

A matematika informális háttere

Jelölt:

Málik József Zoltán

Témavezető:

Dr. habil. Mihálydeák Tamás



DEBRECENI EGYETEM

Humán Tudományok Doktori Iskola

Debrecen, 2010

I. AZ ÉRTEKEZÉS ELŐZMÉNYEI ÉS CÉLJA

Disszertációm a matematikai modellálás filozófiai problémájával foglalkozik. Évek óta érdeklődöm e téma iránt mind elméleti szempontból (az ELTE-n kiírt matematikafilozófiai pályázaton díjazott pályamunkával vettem részt [1]), mind azért, mert a racionális döntéelméletben végzett interdiszciplináris kutatásaim során (amiben PhD fokozatot szereztem az ELTE-n) felvetődik a kérdés: milyen relevanciával bírnak az alkalmazott matematikai modellek azokra a problémákra, amiket ilyen modellekkel vizsgálunk?

1. Példa Már megalkotása idején világosan felismerték, hogy gazdasági és társadalmi szituációk modellezésére a játékelmélet alkalmas lehet. A játékelmélet atyja, Neumann János már az első ilyen tárgyú, a társasjátékok elméletét tárgyaló, 1926-ban tartott matematikai előadásában hangsúlyozza: “stratégiai helyzetben minden egyes játékos sorsa saját cselekvésén kívül még játéktársai cselekedeteitől is függ”, s ekkor a kérdés: „[...] hogyan kell a játékosok egyikének játszania, hogy a lehető legkedvezőbb eredményt érje el? [...] aligha van a mindennapi életnek olyan kérdése, amelyben ez a probléma ne szerepelne”¹.

A fogolydilemma helyzetek a potyautas magatartás játékelméleti modelljei, amelyekkel a mindennapi életünkben gyakran találkozunk. E helyzetek sajátos logikája az, hogy bár az összes individuum jobban jár, ha kooperálnak, mégis mivel minden egyes individuum egy magasabb kifizetést ér el társadalmi dezertálás esetén, ezért számolni kell a potyautas magatartással. Ez tudományosan magyarázza a fogolydilemma jelenségeket az élet számtalan területén, a blicceléstől, a korrupción át, a környezetszennyezésig. De mi van akkor, ha félreismerjük a szereplők preferenciáit, így rosszul modellezzük a helyzetet? Az 1962-es kubai rakétaválságot a Kennedy kormány által felkért szakértői stáb gyáva nyúl-dilemmaként modellálta, az amerikai fél részéről merev, a szovjet féltől meghátrálást elváró állásponttal, azonban a helyzet átfordulhatott volna a tetten ért betörő esetére: „mi van, ha azt hiszi löni akarok, ezért rám lő?”.



Szakmai publikációmban [6] erre mutattam példát a Falkland-szigeteki konfliktus esetére, ami háborúhoz vezetett 1982-ben Nagy-Britannia és Argentína között.

¹Vö. Neumann J. (1928): A társasjátékok elméletéhez. In.: Neumann J. (1965): Válogatott előadások és tanulmányok, Bp., KJK, p. 121-156.

A játékelméleti érvelés szigorú logikai úton halad, „ha..., akkor” típusú érvelést használ. Azonban, amikor egy társadalmi helyzetre alkalmazzuk, „visszafelé” járunk el és jutunk ide. Miután felmértük a játékosok lehetséges stratégiáit, a különböző stratégiákhoz keresünk olyan játékok halmazát, amely halmazban az egyes lehetséges stratégiák egyensúlyiak. Ezt a szakirodalomban játéktervezésnek („*game engineering*”) nevezik. A játéktervezés menete már nem épülhet szigorú „ha..., akkor...” típusú érvekre, hiszen amikor a szituációban a felek stratégiáihoz modelláló játékot keresünk, ez esetlegességet hordoz magában. Tehát az érvelés itt sokkal inkább „ha..., bizonyára /esetleg /lehet, hogy ...” alakú. Emiatt ugyanannak a társadalmi helyzetnek akár több játékelméleti modellje is megadható.

A 2. Példa a matematika és fizika kapcsolatát és az idő filozófiai problémáját is érinti. Mint ismert, Arisztotelész az idő fogalmát a változás fogalmához köti a *Fizikában*. Ebből eredő az a metafizikai pozíció, hogy az idő csak a változás segítségével mérhető. Leibniz ebből két fontos következtetésre jutott: i) a mozgás és a nyugalom viszonylagosak; ii) a tér és idő elválaszthatatlan egységet alkot, mivel a tér két egyidejűleg létező tárgy közötti távolság, míg az idő két esemény közötti távolság. A másik metafizikai pozíció az abszolút idő gondolata (Galilei-Newton), és hogy idő létezhet olyan világban is, ahol nincs változás (Shoemaker). Tehát létezik abszolút idő, de azt nem mérhetjük. Newton úgy érvelt Leibniz ellen, mint a másik nézet képviselőjével szemben, hogy ha minden mozgás relatív, akkor a gyorsulásnak is relatívnak kell lennie, pedig fizikailag megfigyelhető, vagyis *tapasztalati* különbségek vannak egy gyorsuló és egy nem gyorsuló mechanikai rendszer között. A mozgás relativitása elleni érvet nem lehetett a tizenhetedik század fizikájával megválaszolni. Az általános relativitáselméletre volt szükség, hogy megválaszolják Newton ellenvetését. Ugyanakkor, a kérdés ezzel nem tisztázódott. A disszertációmban a 4. fejezetben matematikafilozófiai érvet hozok arra, hogy a kétféle metafizikai pozíció között nem lehet választani tapasztalat alapján, mivel nincs olyan tapasztalat, ami alapján eldönthető, hol húzzuk meg a határt fizika és a téridő geometriája között. Ahogy a newtoni fizika nem dönthette meg a leibnizi metafizikai pozíciót, ugyanígy az einsteini fizika sem ingathatja meg a galilei-newton-féle metafizikai pozíciót.

A probléma alaposabb tárgyalásához, meg kellene vizsgálni a kapcsolatot a pre-analitikus fogalmakkal rendelkező informális matematika és a definíciókkal, valamint szakmai axiómákkal (mint az aritmetika Peano axiómái) dolgozó, formális matematikai elmélet között. Ez a probléma a matematika „belügyeiben” is növekvő jelentőséggel bír. A matematikai kutatás és oktatás tradicionális paradigmája a következő: az ember definiál fogalmakat, e fogalmakra alapozva elfogad bizonyos

alapvető igazságokat, amelyeket szakmai axiómáknak nevezünk, majd ezek alapján kimond egy tételt és bizonyos szabályokat felhasználva, bizonyítja azt. Ugyanakkor a matematikai kutatás és eredmények kitágulásával, valamint – a Wigner, Chaitin és Hamming (alkalmazhatóság és hatékonyság), Lakatos és Putnam (informális aspektusok a bizonyításban) által kezdeményezett – „empirikus matematika” kibontakozásával, amit a számítógépek tesznek lehetővé, a sejtések szisztematikus átgondolása és algoritmusok tervezése új távlatot, de kihívást is jelent: mikor jó egy sejtés? Hogyan lehet ezekről az eredményekről beszámolni és beépíteni azokat a matematikai tudományba?

Híres sejtések, mint a Fermat sejtés², amiből 330 év után, 1995-ben tétel lett, nagy hajtóerőt jelentettek a matematikai kutatásban. Erdős Pál matematikus híres volt számtalan sejtéséről, és ő ezeket matematikai munkásságának részeként tekintette. Fajtlowitz amerikai matematikus pedig egy számítógépes programot (GRAFFITI) fejlesztett ki, amivel gráfelméleti sejtéseket generált. Az egyik ilyen sejtésről kiderült, hogy a bonyolultságelmélet egy kulcskérdéséhez kapcsolódik (amiről később bebizonyították, hogy nem igaz).

A matematika objektumait, az alkalmazott matematikai és logikai módszereket két különböző módon is kezelhetjük, ami például megnyilvánul abban, hogy számos matematikai tételnek létezik egzisztenciális és konstruktív bizonyítása is. Az első sokszor rövidebb és elegánsabb, a másik viszont többletinformációt (pl. egy algoritmust) szolgáltat a tételhez. Ez a két program, a matematika tradicionális programja és a konstruáláson alapuló programja, egy másik régi problémát is felelevenítenek. A görögök a kiterjedés (nagyság) és szám egymástól való elválásában a matematika krízisét ismerték föl: nem tekintették számnak a $\sqrt{2}$ -t, ugyanakkor, mint mennyiséggel (pl. az egységoldalú négyzet átlója) kénytelenek voltak szembesülni. Hogy is van ez? Ha diszkrét és számolnunk kell vele, akkor kimondhatatlan (*ἄπρητος*), ha egy vonal, akkor létező (geometriai) entitás? Így jutunk a folytonos és diszkrét matematikai struktúrák egymáshoz való viszonyának kényes problémájához, ami végighúzódtott a matematika egész történetén, és amiktől máig a matematikai alkalmazások nem tudnak teljesen megszabadulni.

Ma egy adott terület kutatója sokszor mindkét fajta matematikai struktúrával kénytelen dolgozni. A matematika alkalmazásának hagyományos területe a fizika, ahol az alkalmazott

² Wiles tétele vagy a nagy Fermat sejtés: ha $n > 2$ egész, akkor nincsenek olyan csupa nullától különböző x, y, z egészek, amelyekre $x^n + y^n = z^n$ teljesül.

matematikai eszköz a függvény-kalkulus, amely inkább folytonos struktúrákkal foglalkozik, de még a fizikus is találkozik diszkrét matematikai rendszerekkel, pl. a kvantumtérelméletben és az elemi részecskék területén. A lineáris programozás sikere a közgazdaságtanban és az operációkutatásban azon a feltevésen alapszik, hogy a termelési folyamatok korlátlanul oszthatók és konvex függvényekkel írhatók le; az oszthatatlanságok figyelembevétele döntéseknél viszont diszkrét programozáshoz és más kombinatorikus optimalizációs modellekhez vezet.

Ilyen jellegű problémák vetették fel a matematika alapjainak vizsgálatát, a matematika filozófiáját mint szakfilozófiát, amelyben filozófiai megfontolásokon alapuló feltevéseket és elméleteket fogalmazunk meg a matematikai szemléletről és objektumokról, a matematikai igazságról és bizonyításról, végül is a matematika kifejezőerejéről és korlátairól, hogy azután ezeket teszteljük matematikai eszközökkel. A fent említett tradicionális paradigma a matematikai realizmus (PLATONIZMUS) szellemében cselekszik, amely a matematika klasszikus fogalmainak önálló létezést tulajdonít, függetlenül attól, gondoljuk-e azokat vagy nem, és úgy véli, a matematikai állítások igazságát pusztán e fogalmak analízisével, logikai úton fedezhetjük fel. A másik út, részben KONSTRUKTIVISTA, amely a matematikai objektumok véges konstrukciójával foglalkozik, részben Lakatos Imre matematikafilozófiai elképzeléseit kell adaptálnia.

Dolgozatom megcélzott témája, a matematika informális hátterének vizsgálata, ezekre a hagyományos és időszerű problémákra adott válaszként tekinthetjük.

II. AZ ALKALMAZOTT MÓDSZEREK VÁZOLÁSA

Az értekezés kifejtése alapvetően tematikus jellegű, metamatematikai, logikai, halmazelméleti, aritmetikai és geometriai témákat elemez és ezeket matematikailag releváns filozófiai kérdésekhez kapcsolja, amelyeknek történeti hátterét a 6. fejezet ismerteti, és ez összegzi a szerző koncepcióját is.

Az antik görögök szemlélete alapvetően a geometrián alapult, bár alternatíva akkor is akadt (a püthagoreusok aritmetikai szemlélete). A káoszt úgy fogták fel, mint geometria nélküli világ. Anaximandrosz szerint, a világ a határtalanból (*ἄπειρον*) születik meg és abban hal el. A létezés az, amikor a dolgok formát öltenek, határuk lesz, és így mérhetőek lesznek. Euklidész szerint, a vonal kiterjedés nélküli pontokból

áll, ugyanakkor a vonalnak van mérete: a hossza. Tehát, hogy pontokból vonal legyen, végtelen sok pont kell. De hogyan lehet egy nem-létezőből valami létezőt kapni? A kiterjedés nélküli, vagyis nem-létező pont semmi vagy valami? S ha semmi, akkor hogyan kaphatunk valamit – a vonalat. Az olyan szakaszoknak, amelyek által létrehozott négyzet területe bár egész szám, de nem négyzetszám, nincs közös mértéke a hosszegységgel (pl. $\sqrt{2}$ vagy $\sqrt{5}$). Ezzel a problémával Platón a *Theaitetosz* dialógusaiban foglalkozik, de teljes kifejtését Euklidesznél az *Elemek* x. könyvében találjuk meg. A görögök a „négyzetes irracionálisakat” nem tekintették számoknak, mivel nem mérhetőknél, azaz számokkal ki nem fejezhetőknél tartották őket.

Felvethető az előbbi probléma az ellenkező irányból, általánosabb formában: vajon a teret (és az időt) korlátlanul oszthatónak vagy pedig tovább nem osztható kisebb „atomokból” állónak képzeljük-e el? Zénón apóriákkal próbálta kimutatni, hogy mind az egyik, mind a másik feltételezés ellentmondáshoz vezet. A tér végtelen oszthatóságának problémája veti fel a folytonosság kérdését. Az emberiség sokszínű teremtménységei, illetve különböző világszemlélete egy valamiben osztozni látszanak: elfogadják a világ intenzív végtelenségének posztulátumát, vagyis a fizikai világ folytonosságát előfeltételezik. S valóban, nehéz elképzelni egy olyan világot, bár ennek lehetőségét kizárni nem lehet (Shoemaker), amiben „időbeli” hézagok lennének. A xix. század végéig el is fogadták ezt, az Arisztotelész *Fizikájában* lefektetett elvet: *infinitum actu non datur* („az aktuális végtelen kizárt”). Ez megbízható eszköznek bizonyult, hogy gondolkodásunkat megkíméljük az ilyen jellegű problémák által felvetett paradoxonokkal szemben.

A létezés és folytonosság problémájához kapcsolódva, a matematikai gondolkodásnak van három permanens „archaikus” problémája: az irracionális mennyiségek, a végtelen és az önreferencia problémája. Az antik matematika számára az irracionális mennyiségek kezelése komoly gondot, az antik filozófia számára a végtelen problémája kihívást jelentett. Az előbbi a Püthagoreusok egyenesen kimondhatatlannak nevezték el, az utóbbinak a következménye az lett, hogy a matematikát az arisztotelészi „*infinitum actu non datur*” elve vezérelte. Az aktuális végtelen tabuját azonban fel kellett adni a matematikában, mivel a fizika és matematika területén egyszerre jelentkező igény, hogy a végtelen kis változásokat és az ezzel összefüggő határátmenetet kezelhessék, ezt követelte meg. A Newton és

Leibniz által kidolgozott függvény-kalkulus a természettudomány rendkívül hatékony eszközének bizonyult, azonban alkalmazott alapfogalmát, az infinitezimálist nem lehetett kifogástalanul használni. Kiváló matematikusok (Cauchy, Heine, Weierstrass) hosszú erőfeszítésére volt szükség, hogy a határérték fogalmát tisztázzák, ám csak a végtelen halmazok Cantor-féle elméletében nyert egzakt megalapozást.

Azonban nehézségeink a halmazelméletben fennmaradtak. Az irracionális mennyiségek problémája a kontinuum-hipotézisben, a végtelen problémája a Skolem-paradoxonban köszön vissza. Ha eldönthetetlen kérdés, hogy a valós számok „hézagmentesen” helyezkednek-e el a számegyenesen, akkor végül is nem mondható szilárdnak az alap, amelyen bizonyítható a szabályos sorozatok határértékének egzisztenciája és a kontinuum folytonosságára vonatkozó állítások. A végtelenség fogalma szétfeszíti a létezés intuitív felfogását. A létezés egyik kritériuma lehet a koherencia elve: mindaz, ami belsőleg nem ellentmondásos, létezik. Egy másik – a „naiv realizmus” szellemében fogant – kritérium: a konstruktivitás. A Skolem-paradoxon kérdése, hogyan férhet el nemmegszámlálható halmazok rendszere egy modell megszámlálható tartományán, mindkét kritériumot megfojtja.

Alig pár évvel Cantor megoldása után, ami az aktuális végtelent visszahozta a matematikába, olyan paradoxonokat mutattak ki, amiket a halmazelméletből száműzni nem, csak kizárni lehet. A megarai iskola paradoxonja hívta életre az önreferencia problémáját, amelynek háttérében olyan kifejezéseket találunk, amelyek önmagukra utalnak vissza. Ez a probléma a halmazelméletben is feltűnik: vajon önmagának az eleme-e az összes olyan halmazoknak a halmaza, amelyek nem elemei önmaguknak? A kézenfekvő válasz, hogy akkor és csak akkor eleme önmagának, ha nem eleme önmagának. Az önreferencia jelenségének alkalmazása rejlik Gödel tételének háttérében is, amelyben kimutatta, hogy a matematikai elméletek nem lehetnek zárt rendszerek, mivel ilyen rendszer alapjai igazolhatatlanok a rendszerben.

Az igazságelméletben van egy nevezetes állítás, amit Münchhausen-trilemmának neveznek: bármely adott elmélet elveken alapul. Mármost ezeket az elveket vagy (1) igazként kezeljük, bár nem megalapozottak; vagy (2) ezek az elvek más elveken alapulnak és ezek a más elvek még további elveken, *ad infinitum*; vagy (3) ezeket az elveket holisztikusan, a konzekvenciáikon (tehát nem abszolút módon)

kezeljük megalapozottként. A trilemmában a tudományos bizonyosságok Münchhausen báró történetét elevenítik fel, a legendás bárót, aki képes volt magát a hajánál keresztül kihúzni az ingoványból, amibe beleragadt. Ha a trilemma első opcióját választjuk, akkor a tudás fideista elméletéhez jutunk: felismerjük, hogy az adott elmélet nem demonstratív elveken alapul, de ennek dacára az elveket stabilnak és érvényesnek tekintjük. Ilyennek tartjuk a matematikai igazság konvencionalista felfogását, a platonista és konstruktivista matematikai irányzatot. A második opció szerint, mivel bármely elmélet ellen kifogások vethetők fel és elveik megalapozására konzekvens, átlátható érvrendszer nem létezik, így a matematikus alapvetően szkeptikus, de a nehézségek dacára úgy próbálja alkalmazni tárgyát, hogy az eredmények felhasználhatók legyenek. Ez jellemzi a matematikai igazság pragmatista felfogását, és ezt vallották a formalisták is, akik szerint a matematikai kifejezéseknek nincs jelentése, a matematika a formális rendszerek tudománya; amíg nem jött Gödel, hogy bizonyítsa: abban is szkeptikusak legyünk, hogy a matematika ilyen módon instrumentalizálható. A harmadik opció, méltányolja az előbbi kettő érveit, de az igazság egy minimalista, axiológiai útját mutatja fel. A 3. fejezetben bemutatott Tarski-típusú korrespondencia és koherenciaelméleti érveléssel ehhez a stratégiához jutunk.

Révén, hogy az igazság nem hozzáférhető, ezért a formális matematikai elméletek szemantikai-pragmatikai háttérét nem statikusan, hanem – Lakatos Imre „bizonyítások és cáfolatok” módszerét használva – dinamikusan kezeljük. Kiindulási pontunk egy informális háttér, amelyből fogalmak és levezetések generálódnak. Új tételek, elméletek jönnek létre, amelyek azonban nem stabilak és végérvényesek, mivel fogalmaik és bizonyításaik sem azok. Az elmélet fogalmainak jelentése a nyelven kívül, kognitív úton körvonalazódik, az elmélet alkalmazásában ölt testet, majd visszahat a nyelven kívüli, informális háttérre. S ez az oda-visszafelé történő mozgás folyik szüntelen: ez az „élő matematika”. A „bizonyítások és cáfolatok” módszere egy olyan episztemiológiai pozíciót képvisel, amelynek centrális jelentősége, hogy a matematikát fejlődésében vizsgálja. Nincsenek statikus fogalmak a matematikai elméletekben, és a matematikai diskurzust nem lehet átfogó világképhez és kommunikációs formához kötni.

III. AZ EREDMÉNYEK RÖVID ÖSSZEFOGLALÁSA

A 4. fejezetben tárgyalt „tér” vizsgálata jól illusztrálja az elmondottakat. A matematikában a „tér” a struktúrák egyik típusa, amelyet környezetrendszerrel vagy vele ekvivalens nyílt halmazok rendszerével jellemezhetünk. Az így nyert formális térstruktúrát *topológiának* nevezzük, amelynek elemi alkotórészét, a pontot, definiálatlan alapfogalomként kezeli a topológia. Végül is bármilyen halmaz felruházható topológikus struktúrával. A mi valóságos terünk szintén felfogható topológikus struktúraként, azonban e térnek nemcsak az alapszerkezete, de e szerkezetet hordozó halmaz is empirikus jelentéssel bír, amik a fizikai tér fogalmának egzisztencia-előfeltevéseiként tekinthetők. Ez a tér-fogalom soha nem lehet befejezett, mivel a térben lévő fizikai test jellemzői (anyag, hely, idő, mozgás) a világ minden lényeges vonásában megnyilvánulnak és kapcsolatban vannak. Megmutatható, hogy a geometria axiómáiba bevitt egzisztencia-előfeltevések és a fizikai elméletek explicite, posztulátumokban kifejezett egzisztencia-előfeltevései úgy hathatnak egymásra, hogy a világ eseményeinek izomorf episztemikus reprezentációihoz jutunk. Ugyanakkor a fizikai elméletek egzisztencia-előfeltevései által karakterizált világképek nyilvánvalóan inkompatibilisek. A fizikusok ezért kénytelenek megrostálni a különböző interpretációkat, de ezek szükségszerűen olyan kritériumok alapján történnek, amik az elméletek szempontjából exogén elemet is tartalmaznak. Ezek nem evidenciák, hanem az elmélet informális háttéréből származó, koherensnek mutakozó, magyarázó tények.

Tétel: A következő feltételek inkonzisztens feltételrendszert alkotnak.

- (1) K a matematika tudás konzisztens rendszere;
- (2) K deduktíven zárt a következmény-relációra nézve;
- (3) K-nak része - az aritmetika
- a TND szabálya;
- (4) K az állítások Gödel-kódolt rendszere (konstruktivista módszertani elv);
- (5) Pozitív introspektivitás:
a matematikai szemlélet interszonalitása (Lucas-Penrose érv)

Az 5. fejezetben bemutatunk egy – Gödel, Tarski és Lakatos gondolatait ötvöző – tételt, amely alapján úgy tűnik, hogy a matematika számos szempontja, így a matematikai objektumok (számok, struktúrák, a végtelen absztrakciója), matematikai és logikai módszerek (pl. bizonyítási

módok), az algoritmuselmélet alaptézise (Church-Turing-tézis), de még az elsőrendű logika adekvátsága is – Quine szavaival élve – ontológia-függő.

Ez azt jelenti, hogy a „konzisztens matematikai tudás” feltétele mellett, bizonyos szempontok nem tarthatók fent anélkül, hogy egy matematikus ne tisztázza

magáról, legalább a matematikai és logikai módszereket illetően, hogy platonista vagy konstruktivista. Ugyanakkor, példákat mutatunk, hogy ezzel paradoxonok zsákutcájába jut intuíciónk, és megkérdőjelezhető, hogy a kiindulásként vett definíciókat és szakmai axiómákat tényleg igaznak vehetjük-e.

Az ellentmondások feloldására, a „bizonyítások és cáfolatok” módszere mellett, egy formálódó metafizikai szemléletre teszünk javaslatot. Egy matematikai elmélet megragadható mentális-nyelvi konstrukcióként, és ez a konstrukció korlátozott és ontológiailag elkötelezett. Ezért a világ azon része, amit megszólítunk elméleteinkkel emberarcú lesz, amit pedig nem, rejtetten – például paradoxonok áruhájában – misztikumként jelenik meg „megszólított” világunkban.

Ez a misztikum egyrészt értelmezhető a kanti magánvalóként (*Ding an sich*) [dualista metafizikai interpretáció]. Értelmezhető ugyanakkor úgy is, mint egy komplexus, amelynek minden egyes alkotórésze (*Gestalt*) meghatározott módon viszonyul egymáshoz, és amelyek fogalmaik (Wittgenstein) vagy formáik (Spencer Brown) révén kiszakítottak az egészből [monista metafizikai interpretáció]. Ebben a felfogásban az „élő matematika” egy potenciálisan végtelen, autopoetikus rendszer, amelyben tükröződik az is, ami kívül esik rajta (pl. „nem szándékolt” modell, paradoxonok).

A dualista szemlélet a matematikai ihletet a matematikus szellemi tevékenységének tartja, ezért a kivételek és az antinómiák kezelésére „kivétel-kizáró” módszert és leszűkítéseket alkalmaz a problémamegoldás és formalizálás során. A monista szemlélet a „bizonyítások és cáfolatok” módszerét használva, állandóan „benne van” a problémában a problémamegoldás során. Számára egy axiomatikus rendszer kontingens: nem fejez ki logikai szükségszerűséget, mégis úgy működik, mintha valami szükségszerűséggel bírna. A matematika formális rendszereinek nincs szüksége egzisztencia-feltevésre, mert megfelelően előkészített formális rendszer automatikusan termeli komplex formáit. A rendszert nem lehet evidenciával vagy bizonyítással alátámasztani, de megcáfolni sem, mert ezek nem csak az igazolás, hanem az érvelés feltételeit is jelentik. Azonban éppen itt érhetők tetten informális egzisztencia-előfeltevések, amelyeken a formális konstrukció alapul, és ami leválaszthatatlan az informális háttérrel, amibe – Putnam szavaival – a matematika „noumenális jóságai” is beletartoznak. A matematikus a platonizmus-konstruktivizmus dilemmájába kerül, mert az elméleten belül konstruktivista, az elméleten kívül platonista módon kénytelen

szemlélni a tárgyát, és a paradoxonok jelzik, ha átlépi a határt. A matematika olyan önfejlődő rendszer, amelyet tartalom, forma és viszony jellemez, és ami túlnövi bármely alkotójának képzeletét.

IV. A szerzőnek az értekezés tárgyához kapcsolódó publikációs listája

1. *A világ matematikai szemlélése*, 1997, p. 24.

[Az ELTE TTK, Tudománytörténeti és Tudományfilozófiai Tanszék által kiírt országos pályázaton díjat nyert pályamunka. Részleteiben a disszertáció első és hatodik fejezetéhez kapcsolódik].

2. *Gondolat, nyelv, tudomány* [társszerzővel]. Gond 1999/21-22, p. 143-170.

[Ez a tanulmány számos általános, tudományfilozófiai problémát vet fel, többet, mint amit megválaszolt. A problémafelvetések matematikailag relevánsnak tekinthető része motiválta a jelöltet továbbgondolkodásra és megoldási javaslatok tételére a matematikára vonatkozóan].

3. *A liberális társadalomszemlélet játékelméleti jellemzése*. Magyar Tudomány, 166. évfolyam 2005/7, p. 869-882.

[A tanulmány számos, a játékelmélethez kapcsolódó modellt mutat be, amikkel a liberalizmus gazdasági és társadalmi előfeltevéseit és korlátait jellemzi].

4. *Analitikus társadalomelmélet*. Magánkiadás, Budapest, 2006 (p. 356, ISBN 963 06 0315 2)

[Lektorált, referált felsőoktatási tankönyv (ELTE ÁJK, PTE KTK) és szakkönyv, amelyben a jelölt a racionális választások egy olyan új modelljét ismerteti, amiben az érvelésen alapuló racionalitás-fogalom alapvetőbb a hagyományos, cselekvésen alapulónál. Az így nyert modellben egyrészt ugyanúgy bizonyíthatók a racionális választások fontosabb tételei, mint a hagyományos megközelítésben, másrészt többlettulajdonsággal is bír: a modális logika eredményeit felhasználva, értékaspektusok (normarendszerek állításai) is megjeleníthetők benne].

5. *Platonism or Intuitionism: An Impossibility Theorem*, 2009, p. 14

[A disszertáció 5. fejezetéből készült cikk, a *Cambridge Graduate Conference on the Philosophy of Logic and Mathematics* által lektoráltatott előadásanyag].

6. *Politikai konfliktusok játékelméleti modellezése.* Századvég, 2009/ 54., p. 27-48.

[A cikk matematikai szempontból konfliktus osztályokat állít fel, amelyekbe példálózva konkrét történelmi eseményeket sorol, majd bemutatja, hogy a felek vélt preferenciái alapján, hogyan robbant ki vagy oldódott meg egy politikai konfliktus, ami később a történelemkönyvekbe került].