Egyetemi doktori (PhD) értekezés

Figurális számok és diofantikus egyenletek

Varga Nóra

Témavezető: Dr. Pintér Ákos

Debreceni Egyetem
Természettudományi Doktori Tanács
Matematika- és Számítástudományok Doktori Iskola

Debrecen, 2016

Ezen értekezést a Debreceni Egyetem Természettudományi Doktori Tanács Matematika- és Számítástudományok Doktori Iskola *Diofantikus és konstruktív számelmélet* programja keretében készítettem a Debreceni Egyetem természettudományi doktori (PhD) fokozatának elnyerése céljából.

Debrecen, 2016. március 1.

Varga Nóra
jelölt

Tanúsítom, hogy Varga Nóra doktorjelölt 2011-2014 között a fent megnevezett Doktori Iskola *Diofantikus és konstruktív számelmélet* programjának keretében irányításommal végezte munkáját. Az értekezésben foglalt eredményekhez a jelölt önálló alkotó tevékenységével meghatározóan hozzájárult. Az értekezés elfogadását javasolom.

Debrecen, 2016. március 1.

Pintér Ákos
témavezető

Figurális számok és diofantikus egyenletek

Értekezés a doktori (Ph.D.) fokozat megszerzése érdekében
matematika tudományágban

Írta: Varga Nóra okleveles alkalmazott matematikus

Készült a Debreceni Egyetem Matematika- és Számítástudományok
Doktori Iskolája (Diofantikus és konstruktív számelmélet programja)
keretében.

Témavezető: Dr. Pintér Ákos

A doktori szigorlati bizottság:

elnök:	Dr.	....
tagok:	Dr.	....
	Dr.	....

A doktori szigorlat időpontja: 2015. június

Az értekezés bírálói:

Dr.	....
Dr.	....
Dr.	....

A bírálóbizottság:

elnök:	Dr.	....
tagok:	Dr.	....
	Dr.	....
	Dr.	....
	Dr.	

Az értekezés védésének időpontja: 2016.

Köszönetnyilvánítás

Ezúton szeretnék köszönetet mondani mindazoknak, akik közvetlen vagy közvetett módon hozzájárultak a disszertációm elkészítéséhez.

Mindenekelőtt témavezetőmnek, Pintér Ákosnak, aki szakmai tanácsaival, segítőkész támogatásával alapvetően hozzájárult szakmai fejlődésemhez és sikeres munkámhoz. Köszönöm dolgozatom alapos és kritikus átnézését. Ugyanígy szeretném megköszönni Győry Kálmán professzor úr segítő megjegyzéseit és állandó támogatását.

Kollégáim, Bérczes Attila, Hajdu Lajos, Pink István és Tengely Szabolcs mindig készségesen segítettek, ha kérdéssel, kéréssel fordultam hozzájuk. Köszönettel tartozom az Algebra és Számelmélet Tanszék, valamint a Számelméleti Kutatócsoport tagjainak is.

Szeretném megköszönni családomnak, édesapámnak, édesanyámnak és nővéremnek, akik kezdettől fogva bíztak bennem és támogattak, és kedvesemnek, Györkös Attilának az általa nyújtott rengeteg támogatást, szeretet és türelmet.

Tartalomjegyzék

Bevezetés

Hilbert az 1900-ban, Párizsban megrendezett II. Nemzetközi Matematikai Kongresszuson sorra vette kora legjelentősebb, megoldatlan matematikai problémáit. A 10. problémaként ismert kérdés a diofantikus egyenletekre vonatkozik: létezik-e olyan algoritmus, amely képes eldönteni, hogy egy tetszőleges diofantikus egyenletnek van-e racionális egész megoldása. A választ 1970-ben Matijaszevics [54] adta meg, aki bebizonyította, hogy nincs olyan univerzális algoritmus, amely a megoldhatóság kérdésének eldöntésére alkalmas volna. Következésképpen nem adható univerzális algoritmus a diofantikus egyenletek elméletének másik két alapvető problémájára sem: a megoldásszám meghatározására és az összes megoldás megállapítására. Így rendkívül értékesek a különböző egyenletosztályokra bizonyított effektív végességi tételek, amelyek nemcsak a megoldásszám végességét garantálják, hanem algoritmust is adnak az összes megoldás meghatározására.

Jelentős előrelépést Baker effektív módszerének alkalmazása jelentett a magasabbfokú, kétismeretlenes egyenletek körében, mivel ennek segítségével effektív végességi állításokat sikerült bizonyítani. Továbbá bizonyos Thue- és szuperelliptikus egyenletek megoldásai is meghatározhatóvá váltak, amelyekről részletesen Baker [3] könyvében lehet olvasni. A Baker-módszer meghatározza, hogy milyen korláton belül kell keresni a megoldásokat, viszont ahhoz már nagyok ezek az értékek, hogy konkrét egyenletek megoldásait megtaláljuk. Bizonyos konkrét esetekben a korlátokat csökkenti több redukciós eljárás, például Baker és Davenport eredménye [4], illetve az LLL-algoritmusként ismert módszer [48], amelyet Lenstra, Lenstra és Lovász dolgozott ki.

Győry tetszőleges ismeretlenszám esetén is sikeresen alkalmazta a módszert, többek között norma- és diszkriminánsforma egyenletekre, lásd [32] és [31]. Még általánosabb egyenletosztályokra a Thue-Siegel-Roth-Schmidt módszer alkalmazásával kaphatunk végességi állításokat, ezek azonban már ineffektívek.

Kombinatorikus hátterű problémák vizsgálata során, amikor két végtelen halmaz közös értékeit keressük, gyakran kapunk diofantikus egyenleteket. Dolgozatunkban olyan $f(x) = g(y)$ típusú szeparábilis egyenletekkel foglalkozunk, amelyekben az f és g polinomok speciális, kombinatorikus jelentéssel bírnak. Ezen egyenletek általános tulajdonságai, kombinatorikus és aritmetikai jellemzői megtalálhatók Dickson [23], illetve Deza és Deza [22] könyvében. Emellett több cikk is foglalkozik a kombinatorikus számok diofantikus tulajdonságaival, amelyekről bővebben Brindza, Pintér és Turjányi [16], Kaneko és Tachibana [44], Pintér és Varga [59], Hajdu, Pintér, Tengely és Varga [39], Hajdu és Pintér [38] illetve Dujella, Győry és Pintér [24] munkáiban lehet olvasni.

A Bevezetés további részében dolgozatunk felépítését vázoljuk. Az egyes fejezetek rövid leírása mellett a témához kapcsolódó legfontosabb eredményeket, hivatkozásokat is bemutatjuk, valamint a bizonyítások során használt lemmákat is megemlítjük.

Az első fejezetben a bizonyításokhoz felhasznált segéderedményeket adjuk meg. A dolgozatban többször előfordul Baker egy elliptikus egyenletekre vonatkozó effektív végességi állítása [2], illetve annak egy Brindza [13] nevéhez fűződő általánosítása. A lemmák között szerepel továbbá Grytzuk és Schinzel eredménye [30], amely egy általános egyenletosztály megoldásaira vonatkozó tétel speciális esete, nevezetesen Runge módszerét [62] felhasználva ad effektív felső korlátot a megoldások nagyságára. Végezetül, az ötödik fejezetben alkalmazott, Fujiwara [29] által kidolgozott eredményt ismertetjük, amely tetszőleges polinom gyökeire ad korlátot az együtthatók függvényében.

A $2., 3.$ és 4. fejezetek szorosan kapcsolódnak egymáshoz, így általános bevezetésüket, és a kapcsolódó szakirodalmat nem választjuk szét.

Az alább definiált $f_{k,m}(X)$ polinom a disszertáció említett fejezeteiben a vizsgálat tárgyául szolgál. Legyenek $k \geq 2, m \geq 3$ egész paraméterek és jelölje az

$$f_{k,m}(X) = \frac{X(X+1)\cdots(X+(k-2))((m-2)X+k+2-m)}{k!} \tag{1}$$

k-ad fokú, racionális együtthatós polinom az X-edik (k-dimenziós, m-szög alapú) figurális számot.
Az $m = 3$ esetben az $f_{k,3}(X) = \frac{X(X+1)\cdots(X+k-1)}{k!}$ kifejezésből az $\binom{X+k-1}{k}$ binomiális együtthatókat, a $k = 2$, illetve $k = 3$ esetekben a poligonális, illetve a piramidális számokat kapjuk, amelyeket az $f_{2,m}(X)$ és az $f_{3,m}(X)$ polinomokkal jelölünk, azaz

$$f_{2,m}(X) = \frac{X((m-2)X+4-m)}{2}$$

és

$$f_{3,m}(X) = \frac{X(X+1)((m-2)X+5-m)}{6},$$

ahol $m \geq 3$ egész paraméter. Megjegyezzük, hogy praktikus okokból a disszertációban az $f_{2,m}(X) = \mathrm{Pol}_m(X)$ és az $f_{3,m}(X) = \mathrm{Pyr}_m(X)$ jelöléseket is használjuk.

Legyenek k, m és l, n rögzített egész számok, amelyekre $k > l \geq 2$ és

$m \geq 3, n \geq 3$ feltételek teljesülnek és tekintsük az

$$f_{k,m}(x) = f_{l,n}(y) \tag{2}$$

egyenletet ismeretlen x, y egész számokban. Ekkor a (2) egyenletet teljesítő (x, y) számpárok két figurális szám egyenlő értékeit határozzák meg. A vizsgálat ilyen általánosságban reménytelen, továbbá rögzített (k, m, l, n) számnégyesekre effektív vagy ineffektív végességi állításokat is nehéz nyerni.

A (2) egyenletet $m = n = 3$ esetben, azaz a binomiális együtthatók egyenlő értékeire vonatkozó egyenletet, valamint általánosításait többen vizsgálták, és általános effektív és ineffektív végességi eredményeket publikáltak. Kiss dolgozatában [45] az $\binom{x}{p} = \binom{y}{2}$ egyenletről bizonyította be, hogy adott páratlan p prím esetén csak véges sok megoldás van. Brindza [14] kiterjesztette ezt az eredményt az $\binom{x}{k} = \binom{y}{2}$, $k > 2$ esetre, továbbá de Weger [21] az $\binom{x}{3} = \binom{y}{4}$, $x, y \in \mathbb{Z}$ esettel foglalkozott. Brindza és Pintér [15] az $x(x+1)\cdots(x+k-1) = \binom{y}{l}$ egyenlet esetén bizonyította, hogy csak véges sok egész x, y megoldás van, ha $k, l > 2$. Beukers, Shorey és Tijdeman [9] az $x(x+d_1)\cdots(x+(k-1)d_1) = y(y+d_2)\cdots(y+(l-1)d_2)$ egyenlet esetén, illetve Rakaczki [60] az $F(\binom{x}{k}) = b\binom{y}{l}$ egyenlet megoldásaira vonatkozóan fogalmazott meg végességi állításokat a megfelelő feltételek mellett, meghatározva a kivételes eseteket is.
A $(k, m, l, n) = (3, 3, 2, 3), (4, 3, 2, 3)$, $(5, 3, 2, 3)$ eseteknek megfelelő egyenletek összes megoldásait is bizonyították. Avanesov [1] az $\binom{x}{3} = \binom{y}{2}$ egyenlet esetén igazolta, hogy csak öt (x, y) számpárra teljesül az állítás. Pintér [58] és de Weger [20] egymástól függetlenül az $\binom{x}{4} = \binom{y}{2}$, $x \geq 4, y \geq 2$ esetén, míg Bugeaud, Mignotte, Siksek, Stoll és Tengely [18] az $\binom{x}{5} = \binom{y}{2}$ egyenletet illetően határozta meg az összes megoldást.

Az $l = 2, n = 4$ esetben az $f_{2,4}(Y) = Y^2$ teljes négyzet adódik. A kérdés általánosításával, hogy egy binomiális együttható mikor lesz teljes hatvány, vagyis az $f_{k,3}(x) = y^d$ egyenlettel Győry [33] foglalkozott és oldotta meg.

A klasszikus problémák közé sorolandó az 1875-ből, Lucas-tól [52] származó úgynevezett "canonball", vagyis "ágyúgolyó" probléma, amely azt a kérdést vizsgálja, hogy az egymás után következő négyzetszámok összege mikor alkot teljes négyzetet. A (2) egyenletbe a $(k, m, l, n) = (3, 4, 2, 4)$ értékeket írva tudjuk megadni a problémát, vagyis az $1^2 + 2^2 + \cdots + x^2 = \frac{x(x+1)(2x+1)}{6} = y^2$ összefüggést. A kérdést többen vizsgálták, Lucas [53] eredményeit Watson [77] és Ljunggren [49] egymástól különböző módon tette teljessé. A probléma általánosításáról, nevezetesen az $x(x+1)(x+2) = dy^2$ egyenlet megoldásáról szóló eredmény Bennett [6] cikkében olvasható.

A dolgozat második fejezetében a Brindza, Pintér és Turjányi [16] cikkében szereplő sejtést igazoljuk, amely a piramidális és poligonális számok közös értékeit, azaz a (2) egyenletből $k = 3$ és $l = 2$ értékek mellett kapott

$$f_{3,m}(x) = f_{2,n}(y) \tag{3}$$

egyenletet vizsgálja x és y ismeretlen egészekben. Dolgozatukban bebizonyították, hogy eltekintve véges sok (m, n) számpártól, az egyenletnek csak véges sok x, y megoldása van, amelyre $\max(|x|, |y|) < C_1$ teljesül, ahol C_1 az m-től és az n-től függő effektíven kiszámítható korlát, továbbá a kivételes (m, n) párokra teljesül, hogy $\max(m, n) < C_2$, ahol C_2 effektíven meghatározható abszolút konstans. Sejtésként fogalmazták meg, hogy csak egy kivételes pár létezik, nevezetesen az $(m, n) = (5, 4)$. Dolgozatunkban bebizonyítjuk ezt a sejtést.

A harmadik fejezetben bizonyított állítás előzményeként Mordell klasszikusnak számító eredményét idézzük [56, 27. fejezet], amely az

$$\binom{x}{3} + \binom{x}{2} + \binom{x}{1} + \binom{x}{0} = y^2 \tag{4}$$

diofantikus egyenlettel foglalkozik, választ keresve arra a kérdésre, hogy valóban az $x = -1, 0, 2, 7, 15, 74$ számok alkotják-e csupán a (4) egyenlet egész megoldásait. Ljunggren [50] és Bremner [12] egymástól függetlenül meghatározta a $6y^2 = x^3 + 5x + 6$ alakban is megadható, (4) egyenlet összes megoldását, megmutatva, hogy csak egyetlen további $x \in \mathbb{Z}$ esetén teljesül az egyenlőség, nevezetesen az $x = 767$ érték mellett. Tekintettel az $f_{k,m}(X)$ polinomra, a (4) egyenlet megadható az alábbi módon is:

$$f_{3,3}(x-2) + f_{2,3}(x-1) + x + 1 = f_{2,4}(y). \tag{5}$$

A fejezet célja, hogy az (5) egyenletet általánosítsuk a poligonális és piramidális számok segítségével. Még pontosabban megfogalmazva, az

$$f_{3,m}(x-2) + f_{2,m}(x-1) + x + 1 = f_{2,n}(y)$$

diofantikus egyenletet vizsgáljuk és bizonyítjuk, hogy a kivételes (m, n) pároktól eltekintve csak véges sok megoldás létezik.

A negyedik fejezetben általánosítjuk a második fejezetben szereplő (3) egyenlet bal oldalát, vagyis az általános alakban felírt figurális számok és poligonális számok közös értékeire vonatkozó összefüggést, azaz az

$$f_{k,m}(x) = f_{2,n}(y) \tag{6}$$

egyenletet vizsgáljuk. Adott feltételek mellett effektív végességi állításokat adunk a (6) egyenletre egész x és y értékek esetén, meghatározva továbbá a kivételt képező eseteket. Foglalkozunk az $f_{k,k+2}(X) = \frac{X^2(X+1)\cdots(X+k-2)}{(k-1)!}$

alakban felírt figurális számmal és bizonyítjuk, hogy ez az érték csak egyetlen esetben lehet teljes négyzet.

Az ötödik fejezetben az Erdős-Graham probléma speciális eseteivel foglalkozunk. A rövid tartalmi kivonat előtt, itt is sorba vesszük a kapcsolódó előzményeket. Tekintsük az alábbi

$$f(x,k,d) = x(x+d)\cdots(x+(k-1)d)$$

szorzatot. Erdős [26] és Rigge [61] egymástól függetlenül bizonyították, ha $x \geq 1$ és $k \geq 2$, akkor $f(x,k,1)$ nem lehet teljes négyzet. Erdős és Selfridge [28] híres eredményükben azt állították, hogy az $f(x,k,1)$ sosem lehet egy egész szám teljes hatványa, feltéve, hogy $x \geq 1$ és $k \geq 2$. Azaz, megoldották az

$$f(x,k,d) = y^l \tag{7}$$

diofantikus egyenletet $d = 1$ esetén. A szakirodalom ebben a témában nagyon gazdag. Elsőként az $l = 2$ esettel foglalkozunk. Euler bizonyította (ld. [23] 440. és 635. oldalak), hogy egy számtani sorozat négy egymást követő tagjának szorzata sosem lehet négyzet, megoldva ezzel a (7) egyenletet $k = 4, l = 2$ esetben. Obláth [57] hasonló állítást igazolt $k = 5$ esetben. Saradha és Shorey [65] bizonyította, hogy a (7) egyenletnek nincs megoldása $k \geq 4$ esetben, feltéve, hogy d egy prímszám hatványa. Laishram és Shorey [47] kiterjesztette ezt az eredményt arra az esetre, amikor vagy $d \leq 10^{10}$, vagy d-nek legfeljebb hat prímosztója van. Bennett, Bruin, Győry és Hajdu [7] megoldotta a (7) egyenletet, ha $6 \leq k \leq 11$ és $l = 2$. Hirata-Kohno, Laishram, Shorey és Tijdeman [43] teljesen megoldották a (7) egyenletet $3 \leq k < 110$ esetekben. Tengely [71] eredményével együtt a (7) egyenlet összes megoldását megkapjuk, ha $3 \leq k \leq 100$.

A továbbiakban tegyük fel, hogy $l \geq 3$. Több szerző vizsgálta az általánosabb

$$f(x,k,d) = by^l \tag{8}$$

egyenletet, ahol $b > 0$ és b legnagyobb prímosztója nem nagyobb, mint k. Saradha [64] bizonyította, hogy a (8) egyenletnek nincs megoldása $k \geq 4$ esetén. Győry [34] vizsgálata a $k = 2, 3$ esetekre terjedt ki, meghatározta a (8) egyenlet összes megoldását. Győry, Hajdu és Saradha [36] belátta, hogy egy számtani sorozatban négy vagy öt egymást követő egész tag szorzata nem lehet teljes hatvány, feltéve, hogy a kezdő tag és a differencia relatív prímek. Hajdu, Tengely és Tijdeman [40] bizonyította, hogy egy számtani sorozatban k relatív prím egész szorzata nem lehet köbszám, ha $2 < k < 39$. Bennett, Bruin, Győry és Hajdu [7] különböző végességi állításokat adott azzal a megkötéssel, hogy k rögzített. Hajdu és Kovács [37] igazolta, hogy egy primitív számtani sorozatban k egymást követő tag szorzata sosem lehet ötödik hatvány, ha $3 \leq k \leq 54$. Győry, Hajdu és Pintér [35] bebizonyította, hogy tetszőleges pozitív egész x, d és k esetén, ahol $\gcd(x,d) = 1$ és $3 < k < 35$, az $x(x+d)\cdots(x+(k-1)d)$ szorzat nem lehet teljes hatvány.

Tekintsük az alábbi általános egyenletet

$$\prod_{i=1}^{r} f(x_i, k_i, 1) = y^2$$

rögzített $r \geq 1$ és $\{k_1, k_2, \ldots, k_r\}$ esetén, ahol $k_i \geq 4$, $i = 1, 2, \ldots, r$. Erdős és Graham [25] vizsgálata annak a meghatározására irányult, hogy ennek az egyenletnek valóban csak legfeljebb véges sok pozitív egész y és $(x_1, x_2, \ldots, x_r)$ megoldása van-e, ha $x_i + k_i \leq x_{i+1}$ minden i-re teljesül, ahol $1 \leq i \leq r-1$. Skałba [67] bebizonyította, hogy létezik korlát a legkisebb megoldásra és sikerült becslést adnia a korlát alatt lévő megoldásszámra. Ulas [74] megválaszolta Erdős és Graham fenti kérdését. Válasza negatív volt, ha $r = k_i = 4$ vagy $r \geq 6$ és $k_i = 4$. Bauer és

Bennett [5] kiterjesztette ezt az eredményt az $r = 3$ és $r = 5$ esetekre. Bennett és Van Luijk [8] adott egy végtelen családot $r \geq 5$ esetén, amelyben az egymást nem fedő blokkok öt olyan egymást követő egészből állnak, amelyek szorzata mindig teljes négyzet. Luca és Walsh [51] vizsgálta az $(r, k_i) = (2, 4)$ eseteket, ha $i = 1, \ldots, r$.

Az ötödik fejezet első részében az

$$\frac{x(x+1)(x+2)(x+3)}{(x+a)(x+b)} = y^2 \tag{9}$$

diofantikus egyenlettel foglalkozunk, ahol $a, b \in \mathbb{Z}, a \neq b$ paraméterek. A megoldás méretére korlátot adunk és egy algoritmust, amely meghatározza az összes $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ megoldást. A bizonyítás Runge eljárásán alapszik, amelyről részletesen Runge [62], Schinzel [66], Hilliker és Strauss [42], Grytczuk és Schinzel [30], Walsh [76] és Tengely [70] cikkeiben lehet olvasni. 2008-ban Sankaranarayanan és Saradha [63] a Runge módszert alkalmazva felső korlátot adott az $F(x) = y^m$ és $F(x) = G(y)$ diofantikus egyenletek megoldásainak méretére. Általánosították ezt a módszert a $P(x)/Q(x) = y^m$ alakú egyenletek megoldásait figyelembe véve. Az utóbbi eredmény alapján a (9) egyenlet megoldásainak korlátját bizonyítjuk. Megjegyezzük, hogy a (9) egyenlet egész megoldásai megfelelnek az

$$x(x+1)(x+2)(x+3)(x+a)(x+b) = Y^2$$

hiperelliptikus egyenlet egész megoldásainak, ahol $Y = (x+a)(x+b)y$. Baker [2] módszerével, miszerint alsó korlátot ad a logaritmikus lineáris formákra, egy felső korlát biztosítható a hiperelliptikus egyenlet megoldásának nagyságára. Több szerző javított ezen a korláton, többek között például Sprindžuk [68], Brindza[13], Bilu [10], Voutier [75], Bugeaud [17] illetve Bugeaud, Mignotte, Siksek, Stoll és Tengely [18], de még így is nagy maradt. Ennek a hiperelliptikus egyenletnek a megoldásaira is lehet alkalmazni a Runge módszert, hogy bizonyítsuk a felső korlátot az egész megoldások nagyságára. A módszerünk jobb korláthoz vezet, így hatékonyabban meghatározhatók az egész megoldások.

Az ötödik fejezet további részében ezt az eredményt terjesztjük ki olyan egyenletekre, amelyeknek a bal oldalán olyan racionális függvények állnak, amelyekre teljesül, hogy a számláló és nevező fokszámának legnagyobb közös osztója $d > 1$, továbbá a jobb oldali Y kitevője és d nem relatív prím, nevezetesen az

$$\frac{x(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)(x+5)}{(x+a)(x+b)} = y^2,$$

$$\frac{x(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)(x+5)}{(x+a)(x+b)(x+c)} = y^3,$$

$$\frac{x(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)(x+5)}{(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)} = y^2$$

diofantikus egyenleteket vizsgáljuk, ahol $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ páronként különböző egész számok úgy, hogy $a, b, c, d \notin \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. Ezen egyenletek megoldásaira sikerült korlátot nyernünk, amelyeket a megfelelő fejezetben mutatunk be.

A disszertáció alapjául az [59], [39], [41], [72] és [73] cikkek szolgáltak.

1. fejezet

Segéderedmények

Első lemmánk Baker [2] eredménye.

1.1. Lemma. *Legyen $t(x)$ harmadfokú, racionális együtthatós polinom, amelynek diszkriminánsa nem nulla. A*

$$t(x) = y^2$$

egyenletből következik, hogy $\max(|x|, |y|) < C_3$*, ahol C_3 egy effektíven kiszámítható konstans, amely csak a t együtthatóitól függ.*

Bizonyítás. Megtalálható a [2] cikkben.

A fenti lemma általánosításának pontos leírását Brindza [13], illetve Bugeaud [17] cikkei tartalmazzák. Második lemmánk az úgynevezett hiperelliptikus egyenletek megoldásaival foglalkozik, amely a modern diofantikus számelmélet egyik gyakran használt eredménye.

1.2. Lemma. *Legyen $t(X) \in \mathbb{Q}[X]$ és tegyük fel, hogy a $t(X)$ polinomnak van legalább három páratlan multiplicitású gyöke. Ekkor a*

$$t(x) = y^2$$

egyenlet x, y *egész megoldásaira teljesül, hogy* $\max(|x|, |y|) < C_4$*, ahol* C_4 *egy effektíven meghatározható konstans, amely a* t *polinom fokszámától és együtthatóitól függ.*

Bizonyítás. A Lemma 1.2 speciális esete Brindza [13] eredményének.

Következő segéderedményünk is speciális esete egy általános egyenletosztály megoldásaira vonatkozó tételnek. Legyen

$$F(X,Y) = \sum_{i=0}^{s}\sum_{j=0}^{t} a_{i,j}X^iY^j$$

kétváltozós, egész együtthatós polinom, amelynek fokszáma X-ben $s > 0$, Y-ban $t > 0$ és irreducibilis $\mathbb{Q}[X,Y]$-ban.

1.3. Lemma. *Legyen* x *és* y *megoldása az* $F(x,y) = 0$ *egyenletnek és tegyük fel, hogy* $a_{s,j} \neq 0$ *valamely* $j \neq 0$ *indexre. Ekkor*

$$|x| \leq \left((s+1)(t+1)(st+1)^{2/t}h\right)^{2t(st+1)^3}$$

és

$$|y| \leq \left((s+1)(t+1)(st+1)^{2/t}h\right)^{2(st+1)^3}$$

egyenlőtlenségek teljesülnek, ahol $h = \max_{i,j}|a_{i,j}|$.

Bizonyítás. Lásd Grytzuk és Schinzel [30] dolgozatát.

Az ötödik fejezet bizonyításaiban Fujiwara [29] következő eredményét fogjuk használni.

1.4. Lemma. *Legyen* $p(z) = \sum_{i=0}^{n} a_i z^i, a_n \neq 0$*, ahol* $a_i \in \mathbb{R}$ *minden* $i = 0, 1, \ldots, n$ *esetén. Ekkor*

$$\max\{|\zeta| : p(\zeta) = 0\} \leq 2\max\left\{\left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right|, \left|\frac{a_{n-2}}{a_n}\right|^{1/2}, \ldots, \left|\frac{a_0}{a_n}\right|^{1/n}\right\}.$$

2. fejezet

Poligonális és piramidális számok egyenlő értékei

Tekintsük az alábbi fejezetben a poligonális és piramidális számokat. Amint azt a Bevezetésben is írtuk, az

$$f_{k,m}(X) = \frac{X(X+1)\cdots(X+k-2)((m-2)X+k+2-m)}{k!} \tag{2.1}$$

polinom $k = 2$ esetben a poligonális, míg $k = 3$ esetén a piramidális számokat jelöli (k-dimenzióban az X-edik m-gonális, illetve m-piramidális számot). Azaz

$$Pyr_m(X) = f_{3,m}(X) \qquad \text{és} \qquad Pol_m(X) = f_{2,m}(X).$$

2.1. Eredmények

Első tételünk a piramidális és poligonális számok közös értékeire vonatkozik, amely Brindza, Pintér és Turjányi egy 1998-as sejtését [16] bizonyítja, miszerint csak egyetlen olyan eset létezik, amikor végtelen sok egyenlő értéke van a megfelelő piramidális és poligonális számoknak.

2.1. Tétel. *Ha* $(m,n) \neq (5,4)$, *akkor a*

$$Pyr_m(x) = Pol_n(y) \tag{2.2}$$

egyenletnek csak véges sok x, y *egész megoldása van, és ezekre a megoldásokra* $\max(|x|,|y|) < C_5$ *teljesül, ahol* C_5 *effektíven kiszámítható, az* m *és* n *paraméterektől függő korlát.*

Megjegyzés. Az $(m,n) = (5,4)$ számpárt behelyettesítve a (2.2) egyenletbe, az $x^2(x+1)/2 = y^2$ egyenletet kapjuk, amelyről könnyen belátható, hogy végtelen sok (x,y) megoldása van.

2.2. Bizonyítás

A 2.1. Tétel bizonyítása

Az $f_{3,m}(x) = f_{2,n}(y)$ egyenlet a $z = 2(m-2)(n-2)x$ és $v = (m-2)(n-2)(2(n-2)y-(n-4))$ transzformációkkal a következő alakban adható meg:
$f_{m,n}(z) =$

$$z^3+6(n-2)z^2-4(m-5)(m-2)(n-2)^2z+6(m-2)^2(n-2)^2(n-4)^2 = 6v^2.$$

Ennek az egyenletnek pontosan akkor lesz véges sok megoldása z-ben és v-ben, ha az $f_{m,n}(X)$ polinom diszkriminánsa nem nulla, azaz a polinomnak csak egyszeres gyökei vannak. Az $f_{m,n}$ polinom diszkriminánsa
$D(f_{m,n}) =$

$$\begin{aligned}4(n-2)^4(m-2)^2[64n^2-256n+256)m^4+(-1088n^2+4352n-4352)m^3+\\ +(-9984n^2+14016n-243n^4-14016+3240n^3)m^2+\\ +(-11016n^3+28912n^2-27520n+972n^4+27520)m+\\ +4048n^2-78400n-972n^4+7776n^3+78400].\end{aligned}$$

Jelölje a szögletes zárójelben lévő kétváltozós polinomot $F(X,Y)$. Könnyen ellenőrizhető a MAPLE programcsomag segítségével, hogy $F(X,Y)$ irreducibilis $\mathbb{Q}[X,Y]$-ban, továbbá az $X \longmapsto X+4$ és $Y \longmapsto Y+4$ helyettesítésekkel a polinom magassága, azaz együtthatói abszolút értékeinek maximuma 78400-ról 1344-re csökken. Tegyük fel, hogy az (m,n) pár gyöke az $F(m,n)=0$ egyenletnek. Az 1.3 Lemma következménye, hogy

$$m \leq 1.013 \cdot 10^{50521}$$

és

$$n \leq 1.05 \cdot 10^{202084}.$$

Természetesen a fenti intervallumokban az összes szóba jöhető (m,n) párt lehetetlen kipróbálni. Bizonyításunk a Pell-egyenletek megoldásai közötti exponenciális hézagon alapszik. Tegyük fel, hogy az $f_{m,n}(X)$ polinomnak van egy α többszörös gyöke. Két esetet különböztetünk meg. Ha α háromszoros gyök, akkor
$(X-\alpha)^3 =$

$$X^3+6(n-2)X^2-4(m-5)(m-2)(n-2)^2X+6(m-2)^2(n-2)^2(n-4)^2 =$$

$$= X^3-3\alpha X^2+3\alpha^2X-\alpha^3,$$

amiből $\alpha = 2(2-n)$ és $m^2-7m+13=0$ adódik, viszont ez nem teljesülhet egész m-re. Ha α kétszeres gyök, β egyszeres, akkor egyrészt α és β racionális egészek, másrészt α gyöke az $f_{m,n}(X)$ polinom deriváltjának, azaz

$$3\alpha^2+12(n-2)\alpha-4(m-5)(m-2)(n-2)^2 = 0. \tag{2.3}$$

Mivel α egész, ezért a másodfokú egyenlet diszkriminánsának teljes négyzetnek kell lenni, így

$$3(m-5)(m-2)+9 = A^2,$$

ahol A racionális egész. Ebből az egyenletből a

$$3 + (m-5)(m-2) = 3A_1^2$$

és a

$$(2m-7)^2 + 3 = 3(2A_1)^2$$

átalakítások után a

$$(2A_1)^2 - 3B^2 = 1 \tag{2.4}$$

összefüggést kapjuk, ahol $A = 3A_1$ és $2m - 7 = 3B$. Ismert, hogy a (2.4) egyenlet összes megoldása

$$A_1 = \frac{(2+\sqrt{3})^u + (2-\sqrt{3})^u}{4}, u \text{ páratlan}$$

és

$$B = \frac{(2+\sqrt{3})^u - (2-\sqrt{3})^u}{2\sqrt{3}}$$

alakban írható fel. Az m-re adott felső becslésből az $u \leq 88382$ korlátot kapjuk. A (2.3) egyenletet α-ra megoldva a két gyök

$$\alpha_{1,2} = \frac{2}{3}(n-2)(-3 \pm A).$$

Behelyettesítve az α-ra kapott értékeket az $f_{m,n}(X)$ polinomba és leosztva $(n-2)^2$-nel, egy másodfokú egyenletet kapunk n-ben

$$16(A-3)(-3m+12+A)(3m-9+A)(A^2+3mA-3A+45m-108)(-3m+3+A)$$

és

$$16(A+3)(3m-12+A)(-3m+9+A)(A^2-3mA+3A+45m-108)(3m-3+A)$$

diszkriminánsokkal. Mivel n racionális egész, A és m csak u értékétől függ, így u összes szóba jöhető értékére leellenőrizzük, hogy a diszkriminánsok teljes négyzetet alkotnak-e. Ezt a MAPLE `issqr` beépített függvényével hajtjuk végre, a számolási idő 4 órától kevesebb egy négymagos személyi számítógépen. A számolás mutatja, hogy az első diszkrimináns $m = 5$-re, a második $m = 26$-ra teljes négyzet, azonban a második esetben a megfelelő másodfokú, $\mathbb{Q}$ felett reducibilis polinom gyökei nem egészek. Az első esetben $n = 4$. Végül tételünk bizonyítását az 1.1 Lemma teszi teljessé.

3. fejezet

Mordell eredményének általánosítása figurális számokkal

Mordell, a már említett, klasszikus eredményében binomiális együtthatók összegének hatványértékét vizsgálta, amely az

$$\binom{x}{3}+\binom{x}{2}+\binom{x}{1}+\binom{x}{0}=y^2 \tag{3.1}$$

diofantikus egyenlettel írható fel. Könyvében [56, 27. fejezet] az $x = -1, 0, 2, 7, 15, 74$ egész megoldásokat adta meg. A (3.1) egyenletet végül egymástól függetlenül Ljunggren [50] és Bremner [12] oldotta meg, megmutatva, hogy a Mordell átal említett megoldásokon kívül az egyenletnek még egy megoldása van, az $x = 767$.

3.1. Eredmények

Ezt az eredményt a figurális számokra kiterjesztve vizsgáljuk a következő egyenletet, amelynek a megoldásaira effektív végességi állítást bizonyítunk. A tételben szereplő $f_{2,m}(X)$ polinom továbbra is a poligonális, míg az $f_{3,m}(X)$ polinom a piramidális számokat jelöli.

3.1. Tétel. *Legyenek adottak m és n pozitív egészek, ahol $m \geq 3, n \geq 3$ és $(m,n) \neq (50,3),(50,6)$. Ekkor az*

$$f_{3,m}(x-2) + f_{2,m}(x-1) + x + 1 = f_{2,n}(y) \tag{3.2}$$

egyenlet minden x és y megoldására teljesül, hogy $\max(x,y) < C_6$, ahol C_6 egy effektíven meghatározható konstans, amely csak az m és n értékektől függ.

Megjegyzés. A kivételes esetekben, amikor $(m,n) = (50,3)$ és $(50,6)$, akkor a

$$(16x+1)(2x-3)^2 = (2y+1)^2$$

és

$$(16x+1)(2x-3)^2 = (4y-1)^2$$

egyenletet kapjuk. Könnyen belátható, hogy végtelen sok egész (x,y) pont található ezeken a görbéken. A kivételes pároktól eltekintve, a (3.2) egyenletet elliptikus görbévé alakítva Baker klasszikus eredményét tudjuk használni (lásd 1.1 Lemma), így elég garantálnunk azt, hogy a megfelelő harmadfokú polinomok diszkriminánsai nullától különböznek.

Megjegyzés. Könnyen ellenőrizhető, hogy a (3.2) egyenlet az $(m,n) = (3,4)$ speciális esetben Mordell eredeti (3.1) egyenletét adja vissza az alábbiak alapján:

$$f_{3,3}(x) = \binom{x+2}{3}, \quad f_{2,3}(x) = \binom{x+1}{2}, \quad f_{2,4}(x) = x^2.$$

3.2. Bizonyítás

Az 3.1. Tétel bizonyítása

A (3.2) egyenletet alakítva adódik, hogy

$$F_{m,n}(x) = 8(n-2)\left(f_{3,m}(x-2) + f_{2,m}(x-1) + x + 1\right) + (n-4)^2 = z^2,$$

ahol $z = (2(n-2)y + 4 - n)$. Jelölje az $F_{m,n}(x)$ diszkriminánsát x-ben

$$D(F_{m,n}) = \frac{16}{81}(n-2)^2 \cdot (64n^2m^4 - 256nm^4 + 256m^4 - 2240n^2m^3 - 8960m^3$$
$$+8960nm^3 + 27456m^2 - 27456nm^2 - 243n^4m^2 + 15936n^2m^2$$
$$-4536n^3m^2 - 20864m + 972n^4m + 20864nm + 23976n^3m - 53168n^2m$$
$$-4672n + 4672 - 31104n^3 + 63376n^2 - 972n^4) =$$
$$= \frac{16}{81}(n-2)^2 \cdot D(m,n).$$

Ha a diszkrimináns nulla, akkor az $F_{m,n}(X)$-nek létezik egy többszörös multiplicitású racionális α gyöke, amely így az

$$F'_{m,n}(X) = \frac{4}{3}(n-2)\left((3m-6)X^2 + (18-6m)X + 2m - 1\right)$$

polinomnak is gyöke. Elegendő a $(3m-6)x^2 + (18-6m)x + 2m - 1 = 0$ egyenlet

$$\alpha_{1,2} = \frac{3m - 9 \pm \sqrt{3m^2 - 39m + 75}}{3(m-2)}$$

gyökeit vizsgálni. Így adódik, hogy a $3m^2-39m+75$ érték biztosan teljes négyzet. A következő lépésben a

$$3m^2-39m+75=k^2$$

általánosított Pell-egyenletet vizsgáljuk, ahol m és k egészek. Látható, hogy $3|k$, vagyis legyen $k=3k_1$, ahol $k_1\in\mathbb{Z}$. Az egyenlet így felírható

$$(2m-13)^2-3(2k_1)^2=69$$

alakban, amelyet tovább alakítva jutunk az

$$X^2-3Y^2=69 \tag{3.3}$$

egyenlethez, ahol az új változók $X=2m-13$ és $Y=2k_1$. A Pell-egyenletek elméletéből adódik, hogy ha a (3.3) egyenletnek az (X_0,Y_0) alapmegoldása, akkor minden további egész megoldás ebből megadható az

$$X+Y\sqrt{3}=(X_0+Y_0\sqrt{3})(V_j+U_j\sqrt{3})=(X_0+Y_0\sqrt{3})\beta^j \tag{3.4}$$

alakban, ahol $j\in\mathbb{Z}$, $\beta=2+\sqrt{3}$ alapegység a megfelelő $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ számtestben, valamint V_j és U_j az egész megoldásai az alábbi Pell-egyenletnek

$$V^2-3U^2=1. \tag{3.5}$$

Esetünkben két alapmegoldása van a (3.3) egyenletnek, $(X_0,Y_0)=(9,2)$ és $(12,5)$. Megjegyezzük, hogy $12+5\sqrt{3}=(9-2\sqrt{3})\beta$, így a (3.3) egyenlet minden egész megoldása megadható az alábbi alakban:

$$X+Y\sqrt{3}=(9\pm 2\sqrt{3})(V_j+U_j\sqrt{3})=(9V_j\pm 6U_j)+(\pm 2V_j+9U_j)\sqrt{3},\ j\in\mathbb{Z}.$$

Tudjuk, hogy $2m - 13 = X = 9V_j \pm 6U_j$, így $2m = 9V_j \pm 6U_j + 13$, amiből adódik, hogy $2 \nmid V_j$. Továbbá, a (3.4) összefüggésből látható, hogy V_j akkor páratlan, ha j páros, azaz legyen $j = 2t$. Ekkor felhasználva, hogy $V_t^2 - 3U_t^2 = 1$ és a

$$V_t^2 + 3U_t^2 + \sqrt{3} \cdot 2V_tU_t = (V_t + U_t\sqrt{3})^2 = V_{2t} + U_{2t}\sqrt{3},$$

egyenlőséget, azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} 2m &= 9V_{2t} \pm 6U_{2t} + 13 = 9(V_t^2 + 3U_t^2) \pm 6 \cdot 2V_tU_t + 13(V_t^2 - 3U_t^2) \\ &= 22V_t^2 \pm 12V_tU_t - 12U_t^2. \end{aligned}$$

Továbbá,

$$2k_1 = Y = \pm 2V_{2t} + 9U_{2t} = \pm 2(V_t^2 + 3U_t^2) + 9 \cdot 2V_tU_t = \pm 2V_t^2 + 18V_tU_t \pm 6U_t^2.$$

Legyen $v = V_t$ és $u = \pm U_t = U_{\pm t}$. Ebből felírhatjuk, hogy

$$m = 11v^2 + 6vu - 6u^2, \quad \pm k_1 = v^2 + 9vu + 3u^2. \tag{3.6}$$

Legyen $K = \pm k$. Behelyettesítve az $\alpha_{1,2} = \frac{3m-9\pm k}{3(m-2)} = \frac{3m-9+K}{3(m-2)}$ kifejezést az $F_{m,n}(x) = 0$ egyenletbe egy kvadratikus egyenletet kapunk n-ben, amelynek diszkriminánsa

$$\Delta = 16(3m - 9 + K)(-3mK + 63m - 144 + 9K + K^2)\times$$

$$\times(K^3 + 117mK - 9m^2K - 225K + 351m^2 - 1647m + 1944). \tag{3.7}$$

Beírva a (3.6) kifejezést a (3.7) egyenletbe tekintettel arra, hogy $1 = v^2 - 3u^2$, az adódik, hogy

$$\Delta = 2^4 \cdot 3^{12}(v + u)^2(3v + 2u)^4(2v^2 - 4vu - u^2)(4v^4 - 13v^2u^2 - 6vu^3 - u^4).$$

Legyen

$$P = 2v^2 - 4vu - u^2 \quad \text{és} \quad Q = 4v^4 - 13v^2u^2 - 6vu^3 - u^4.$$

Ellenőrizhető, hogy P és Q negatív, ha $(\pm t) \geq 1$ és pozitív $(\pm t) \leq 0$ esetén.

Ha Δ négyzet, akkor PQ is az. Vizsgálva a P és Q legnagyobb közös osztóját, azt kapjuk, hogy

$$2Q \equiv (16v + 3u)u^3 \pmod{P},$$

$$128P \equiv -23u^2 \pmod{16v + 3u},$$

így

$$D = (P, Q) | (P, 2Q) = ((16v + 3u)u^3, P).$$

Mivel $(u, P) = (u, 2v^2 - 4vu - u^2) = 1$,

$$D \mid (16v + 3u, P) \mid (16v + 3u, 128P) = (16v + 3u, 23u^2)$$

$$(16v + 3u, 23u^2) \mid (16v + 3u, 23)(16v + 3u, u^2) \mid 2^8 \cdot 23.$$

Vagyis létezik egy R egész úgy, hogy

$$P = 6v^2 - (2v + u)^2 = (-1)^\varepsilon 2^\delta 23^\eta R^2, \quad \varepsilon, \delta, \eta \in \{0, 1\}, \tag{3.8}$$

ahol $\varepsilon = 0$ $u \leq 0$ esetén és $\varepsilon = 1$, ha $u \geq 1$.

Ha $P \equiv 0 \pmod{23}$, akkor

$$6v^2 \equiv (2v + u)^2 \pmod{23}, \tag{3.9}$$

amiből következik, hogy $\pm 11v \equiv 2v + u \pmod{23}$. Ezek alapján

$$u \equiv 9v \pmod{23} \quad \text{vagy} \quad u \equiv 10v \pmod{23}.$$

Ha $u \equiv 9v \pmod{23}$, akkor

$$1 = v^2 - 3u^2 \equiv -242v^2 \equiv 11v^2 \pmod{23},$$

vagyis a $\left(\frac{11}{23}\right)$ Legendre-szimbólum értéke -1, ami a fenti sorból adódóan ellentmondás.
Ha $u \equiv 10v \pmod{23}$, akkor

$$1 = v^2 - 3u^2 \equiv -299v^2 \equiv 0 \pmod{23},$$

ami szintén lehetetlen, vagyis a $23 \mid P$ feltételből kiindulva mindkét esetben ellentmondásra jutunk. Így $23 \nmid P$.

Meg kell tehát oldani a

$$P = 6v^2 - (2v+u)^2 = (-1)^{\varepsilon} 2^{\delta} R^2, \quad \varepsilon, \delta, \in \{0,1\} \tag{3.10}$$

egyenletet. Belátható, hogy $3 \nmid (2v+u)$, máskülönben $3|R$ és így $9|6v^2$ teljesülne. Az a feltétel viszont, hogy $3|v$ ellentmond annak, hogy $v^2 - 3u^2 = 1$. Modulo 3 vizsgálva a fenti egyenletet adódik, hogy

$$-1 = \left(\frac{-1}{3}\right) = \left(\frac{-(2v+u)^2}{3}\right) = \left(\frac{(-1)^{\varepsilon} 2^{\delta} R^2}{3}\right)$$
$$= \left(\frac{-1}{3}\right)^{\varepsilon} \left(\frac{2}{3}\right)^{\delta} = (-1)^{\varepsilon+\delta},$$

ahol $\left(\frac{a}{p}\right)$ a Legendre-szimbólumot jelöli.

Azt mondhatjuk tehát, hogy $\varepsilon + \delta = 1$, ami alapján két részre bontjuk a (3.10) egyenlet vizsgálatát.

I. eset: $\varepsilon = 1, \delta = 0$

Ebben az esetben a (3.10) egyenlet felírható

$$6v^2 - (2v + u)^2 = -R^2 \tag{3.11}$$

alakban. Ha $2|u$, akkor $2 \nmid v$, továbbá $-R^2 \equiv 2 \pmod 4$, ami lehetetlen. Vizsgáljuk tehát azt, ha $2 \nmid u$. Ez alapján mondhatjuk, hogy $2 \nmid R$ és amint korábban láttuk, $3 \nmid R$, így a $\gcd(2v + u, R) = 1$ összefüggés teljesül. A (3.11) egyenletből kapjuk, hogy

$$(2v + u + R)(2v + u - R) = 6v^2.$$

Ekkor léteznek G és H egészek úgy, hogy

$$2v + u + R = 2c_1G^2, \quad 2v + u - R = 2c_2H^2, \quad v = 2GH, \quad c_1c_2 = 6.$$

Ebből következik, hogy

$$u = c_1G^2 + c_2H^2 - 4GH.$$

Ezt behelyettesítve a $v^2 - 3u^2 = 1$ kifejezésbe a

$$-3c^2G^4 + 24cG^3H - 80G^2H^2 + \frac{144}{c}GH^3 - \frac{108}{c^2}H^4 = 1$$

egyenlet adódik, ahol $c \in \{1, 2, 3, 6\}$. Vegyük az $(X, Y) = (G, H)$ párt $c = 1$ vagy 2 esetén, $(X, Y) = (H, G)$ egyenlőség mellett pedig $c = 3$ vagy 6. Két negyedfokú Thue-egyenletet kapunk

$$-3X^4 + 24X^3Y - 80X^2Y^2 + 144XY^3 - 108Y^4 = 1, \text{ ha } c = 1, 6 \tag{3.12}$$

és

$$-12X^4 + 48X^3Y - 80X^2Y^2 + 72XY^3 - 27Y^4 = 1, \text{ ha } c = 2, 3. \tag{3.13}$$

A MAGMA (és PARI/GP) programcsomagot használjuk, hogy megoldjuk a fenti Thue-egyenleteket. A (3.12) Thue-egyenletnek nincs egész (X, Y) megoldása. A (3.13) egyenlet összes egész megoldása az $(X, Y) = (1, 1)$ és $(-1, -1)$. Ebből következik, hogy

$$v = 2GH = 2XY = 2 \qquad \text{és} \qquad u = 2X^2 + 3Y^2 - 4XY = 1.$$

Behelyettesítve az $m = 11v^2 + 6vu - 6u^2 = 50$ értéket a $D(m, n) = 0$ egyenletbe, azt kapjuk, hogy

$$-1296(n-3)(n-6)(432n^2 + 11737n - 23474) = 0.$$

Így $(m, n) = (50, 3)$ és $(50, 6)$.

II. eset: $\varepsilon = 0, \delta = 1$
Ebben az esetben a (3.10) egyenlet felírható

$$6v^2 - (2v + u)^2 = 2R^2 \tag{3.14}$$

alakban. Könnyen látható, hogy $2|u$. Továbbá,

$$R^2 + 2(v + u/2)^2 = 3v^2.$$

Az $1 = v^2 - 3u^2$ alapján, ha $2 \mid u$, akkor $2 \nmid v$, ami azt jelenti, hogy $2 \nmid R$. Miként korábban beláttuk $3 \nmid v$, ezért $\gcd(R, v + u/2) = 1$. Ezek alapján adódik, hogy

$$(R + (v + u/2)\sqrt{-2}, R - (v + u/2)\sqrt{-2}) | (2R, (v + u/2)\sqrt{-2}) = \sqrt{-2}.$$

Viszont v páratlan, továbbá a legnagyobb közös osztója az $R + (v + u/2)\sqrt{-2}$-nek és konjugáltjának 1. Az egyenlet $\mathbb{Q}(\sqrt{-2})$ feletti felbontásából következik, hogy

$$R + (v + u/2)\sqrt{-2} = \pm(1 \pm \sqrt{-2})(G + H\sqrt{-2})^2$$

valamely egész G, H esetén. Ezt kifejezve azt kapjuk, hogy

$$v + u/2 = \pm(G^2 \pm 2GH - 2H^2)$$

és

$$v = G^2 + 2H^2.$$

Mivel $v^2 > 3u^2$ és $v > 0$, ezért $v + u/2 > 0$. Legyen $(X, Y) = (G, \pm H)$, ekkor

$$u/2 = |X^2 + 2XY - 2Y^2| - (X^2 + 2Y^2), \quad v = X^2 + 2Y^2.$$

Ezt behelyettesítve a $v^2 - 3u^2 = 1$ értékbe az alábbi Thue-egyenleteket kapjuk:

$$X^4 - 44X^2Y^2 + 192XY^3 - 188Y^4 = 1 \tag{3.15}$$

és

$$-47X^4 - 96X^3Y - 44X^2Y^2 + 4Y^4 = 1. \tag{3.16}$$

A MAGMA (és PARI/GP) programokat használva azt látjuk, hogy nincs egész (X, Y) megoldása a (3.16) egyenletnek. Míg a (3.15) egyenlet összes egész megoldásai az $(X, Y) = (\pm 1, 0)$ párok. Ebből az következik, hogy $u = 0$ és $v = 1$, továbbá $m = 11$. Beírva ezt az m értéket a $D(m, n) = 0$ egyenletbe ahhoz jutunk, hogy

$$-81(n^2 + 8n - 16)(243n^2 + 1960n - 3920) = 0.$$

A fenti egyenletnek nincs egész megoldása.

Végül, ha $(m,n) \neq (50,3),(50,6)$, látható, hogy az $F_{m,n}(x)$ harmadfokú polinomnak egész együtthatói vannak, illetve a diszkriminánsa nem nulla. Az 1.1. Lemmát használva a 3.1. Tétel bizonyítása teljessé válik.

4. fejezet

Figurális számok egyenlő értékei

4.1. Eredmények

A fejezet első állításai az

$$f_{k,m}(x) = f_{2,n}(y) \tag{4.1}$$

egyenlettel foglalkoznak, amely az általános alakban megadott figurális számok és poligonális számok közös értékeit vizsgálja, effektív végességi állításokat megfogalmazva.

4.1. Tétel. *Legyenek m, n, k egész számok, amelyekre teljesül, hogy $k \geq 3$ és $(m, n, k) \neq (5, 4, 3), (6, 4, 4)$. Ha k páros, akkor tegyük fel továbbá, hogy $k!D$ nem r^2 vagy $2r^2$ alakú, ahol $D = \gcd(k!(n-4)^2, 8d(n-2))$ és $d = \gcd(k, m-2)$. Ekkor a (4.1) egyenletnek csak véges sok x, y megoldása van, amelyek effektív módon meghatározhatók.*

Megjegyzés. Ha $(m, n, k) = (5, 4, 3), (6, 4, 4)$, akkor könnyen belátható, hogy a (4.1) egyenletnek végtelen sok x, y megoldása van.

Az alábbi állítás a tétel következménye.

4.1. Következmény. *Legyenek m, n, k egészek és $k \geq 4$. Ha k páros, akkor tegyük fel továbbá, hogy létezik egy p prím, amely $k/2 < p < k$, ahol $p \nmid n-2$. Ekkor a (4.1) egyenletnek csak véges sok x, y megoldása van, amelyek effektív módon meghatározhatók.*

Megjegyzés. Ha $k > 2n$, akkor a 4.1 Következmény teljesül. A Bertrand-posztulátum garantálja a megfelelő p prím létezését $k/2 < p < k$ között. Mivel $p > k/2 > n > n-2$, van olyan prím, amelyre teljesül, hogy $p \nmid n-2$.

4.2. Tétel. *Tegyük fel, hogy $k \geq 3, m \geq 3, n \geq 14$ egészek, amelyekre teljesül, hogy*

$$10m - 26 \leq n.$$

Ekkor a (4.1) egyenletnek csak véges sok x, y megoldása van, amelyek effektív módon meghatározhatók.

A következő tételben Erdős [26, 27] bizonyítását fogjuk felhasználni, amelyek segítségével diofantikus egyenletek egy végtelen családjára adunk megoldást.

4.3. Tétel. *A $k \geq 5$, $x \geq k-2$ és $y \geq 1$ egészek körében az*

$$f_{k,k+2}(x) = f_{2,4}(y) \tag{4.2}$$

egyenletnek a $(k, x, y) = (5, 47, 3290)$ számhármas az egyetlen megoldása.

Megjegyzések. $k = 5$ esetén a tétel következik Meyl [55] klasszikus eredményéből. Az összes egész x, y és k megoldása az

$$\binom{x+k-1}{k} = f_{k,3}(x) = f_{2,4}(y) = y^2$$

alakú parametrikus családnak a diofantikus egyenletek körében Győry [33] azon eredményére vezethető vissza, amelyben a binomiális együtthatók hatványértékét vizsgálja.

4.2. Egy segédtétel és bizonyítása

A 4.1. Tétel bizonyítása során felhasználjuk az alábbi, a bizonyításban szükségesnél többet mondó eredményt.

4.4. Propozíció. *Legyen $t \geq 0$ egész és $P_t(x) = x(x+1)\dots(x+t)$. Legyen $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ és $v \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ úgy, hogy $g(x) := P_t(x)f(x)+v$ primitív polinomot alkosson.*

- *Ha $t \geq 3$ és $\deg(g)$ páratlan, akkor $g(x)$-nek van legalább három páratlan multiplicitású gyöke.*
- *Ha $t \geq 2$, $\deg(g)$ páros és v nem $\pm r^2$ vagy $\pm 2r^2$ alakú, akkor $g(x)$-nek van legalább három páratlan multiplicitású gyöke.*
- *Legyen $\ell \geq 3$. Ha $t \geq 3$ és $\deg(f) < (t+1)(\ell-1)$, akkor $g(x)$-nek van legalább két olyan gyöke, amelyek multiplicitása nem osztható ℓ-lel.*

A 4.4. Propozíció bizonyítása

Az első rész bizonyításához tegyük fel, hogy $\deg(g)$ páratlan, de háromnál kevesebb páratlan multiplicitású gyöke van. Ekkor felírható

$$P_t(x)f(x) + v = (h(x))^2(ax + b)$$

alakban valamely $h \in \mathbb{Z}[x]$ és $a, b \in \mathbb{Z}$ esetén. Továbbá, $a \neq 0$ és mivel g primitív polinom, azt kapjuk, hogy $\gcd(a, b) = 1$. Mivel $0, -1, -2$ és -3 a

$P_t(x)$ polinom gyökei, így

$$(h(0))^2 b = (h(-1))^2(b-a) = (h(-2))^2(b-2a) = (h(-3))^2(b-3a).$$

Tudjuk, hogy $v \neq 0$, ezért a fenti értékek egyike sem lehet nullával egyenlő, valamint $\gcd(a,b)=1$, amiből következik, hogy vagy b, $b-a$, $b-2a$, $b-3a$ vagy $-b, a-b, 2a-b, 3a-b$ mindegyike négyzetszám. Azonban Euler és Fermat ([23], pp. 440 és 635) klasszikus eredménye szerint, négy különböző négyzetszám nem lehet ugyanannak a számtani sorozatnak a tagja. Így ellentmondásra jutottunk és az állításunk igazolást nyert ebben az esetben.

A második eset bizonyításához fel kell tennünk, hogy $\deg(g)$ páros, de háromnál kevesebb páratlan multiplicitású gyöke van. Mivel v nem négyzet, felhasználva a feltételt, azt kapjuk, hogy $g(x)$ nem lehet (egész) konstans számú többszöröse egy $\mathbb{Z}[x]$-beli polinom négyzetének. Vagyis, az egyetlen lehetséges felírás

$$P_t(x)f(x) + v = (h(x))^2(ax^2 + bx + c)$$

alakban adható meg, ahol $h \in \mathbb{Z}[x]$ és $a,b,c \in \mathbb{Z}$. Továbbá, $a \neq 0$ és ismét felhasználva, hogy g primitív, azt kapjuk, hogy $\gcd(a,b,c)=1$. A feltétel szerint $t \geq 2$, így most a

$$(h(0))^2 c = (h(-1))^2(a-b+c) = (h(-2))^2(4a-2b+c) = v$$

lehetőséget kell vizsgálnunk. Mivel $v \neq 0$, a fenti értékek ismét nem lehetnek nullával egyenlők. Egyszerű számításokkal jutunk ahhoz, hogy

$$\gcd(c, a-b+c, 4a-2b+c) = 1,\ 2.$$

Tegyük fel, hogy létezik egy páratlan q prím, amely páratlan hatványkitevővel szerepel c felbontásában. Ekkor a fenti egyenlőségeket figyelembe véve megállapíthatjuk, hogy q páratlan hatványkitevővel jelenik meg a v

felbontásában is, amiből következik, hogy $q \mid a - b + c$ és $q \mid 4a - 2b + c$. Azonban ez lehetetlen. Vagyis, c-re teljesül, hogy $\pm r^2$ vagy $\pm 2r^2$ alakú és ez v-re is fennáll, ami viszont ellentmondás. Ezzel az állításunk második esete is bizonyítást nyert.

A harmadik eset bizonyításához tegyük fel indirekt, hogy $g(x)$-nek legfeljebb egy olyan gyöke van, amelynek multiplicitása nem osztható ℓ-lel. Vizsgáljuk meg elsőként azt, amikor $g(x)$-nek nincs ilyen gyöke, azaz egy ℓ-edik hatvány $\mathbb{Z}[x]$-ben. Ekkor azt kapjuk, hogy

$$P_t(x)f(x) + v = (h(x))^\ell$$

valamely $h \in \mathbb{Z}[x]$ esetén. Jelölje rendre F és H az f és h polinomok fokszámát. Egyrészt felírhatjuk, hogy

$$t + 1 + F = \ell H.$$

Másrészről, a feltevésünkből adódik, hogy

$$F < (t + 1)(\ell - 1).$$

A két kifejezést összevetve a $H < t + 1$ megállapítás adódik. Továbbá, tudjuk, hogy

$$h(0) = h(-1) = \cdots = h(-t) = v,$$

ami azt jelenti, hogy h polinom ugyanazt az értéket veszi fel $t+1$ különböző helyen. Így adódik az, hogy $h(x)$ az azonosan konstans polinom. Ez pedig ellentmondás, vagyis harmadik állításunk ezen része bizonyítást nyert.
Végül vizsgáljuk meg azt a lehetséges felírást, amikor

$$P_t(x)f(x) + v = (h(x))^\ell (ax + b)^s$$

valamely $h \in \mathbb{Z}[x]$, $a, b \in \mathbb{Z}$ esetén, ahol $\gcd(a, b) = 1$ és az s-re teljesül, hogy $1 \leq s < \ell$. Mivel $t \geq 3$, azt kapjuk, hogy

$$(h(0))^\ell b^s = (h(-1))^\ell (b-a)^s = (h(-2))^\ell (b-2a)^s = (h(-3))^\ell (b-3a)^s.$$

Továbbá tudjuk, hogy $\gcd(a,b) = 1$, így hasonlóan az $\ell = 2$ esethez, az teljesül, hogy

$$b^s, (b-a)^s, (b-2a)^s, (b-3a)^s$$

mindegyike teljes ℓ-edik hatvány és egy sem nulla. Mivel $s < \ell$ teljesül, ezért

$$b, b-a, b-2a, b-3a$$

teljes ℓ'-edik hatványok, valamely $\ell' = \frac{\ell}{gcd(s,\ell)} \geq 2$ esetén. Darmon és Merel [19] eredményét felhasználva adódik, hogy négy különböző ℓ'-edik hatvány nem alkothat számtani sorozatot. Ezzel az állításunk harmadik esetének bizonyítása is teljessé vált.

4.3. Bizonyítás

A 4.1. Tétel bizonyítása

A (4.1) egyenlet átalakítható a következőképpen:

$$\frac{8(n-2)x(x+1)\dots(x+k-2)((m-2)x+k+2-m)}{k!} + (n-4)^2 = z^2, \tag{4.3}$$

ahol $z = (2(n-2)y + 4 - n)^2$. Az állítás bizonyításához meg kell mutatni, hogy a bal oldalon szereplő $T(x)$ polinomnak van legalább három páratlan multiplicitású gyöke. Ha $n = 4$ teljesül, akkor eltekintve azoktól az esetektől, amikor $(m,k) \in \{(5,3),(6,4)\}$, az állítás nyilvánvaló. A további vizsgálat során feltehetjük tehát, hogy $n \neq 4$.

Legyen $d := \gcd(k, m-2)$ és $D := \gcd(k!(n-4)^2, 8(n-2)d)$. Ekkor $k!T(x)/D$ egy primitív $\mathbb{Z}[x]$-beli polinom, amelynek a konstans része

$k!(n-4)^2/D$. Erre az alakra már alkalmazható a 4.4 Propozíció és ezzel a tételünk bizonyítást nyert.

A 4.1. Következmény bizonyítása

A 4.1 Tétel bizonyítását felhasználva tudjuk, hogy $d \mid k$, amiből adódik, hogy $d = k$ vagy $d \leq k/2$. Továbbá, a $k \geq 4$ feltételből kapjuk, hogy $2 \leq k/2$. Így, ha létezik egy p prím a fenti feltételekkel, akkor egyértelműen megállapítható, hogy p páratlan hatványa osztja a $k!(n-4)^2$ kifejezést, viszont $p \nmid D$. Ezzel az állítás azonnal adódik a 4.1 Tételből.

A 4.2. Tétel bizonyítása

Az (4.1) egyenlet felírható

$$8(n-2)f_{k,m}(X) + (n-4)^2 = z^2 \tag{4.4}$$

alakban, ahol $z = 2(n-2)y + 4 - n$. Tegyük fel, hogy α egy többszörös gyöke a

$$8(n-2)f_{k,m}(X) + (n-4)^2 =$$
$$= \frac{8(n-2)(m-2)}{k!}X(X+1)\dots(X+k-2)\left(X + \frac{k}{m-2} - 1\right) + (n-4)^2$$

polinomnak. Ekkor α gyöke a

$$g(X) := \left(X(X+1)\dots(X+k-2)\left(X + \frac{k}{m-2} - 1\right)\right)'$$

polinomnak is. Ha $1 - \frac{k}{m-2} \notin H := \{0, -1, \dots, -k+2\}$, Rolle tételét használva ellenőrizhető, hogy ezek a gyökök valósak és az $(1-k, 1)$ intervallumba esnek. Az $1 - \frac{k}{m-2} \in H$ esetben ugyanez a tulajdonság igazolható $g(X)$ előjelének vizsgálatával.

Az $m=3$ esetben az állítás Yuan [78] eredményéből következik. Valóban, a (4.4) egyenletet

$$8(n-2)\binom{x+k-1}{k} = z^2 - (n-4)^2 \tag{4.5}$$

alakúra hozva, a cikkben szereplő 1.Tétel alapján meg tudjuk határozni azokat a kivételes (k,n) számpárokat, amelyek esetén a (4.5) egyenletnek végtelen sok megoldása van. Elvégezve a számításokat azt kapjuk, hogy $m=3$ mellett a $(k,n)=(4,5)$ számpár esetén a (4.5) egyenletnek, és így az eredeti (4.1) egyenletnek is végtelen sok x,y megoldása lesz. Ezek után feltehetjük, hogy $m \geq 4$. Vagyis tetszőleges valós $\beta \in (1-k,1)$ esetén az

$$\left|\beta \cdot (\beta+1) \cdot \ldots \cdot (\beta+k-2)\left(\beta + \frac{k}{m-2} - 1\right)\right|$$

szorzat kisebb, mint

$$\left(k-1-\frac{k}{m-2}+1\right)(k-1)! = \frac{m-3}{m-2}k!,$$

vagyis

$$(n-4)^2 = |8(n-2)f_{k,m}(\alpha)| < 8(m-2)(n-2)\frac{m-3}{m-2} = 8(m-3)(n-2).$$

A kapott egyenlőtlenség ellentmondást eredményez, hiszen

$$8(m-3)(n-2) \leq (n-4)^2, \tag{4.6}$$

bizonyítva ezzel, hogy nincs többszörös gyöke a

$$8(n-2)f_{k,m}(X) + (n-4)^2$$

polinomnak. Látható továbbá, hogy a (4.6) egyenlőtlenség nem teljesül

$n < 14$ esetén. A $10m - 26 \leq n$ feltételből következik, hogy $8(m-3)(n-2) \leq (n-4)^2$, ha $n \geq 14$. Végezetül a bizonyításunk az 1.2. Lemma felhasználásával teljessé válik.

A 4.3. Tétel bizonyítása

A (4.2) egyenlet átírható

$$x^2(x+1)\dots(x+k-2) = (k-1)!y^2 \tag{4.7}$$

alakban. Először az Erdős [26] által kidolgozott módszert használjuk azzal a módosítással, hogy a (4.7) egyenlet jobb oldalán lévő $(k-1)!$ faktort is figyelembe vesszük, vagyis írhatjuk, hogy

$$x + i = a_i x_i^2 \quad (i = 1, \dots, k-2), \tag{4.8}$$

ahol a_i négyzetmentes pozitív egész úgy, hogy $P(a_i) \leq k-1$, ahol $P(u)$ jelöli az u legnagyobb prímfaktorát azzal a megegyezéssel, hogy $P(1) = 1$. Először azt bizonyítjuk, hogy az a_i együtthatók páronként különbözők. Tegyük fel indirekt, hogy $a_i = a_j$ teljesül valamely $i < j$ esetén. Ekkor azt kapjuk, hogy

$$k - 2 > (x+j) - (x+i) = a_i x_j^2 - a_i x_i^2 = a_i(x_j^2 - x_i^2) \geq$$

$$\geq a_i((x_i+1)^2 - x_i^2) > 2\sqrt{a_i x_i^2} \geq 2\sqrt{x+1}.$$

Másrészt, mivel $x \geq k-2$, felhasználjuk a Laishram és Shorey [46] cikkében található 1. Következményt, amelynek segítségével explicit módon megadhatunk tizennégy olyan $(x+1, k-2)$ számpárt, amely kivételt képezve teljesíti, hogy az $(x+1)\dots(x+k-2)$ szorzat legnagyobb prímfaktora kisebb, mint $1.8(k-2)$. Könnyen ellenőrizhető, hogy ezek a kivételek nem lesznek a (4.2) egyenlet megoldásai. Valóban, például az $x + 1 = 8$,

$k-2=3$ esetben a szorzat $8 \cdot 9 \cdot 10$ alakban áll elő, ahol a legnagyobb prímfaktor az 5 és $5 < 1.8 \cdot 3$. Ekkor $x=7$ és $k=5$ értékekhez jutunk, viszont ezen számpár esetén nincs olyan egész y, amelyre a (4.2) egyenlet teljesülne. A kimaradó kivételes eseteket hasonló módon ki lehet zárni. Így feltehetjük, hogy a q prímre teljesül, hogy

$$q \mid (x+1)\dots(x+k-2)$$

szorzatot és $q > 1.8(k-2)$. Megjegyezzük, hogy q ekkor pontosan egy $x+i$ tagot oszt ($i = 1, \dots, k-2$). Mivel $k \geq 5$, így $q > k-1$ és q megjelenik az $x+i$ prímfaktorai között legalább második hatványon. Ekkor

$$3.24(k-2)^2 < q^2 \leq x+k-2.$$

Összehasonlítva ezt a korlátot a fenti $k-2 > 2\sqrt{x+1}$ becsléssel tekintettel arra, hogy $x \geq k-2$, ellentmondáshoz jutunk. Ebből következik, hogy $a_i \neq a_j$, ha $i \neq j$.

A bizonyítás következő lépésében azt fogjuk igazolni, hogy az

$$a_1 \cdots a_{k-2} \mid (k-1)!.$$

Ehhez a (4.2) egyenletet átírjuk

$$A := \frac{a_1 \cdots a_{k-2}}{(k-1)!} = \frac{y^2}{z^2}$$

alakba, ahol $z = x \cdot x_1 \cdots x_{k-2}$. Legyen p egy prím és legyen $\nu_p(A) = \alpha$, ahol $\nu_p(A)$ jelöli a p kitevőjét az A prímtényezős felbontásában (azaz A p-adikus rendjét) és megjegyezzük, hogy α negatív is lehet. Ekkor kihasználva, hogy az a_i együtthatók négyzetmentesek és alkalmazva a

Legendre-formulát a faktoriálisok p-adikus rendjére, adódik, hogy

$$\alpha \le \left[\frac{k-2}{p}\right] + 1 - \left[\frac{k-1}{p}\right] \le 1.$$

Mivel α nyilvánvalóan páros, ezért $\alpha \le 0$, amelyből közvetlenül megkapjuk, hogy $a_1 \cdots a_{k-2} \mid (k-1)!$ és

$$a_1 \cdots a_{k-2} \le (k-1)!. \tag{4.9}$$

Ha $5 \le k < 15$, akkor az egyetlen megoldást a $(k, x, y) = (5, 47, 3290)$ számhármas adja, amit az alábbi módon ellenőrizhetünk. Elsőként tekintsük a (4.8) kifejezést, amelyből felírható az

$$(x+1)\cdots(x+k-2) = uv^2, \tag{4.10}$$

egyenlőség, ahol $u = a_1 \cdots a_{k-2}$ és $v = x_1 \cdots x_{k-2}$. Továbbá, $q \mid v$, vagyis a v legnagyobb prímosztója nagyobb, mint $k-2$. Ezt felhasználva Győry [34] eredményéből azt kapjuk, hogy ha $k-1$ nem prím, akkor a (4.10) egyenlet egyetlen megoldása $(x, k, u, v) = (47, 5, 6, 140)$. Ebből adódik, hogy a (4.2) egyenlőség pontosan az $(k, x, y) = (5, 47, 3290)$ számhármas esetén teljesül.

Így feltehetjük, hogy $k-1$ prím, azaz csupán a $k = 6, 8, 12, 14$ eseteket kell ellenőrizni, amelyek vizsgálata hasonlóan működik, ezért elegendő egy konkrét példával illusztrálnunk a megoldás menetét. Válasszuk ki a $k = 6$ értéket. Ekkor a (4.2) egyenlet

$$x^2(x+1)(x+2)(x+3)(x+4) = 120y^2$$

módon áll elő. Leellenőrizve az $x+i$ és $x+j$ legnagyobb közös osztóját ($1 \le i < j \le 4$), megkapjuk az a_1, a_2, a_3 lehetséges értékeit a (4.8) kifejezésben.

Így vizsgálhatjuk az

$$(x+1)(x+2)(x+3) = Az^2$$

elliptikus egyenletet, ahol A négyzetmentes és $z = Bx_1x_2x_3$, ahol $AB^2 = a_1a_2a_3$. Ebből arra az eredményre jutunk, hogy $A \in \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$. MAGMA [11] kódot használva megoldottuk ezeket az egyenleteket, amelyeknek (pontosan) az összes megoldása az alábbiakban látható:

A	(x, z)
5	(7,12)
6	(0,1), (1,2), (47, 140)
15	(2,2)
30	(3,2)

Ezekből a megoldásokból látszik, hogy a (4.2) egyenlet egyetlen megoldása a $(k, x, y) = (5, 47, 3290)$ számhármas.

Tegyük most fel, hogy $k \geq 15$. Mivel az $a_1, \ldots, a_{k-2}$ $k-2$ páronként különböző, négyzetmentes szám, azt kapjuk, hogy

$$a_1 \ldots a_{k-2} \geq 1\cdot 2\cdot 3\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 10\cdot 11\cdot 13\cdot \cdots \cdot (k-1)\cdot k\cdot (k+1)\cdot (k+2) > (k-1)!.$$

A második egyenlőtlenség a $k\cdot(k+1)\cdot(k+2) > 4\cdot 8\cdot 9\cdot 12$ összefüggésből következik, ha $k \geq 15$. Azonban a (4.9) egyenlőtlenséggel ez ellentmondásban áll. Vagyis, a (4.2) egyenletnek nincs megoldása $k \geq 15$ esetén, és így a tétel bizonyítást nyert.

5. fejezet

Az Erdős-Graham probléma

Legyen $f(x,k,d) = x(x+d)\cdots(x+(k-1)d)$. A fejezet motivációjaként szolgált az

$$f(x,k,d) = y^l \tag{5.1}$$

diofantikus egyenlet, ha $x \geq 1$ és $k \geq 2$, valamint ennek általánosítása, nevezetesen az

$$\prod_{i=1}^{r} f(x_i, k_i, 1) = y^2 \tag{5.2}$$

egyenlet rögzített $r \geq 1$ és $\{k_1, k_2, \ldots, k_r\}$ esetén, ahol $k_i \geq 4$, $i = 1, 2, \ldots, r$, ha $x_i + k_i \leq x_{i+1}$ minden i-re, ahol $1 \leq i \leq r-1$. A Bevezetésben már láttuk, hogy a kérdés jelentős szakirodalommal bír, így áttérünk az általunk vizsgált egyenletekre.

5.1. Eredmények

A fejezet első tétele az

$$\frac{x(x+1)(x+2)(x+3)}{(x+a)(x+b)} = y^2$$

diofantikus egyenlettel foglalkozik, ahol $a, b \in \mathbb{Z}, a \neq b$ paraméterek. Az állítást és a hozzá kapcsolódó bizonyítást is két esetre bontottuk, attól függően, hogy a és b paritása megegyezik-e vagy sem.

Kiterjesztve ezt az eredményt, a fejezet további részében az

$$\frac{x(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)(x+5)}{(x+a)(x+b)} = y^2,$$

$$\frac{x(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)(x+5)}{(x+a)(x+b)(x+c)} = y^3,$$

$$\frac{x(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)(x+5)}{(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)} = y^2$$

diofantikus egyenleteket vizsgáljuk, ahol $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ páronként különböző egészek úgy, hogy $a, b, c, d \notin \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. Ezen egyenletek megoldásaira sikerült korlátot nyernünk, amelyeket az 5.2, 5.3 és 5.4 tételekben mutatunk be.

5.1. Tétel. *(I) Legyen $a \equiv b \pmod 2$. Ha $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ megoldása az*

$$\frac{x(x+1)(x+2)(x+3)}{(x+a)(x+b)} = y^2 \tag{5.3}$$

diofantikus egyenletnek, akkor

$$|x| \leq \max\{|A_2|, |A_1|^{1/2}, |A_0|^{1/3}, |B_2|, |B_1|^{1/2}, |B_0|^{1/3}, |\frac{1}{4}(a+b-6)^2 ab|\},$$

ahol

$$\begin{aligned}
A_2 &= \frac{3}{4}a^2 + \frac{1}{2}ab + \frac{3}{4}b^2 - 2a - 2b + 7\\
A_1 &= -\frac{1}{4}a^3 + \frac{1}{4}a^2b + \frac{1}{4}ab^2 + 2a^2 - \frac{1}{4}b^3 + 2b^2 - 4a - 4b + 6\\
A_0 &= -\frac{1}{4}(a+b-4)^2 ab
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_2 &= \frac{3}{4}\,a^2 + \frac{1}{2}\,ab + \frac{3}{4}\,b^2 - 4\,a - 4\,b - 5\\
B_1 &= -\frac{1}{4}\,a^3 + \frac{1}{4}\,a^2b + \frac{1}{4}\,ab^2 + 4\,a^2 - \frac{1}{4}\,b^3 + 4\,b^2 - 16\,a - 16\,b + 6\\
B_0 &= -\frac{1}{4}\,(a+b-8)^2ab.
\end{aligned}$$

(II) Legyen $a \not\equiv b\ (mod\,2)$. Ha $(x,y) \in \mathbb{Z}^2$ megoldása az

$$\frac{x(x+1)(x+2)(x+3)}{(x+a)(x+b)} = y^2$$

diofantikus egyenletnek, akkor

$$|x| \leq 2\max\{|C_2|, |C_1|^{1/2}, |C_0|^{1/3}, |D_2|, |D_1|^{1/2}, |D_0|^{1/3}\},$$

ahol

$$\begin{aligned}
C_2 &= \frac{3}{4}\,a^2 + \frac{1}{2}\,ab + \frac{3}{4}\,b^2 - \frac{7}{2}\,a - \frac{7}{2}\,b - \frac{5}{4}\\
C_1 &= -\frac{1}{4}\,a^3 + \frac{1}{4}\,a^2b + \frac{1}{4}\,ab^2 + \frac{7}{2}\,a^2 - \frac{1}{4}\,b^3 + \frac{7}{2}\,b^2 - \frac{49}{4}\,a - \frac{49}{4}\,b + 6\\
C_0 &= -\frac{1}{4}\,(a+b-7)^2ab\\
D_2 &= \frac{3}{4}\,a^2 + \frac{1}{2}\,ab + \frac{3}{4}\,b^2 - \frac{5}{2}\,a - \frac{5}{2}\,b + \frac{19}{4}\\
D_1 &= -\frac{1}{4}\,a^3 + \frac{1}{4}\,a^2b + \frac{1}{4}\,ab^2 + \frac{5}{2}\,a^2 - \frac{1}{4}\,b^3 + \frac{5}{2}\,b^2 - \frac{25}{4}\,a - \frac{25}{4}\,b + 6\\
D_0 &= -\frac{1}{4}\,(a+b-5)^2ab.
\end{aligned}$$

5.1. Következmény. *Legyen $a \equiv b\ (mod\,2)$ és $t = \max\{|a|,|b|\}$. Ha $(x,y) \in \mathbb{Z}^2$ megoldása az (5.3) egyenletnek, akkor*

$$|x| \leq \max\{2t^2 + 13t,\ |\tfrac{1}{4}\,(a+b-6)^2\,ab|\}.$$

5.2. Következmény. *Legyen $a \not\equiv b\ (mod\,2)$ és $t = \max\{|a|,|b|\}$. Ha $(x,y) \in \mathbb{Z}^2$ megoldása az (5.3) egyenletnek, akkor*

$$|x| \le 4t^2 + 20t.$$

A 5.1 Tételt alkalmazva meghatározzuk az (5.3) egyenlet összes egész megoldását $a, b \in \{-4, -3, -2, -1, 4, 5, 6, 7\}, a \neq b$ esetén.

5.3. Következmény. *Legyen $a, b \in \{-4, -3, -2, -1, 4, 5, 6, 7\}$ és $a \neq b$. Az (5.3) egyenlet minden $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$, $y \neq 0$ megoldását az alábbi táblázat tartalmazza:*

a	b	(x, y)
-4	-3	$\{(-6, 2), (1, 2)\}$
-4	5	$(-6, 6)$
-2	7	$(3, 6)$
6	7	$\{(-4, 2), (3, 2)\}$

5.2. Tétel. *Legyen $a, b \notin \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ és $t = \max\{|a|, |b|\}$. Ha $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ megoldása az*

$$\frac{x(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)(x+5)}{(x+a)(x+b)} = y^2$$

diofantikus egyenletnek, akkor vagy

$$x \mid \left(3\,a^2 + 2\,ab + 3\,b^2 - 30\,a - 30\,b + 115\right)^2 ab$$

vagy

$$|x| \le 16t^3 + 440t^2.$$

5.3. Tétel. *Legyen $a, b, c \notin \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ és $t = \max\{|a|, |b|, |c|\}$. Ha $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ megoldása az*

$$\frac{x(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)(x+5)}{(x+a)(x+b)(x+c)} = y^3$$

diofantikus egyenletnek, akkor vagy

$$x \mid (a+b+c-15)^3abc$$

vagy

$$|x| \leq 6t^2 + 68t.$$

5.4. Tétel. *Legyen* $a, b, c, d \notin \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ *és* $t = \max\{|a|, |b|, |c|, |d|\}$. *Ha* $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ *megoldása az*

$$\frac{x(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)(x+5)}{(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)} = y^2$$

diofantikus egyenletnek, akkor vagy

$$x \mid (a+b+c+d-15)^2abcd$$

vagy

$$|x| \leq 12t^2 + 132t.$$

5.2. Bizonyítások

Az 5.1. Tétel bizonyítása

Az

$$\left(\frac{x(x+1)(x+2)(x+3)}{(x+a)(x+b)}\right)^{1/2}$$

függvény Puiseux-kifejtés utáni polinom része $x + 3 - \frac{a+b}{2}$.

I. eset. Először az $a \equiv b \pmod 2$ esettel foglalkozunk, vagyis amikor

$\frac{a+b}{2}$ egész. Vezessük be az

$$f_A(x) := 2x^3 + A_2x^2 + A_1x + A_0 =$$
$$x(x+1)(x+2)(x+3) - (x+a)(x+b)\left(x+2-\frac{a+b}{2}\right)^2$$

és

$$f_B(x) := -2x^3 + B_2x^2 + B_1x + B_0 =$$
$$x(x+1)(x+2)(x+3) - (x+a)(x+b)\left(x+4-\frac{a+b}{2}\right)^2$$

jelöléseket. A 1.4 Lemmából következik, hogy $f_A(x) \neq 0$, ha

$$|x| > \max\{|A_2|, |A_1|^{1/2}, |A_0|^{1/3}\} =: r_A.$$

Hasonlóan, $f_B(x) \neq 0$, ha

$$|x| > \max\{|B_2|, |B_1|^{1/2}, |B_0|^{1/3}\} =: r_B.$$

Továbbá, $f_A(x)f_B(x) < 0$, ha $|x| > \max\{r_A, r_B\}$. Ekkor vagy

$$\left(x+4-\frac{a+b}{2}\right)^2 < \frac{x(x+1)(x+2)(x+3)}{(x+a)(x+b)} < \left(x+2-\frac{a+b}{2}\right)^2$$

vagy

$$\left(x+2-\frac{a+b}{2}\right)^2 < \frac{x(x+1)(x+2)(x+3)}{(x+a)(x+b)} < \left(x+4-\frac{a+b}{2}\right)^2$$

teljesül. Mivel $\frac{x(x+1)(x+2)(x+3)}{(x+a)(x+b)} = y^2$, így azt kapjuk mindkét esetben, hogy $y^2 = \left(x+3-\frac{a+b}{2}\right)^2$.

Így x gyöke az

$$x(x+1)(x+2)(x+3)-(x+a)(x+b)\left(x+3-\frac{a+b}{2}\right)^2$$

kvadratikus polinomnak, amelynek $-\frac{1}{4}(a+b-6)^2ab$ a konstans része, ezáltal

$$|x| \leq |(a+b-6)^2ab|.$$

II. eset. Vizsgáljuk most az $a \not\equiv b \pmod 2$ esetet. Ekkor legyenek

$$\begin{aligned}&f_C(x) := -x^3+C_2x^2+C_1x+C_0 = \\ &x(x+1)(x+2)(x+3)-(x+a)(x+b)\left(x+3-\frac{a+b-1}{2}\right)^2\end{aligned}$$

és

$$\begin{aligned}&f_D(x) := x^3+D_2x^2+D_1x+D_0 = \\ &x(x+1)(x+2)(x+3)-(x+a)(x+b)\left(x+3-\frac{a+b+1}{2}\right)^2.\end{aligned}$$

Az 1.4 Lemmából adódik, hogy $f_C(x) \neq 0$, ha

$$|x| > 2\max\{|C_2|, |C_1|^{1/2}, |C_0|^{1/3}\} =: r_C$$

és $f_D(x) \neq 0$, ha

$$|x| > 2\max\{|D_2|, |D_1|^{1/2}, |D_0|^{1/3}\} =: r_D.$$

Világos, hogy $f_C(x)f_D(x) < 0$, ha $|x| > \max\{r_C, r_D\}$. Ekkor vagy

$$\left(x+3-\frac{a+b-1}{2}\right)^2 < \frac{x(x+1)(x+2)(x+3)}{(x+a)(x+b)} < \left(x+3-\frac{a+b+1}{2}\right)^2$$

vagy

$$\left(x+3-\frac{a+b+1}{2}\right)^2 < \frac{x(x+1)(x+2)(x+3)}{(x+a)(x+b)} < \left(x+3-\frac{a+b-1}{2}\right)^2$$

teljesül. Mindkét esetben ellentmondást kapunk, mivel $\frac{x(x+1)(x+2)(x+3)}{(x+a)(x+b)} = y^2$ és nem lehet négyzetszám egymást követő négyzetszámok között. Így

$$|x| \leq \max\{r_C, r_D\}.$$

A 5.3. Következmény bizonyítása

Egy Magma [11] kódot használva megoldottuk az (5.3) egyenletet. Ha $a \equiv b \pmod 2$, akkor az

$$|x| \leq \max\{|A_2|, |A_1|^{1/2}, |A_0|^{1/3}, |B_2|, |B_1|^{1/2}, |B_0|^{1/3}\}$$

korlátot használva meghatározzuk az

$$x(x+1)(x+2)(x+3) - (x+a)(x+b)\left(x+3-\frac{a+b}{2}\right)^2$$

kvadratikus egyenlet gyökeit. Számításaink részeként, a következő táblázatban azokat az (a, b) eseteket és a megfelelő, $|x|$-re vonatkozó korlátokat soroltuk fel, amely esetekben létezik $y \neq 0$ megoldás.

a	b	korlát $\|x\|$-re
-4	-3	96
-4	5	46
-2	7	50
6	7	114

Az 5.2. Tétel bizonyítása

Legyen $a, b \notin \{0,1,2,3,4,5\}$ páronként különböző egészek és vizsgáljuk az

$$F(x) = \frac{x(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)(x+5)}{(x+a)(x+b)} = y^2 \tag{5.4}$$

egyenletet. Az $F(x)^{1/2}$ függvény Puiseux-kifejtés utáni polinom része

$$P(x) = x^2 - \frac{a+b-15}{2}x + \frac{3a^2+2ab+3b^2-30a-30b+115}{8}.$$

Legyen

$$A(x) = x(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)(x+5) - (x+a)(x+b)\left(P(x) - \frac{1}{8}\right)^2$$

és

$$B(x) = x(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)(x+5) - (x+a)(x+b)\left(P(x) + \frac{1}{8}\right)^2.$$

Látható, hogy $\deg A = \deg B = 4$ és az A főegyütthatója $1/4$, a B főegyütthatója $-1/4$. Jelöljön I_A egy olyan intervallumot, amely tartalmazza $A(x)$ polinom minden gyökét, míg I_B intervallumban a $B(x)$ polinom gyökei legyenek benne. Abban az esetben, ha $x < \min\{a, b\}$ vagy $x > \max\{a, b\}$, továbbá $x \notin I_A, x \notin I_B$, akkor

$$\frac{A(x)}{(x+a)(x+b)} \quad \text{és} \quad \frac{B(x)}{(x+a)(x+b)}$$

kifejezéseknek ellentétes előjele van. Ekkor két lehetőség adódik: vagy

$$F(x) - \left(P(x) - \frac{1}{8}\right)^2 < 0 < F(x) - \left(P(x) + \frac{1}{8}\right)^2$$

vagy

$$F(x) - \left(P(x) - \frac{1}{8}\right)^2 > 0 > F(x) - \left(P(x) + \frac{1}{8}\right)^2.$$

Csak az első esetet tárgyaljuk részletesen, a második eset hasonlóan működik. Vagyis

$$\left(P(x) + \frac{1}{8}\right)^2 < F(x) = y^2 < \left(P(x) - \frac{1}{8}\right)^2.$$

Így adódik, hogy

$$(8P(x) + 1)^2 < (8y)^2 < (8P(x) - 1)^2.$$

A $8P(x)$ polinom egész együtthatós, vagyis ha x egész, akkor $8P(x)$ szintén egész. Rögzített egész x esetén csak egy négyzetszám lehet $(8P(x) + 1)^2$ és $(8P(x) - 1)^2$ között, amely a $64P(x)^2$. Vagyis $y = P(x)$ és x osztja a

$$64x(x + 1)(x + 2)(x + 3)(x + 4)(x + 5) - 64(x + a)(x + b)P(x)^2$$

polinom konstans tagját, azaz x osztja a

$$\left(3\,a^2 + 2\,ab + 3\,b^2 - 30\,a - 30\,b + 115\right)^2 ab$$

kifejezést. Végezetül az

$$A(x) = \frac{1}{4}x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 \quad \text{és} \quad B(x) = -\frac{1}{4}x^4 + b_3x^3 + b_2x^2 + b_1x + b_0$$

polinomok gyökeinek nagyságára vonatkozó korlátot bizonyítjuk. Legyen

$t = \max\{|a|, |b|\}$. Ekkor

$$\begin{aligned}
|4a_3| &\leq 8t^3 + 60t^2 + 114t + 45,\\
|4a_2| &\leq \frac{15}{4}\,t^4 + 60\,t^3 + 450\,t^2 + 855\,t + \frac{1135}{4},\\
|4a_1| &\leq \frac{9}{4}\,t^5 + 45\,t^4 + 282\,t^3 + 855\,t^2 + \frac{3249}{2}\,t + 480,\\
|4a_0| &\leq 4\,t^6 + 60\,t^5 + 339\,t^4 + 855\,t^3 + \frac{3249}{4}\,t^2.
\end{aligned}$$

Hasonlóan adódik, hogy

$$\begin{aligned}
|4b_3| &\leq 8t^3 + 60t^2 + 116t + 30,\\
|4b_2| &\leq \frac{15}{4}\,t^4 + 60\,t^3 + 450\,t^2 + 870\,t + 255,\\
|4b_1| &\leq \frac{9}{4}\,t^5 + 45\,t^4 + 283\,t^3 + 870\,t^2 + 1682\,t + 480,\\
|4b_0| &\leq 4\,t^6 + 60\,t^5 + 341\,t^4 + 870\,t^3 + 841\,t^2.
\end{aligned}$$

Végül Fujiwara eredményéből (lásd 1.4 Lemma) következik, hogy

$$\max\{|\zeta| : A(\zeta) = 0 \text{ vagy } B(\zeta) = 0\} \leq 16t^3 + 440t^2.$$

Az 5.3. Tétel bizonyítása

Legyen $a, b, c \notin \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ páronként különböző egészek és vizsgáljuk az

$$\frac{x(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)(x+5)}{(x+a)(x+b)(x+c)} = y^3 \tag{5.5}$$

egyenletet. Az

$$\left(\frac{x(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)(x+5)}{(x+a)(x+b)(x+c)}\right)^{1/3}$$

függvény Puiseux-kifejtéssel kapott polinom része $P(x) = x + 5 - \frac{a+b+c}{3}$.

Legyen

$$A(x) = x(x{+}1)(x{+}2)(x{+}3)(x{+}4)(x{+}5){-}(x{+}a)(x{+}b)(x{+}c)\left(P(x) - \frac{1}{3}\right)^3$$

és

$$B(x) = x(x{+}1)(x{+}2)(x{+}3)(x{+}4)(x{+}5){-}(x{+}a)(x{+}b)(x{+}c)\left(P(x) + \frac{1}{3}\right)^3.$$

Tudjuk, hogy $\deg A = \deg B = 5$ és az A illetve B polinomok főegyütthatója 1 illetve -1. Ekkor az

$$\frac{A(x)}{(x+a)(x+b)(x+c)} \quad \text{és} \quad \frac{B(x)}{(x+a)(x+b)(x+c)}$$

kifejezések előjele ellentétes, ha $|x|$ nagyobb, mint az $A(x)B(x)$ gyökei abszolút értékének a maximuma. Ekkor a következő két lehetőség áll fenn: vagy

$$\left(P(x) - \frac{1}{3}\right)^3 < \frac{x(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)(x+5)}{(x+a)(x+b)(x+c)} < \left(P(x) + \frac{1}{3}\right)^3$$

vagy

$$\left(P(x) + \frac{1}{3}\right)^3 < \frac{x(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)(x+5)}{(x+a)(x+b)(x+c)} < \left(P(x) - \frac{1}{3}\right)^3.$$

A bizonyítás következő lépései hasonlóak, mint a 5.2. Tétel bizonyítása, vagyis $y = P(x) = x + 5 - \frac{a+b+c}{3}$. Így x osztja a

$$27x(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)(x+5) - 27(x+a)(x+b)(x+c)P(x)^3$$

polinom konstans részét, vagyis

$$x \mid (a+b+c-15)^3 abc.$$

Végezetül meghatározzuk az alábbi részben az $A(x)B(x)$ polinom gyökei abszolút értékének maximumát, majd Fujiwara eredményét felhasználva vizsgáljuk a korlátot, ahol

$$A(x) = x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0,$$

$$B(x) = -x^5 + b_4x^4 + b_3x^3 + b_2x^2 + b_1x + b_0.$$

Legyen $t = \max\{|a|, |b|, |c|\}$. Először kiszámoljuk az $A(x)$ és $B(x)$ polinomok együtthatóinak abszolút értékére vonatkozó korlátot, amely a következő

$$\begin{aligned}
|a_4| &\leq 3t^2 + 14t + \frac{59}{3}, \\
|a_3| &\leq \frac{16}{9}t^3 + 28t^2 + \frac{392}{3}t + \frac{3331}{27}, \\
|a_2| &\leq \frac{29}{9}t^4 + \frac{112}{3}t^3 + \frac{392}{3}t^2 + \frac{2744}{9}t + 274, \\
|a_1| &\leq \frac{16}{9}t^5 + \frac{70}{3}t^4 + \frac{392}{3}t^3 + \frac{2744}{9}t^2 + 120, \\
|a_0| &\leq t^6 + 14t^5 + \frac{196}{3}t^4 + \frac{2744}{27}t^3
\end{aligned}$$

és

$$\begin{aligned}
|b_4| &\leq 3t^2 + 16t + \frac{1}{3}, \\
|b_3| &\leq \frac{16}{9}t^3 + 32t^2 + \frac{512}{3}t + \frac{1979}{27}, \\
|b_2| &\leq \frac{29}{9}t^4 + \frac{128}{3}t^3 + \frac{512}{3}t^2 + \frac{4096}{9}t + 274, \\
|b_1| &\leq \frac{16}{9}t^5 + \frac{80}{3}t^4 + \frac{512}{3}t^3 + \frac{4096}{9}t^2 + 120, \\
|b_0| &\leq t^6 + 16t^5 + \frac{256}{3}t^4 + \frac{4096}{27}t^3.
\end{aligned}$$

Végül megállapítjuk az $|a_{5-i}|^{1/i}$ és $|b_{5-i}|^{1/i}, i = 1, 2, 3, 4, 5$ értékekre vonatkozó korlátokat, amelyből azt kapjuk, hogy

$$\max\{|a_{5-i}|^{1/i}, |b_{5-i}|^{1/i}\} \leq 3t^2 + 34t.$$

Így Fujiwara eredményéből (lásd 1.4 Lemma) adódik, hogy $|x| \leq 6t^2 + 68t$.

Az 5.4. Tétel bizonyítása

Legyen $a, b, c, d \notin \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ páronként különböző egészek és vizsgáljuk az

$$\frac{x(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)(x+5)}{(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)} = y^2, \tag{5.6}$$

diofantikus egyenletet. Az

$$\left(\frac{x(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)(x+5)}{(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)}\right)^{1/2}$$

függvény Puiseux-kifejtés utáni polinom része $P(x) = x + \frac{15-(a+b+c+d)}{2}$. Legyen

$$A(x) = x(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)(x+5) - (x+a)(x+b)(x+c)(x+d)\left(P(x) - \frac{1}{2}\right)^2$$

és

$$B(x) = x(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)(x+5) - (x+a)(x+b)(x+c)(x+d)\left(P(x) + \frac{1}{2}\right)^2.$$

Az $A(x)$ fokszáma 5, főegyütthatója 1, míg a $B(x)$ polinom esetében ezek az értékek rendre 5 és -1. Látható, hogy az

$$\frac{A(x)}{(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)} \quad \text{és} \quad \frac{B(x)}{(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)}$$

kifejezések előjele ellentétes, ha $|x|$ nagyobb, mint az $A(x)B(x)$ polinomok gyökei abszolút értékének maximuma. Ebből következik, hogy vagy

$$\left(P(x)-\frac{1}{2}\right)^2 < \frac{x(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)(x+5)}{(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)} < \left(P(x)+\frac{1}{2}\right)^2$$

vagy

$$\left(P(x)+\frac{1}{2}\right)^2 < \frac{x(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)(x+5)}{(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)} < \left(P(x)-\frac{1}{2}\right)^2.$$

Azt mondhatjuk, hogy ha $|x|$ nagy, akkor $y = P(x) = x + \frac{15-(a+b+c+d)}{2}$ és x osztja a

$$4x(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)(x+5) - 4(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)P(x)^2$$

polinom konstans tagját. Vagyis

$$x \mid (a+b+c+d-15)^2 abcd.$$

Végezetül megadjuk az $|a_i|$ és $|b_i|$, $i = 0,1,2,3,4$ értékekre vonatkozó korlátokat, ahol

$$A(x) = x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0,$$

$$B(x) = -x^5 + b_4x^4 + b_3x^3 + b_2x^2 + b_1x + b_0.$$

Legyen $t = \max\{|a|,|b|,|c|,|d|\}$. Ekkor

$$\begin{aligned}
|a_4| &\leq 6t^2 + 28t + 36,\\
|a_3| &\leq 6t^3 + 28t^2 + 196t + 225,\\
|a_2| &\leq 9t^4 + 112t^3 + 294t^2 + 274,\\
|a_1| &\leq 12t^5 + 98t^4 + 196t^3 + 120,\\
|a_0| &\leq 4t^6 + 28t^5 + 49t^4
\end{aligned}$$

és

$$\begin{aligned}
|b_4| &\leq 6t^2 + 32t + 21, \\
|b_3| &\leq 6t^3 + 32t^2 + 256t + 225, \\
|b_2| &\leq 9t^4 + 128t^3 + 384t^2 + 274, \\
|b_1| &\leq 12t^5 + 112t^4 + 256t^3 + 120, \\
|b_0| &\leq 4t^6 + 32t^5 + 64t^4.
\end{aligned}$$

Végül megkapjuk, hogy

$$\max\{|a_{5-i}|^{1/i}, |b_{5-i}|^{1/i}\} \leq 6t^2 + 66t,$$

ahol $i = 1, 2, 3, 4, 5$ és így Fujiwara eredményét (1.4 Lemma) ismét felhasználva adódik, hogy

$$|x| \leq 12t^2 + 132t.$$

5.3. Numerikus eredmények és bizonyításuk

Ebben a fejezetben az (5.2), (5.3) és (5.4) Tételekben vizsgált diofantikus egyenletek nem-triviális megoldásainak teljes listáját bizonyítjuk adott paraméterek mellett. Megjegyezzük, hogy az $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ megoldásokat triviálisnak nevezzük, ha $y = 0$.

5.5. Tétel. *Legyen* $a, b \in \{-10, -9, \ldots, 14, 15\} \setminus \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, $a < b$. *Azok az* (a, b) *párok, amelyek esetén az* (5.4) *egyenletnek létezik nem-triviális megoldása az alábbi táblázatban találhatók:*

(a,b)	*a nem-triviális* (x,y) *megoldások*
$(-10,-8)$	$(3,24)$
$(-10,-6)$	$(1,4)$
$(-9,-7)$	$(2,12)$
$(-9,-6)$	$(-6,2)$
$(-7,-3)$	$(-7,6)$
$(-6,-5)$	$(1,6)$
$(-6,-2)$	$\{(1,12),(-8,12)\}$
$(-4,-2)$	$\{(-10,30),(-6,3)\}$
$(-4,7)$	$(-10,60)$
$(-2,9)$	$(5,60)$
$(7,9)$	$\{(1,3),(5,30)\}$
$(7,11)$	$\{(3,12),(-6,12)\}$
$(8,12)$	$(2,6)$
$(10,11)$	$(-6,6)$
$(11,14)$	$(1,2)$
$(11,15)$	$(-6,4)$
$(12,14)$	$(-7,12)$
$(13,15)$	$(-8,24)$

5.6. Tétel. *Legyen* $a, b, c \in \{-7, -6, \ldots, 12\} \setminus \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, $a < b < c$. *Azok az* (a, b, c) *számhármasok, amelyek esetén az* (5.5) *egyenletnek létezik nem-triviális megoldása az alábbi táblázatban találhatók:*

(a, b, c)	*a nem-triviális* (x, y) *megoldások*
$(-7, -6, -4)$	$\{(1, -2), (-8, -2)\}$
$(-7, -5, -1)$	$(-9, -3)$
$(-7, -2, 12)$	$(-7, 2)$
$(-7, 7, 12)$	$(2, -2)$
$(-7, 9, 11)$	$(1, -1)$
$(-6, -4, 12)$	$(-6, 1)$
$(-6, -3, 8)$	$(1, 2)$
$(-6, 6, 10)$	$(4, -6)$
$(-5, -1, 7)$	$(-9, -6)$
$(-5, -1, 11)$	$(-9, 6)$
$(-4, -3, -2)$	$(-6, -1)$
$(-4, -3, 7)$	$(-6, 2)$
$(-3, 8, 11)$	$(-6, -2)$
$(-2, 6, 10)$	$(4, 6)$
$(-2, 8, 9)$	$(1, -2)$
$(6, 10, 12)$	$(4, 3)$
$(7, 8, 9)$	$(1, 1)$
$(9, 11, 12)$	$\{(3, 2), (-6, 2)\}$

5.7. Tétel. *Legyen* $a, b, c, d \in \{-7, -6, \ldots, 12\} \setminus \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, $a < b < c < d$. *Azok az* (a, b, c, d) *számnégyesek, amelyek esetén az* (5.6) *egyenletnek létezik nem-triviális megoldása az alábbi táblázatban találhatók:*

(a,b,c,d)	*a nem-triviális* (x,y) *megoldások*
$(-7,-6,-5,7)$	$(-9,3)$
$(-7,-6,-4,-3)$	$(1,2)$
$(-7,-6,-4,6)$	$(-8,2)$
$(-7,-6,10,11)$	$(-8,4)$
$(-7,-5,-1,6)$	$(-9,3)$
$(-7,-5,6,10)$	$(4,12)$
$(-7,-4,-1,12)$	$(2,6)$
$(-7,-4,7,11)$	$(3,6)$
$(-7,-4,7,12)$	$(2,2)$
$(-7,-3,-2,6)$	$(-7,2)$
$(-7,-3,6,12)$	$(2,3)$
$(-7,-3,8,11)$	$(-7,3)$
$(-7,-2,9,11)$	$(1,1)$
$(-7,-2,9,12)$	$(-7,2)$
$(-7,-1,8,12)$	$(-7,3)$
$(-7,6,9,12)$	$(-7,6)$
$(-6,-5,7,8)$	$(-9,12)$
$(-6,-5,10,11)$	$\{(4,12),(-9,12)\}$
$(-6,-5,11,12)$	$(3,4)$
$(-6,-4,7,9)$	$(-10,15)$
$(-6,-4,7,12)$	$(-6,1)$
$(-6,-4,8,9)$	$(-6,1)$
$(-6,-3,7,8)$	$(1,1)$
$(-6,-3,8,12)$	$(2,3)$
$(-6,-2,-1,7)$	$(-8,4)$
$(-6,-2,9,12)$	$(-8,6)$
$(-5,-3,-1,8)$	$(-9,6)$
$(-5,-3,8,9)$	$(1,1)$
$(-5,-1,6,8)$	$(-9,12)$
$(-5,-1,10,12)$	$(-9,12)$

(a,b,c,d)	a nem-triviális (x,y) megoldások
$(-4,-3,7,8)$	$(-6,2)$
$(-4,-3,8,10)$	$(-6,1)$
$(-4,-3,9,11)$	$(1,1)$
$(-4,-2,-1,9)$	$(5,30)$
$(-4,-2,6,9)$	$(-10,15)$
$(-4,-2,9,11)$	$(5,15)$
$(-4,-1,7,9)$	$(5,15)$
$(-4,6,7,9)$	$(-10,30)$
$(-3,-2,8,9)$	$(1,2)$
$(-3,-2,8,11)$	$(-6,1)$
$(-3,-2,10,11)$	$(4,12)$
$(-3,-1,6,10)$	$(4,12)$
$(-3,6,8,10)$	$(4,6)$
$(-2,6,7,11)$	$(3,4)$
$(-2,10,11,12)$	$(4,3)$
$(-1,6,10,12)$	$(4,3)$
$(-1,7,8,12)$	$(2,2)$
$(-1,9,11,12)$	$(3,2)$
$(8,9,11,12)$	$(-6,2)$

Az 5.5., 5.6. és 5.7. Tételek bizonyítása

Sage [69] kódok segítségével meghatároztuk az összes $(x,y) \in \mathbb{Z}^2$ megoldásait az érintett egyenleteknek. Ezek letölthetők a

`http://shrek.unideb.hu/~tengely/RatFunErdosGraham.sage`

oldalról. Az eljárásban az $A(x)$ és $B(x)$ polinomok valós gyökeinek a becsült értékét használjuk a Fujiwara eredményéből kapott értékek helyett. Ezzel a módszerrel jobb korlátokat nyerünk a "kis" megoldásokra. A "nagy" megoldások gyökei az adott egész együtthatós polinomoknak, így faktorizálni tudjuk ezeket a polinomokat, hogy meghatározzuk az egész gyököket.

6. fejezet

Összefoglaló

Jelen disszertációban olyan $f(x) = g(y)$ típusú szeparábilis egyenletekkel foglalkozunk, amelyekben az f és g polinomok speciális, kombinatorikus jelentéssel bírnak.

A disszertáció a Bevezetés után öt fejezetre oszlik. Az első fejezetben a felhasznált lemmákat mutatjuk be. A második, harmadik és negyedik fejezetben a figurális számok vizsgálata során nyert eredményeket közöljük, végül az ötödik fejezetben az Erdős-Graham probléma speciális eseteivel foglalkozunk. A disszertáció alapjául az [59], [39], [41], [72] és [73] cikkek szolgáltak.

Az első fejezetben a bizonyításokhoz felhasznált segéderedményeket adjuk meg. A dolgozatban többször előfordul Baker egy elliptikus egyenletekre vonatkozó effektív végességi állítása [2], illetve annak egy Brindza [13] nevéhez fűződő általános változata. A lemmák között szerepel továbbá Grytzuk és Schinzel eredménye [30], amely egy általános egyenletosztály megoldásaira vonatkozó tétel speciális esete, nevezetesen Runge módszerét [62] felhasználva ad effektív felső korlátot a megoldások nagyságára. Végezetül, az ötödik fejezetben alkalmazott, Fujiwara [29] által kidolgozott eredményt ismertetjük, amely tetszőleges polinom gyökeire ad korlátot az együtthatók függvényében.

A második, harmadik és negyedik fejezetben a vizsgálat tárgyát az alább definiált $f_{k,m}(X)$ polinom adja. Legyenek $k \geq 2, m \geq 3$ egész paraméterek és jelölje az

$$f_{k,m}(X) = \frac{X(X+1)\cdots(X+(k-2))((m-2)X+k+2-m)}{k!} \tag{6.1}$$

k-ad fokú, racionális együtthatós polinom az X-edik (k-dimenziós, m-szög alapú) figurális számot. Az $m = 3$ esetben az $f_{k,3}(X) = \frac{X(X+1)\cdots(X+k-1)}{k!}$ kifejezésből az $\binom{X+k-1}{k}$ binomiális együtthatókat, a $k = 2$, illetve $k = 3$ esetekben a poligonális, illetve a piramidális számokat kapjuk, amelyeket az $f_{2,m}(X)$ és az $f_{3,m}(X)$ polinomokkal jelölünk, azaz

$$f_{2,m}(X) = \ Pol_m(X) = \frac{X((m-2)X+4-m)}{2}$$

és

$$f_{3,m}(X) = \ Pyr_m(X) = \frac{X(X+1)((m-2)X+5-m)}{6},$$

ahol $m \geq 3$ egész paraméter.

Legyenek k, m, l, n rögzített egész számok, amelyekre $k > l \geq 2, m \geq 3, n \geq 3$ feltételek teljesülnek és tekintsük az

$$f_{k,m}(x) = f_{l,n}(y) \tag{6.2}$$

egyenletet, ahol x, y ismeretlen egészek. Ekkor a (6.2) egyenletet teljesítő (x, y) számpárok két figurális szám egyenlő értékeit határozzák meg. A vizsgálat reménytelen ilyen általánosságban, sőt rögzített (k, m, l, n) számnégyesekre effektív vagy ineffektív végességi állításokat is nehéz nyerni. A második és negyedik fejezetben a (6.2) egyenlet konkrét eseteit vizsgáljuk.

A dolgozat második fejezetében a Brindza, Pintér és Turjányi [16] cikkében szereplő sejtést igazoljuk, amely a piramidális és poligonális számok közös értékeit, azaz a (6.2) egyenletből $k = 3$ és $l = 2$ értékek mellett kapott

$$f_{3,m}(x) = f_{2,n}(y) \tag{6.3}$$

egyenletet vizsgálja x és y ismeretlen egészekben. Dolgozatukban bebizonyították, hogy eltekintve véges sok (m, n) pártól, az egyenletnek csak véges sok x, y megoldása van, amelyre $\max(|x|, |y|) < C_1$ teljesül, ahol C_1 az m-től és az n-től függő effektíven kiszámítható korlát, továbbá a kivételes (m, n) párokra teljesül, hogy $\max(m, n) < C_2$, ahol C_2 effektíven meghatározható abszolút konstans. Sejtésként fogalmazták meg, hogy csak egy kivételes pár létezik, nevezetesen az $(m, n) = (5, 4)$. Dolgozatunkban bizonyítjuk ezt a sejtést, amit az alábbi tétel mond ki.

6.1. Tétel. *Ha* $(m, n) \neq (5, 4)$*, akkor a* (6.3) *egyenletnek csak véges sok* x, y *egész megoldása van, és ezekre a megoldásokra* $\max(|x|, |y|) < C_3$ *teljesül, ahol* C_3 *effektíven kiszámítható, az* m *és* n *paraméterektől függő korlát.*

Megjegyzés. Az $(m, n) = (5, 4)$ számpárt behelyettesítve a (6.3)-ba, az $x^2(x + 1)/2 = y^2$ egyenletet kapjuk, amelyről könnyen belátható, hogy végtelen sok (x, y) megoldása van.

A harmadik fejezetben bizonyított állítás előzményeként Mordell klasszikusnak számító eredményét idézzük [56, 27. fejezet], amely az

$$\binom{x}{3} + \binom{x}{2} + \binom{x}{1} + \binom{x}{0} = y^2 \tag{6.4}$$

diofantikus egyenlettel foglalkozik, választ keresve arra a kérdésre, hogy valóban az $x = -1, 0, 2, 7, 15, 74$ számok alkotják-e csupán a (6.4) egyenlet egész megoldásait. Ljunggren [50] és Bremner [12] egymástól függetlenül meghatározta a $6y^2 = x^3 + 5x + 6$ alakban is felírható (6.4) egyenlet összes megoldását, megmutatva, hogy csak egyetlen további $x \in \mathbb{Z}$ esetén teljesül az egyenlőség, nevezetesen az $x = 767$ érték mellett. A (6.4) egyenlet tekintettel az $f_{k,m}(X)$ polinomra, megadható az alábbi módon is:

$$f_{3,3}(x-2) + f_{2,3}(x-1) + x + 1 = f_{2,4}(y). \tag{6.5}$$

A fejezet célja, hogy a (6.5) egyenletet általánosítsuk a poligonális és piramidális számok segítségével. Még pontosabban megfogalmazva, az

$$f_{3,m}(x-2) + f_{2,m}(x-1) + x + 1 = f_{2,n}(y) \tag{6.6}$$

diofantikus egyenletet vizsgáljuk és bizonyítjuk, hogy a kivételes pároktól eltekintve csak véges sok megoldás létezik. Állításunkat a következő tételben foglaltuk össze.

6.2. Tétel. *Legyenek adottak m és n pozitív egészek, ahol $m \geq 3, n \geq 3$ és $(m,n) \neq (50,3),(50,6)$. Ekkor a (6.6) egyenlet minden x és y megoldására teljesül, hogy $\max(x,y) < C_4$, ahol C_4 egy effektíven meghatározható konstans, amely csak az m és n értékektől függ.*

Megjegyzés. A kivételes esetekben, amikor $(m,n) = (50,3)$, illetve $(50,6)$, a $(16x+1)(2x-3)^2 = (2y+1)^2$, illetve $(16x+1)(2x-3)^2 = (4y-1)^2$ egyenleteket kapjuk, amelyeknek láthatóan végtelen sok egész (x,y) megoldása van.

A negyedik fejezetben általánosítjuk a második fejezetben szereplő (6.3) egyenlet bal oldalát, vagyis az általános alakban felírt figurális számok és poligonális számok közös értékeire vonatkozó összefüggést, azaz az

$$f_{k,m}(x) = f_{2,n}(y) \tag{6.7}$$

egyenletet vizsgáljuk. Adott feltételek mellett effektív végességi állításokat adunk a (6.7) egyenletre egész x és y értékek esetén, meghatározva továbbá a kivételt képező eseteket. Foglalkozunk az $f_{k,k+2}(X) = \frac{X^2(X+1)\cdots(X+k-2)}{(k-1)!}$ alakban felírt figurális számmal és bizonyítjuk, hogy csak egyetlen esetben lehet teljes négyzet.

6.3. Tétel. *Legyenek m, n, k egész számok, amelyekre teljesül, hogy $k \geq 3$ és $(m, n, k) \neq (5, 4, 3), (6, 4, 4)$. Ha k páros, akkor tegyük fel továbbá, hogy $k!D$ nem r^2 vagy $2r^2$ alakú, ahol $D = \gcd(k!(n-4)^2, 8d(n-2))$ és $d = \gcd(k, m-2)$. Ekkor a (6.7) egyenletnek csak véges sok x, y megoldása van, amelyek effektív módon meghatározhatók.*

Megjegyzés. Ha $(m, n, k) = (5, 4, 3), (6, 4, 4)$, akkor könnyen belátható, hogy a (6.7) egyenletnek végtelen sok x, y megoldása van.

6.1. Következmény. *Legyenek m, n, k egészek és $k \geq 4$. Ha k páros, akkor tegyük fel továbbá, hogy létezik egy p prím, amely $k/2 < p < k$, ahol $p \nmid n-2$. Ekkor a (6.7) egyenletnek csak véges sok x, y megoldása van, amelyek effektív módon meghatározhatók.*

Megjegyzés. Ha $k > 2n$, akkor a 6.1 Következmény teljesül. A Bertrand-posztulátum garantálja a megfelelő p prím létezését $k/2 < p < k$ között. Mivel $p > k/2 > n > n-2$, van olyan prím, amelyre teljesül, hogy $p \nmid n-2$.

6.4. Tétel. *Tegyük fel, hogy $k \geq 3, m \geq 3, n \geq 14$ egészek, amelyekre*

$$10m - 26 \leq n$$

teljesül. Ekkor a (6.7) egyenletnek csak véges sok x, y megoldása van, amelyek effektív módon meghatározhatók.

6.5. Tétel. *A $k \geq 5$, $x \geq k-2$ és $y \geq 1$ egészek körében az egyetlen megoldása az*

$$f_{k,k+2}(x) = f_{2,4}(y) \tag{6.8}$$

egyenletnek a $(k,x,y)=(5,47,3290)$ *számhármas.*

Megjegyzések. $k=5$ esetén a tétel következik Meyl [55] klasszikus eredményéből. A diofantikus egyenletek körében az összes egész x,y és k megoldása az $\binom{x+k-1}{k}=f_{k,3}(x)=f_{2,4}(y)=y^2$ alakú parametrikus családnak Győry [33], binomiális együtthatók hatványösszegét vizsgáló eredményére vezethető vissza.

Az ötödik fejezetben az Erdős-Graham probléma speciális eseteivel foglalkozunk. Tekintsük az alábbi

$$f(x,k,d)=x(x+d)\cdots(x+(k-1)d)$$

szorzatot. Erdős [26] és Rigge [61] egymástól függetlenül bizonyították, ha $x\geq 1$ és $k\geq 2$, akkor $f(x,k,1)$ nem lehet teljes négyzet. Erdős és Selfridge [28] híres eredményükben azt állították, hogy az $f(x,k,1)$ sosem lehet egy egész szám teljes hatványa, feltéve, hogy $x\geq 1$ és $k\geq 2$. Azaz, megoldották az $f(x,k,d)=y^l$ diofantikus egyenletet $d=1$ esetén. Tekintsük, továbbá az alábbi egyenletet

$$\prod_{i=1}^{r} f(x_i,k_i,1)=y^2$$

rögzített $r\geq 1$ és $\{k_1,k_2,\dots,k_r\}$ esetén, ahol $k_i\geq 4$, $i=1,2,\dots,r$. Erdős és Graham [25] vizsgálata annak a meghatározására irányult, hogy ha $x_i+k_i\leq x_{i+1}$ minden i-re teljesül, ahol $1\leq i\leq r-1$, akkor ennek az egyenletnek valóban csak legfeljebb véges sok pozitív egész $(x_1,x_2,\dots,x_r,y)$ megoldása van-e.

A fejezet első tétele az

$$\frac{x(x+1)(x+2)(x+3)}{(x+a)(x+b)}=y^2 \tag{6.9}$$

diofantikus egyenlettel foglalkozik, ahol $a,b\in\mathbb{Z}, a\neq b$ paraméterek. Az állítást és a hozzá kapcsolódó bizonyítást is két esetre bontottuk, attól függően, hogy a és b paritása megegyezik-e vagy sem.

Kiterjesztve ezt az eredményt, a fejezet további részében az

$$\frac{x(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)(x+5)}{(x+a)(x+b)} = y^2, \tag{6.10}$$

$$\frac{x(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)(x+5)}{(x+a)(x+b)(x+c)} = y^3, \tag{6.11}$$

$$\frac{x(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)(x+5)}{(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)} = y^2 \tag{6.12}$$

diofantikus egyenleteket vizsgáljuk, ahol $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ páronként különböző egészek úgy, hogy $a, b, c, d \notin \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. Ezen egyenletek megoldásaira sikerült korlátot nyernünk, amelyeket az alábbi tételekben mutatunk be.

6.6. Tétel. *(I) Legyen $a \equiv b \pmod 2$. Ha $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ megoldása a (6.9) diofantikus egyenletnek, akkor*

$$|x| \le \max\{|A_2|, |A_1|^{1/2}, |A_0|^{1/3}, |B_2|, |B_1|^{1/2}, |B_0|^{1/3}, |\frac{1}{4}(a+b-6)^2 ab|\},$$

ahol

$$\begin{aligned}
A_2 &= \frac{3}{4}a^2 + \frac{1}{2}ab + \frac{3}{4}b^2 - 2a - 2b + 7\\
A_1 &= -\frac{1}{4}a^3 + \frac{1}{4}a^2b + \frac{1}{4}ab^2 + 2a^2 - \frac{1}{4}b^3 + 2b^2 - 4a - 4b + 6\\
A_0 &= -\frac{1}{4}(a+b-4)^2 ab\\
B_2 &= \frac{3}{4}a^2 + \frac{1}{2}ab + \frac{3}{4}b^2 - 4a - 4b - 5\\
B_1 &= -\frac{1}{4}a^3 + \frac{1}{4}a^2b + \frac{1}{4}ab^2 + 4a^2 - \frac{1}{4}b^3 + 4b^2 - 16a - 16b + 6\\
B_0 &= -\frac{1}{4}(a+b-8)^2 ab.
\end{aligned}$$

(II) Legyen $a \not\equiv b \pmod 2$. Ha $(x,y) \in \mathbb{Z}^2$ megoldása a (6.9) diofantikus egyenletnek, akkor

$$|x| \leq 2\max\{|C_2|, |C_1|^{1/2}, |C_0|^{1/3}, |D_2|, |D_1|^{1/2}, |D_0|^{1/3}\},$$

ahol

$$\begin{aligned}
C_2 &= \frac{3}{4}a^2 + \frac{1}{2}ab + \frac{3}{4}b^2 - \frac{7}{2}a - \frac{7}{2}b - \frac{5}{4}\\
C_1 &= -\frac{1}{4}a^3 + \frac{1}{4}a^2b + \frac{1}{4}ab^2 + \frac{7}{2}a^2 - \frac{1}{4}b^3 + \frac{7}{2}b^2 - \frac{49}{4}a - \frac{49}{4}b + 6\\
C_0 &= -\frac{1}{4}(a+b-7)^2 ab\\
D_2 &= \frac{3}{4}a^2 + \frac{1}{2}ab + \frac{3}{4}b^2 - \frac{5}{2}a - \frac{5}{2}b + \frac{19}{4}\\
D_1 &= -\frac{1}{4}a^3 + \frac{1}{4}a^2b + \frac{1}{4}ab^2 + \frac{5}{2}a^2 - \frac{1}{4}b^3 + \frac{5}{2}b^2 - \frac{25}{4}a - \frac{25}{4}b + 6\\
D_0 &= -\frac{1}{4}(a+b-5)^2 ab.
\end{aligned}$$

A fenti tételt alkalmazva meghatározzuk a (6.9) egyenlet összes egész megoldását $a, b \in \{-4, -3, -2, -1, 4, 5, 6, 7\}, a \neq b$ esetén.

6.2. Következmény. *Legyen $a, b \in \{-4, -3, -2, -1, 4, 5, 6, 7\}$ és $a \neq b$. Az (6.9) egyenlet minden $(x,y) \in \mathbb{Z}^2$, $y \neq 0$ megoldását az alábbi táblázat tartalmazza:*

(a,b)	$(-4,-3)$,	$(-4,5)$	$(-2,7)$	$(6,7)$
(x,y)	$(-6,2),(1,2)$	$(-6,6)$	$(3,6)$	$(-4,2),(3,2)$

6.3. Következmény. *Legyen $a \equiv b \pmod 2$ és $t = \max\{|a|,|b|\}$. Ha $(x,y) \in \mathbb{Z}^2$ megoldása a (6.9) egyenletnek, akkor*

$$|x| \leq \max\{2t^2 + 13t,\ |\tfrac{1}{4}(a+b-6)^2 ab|\}.$$

6.4. Következmény. *Legyen* $a \not\equiv b \,(mod\, 2)$ *és* $t = \max\{|a|, |b|\}$. *Ha* $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ *megoldása a* (6.9) *egyenletnek, akkor*

$$|x| \leq 4t^2 + 20t.$$

6.7. Tétel. *Legyen* $a, b \notin \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ *és* $t = \max\{|a|, |b|\}$. *Ha* $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ *megoldása a* (6.10) *diofantikus egyenletnek, akkor vagy*

$$x \mid \left(3a^2 + 2ab + 3b^2 - 30a - 30b + 115\right)^2 ab \quad vagy \quad |x| \leq 16t^3 + 440t^2.$$

6.8. Tétel. *Legyen* $a, b, c \notin \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ *és* $t = \max\{|a|, |b|, |c|\}$. *Ha* $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ *megoldása a* (6.11) *diofantikus egyenletnek, akkor vagy*

$$x \mid (a + b + c - 15)^3 abc \quad vagy \quad |x| \leq 6t^2 + 68t.$$

6.9. Tétel. *Legyen* $a, b, c, d \notin \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ *és* $t = \max\{|a|, |b|, |c|, |d|\}$. *Ha* $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ *megoldása a* (6.12) *diofantikus egyenletnek, akkor vagy*

$$x \mid (a + b + c + d - 15)^2 abcd \quad vagy \quad |x| \leq 12t^2 + 132t.$$

Chapter 7

Summary

To consider equal values of two infinitely set which has combinatorial background, we can sometimes get Diophantine equations. In our dissertation, we deal with separable equations $f(x) = g(y)$, where the polynomials f and g have combinatorial meanings.

Our dissertation consists of five chapters. In the first chapter we present auxiliary results. In the second, third and fourth chapters we deal with the figurate numbers and the last, fifth chapter we consider the special cases of the problem of Erdős and Graham. The dissertation is based on the papers [59], [39], [41], [72] and [73].

In the first chapter we show the lemmas concerning our proofs. The first lemma is Baker's classical result concerning the solutions of elliptic equations [2]. Our second lemma is a classical result from the modern theory of Diophantine equations, which is a consequence of the Theorem in Brindza [13]. We apply a special case of a Runge-type result due to Grytczuk and Schinzel [30] and in the last chapter we will use the result of Fujiwara [29] which gives a bound for roots of an arbitrary polynomial to prove our statements.

There are several results concerning arithmetical and Diophantine properties of certain combinatorial numbers. Let k, m be integers with $k \geq 3$ and $m \geq 3$, further, denote by

$$f_{k,m}(X) = \frac{X(X+1)\dots(X+k-2)((m-2)X+k+2-m)}{k!}$$

the Xth figurate number with parameters k and m. The power and equal values of $f_{k,m}(X)$ in special cases, including, for instance, binomial coefficients (for $m = 3$), polygonal numbers (for $k = 2$) and pyramidal numbers (for $k = 3$) have been studied intensively. In the second, third and fourth chapter we will investigate the polygonal and pyramidal numbers, so we have to introduce the concepts of them. Let

$$f_{2,m}(X) = Pol_m(X) = \frac{X\left((m-2)X+4-m\right)}{2}$$

and

$$f_{3,m}(X) = Pyr_m(X) = \frac{X(X+1)\left((m-2)X+5-m\right)}{6}$$

be the polygonal and pyramidal numbers with integral parameter $m \geq 3$.

Let k, m, l, n be fix integers, where $k > l \geq 2, m \geq 3, n \geq 3$ and we deal with the equation

$$f_{k,m}(x) = f_{l,n}(y), \tag{7.1}$$

where x, y are unknown integers. To examine the equation (7.1) in general is hopeless, so we concentrate on special quadruples (k, m, l, n). In the second and fourth chapters we will investigate the equation (7.1) in special cases.

In the second chapter we solve a Diophantine conjecture by Brindza, Pintér and Turjányi [16] without using any reduction methods. In [16], the authors proved that apart from an effectively computable set of m and

n, the equation

$$f_{3,m}(x) = f_{2,n}(y) \tag{7.2}$$

possesses only finitely many solutions and $\max(x, y) < C_1$, where C_1 is an effectively computable constant depending only on m and n. They conjectured that the cardinality of this exceptional set is one, namely it consists of the pair $(m, n) = (5, 4)$. We obtain the following

Theorem 7.1 *Apart from the pair* $(m, n) = (5, 4)$ *all the solutions* x *and* y *to* (7.2) *satisfy* $\max(x, y) < C_2$ *where* C_2 *is an effectively computable constant depending only on* m *and* n.

Remark. In the special case, when $(m, n) = (5, 4)$ we get the equation $x^2(x + 1)/2 = y^2$. One can easily check that it has infinitely many integer solutions.

In the third chapter we recall a classical equation of Mordell, who in his book [56, Chapter 27] proposed the following Diophantine problem. Are the only integer solutions of the equation

$$\binom{x}{3} + \binom{x}{2} + \binom{x}{1} + \binom{x}{0} = y^2 \tag{7.3}$$

given by $x = -1, 0, 2, 7, 15, 74$? Ljunggren [50] and Bremner [12], independently, resolved this equation, showing that there exists one additional solution, namely $x = 767$. We can rewrite equation (7.3) by using figurate numbers as

$$f_{3,3}(x - 2) + f_{2,3}(x - 1) + x + 1 = f_{2,4}(y). \tag{7.4}$$

The aim of this part is to generalize equation (7.4) to polygonal and pyramidal numbers. More precisely, we study the Diophantine equation

$$f_{3,m}(x-2)+f_{2,m}(x-1)+x+1=f_{2,n}(y). \tag{7.5}$$

In this chapter we can prove

Theorem 7.2 *For fixed positive integers* $m \geq 3, n \geq 3$ *with* $(m,n) \neq (50,3),(50,6)$*, all the solutions* x *and* y *to* (7.5) *satisfy* $\max(x,y) < C_3$*, where* C_3 *is an effectively computable constant depending only on* m *and* n*.*

In the exceptional cases $(m,n)=(50,3)$ and $(50,6)$, we have the curves $(16x+1)(2x-3)^2=(2y+1)^2$ and $(16x+1)(2x-3)^2=(4y-1)^2$, respectively. It is trivial that there are infinitely many integer points (x,y) on these curves.

In the fourth chapter we will generalize the equation (7.2). The purpose of this chapter is to give effective finiteness statements for the more general equation

$$f_{k,m}(x)=f_{2,n}(y) \tag{7.6}$$

in integers x and y. Furthermore, we will investigate the square value of the polynomial $f_{k,k+2}(X)=\frac{X^2(X+1)\cdots(X+k-2)}{(k-1)!}$ and provide that it can be a perfect square in only one case.

Theorem 7.3 *Let* m,n,k *be integers with* $k \geq 3$ *and where* $(m,n,k) \neq (5,4,3),(6,4,4)$*. If* k *is even, then assume further that* $k!D$ *is not of the form* $r^2, 2r^2$*, where* $D=\gcd(k!(n-4)^2, 8d(n-2))$ *with* $d=\gcd(k,m-2)$*. Then equation* (7.6) *has only finitely many solutions in* x,y *which can be effectively determined.*

If $(m,n,k)=(5,4,3),(6,4,4)$, then one can easily see that equation (7.6) has infinitely many solutions in x,y. As an immediate consequence, we obtain the following statement.

Corollary 7.1 *Let m, n, k be integers with $k \geq 4$. If k is even, then assume further that there exists a prime p with $k/2 < p < k$ such that $p \nmid n-2$. Then equation* (7.6) *has only finitely many solutions in x, y which can be effectively determined.*

Remark. Note that if $k > 2n$, then the condition in Corollary 7.1 is satisfied. Indeed, Bertrand's postulate guarantees the existence of a prime p with $k/2 < p < k$. Since now $p > k/2 > n > n-2$, we also have $p \nmid n-2$.

Theorem 7.4 *Suppose that $k \geq 3, m \geq 3, n \geq 14$ are integers with*

$$10m - 26 \leq n.$$

Then equation (7.6) *possesses only finitely many solutions in x, y which can be effectively determined.*

We closely follow arguments of Erdős [26, 27] and resolve an infinite family of Diophantine equations.

Theorem 7.5 *The only solution of the equation*

$$f_{k,k+2}(x) = f_{2,4}(y) \tag{7.7}$$

in integers $k \geq 5$, $x \geq k-2$ and $y \geq 1$ is $(k, x, y) = (5, 47, 3290)$.

For $k = 5$, our theorem follows from a classical theorem by Meyl [55]. The resolution of another parametric family of Diophantine problems $\binom{x+k-1}{k} = f_{k,3}(x) = f_{2,4}(y) = y^2$ in integers x, y and k follows from the result of Győry [33] on the power values of binomial coefficients.

In the fifth chapter let us define

$$f(x, k, d) = x(x+d)\cdots(x+(k-1)d)$$

and consider the Diophantine equation

$$f(x,k,d) = y^l. \tag{7.8}$$

Erdős [26] and independently Rigge [61] proved that the equation $f(x,k,1) = y^2$ has no integer solution. Erdős and Selfridge [28] extended this result when $d = 1$, $x \geq 1$ and $k \geq 2$ and they stated that $f(x,k,1)$ is never a perfect power. This type of Diophantine equations have been studied intensively. Erdős and Graham [25] examined the Diophantine equation

$$\prod_{i=1}^{r} f(x_i, k_i, 1) = y^2$$

for fixed $r \geq 1$ and $\{k_1, k_2, \ldots, k_r\}$ with $k_i \geq 4$ for $i = 1, 2, \ldots r$. In the last chapter we deal with the special case of Erdős and Graham. We give bounds for the size of the solutions of the Diophantine equation

$$\frac{x(x+1)(x+2)(x+3)}{(x+a)(x+b)} = y^2, \tag{7.9}$$

where $a, b \in \mathbb{Z}, a \neq b$ are parameters. We expand this result and provide bounds for the size of the solutions of the Diophantine equations

$$\frac{x(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)(x+5)}{(x+a)(x+b)} = y^2, \tag{7.10}$$

$$\frac{x(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)(x+5)}{(x+a)(x+b)(x+c)} = y^3, \tag{7.11}$$

$$\frac{x(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)(x+5)}{(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)} = y^2, \tag{7.12}$$

where $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ are pairwise distinct integers.

Theorem 7.6 *(I) Let $a \equiv b \ (mod\, 2)$. If $(x,y) \in \mathbb{Z}^2$ is a solution of* (7.9), *then*

$$|x| \le \max\{|A_2|, |A_1|^{1/2}, |A_0|^{1/3}, |B_2|, |B_1|^{1/2}, |B_0|^{1/3}, |\ \frac{1}{4}(a+b-6)^2ab\ |\},$$

where

$$\begin{aligned}
A_2 &= \frac{3}{4}\,a^2 + \frac{1}{2}\,ab + \frac{3}{4}\,b^2 - 2\,a - 2\,b + 7\\
A_1 &= -\frac{1}{4}\,a^3 + \frac{1}{4}\,a^2b + \frac{1}{4}\,ab^2 + 2\,a^2 - \frac{1}{4}\,b^3 + 2\,b^2 - 4\,a - 4\,b + 6\\
A_0 &= -\frac{1}{4}\,(a+b-4)^2ab\\
B_2 &= \frac{3}{4}\,a^2 + \frac{1}{2}\,ab + \frac{3}{4}\,b^2 - 4\,a - 4\,b - 5\\
B_1 &= -\frac{1}{4}\,a^3 + \frac{1}{4}\,a^2b + \frac{1}{4}\,ab^2 + 4\,a^2 - \frac{1}{4}\,b^3 + 4\,b^2 - 16\,a - 16\,b + 6\\
B_0 &= -\frac{1}{4}\,(a+b-8)^2ab.
\end{aligned}$$

(II) Let $a \not\equiv b \ (mod\, 2)$. *If* $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ *is a solution of* (7.9), *then*

$$|x| \le 2\max\{|C_2|, |C_1|^{1/2}, |C_0|^{1/3}, |D_2|, |D_1|^{1/2}, |D_0|^{1/3}\},$$

where

$$\begin{aligned}
C_2 &= \frac{3}{4}\,a^2 + \frac{1}{2}\,ab + \frac{3}{4}\,b^2 - \frac{7}{2}\,a - \frac{7}{2}\,b - \frac{5}{4}\\
C_1 &= -\frac{1}{4}\,a^3 + \frac{1}{4}\,a^2b + \frac{1}{4}\,ab^2 + \frac{7}{2}\,a^2 - \frac{1}{4}\,b^3 + \frac{7}{2}\,b^2 - \frac{49}{4}\,a - \frac{49}{4}\,b + 6\\
C_0 &= -\frac{1}{4}\,(a+b-7)^2ab\\
D_2 &= \frac{3}{4}\,a^2 + \frac{1}{2}\,ab + \frac{3}{4}\,b^2 - \frac{5}{2}\,a - \frac{5}{2}\,b + \frac{19}{4}\\
D_1 &= -\frac{1}{4}\,a^3 + \frac{1}{4}\,a^2b + \frac{1}{4}\,ab^2 + \frac{5}{2}\,a^2 - \frac{1}{4}\,b^3 + \frac{5}{2}\,b^2 - \frac{25}{4}\,a - \frac{25}{4}\,b + 6\\
D_0 &= -\frac{1}{4}\,(a+b-5)^2ab.
\end{aligned}$$

We apply the above theorem to determine all integral solutions of (7.9) with $a, b \in \{-4, -3, -2, -1, 4, 5, 6, 7\}, a \neq b$.

Corollary 7.2 *Let* $a, b \in \{-4, -3, -2, -1, 4, 5, 6, 7\}, a \neq b$. *All the solutions* $(x, y) \in \mathbb{Z}^2, y \neq 0$ *of* (7.9) *are as follows*

(a,b)	$(-4,-3),$	$(-4,5)$	$(-2,7)$	$(6,7)$
(x,y)	$(-6,2),(1,2)$	$(-6,6)$	$(3,6)$	$(-4,2),(3,2)$

Corollary 7.3 *Let $a \equiv b\ (mod\,2)$ and $t = \max\{|a|,|b|\}$. If $(x,y) \in \mathbb{Z}^2$ is a solution of the equation* (7.9) *then*

$$|x| \leq \max\{2t^2 + 13t,\ |\tfrac{1}{4}\,(a+b-6)^2\,ab|\}.$$

Corollary 7.4 *Let $a \not\equiv b\ (mod\,2)$ and $t = \max\{|a|,|b|\}$. If $(x,y) \in \mathbb{Z}^2$ is a solution of the equation* (7.9) *then*

$$|x| \leq 4t^2 + 20t.$$

Theorem 7.7 *Let $a, b \notin \{0,1,2,3,4,5\}$ and $t = \max\{|a|,|b|\}$. If $(x,y) \in \mathbb{Z}^2$ is a solution of the Diophantine equation* (7.10) *then either*

$$x \mid \left(3a^2 + 2ab + 3b^2 - 30a - 30b + 115\right)^2 ab \;\; or \;\; |x| \leq 16t^3 + 440t^2.$$

Theorem 7.8 *Let $a, b, c \notin \{0,1,2,3,4,5\}$ and $t = \max\{|a|,|b|,|c|\}$. If $(x,y) \in \mathbb{Z}^2$ is a solution of the Diophantine equation* (7.11) *then either*

$$x \mid (a+b+c-15)^3 abc \quad or \quad |x| \leq 6t^2 + 68t.$$

Theorem 7.9 *Let $a, b, c, d \notin \{0,1,2,3,4,5\}$ and $t = \max\{|a|,|b|,|c|,|d|\}$. If $(x,y) \in \mathbb{Z}^2$ is a solution of the Diophantine equation* (7.12) *then either*

$$x \mid (a+b+c+d-15)^2 abcd \quad or \quad |x| \leq 12t^2 + 132t.$$

Irodalomjegyzék

[1] È. T. Avanesov. Solution of a problem on figurate numbers. *Acta Arith.*, 12:409–420, 1966/1967.

[2] A. Baker. Bounds for the solutions of the hyperelliptic equation. *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 65:439–444, 1969.

[3] A. Baker. *Transcendental number theory.* Cambridge Mathematical Library. Cambridge University Press, Cambridge, second edition, 1990.

[4] A. Baker and H. Davenport. The equations $3x^2-2=y^2$ and $8x^2-7=z^2$. *Quart. J. Math. Oxford Ser. (2)*, 20:129–137, 1969.

[5] M. Bauer and M. A. Bennett. On a question of Erdős and Graham. *Enseign. Math. (2)*, 53(3-4):259–264, 2007.

[6] M. A. Bennett. Lucas' square pyramid problem revisited. *Acta Arith.*, 105(4):341–347, 2002.

[7] M. A. Bennett, N. Bruin, K. Győry, and L. Hajdu. Powers from products of consecutive terms in arithmetic progression. *Proc. London Math. Soc. (3)*, 92(2):273–306, 2006.

[8] M. A. Bennett and R. Van Luijk. Squares from blocks of consecutive integers: a problem of Erdős and Graham. *Indag. Math., New Ser.*, 23(1-2):123–127, 2012.

[9] F. Beukers, T. N. Shorey, and R. Tijdeman. Irreducibility of polynomials and arithmetic progressions with equal products of terms. In *Number theory in progress, Vol. 1 (Zakopane-Kościelisko, 1997)*, pages 11–26. de Gruyter, Berlin, 1999.

[10] Yu. Bilu. Effective analysis of integral points on algebraic curves. *Israel J. Math.*, 90(1-3):235–252, 1995.

[11] W. Bosma, J. Cannon, and C. Playoust. The Magma algebra system. I. The user language. *J. Symbolic Comput.*, 24(3-4):235–265, 1997. Computational algebra and number theory (London, 1993).

[12] A. Bremner. An equation of Mordell. *Math. Comput.*, 29:925–928, 1975.

[13] B. Brindza. On S-integral solutions of the equation $y^m = f(x)$. *Acta Math. Hungar.*, 44(1-2):133–139, 1984.

[14] B. Brindza. On a special superelliptic equation. *Publ. Math. Debrecen*, 39(1-2):159–162, 1991.

[15] B. Brindza and Á. Pintér. On the irreducibility of some polynomials in two variables. *Acta Arith.*, 82(3):303–307, 1997.

[16] B. Brindza, Á. Pintér, and S. Turjányi. On equal values of pyramidal and polygonal numbers. *Indag. Math. (N.S.)*, 9(2):183–185, 1998.

[17] Y. Bugeaud. Bounds for the solutions of superelliptic equations. *Compositio Math.*, 107(2):187–219, 1997.

[18] Y. Bugeaud, M. Mignotte, S. Siksek, M. Stoll, and Sz. Tengely. Integral points on hyperelliptic curves. *Algebra Number Theory*, 2(8):859–885, 2008.

[19] H. Darmon and L. Merel. Winding quotients and some variants of Fermat's last theorem. *J. Reine Angew. Math.*, 490:81–100, 1997.

[20] B. M. M. de Weger. A binomial Diophantine equation. *Quart. J. Math. Oxford Ser. (2)*, 47(186):221–231, 1996.

[21] B. M. M. de Weger. Equal binomial coefficients: some elementary considerations. *J. Number Theory*, 63(2):373–386, 1997.

[22] E. Deza and M. M. Deza. *Figurate numbers.* World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Hackensack, NJ, 2012.

[23] L. E. Dickson. *History of the theory of numbers. Vol. II: Diophantine analysis.* Chelsea Publishing Co., New York, 1966.

[24] A. Dujella, K. Győry, and Á. Pintér. On the power values of pyramidal numbers, I. *Acta Arith.*, 155(2):217–226, 2012.

[25] P. Erdős and R. L. Graham. *Old and new problems and results in combinatorial number theory.* 1980.

[26] P. Erdős. Note on the product of consecutive integers (II). *J. London Math. Soc.*, 14:245–249, 1939.

[27] P. Erdős. On a Diophantine equation. *J. London Math. Soc.*, 26:176–178, 1951.

[28] P. Erdős and J. L. Selfridge. The product of consecutive integers is never a power. *Illinois J. Math.*, 19:292–301, 1975.

[29] M. Fujiwara. Über die obere Schranke des absoluten Betrages der Wurzeln einer algebraischen Gleichung. *Tôhoku Math. J.*, 10:167–171, 1916.

[30] A. Grytczuk and A. Schinzel. On Runge's theorem about Diophantine equations. In *Sets, graphs and numbers (Budapest, 1991)*, volume 60 of *Colloq. Math. Soc. János Bolyai*, pages 329–356. North-Holland, Amsterdam, 1992.

[31] K. Győry. *Diofantikus problémákra vonatkozó effektív végességi tételek és alkalmazásaik.* Akadémiai doktori értekezés. Debrecen, 1983.

[32] K. Győry. *Résultats effectifs sur la représentation des entiers par des formes décomposables*, volume 56 of *Queen's Papers in Pure and Applied Mathematics.* Queen's University, Kingston, Ont., 1980.

[33] K. Győry. On the Diophantine equation $\binom{n}{k} = x^l$. *Acta Arith.*, 80(3):289–295, 1997.

[34] K. Győry. On the Diophantine equation $n(n+1)\cdots(n+k-1) = bx^l$. *Acta Arith.*, 83(1):87–92, 1998.

[35] K. Győry, L. Hajdu, and Á. Pintér. Perfect powers from products of consecutive terms in arithmetic progression. *Compos. Math.*, 145(4):845–864, 2009.

[36] K. Győry, L. Hajdu, and N. Saradha. On the Diophantine equation $n(n+d)\cdots(n+(k-1)d) = by^l$. *Canad. Math. Bull.*, 47(3):373–388, 2004.

[37] L. Hajdu and T. Kovács. Almost fifth powers in arithmetic progression. *J. Number Theory*, 131(10):1912–1923, 2011.

[38] L. Hajdu and Á. Pintér. Combinatorial Diophantine equations. *Publ. Math. Debrecen*, 56(3-4):391–403, 2000. Dedicated to Professor Kálmán Győry on the occasion of his 60th birthday.

[39] L. Hajdu, Á. Pintér, Sz. Tengely, and N. Varga. Equal values of figurate numbers. *J. Number Theory*, 137:130–141, 2014.

[40] L. Hajdu, Sz. Tengely, and R. Tijdeman. Cubes in products of terms in arithmetic progression. *Publ. Math. Debrecen*, 74(1-2):215–232, 2009.

[41] B. He, Á Pintér, A. Togbe, and N. Varga. A generalization of a problem of Mordell. *Glasnik Math.*, 50(1):35–41, 2015.

[42] D. L. Hilliker and E. G. Straus. Determination of bounds for the solutions to those binary Diophantine equations that satisfy the hypotheses of Runge's theorem. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 280(2):637–657, 1983.

[43] N. Hirata-Kohno, S. Laishram, T. N. Shorey, and R. Tijdeman. An extension of a theorem of Euler. *Acta Arith.*, 129(1):71–102, 2007.

[44] M. Kaneko and K. Tachibana. When is a polygonal pyramid number again polygonal? *Rocky Mountain J. Math.*, 32(1):149–165, 2002.

[45] P. Kiss. On the number of solutions of the Diophantine equation $\binom{x}{p} = \binom{y}{2}$. *Fibonacci Quart.*, 26(2):127–130, 1988.

[46] S. Laishram and T. N. Shorey. The greatest prime divisor of a product of consecutive integers. *Acta Arith.*, 120(3):299–306, 2005.

[47] S. Laishram and T. N. Shorey. The equation $n(n+d)\cdots(n+(k-1)d) = by^2$ with $\omega(d) \le 6$ or $d \le 10^{10}$. *Acta Arith.*, 129(3):249–305, 2007.

[48] A. K. Lenstra, H. W. Lenstra Jr., and L. Lovász. Factoring polynomials with rational coefficients. *Math. Ann.*, 261(4):515–534, 1982.

[49] W. Ljunggren. New solution of a problem proposed by E. Lucas. *Norsk Mat. Tidsskr.*, 34:65–72, 1952.

[50] W. Ljunggren. A diophantine problem. *J. London Math. Soc. (2)*, 3:385–391, 1971.

[51] F. Luca and P.G. Walsh. On a diophantine equation related to a conjecture of Erdős and Graham. *Glas. Mat., III. Ser.*, 42(2):281–289, 2007.

[52] E. Lucas. Problem 1180. *Nouvelles Ann. Math.*, 2(14).

[53] E. Lucas. Solution to problem 1180. *ibid.*, 16:429–432, 1877.

[54] J.V. Matiyasevich. *Hilbert's Tenth Problem.* MIT Press, London, 1993.

[55] A. J. J. Meyl. Solution de question 1194. *Nouv. Ann. Math.*, 17:464–467, 1878.

[56] L. J. Mordell. *Diophantine equations.* Pure and Applied Mathematics, Vol. 30. Academic Press, London, 1969.

[57] R. Obláth. Über das Produkt fünf aufeinander folgender Zahlen in einer arithmetischen Reihe. *Publ. Math. Debrecen*, 1:222–226, 1950.

[58] Á. Pintér. A note on the Diophantine equation $\binom{x}{4} = \binom{y}{2}$. *Publ. Math. Debrecen*, 47(3-4):411–415, 1995.

[59] Á. Pintér and N. Varga. Resolution of a nontrivial Diophantine equation without reduction methods. *Publ. Math. Debrecen*, 79(3-4):605–610, 2011.

[60] Cs. Rakaczki. On the Diophantine equation $F(\binom{x}{n}) = b\binom{y}{m}$. *Period. Math. Hungar.*, 49(2):119–132, 2004.

[61] O. Rigge. Über ein diophantisches problem. In *9th Congress Math. Scand.*, pages 155–160. Mercator 1939, Helsingfors 1938.

[62] C. Runge. Über ganzzahlige Lösungen von Gleichungen zwischen zwei Veränderlichen. *J. Reine Angew. Math.*, 100:425–435, 1887.

[63] A. Sankaranarayanan and N. Saradha. Estimates for the solutions of certain Diophantine equations by Runge's method. *Int. J. Number Theory*, 4(3):475–493, 2008.

[64] N. Saradha. On perfect powers in products with terms from arithmetic progressions. *Acta Arith.*, 82(2):147–172, 1997.

[65] N. Saradha and T. N. Shorey. Almost squares in arithmetic progression. *Compositio Math.*, 138(1):73–111, 2003.

[66] A. Schinzel. An improvement of Runge's theorem on Diophantine equations. *Comment. Pontificia Acad. Sci.*, 2(20):1–9, 1969.

[67] M. Skałba. Products of disjoint blocks of consecutive integers which are powers. *Colloq. Math.*, 98(1):1–3, 2003.

[68] V. G. Sprindžuk. The arithmetic structure of integer polynomials and class numbers. *Trudy Mat. Inst. Steklov.*, 143:152–174, 210, 1977. Analytic number theory, mathematical analysis and their applications (dedicated to I. M. Vinogradov on his 85th birthday).

[69] W. A. Stein et al. *Sage Mathematics Software (Version 6.0).* The Sage Development Team, 2014. `http://www.sagemath.org`.

[70] Sz. Tengely. On the Diophantine equation $F(x) = G(y)$. *Acta Arith.*, 110(2):185–200, 2003.

[71] Sz. Tengely. Note on the paper: „An extension of a theorem of Euler" [Acta Arith. **129** (2007), no. 1, 71–102; mr2326488] by N. Hirata-Kohno, S. Laishram, T. N. Shorey and R. Tijdeman. *Acta Arith.*, 134(4):329–335, 2008.

[72] Sz. Tengely and N. Varga. On a generalization of a problem of Erdős and Graham. *Publ. Math. Debrecen*, 84(3–4):475–482, 2014.

[73] Sz. Tengely and N. Varga. Rational function variant of a problem of Erdős and Graham. *Glasnik Math.*, 50(1):65–76, 2015.

[74] M. Ulas. On products of disjoint blocks of consecutive integers. *Enseign. Math. (2)*, 51(3-4):331–334, 2005.

[75] P. M. Voutier. An upper bound for the size of integral solutions to $Y^m = f(X)$. *J. Number Theory*, 53(2):247–271, 1995.

[76] P. G. Walsh. A quantitative version of Runge's theorem on Diophantine equations. *Acta Arith.*, 62(2):157–172, 1992.

[77] G.N. Watson. The problem of the square pyramid. *Messenger of Math.*, 48:1–22, 1918.

[78] P. Z. Yuan. On a special Diophantine equation $a\binom{x}{n} = by^r + c$. *Publ. Math. Debrecen*, 44(1-2):137–143, 1994.