij}^h - \frac{1}{n+1} (\delta_j^h \Gamma_{i\alpha}^\alpha + \delta_i^h \Gamma_{j\alpha}^\alpha). \quad (1.25)$$

Az (1.24)-t átrendezve, majd a fenti jelölést alkalmazva adódik, hogy

$$\bar{T}_{ij}^h(x) = T_{ij}^h(x), \quad (1.26)$$

ahol a $\bar{T}_{ij}^h(x)$ az (1.25)-nek megfelelő, csak az \bar{A}^n tér összefüggési koeficienseit felhasználó összefüggés.

Belátható, ha az $f: A^n \rightarrow \bar{A}^n$ esetén az (1.26) teljesül, akkor f geodetikus leképezés.

Definíció: A $T_{ij}^h(x)$ mennyiséget *Thomas-féle projektív paraméternek* nevezzük. [Szin]

Tétel: [Szin] Az $f: A^n \rightarrow \bar{A}^n$ leképezésnél, ahol a tereket ugyanarra a koordinátarendszerre vonatkoztattuk, a Thomas-féle projektív paraméter invarianciája szükséges és elegendő ahhoz, hogy az f geodetikus leképezés legyen.

A Thomas-féle projektív paramétert minden koordinátarendszerben az affín összefüggés határozza meg, így ha koordináta-transzformációt hajtunk végre, akkor a projektív paraméterek is transzformálódnak. Tekintsük az x^1, \dots, x^n koordinátarendszerben a Γ_{ij}^h , és az $\bar{x}^1, \dots, \bar{x}^n$ koordinátarendszerben a $\bar{\Gamma}_{ij}^h$ koefficienseket. A koefficiensek közötti kapcsolatot az (1.1) írja le. Ennek a felhasználásával a Thomas-féle paraméterek transzformációja

$$\bar{T}_{ij}^\alpha \frac{\partial x^h}{\partial \bar{x}^\alpha} = T_{\alpha\beta}^h \frac{\partial x^\alpha}{\partial \bar{x}^i} \frac{\partial x^\beta}{\partial \bar{x}^j} + \frac{1}{n+1} \left(\frac{\partial \ln \Delta}{\partial \bar{x}^i} \frac{\partial x^h}{\partial \bar{x}^j} + \frac{\partial \ln \Delta}{\partial \bar{x}^j} \frac{\partial x^h}{\partial \bar{x}^i} \right) + \frac{\partial^2 x^h}{\partial \bar{x}^i \partial \bar{x}^j}$$

szabály alapján történik, ahol $\Delta = \det(\partial x^i / \partial \bar{x}^j)$.

A (1.21) egyenlőséget az i, j indexekre alternálva kapjuk, hogy

$$\bar{R}_{[ij]} - R_{[ij]} = (n+1)\psi_{[ij]}. \quad (1.27)$$

Az (1.21)-t $(n+1)$ -gyel szorozva és átrendezve, majd az (1.27)-t behelyettesítve adódik a következő egyenlőség:

$$(n+1)(n-1)\psi_{ij} = (n\bar{R}_{ij} + \bar{R}_{ji}) - (nR_{ij} + R_{ji}).$$

Ebből ψ_{ij} -t kifejezzük és az (1.20)-ba behelyettesítjük. Vezessük be a

$$W_{ijk}^h = R_{ijk}^h + \frac{1}{n+1} \delta_i^h R_{[kj]} - \frac{1}{n^2-1} \left[(nR_{ij} + R_{ji})\delta_k^h - (nR_{ik} + R_{ki})\delta_j^h \right] \quad (1.28)$$

jelölést. Ekkor

$$\bar{W}_{ijk}^h(x) = W_{ijk}^h(x) \quad (1.29)$$

teljesül, ahol a $\bar{W}_{ijk}^h(x)$ az (1.28)-nek megfelelő, de az \bar{A}^n tér megfelelő mennyiségeit felhasználó összefüggés.

Definíció: A $W_{ijk}^h(x)$ (1,3) típusú tenzor, melyet az A^n tér *Weyl-tenzorának* vagy projektív görbületi tenzorának nevezünk. [Szin]

Tétel: [Szin] A Weyl-tenzor invariáns az affinösszefüggő terek geodetikus képezéseire nézve.

Riemann terek esetén a Weyl-tenzor a következő alakú:

$$W_{ijk}^h = R_{ijk}^h - \frac{1}{n-1} (R_{ij} \delta_k^h - R_{ik} \delta_j^h) \quad (1.30)$$

Definíció: [Szin] Egy A^n teret *síkprojektívnek* nevezzük, ha létezik geodetikus leképezése az \bar{A}^n affin térre.

Az affin terek esetén a Riemann tenzor azonosan nulla, ezért $\bar{W}_{ijk}^h(x) = 0$ és az (1.29)-ből a

$$W_{ijk}^h(x) = 0 \quad (1.31)$$

feltételt kapjuk.

Tétel: [Szin] Annak szükséges és elegendő feltétele, hogy az A^n ($n > 2$) affinösszefüggő tér síkprojektív legyen az, hogy az (1.31)-as feltétel teljesüljön.

A tételt Riemann terekre is kimondhatjuk.

Tétel: [Szin] A V^n ($n > 2$) Riemann térnek akkor és csak akkor létezik geodetikus leképezése egy euklideszi térre, ha az (1.31)-as feltétel teljesül.

Az (1.30)-ban az (1.31) felhasználása után a h indexet lehozzuk és átrendezzük:

$$R_{hijk} = \frac{1}{n-1} (R_{ij} g_{hk} - R_{ik} g_{hj}). \quad (1.32)$$

Kontraháljuk g^{ij} -vel

$$R_{hk} = \frac{R}{n} g_{hk}, \quad (1.33)$$

azaz V^n -nek konstans görbületűnek kell lennie.

A konstans görbületű Riemann terek és csak azok a síkprojektív terek.

Beltrami tétele: [Szin] Ha létezik $f: V^n \rightarrow \bar{V}^n$ ($n > 2$) geodetikus leképezés, ahol V^n konstans görbületű, akkor \bar{V}^n is konstans görbületű. Bármely konstans görbületű V^n ($n > 2$) térnek létezik bármely konstans görbületű \bar{V}^n térre geodetikus leképezése.

Bizonyítás: Az $f: V^n \rightarrow \bar{V}^n$ leképezést vizsgáljuk. Mivel \bar{V}^n konstans görbületű teljesül, hogy

$$\bar{R}_{ikl}^h = \bar{R}(\bar{g}_{ik}\delta_l^h - \bar{g}_{il}\delta_k^h), \quad (1.34)$$

valamint a leképezés geodetikus volta miatt az (1.22) is. A (1.22) és (1.34) összevetéséből kapjuk, hogy

$$\bar{R}(\bar{g}_{ik} - \psi_{ik})\delta_l^h - \bar{R}(\bar{g}_{il} - \psi_{il})\delta_k^h = R_{ikl}^h. \quad (1.35)$$

Az (1.35)-t g_{hj} -vel kontrahálva adódik, hogy

$$R_{ijkl} = \bar{R}A_{ik}g_{lj} - \bar{R}A_{il}g_{kj}, \quad (1.36)$$

ahol $A_{ik} = \bar{g}_{ik} - \psi_{ik}$, továbbá felhasználjuk, hogy

$$R_{ijkl} + R_{jikl} = 0 \quad (1.37)$$

Az (1.37)-be a (1.36)-t behelyettesítve a következő adódik:

$$\bar{R}(A_{ik}g_{lj} - A_{il}g_{kj} + A_{jk}g_{li} - A_{jl}g_{ki}) = 0. \quad (1.38)$$

Mivel $\bar{R} \neq 0$, csak a zárójelben levő kifejezés lehet zérus. A zárójelben levő kifejezést g^{jl} -lel kontraháljuk.

$$nA_{ik} - A_{jl}g^{jl}g_{ki} = 0. \quad (1.39)$$

Vezessük be a következő jelölést:

$$\mu(x) = A_{jl}g^{jl}.$$

Ekkor

$$A_{ik} = \frac{\mu}{n}g_{ik}. \quad (1.40)$$

A (1.40)-t helyettesítsük vissza a (1.36)-ba

$$R_{ijkl} = \frac{\bar{R}\mu}{n}(g_{ik}g_{lj} - g_{il}g_{kj}). \quad (1.41)$$

Felhasználjuk a következő tételt:

Schur tétele: Ha V^n Riemann tenzora elállítható

$$R_{ijkl} = K(x)(g_{ik}g_{lj} - g_{il}g_{kj})$$

alakban, ahol $K(x)$ x -től függ és g_{ik} a V^n metrikus tenzora, akkor a $K(x)$ függvény konstans, azaz V^n konstans görbületű.

Ekkor a Schur tétel alapján a $K(x) = \frac{\bar{R}\mu}{n}$ függvény konstans, azaz $\mu(x)$ függvény konstans. Ekkor V^n konstans görbületű. Ezzel a tétel állítását beláttuk.

2. Fejezet

Finsler terek

Az általánosított pályatér egy olyan differenciálható sokaság, melynek a „pontjai” vonalelemek. *Vonalelemnek* nevezünk egy x pontból és egy belőle kiinduló y irányból álló elempárt. Az x^i lokális pontkoordináták és az y^i iránykoordináták együttese alkotja a vonalelem lokális koordinátáit. Az y^i koordináták csak egy nem nulla szorzótényező erejéig vannak meghatározva. A vonalelem-terek elméletében a vizsgálatok tárgyát a vonalelemek és más objektumok olyan tulajdonságai képezik, melyek invariánsak azon differenciálható transzformációkkal szemben, melyeket az irányokra is kiterjesztünk.

Az *általánosított pályatér* definíció szerint egy olyan vonalelem-tér (azaz (x, \dot{x}) párok összessége, ahol $x(x^i)$ az X^n tér pontja, az $\dot{x}(\dot{x}^i)$ az x pontbeli érintőtér egy vektora), amelyben invariáns módon meg vannak adva a

$$\frac{d^2 x^i}{ds^2} + H^i \left(x, \frac{dx}{ds} \right) = 0$$

közönséges differenciálegyenlet-rendszer integrálgörbéi, az ún. pályák. A $H^i(x, \dot{x})$ függvények $2n$ független változósak, és \dot{x} változóra nézve másodrendben homogének. Tehát az általánosított pályatereket n darab $H^i(x, \dot{x})$ függvény jellemzi. A pályatér affinösszefüggésének $\Gamma_{ij}^h(x, \dot{x})$ komponenseit a

$$\Gamma_{ij}^h(x, \dot{x}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 H^h}{\partial \dot{x}^i \partial \dot{x}^j}$$

képletek definiálják. Látható, hogy a $\Gamma_{ij}^h(x, \dot{x})$ komponensek az \dot{x} -ban nulladrendben homogén függvények. Ezekkel a pályák egyenletei a

$$\frac{d^2 x^i}{ds^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^i \frac{dx^\alpha}{ds} \frac{dx^\beta}{ds} = 0$$

alakba írhatók. Ha az általánosított pályatér $H^i(x, \dot{x})$ függvényei a differenciálok másodfokú polinomjai lesznek, akkor a pályatér nem más, mint egy közönséges affinösszefüggő tér.

Homogén függvények

Legyen U az \mathbb{R}^n egy nyílt tartománya és legyen

$$f(x^1, \dots, x^n, y^1, \dots, y^n) = f(x, y) : U \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

C^2 -osztályú leképezés. Legyen továbbá $c : [a, b] \rightarrow U$ egy

$$x^i = x^i(t), \quad a \leq t \leq b$$

alakban megadott görbe U -ban, amely C^1 -osztályú $[a, b]$ -n.

Tekintsük most az ilyen görbék esetén a

$$J(c) = \int_a^b f(x(t), \dot{x}(t)) dt, \quad \dot{x} = dx/dt \quad (2.1)$$

integrált és a variációs számítási probléma paraméteres alakját. Közismert, hogy ekkor a $J(c)$ minimumát adó c görbe tetszőleges C^1 -osztályú darabja szükségképpen kielégíti az

$$E_i(c) := \frac{d(\partial f / \partial y^i)}{dt} - \frac{\partial f}{\partial x^i} = 0 \quad (2.2)$$

Euler-egyenletet. Természetes követelmény, hogy a görbék irányítottak legyenek növekvő t paraméter szerint, és a $J(c)$ integrál független legyen a paraméter megválasztásától.

Így tekintsünk egy olyan $t = \varphi(\tau)$, $\tau \in [c, d] \subset \mathbb{R}$ paramétertranszformációt, melyre $d\varphi/d\tau > 0$ és feltételezzük, hogy

$$\int_a^b f(x, dx/dt) dt = \int_c^d f(x, dx/d\tau) d\tau \quad (2.3)$$

ahol $a=\varphi(c)$ és $b=\varphi(d)$. Ha ezt τ szerint differenciáljuk és tekintetbe vesszük, hogy az $x(b)$ végpont tetszőleges, akkor a következőt kapjuk:

$$f(x, dx/dt)(dx/d\tau) = f(x, dx/d\tau).$$

Speciálisan vehetjük a $t=p\tau$ paramétertranszformációt, ahol $p>0$ egy rögzített valós szám. Ekkor

$$f(x, dx/dt)p = f(x, (dx/d\tau)p) \quad (2.4)$$

Definíció:[AIM], [M4] Egy $g(u)=g(u^1, \dots, u^n)$ n változós függvényt u -ban r -edfokú pozitív homogénnek nevezzük (röviden $(r)_p$ -homogénnek) u -ban, ha

$$g(pu) = p^r g(u)$$

teljesül tetszőleges pozitív p -re.

Így (2.4) azt mutatja, hogy $f(x,y)$ szükségképpen elsőfokú homogén y -ban. Megfordítva, nyilvánvaló, hogy (2.4)-ből következik (2.3). Így a Carathèodory-tételhez jutunk:

Tétel:[AIM], [M4] A $J(c)$ integrál pontosan akkor független a c irányított görbe paraméterének megválasztásától, ha az $f(x,y)$ függvény $(1)_p$ -homogén y -ban.

Megjegyzés: Nyilvánvaló, hogy az $f(x,y)$ függvény x^i szerinti parciális deriváltjai szintén $(1)_p$ -homogének.

Tekintsük a $g(u)$ n változós, u -ban r -edfokú pozitív homogén függvényt. A definícióban szereplő egyenlőséget p szerint deriválva és $p=1$ -et helyettesítve a következő egyenlőség adódik:

$$(\partial g / \partial u^i) u^i = r g(u) \quad (2.5)$$

Megfordítva, (2.5)-ből az

$$rg(pu) = (\partial g / \partial u^i) \Big|_{pu} p u^i = (\partial g(pu) / \partial p) p$$

egyenlőséget kapjuk.

Most $g(pu)$ -t egy p -től függő $h(p)$ függvénynek tekintve a fentiekből $d(h(p)/p^r)/dp=0$ következik, vagyis $h(p)=p^r h(1)$. Ez pedig éppen a fenti definícióban szereplő egyenlőség. Ily módon Eulernek a homogén függvényekről szóló tételéhez jutunk:

Tétel:[AIM], [M4] Egy C^1 -osztályú $g(u)$ függvény pontosan akkor $(r)_p$ -homogén, ha eleget tesz a (2.5) feltételnek.

A (2.5) egyenlőséget u^j szerint differenciálva:

$$\left(\frac{\partial(\partial g / \partial u^i)}{\partial u^j} \right) u^i + \frac{\partial g}{\partial u^j} = r \frac{\partial g}{\partial u^j},$$

ebből

$$\left(\frac{\partial(\partial g / \partial u^i)}{\partial u^j} \right) u^i = (r-1) \frac{\partial g}{\partial u^j}.$$

Így igaz a következő

Megjegyzés: Ha egy C^2 -osztályú $g(u)$ függvény $(r)_p$ -homogén u -ban, akkor $\partial g / \partial u^i$ $(r-1)_p$ -homogén u -ban.

A definícióbeli egyenlőségből belátható még, hogy ha egy u -ban r -edfokú pozitív homogén $g(u)$ függvény folytonos $u=0$ -ban, akkor

$$r > 0 \text{ esetén : } g(0) = 0,$$

$$r = 0 \text{ esetén : } g(0) = \text{konstans.}$$

Állítás:[AIM], [M4] Ha $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ mindenütt C^1 -osztályú és $(1)_p$ -homogén, akkor az lineáris függvény.

Regularitás

Az Euler-egyenlet vizsgálatánál kikötöttük, hogy f C^2 -osztályú, és $(I)_p$ -homogén legyen y -ban. Alkalmazva az $f_i := \partial f / \partial y^i$ és $f_{ij} := \partial f_i / \partial y^j$ jelöléseket, és az (irodalomban szokásos) Einstein-konvenciót, a következő alakot nyerjük:

$$E_i(c) = f_{ij} \left(\frac{dy^j}{dt} \right) + \left(\frac{\partial f_i}{\partial x^j} \right) y^j - \frac{\partial f}{\partial x^i} = 0. \quad (2.6)$$

Mivel f_i nulladfokú pozitív homogén y -ban, $f_{ij} y^j = 0$. Így az (f_{ij}) mátrix rangja n -nél kisebb, és az $E_i(c) = 0$ másodrendű differenciálegyenletet nem adható meg ún. *normál alakban*. Továbbá, mivel $\frac{\partial f_i}{\partial x^j} y^j = \frac{\partial f}{\partial x^j}$ miatt $E_i(c) y^i = 0$, ez az n darab egyenlet nem független egymástól.

Írjuk át (2.2)-t az

$$F(x, y) = (f(x, y))^2 / 2 \quad (2.7)$$

y -ban másodfokú pozitív homogén függvény segítségével a következő alakban:

$$E_i(c) = \frac{d(F_i/f)}{dt} + \frac{(\partial F / \partial x^i)}{f} = 0,$$

ahol $F_i = \partial F / \partial y^i$

A c görbének a

$$\tau = \int_a^t f(x(t), \dot{x}(t)) dt$$

összefüggéssel megadott τ ívhosszparaméterét véve világos, hogy $d\tau/dt = f(x, \dot{x})$, a homogenitásból pedig azt kapjuk, hogy $f(x, \dot{x}) d\tau/dt = f(x, dx/d\tau) = 1$. Így

$$E_i(c) = dF_i/d\tau - \partial F/\partial x^i = 0, \quad y = dx/d\tau.$$

Az

$$F_{ij}(x,y) = \frac{\partial^2 F}{\partial y^i \partial y^j} \quad (2.8)$$

helyettesítéssel az

$$E_i(c) = F_{ij}(x,y) \left(\frac{dy^j}{d\tau} \right) + \left(\frac{\partial F_i}{\partial x^j} y^j - \frac{\partial F}{\partial x^i} \right) = 0, \quad y = \frac{dx}{d\tau} \quad (2.9)$$

alakhöz jutunk. Eképpen, ha $\det(F_{ij})$ nem tűnik el, az n darab független $E_i(c)=0$ egyenletet át tudjuk írni normál alakba.

Definíció:[AIM], [M4] Ha $\det(F_{ij})$ nem tűnik el, akkor a variációs számítás paraméteres problémáját *regulárisnak* nevezzük.

Az alapfüggvény

Tekintsünk egy M^n n -dimenziós sima sokaságot. Legyen $M_x = T_x M^n$ az M^n egy x pontjában vett érintőtér, és TM^n a sokaság érintőnyalábja. A $\pi_\tau: TM^n \rightarrow M^n$ projekciót a következőképpen definiáljuk: $\pi_\tau(y) = x$, ha $y \in M^n$. Legyen egy U az M^n egy koordinátakörnyezete, $\{U, (x^i)\}$ egy lokális koordinátarendszer az U környezeten. Az U egy tetszőleges $x = (x^i)$ pontjában vett y érintővektor a következő alakban adható meg: $y = y^i (\partial/\partial x^i)_x$. Ezzel a TM^n érintőnyaláb $\pi_\tau^{-1}(U)$ koordinátakörnyezetén a $\{\pi_\tau^{-1}(U), (x^i, y^i)\}$ egy lokális koordinátarendszer, melyet a TM^n *kanonikus*

koordinátarendszerének nevezzük. A TM^n tekinthető egy $2n$ -dimenziós sima sokaságnak.

Legyen M egy n dimenziós differenciálható sokaság és $L(x,y)$ egy valós függvény M érintőterén, TM -en. Legyen $x^i=x^i(t)$ $a \leq t \leq b$ valamely c görbe egy U koordinátakörnyezetbe eső szeletének az egyenlete. Ezen görbedarab s ívhosszát a következő integrál adja meg:

$$s = \int_a^b L(x(t), \dot{x}(t)) dt. \quad (2.10)$$

Definíció: [AIM], [M4] Egy a fenti ívhosszfogalommal ellátott M sokaságot egy L alapfüggvényű, n dimenziós *Finsler-térnek* mondunk, ha L teljesíti az alábbi feltételeket:

Differenciálgeometriai céljaink érdekében fel kell tételeznünk, hogy L differenciálható x^i -ben és y^i -ben. Hacsak más nem szerepel, legyen L mindig C^∞ -osztályú.

Továbbá:

1. Tetszőleges irányított görbe ívhossza független a paraméter megválasztásától, vagyis L elsőfokú pozitív homogén y -ban.
2. Az L egy reguláris variációs számítási problémát eredményez, azaz a

$$g_{ij} := \dot{\partial}_i \dot{\partial}_j F = \frac{\partial^2 F}{\partial y^i \partial y^j}, \quad F := L^2/2 \quad (2.11)$$

determinánsa nem zérus.

3. Tetszőleges $x \in M$ pont $T_x M$ érintőterében van egy olyan $T_x M^*$ tartomány, amely rendelkezik a következő tulajdonságokkal:
 - L differenciálható y^i -ben, ha $y^i \in T_x M^*$,
 - $T_x M^*$ nem tartalmazza a nullvektort,
 - pozitívan kúpszerű tartomány, tehát olyan nem nulla $y \in T_x M^*$ érintővektorokból áll, amelyekre $py \in T_x M^*$ tetszőleges $p > 0$ esetén.

Eképpen $M^* := \bigcup_{x \in M} T_x M^*$ az L alapfüggvény értelmezési tartománya.

4. Az L alapfüggvény pozitív értékű $T_x M^*$ -on.

Megjegyzések:

1. A g tenzormező *metrikus tenzornak* nevezik. A $g_{ij}(x,y)$ komponensek nulladfokú pozitív homogének, valamint

$$y_i = g_{ij}(x,y)y^j = \dot{\partial}_i F = L(\dot{\partial}_i L), \quad (2.12)$$

$$g_{ij}(x,y)y^i y^j = 2F(x,y) = L^2(x,y). \quad (2.13)$$

2. Ha $g_{ij}(x,y)$ folytonos az $y=0$ pontban, akkor a g_{ij} -k csak x -től függő mennyiségek és az $L^2(x,y) = g_{ij}(x,y)y^i y^j$ Riemann-metrikára redukálódik.

Az indikátrix

Definíció:[AIM], [M4] Az $s = \int_a^b L(x(t), \dot{x}(t)) dt$ ívhosszintegrál extrémálisait a tér *geodetikusainak* nevezzük.

Egy Finsler-tér geodetikus görbéinek differenciálegyenletrendszerét kanonikus paraméter esetén a következőképpen adhatjuk meg:

$$\frac{d^2 x_i}{ds^2} + 2G^i(x, dx/ds) = 0, \quad (2.14)$$

ahol

$$G^i = g^{ij} G_j, \quad 2G_j = (\partial_j \partial_i F) y^i - \partial_j F. \quad (2.15)$$

miközben $F(x,y) = (L(x,y))^2 / 2$.

Ezek az egyik legfontosabb mennyiségek a Finsler-geometriában.

A $\gamma_{jk}^i(x,y)$ Christoffel-féle szimbólumokat a $g_{ij}(x,y)$ x szerinti parciális deriváltjaiból konstruálhatjuk:

$$\gamma_{ijk}^h(x,y) = g_{ih} \gamma_{jk}^h = \frac{1}{2} (\partial_k g_{ij} + \partial_j g_{ik} - \partial_i g_{jk}). \quad (2.16)$$

Ekkor

$$2G^i(x,y) = \gamma_{jk}^i y^j y^k = \gamma_{00}^i, \quad (2.17)$$

ahol a 0 index y^j -vel való kontrakciót jelent. Ezt a jelölést a rövidebb írásmód kedvéért használjuk.

A Cartan-tenzort (melyet C -vel jelölünk) a $g_{ij}(x,y)$ y szerinti parciális deriváltjaiból konstruálhatjuk:

$$C_{ijk}(x,y) = g_{ih} C_{jk}^h = \frac{1}{2}(\partial_k g_{ij} + \partial_j g_{ik} - \partial_i g_{jk}) = \frac{1}{2}(\partial_k g_{ij}). \quad (2.18)$$

Könnyen igazolható, hogy a $C_{ijk}(x,y)$ szimmetrikus az i és j indexekben, és k -ra teljesül, hogy

$$C_{ijk}(x,y)y^k = C_{ij0} = 0.$$

Minden M_x érintőtér tekinthető egy n -dimenziós Riemann térnek a következő metrikával:

$$g_{ij}(x,y)dy^i dy^j,$$

ahol $x=(x^i)$ rögzített. Ekkor a $C_{jk}^i(x,y)$ az M_x Christoffel-szimbólómai, amelyek a fenti Riemann-metrikából származtathatók. Ez egy egészen speciális Riemann tér, mivel általában egy Riemann tér $\gamma_{ijk}(x,y)$ mennyiségei nem rendelkeznek szimmetria tulajdonsággal.

Ahogy az látható volt, pozitív $L(x,y)$ függvény esetén y -ra adódik, hogy

$$L(x,\ell) = 1, \text{ ahol } \ell^i = \frac{y^i}{L(x,y)}. \quad (2.19)$$

Definíció:[M4] Az $I_x = \{y \in M_x \mid L(x,y) = 1\}$ halmazt az x -beli *indikátrix*nak nevezzük.

A Finsler tér indikátrixfelülete centrálszimmetrikus, mivel az $L(x,y)$ elsőfokú pozitív homogén y -ban és konvex, mivel $L(x,y)$ egy reguláris variációszámítási problémát eredményez. (A centrálszimmetriától több esetben eltérhetünk.)

Eszerint a Finsler tér úgy képzelhető el, mint egy olyan tér, amely tele van hintve centrálszimmetrikus és konvex indikátrixfelületekkel, melyek az

ívhosszmérést ugyanúgy határozzák meg, mint az euklideszi tér egységsgömbjei.

Egyszerűen előállíthatunk Finsler metrikát, ha egy Riemann-térbeli indukáljalakzatot (ellipszoidot) a középpontból elmozdítunk. Ezzel egy aszimmetrikus metrikát kapunk. Ezt az érdekes Finsler-struktúrát tanulmányozta G. Randers (1941) [Ra].

Az I_x indukáljalakzat az M_x egy hiperfelülete, amely paraméteres alakban: $y^i = y^i(u^\alpha)$, ahol $\alpha = 1, \dots, n-1$. Az I_x indukáljalakzatnak indukált Riemann metrikája van, azaz

$$g_{\alpha\beta}(u) = g_{ij}(x, y(u)) B_\alpha^i B_\beta^j, \quad B_\alpha^i = \frac{\partial y^i}{\partial u^\alpha}.$$

Differenciáljuk u^α szerint az $L(x, y(u)) = 1$ egyenlőséget. Felhasználva a (2.17)-t

$$\ell_i B_\alpha^i = 0,$$

amelyből következik, hogy ℓ_i az I_x normálvektorának kovariáns komponensei. A $h_{ij}(x, y) = g_{ij} - \ell_i \ell_j = L(\dot{\partial}_i \dot{\partial}_j L)$ "szögmérő-tenzort" felhasználva,

$$g_{\alpha\beta}(u) = h_{ij}(x, y(u)) B_\alpha^i B_\beta^j.$$

Így az I_x $g_{\alpha\beta}$ Riemann metrikája a h szögmérő-tenzor által indukált metrikának tekinthető.

Tétel: [M4] A h tenzor h_{ij} komponenseiből képezett mátrix rangja $n-1$. A

$$h_{ij}(x, y) v^j = 0$$

egyenletrendszer (v^i) nem-triviális megoldásai az y^i többszörösei.

Az $L^2(x, \ell)$ függvényt az I_x egy ℓ_0 pontjában Taylor-sorba fejtve

$$L^2(x, \ell) = L^2(x, \ell_0) + [\dot{\partial}_i L^2](\ell^i - \ell_0^i) + [\frac{1}{2} \dot{\partial}_i \dot{\partial}_j L^2](\ell^i - \ell_0^i)(\ell^j - \ell_0^j) + \dots$$

L homogenitásából következik

$$[\dot{\partial}_i L^2] \ell_0^i = 2L^2(x, \ell_0), \quad [\dot{\partial}_i \dot{\partial}_j L^2] \ell_0^i = [\dot{\partial}_j L^2].$$

Így a kifejtés az $L^2(x,\ell) = g_{ij}(x,\ell_0)\ell^i\ell^j + \dots$ alakra redukálódik, és a homogenitás miatt következik:

$$L^2(x,y) = g_{ij}(x,y_0)y^i y^j + \dots$$

Az $y_0 \in I_x$ esetén $I_x(y_0) = \{y \mid g_{ij}(x,y_0)y^i y^j = 1\}$ halmazt az y_0 -beli *oszkuláló indikátrix*nak nevezzük. Az I_x indikátrix oszkulálja az összes $I_x(y_0)$ oszkuláló indikátrixot. Az $I_x(y_0)$ egy olyan másodrendű hiperfelület, amelynek a középpontja az $y = 0$. Ha az F^n Riemann tér, akkor az indikátrix egybeesik a tetszőleges pontbeli oszkuláló indikátrixszal.

Konnexiók

Lineáris konnexió

Definíció: [Ver] Az M differenciálható sokaságon adott *lineáris konnexión* (kovariáns deriváláson) olyan $\nabla: \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$ leképezést értünk, amelyre tetszőleges $X, X_1, X_2, Y, Y_1, Y_2 \in \mathfrak{X}(M)$ vektormezők és $f, g \in C^\infty(M)$ függvények esetén fennállnak az alábbi összefüggések:

$$(1) \nabla(X_1 + X_2, Y) = \nabla(X_1, Y) + \nabla(X_2, Y)$$

$$(2) \nabla(fX, Y) = f \cdot \nabla(X, Y)$$

$$(3) \nabla(X, Y_1 + Y_2) = \nabla(X, Y_1) + \nabla(X, Y_2)$$

$$(4) \nabla(X, gY) = g \cdot \nabla(X, Y) + (Xg)Y$$

A $\nabla(X, Y)$ vektormezőt az Y vektormező X szerinti *kovariáns deriváltjának* nevezzük, és gyakran használatos a $\nabla_X Y$ jelölés is.

Ha ∇ lineáris konnexió M -en, akkor az (M, ∇) párt, illetve sokszor csak az M sokaságot *affinösszefüggő sokaságnak* nevezzük.

Definíció: A ∇ lineáris konnexió *torziója* a $T: \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$ leképezés, melyet a $T(X, Y) := \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y]$ kifejezés ír le.

Állítás: Legyen M affinösszefüggő sokaság. A T torzió (1,2)-típusú antiszimmetrikus tenzor: $\forall X, Y \in \mathfrak{X}(M): T(X, Y) = -T(Y, X)$

Definíció: Egy lineáris konnexiót *szimmetrikusnak* (torziómentesnek) nevezzük, ha a torzió tenzora eltűnik.

Definíció: [Ver] A ∇ lineáris konnexió *gömbülete* a $R: [\mathfrak{X}(M)]^3 \rightarrow \mathfrak{X}(M)$ leképezés, melyet az $R(X,Y)Z := \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z$ kifejezés ír le.

Állítás: [Ver] Legyen M affinösszefüggő sokaság. Az R gömbület (1,3)-típusú tenzor, amelyre teljesül: $\forall X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M): R(X,Y)Z = -R(Y,X)Z$

Megjegyzés: Tetszőleges rögzített $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ vektormezők mellett az $R(X,Y): Z \in \mathfrak{X}(M) \mapsto R(X,Y)Z \in \mathfrak{X}(M)$ leképezés az $\mathfrak{X}(M)$ endomorfizmusa.

Állítás: Szimmetrikus lineáris konnexió gömbületi tenzorára teljesül a

1. Bianchi-azonosság:

$$\forall X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M): R(X,Y)Z + R(Y,Z)X + R(Z,X)Y = 0. \quad (2.20)$$

2. Bianchi-azonosság az $\mathfrak{X}(M)$ endomorfizmusaira:

$$\forall X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M): (\nabla_X R)(Y,Z) + (\nabla_Y R)(Z,X) + (\nabla_Z R)(X,Y) = 0. \quad (2.21)$$

Az M sokaságon legyen adva egy ∇ lineáris konnexió. Vegyünk egy $Y \in \mathfrak{X}(M)$ vektormezőt és tekintsük a $\nabla Y: \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$ leképezést, melyet a $\nabla Y(X) = \nabla_X Y$ összefüggéssel definiálunk. A ∇Y leképezés (1,1)-típusú tenzor az M sokaságon. Ennek következtében Y rögzítése esetén a $(\nabla_X Y)(p)$ vektort az $X(p)$ vektor már meghatározza.

Definíció: Legyen M -en egy Y sima vektormező és egy $v \in T_p M$ ($p \in M$) érintővektor. Vegyünk egy olyan $X \in \mathfrak{X}(M)$ vektormezőt, amelyre $X(p) = v$ teljesül. Az Y -nak a v szerinti kovariáns deriváltján a $\nabla_v Y = (\nabla_X Y)(p)$ vektort értjük.

Állítás: Legyenek $Y_1, Y_2 \in \mathfrak{X}(M)$ vektormezők és egy $v \in T_p M$ ($p \in M$) érintővektor. Ha a p pont egy U nyílt környezetén az Y_1, Y_2 vektormezők megegyeznek (azaz $Y_1|_U = Y_2|_U$), akkor $\nabla_v Y_1 = \nabla_v Y_2$.

Az előbbi állítás alapján az M sokaságon vett kovariáns deriválás természetes módon meghatároz egy lineáris konnexit az U nyílt részsokaságon is. Ily módon $X, Y \in \mathfrak{X}(U)$ estén definiálni tudjuk a $\nabla_X Y \in \mathfrak{X}(U)$ vektormezőt.

Tekintsük az $M (U, x)$ térképét. A térképezés bázisvektormezői: $X_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$, ($i=1, \dots, m$). Fejezzük ki a $\nabla_{X_i} X_j \in \mathfrak{X}(U)$ vektormezőt $\nabla_{X_i} X_j = \sum \Gamma_{ij}^k \cdot X_k$ alakban, ahol a $\Gamma_{ij}^k : U \rightarrow \mathbb{R}$ differenciálható függvények. Ezeket a függvényeket a ∇ kovariáns deriválás (U, x) térképre vonatkozó *Christoffel-féle szimbólumainak* nevezzük.

A Christoffel-féle szimbólumok felhasználásával lokálisan leírható a kovariáns deriválás:

Legyenek $Y = \eta^i X_i$ és $Z = \zeta^i X_i$ az tartományon vett sima vektormezők.

$$\text{Ekkor} \quad \nabla_Y Z = \left(\eta^i \cdot \frac{\partial \zeta^k}{\partial x^i} + \Gamma_{ij}^k \cdot \eta^i \cdot \zeta^j \right) X_k. \quad (2.22)$$

A $Z \in \mathfrak{X}(U)$ vektormezőnek egy $p \in U$ pontban vett $v = \alpha^i X_i(p)$ érintővektor szerinti kovariáns deriváltja

$$\nabla_v Z = \left(\alpha^i \cdot \frac{\partial \zeta^k}{\partial x^i}(p) + \Gamma_{ij}^k(p) \cdot \alpha^i \cdot \zeta^j(p) \right) X_k(p). \quad (2.23)$$

Definíció: Legyen $\sigma : I \rightarrow M$ egy sima görbe és $Z = \zeta^i X_i \in \mathfrak{X}(\sigma)$ (σ -menti differenciálható) vektormező. A Z vektormező t helyen vett kovariáns deriváltján a

$$Z'(t) = \{ (\zeta^k)'(t) + \Gamma_{ij}^k(\sigma(t)) \cdot (\sigma^i)'(t) \cdot \zeta^j(t) \} X_k(\sigma(t)) \quad (2.24)$$

vektort értjük.

Definíció: A $Z = \zeta^i X_i \in \mathfrak{X}(\sigma)$ vektormezőt *párhuzamosnak* nevezzük a $\sigma : I \rightarrow M$ mentén, ha $Z'(t) = 0 \quad \forall t \in I$ -re.

A definícióban mondott feltétel akkor és csak akkor teljesül, ha a Z koordináta-függvényei kielégítik a

$$(\zeta^k)'(t) + \Gamma_{ij}^k \circ \sigma(t) \cdot (x^i \circ \sigma)'(t) \cdot \zeta^j(t) = 0 \quad (2.25)$$

egyenleteket.

Definíció: A $\sigma: I \rightarrow M$ sima görbét *geodetikusnak* (autoparallelnak) nevezünk, ha $\dot{\sigma} \in \mathfrak{X}(\sigma)$ vektormezőt *párhuzamosnak* nevezük a σ mentén.

Levi-Civita-féle konnexió

Adott egy (M, g) Riemann-sokaság, melyen a ∇ egy lineáris konnexió. Értelmezzük a g metrikus tenzormező ∇g kovariáns deriváltját tetszőleges $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ vektormezők esetén a következő összefüggéssel:

$$\nabla g(X, Y, Z) := \nabla_Z g(X, Y) = Z(g(X, Y)) - g(\nabla_Z X, Y) - g(X, \nabla_Z Y). \quad (2.26)$$

A ∇g kovariáns derivált $(0,3)$ -típusú tenzormező.

Definíció: Az M sokaságon vett ∇ kovariáns deriválást *metrikusnak* mondjuk, ha $\nabla g = 0$. (Azaz a g metrikus tenzor kovariáns deriváltja bármely $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ esetén eltűnik.)

Definíció: Adott egy (M, g) Riemann-sokaság. Az M *Levi-Civita-féle lineáris konnexiójának* nevezük azt az egyértelműen meghatározott ∇ kovariáns deriválást, amely metrikus és torziómentes.

Az (M, g) Riemann-sokaság Levi-Civita-féle ∇ konnexiójára fennáll a

$$g(\nabla_X Y, Z) = \frac{1}{2} \{X(g(Y, Z)) + Y(g(Z, X)) - Z(g(X, Y)) - g(X, [Y, Z]) + g(Y, [Z, X]) + g(Z, [X, Y])\} \quad (2.27)$$

összefüggés, melyet *Koszul-formulának* nevezünk. A Koszul-formula ismeretében tudjuk meghatározni a ∇ egy adott (U, x) térképre vonatkozó Christoffel-féle szimbólumait:

$$\Gamma_{ij}^h = \frac{1}{2} g^{hk} \left(\frac{\partial}{\partial x^i} (g_{jk}) + \frac{\partial}{\partial x^j} (g_{ki}) - \frac{\partial}{\partial x^k} (g_{ij}) \right). \quad (2.28)$$

Állítás: Legyen $\sigma: I \rightarrow M$ sima görbe. Ha az $Y, Z \in \mathfrak{X}(\sigma)$ vektormezők párhuzamosak a σ mentén, akkor az $f(t) = g(Y(t), Z(t))$ függvény konstans. Ebből az állításból következik, hogy a sima görbe mentén vett párhuzamos eltolás megőrzi a skaláris szorzatot az érintőtereken.

A $\gamma: I \rightarrow M$ sima görbét akkor neveztük geodetikusnak, ha az érintővektoraiból nyert $\dot{\gamma} \in \mathfrak{X}(\gamma)$ vektormező párhuzamos. Ez pontosan akkor teljesül, a $\gamma_k = x^k \circ \gamma$ koordináta-függvények kielégítik a

$$\zeta_k''(t) + \Gamma_{ij}^k \circ \gamma(t) \cdot \gamma_i'(t) \cdot \gamma_j'(t) = 0. \quad (2.29)$$

másodrendű differenciálegyenlet-rendszert.

Definíció: A $\gamma: I \rightarrow M$ geodetikus görbét *maximális geodetikusnak* nevezzük, nincs olyan $\sigma: J \rightarrow M$ geodetikus, amely szegmensként tartalmazná a γ -t, azaz amelyre teljesülnének a $I \subset J$ és $\sigma|_I = \gamma$ feltételek.

Tétel: M tetszőleges pontjából minden irányban pontosan egy maximális geodetikus indul ki.

Tekintsük az (M, g) Riemann-sokaságot, és jelölje $\langle \cdot, \cdot \rangle$ a TM -beli belsőszorzatot. Az MR görbületi tenzorára az 1. Bianchi-azonosságon kívül teljesülnek a következők (tetszőleges $X, Y, Z, W \in \mathfrak{X}(M)$ esetén):

- $\langle R(X, Y)Z, W \rangle = -\langle R(X, Y)W, Z \rangle$
- $\langle R(X, Y)Z, W \rangle = \langle R(Z, W)X, Y \rangle$.

Definíció: Legyen S egy kétdimenziós altere a $T_p M$ ($p \in M$) érintőtérnek

Vegyük az S altér tetszőleges v és w lineárisan független vektorait. A

$$K(S) = \frac{\langle R(v, w)w, v \rangle}{\langle v, v \rangle \langle w, w \rangle - \langle v, w \rangle^2}$$

számot a Riemann sokaság S síkálláshoz tartozó *Gauss-görbületének* nevezzük.

A $K(S)$ értéke nem függ az S alteret generáló v és w vektorok megválasztásától.

Berwald-konnexió

Tekintsük a $G = y^i \frac{\partial}{\partial x^i} - 2G^i \frac{\partial}{\partial y^i}$ spray-t. A \mathbf{G} Christoffel-féle szimbólumai a következő alakban adhatók meg:

$$\Gamma_{jk}^i(y) := \frac{\partial^2 G^i}{\partial y^j \partial y^k}(y).$$

Fontos megemlíteni, hogy a Γ_{jk}^i csak a hely függvénye a $TM \setminus \{0\}$ -n.

Bármely zérusvektortól különböző $y \in T_x M$ vektor esetén egy

$\nabla^y : T_x M \times C^\infty(TM) \rightarrow T_x M$ leképezést definiálunk:

$$\nabla_u^y V = \left\{ u(V^i(x)) + V^j(x) \Gamma_{jk}^i(y) u^k \right\} \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_x.$$

Látható, hogy $t > 0$ esetén $\nabla^{t,y} = \nabla^y$

A ∇^y rendelkezik a következő tulajdonságokkal:

- (1) $\nabla_u^y (fV) = u(f)V + f \nabla_u^y V$
- (2) $\nabla_{fu}^y V = f \nabla_u^y V$
- (3) $\nabla_u^y (V_1 + V_2) = \nabla_u^y V_1 + \nabla_u^y V_2$
- (4) $\nabla_{u_1+u_2}^y V = \nabla_{u_1}^y V + \nabla_{u_2}^y V$.

A $\nabla = \{ \nabla^y : T_x M \times C^\infty(TM) \rightarrow T_x M \}$ leképezés családot *Berwald konnexiónak* nevezzük.

A Berwald konnexió független az iránytól, ezért általában nem ad lineáris konnexiót a TM -en. A $B\Gamma$ Berwald konnexió pontosan akkor lesz lineáris konnexió a TM -en, ha a Γ_{jk}^i Christoffel szimbólumok y -tól függetlenek.

($y \in T_x M \setminus \{0\}$)

Cartan konnexió

Tekintsünk egy F^n n -dimenziós Finsler teret az $L(x,y)$ alapfüggvénnyel. A differenciálgeometriai tulajdonságokat szemelőtt tartva az L függvényből az F^n tér egy konnexiópárját fogjuk megadni. Az ilyen konnexiópárt az F^n tér *Finsler konnexiójának* nevezzük. [M4]

Mint ismeretes, minden M_x érintőtér tekinthető egy n -dimenziós Riemann térnek a következő metrikával:

$$g_{ij}(x,y)dy^i dy^j,$$

ahol $x=(x^i)$ rögzített. A Riemann téren természetes módon megadható a Levi-Civita konnexió, amely összefüggési koefficiensei a C -tenzor $C_{jk}^i(x,y)$ komponensei. (Ezek a komponensek a fenti Riemann metrikából származtathatók.)

Tétel: [M4] Tegyük fel, hogy a F^n tér $F\Gamma$ Finsler konnexiójának Γ^v vertikális konnexiója ν -metrikus és ν -torziómentes. Ekkor az U vertikális vektormező U_{jk}^i komponensei egyértelműen meghatározhatók a C -tenzor C_{jk}^i komponensei által.

A $F\Gamma$ Finsler konnexió kielégíti a következő feltételeket (U és U_2 feltételek), amely a $g_{ij}(x,y)$ $(0)p$ -homogenitásának következményei:

$$y^j C_{jk}^i = C_{jk}^i y^k = 0.$$

Ezenkívül az U vertikális vektormező U_{jk}^i komponenseinek eltűnése a koordinátarendszertől független.

Tétel: [M4] Tekintsünk olyan $F\Gamma$ Finsler konnexiót, melynek vertikális konnexiója az F^i vertikális konnexiója. Ekkor

- (1) Az U vertikális vektormező eltűnik.
- (2) A ν -kovariáns deriválás egybeesik az y^i szerinti parciális deriválással.
- (3) Az $S^1(\nu)$ ν -torziótenzor és az S^2 ν -görbületesi tenzor azonosan eltűnik.

Definíció: [M4] Tekintsünk egy F^n n -dimenziós Finsler teret az $L(x,y)$ alapfüggvénnyel és $g_{ij}(x,y)$ alaptenzorral. A $C\Gamma = (\Gamma^h, \Gamma^v)$ Cartan konnexión olyan Finsler konnexiót értünk, amely egyértelműen megadható a következő axiómarendszer által:

- (1) h -metrikus: $\nabla^h g = 0$,
- (2) (h) h -torzió tenzorra: $T = 0$,
- (3) a deflexió tenzorra: $D = 0$,
- (4) v -metrikus: $\nabla^v g = 0$,
- (5) (v) v -torzió tenzorra: $S^l = 0$.

A Γ^h horizontális konnexiót az

$$F_{ijk} = \gamma_{ijk} - C_{ijr} N_k^r - C_{kjr} N_i^r + C_{ikr} N_j^r$$

és

$$N_j^i = G_j^i = \partial_j G^i = \gamma_{0j}^i - C_{jr}^i \gamma_{00}^r$$

határozza meg, ahol a γ_{jk}^i a g_{ij} x^i szerinti parciális deriváltjaiból konstruált Christoffel-féle szimbólumok.

A Γ^v vertikális konnexiót a C -tenzor C_{jk}^i komponensei, azaz a g_{ij} y^j szerinti parciális deriváltjaiból konstruált Christoffel-féle szimbólumok, határozzák meg.

Skalár és konstans görbületű Finsler-terek

A Riemann-geometriában megismert görbület fogalmát először Berwald általánosította Finsler-terekre [B1]. Terjesszük ki a Riemann-tér esetén megismert metszetgörbület fogalmát!

$$R = R_{hijk} X^h Y^i X^j Y^k / (g_{hj} g_{ik} - g_{hk} g_{ij}) X^h Y^i X^j Y^k \quad (2.30)$$

ahol az R_{hijk} tenzorkomponensek a h -görbületi tenzor komponensei egy Finsler-konnexióban. Látható, hogy R függvénye a helynek és az érintővektornak, azaz nem határozza meg az adott pont és egy kétdimenziós metszet, ellentétben a Riemann sokaságoknál tapasztaltakkal.

Tekintsük most a Berwald-típusú konnexiót. Ekkor a görbületet a következőképpen definiálhatjuk:

$$\begin{aligned} K &:= H_{hijk}(x,y) y^h X^i y^j X^k = \\ &= (g_{hj}(x,y) g_{ik}(x,y) - g_{hk}(x,y) g_{ij}(x,y)) y^h X^i y^j X^k \end{aligned} \quad (2.31)$$

ahol H a h -görbületi tenzor Berwald-konnexióban.

Definíció: [B4] Ha a K görbület bármely (x,y) pontban független X -től, azaz $K(x,y)$ egy skalármező, akkor a Finsler-teret *skalár görbületűnek* mondjuk.

Tétel: [B4] Egy Finsler-tér pontosan akkor skalár görbületű, ha az alábbi feltételek valamelyike teljesül:

1. $R_{i0h} = L^2 K h_{ik}$
 2. $R_{ijk} = h_{ik} K_j - h_{ij} K_k$, (2.32)
- ahol $K_j = \frac{1}{3} L^2 K|_j + L K l_j$ (Az $|_j$ a Berwald-konnexióbeli ν -kovariáns deriválást jelöli.)

3. A Berwald-konnexióbeli H h -görbületi tenzor alakja:

$$H_{hijk} = h_{ik}K_{j\cdot h} - h_{ij}K_{k\cdot h} + (h_{hi}l_j + h_{hj}l_i) \frac{K_k}{L} - (h_{hi}l_k + h_{hk}l_i) \frac{K_j}{L} \quad (2.33)$$

Megjegyzés: Az R_{ijk} tenzor kétdimenziós esetben mindig a (2.32)-beli formában írható, így bármely kétdimenziós Finsler-tér skalár görbületű.

Tegyük fel, hogy a skalárgörbület csak a hely függvénye, ekkor $K_j = K L l_j$, ezért (2.32) és (2.33)

$$R_{ijk} = KL(h_{ik}l_j - h_{ij}l_k) = KL(g_{ik}l_j - g_{ij}l_k), \quad (2.34)$$

és

$$H_{hijk} = K(g_{hj}g_{ik} + g_{hk}g_{ij}) \quad (2.35)$$

formára redukálódik.

Tétel: [M2] Ha egy legalább háromdimenziós skalárgörbületű Finsler-tér esetén a skalárgörbület csak a hely függvénye, akkor az konstans.

Definíció: [M2] Egy skalárgörbületű Finsler-teret ($n \geq 2$) *konstans görbületűnek* mondunk, ha K konstans.

Tétel: [M2] Egy Finsler-tér ($n \geq 2$) pontosan akkor konstans görbületű, ha az (2.34), (2.35) feltételek valamelyike teljesül:

Speciális Finsler terek

Riemann terek

Ebben az alfejezetben a Riemann terekre, mint speciális Finsler terekre vonatkozó legfontosabb eredményeket foglaljuk össze. A Riemann geometria, mint a négydimenziós tér-idő geometriája, az általános relativitáselmélet révén fontos szerephez jutott a fizikai jelenségek leírásánál.

Egy n -dimenziós Finsler tér $g_{ij}(x,y)$ alaptenzora esetén két különlegesebb eset lehetséges: a g_{ij} vagy csak x -től (azaz a helytől), vagy csak y -től (azaz az iránytól) függ. Abban az esetben, ha a g_{ij} csak a hely függvénye és nem függ az iránytól, a Riemann tereket jellemezzük, és a Cartan-féle tenzor komponenseire $C_{ijk} = 0$ (2.18) [Ca]. A csak a helytől való függés nem függ a koordinátarendszer megválasztásától.

A Riemann térben a $g_{ij}(x)$ tenzormező megadása után az $x^i(t)$, ($a < t < b$) görbe ívhosszát az

$$s = \int_a^b \sqrt{g_{ij}(x) \dot{x}^i \dot{x}^j} dt$$

integrállal értelmezzük. Az $F(x, \dot{x}) = \sqrt{g_{ij}(x) \dot{x}^i \dot{x}^j}$ eleget tesz a Finsler tér definíciójában az $L(x, y)$ metrikus alapfüggvényre rótt feltételeknek, vagyis a Riemann terek a Finsler terek speciális esetei.

A Riemann geometria ívhosszmérése egyszerűen szemléltethető a differenciálokat használva:

$$ds = \sqrt{g_{ij}(x)\dot{x}^i\dot{x}^j} dt \quad \text{és} \quad ds^2 = g_{ij}(x)\dot{x}^i\dot{x}^j.$$

Azok az $(x+dx)$ pontok, melyek (x) -től közelítőleg egységnyi távolságra vannak a

$$g_{ij}(x)\dot{x}^i\dot{x}^j = 1$$

összefüggést elégitik ki. Ez a térben egy (x) középpontú ellipszoid. Eszerint a Riemann tér úgy képzelhető el, mint egy olyan tér, amely tele van hintve folytonosan változó tengelyhosszúságú és tengelyirányú ellipszoidokkal. Az ellipszoid pontjai az (x) középponttól egységnyi Riemann távolságra helyezkednek el. Ezek az ellipszoidok (indikátrixok) az euklideszi egységgömbök szerepét veszik át, és segítségükkel ugyanúgy lehet mérni egy tetszőleges görbe hosszát, mint az euklideszi geometriában az egységgömbökkel. [RT]

Lokálisan Minkowski terek

Az 1930-as évek óta tudjuk, hogy egy Minkowski tér hiperfelületein indukált metrika Finsler metrika, és így a Finsler terek modellezhetők Minkowski terek segítségével.

A Riemann tereket az jellemezte, hogy a g_{ij} alaptenzor csak a hely függvénye volt. Ha a másik különlegesebb esetet vizsgáljuk, amikor a g_{ij} csak az y , azaz az irány függvénye, akkor $\partial_k g_{ij} = 0$. (A $\partial_k x_k$ szerinti parciális deriválást jelöl.) Ezen kívül a $g_{ij}y^i y^j = L^2(x,y)$ miatt a g_{ij} pontosan akkor függ csak y -től, ha L is csak y -től függ. Meg kell még említenünk, hogy $\partial_i L$ és $\partial_k g_{ij}$ nem alkotnak tenzormezőt.

Ha adott egy n dimenziós, $L(x,y)$ alapfüggvénnyel ellátott Finsler tér, akkor annak egy tetszőleges x pontbeli $T_x M$ érintőtere tekinthető úgy, mint az $L(x,y)$ normafüggvénnyel ellátott Minkowski tér. Ekkor az $L(x,y)$ -nak

ki kell elégítenie a háromszög-egyenlőtlenséget és csak a zérusvektor esetén tűnne el.

Definíció:[AIM] Egy Finsler teret lokálisan Minkowski térnek nevezünk, ha minden pontjában megadható egy olyan koordináta-rendszer, amelyben az alapfüggvény nem függ a helytől. Az ilyen koordináta-rendszert *adaptált koordináta-rendszernek* mondjuk.

Ezzel ekvivalens a következő

Tétel: [AIM] Egy Finsler tér akkor és csakis akkor lokálisan Minkowski tér, ha lefedhető olyan koordináta-környezetekkel, amelyek mindegyikében az alaptenzor komponensei csak az irány függvényei.

Ha L nem függ $x = (x^i)$ -től egy $(U, (x^i))$ adaptált koordináta-rendszerben, akkor $(U, L(y))$ egy Minkowski-tér egy tartományának tekinthető.

Jól ismert, hogy Riemann geometriában a normál koordináta-rendszerek közötti transzformáció affin. Hasonló következtetések vonhatók le adaptált koordináta-rendszer esetén is.

Tétel: [He] Bármely két adaptált koordináta-rendszer közötti transzformáció affin. Így egy lokális koordináta-rendszer, amelyet adaptált koordináta-rendszerből affin transzformációval nyertünk szintén adaptált.

Legyen ugyanis (x^i) és (\bar{x}^a) két koordináta-rendszer, amelyek koordináta-környezetei metszik egymást. Ekkor

$$\frac{\partial y^i}{\partial \bar{x}^a} = \frac{\partial (\frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^b} \bar{y}^b)}{\partial \bar{x}^a} = \bar{y}^b \frac{\partial^2 x^i}{\partial \bar{x}^a \partial \bar{x}^b}$$

amely maga után vonja, hogy

$$\frac{\partial \bar{L}}{\partial \bar{x}^a} = \frac{\partial L}{\partial x^i} \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^a} + \left(\frac{\partial L}{\partial y^i} \right) \bar{y}^b \left(\frac{\partial^2 x^i}{\partial \bar{x}^a \partial \bar{x}^b} \right) \quad (2.36)$$

Ha tehát a két koordinátarendszer adaptált, azaz $\frac{\partial \bar{L}}{\partial \bar{x}^a} = 0$ és $\frac{\partial L}{\partial x^i} = 0$ akkor

(2.36)-ból $\frac{\partial^2 x^i}{\partial \bar{x}^a \partial \bar{x}^b} = 0$ eltűnése következik, vagyis a transzformáció affin.

Míg, ha (x^i) adaptált és a transzformáció affin, akkor (2.36) jobb oldala eltűnik, vagyis (\bar{x}^a) is adaptált koordinátarendszer.

Mindez már a Finsler geometria korai periódusában is ismert volt. Varga Ottó már 1943-ban utalt rá [V], bár a bizonyítást először E. Heil publikálta [He] 1966-ban.

(α, β) -metrikával ellátott terek

Definíció: [M8] Egy $L(x, y)$ Finsler-metrikát (α, β) -metrikának nevezzük és $L(\alpha, \beta)$ -val jelöljük, ha L elsőfokú homogén függvénye egy $\alpha(x, y) = \sqrt{a_{ij}(x)y^i y^j}$ Riemann metrikának és egy $\beta(x, y) = b_i(x)y^i$ differenciál egy-formának.

Ugyanazon az alapsokaságon értelmezett α metrikájú Riemann teret az adott Finsler-tér *asszociált Riemann terének*, a $b_i(x)$ vektormezőt *asszociált vektormezőnek* nevezzük.

Megjegyzés: Az (α, β) -metrika esetén a Riemann metrika nem szükségképpen reguláris és pozitív definit.

Az (α, β) -metrikák definiálása előtt már többen foglalkoztak ilyen típusú metrikákkal. Mint korábban már említettem, G. Randers [Ra] 1941-ben egy érdekes struktúrával foglalkozott; a motiváló tényező a gravitációs térelmélet és az elektrodinamika tanulmányozása volt. Az alapfüggvény ebben az esetben

$$L(x, y) = \alpha(x, y) + \beta(x, y) = \sqrt{a_{ij}(x)y^i y^j} + b_k(x)y^k$$

alakú, ahol $\alpha(x, y)$ egy Riemann metrika és a $\beta(x, y)$ egy differenciál egy-forma. Ezt a metrikát *Randers metrikának* nevezzük.

Ezzel a metrikával találkozunk R. S. Ingarden [In1] és G. S. Asanov [As1], [As2], [HrS] munkáiban.

Ez az új metrika több szempontból is érdekesnek bizonyult. A Randers metrikák példával szolgának negatív konstans görbületű Finsler metrikákra [YS]. D. Bao és Z. Shen -1 értékű, negatív konstans görbületű metrikát konstruált:

Legyen $\mathbb{H}^n = (R^n, \alpha)$ -1 negatív konstans görbületű hiperbolikus Riemann tér és $\rho(x)$ jelölje az origótól mért távolságot. Ekkor

$$L(x, y) = \alpha(x, y) + \frac{\text{sh } \rho(x)}{\text{ch } \rho(x)} \rho(y), \quad y \in T_x R^n$$

Randers-metrika.

A Randers metrikával ellátott Finsler terek rendelkeznek a következő tulajdonsággal: egy Randers tér részsokasága szintén Randers tér.

Egy másik nevezetes, a Matsumoto-féle definíciót megelőző metrikát Kropina vezette be 1959 és 1961 között. Az alapfüggvény

$$L(x, y) = \frac{\alpha^2(x, y)}{\beta(x, y)} = \frac{a_{ij}(x)y^i y^j}{b_k(x)y^k}$$

alakú.

A Kropina-metrikának dinamikai és termodinamikai alkalmazásai is születtek. (Shibata [Shi1], [Shi2], Ingarden [In2])

Megjegyzés: Az (α, β) -metrikák M. Matsumotótól származó definíciója tulajdonképpen a Randes- és Kropina metrikák általánosításaként született meg.

A Kropina metrika általánosítása Hashiguchi, Hojo és M. Matsumoto nevéhez fűződik:

Definíció: [HHM] Az

$$L(x, y) = \frac{\alpha^{m+1}}{\beta^m} \quad (m \neq 0, -1)$$

alakú (α, β) -metrikát *általánosított m -Kropina metrikának* nevezzük.

1980-ban érdekes megállapításokat közölt Hashiguchi és Ichijio:

Tétel: [HI3] Egy $L = \alpha + \beta$ Randers metrika pontosan akkor pozitív definit, ha $a_{ij} - b_i b_j$ pozitív definit, feltéve, hogy a_{ij} is pozitív definit.

Megjegyzés: Ez a tétel azért lényeges, mert a Randers metrikák esetén az α Riemann metrika nem szükségképpen pozitív definit.

Tétel: [HI3] Ha egy Finsler tér bármely pontjában az indukált másodrendű hiperfelület, akkor az alapfüggvény kielégíti a következő másodfokú egyenletet:

$$p_{ij}(x)y^i y^j + q_i(x)y^i L + r(x)L^2 = 0,$$

továbbá az alapfüggvény $\alpha + \beta$, $-\alpha + \beta$ vagy α^2/β alakú.

Megjegyzés: Adott $p_{ij}(x)$, $q_i(x)$ és $r(x)$ függvények esetén az előbbi egyenlet megoldható $L > 0$ -ra. Ha $r(x) \neq 0$, akkor, az alapfüggvény $\alpha + \beta$ és $-\alpha + \beta$ alakban adható meg, míg ha $r(x) = 0$, akkor α^2/β alakban.

A Finsler geometria egy újabb modelljeként született az ún. Matsumoto metrika, amely szintén (α, β) -metrika, amely kétdimenziós esetét 1989-ben publikálta M. Matsumoto [M9]. Az n-dimenziós esetre történő általánosítás Aikou, Hashiguchi és Yamauchi nevéhez fűződik.

Definíció: [AHY] Az

$$L(x, y) = \frac{\alpha^2}{\alpha - \beta}$$

alakú (α, β) -metrikát *Matsumoto metrikának* nevezzük.

A skalár görbületű (α, β) -metrikával ellátott Finsler terek vizsgálata a következő eredményekhez vezetett:

Tétel: [M5] Egy (α, β) -metrikával ellátott Finsler tér akkor és csak akkor skalár görbületű, ha az asszociált Riemann tér konstans görbületű.

H. Yasuda és H. Shimada megállapította annak szükséges és elégséges feltételét, hogy egy Randers tér skalár görbületű legyen, és egy bonyolult formulával adták meg a skalárgörbületet [YS]. Ebben a munkában találjuk meg a kettőnél magasabb dimenziós konstans görbületű Randers terek osztályozását is. (Ez az osztályozás hiányosnak bizonyult.) Viszont egy következményt mégis érdemes kiemelni a munkából.

Következmény: [YS] Egy Randers tér, amelynél a b_i gradiens vektor (azaz teljesül $\partial_j b_i = \partial_i b_j$) pontosan akkor skalár görbületű, ha az asszociált Riemann tér konstans görbületű.

Definíció: [AIM] Az $F^n(M^n, L)$ Finsler teret *C-reducibilis*nek nevezzük, ha

$$C_{ijk} = \frac{1}{n+1} (h_{ij} C_k + h_{ik} C_j + h_{jk} C_i),$$

ahol a $C_k = C_{ijk} g^{ij}$.

Könnyen igazolható, hogy minden kétdimenziós Finsler-tér C-reducibilis. Ezenkívül C-reducibilis (α, β) -metrikával ellátott Finsler-tér $n \geq 3$ esetben a Randers tér és Kropina tér.

Tétel: [AIM] Egy Finsler tér ($n \geq 3$) C-reducibilis akkor és csak akkor, ha az $L(x, y)$ alapfüggvény a következő másodfokú egyenlettel adható meg:

$$K L^2 + 2K_i y^i L + K_{ij} y^i y^j = 0$$

ahol $K(x)$ skalármező, $K_i(x)$, $K_{ij}(x)$ tenzormezők.

Ha $K(x)$ nem tűnik el, akkor a metrika Randers típusú. Ha $K(x) = 0$, akkor a metrika Kropina típusú, feltéve, hogy $K_i(x)$ nem tűnik el.

Landsberg terek

A speciális Finsler terek ezen osztályához G. Landsberg egy variációs probléma folytán jutott [L1], [L2], [L3]. Kétdimenziós esetben a görbület fogalmát szem előtt tartva folytatta számításait, látva, hogy a görbület csak a hely függvénye, mivel a jól ismert Gauss-Bonnet formula teljesül.

Definíció: Egy F^n Finsler teret Landsberg térnek nevezünk, a Cartan-konnexió P^2 $h\nu$ görbületi tenzora azonosan zérus.

A definícióban szereplő tulajdonság pontosan akkor teljesül, ha a térben a P^l (ν) $h\nu$ görbületi tenzor azonosan eltűnik. Ebből következik

$$P_{ijk} = C_{ijk|0} = 0,$$

ahol a "||" a Cartan-konnexió kovariáns deriválását jelöli. Könnyen igazolható, hogy teljesül

$$P_{ijk} = C_{ijk;0} = 0$$

is, ahol a ";" a Berwald-konnexió h -kovariáns deriválását jelöli.

Egy Finsler-tér esetén Berwald-konnexióban $G_{jk}^i = F_{jk}^i + P_{jk}^i$, amely most azt jelenti, hogy $G_{jk}^i = F_{jk}^i$.

Tétel: [AIM] Egy Finsler tér pontosan akkor Landsberg tér, ha a következő feltételek közül egy teljesül:

(1) Cartan-konnexióban

- a. A P^l (ν) $h\nu$ görbületi tenzor azonosan eltűnik
- b. $C_{ijk|0} = 0$
- c. $C_{hij|k}$ szimmetrikus minden indexben

(2) Berwald-konnexióban

- a. A konnexió h -metrikus
- b. $C_{ijk;0} = 0$
- c. A $h\nu$ -görbületi tenzorra: $y_\alpha G_{ijk}^\alpha = 0$.

Megjegyzés: A „Landsberg tér” elnevezéssel már Berwald korai munkáiban is találkozhatunk, bár ekkor a definiáló tulajdonság a Berwald-konnexió h -metrikussága volt.

A $g_{ij;k} = -2P_{ijk}$ feltétel teljesülése miatt Landsberg terekben a g_{ij} metrikus tenzor Berwald-féle kovariáns deriváltja eltűnik: $g_{ij;k} = 0$. A párhuzamos eltolás nem változtatja meg a vektorok hosszát.

Berwald terek

Amikor L. Berwald ezzel a tértípussal foglalkozott, akkor „affinösszefüggő térnek” nevezte ezeket. Elsőként V. Wagner használta a Berwald tér elnevezést.

A geodetikusokat leíró egyenletrendszerben fontos szerepet játszanak a G^i függvények, amelyek y -ban másodfokú pozitív homogén tulajdonsággal rendelkeznek. A G^i parciális deriválásával nyerjük:

$$G_j^i = \dot{\partial}_j G^i, \quad G_{jk}^i = \dot{\partial}_j \dot{\partial}_k G^i, \quad G_{hjk}^i = \dot{\partial}_h \dot{\partial}_j \dot{\partial}_k G^i.$$

Teljesül

$$G_{jk}^i(x, y) y^j y^k = F_{jk}^i(x, y) y^j y^k = 2G^i(x, y) = \gamma_{00}^i(x, y),$$

ahol γ_{jk}^i a g_{ij} x^i szerinti parciális deriváltjaiból konstruált Christoffel-féle szimbólumok, és a 0 index a megfelelő y^i -vel való kontrakciót jelöl. A Riemann terek esetén a $G_{jk}^i = \gamma_{jk}^i$.

A geodetikusok egyenlete kanonikus paraméterben Berwald-konnexió esetén

$$\frac{d^2 x^i}{ds^2} + G_{jk}^i \left(x, \frac{dx}{ds} \right) \left(\frac{dx^j}{ds} \right) \left(\frac{dx^k}{ds} \right) = 0.$$

Definíció: [M2] Egy Finsler teret *Berwald térnek* nevezünk, ha a G_{jk}^i csak a helytől függenek, azaz a Berwald-konnexió lineáris.

A G_{jk}^i nem alkotnak tenzormezőt, de a Berwald tér jellemezhető a $\dot{\partial}_h G_{jk}^i = G_{hjk}^i = 0$ tenzoregyenlettel. (A $\dot{\partial}_h y_h$ szerinti parciális deriválást jelöl.)

Tétel: [Ca], [B6] Egy Finsler tér akkor és csak akkor Berwald tér, ha a Berwald-konnexió G (G_{ijk}^h) $h\nu$ -görbületi tenzora azonosan zérus.

Következmény: Ha egy Finsler-tér Berwald tér, akkor Landsberg tér
Létezik-e olyan Landsberg tér, amely nem Berwald tér? Erre a kérdésre még nem kaptunk választ, ez egy nyitott probléma.

Tétel: [Ca] A C (C_{jk}^i) tenzor h -kovariáns deriváltjának eltűnése ($C_{hij|k} = 0$) Berwald teret jellemez.

A $G_{jk}^i = F_{jk}^i + C_{jk|l}^i y^l$ összefüggésből jól látható, hogy Berwald tér esetén $G_{jk}^i = F_{jk}^i$, ezért F_{jk}^i szintén csak a hely függvénye.

Már foglalkoztunk az (α, β) -metrikával ellátott Finsler terekkel. Ebben az esetben egy elegendő feltételt adhatunk arra, hogy a tér Berwald tér legyen:

Tétel: [Shi3] Legyen $F^n(M^n, L(\alpha, \beta))$ egy (α, β) -metrikával ellátott Finsler tér, ahol $\beta = b_i(x)y^i$. Ha $b_i(x)$ párhuzamos az $R^n(M^n, \alpha)$ asszociált Riemann térben, akkor az F^n Berwald tér.

Tétel: [Sz1] Legyen M kétdimenziós, összefüggő differenciálható sokaság, (M, L) Berwald tér, ahol L sima és erősen konvex $TM \setminus \{0\}$ -n.

Ha a Gauss-görbület azonosan zérus, akkor a tér lokálisan Minkowski.

Ha a Gauss-görbület nem azonosan zérus, akkor a tér Riemann.

Ha az említett tulajdonságú alapfüggvénnyel rendelkező, nem Riemann és nem lokálisan Minkowski teret keresünk, akkor magasabb dimenzióban kell gondolkodnunk.

3. Fejezet

Projektív Finsler-geometria

A Riemann térben a geodetikus vonalaknak két tulajdonsága van. A metrikus tulajdonság alapján a geodetikusok két pont legrövidebb összekötő vonalai. Van azonban a közönséges egyeneseknek egy olyan, nem-metrikus tulajdonsága is, az érintői párhuzamosak egymással. Mivel ez utóbbi tulajdonság teljesezésének vizsgálatához nincs szükség metrikára, ezeket a vonalakat pályáknak nevezzük, ezzel is kifejezve azt, hogy a metrika hiánya miatt nem mondhatjuk, hogy e vonalak minimális ívhosszú görbék. Minthogy a Finsler térben metrikus alapfüggvény is létezik, ezért olyan jellegű tételek felkutatása kívánatos, amelyekben a tér alapfüggvénye is szerepel. Meg kell említenünk Rapcsák András nevét, akinek sikerült differenciálegyenlet-rendszerrel jellemezni azoknak a Finsler tereknek az alapfüggvényeit, amelyek geodetikusan leképezhetők egy másik Finsler térre [Rap2]. Rapcsák e dolgozata még két szükséges és elégséges feltételt is tartalmaz két Finsler tér geodetikus megfeleltethetőségére vonatkozóan. Ugyancsak Rapcsák volt az, aki kritériumot adott egy leképezés pályatartó voltára, s megmutatta, hogy a Weyl illetve Douglas tenzorok a pályatartó leképezés teljes invariánsrendszerét adják [Rap3].

Projektív kapcsolat

Legyen M^n egy n -dimenziós differenciálható sokaság, melyen két Finsler metrikát adunk meg az $L(x,y)$ és $\bar{L}(x,y)$. Ezzel a közös M^n alapsokaságon az $F^n(M^n, L)$ és $\bar{F}^n(M^n, \bar{L})$ Finsler tereket adtuk meg. A számítások megkönnyítése érdekében a két teret vonatkoztatjuk közös koordinátarendszerre.

Mint ismert, egy $F^n(M^n, L)$ Finsler tér geodetikusait kanonikus paraméter esetén az

$$d^2x_i/ds^2 + 2G^i(x, dx/ds) = 0 \quad (3.1)$$

differenciálegyenlet szolgáltatja, ahol $G^i = g^{ij}G_j$, $2G_j = (\partial_j \partial_i F)y^i - \partial_j F$ és F az energiafüggvény (azaz $F = \frac{1}{2}L^2$). Ha a geodetikusok lokálisan felírhatók $x^i = x^i(t)$ alakban, akkor az előbbi differenciálegyenlet a

$$d^2x_i/dt^2 + 2G^i(x, dx/dt) = \gamma(t) dx^i/dt \quad (3.2)$$

alakot ölti, ahol

$$\gamma(t) := (dx^2/dt^2)/(ds/dt).$$

Definíció:[AIM], [She3] Tekintsünk két Finsler teret ugyanazon sokaság felett. Ha az F^n tér minden geodetikusa egybeesik az \bar{F}^n tér valamely geodetikusával (mint pontthalmaz) és fordítva, akkor azt mondjuk, hogy az F^n tér projektív az \bar{F}^n térhez, és a metrikus alapfüggvények közötti $L(x,y) \rightarrow \bar{L}(x,y)$ megfeleltetést *projektívnek* nevezzük.

Legyen $c: x^i = x^i(t)$ az M^n egy olyan görbéje, amely közös geodetikusa F^n -nek és \bar{F}^n -nek. Ekkor c egyenletét F^n -ben (3.2) szolgáltatja, míg \bar{F}^n -ben

$$d^2x_i/dt^2 + 2\bar{G}^i(x, dx/dt) = \bar{\gamma}(t) dx^i/dt \quad (3.3)$$

alakban írható. Ezért a (3.3) és (3.2) egyenletek különbségét véve

$$2\bar{G}^i(x, dx/dt) - 2G^i(x, dx/dt) = (\bar{\gamma}(t) - \gamma(t)) dx^i/dt.$$

Mivel a fenti egyenlőségnek bármely x pontban és bármely dx/dt irányban teljesülnie kell, így igaz a következő tétel:

Tétel: [K] Egy F^n Finsler tér pontosan akkor projektív egy \bar{F}^n Finsler térhez, ha létezik olyan $p(x, y)$ y -ban elsőfokú pozitív homogén skalármező, amely kielégíti a

$$\bar{G}^i(x, y) = G^i(x, y) + p(x, y)y^i. \quad (3.4)$$

egyenlőséget. A $p(x, y)$ skalármezőt a projektív transzfomáció *projektív faktorának* nevezzük.

Később látni fogjuk, hogy a Randers és Kropina tereknek csak $p(x, y) = 0$ esetben van geodetikus leképezésük.

Projektív invariánsok

Ezen alfejezetben megvizsgáljuk, milyen kapcsolat van a Berwald típusú konnexió torzió és görbületi tenzorai között egymáshoz projektív Finsler terek esetén.

Most tegyük fel, hogy az F^n és az \bar{F}^n projektívek. Ennek szükséges és elegendő feltétele (3.4) teljesülése. Ezt y^j majd y^k szerint deriválva megkapjuk a (G_j^i, G_{jk}^i) és $(\bar{G}_j^i, \bar{G}_{jk}^i)$ Berwald típusú konnexók közötti projektív megfeleltetést, amik a következők:

$$\bar{G}_j^i = G_j^i + p_j y^i + p \delta_j^i \quad (p_j = \hat{\partial}_j p) \quad (3.5)$$

$$\bar{G}_{jk}^i = G_{jk}^i + p_{jk} y^i + p_j \delta_k^i + p_k \delta_j^i \quad (p_{jk} = \hat{\partial}_k p_j = \hat{\partial}_k \hat{\partial}_j p) \quad (3.6)$$

A (3.6) összefüggést y^l szerint deriváljuk

$$\bar{G}_{jkl}^i = G_{jkl}^i + p_{jkl} y^i + p_{jk} \delta_l^i + p_{jl} \delta_k^i + p_{kl} \delta_j^i \quad (p_{jkl} = \dot{\partial}_l p_{jk}), \quad (3.7)$$

majd a következő helyettesítéseket végezzük el:

$$p_{ij} = \frac{1}{n+1} (\bar{G}_{ij} - G_{ij})$$

$$p_{ijk} = \frac{1}{n+1} (\bar{G}_{ijk} - G_{ijk}).$$

Ekkor az egyenlőséget átrendezve és bevezetve a

$$D_{ijk}^h := G_{ijk}^h - \frac{1}{n+1} (y^h G_{ijk} + \delta_i^h G_{jk} + \delta_j^h G_{ik} + \delta_k^h G_{ij}) \quad (3.8)$$

jelölést (ahol $G_{ijk}^h = \dot{\partial}_k G_{ij}^h$, $G_{ijk} = \dot{\partial}_k G_{ij}$ és $G_{ij} = G_{ij}^\alpha$) kapjuk, hogy

$$\bar{D}_{ijk}^h = D_{ijk}^h. \quad (3.9)$$

Ebben az esetben a \bar{D}_{ijk}^h az \bar{F}^n térben a (3.8)-hoz hasonló kifejezést jelöl. A

(3.8) az F^n térben egy tenzort jelöl, melyet *Douglas tenzornak* nevezünk.

Ezzel megmutattuk, hogy a Douglas tenzor invariáns az $L \rightarrow \bar{L}$ projektív megfeleltetés esetén.

A Douglas tenzor rendelkezik a következő tulajdonságokkal: [M4]

- $D_{ijk}^h = D_{jik}^h = D_{ikj}^h$
- $D_{ij\alpha}^\alpha = 0$
- $D_{ij0}^h = D_{ij\alpha}^h y^\alpha = 0$.

A projektív Finsler-geometria és ezen belül a Douglas tenzor biológiában való alkalmazásáról részletesen olvashatunk P. L. Antonelli, R. S. Ingarden és M. Matsumoto közös munkájának [AIM] 5. fejezetében. A Douglas tenzorról kapcsolatos eredményekről - amelyet Bácsó Sándor és M. Matsumoto új kutatási eredményei szolgáltatnak - később ejtünk szót.

Létezik egy másik invariáns is a projektív megfeleltetéssel szemben, amelyet Riemann-metrika esetén 1921-ben H. Weyl [We] vezetett be, s amely később a Weyl tenzor elnevezést kapta. E tenzor fogalmának

általánosítása Finsler metrikák esetén J. Douglas [D] és L. Berwald [B3], [B4], [B5] nevéhez fűződik.

Tekintsük a Berwald konnexió h -görbületi tenzorát. A H tenzorra teljesül

$$H_{ijk}^h + H_{jik}^h + H_{ikj}^h = 0. \quad (3.10)$$

A H_{ijk}^h tenzorból kontrakcióval kapott $H_{ij} = H_{ij\alpha}^\alpha$ tenzort h -Ricci tenzornak nevezzük. A H_{ij} tenzor általában nem szimmetrikus, mivel a (3.10)-ből következik:

$$H_{ij} - H_{ji} = -H_{\alpha ij}^\alpha. \quad (3.11)$$

Tegyük fel, hogy az F^n és az \bar{F}^n projektívek. Ekkor a $(\nu)h$ -görbületi tenzorok közötti kapcsolat

$$\bar{R}_{jk}^i = R_{jk}^i + y^i Q_{jk} + \delta_j^i Q_k - \delta_k^i Q_j, \quad (3.12)$$

ahol $Q_j := p_{\cdot j} - p p_j$, és $Q_{jk} := p_{j \cdot k} - p_{k \cdot j}$. A (3.12) egyenlőséget y^h szerint differenciálva, és felhasználva a $R_{jk \cdot h}^i = H_{hjk}^i$ egyenlőséget, a h -görbületi tenzorok közötti összefüggést nyerjük:

$$\bar{H}_{hjk}^i = H_{hjk}^i + y^i Q_{jk \cdot h} + \delta_h^i Q_{jk} + \delta_j^i Q_{k \cdot h} - \delta_k^i Q_{j \cdot h}. \quad (3.13)$$

A "'' az y^h -szerinti differenciálást jelöli. Könnyen igazolhatók a következő azonosságok:

$$Q_{jk} = Q_{k \cdot j} - Q_{j \cdot k} \quad \text{és} \quad Q_{ij \cdot k} + Q_{jk \cdot i} + Q_{kj \cdot i} = 0. \quad (3.14)$$

A (3.13) és (3.14) felhasználásával a következő egyenlőséget kapjuk:

$$\bar{H}_{\alpha jk}^\alpha = H_{\alpha jk}^\alpha + (n+1)Q_{jk}.$$

Ebből

$$Q_{jk} = \frac{1}{n+1} \left((H_{jk} - H_{kj}) - (\bar{H}_{jk} - \bar{H}_{kj}) \right). \quad (3.15)$$

Továbbá (3.13)-ból adódik a

$$\bar{H}_{0j} = H_{0j} + Q_{j0} - (n-1)Q_j \quad (3.16)$$

összefüggés. A Q_{j0} -t a (3.15)-ből meghatározva és a (3.16)-ba helyettesítve,

valamint a $H_j = \frac{1}{n-1} (nH_{0j} + H_{j0})$ jelölést bevezetve a

$$Q_j = \frac{1}{n+1} (H_j - \bar{H}_j). \quad (3.17)$$

adódik. Végül a (3.15)-t és (3.17)-t a (3.12)-be helyettesítjük. Ekkor az egyenlőséget átrendezve és bevezetve a

$$W_{jk}^i := R_{ijk}^i + \frac{1}{n+1} (y^i H_{jk} + \delta_j^i H_k - \delta_k^i H_j) \quad (3.18)$$

jelölést, látható, hogy

$$\bar{W}_{jk}^i = W_{jk}^i, \quad (3.19)$$

ahol a \bar{W}_{jk}^i az \bar{F}^n térben a (3.18)-hoz hasonló kifejezést jelöl. A (3.18) az F^n térben egy tenzort jelöl, melyet *Weyl-féle torziótenzornak* nevezünk.

A már említett $R_{jk-h}^i = H_{hjk}^i$ egy másik invariáns tenzorhoz vezet, melyet *Weyl-féle görbületi-tenzornak* nevezünk:

$$W_{hjk}^i := H_{hjk}^i + \frac{1}{n+1} (y^i H_{jk-h} + \delta_h^i H_{jk} + \delta_j^i H_{k-h} - \delta_k^i H_{j-h}) \quad (3.20)$$

Síkprojektív Finsler terek

A síkprojektív terek olyan terek, amelyeknek pályái egyenesek. Ha olyan Finsler tereket keresünk, melyek egy síkprojektív térre pályatartóan leképezhetők, akkor arra is választ kapunk, melyek azok az alapfüggvények, amelyeknek extrémális serege egyenesekből áll [Hi1].

Definíció: [AIM] Egy Finsler teret egyenes geodetikusokkal rendelkezőnek vagy *síkprojektívnek* mondunk, ha az alapsokaság lefedhető olyan koordinátakörnyezetekkel, amelyekben minden geodetikus reprezentálható n darab $x^i = x_0^i + ta^i$ paraméteres lineáris egyenlettel.

Jól ismert, hogy egy lokálisan Minkowski-tér adaptált koordinátarendszerének értelmezési tartománya által az alapsokaság egy olyan lefedését kapjuk, amelyben az alapfüggvény csak y^i függvénye (csak az iránytól függ). Ekkor a G^i mennyiségek eltűnnek és a geodetikusok egyenlete

$d^2x/ds^2=0$ -ra redukálódik, azaz a geodetikusok „kiegyenesíthetők”. Ezek szerint bármely síkprojektív Finsler tér projektív egy lokálisan Minkowski térhez.

A síkprojektív tér létezéséhez szükséges a Weyl tenzor eltűnése, illetve kétdimenziós esetben a K görbületi tenzor a számítások szempontjából rendkívül nehézkes és hosszadalmas. Így az alkalmazások szempontjából lényegesen könnyebben számítható tenzorokat vezetett be Bácsó Sándor és Makoto Matsumoto, amelyek az ún. Q -invariánsok segítségével adódnak.

Tekintsük az $F^n(M^n, L) \rightarrow \bar{F}^n(M^n, \bar{L})$ projektív megfeleltetést, amely mellett változatlanul maradnak a következő projektív invariánsok:

$$\begin{aligned} Q^0 \text{-invariáns:} \quad Q^h &= G^h - \frac{1}{n+1} G y^h \\ Q^1 \text{-invariáns:} \quad Q_i^h &= \dot{\partial}_i Q^h = G_i^h - \frac{1}{n+1} (G_i y^h + G \delta_i^h) \\ Q^2 \text{-invariáns:} \quad Q_{ij}^h &= \dot{\partial}_j Q_i^h = G_{ij}^h - \frac{1}{n+1} (G_{ij} y^h + G_i \delta_j^h + G_j \delta_i^h) \end{aligned}$$

ahol $G = G_\alpha^\alpha$, $G = G_{\alpha i}^\alpha$ és $G = G_{\alpha ij}^\alpha$ a $h\nu$ -Ricci tenzor Berwald konnexió esetén.

A Q^2 -invariáns kielégíti a következő fontos azonosságokat:

$$Q_{ij}^h = Q_{ji}^h, \quad \text{és} \quad Q = Q_{\alpha ij}^\alpha \quad (3.21)$$

A Q^2 -invariánsból egyszerűen származtatható a Douglas tenzor:

$$D_{ijk}^h = \dot{\partial}_k Q_{ij}^h, \quad (3.22)$$

illetve egy újabb Q^3 -invariáns tenzor:

$$Q_{ijk}^h = \delta_k Q_{ij}^h + Q_{ij}^\alpha Q_{\alpha k}^h - \delta_j Q_{ik}^h - Q_{ik}^\alpha Q_{\alpha j}^h, \quad (3.23)$$

ahol $\delta_k Q_{ij}^h = \partial_k Q_{ij}^h - (\dot{\partial}_\alpha Q_{ij}^h) G_k^\alpha$. A Q^3 -invariánsra fennállnak a következők:

$$Q_{ijk}^h + Q_{jki}^h + Q_{kij}^h = 0, \quad \text{és} \quad Q_{\alpha jk}^\alpha = 0. \quad (3.24)$$

A $Q_{ij} = Q_{ij\alpha}^\alpha$ Ricci típusú tenzor segítségével két, a projektív Finsler geometria elméletében, az alkalmazások terén jelentős tenzort adhatunk meg [BM3]:

$$\Pi^1 \text{-tenzor} \quad \Pi_{ijk}^h = Q_{ijk}^h + \frac{1}{n+1} (\delta_j^h Q_{ik} - \delta_k^h Q_{ij}) \quad (3.25)$$

$$\Pi^2\text{-tenzor} \quad \Pi_{ijk} = \delta_k Q_{ij} + Q_{ij}^\alpha Q_{\alpha k} - \delta_j Q_{ik} - Q_{ik}^\alpha Q_{\alpha j} \quad (3.26)$$

Tétel: [BM3] A Berwald-féle görbületi tenzorból képezhető Weyl-féle projektív görbületi tenzor egybeesik a Q invariánsokból származó Π^1 -tenzonnal.

A (3.22)-ből látható, hogy egy Finsler tér akkor és csak akkor Douglas tér, ha a Q_{ij}^h függvények csak a helytől, azaz x^i -től függenek. Ennek következtében a (3.23)-ban megadott Q^3 invariáns tenzor is csak x^i -től függ, és ezáltal a Π^1 és Π^2 tenzorok is csak a hely függvényei. Így igaz a következő:

Tétel: [BM3] Egy Douglas térben a Weyl tenzor komponensei csak a hely függvényei.

Tétel: [BM3] Egy F^n Finsler tér pontosan akkor síkprojektív, ha az Douglas tér, továbbá kétdimenziós esetben a $\Pi_{ijk} = 0$ feltétel teljesül, magasabb dimenzióban pedig a $\Pi_{ijk}^h = 0$ feltétel.

A koordinátatranszformációk vizsgálatát megkönnyíti, hogy egy Douglas térben a Q^2 invariánsok által meghatározott Π^1 és Π^2 tenzorok csak a hely függvényei. Így elegendő csak az $(x^i) \rightarrow (\bar{x}^i)$ koordinátatranszformációt tekinteni. Ennek kapcsán a másodrendű közönséges differenciálegyenletek megoldásainak egyenes voltára, „kiegyenesíthetőségére” jól kezelhető, szükséges és elegendő feltételek adhatók kétdimenzióban [BM3].

- Az $y'' = f(x, y)$ differenciálegyenlet megoldásai akkor és csak akkor adják egy síkprojektív Finsler tér geodetikusait, ha $f(x, y) = A(x)y + B(x)$ alakú, azaz $f(x, y)$ y -ban lineáris. Ez az eset az $y'' = k(x, y)(y')^3$ differenciálegyenletnél pontosan akkor következik be, ha $k(x, y) = C(y)x + D(y)$ alakú.

- Az $y''=P(x)y'+Q(x)y+R(x)$ másodrendű közönséges differenciál-egyenlet kétdimenziós, síkprojektív Finsler tér geodetikusait szolgáltatja.

Bácsó Sándor és Makoto Matsumoto a síkprojektív terek további vizsgálata folytán a következő eredményeket nyerték:

Tétel: [BM4] Egy legalább háromdimenziós Finsler tér akkor és csakis akkor síkprojektív Berwald tér, ha az lokálisan Minkowski típusú vagy konstans görbületű Riemann tér.

Tétel: [BM5] Legyen (x^i) és (\bar{x}^i) két egyenesvonalú koordinátarendszer (azaz olyan koordinátarendszer, amelyben a geodetikusok lineáris egyenletrendszerrel adhatók meg) egy síkprojektív Finsler térben. A koordinátarendszerek közötti kapcsolatot az

$$x^i = \frac{c_r^i x^r + c^i}{c_r x^r + c}, \text{ ahol } c_r^i, c^i, c_r, c \text{ konstansok} \quad (3.27)$$

összefüggés írja le. Fordítva, ha (x^i) egy egyenesvonalú koordinátarendszer, akkor ebből a (3.27) szerint adódó (\bar{x}^i) koordinátarendszer is egyenesvonalú.

Ezutóbbi tételben szereplő transzformációt projektívnek nevezzük.

M. Matsumoto több írásában foglalkozik síkprojektív Finsler terekkel, szükséges és elegendő feltételt adott egy (α, β) -metrikával ellátott Finsler tér síkprojektív voltára [M13], és feltérképezte a konstans görbületű síkprojektív Finsler tereket [M12].

Speciális Finsler terek projektív megfeleltetései

I. W. Roxburgh: vetette fel a következő problémát, melyet még napjainkban sem oldottak meg teljes egészében [Rox]:

Határozzuk meg az összes olyan Finsler teret, amelynek geodetikussai egyidejűleg valamely Riemann térnek is geodetikussai, azaz adjuk meg az összes olyan Finsler teret (metrikát), amely projektív valamilyen Riemann térhez (metrikához).

Mivel egy Riemann térben a Douglas tenzor azonosan zérus, így az alábbi tulajdonságú Finsler terek csak a Douglas terek között fordulhatnak elő. Több részeredmény Bácsó Sándor nevéhez fűződik [Ba2].

Tétel: [Rap2], [M3] Ha egy $F^n(M^n, L)$ Finsler tér projektív egy $\tilde{F}^n(M^n, \tilde{L})$ Finsler térhez, akkor

$$\tilde{l}_{ij;\alpha} y^\alpha = 0, \quad (3.28)$$

ahol $\tilde{l}_{ij} = \frac{1}{L} \tilde{h}_{ij} = \frac{1}{L} (\tilde{g}_{ij} - \tilde{l}_i \tilde{l}_j)$, és $\tilde{l}_i = \partial_i \tilde{L}$, a „;” szimbólum a Berwald-konnexió szerinti h -kovariáns deriválást jelöli.

Definíció: [Ba2] Ha a Finsler terek közötti projektív megfeleltetésnél az $\tilde{l}_{ij;k} = 0$ feltétel teljesül, akkor a megfeleltetést *erős projektivitásnak* nevezzük.

Tétel: [Ba2] Tekintsük az F^n Finsler tér és R^n Riemann tér közötti erős projektivitást, ekkor a projektív faktor $p(x,y) = e^{\varphi(x)} L_R(x,y)$ formájú, ahol

$L_R(x,y)$ az R^n Riemann tér metrikus alapfüggvénye, φ tetszőleges, csak a helytől függő, differenciálható függvény.

Tétel: Ha az $F^n(M^n, L) \rightarrow R^n(M^n, \bar{L})$ megfeleltetés erős projektivitás, és F^n kontans görbületű, akkor a következő két eset lehetséges:

$$- K=0,$$

vagy

$$- K \neq 0 \text{ és } \bar{L} = e^{\psi(x)} L,$$

ahol K a görbületi konstans, ψ tetszőleges, csak a helytől függő, differenciálható függvény. A második esetben ez a megfeleltetés hasonlóság [Ru], [Ai].

Tétel: [BM6] Tekintsük a $\gamma: F^n(M^n, L(\alpha, \beta)) \rightarrow \tilde{F}^n(M^n, \tilde{L}(\alpha, \beta))$ projektív megfeleltetést $n > 2$ esetén. Ekkor a következő osztályok lehetségesek:

1. γ hasonlóság, ekkor $\tilde{L} = rL$, ahol $r \neq 0$ konstans;
2. β zárt forma és (α, β) parallel pár, ekkor γ ún. Randers-megfeleltetés (azaz $\tilde{L} = rL + s\beta$, ahol $r \neq 0$ és s konstans);
3. (α, β) parallel pár, ekkor minden (α, β) -metrika projektív egymáshoz és az asszociált Riemann térhez is. Ebben az esetben a Berwald konnexió egybeesik a Levi-Civita konnexióval.
4. $b_\alpha b^\alpha = b^2 \neq 0$, ekkor $\tilde{G} = G$, és $a_{ij} = b_i b_j / b^2 + \varepsilon c_i c_j$ ($\varepsilon = \pm 1$), továbbá $\partial_j b_i - \partial_i b_j = A(x)(b_i c_j - b_j c_i)$, ahol $A(x)$ tetszőleges függvény.
5. $b^2 = 0$ és $\alpha^2 \neq 0 \pmod{\beta}$, ekkor az első két esetet kapjuk.
6. $b^2 = 0$ és $\alpha^2 \equiv 0 \pmod{\beta}$, ekkor $\tilde{G} = G$ és $a_{ij} = (b_i c_j + b_j c_i) / 2$, továbbá $\partial_j b_i - \partial_i b_j = B(x)(b_i c_j - b_j c_i)$, ahol $B(x)$ tetszőleges függvény.

4. Fejezet

Vizsgálatok speciális Riemann terekben

Az első fejezetben már találtunk feltételt arra, hogy mikor létezik egy V^n Riemann térnek nemtriviális geodetikus leképezése egy másik Riemann térre. Ezek a terek mindannyian konstans görbülettel rendelkeznek.

Az alapegyenletek új formája

Amint azt korábban már említettük, egy V^n Riemann térnek akkor és csak akkor létezik a \bar{V}^n térre geodetikus leképezése, ha a \bar{V}^n tér $\bar{g}_{ij}(x)$ metrikus tenzora V^n -ben kielégíti a

$$\bar{g}_{ij,k}(x) = 2\psi_k(x)\bar{g}_{ij} - \psi_i(x)\bar{g}_{kj} + \psi_j(x)\bar{g}_{ki}. \quad (4.1)$$

feltételt, ahol

$$2(n+1)\psi_i(x) = \partial_i \ln |\bar{g}/g|.$$

Mivel a \bar{g}/g invariáns mennyiség, ψ_i gradiens vektor. [Szin]

Egy ezzel ekvivalens szükséges és elégséges feltétel a másodfajú Christoffel-szimbólumokkal fejezhető ki: a $V^n \rightarrow \bar{V}^n$ leképezés akkor és csak akkor geodetikus, ha a másodfajú Christoffel-féle szimbólumaik között fennáll:

$$\bar{\Gamma}_{ij}^h(x) = \Gamma_{ij}^h(x) + \psi_i(x)\delta_j^h + \psi_j(x)\delta_i^h. \quad (4.2)$$

Az (4.1) és (4.2) egyenletek a Riemann terek geodetikus leképezéseinek alapegyenletei, és ezeket *Levi-Civita féle egyenleteknek* nevezzük. [Szin]

A ψ_i gradiens vektor segítségével felírható:

$$\tilde{g}_{ij} = e^{-2\psi} \bar{g}_{ij}. \quad (4.3)$$

Az (4.3)-t V^n -ben kovariánsan deriválva és (4.1)-t felhasználva

$$\tilde{g}_{ij,k} = \psi_i \tilde{g}_{jk} + \psi_j \tilde{g}_{ik}. \quad (4.4)$$

Ha a \bar{g}_{ij} tenzor reguláris (azaz $\det(\bar{g}_{ij}) \neq 0$), akkor (4.3)-ból következik, hogy a \tilde{g}_{ij} tenzor szintén ilyen tulajdonságú. Ekkor a \tilde{g}_{ij} mátrix invertálható, és jelölje \tilde{g}^{ki} az inverz mátrixot, azaz

$$\tilde{g}_{i\alpha} \tilde{g}^{\alpha j} = \delta_i^j.$$

V^n -ben kovariánsan deriválva ezt az egyenletet, felhasználva az (4.4)-t

$$\tilde{g}^{ij}_{,k} = -\tilde{g}_{\alpha\beta,k} \tilde{g}^{\alpha i} \tilde{g}^{\beta j}.$$

Vezessük be a

$$\lambda^i = -\psi_{\alpha} \tilde{g}^{\alpha i} \quad (4.5)$$

jelölést, ekkor az (4.4)-ből következik:

$$\tilde{g}^{ij}_{,k} = \lambda^i \delta_k^j + \lambda^j \delta_k^i. \quad (4.6)$$

Az i és j indexeket V^n -ben leszállítjuk, majd további jelöléseket vezetünk be:

$$a_{ij} = \tilde{g}^{\alpha\beta} g_{\alpha i} g_{\beta j}, \quad \lambda_i = g_{\alpha i} \lambda^{\alpha}. \quad (4.7)$$

Az egyenlet a következő alakot ölti:

$$a_{ij,k} = \lambda_i g_{jk} + \lambda_j g_{ik}. \quad (4.8)$$

Ebben az egyenletben az (4.3) és (4.7)-ből adódóan az a_{ij} valamilyen reguláris, szimmetrikus, (0,2)-típusú tenzor, és a λ_i kovariáns vektor. Az (4.3), (4.5) és (4.7) sorokból az a_{ij} -re és λ_i -re olyan kifejezéseket kapunk, melyekben a V^n és \bar{V}^n terek metrikus tenzorai és a két tér közötti geodetikus leképezés ψ_i vektora szerepelnek.

$$a_{ij} = e^{-2\psi} \bar{g}^{\alpha\beta} g_{\alpha i} g_{\beta j} \quad (4.9)$$

$$\lambda_i = e^{-2\psi} \psi_{\alpha} \bar{g}^{\alpha\beta} g_{\beta i} \quad (4.10)$$

Az (4.8)-ból g^{ij} -vel való kontrakció után $(a_{\alpha\beta} g^{\alpha\beta})_{,k} = 2\lambda_k$, és az (4.10)-ből következik, hogy λ_k gradiens vektor, és $\lambda_i \neq 0$ pontosan akkor teljesül, ha $\psi_i \neq 0$.

Az (4.9) és (4.10)-ből levezethető, hogy $\psi_i = -\lambda_\alpha a^{\alpha\beta} g_{\beta i}$, ahol a^{ij} az a_{ij} -ből képzett mátrix inverzének elemei.

Összefoglalva az eddigieket: Ha a V^n térnek létezik nem-triviális geodetikus leképezése, akkor a térben léteznie kell egy a_{ij} reguláris, szimmetrikus tenzornak, amely eleget tesz az (4.8)-nak valamely $\lambda_i \neq 0$ gradiens vektor esetén.

Ha a V^n térben létezik az előbbi feltételnek elegettevő a_{ij} és $\lambda_i \neq 0$, akkor könnyen ellenőrizhető, hogy a tér nem triviális módon geodetikusan leképezhető.

Tétel: [Szin] Annak szükséges és elegendő feltétele, hogy a V^n térnek létezen nem-triviális geodetikus leképezése egy másik Riemann térre az, hogy a térben létezen egy a_{ij} reguláris, szimmetrikus tenzornak, amely eleget tesz az (4.8)-nak valamely $\lambda_i \neq 0$ gradiens vektor esetén.

Ennek a tételnek következménye, hogy minden ekvidisztáns Riemann térnek nem szinguláris esetben (azaz $\rho \neq 0$ esetén) létezik nem-triviális geodetikus leképezése.

Az ekvidisztáns tereket jellemző egyenlet:

$$\varphi_{i,j} = \rho g_{ij}.$$

Az a_{ij} tenzort állítsuk elő a következőképpen: $a_{ij} = c\varphi_i\varphi_j + c_l g_{ij}$, ahol $c \neq 0$, c_l konstans, és az a_{ij} -ből képzett mátrix reguláris. Ekkor

$$a_{ij,k} = c(\varphi_i\varphi_{j,k} + \varphi_j\varphi_{i,k}) = c(\rho\varphi_i g_{jk} + \rho\varphi_j g_{ik}).$$

A $\lambda_i = c\rho\varphi_i$ adódik, amely pontosan akkor nem nulla, ha $\rho \neq 0$.

Tekintsük a geodetikus leképezések alapegyenleteinek új, (4.8)-as formáját. Ez az a_{ij} tenzorra nézve egy elsőrendű differenciálegyenlet-rendszert ad, amelyben a λ_i szintén ismeretlen. A λ_i vektorra alkalmas feltételt találva az (4.8) integrabilitási feltételei felírhatók.

Ezért az (4.8)-at x^k -szerint kovariánsan differenciáljuk V^n -ben, az eredményt a k és l indexekre alternáljuk, és alkalmazzuk a Ricci-azonosságot.

$$a_{\alpha j} R_{ikl}^{\alpha} + a_{\alpha i} R_{jkl}^{\alpha} = \lambda_{i,l} g_{jk} + \lambda_{j,l} g_{ik} - \lambda_{i,k} g_{jl} \cdot \lambda_{j,k} g_{il}, \quad (4.11)$$

ahol az R_{ijk}^h a V^n Riemann tenzora. Az (4.11)-t kontraháljuk g^{jk} -val:

$$n\lambda_{i,l} = \mu g_{il} + a_{\alpha i} R_{\alpha l} - a_{\alpha\beta} R_{il}^{\alpha\beta}. \quad (4.12)$$

Az (4.12)-ben R^h_j a Ricci-tenzor vegyes komponense, és a $R_{il}^{\alpha\beta}$ -ban a β index a metrikus tenzor segítségével lett felemelve. Az egyenlet tartalmaz egy μ ismeretlen invariánst, melyet az (4.12) integrálhatósági feltételéből lehet meghatározni:

$$(n+3)\lambda_{\alpha} R_{ilk}^{\alpha} = \mu_{,k} g_{il} - \mu_{,l} g_{ik} + a_{i\alpha} R_{[l,k]}^{\alpha} + a_{\alpha\beta} R_{ikl}^{\alpha\beta} + \\ + g_{ik} \lambda_{\alpha} R_{\alpha l} - g_{il} \lambda_{\alpha} R_{\alpha k}. \quad (4.13)$$

Ebben az egyenlőségben a $\mu_{,k} = \partial_k \mu$ és a szögletes zárójel osztás nélküli alternálást jelöl. (4.13)-t kontraháljuk g^{il} -lel:

$$(n-1)\mu_{,k} = 2(n+1)\lambda_{\alpha} R_{\alpha k} + a_{\alpha\beta} (R_{k,}^{\alpha\beta} - R^{\alpha\beta}_{,k}), \quad (4.14)$$

Az (4.8), (4.12) és (4.14) egyenletek egy Cauchy-típusú elsőrendű lineáris differenciálegyenlet-rendszert alkotnak, melyben az ismeretlenek: az a_{ij} szimmetrikus tenzor, a λ_i kovariáns vektor és a μ invariáns. Korábban már megköveteltük, hogy az a_{ij} reguláris legyen. Ha az a_{ij} kielégíti az (4.8)-t, akkor ez azt jelenti, hogy az (4.12) és az (4.14) is kielégíthető az $a_{ij} + cg_{ij}$ (c konstans) tenzorral, ennek a feltétele, hogy a $\det(a_{ij} - cg_{ij})$ zérustól eltérő legyen. Ezenkívül ha az (4.8)-t egy $a_{ij} + c_{ij}$ (c_{ij} szimmetrikus tenzora a V^n térnek) tenzor is kielégíti, ha a c_{ij} kovariáns konstans, azaz $c_{ij,k} = 0$.

Tétel: [Szin] Annak szükséges és elegendő feltétele, hogy a V^n Riemann térnek létezzen nem-triviális geodetikus leképezése egy másik Riemann

térre az, hogy az (4.8), (4.12) és (4.14) differenciálegyenlet-rendszernek létezen nem-triviális a_{ij} , λ_i és μ megoldása.

A speciális Riemann terek esetén is vizsgálhatók a geodetikusan leképezhetőség feltételei. Lássunk néhány példát:

Definíció: A V^n Riemann teret *félig-szimmetrikusnak* nevezünk ha a görbületi tenzora minden pontban kielégíti a következő feltételt

$$R_{ijk,lm}^h - R_{ijk,ml}^h = 0, \quad (4.15)$$

ahol a “,” a V^n tér kovariáns deriválását jelöli.

Tétel: [Szin] Annak szükséges és elegendő feltétele, hogy a V^n ($n > 2$) félig-szimmetrikus és nem konstans görbületű Riemann térnek létezen nem-triviális geodetikus leképezése egy másik Riemann térre az, hogy az (4.8) és

$$\lambda_{i,j} = \mu g_{ij}, \quad (\mu \text{ konstans}) \quad (4.16)$$

differenciálegyenlet-rendszernek létezen nem-triviális $a_{ij} (= a_{ji})$, $\lambda_i \neq 0$ megoldása.

Definíció: A V^n Riemann teret *szimmetrikusnak* nevezünk ha a görbületi tenzora minden pontban kielégíti a következő feltételt

$$R_{ijk,l}^h = 0, \quad (4.17)$$

ahol a “,” a V^n tér kovariáns deriválását jelöli.

Az (4.16) feltételt úgy is mondhatjuk, hogy a görbületi tenzor abszolút párhuzamos, amelyből a Ricci-tenzor abszolút párhuzamossága

$$R_{ij,l} = 0, \quad (4.18)$$

és a Weyl-tenzor abszolút párhuzamossága is következik:

$$W_{ijk,l}^h = 0. \quad (4.19)$$

Minden szimmetrikus Riemann térre egyben félig-szimmetrikus tér is.

Tétel: [Szin] A nem konstans görbületű, szimmetrikus V^n ($n > 2$) Riemann terek nem rendelkeznek triviálistól különböző geodetikus leképezéssel.

Definíció: [Szin] A V^n Riemann teret *kétszeresen szimmetrikusnak* nevezünk ha a görbületi tenzorára teljesül

$$R^h_{ijk,lm} = 0 \quad (4.20)$$

de $R^h_{ijk,l} \neq 0$.

Minden kétszeresen szimmetrikus tér egyben félig-szimmetrikus tér is.

Tétel: [Szin] A nem konstans görbületű, kétszeresen szimmetrikus V^n ($n > 2$) Riemann terek nem rendelkeznek triviálistól különböző geodetikus leképezéssel.

Definíció: [Szin] A V^n Riemann teret *m-rekurrensnek* nevezünk ha a görbületi tenzorára teljesül

$$R^h_{ijk, l_1 l_2 \dots l_m} = \Omega_{l_1 l_2 \dots l_m} R^h_{ijk} \quad (4.21)$$

valamely $\Omega_{l_1 l_2 \dots l_m} \neq 0$ esetén.

Minden m-rekurrens tér egyben félig-szimmetrikus tér is.

Tétel: [Szin] A nem konstans görbületű, m-rekurrens ($m > 1$) V^n ($n > 2$) Riemann terek nem rendelkeznek triviálistól különböző geodetikus leképezéssel.

A szimmetrikus, kétszeresen szimmetrikus és m-rekurrens terekre hasonló tételeket mondtunk ki. Ezeket össze is foglalhatjuk:

Tétel: [Szin] A szimmetrikus, kétszeresen szimmetrikus, m-rekurrens ($m > 1$) V^n ($n > 2$), de nem konstans görbületű Riemann terek nem rendelkeznek triviálistól különböző geodetikus leképezéssel, azaz ezekben az esetekben nem létezik a nem-triviális geodetikus leképezések Lie-csoportja.

Majdnem konformszimmetrikus Riemann terek geodetikus leképezései

Definíció: [Ge] Egy n -dimenziós ($n > 3$) V^n Riemann teret (mely g_{ij} metrikája nem szükségképpen definit) *konformszimmetrikus* térnek nevezzük, ha a Weyl-féle konform görbületi tenzora

$$C_{hijk} = R_{hijk} - \frac{1}{n-2}(g_{ij}R_{hk} - g_{ik}R_{hj} + g_{hk}R_{ij} - g_{hj}R_{ik}) + \frac{R}{(n-1)(n-2)}(g_{ij}g_{hk} - g_{ik}g_{hj}) \quad (4.22)$$

párhuzamos, azaz $C_{hijk,l} = 0$. Az R_{hijk} , R_{ij} és R rendre a tér görbületi tenzora, Ricci-tenzora és skalárgörbülete, és a „,” szimbólum a V^n -beli kovariáns deriválást jelöli.

A konformszimmetrikus Riemann terek $n > 3$ tartalmazzák a lokálisan szimmetrikus és síkkonform tereket. Ebben az esetben is felmerülhet a kérdés: létezik-e olyan konformszimmetrikus tér, amely nem lokálisan szimmetrikus, vagy síkkonform. Erre a legegyszerűbb konstruálni egy ilyen teret.

Legyen M ez n -dimenziós $n > 3$ euklideszi tér a következő metrikával:

$$g_{ij}dx^i dx^j = Q(dx^1)^2 + k_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta + 2dx^1 dx^n, \\ Q = (Bk_{\alpha\beta} + c_{\alpha\beta})x^\alpha x^\beta,$$

ahol az $\alpha, \beta=2, 3, \dots, n-1$, a $(k_{\alpha\beta})$ szimmetrikus, nem szinguláris konstansokból képzett mátrix, a $(c_{\alpha\beta})$ szimmetrikus nem zérus konstansokból képzett mátrix. A két mátrix közötti kapcsolat a következő:

$k^{\alpha\beta}c_{\alpha\beta} = 0$, a $(k^{\alpha\beta})$ a $(k_{\alpha\beta})$ inverze. És végül a B csak x^l nem konstans függvénye. Az M egy „igazi” konformszimmetrikus tér.

Definíció: [Ge] Egy n -dimenziós ($n > 3$) V^n Riemann teret majdnem konformszimmetrikus térnek nevezünk, ha Ricci-tenzora kielégíti a következő feltételt:

$$R_{ij,k} - R_{ik,j} = \frac{1}{2(n-1)}(R_{,k} \cdot g_{ij} - R_{,j} \cdot g_{ik}), \quad (4.22)$$

ahol a “,” szimbólum a V^n -beli kovariáns deriválást jelöli.

A majdnem konformszimmetrikus Riemann tereket az angol elnevezés (nearly conformally symmetric) alapján $(NCS)^n$ -nel jelöljük. Minden konformszimmetrikus tér egyben majdnem konformszimmetrikus tér is. [Ge] Ezen kívül minden n -dimenziós ($n > 3$), harmonikus Ricci-tenzorral rendelkező Riemann tér ($R_{ij,k} - R_{ik,j} = 0$) is majdnem konformszimmetrikus.

Most tekintsünk egy példát a nem-triviális $(NCS)^n$ létezésére [Rot].

Legyen $M = \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}_+^1$ ($n \geq 5$), és a g_{ij} metrikus tenzor a következőképpen adható meg:

$$g_{ij} dx^i dx^j = ((n-1)x^n)^{\frac{2}{n-1}} \cdot f_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta + (dx^n)^2$$

ahol $i, j=1, 2, \dots, n$ és $\alpha, \beta = 1, 2, \dots, n-1$ értékeket vehetik fel, az $f_{\alpha\beta}(x^1, \dots, x^n)$ tetszőleges non-flat Ricci-flat metrika. Ekkor ha a p egy csak x^n -től függő sima függvény, akkor a $\bar{g} = (\exp 2p)g$ majdnem konformszimmetrikus metrika.

Tegyük fel, hogy egy $(NCS)^n$ majdnem konformszimmetrikus Riemann tér geodetikusan leképezhető egy másik Riemann térre. Legyen az a feladatunk, hogy olyan feltételt keressünk, amely az $(NCS)^n$ -ben szükségképpen teljesül. Felhasználjuk azt az (4.8), (4.12) és (4.14) egyenleteket, és már korábban említett azonosságokat és természetesen a definiáló (4.22)-es egyenlőséget.

A számítások egyszerűsítése érdekében elsőként olyan kisebb összefüggéseket sorolunk fel, melyek teljesülnek $(NCS)^n$ -ben.

1. Lemma: Egy majdnem konformszimmetrikus Riemann térben teljesülnek a következők:

$$R_{k,\alpha}^\alpha = \frac{1}{2} R_{,k} \quad (4.23)$$

$$a_{\alpha i} R_{,\beta}^{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \cdot a_{\alpha i} R_{,\alpha}^\alpha \quad (4.24)$$

$$a_{\alpha\beta} R_{i,\gamma}^{\alpha\gamma\beta} = \frac{1}{2(n-1)} (a \cdot R_{,i} - a_{\alpha i} R_{,\alpha}^\alpha) \quad (4.25)$$

ahol a_{ij} szimmetrikus, reguláris tenzor és $a = a_{\alpha\beta} \cdot g^{\alpha\beta}$.

Bizonyítás: Tudjuk, hogy a görbületi tenzor kovariáns deriváltjaira érvényes a Bianchi-azonosság:

$$R_{ijkl,m} + R_{ijlm,k} + R_{ijmk,l} = 0.$$

Kontraháljuk az egyenlőséget g^{jm} -mel, és az (4.22)-t alkalmazva:

$$R_{ilk,\alpha}^\alpha = \frac{1}{2(n-1)} (R_{,k} \cdot g_{ij} - R_{,l} \cdot g_{ik}).$$

Egy újabb, g^{jm} -mel történő, kontrakciót alkalmazva (4.23)-t kapjuk. Az (4.24) és (4.25) az (4.23) következménye.

2. Lemma: Tegyük fel, hogy egy majdnem konformszimmetrikus Riemann tér geodetikusan leképezhető egy másik Riemann térre, ekkor teljesülnek a következők:

$$a^{\alpha\beta} R_{\alpha i,\beta} = \frac{1}{2(n-1)} (a_{\alpha i} R_{,\alpha}^\alpha - a R_{,i}) + a_{\alpha\beta} R^{\alpha\beta}_{,i} \quad (4.26)$$

$$a_{\alpha\beta} (2R_{i,\alpha}^{\alpha\beta} - R_{,\alpha}^{\alpha\beta} - (n-1)R_{i,\gamma}^{\alpha\gamma\beta}) = a^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta,i} + \frac{n+1}{2(n-1)} (a_{\alpha i} R_{,\alpha}^\alpha - a R_{,i}) \quad (4.27)$$

$$n(\lambda_{i,kj} + \lambda_{j,ki})g^{ij} = (n+1)\mu_{,i} + a_{\alpha i,\beta} R^{\alpha\beta} + a_{\alpha i} R^{\alpha\beta}_{,\beta} - a_{\alpha\beta,\gamma} R_{i,\gamma}^{\alpha\gamma\beta} - a_{\alpha\beta} R_{i,\gamma}^{\alpha\gamma\beta} \quad (4.28)$$

Bizonyítás: Az (4.22)-ben helyettesítjük az indexeket: $i=\alpha$, $j=i$, $k=\beta$, majd az $a^{\alpha\beta}$ -val kontraháljuk. Ekkor (4.26)-ot kapjuk.

Az (4.27)-es egyenlőség az (4.22), (4.23) és (4.26) egyenlőségek következménye.

Az (4.12)-ben legyen $l=k$, majd x^j szerint kovariánsan deriváljuk:

$$n\lambda_{i,kj} = \mu_{,j} g_{ik} + a_{\alpha i,j} R_{,k}^\alpha + a_{\alpha i} R_{k,j}^\alpha - a_{\alpha\beta,j} R_{il}^{\alpha\beta} - a_{\alpha\beta} R_{il}^{\alpha\beta}_{,j}.$$

Az i, j indexekre szimmetrizálva és g^{jk} -val kontrahálva kapjuk az (4.28)-t.

Tegyük fel, hogy egy majdnem konformszimmetrikus Riemann tér geodetikusan leképezhető egy másik Riemann térre, ekkor az (4.8), (4.12) és (4.14) differenciálegyenlet-rendszernek létezik nem-triviális $a_{ij} (= a_{ji})$, $\lambda_i \neq 0$ és μ megoldása.

Most tekintsük az (4.8) egyenletet. x^l szerint kovariánsan deriváljuk, majd az l és k indexekre alternálva:

$$a_{ij,kl} - a_{ij,lk} = \lambda_{i,l} g_{jk} + \lambda_{j,l} g_{ik} - \lambda_{i,k} g_{jl} - \lambda_{j,k} g_{il}. \quad (4.29)$$

Az a_{ij} tenzorra alkalmazzuk a Bianchi-azonosságot:

$$a_{ij,kl} - a_{ij,lk} = a_{\alpha j} R^{\alpha}_{ikl} + a_{\alpha i} R^{\alpha}_{jkl}. \quad (4.30)$$

Az (4.29) és (4.30) egyenlőségek jobb oldalait egyenlővé téve, x^m szerint kovariánsak deriválva, g^{lm} -mel kontrahálva

$$\begin{aligned} \lambda_{i,\alpha} g_{jk} + \lambda_{j,\alpha} g_{ik} - \lambda_{i,kj} - \lambda_{j,ki} = \\ = a_{\alpha j, \beta} R^{\alpha \beta}_{ik} + a_{\alpha i, \beta} R^{\alpha \beta}_{jk} + a_{\alpha j} R^{\alpha \beta}_{ik, \beta} + a_{\alpha i} R^{\alpha \beta}_{jk, \beta}. \end{aligned} \quad (4.31)$$

Az (4.31)-be helyettesítjük a következő kifejezést

$$n\lambda_{i,\alpha} = \frac{4n}{n-1} \lambda_{\alpha} R^{\alpha}_i + \lambda_i R + \frac{1}{n-1} a^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta,i} - \frac{n+1}{2(n-1)^2} a R_{,i} + \frac{(n-1)^2 + n+1}{2(n-1)^2} a^{\alpha}_i R_{,\alpha} \quad (4.32)$$

melyet úgy kaptunk, hogy (4.12)-t x^k szerint kovariánsan deriváltunk, és az (4.8) és (4.12) helyettesítése után g^{lk} -val kontraháltunk.

Az (4.31)-be az (4.32)-t helyettesítve, végrehajtva a j, k indexekre való kontrakciót, az előbbi lemmákat és a definíciót alkalmazva:

$$-a^{\alpha}_i R_{,\alpha} + 2(n-1)^2 \lambda_{\alpha} R^{\alpha}_i{}^{\beta} = 0. \quad (4.33)$$

Ezzel beláttuk a következő állítást:

1. Tétel: Tegyük fel, hogy egy majdnem konformszimmetrikus Riemann tér geodetikusan leképezhető egy másik Riemann térre, ekkor $(NCS)^n$ -ben szükségképpen teljesül (4.33), melyben szereplő λ_i és $a_{ij} = a^{\alpha}_i g_{\alpha j}$ megoldása az (4.8), (4.12) és (4.14) differenciálegyenlet-rendszernek.

5. Fejezet

Vizsgálatok speciális Finsler terekben

Rekurrens Finsler terek geodetikus leképezése

Definíció: [M14] A $H_j^i(x, y)$ $(1,1)$ -típusú görbületi tenzor a következőképpen adható meg:

$$H_j^i = 2\partial G^i / \partial x^j - y^\alpha \partial G^i / \partial x^\alpha + 2G_{j\alpha}^i G^\alpha - G_\alpha^i G_j^\alpha \quad (5.1)$$

és $H_\alpha^\alpha = (n-1)H$.

Definíció: [M14] Az F^n Finsler teret *skalár görbületűnek* nevezzük, ha

$$H_j^i = h_j^i H, \quad (5.2)$$

ahol $h_j^i = \delta_j^i - l^i l_j$, $l^i = y^i / L$ és $l_i = L_{(i)}$.

Definíció: A *Berwald-féle görbületi-tenzor* a következőképpen adható meg:

$$H_{ijk}^h = \frac{1}{3}(H_{k(j)}^h - H_{j(k)}^h)_{(i)}. \quad (5.3)$$

A görbületi tenzorból kapjuk, hogy $H_k^h = H_{00k}^h$, ahol a 0 index az y^α -val való kontrakciót jelöli: $H_k^h = H_{\alpha\beta k}^h y^\alpha y^\beta = H_{00k}^h$.

Tegyük fel, hogy létezik az F^n és az \bar{F}^n között geodetikus leképezés. Ekkor az $(1,1)$ -típusú görbületi tenzorok közötti kapcsolat a következőképpen adható meg:

$$\bar{G}_j^i = G_j^i + y^i Q_{j0} + \delta_j^i Q_0 - y^i Q_j, \quad (5.4)$$

ahol $Q_j = p_{,j} - pp_j$, $Q_{jk} = p_{j;k} - p_{k;j}$.

Definíció: [Mo3] Az F^n Finsler teret *rekurrensnek* nevezzük, ha az F^n tér Berwald-féle görbületi tenzora kielégíti a következő feltételt:

$$H_{ijk;l}^h = \lambda_l(x, y)H_{ijk}^h, \quad (5.5)$$

ahol $\lambda_l(x, y)$ egy y -ban 0-ad fokú homogén függvény.

Több szerző is tanulmányozta a rekurrens Finsler tereket. [Mi], [Mo4], [PM], [Se] A rekurrens Finsler terekre példát adott Moór Arthur. [Mo3], [Mo4].

Definíció: [M2] Az F^n Finsler teret *Landsberg térnek* nevezzük, ha az

$$y_\alpha G^\alpha{}_{jkl} = -2P_{jkl} = 0 \quad (5.6)$$

feltétel teljesül, ahol $-2P_{jkl} = g_{jk;l}$, és $G_{jkl}^i = G_{jk(l)}^i$.

1. Tétel: [BP1] A rekurrens Finsler terek esetén, ha a λ_l zérustól különböző, akkor az egyedül a hely függvénye.

Bizonyítás: A (5.5)-t alkalmazzuk a következő integrabilitási feltételre:

$$T_{j;k(l)}^i - T_{j(l);k}^i = T_j^\alpha G_{\alpha kl}^i - T_\alpha^i G_{jkl}^\alpha.$$

Ekkor

$$H_{jk}^i \lambda_{l(h)} = H_{jk}^\alpha G_{\alpha lh}^i + H_{\alpha j}^i G_{klh}^\alpha - H_{\alpha k}^i G_{jlh}^\alpha, \quad (5.7)$$

ahol $H_{jk}^i = H_{\alpha jk}^i y^\alpha$. Ezután a (5.7)-re egy y^k szerinti kontrakciót alkalmazunk:

$$H_j^i \lambda_{l(h)} = H_j^\alpha G_{\alpha lh}^i - H_\alpha^i G_{jlh}^\alpha. \quad (5.8)$$

A (5.8)-t az i, j indexek szerint kontrahálva a következőt kapjuk: $(n-1)H \lambda_{l(h)} = 0$. Ha feltesszük azt, hogy $H \neq 0$, akkor $\lambda_{l(h)} = 0$ (azaz az λ_l csak a hely függvénye).

Az 1. tételből és (5.8)-ból következik

$$H_j^\alpha G_{\alpha lh}^i - H_\alpha^i G_{jlh}^\alpha = 0. \quad (5.9)$$

Ha F^n konstans görbületű, akkor a (5.9)-be az (5.2)-t és (5.6)-t helyettesítve kapjuk:

$$\frac{H}{L} P_{j^h} = 0,$$

ahol $H = R(x, y)L^2$ és $R(x, y)$ a görbületi függvény. Ebből következik, hogy ha $H \neq 0$, akkor $P_{j^h} = 0$ és ezzel F^n Landsberg tér. Numata [Nu1] eredményét felhasználva, mely szerint egy nemzéró skalár görbületű Landsberg tér az egy nemzérus konstans görbületű Riemann tér, teljesül a következő:

2. Tétel: [BP1] Egy nemzérus skalárgörbületű rekurrens F^n ($n > 2$) Finsler tér mindig egy nemzérus konstans görbületű Riemann tér.

Rekurrens Finsler terek geodetikus leképezése

Ebben a részben feltesszük, hogy a vizsgált Finsler terek legalább kétdimenziósak, az $F^n \rightarrow \bar{F}^n$ geodetikus leképezés esetén az F^n egy tetszőleges Finsler tér, míg az \bar{F}^n egy rekurrens Finsler tér.

Egy T_j^i tenzor Berwald-féle kovariáns deriváltja a következő alakban adható meg:

$$T_{j;k}^i = \partial T_j^i / \partial x^k - T_{j(\alpha)}^i G_j^\alpha + T_j^\alpha G_{\alpha k}^i - T_\alpha^i G_{jk}^\alpha \quad (5.10)$$

Figyelembe véve a (3.5), (3.6) és (5.10) összefüggéseket

$$\bar{H}_{i;k}^h - (2p_k + \bar{\lambda}_k) \bar{H}_i^h - \bar{H}_{i(k)}^h p + \bar{H}_i^\alpha (p_\alpha \delta_k^h + p_{k\alpha} y^h) - \bar{H}_k^h p_i = 0 \quad (5.11)$$

Tudjuk, hogy \bar{F}^n rekurrens tér, ezért teljesül

$$\bar{H}_{ijk;l}^h = \bar{\lambda}_l \bar{H}_{ijk}^h,$$

melyből következik

$$\bar{H}_{i;k}^h = \bar{\lambda}_k \bar{H}_i^h;$$

illetve felhasználjuk az ismert azonosságokat [M2], [M14]:

$$\bar{H}_{i0}^h = 2\bar{H}_i^h \quad \text{és} \quad \bar{H}_0^h = 0.$$

A "̄" az \bar{F}^n térben a Berwald-féle kovariáns deriválást jelöli.

Feltettük, hogy létezik az F^n és az \bar{F}^n Finsler terek között geodetikus leképezés, ekkor a terek (1,1)-típusú görbületi tenzorai között a

$$\bar{H}_j^i = H_j^i + y^i Q_{j0} + \delta_j^i Q_0 - y^i Q_j = 0 \quad (5.12)$$

kapcsolat áll fenn, ahol $Q_j = p_{,j} - pp_j$, $Q_{jk} = p_{k;j} - p_{j;k}$.

A (5.11)-be helyettesítjük a (5.12)-t. és a h_i^l tenzorral kontrahálunk:

$$\begin{aligned} H_{i,k}^h - h_i^l Q_{0;k} - (2p_k + \bar{\lambda}_k)(H_i^l - h_i^l Q_0) - H_k^l p_i - h_\alpha^l H_{i(k)}^\alpha p + \\ + h_i^l (Q_0)_{(k)} p + h_k^l H_i^\alpha p_\alpha = 0 \end{aligned} \quad (5.13)$$

A (5.13)-t y^k -val kontrahálva és az i, l indexekre összegzést végrehajtva:

$$H_{,0} - Q_{0,0} y(4p - \bar{\lambda})H + (4p + \bar{\lambda})Q_0 = 0, \quad \bar{\lambda} = \bar{\lambda}_\alpha y^\alpha. \quad (5.14)$$

Ez utóbbi két egyenlet felhasználásával

$$A_{i;0}^l = (4p + \bar{\lambda})A_i^l, \quad (5.15)$$

ahol $A_i^l = H_i^l - Hh_i^l$. Ha $A_i^l = 0$, akkor F^n konstans görbületű tér. A (5.15) egyenlet az úgynevezett szemi-rekurrens Finsler tereket jellemzi [Ba1]. Ezzel beláttuk a következő tételt.

1. Tétel: [BP1] Ha egy F^n Finsler tér geodetikusan leképezhető egy \bar{F}^n rekurrens Finsler térre, akkor az F^n tér szükségképpen szemi-rekurrens tér.

Speciális esetek:

Két esetet vizsgáltunk. Az első esetben azt tételeztük fel, hogy az F^n tér Riemann tér, míg a másik esetben azt, hogy F^n szintén rekurrens Finsler tér.

A) Riemann tér esete

Ismeretes a következő azonosság: $g_{i\alpha} H_j^\alpha - g_{j\alpha} H_i^\alpha = 0$, melyet felhasználva a (5.13)-ból a

$$\begin{aligned} H_i^h h_j^\alpha p_\alpha - H_j^h h_i^\alpha p_\alpha - h_i^h H_j^\alpha p_\alpha + h_i^h H_j^\alpha p_\alpha + \\ + 2P_{j\alpha}^h H_i^\alpha - 2P_{i\alpha}^h H_j^\alpha + 2pC_{j\alpha}^h H_i^\alpha - 2pC_{i\alpha}^h H_j^\alpha = 0 \end{aligned} \quad (5.16)$$

egyenlőséget kapjuk.

Feltettük, hogy F^n Riemann tér, ekkor

$$\frac{1}{2}g_{ij(k)} = C_{ijk} = 0 \text{ és } P_{ijk} = 0. \quad (5.17)$$

A h és i indexekre kontrakciót végezve és (5.17)-t felhasználva

$$H_{\alpha}^h p^{\alpha} = H h_{\alpha}^h p_{\alpha}, \quad p^{\alpha} = g^{\alpha\beta} p_{\beta}$$

azaz

$$A_{\alpha}^i p^{\alpha} = 0. \quad (5.18)$$

A (5.16)-ba a (5.17)-t és (5.18)-t behelyettesítve kapjuk:

$$A_i^h h_{\beta}^{\alpha} p_{\alpha} p^{\beta} = 0,$$

amely azt jelenti, hogy $A_i^h = 0$, ha $h_{\beta}^{\alpha} p_{\alpha} p^{\beta} = p_{\alpha} p^{\alpha} - L^2 p^2 \neq 0$.

Mindezeket összefoglalva:

2. Tétel: [BP1] Ha F^n egy olyan Riemann tér, amely geodetikusan leképezhető egy \bar{F}^n rekurrens Finsler térre, akkor az F^n konstans görbületű Riemann tér, ha $p_{\alpha} p^{\alpha} - L^2 p^2 \neq 0$.

B) rekurrens Finsler tér esete

Legyen F^n szintén rekurrens Finsler tér. A definiáló $H_{ijk;l}^h = \lambda_l H_{ijk}^h$ egyenlőségből a következőket nyerjük.

$$H_{i;l}^h = \lambda_l H_i^h, \quad H_{;l} = \lambda_l H, \quad \lambda = \lambda_{\alpha} y^{\alpha}.$$

Így

$$A_{i;l}^h = \lambda_l A_i^h \quad (5.19)$$

A (5.15) és (5.19) felhasználásával

$$(4p + \bar{\lambda} - \lambda) A_i^h = 0.$$

Ha $4p + \bar{\lambda} - \lambda \neq 0$, akkor $A_i^h = 0$. A 2. állítást figyelembe véve:

3. Tétel: [BP1] Ha az F^n rekurrens Finsler tér geodetikusan leképezhető egy \bar{F}^n rekurrens Finsler térre, akkor az F^n konstans görbületű Riemann tér, ha $4p + \bar{\lambda} - \lambda \neq 0$.

Általánosított Douglas terek

Definíció: A $D^h_{ijk} = G^h_{ijk} - \frac{1}{n+1}(y^h G_{ijk} + \delta^h_i G_{jk} + \delta^h_j G_{ik} + \delta^h_k G_{ij})$ tenzort *Douglas-tenzornak* nevezzük, ahol $G^h_{ijk} = \partial G^h_{ij} / \partial y^k$, $G_{ijk} = \partial G_{ij} / \partial y^k$ és $G_{ij} = G^\alpha_{ij\alpha}$.

Definíció: Az $F^n(M^n, L)$ Finsler teret *általánosított Douglas térnek* nevezzük, ha

$$h^h_\alpha D^{\alpha}_{ijk;\beta} y^\beta = 0,$$

ahol $h^h_\alpha = \delta^h_\alpha - l^h l_\alpha$, $l_\alpha = \partial L / \partial y^\alpha$, és $l^h = y^h / L$.

A általánosított Douglas terekkel T. Sakaguchi [Sa] és Vattamány Szabolcs [Va] foglalkozott. Az általánosított Douglas terekre példa a skalárgömbületű Finsler terek [Sa].

4. Tétel: [BP2] Az általánosított Douglas terek a projektív leképezésre nézve zárt halmazt alkotnak.

Bizonyítás: Tekintsük az $F^n \rightarrow \bar{F}^n$ projektív leképezést, ahol az F^n tetszőleges Finsler tér, míg az \bar{F}^n általánosított Douglas tér. Az \bar{F}^n térben teljesül:

$$\bar{h}^h_\alpha \bar{D}^{\alpha}_{ijk;\beta} y^\beta = 0. \quad (5.20)$$

A " ; " az \bar{F}^n térben a Berwald-féle kovariáns deriválást jelöli. A \bar{D}^{α}_{ijk} Douglas tenzorra alkalmazva a kovariáns deriválást a (5.20)-ból következik:

$$\bar{h}^h_\alpha (\partial \bar{D}^{\alpha}_{ijk} / \partial x^\beta - \partial \bar{D}^{\alpha}_{ijk} / \partial y^\gamma \bar{G}^\gamma_\beta +$$

$$\bar{G}_{\beta\gamma}^{\alpha} \bar{D}_{ijk}^{\gamma} - \bar{G}_{\beta i}^{\gamma} \bar{D}_{\gamma jk}^{\alpha} - \bar{G}_{\beta j}^{\gamma} \bar{D}_{i\gamma k}^{\alpha} - \bar{G}_{\beta k}^{\gamma} \bar{D}_{ij\gamma}^{\alpha}) y^{\beta} = 0 \quad (5.21)$$

A (4.5) és (4.6) egyenlőségeket a (5.21)-be helyettesítve

$$\begin{aligned} \bar{h}_{\alpha}^h [\partial \bar{D}_{ijk}^{\alpha} / \partial x^{\beta} - \partial \bar{D}_{ijk}^{\alpha} / \partial y^{\gamma} (G_{\beta}^{\gamma} + p \delta_{\beta}^{\gamma} + p_{\beta} y^{\gamma}) + \\ (G_{\beta\gamma}^{\alpha} + p_{\beta} \delta_{\gamma}^{\alpha} + p_{\gamma} \delta_{\beta}^{\alpha} + p_{\beta\gamma} y^{\alpha}) \bar{D}_{ijk}^{\gamma} - \\ (G_{\beta i}^{\gamma} + p_{\beta} \delta_i^{\gamma} + p_i \delta_{\beta}^{\gamma} + p_{\beta i} y^{\gamma}) \bar{D}_{\gamma jk}^{\alpha} - \\ (G_{\beta j}^{\gamma} + p_{\beta} \delta_j^{\gamma} + p_j \delta_{\beta}^{\gamma} + p_{\beta j} y^{\gamma}) \bar{D}_{i\gamma k}^{\alpha} - \\ (G_{\beta k}^{\gamma} + p_{\beta} \delta_k^{\gamma} + p_k \delta_{\beta}^{\gamma} + p_{\beta k} y^{\gamma}) \bar{D}_{ij\gamma}^{\alpha}] y^{\beta} = 0. \end{aligned} \quad (5.21)$$

Vegyük figyelembe, hogy a Douglas-tenzor invariáns a projektív leképezésre nézve ($D = \bar{D}$), ekkor a következő egyenlőséget kapjuk:

$$\bar{h}_{\alpha}^h [D_{ijk;\beta}^{\alpha} y^{\beta} + p_{\gamma} D_{ijk}^{\gamma} y^{\alpha}] = 0.$$

Felhasználjuk, hogy $\bar{h}_{\alpha}^h y^{\alpha} = 0$, ekkor az egyenletünk a

$$\bar{h}_{\alpha}^h D_{ijk;\beta}^{\alpha} y^{\beta} = 0 \quad (5.22)$$

alakúra redukálódik. Egyszerű számolással igazolható, hogy $h_h^l \bar{h}_{\alpha}^h = h_{\alpha}^l$.

Ugyanis:

$$\begin{aligned} h_h^l \bar{h}_{\alpha}^h &= (\delta_h^l - l^l l_h) (\delta_{\alpha}^h - \bar{l}^h \bar{l}_{\alpha}) = \delta_{\alpha}^l - \bar{l}^l \bar{l}_{\alpha} - l^l l_{\alpha} + l^l l_h \bar{l}^h \bar{l}_{\alpha} = \\ &= \delta_{\alpha}^l - \bar{l}^l \bar{l}_{\alpha} - l^l l_{\alpha} + \frac{y^l}{L} l_h \frac{y^h}{L} \bar{l}_{\alpha} = \delta_{\alpha}^l - \bar{l}^l \bar{l}_{\alpha} - l^l l_{\alpha} + \frac{y^l}{L} L \frac{1}{L} \bar{l}_{\alpha} = \\ &= \delta_{\alpha}^l - \bar{l}^l \bar{l}_{\alpha} - l^l l_{\alpha} + \bar{l}^l \bar{l}_{\alpha} = \delta_{\alpha}^l - l^l l_{\alpha} = h_{\alpha}^l. \end{aligned}$$

Ezért, ha kontraháljuk a (5.22) egyenletet h_h^l -val, akkor a

$$h_{\alpha}^l D_{ijk;\beta}^{\alpha} y^{\beta} = 0$$

teljesül.

Vagyis, ha az $F^n \rightarrow \bar{F}^n$ projektív leképezés esetén az \bar{F}^n egy általánosított Douglas tér, akkor az F^n is egy általánosított Douglas tér. Ez azt jelenti, hogy az általánosított Douglas terek csoportja zárt a projektív leképezésre nézve.

*P-Finsler terek

Definíció: [Iz1], [Iz2] Az F^n Finsler teret **P-Finsler térnek* nevezzük, ha a $P_{ijk} = \frac{1}{2} g_{ij;k}$ tenzor a következő alakban adható meg:

$$P_{ijk} = \lambda(x, y) C_{ijk}. \quad (5.23)$$

ahol, $\lambda(x, y)$ egy skalármező.

A **P-Finsler tereket* először M. Matsumoto [M5] vizsgálta, később mások is foglalkoztak vele. A **P-Finsler terekre* példa a Funk metrikával ellátott Finsler tér [BCS].

Tétel: [Iz1] Egy C-reducibilis **P-Finsler térben* ($n > 3$) teljesül

$$\lambda(x, y) = k(x)L(x, y)$$

és $k(x)$ csak a hely függvénye.

Korábban megállapítottuk, hogy egy (α, β) metrikájú F^n ($n \geq 3$) Finsler tér pontosan akkor C-reducibilis, ha Randers-, vagy Kropina-metrikával rendelkezik.

Definíció: [BM1] Egy Finsler teret *Douglas típusúnak*, vagy *Douglas térnek* nevezzük, ha a $G^i y^j - G^j y^i$ függvények (y^i) -ben harmadfokú homogén polimonomok.

Tétel: [BM1] Egy Finsler teret Douglas tér pontosan akkor, ha Douglas-tenzora azonosan eltűnik.

Tétel: [Iz2] Egy C-reducibilis * P-Finsler tér ($n > 3$) Douglas-tenzora eltűnik, azaz $D_{jkl}^i = 0$.

Legyen $\beta(x, y)$ egy zárt 1-forma. Ekkor az

$$\bar{L}(x, y) = L(x, y) + \beta(x, y)$$

metrikák között egy *Randers-transzformáció*. Ebben az esetben a metrikák közötti $\bar{L} \rightarrow L$ transzformáció projektív.

Tétel: [Ba2] Tegyük fel, hogy létezik egy Landsberg-tér és egy * P-Finsler tér között egy Randers-transzformáció, ahol a transzformáció projektív faktora $p(x, y)$. Ekkor a $p(x, y)$ következő egyenlőséggel adható meg:

$$p(x, y) = e^{\varphi(x)} \bar{L}(x, y), \quad (5.24)$$

ahol $\bar{L}(x, y)$ a * P-Finsler tér metrikus alapfüggvénye és $\varphi(x)$ egy tetszőleges differenciálható, csak helytől függő függvény.

Tudjuk, hogy a Riemann terek a Landsberg terek speciális esetei. A Riemann terekben a Douglas tenzor eltűnik, és a $\beta(x, y)$ zárt 1-formával adott * P-Randers tér egy eltűnő Douglas tenzorra rendelkező Finsler-tér.

Tétel: [BM1] Egy Randers tér Douglas tér pontosan akkor, ha $\beta(x, y)$ zárt forma. Ekkor

$$2G^i = \gamma_{jk}^i y^j y^k + \frac{r_{lm} y^l y^m}{\alpha + \beta} y^i, \quad (5.25)$$

ahol γ_{jk}^i a Riemann tér Levi-Civita konnexiójának együtthatói, és $r_{ij} = b_{i,j} + b_{j,i}$.

A (5.24) és (5.25)ből következik, hogy

$$\frac{r_{lm} y^l y^m}{\alpha + \beta} = e^{\varphi(x)} (\alpha + \beta),$$

azaz

$$\frac{r_{lm}y^l y^m}{\bar{L}} = e^{\varphi(x)} \bar{L}. \quad (5.26)$$

A (5.26) egyenlőségből kapjuk:

$$r_{lm}y^l y^m = e^{\varphi(x)} \bar{L}^2. \quad (5.27)$$

A (5.27)-t kétszer differenciálva (y^l és y^m szerint) kapjuk:

$$b_{i,j} = e^{\varphi(x)} \bar{g}_{ij}.$$

Ez utóbbi egyenlőség mutatja, hogy \bar{g}_{ij} csak x -vól függ, és kimondhatjuk a következő tételt:

5. Tétel: [BP3] Egy olyan háromnál nagyobb dimenziós *P -Randers tér, melynek a Douglas -tenzora eltűnik, Riemann tér.

Ha olyan *P -C-reducibilis tereket keresünk, melyek Douglas tenzora eltűnik, de nem Riemann terek, akkor csak a *P -Kropina terek között találhatunk.

Summary

1. Investigations in Riemann spaces

A Riemannian manifold is a manifold possessing a metric tensor. The metric tensor g_{ij} is symmetric and positive definite and tells how to compute the distance between any two points in a given space.

A geodesic is a locally length-minimizing curve. In the plane, the geodesics are straight lines. On the sphere, the geodesics are great circles. The geodesics in a space depend on the Riemannian metric, which affects the notions of distance and acceleration.

I investigated the nearly conformally symmetric (NCS)ⁿ spaces. I studied the following question: Which property has the nearly conformally symmetric space if it admits a geodesic mapping into another Riemannian space. (Lemma 1.-2., Theorem 1.)

Some important notations and theorems

An n -dimensional differentiable manifold V^n is said to be Riemannian space if there exists a g_{ij} tensorfield in V^n , which satisfies the following three conditions:

- g_{ij} is symmetric, that is $g_{ij} = g_{ji}$
- g_{ij} is a tensor of (0,2) type

- g_{ij} is a coefficient of a positive definite quadratic form, that is $g_{ij}x^i x^j > 0 \forall x^i \neq 0$.

The g_{ij} is called metric tensor of V^n .

The notions of distance, length and angle can be explained by using the metric tensor. We can define coefficients of connection of Riemannian space from the partial derivatives of metric tensor, $\Gamma_{jk}^i = \frac{1}{2} g^{i\alpha} (\partial_j g_{k\alpha} + \partial_k g_{j\alpha} - \partial_\alpha g_{jk})$ is called Christoffel-symbols of V^n .

In a Riemannian space the stationary curves of the variation of length are said to be geodesic curves. The geodesic curves with respect to length-parameter t are defined by a differential equation of the form

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^i(x(t)) \frac{dx^\alpha}{dt} \frac{dx^\beta}{dt} = 0, \text{ where } \Gamma_{jk}^i \text{ are Christoffel symbols.}$$

A geodesic mapping between Riemannian spaces V^n and \bar{V}^n is a one to one mapping between points of spaces, where all geodesic curves of V^n correspond some geodesic curves of \bar{V}^n . [Szin]

The mapping between Riemannian spaces V^n and \bar{V}^n is geodesic if and only if the Christoffel symbols of spaces satisfy the condition $\bar{\Gamma}_{ij}^h(x) = \Gamma_{ij}^h(x) + \psi_i(x) \delta_j^h + \psi_j(x) \delta_i^h$, where ψ_i is a covariant and gradient vector in V^n . [Szin] There is an equivalent condition to previous: The mapping between Riemannian spaces V^n and \bar{V}^n is geodesic if and only if the \bar{g}_{ij} metric tensor of \bar{V}^n satisfies the condition $\bar{g}_{ij,k}(x) = 2\psi_k(x) \bar{g}_{ij} + \psi_i(x) \bar{g}_{kj} + \psi_j(x) \bar{g}_{ki}$ in V^n , where symbol “;” denotes covariant derivative in V^n . [Szin]

All geodesic mappings of a given V^n make a group, where the operation is “carrying out consecutive”. The geodesic mappings induce a classification in the set of Riemannian spaces. A class is determined by the spaces having a geodesic mapping onto the same Riemannian space V^n . This class is called to be the geodesic class of V^n . [Szin]

Beltrami [Szin] has proved the first essential results in the examination of geodesic mappings between Riemannian spaces:

Beltrami's Theorem: If there exists a geodesic mapping between Riemannian spaces V^n and \bar{V}^n ($n > 2$), where \bar{V}^n has constant curvature, then V^n has constant curvature too. Any space V^n ($n > 2$) with constant curvature has geodesic mapping to any space \bar{V}^n with constant curvature.

A Riemannian space V^n has a non-trivial geodesic mapping to another Riemannian space iff the differential equations

$$a_{ij,k} = \lambda_i g_{jk} + \lambda_j g_{ik} \quad (1)$$

$$n\lambda_{i,l} = \mu g_{il} + a_{\alpha i} R_{\alpha l}^{\alpha} - a_{\alpha\beta} R_{il}^{\alpha\beta} \quad (2)$$

$$(n-1)\mu_{,k} = 2(n+1)\lambda_{\alpha} R_{\alpha k}^{\alpha} + a_{\alpha\beta} (R_{k,\alpha}^{\alpha\beta} - R_{\alpha k}^{\alpha\beta}) \quad (3)$$

have non-trivial solutions in a_{ij} (a symmetric tensorfield), λ_i (non-zero vectorfield) and the scalarfield μ . [Szin]

Nearly conformally symmetric Riemannian spaces

An n -dimensional ($n > 3$) Riemannian space V^n is called nearly conformally symmetric if its Ricci-tensor satisfies the condition

$$R_{ij,k} - R_{ik,j} = \frac{1}{2(n-1)} (R_{,k} \cdot g_{ij} - R_{,j} \cdot g_{ik}),$$

where the symbol “ \cdot ” means the covariant derivative in V^n . [Ge]

Lemma 1. Let us assume that a nearly conformally symmetric Riemannian space $(NCS)^n$ admits a geodesic mapping to another Riemannian space.

Then in this $(NCS)^n$ space it holds the followings:

$$R_{k,\alpha}^{\alpha} = \frac{1}{2} R_{,k}$$

$$a_{\alpha i} R_{,i}^{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \cdot a_{\alpha i} R_{,i}^{\alpha}$$

$$a_{\alpha\beta} R_{i,\gamma}^{\alpha\beta} = \frac{1}{2(n-1)} (a \cdot R_{,i} - a_{\alpha i} R_{,\alpha})$$

where $a = a_{\alpha\beta} \cdot g^{\alpha\beta}$.

Lemma 2. Let us assume that a nearly conformally symmetric Riemannian space $(NCS)^n$ admits a geodesic mapping to another Riemannian space. Then in this $(NCS)^n$ space it holds the following:

$$a^{\alpha\beta} R_{\alpha i, \beta} = \frac{1}{2(n-1)} (a_i^\alpha R_{, \alpha} - a R_{, i}) + a_{\alpha\beta} R^{\alpha\beta}_{, i}$$

$$a_{\alpha\beta} (2R_{i, \alpha}^\beta - R_{, i}^{\alpha\beta} - (n-1)R_{i, \gamma}^{\alpha\beta}) = a^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta, i} + \frac{n+1}{2(n-1)} (a_i^\alpha R_{, \alpha} - a R_{, i})$$

$$n(\lambda_{i, kj} + \lambda_{j, ki}) g^{ij} = (n+1)\mu_{, i} + a_{\alpha i, \beta} R^{\alpha\beta} + a_{\alpha i} R^{\alpha\beta}_{, \beta} - a_{\alpha\beta, \gamma} R_i^{\alpha\beta} - a_{\alpha\beta} R_i^{\alpha\beta}_{, \gamma}.$$

Theorem 1. Let us assume that a nearly conformally symmetric Riemannian space $(NCS)^n$ admits a geodesic mapping to another Riemannian space. Then in this $(NCS)^n$ space it necessarily holds the following:

$$-a_i^\alpha R_{, \alpha} + 2(n-1)^2 \lambda_\alpha R_i^{\alpha\beta} = 0.$$

(a_{ij} and λ_i are non-trivial solutions of (1), (2), (3) differential equations.)

2. Investigations in Finsler spaces

The notion of generalized metric space - although later named as Finsler space - was introduced by Riemann [R] in 1854 in his famous thesis in which he studied the various methods of understanding the n dimensional space. Riemann introduced the notion of a metric, which was the squareroot of a positive definite quadratic form. He also mentioned the possible generalization of this metric, nowadays known as the Finsler metric.

In the tangent space of each point of a Finsler space, there is a general norm defined, which is not necessarily induced by an inner product. Surprisingly this kind of generalization of a Riemann space has been forgotten for sixty years. Riemann refused this approach because of its difficulty.

Finsler geometry also has remarkable applications in physics, biology and other branches of science areas too [AIM], [AM].

Results of the author came out in a fruitful collaboration with professor Dr. Sándor Bácsó. (Proposition 1.-2., Theorem 1.-5.) We studied some properties in recurrent Finsler spaces. First we proved that a recurrent Finsler space of nonzero scalar curvature is a Riemannian space of nonzero constant curvature. Further on we investigated the geodesic mappings of special Finsler spaces into a recurrent Finsler space. We determined a new class of Finsler spaces, which are generalizations of Douglas spaces, and these spaces also are closed under projective relations. We proved that a *P-Randers space with vanishing Douglas tensor is a Riemannian space if the dimension is greater than three. My results were published in the following papers: [BP1], [BP2], [BP3], [BGYPSZ].

Some important notations and theorems

Let M be differentiable manifold of dimension n and $L(x,y)$ a real function on TM . Then we define the notion of length of a curve. Let $x^i = x^i(t)$ $a \leq t \leq b$ be the equations of a segment of a curve c in a coordinate neighborhood U . The length s of the segment is given by the integral

$$s = \int_a^b L(x(t), \dot{x}(t)) dt.$$

The manifold M equipped with this notion of length is called an n -dimensional Finsler space with the fundamental function L if L fulfills the conditions below [AIM]

- (1) The length of any oriented curve does not depend on the choice of parameter. That is the fundamental function L is positively homogeneous of degree one in y .
- (2) The length integral gives rise to the regular variational problem. An important special case is $g_{ij} := \dot{\partial}_i \dot{\partial}_j F$, ($F := L^2/2$) has non-zero determinant.

- (3) In each tangent space $T_x M$ we have a region $T_x M^*$ such that $L(x,y)$ is differentiable in y^i , where $T_x M^*$ does not contain $y=0$ and is a positively conical region, that consists of non-zero tangent vectors $y \in T_x M^*$ for which $py \in T_x M^*$ for any $p > 0$. Thus $M^* := \bigcup_{x \in M} T_x M^*$ is the domain of the definition of L .
- (4) The fundamental function $L(x,y)$ is positive-valued for any y belonging to the positively conical region $T_x M^*$.

The extremal of the length integral $s = \int_a^b L(x(t), \dot{x}(t)) dt$ is called the *geodesic* of the space. [AIM]

A geodesic is a curve given by the differential equations $\frac{d^2 x_i}{ds^2} + 2G^i(x, dx/ds) = 0$, where s is the normalized parameter, that is the arc-length, $G^i = g^{ij} G_j$, $2G_j = (\dot{\partial}_j \partial_i F) y^i - \partial_j F$ and $F(x,y) = (L(x,y))^2 / 2$.

If any geodesic of F^n coincides with a geodesic of \bar{F}^n as a set of points and vice versa, then the change $L(x,y) \rightarrow \bar{L}(x,y)$ of the metric is called projective and F^n is said to be projective to \bar{F}^n . [AIM], [She3]

Finsler space F^n is projective to another Finsler space \bar{F}^n if and only if there exists a positively homogeneous of degree one scalar field $p(x,y)$ satisfying $\bar{G}^i(x,y) = G^i(x,y) + p(x,y)y^i$.

A scalar field $p(x,y)$ is called the *projective factor* of the projective change under consideration. [K]

In the studies of projective Finsler geometry the following tensor introduced by J. Douglas is very important [D]

$$D_{ijk}^h := G_{ijk}^h - \frac{1}{n+1} \left(y^h G_{ijk} + \delta_i^h G_{jk} + \delta_j^h G_{ik} + \delta_k^h G_{ij} \right)$$

The Douglas tensor is invariant under projective change, that is $\bar{D}_{ijk}^h = D_{ijk}^h$.

Furthermore there are two more invariant tensors. The W -tensor is called the Weyl torsion tensor,

$$W_{jk}^i := R_{ijk}^i + \frac{1}{n+1} (y^i H_{jk} + \delta_j^i H_k - \delta_k^i H_j)$$

The other invariant tensor (W_{hjk}^i) that is,

$$W_{hjk}^i := H_{hjk}^i + \frac{1}{n+1} (y^i H_{jk \cdot h} + \delta_h^i H_{jk} + \delta_j^i H_{k \cdot h} - \delta_k^i H_{j \cdot h})$$

is called the projective Weyl curvature tensor.

On geodesic mappings of recurrent Finsler spaces

A Finsler space F^n is called recurrent if the curvature tensor of F^n satisfies the following condition $H_{ijk;l}^h = \lambda_l(x, y) H_{ijk}^h$, where $\lambda_l(x, y)$ is a positively homogeneous function of degree 0 in y . [Mo3]

Proposition 1: [BP1] For a recurrent Finsler space with the nonzero vector λ_l depends on the position x alone.

Proposition 2: [BP1] A recurrent Finsler space F^n ($n > 2$) of nonzero scalar curvature is a Riemannian space of nonzero constant curvature.

Theorem 1: [BP1] If a Finsler space F^n can be geodesically mapped onto a recurrent Finsler space \bar{F}^n , then F^n must be semi-recurrent.

Theorem 2: [BP1] If F^n is a Riemannian space which can be geodesically mapped onto a recurrent Finsler space \bar{F}^n , then F^n must be a Riemannian space of constant curvature if $p_\alpha p^\alpha - L^2 p^2 \neq 0$.

Theorem 3: [BP1] If a recurrent Finsler space F^n can be geodesically mapped onto a recurrent Finsler space \bar{F}^n , then F^n must be a Riemannian space of constant curvature if $4p + \bar{\lambda} - \lambda \neq 0$.

A note on a generalized Douglas space

A Finsler space $F^n(M^n, L)$ is called a *generalized Douglas space* if $h_\alpha^h D_{ijk;\beta}^\alpha y^\beta = 0$, where $h_\alpha^h = \delta_\alpha^h - l^h l_\alpha$, $l_\alpha = \partial L / \partial y^\alpha$, and $l^h = y^h / L$.

Theorem 4: [BP2] The generalized Douglas spaces are closed under projective relations.

*P-Finsler spaces with vanishing Douglas tensor

A Finsler space F^n is called *P-Finsler space, if the tensor $P_{ijk} = \frac{1}{2} g_{ij;k}$ can be written in the form $P_{ijk} = \lambda(x, y) C_{ijk}$, where $\lambda(x, y)$ is a scalarfield. [Iz1], [Iz2]

A Finsler metric $L(x, y) = \alpha(x, y) + \beta(x, y)$ in an n -dimensional differentiable manifold M^n is called Randers metric, where $\alpha(x, y) = \sqrt{a_{ij}(x) y^i y^j}$ is a Riemannian metric in M^n and $\beta(x, y) = b_i(x) y^i$ is a differential 1-form in M^n . The Finsler space $F^n = (M^n, L = \alpha + \beta)$ with Randers metric is called Randers space. [AIM]

Theorem 5: [BP3] A *P-Randers space with vanishing Douglas tensor is a Riemannian space if the dimension is greater than three.

Publikációs lista

Nemzetközi folyóiratokban megjelent cikkek

1. S. Bácsó- I. Papp: *On geodesic mappings of recurrent Finsler spaces*, Math.Pannonica, **6** (1995), 175-180.
2. S. Bácsó- I. Papp: **P-Finsler spaces of vanishing Douglas tensor*, Acta Acad. Paed. Agriensis, **25** (1998), 91-95.
3. S. Bácsó - E. Gyöngyösi- I. Papp - B. Szilágyi: *On some special Finsler metrics in psychometry*, Acta Acad. Paed. Agriensis, **30** (2003), 23-30.
4. S. Bácsó – I. Papp: *A note on a generalized Douglas spaces*, Period. Math. Hungar. **48** (2004), 181-184.

Konferenciakiadványokban megjelent cikkek

1. I. Papp-H. Tomán: *Experiences about the mathematical and geometrical courses for the student on faculty of informatics*, Proceedings of V. International Conference on Applied Informatics, Eger, 2001.

Oktatási segédanyagok

1. Katona Emese - Papp Ildikó: *Ábrázoló geometria I-II.* Oktatási segédanyag, KLTE-MFK. 1995.
2. Bácsó Sándor - Papp Ildikó - Szabó József: *Projektív geometria*, egyetemi jegyzet (263 oldal, letölthető Mobidiák portálról, 2004.)
3. Papp Ildikó: *Projektív geometriai példatár* (140 oldal, letölthető Mobidiák portálról, 2004.)

Tudományos közlemények

1. Katona Emese - Papp Ildikó: *Schweitzer-feladatok a geometria köréből*, KLTE-MFK Tudományos közlemények 1995.

Előadások listája

1. XXII.OTDK. 1995. Gödöllő, II. Helyezés
Az előadás címe: *Speciális Riemann terek geodetikus leképezései*
2. Konstruktív geometria. Balatonföldvár 1999.
Az előadás címe: *On geodesic mapping of special Riemannian spaces*
3. Geometry and graphics in teaching contemporary engineer, Wisla 2000.
Az előadás címe: **P-Finsler spaces with vanishing Douglas tensor*
4. Colloquium on Differential geometry, Debrecen, 2000
Az előadás címe: **P-Finsler spaces with vanishing Douglas tensor*
5. V. ICAII, Eger, 2001.
Az előadás címe: *Experiences about the mathematical and geometrical courses for the student on faculty of informatics*
6. A felsőoktatásban ábrázoló geometriát oktatók konferenciája,
Sopron, 2003
Az előadás címe: *Tapasztalataim a DE-MFK-án folyó ábrázoló geometria oktatásról*
7. Geometry and graphics in teaching contemporary engineer, Sczyrk
2003.
Az előadás címe: *Nearly conformally symmetric Riemannian spaces*
8. Colloquium on Finsler geometry, Debrecen 2003
Az előadás címe: *On a new class of Finsler spaces, which are closed under projective relations*

Irodalomjegyzék

- [AM] P. Antonelli, R. Miron: *Lagrange and Finsler Geometry, Applications to Physics and Biology*, volume 76 of FTPH, Kluwer Academic Publishers, (1995)
- [AHY] T. Aikon, M. Hashiguchi, K. Yamauchi: *On Matsumoto's Finsler space with time measure*, to appear in Rep. Fac. Sci. Kagoshima Univ. (Math. Phys. Chem.)
- [Ai] T. Aikou: *Some remarks on conformal changes of generalized Finsler metrics*, Rep. Fac. Sci. Kagoshima Univ. (Math. Phys and Chem.) 20, (1987), 57-61.
- [AIM] P. Antonelli, R. Ingarden, M. Matsumoto: *The theory of sprays and Finsler spaces with applications in physics and biology*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht-Boston-London, (1993)
- [Arn] V. I. Arnold: *Geometrical methods in the theory of ordinary differential equations*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, (1983)
- [As1] G. S. Asanov: *C-reducible Finsler spaces. Finsler spaces with Randers metrics and Kropina metrics*, (Russian), Problem. of Geometry 11, (1980), 65-88.
- [As2] G. S. Asanov: *Finsler geometry, relativity and gauge theories*, Fund. Theo. Phys., D. Reidel Publ. Co., Dordrecht, Holland, (1985)
- [B1] L. Berwald: *Untersuchung der Krümmung allgemeiner metrischer Räume auf Grund des in ihnen herrschenden Parallelismus*, Math. Z. 25, (1926), 40-73, 26, (1927), 176.

- [B2] L. Berwald: *Parallelübertragung in allgemeinen Räumen*, Atti Congr. Intern. Mat. Bologna, 4, (1928), 263-270.
- [B3] L. Berwald: *On Finsler and Cartan geometries III, Two dimensional Finsler spaces with rectilinear extremals*, Ann. of Math. 42, (1941), 84-112.
- [B4] L. Berwald: *Über Finslersche und Cartansche Geometrie IV. Projektivkrümmung allgemeiner affiner Räume und Finslersche Räume skalarer Krümmung*, Ann. of Math. 48, (1947), 755-781.
- [B5] L. Berwald: *Über die n-dimensionalen geometrien konstanter Krümmung, in denen die Geraden die Kürzesten sind*, Math. Z. 30, (1929), 449-469.
- [B6] L. Berwald: *Über die Beziehungen zwischen den Theorien der Parallelübertragung in Finslerschen Räumen*, Nederl. Akad. Wetensch. Proc. 49, (1946), 642-647. = Indag. Math. 8, (1946), 401-406.
- [Ba1] S. Bácsó, *A note on geodesic mapping on Finsler spaces*, Topics in Differential Geometry, (Debrecen, 1984) 131-136., Colloquia Mathematica Societatis János Bolyai, **46**, North-Holland, Amsterdam, New York, 1988
- [Ba2] S. Bácsó: *On geodesics mappings of special Finsler spaces*, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, Serie II, Suppl. 59, (1999), 83-87.
- [BCS] D. Bao, S. S. Chern, Z. Shen: *An Introduction to Riemann Finsler Geometry*, Springer Verlag, (2000)
- [Be] A. L. Besse: *Einstein manifolds*. Springer-Verlag 1987
- [BGYPSZ] S. Bácsó, E. Gyöngyösi, I. Papp, B. Szilágyi: *On some special Finsler metrics in psychometry*, Acta Acad. Paed. Agriensis, Sectio Mathematicae, (2003), 30. 23-30.
- [BI] S. Bácsó, F. Ilosvay: *On holomorphically projective mappings of special Kaehler spaces*. Acad. Paedagog. Nyíregyháza, **15** (1999), 41-44.

- [Binh] T. Q. Binh: *On weakly symmetric Riemannian spaces*. Publ. Math. Debrecen, **42** (1998) 103-107.
- [BM1] S. Bácsó, M. Matsumoto: *On Finsler spaces of Douglas type. A generalization of the notion Berwald space*, Publ. Math. Debrecen 51, (1997), 385-406.
- [BM2] S. Bácsó, M. Matsumoto: *Reduction theorems of certain Landsberg spaces to Berwald spaces*, Publ. Math. Debrecen 48, (1996), 357-366.
- [BM3] S. Bácsó, M. Matsumoto: *On Finsler spaces of Douglas type II., Projectively flat sapces*, Publ. Math. Debrecen 53, (1998), 423-438.
- [BM4] S. Bácsó, M. Matsumoto: *On Finsler spaces of Douglas type III., Finslerian Geometries* (edited by P. N. Antonelli), Kluwer Academic Publishers, (2000), 89-94.
- [BM5] S. Bácsó, M. Matsumoto: *Finsler spaces with the h-curvature tensor dependent on position alone*, Publ. Math. Debrecen 55, (1999), 199-210.
- [BM6] S. Bácsó, M Matsumoto: *Projective change between Finsler spaces with (α, β) -metric*, Tensor N. S. 55, (1994), 252-257.
- [BM7] S. Bácsó, M. Matsumoto: *On Finsler-spaces of Douglas type IV. Projectively flat Kropina spaces*, Publ. Math. Debrecen, 56, (2000), 213-221.
- [BP1] S. Bácsó, I. Papp: *On geodesic mappings of recurrent Finsler spaces*, Math.Pannonica, **6** (1995), 175-180.
- [BP2] S. Bácsó, I. Papp: *A note on a generalized Douglas spaces*, Period. Math. Hungarica, **48** (2004), 181-184.
- [BP3] S. Bácsó, I. Papp: **P-Finsler spaces with vanishing Douglas tensor*, Acta Acad. Paed. Agriensis, **25** (1998), 91-95.
- [Bu1] H. Busemann: *The geometry of Finsler spaces*, Ball. Amer. Math. Soc. **56**, (1950)

- [Bu2] H. Busemann: *The foundations of Minkowskian geometry*, Comment. Math. Helvet. **24**, (1950), 156-187.
- [Bu3] H. Busemann: *The geometry of geodesics*, Academic Press, New York, (1955)
- [BY] S. Bácsó, R. Yoshikawa: *Weakly-Berwald process*, Publ. Math. Debrecen, **61** (2002), 219-231.
- [Ca] É. Cartan: *Les espaces de Finsler*, Actualités **79**, Paris, (1934)
- [D] J. Douglas: *The general geometry of paths*, Ann. of Math., **29** (1927-1928), 143-168.
- [F1] P. Finsler: *Über Kurven und Flächen in allgemeinen Räumen*, (Disertation Göttingen, 1918), Birkhäuser Verlag, Barel, (1951)
- [Fu] P. Funk: *Über Geometrien bei denen die Geraden die Kürzesten sind*, Math. Ann., **101** (1929), 226-237.
- [Ge] A. Gebarowski: *Nearly conformally symmetric warped product manifolds*. Bulletin of the Institute of Mathematica Academia Sinica **20** (1992) 289-303.
- [H1] M. Hashiguchi: *On the hv-curvature tensors of Finsler spaces*, Ibid., **4** (1971), 1-5.
- [H2] M. Hashiguchi: *On Wagner's generalized Berwald space*, J. Korean Math. Soc., **12** (1975), 51-61.
- [He] E. Heil: *Eine Charakterisierung lokal-Minkowskischer Räume*, Math. Ann., **167** (1966), 64-70.
- [HHM] M. Hashiguchi, S. Hojo, M. Matsumoto: *On Landsberg spaces of two dimensions with (α, β) -metrics*, J. Korean Math. Soc., **10** (1973), 17-26.
- [Hi1] D. Hilbert: *Mathematische Probleme*, Gött. Nachrichten, (1900), 253-297.; könyv alakjában kommentárokkal ellátva P. Sz. Alekszandrov szerkesztésében: *Problemü Gil'berta*, Nauka, Moszkva, (1969), 29-31.

- [Hi2] D. Hilbert: *Über die gerade Linie als kürzeste Verbindung zweier Punkte*, Math. Ann. , **46** (1901), 91-96.
- [HI1] M. Hashiguchi, Y. Ichijyō: *On some special (α, β) -metrics*, Rep. Fac. Sci. Kagoshima Univ., **8** (1975), 39-46.
- [HI2] M. Hashiguchi, Y. Ichijyō: *On conformal transformations of Wagner spaces*, Rep. Fac. Sci. Kagoshima Univ. (Math. Phys. Chem.), **10** (1977), 19-25.
- [HI3] M. Hashiguchi, Y. Ichijyō: *Randers spaces with rectilinear geodesics*, Rep. Fac. Sci. Kagoshima Univ. (Math. Phys. Chem.), **13** (1980), 33-40.
- [Hra] Hraskó Péter: *Relativitáselmélet*, Typotex Kiadó, Budapest, 2002
- [HrS] D. Hriminc, H. Shimada: *On the α -duality between Lagrange and Hamilton manifolds*, Nonlinear World, **3** (1966), 613-641.
- [In1] R. S. Ingarden: *On the geometrically absolute optical representation in the electron microscope*, Trav. Soc. Sci. Letr. Wroclav, B45, (1957)
- [In2] R. S. Ingarden: *Geometry of thermodynamics*, Proc. XV, Intern. conf. diff. geom. methods in theor. physics, World Sci. Publ., Singapore, (1987), 455-465.
- [Iz1] H. Izumi. *On *P-Finsler spaces I., II.* Memoirs of the Defense Academy, Japan, **16** (1976), 133-138, **17** (1977), 1-9.
- [Iz2] H. Izumi: *On *P-Finsler spaces of scalar curvature*, Tensor, N. S. **38** (1982), 220222.
- [Jeg] I. P. Jegorov: *Geometria*, Tankönyvkiadó, Budapest, 1986
- [K] M. S. Knebelman: *Collineations and notions in generalized spaces*, Amer. J. of Math., **51** (1927), 527-567.
- [L1] G. Landsberg: *Über die Totalkrümmung*, Jber. Deutsch. Math. Verein. **16**, (1907), 36-46.
- [L2] G. Landsberg: *Krümmungstheorie und Variationsrechnung*, Ibid. **16**, (1907), 547-551.

- [L3] G. Landsberg: *Über die Krümmung in der Variationsrechnung*, Math. Ann. **65**, (1908), 313-349.
- [M1] M. Matsumoto: *History of Finsler geometry*, Debrecen, (1979)
- [M2] M. Matsumoto: *Foundations of Finsler geometry and special Finsler spaces*, Kaiseisha Press, Japan, (1986)
- [M3] M. Matsumoto: *The Tavakol-van der Bergh conditions of the theories of gravity and projective change of Finsler metrics*, Publ. Math. Debrecen, **42** (1993), 155-168.
- [M4] M. Matsumoto: *Finsler Geometry in the 20th-Century*
- [M5] M. Matsumoto: *On Finsler spaces with Randers metric and special forms of important tensors*, J. Math. Kyoto Univ. (Kyoto Daigaku J. Math.), **14** (1974), 477-498.
- [M6] M. Matsumoto: *On Finsler spaces with curvature tensors of some special forms*, Ibid., **22** (1971), 201-204.
- [M7] M. Matsumoto: *On Wagner's generalized Berwald spaces of dimension two*, Tensor N. S., **36** (1982), 303-311.
- [M8] M. Matsumoto: *On C-reducible Finsler spaces*, Tensor N. S., **24** (1972), 29-37.
- [M9] M. Matsumoto: *A slope of a mountain is a Finsler surface with respect to a time measure*, J. Math. Kyoto Univ., **29** (1989), 17-25.
- [M10] M. Matsumoto: *The Berwald connection of a Finsler space with an (α, β) -metric*, Tensor. N. S. **50**, (1991), 18-21.
- [M11] M. Matsumoto: *Randers spaces of constant curvature*, Rep. Math. Phys. **28**, (1989), 105-117.
- [M12] M. Matsumoto: *Projectively flat Finsler spaces of constant curvature*, J. Natl. Acad. Math., India (Gorakhpur), **11**, (1983), 142-164.
- [M13] M. Matsumoto: *Projectively flat Finsler spaces with (α, β) -metric*, Rep. on Math. Phys. **30**, (1991), 15-20.

- [M14] M. Matsumoto: *Projective changes of Finsler metrics and projectively flat Finsler spaces*, Tensor (N.S.), **34** (1980), 303-315.
- [MH] M. Matsumoto, S. Hojo: *A conclusive theorem on C-reducible Finsler spaces*, Tensor, N. S. **32** (1978), 225-230.
- [Mi] R. B. Mirsa: *On a recurrent Finsler space*, Rev. Roun, . Math. Pte.reset Appl., **18** (1973), 701-712.
- [Mo1] A. Moór: *Über die Dualität von Finslerschen Grundfunktionen*, Publ. Math. Debrecen **2**, (1952), 178-190.
- [Mo2] A. Moór: *Über die Torsions- und Krümmungsinvarianten der dreidimensionalen Finslerschen Räume*, Math. Nachr. **16**, (1957), 85-99.
- [Mo3] A. Moór: *Untersuchungen über Finsleräume von rekurrenter Krümmung*, Tensor (N.S.), **13** (1963), 1-18.
- [Mo4] A. Moór: *Unterräume von rekurrenter Krümmung in Finsleräumen*, Tensor (N.S.), **24** (1972), 261-265.
- [MS] M. Matsumoto, H. Shimada: *On Finsler spaces with the curvature tensors P_{hijk} and S_{hijk} satisfying special conditions*, Rep. on Math. Phys., **12**, (1977), 77-87.
- [MT] M. Matsumoto, L. Tamássy: *Direct method to characterize conformally Minkowski Finsler spaces*, Tensor N. S., **33**, (1979), 380-384.
- [Nu1] S. Numata: *On Landsberg spaces of scalar curvature*, J. Korea Math. Soc. **12**, (1975), 97-100.
- [O] T. Okada: *On models of projectively flat Finsler spaces of constant negative curvature*, Tensor N. S., **40**, (1983), 117-124.
- [PM] P. N. Padney, R. B. Mirsa: *Projective recurrent Finsler manifolds I*, Publ. Math. Debrecen, **28** (1981), 191-198.
- [R] B. Riemann: *Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen*, Göttingen, (1854)

- [Ra] G. Randers: *On an asymmetric metric in the four-space of general relativity*, Phys. Rev. (2) **59**, (1941), 195-199.
- [Rap1] A. Rapcsák: *Die Bestimmung der Grundfunktionen projektiveliener metrischer Räume*, Publ. Math. Debrecen **9.**, (1962), 164-167.
- [Rap2] A. Rapcsák: *Über die bahntreuen Abbildungen metrischer Räume*, Publ. Math. Debrecen **8.**, (1961), 285-290.
- [Rap3] A. Rapcsák: *Über die bahntreuen Abbildungen affinzusammenhängender Räume*, Publ. Math. Debrecen **8.**, (1961), 225-230.
- [Rot] W. Roter: *On a generalization of conformally symmetric metrics*, Tensor N, S. **46** (1987) 278-286.
- [Rox] I. W. Roxburgh: *Finsler spaces with Riemannian geodesics*, General Relativity and Gravitation **23**, (1991), 1071-1080.
- [Ru] H. Rund: *The differential geometry of Finsler spaces*, Springer Verlag, (1959)
- [RT] Rapcsák András, Tamássy Lajos: *Differenciálgeometria I.-III.* Tankönyvkiadó, 1990 (5. kiadás)
- [Sa] T. Sakaguchi, *On Finsler spaces of scalar curvature*, Tensor, N. S., **38** (1982), 211-219.
- [Se] R. N. Sen: *Finsler spaces of recurrent curvature*, Tensor (N.S.), **19** (1968), 291-299.
- [She1] Z. Shen: *Finsler manifolds of constant positive curvature*, volume Finsler Geometry of Contemporary Mathematics (196), AMS (1996), 83-92.
- [She2] Z. Shen: *Curvature, distance and volume in Finsler geometry*, unpublished
- [She3] Z. Shen: *Differential geometry of spray and Finsler spaces*, Kluwer Academic Press, (2001)
- [Shi1] C. Shibata: *On Finsler spaces with Kropina metric*, Rep. on Math. Phys. **13**, (1978), 117-128.

- [Shi2] C. Shibata: *On Finsler geometry of thermodynamical states given by R. S. Ingarden*, to appear in Rep. on Math. Phys.
- [Shi3] C. Shibata: *On Finsler spaces with an (α, β) -metric*, J. Hokkaido Univ. of Education, II A, **35**, (1984), 1-16.
- [SSAY] C. Shibata, H. Shimada, M. Azuma, H. Yasuda: *On Finsler spaces with Randers metric*, Tensor N. S. **31**, (1977), 219-226.
- [Su] B. Su: *On the isomorphic transformations of minimal hypersurfaces in a Finsler space*, (Chinese), Acta Math. Sinica **5**, (1955), 471-488.
- [Sy] J. L. Synge: *A generalization of the Riemannian line-element*, Trans. Amer. Math. Soc. **27**, (1925)
- [Sz1] Z. Szabó: *Positive definite Berwald spaces (structure theorems on Berwald spaces)*, Tensor N. S. **35**, (1981), 25-39.
- [Sz2] Z. Szabó: *Generalized spaces with many isometries*, Geometriae Dedicata **11**, (1981), 369-383.
- [Sz3] Z. I. Szabó, *Ein Finslerscher Raum ist gerade dann von skalarer Krümmung, wenn seine Weylsche Projektivkrümmung verschwindet*, Acta Sci. Math. (Szeged), **39** (1997), 163-168.
- [Sz4] Z. I. Szabó, *Finslerscher Projektivgeometrie II. über Finslersche Projektivhündel mit Weylsche Projektivkrümmung Null*, Acta Math. Acad. Sci. Hungar., **35** (1980), 97-108.
- [Szi1] Szilasi József: *Bevezetés a differenciálgeometriába*, Kossuth Egyetemi Kiadó, Debrecen, 1998
- [Szin] N. Sz. Szinjukov: *Geodezicseszkije otobrazsenija rimanovih prostranstv* (Riemann terek geodetikus leképezései), Moszkva, Nauka, 1979.
- [Va] Sz. Vattamány: *Projection onto the indikatrix bundle of a Finsler manifold*, Publ. Math. Debrecen, **58** (2001), 193-221
- [Ver] Verhóczki László: *A sokaságok differenciálgeometriája*, www.cs.elte.hu/geometry

- [We] H. Weyl: *Zur Infinitesimalgeometrie*, Göttinger Nachrichten, (1921), 99-112.
- [T] J. H. Taylor: *A generalization of Levi-Civita's parallelism and the Frenet formulas*, Ibid
- [TB] L. Tamássy, T. Q. Binh: *On weakly symmetric and weakly projective symmetric Riemannian manifolds*. Colq. Math. Soc. János Bolyai, **56** (1992) 663-670.
- [YS] H. Yasuda, H. Shimada: *On Randers spaces of scalar curvature*, Rep. on Math. Phys. **11**, (1977), 347-360.