

## Daróczy Zoltán (1938–2023)

---

### Daróczy Zoltán élete

Daróczy Zoltán egy bihartordai jegyző második gyermekeként 1938-ban született. Református nevelést kapott és igen jól tanult, ezért szülei a Debreceni Református Kollégiumba küldték. Diákként kedvelte az irodalmat, a történelmet és a matematikát. „A matematika az nem más, mint szabatos beszéd.” – hallotta ezt gimnáziumi matematikatanárától, Nagy Gézától. Tanára hatására és biztatására részt vett az Arany Dániel matematikai versenyen és a KöMaL pontversenyében is. Talán ezek miatt választotta Daróczy Zoltán a tanári pályát, és felvételizett 1956-ban a Kossuth Lajos Tudományegyetem matematika-ábrázoló geometria szakára. Maximális pontszámmal is csak fellebbezés után vették fel. Alig kezdődött el az egyetemi oktatás, kitört az 56-os forradalom. Egyetemistaként a nemzetőrséghez csatlakozott, és így próbált tenni valamit az igaz ügyért. A forradalom leverését követően az oktatás csak 1957 tavaszán indult újra és mivel nem zárták ki az egyetemről, így 1961-ben kitüntetéses diplomával végezhetett. Jó tanárai voltak. A matematikai analízist, annak szépségét és szeretetét Rapcsák Andrástól és Aczél Jánostól tanulta. Hamar megértette a hangyabokányi epsilon fogalmát és később, amikor már ő állt a katedrán, tanárgenerációknak adta tovább, amit tanáraitól tanult: tudományt, műveltséget és emberséget. Daróczy Zoltán közel öt évtizeden keresztül volt a KLTE TTK matematika tanárszakos és matematikus hallgatóinak meghatározó és széles körben kedvelt oktatója. Előadásain diákjaival megszerettette a mértékelméletet és a valós függvénytant. Híresek voltak speciálkollégiumai, amelyeken hallgatóit eljuttatta az aktuális kutatási kérdésekig. Igazi reneszánsz ember volt, a tudományokat komplex módon oktatta, rávilágítva a tágabb összefüggésekre, de teret hagyva az önálló gondolkodásnak is.

Tanulmányai befejezése után nem kapott állást a Kossuth Lajos Tudományegyetemen, de az egyik első tudományos dolgozatában rámutatott Rényi Alfréd egy pontatlanságára. Ennek köszönhetően Rényi ösztöndíjasként felvette a Matematikai Kutatóintézetbe. Az itt töltött egy év alatt szerezte meg az egyetemi

doktori fokozatot Aczél János irányítása mellett. 1963-tól egy évig a Bécsi Egyetem Matematikai Intézetének munkatársa volt Leopold Schmetterer meghívására. 1964-től dolgozott folyamatosan a KLTE-n, majd a jogutód Debreceni Egyetemen. 29 évesen a matematikai tudomány kandidátusa, 38 évesen a matematikai tudomány doktora lett és kinevezték egyetemi tanárnak. A Magyar Tudományos Akadémia 1985-ben levelező, 1990-ben pedig rendes tagjává választotta.

Az egyetem Analízis Tanszékének vezetését 1968-tól kezdve 16 éven át látta el. Pályája során 5 évig volt a Matematikai Intézet igazgatója, a Természettudományi Kar dékánhelyettese, majd dékánja. A rendszerváltást megelőző időszakban három-három évig volt az egyetem rektorhelyettese, majd rektora. Alapítója, majd 18 éven át vezetője volt a Debreceni Egyetem Matematika és Számítástudományok Doktori Iskolájának. 2008-ban, nyugdíjba vonulásakor, professor emeritusi címet kapott. Fiatalon a legfontosabb eredményeit az információelméletből származó függvényegyenletek vizsgálatában, a Shannon-entrópia karakterizációival kapcsolatban érte el. Az ezeket az eredményeket is bemutató, Aczél Jánossal közösen írt monográfiája a témakör legtöbbet idézett könyvévé vált. Jelentős a hozzájárulása a közepek elméletéhez is. Bevezette az eltérésközepek fogalmát, és alapvető eredményeket ért el a közepekre vonatkozó úgynevezett invariancia-egyenletek vizsgálatában.



1. ábra. Daróczy Zoltán (1938–2023)

Aczél János 1965-ben elhagyta Magyarországot, de a vele való baráti kapcsolata és

együttműködése sohasem szakadt meg. Innen kezdve több mint ötven évig vezette, tanácsaival irányította a függvényegyenletek és egyenlőtlenségek kutatócsoportot, amely világszerte nagy elismerést szerzett. Lényeglátó képességének köszönhetően a hozzá közel álló kutatók, oktatók mindig a témakör legfontosabb kérdéseire koncentrálnak. A kutatócsoport nemzetközi kapcsolatai a 70-es években kiszélesedtek, a csoport tagjai innentől kezdve számos fontos nyugati konferenciára kaptak meghívást. Emlékezetesek voltak az ezekre történő kiutazások, az együtt töltött idő és a nehézségeket is megkönnyítő, megértő jó természete. Témavezetése mellett 14 tanítványa (ld. [Mathematical Genealogy](https://www.genealogy.math.ndsu.nodak.edu/id.php?id=105162) (<https://www.genealogy.math.ndsu.nodak.edu/id.php?id=105162>)) szerzett PhD fokozatot, akik többsége ma is aktív, nemzetközileg is elismert oktató- és kutatómunkát végez. Közülük Nagy Béla, Sebestyén Zoltán, Maksa Gyula, Járai Antal, Székelyhidi László, Páles Zsolt az MTA doktori címet is megszerezte. A saját sikereinél is fontosabbak voltak számára tanítványai sikerei. Mindent megtett az ő elismertetésük érdekében és aztán velük örült, ha ez bekövetkezett. Az is nagy öröme szolgált, hogy Bálint fia az ő nyomdokaiba lépett és a matematikusi életpályát választotta.

Az Analízis Tanszék életében fontos szerepet játszottak a tanszéki szemináriumok. Ezek egyik fontos változata a 80-as évek közepétől napjainkig évente megrendezett Síkfőkúti Analízis Szeminárium. Az ilyen összejöveteleken a tanszéki kollégák és a PhD hallgatók mellett azok családtagjai is részt vehettek. Ezek a rendezvények nagyban segítették az emberi, baráti kapcsolatok kialakulását. Daróczy Zoltán 40 éven keresztül családjával együtt szinte állandó résztvevője volt ezeknek az szemináriumoknak. A gyerekek, köztük Orsi és Bálint, együtt játszottak. Olyanok voltunk, és vagyunk ma is, mint egy nagy család. Zolinak, kortól függetlenül, mindenkihez volt egy kedves szava. Humora, empatikussága és tájékozottsága révén mindig a társaság középpontja volt.

Daróczy Zoltán már középiskolás korában elkezdett versenyszerűen sakkozni, egyetemi évei alatt pedig a DEAC sakkcsapatában játszott. A 70-es, 80-as években a mindig felállított sakktáblánál a TTK és BTK számos oktatója vívott schnell partikat vele és a tanszék tagjaival. Csak mostanra tudatosult bennünk, hogy milyen erős közösségformáló ereje volt ennek a tevékenységnek is.

Tudományos pályája mellett a politikai életben is aktívan részt vett. A 80-as évek

végén csatlakozott a reformmozgalmakhoz, amelyek végül az egypártrendszer felbomlásához és a rendszerváltáshoz vezettek. Az 1990-es országgyűlési képviselőválasztáson a Magyar Szocialista Párt Hajdú-Bihar megyei területi listájáról, négy évvel később pedig az egyik debreceni egyéni körzetben szerzett mandátumot és lett parlamenti képviselő.

Daróczy Zoltán hazai elismertségét többek között az Akadémiai Díj, a Szele Tibor- emlékérem, a Szent-Györgyi Albert-díj, a Széchenyi-díj és a Magyar Köztársasági Érdemrend középkeresztje mutatja. Tudományos tevékenységét külföldön is felismerték: A világ egyik legrégebbi tudományos szervezete, a Hamburgi Matematikai Társaság 2008-ban tiszteletbeli tagjává választotta.

Tanítványaival, munkatársaival nemcsak szakmai, hanem bensőséges emberi kapcsolatokat ápolt. A vezetésére bízott közösségeket nagy empátiával, hozzáértéssel irányította, tanácsaival, szeretetével mindannyiunk életét segítette. Olvasottsága, műveltsége, nyitottsága és tájékozottsága példaértékű volt. Halálával a Debreceni Egyetem és a Magyar Tudományos Akadémia egy kiváló oktatóját, kutatóját és szellemi vezetőjét veszítette el.

Charles Dickens a „Karácsonyi ének”-ben ezt írja: „A végzet minden emberre kiszabta, hogy szellemével hasson embertársaira, környezetére.” Daróczy Zoltánról ezt biztosan elmondható.

## **Daróczy Zoltán tudományos eredményei**

Az alábbiakban a célunk Daróczy Zoltán néhány alapvető és sokat idézett matematikai eredményének a bemutatása. Ennek a résznek a megírásakor felhasználtuk a szerző és Székelyhidi László [53] dolgozatát.

### **1. Additív függvények homogenitási tulajdonságai**

Daróczy Zoltán egyik első tudományos dolgozata a szegedi Acta Sci. Math.-ban jelent meg és ebben a valós additív függvények homogenitási tulajdonságait tisztázta.

Egy  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  függvényt additívnak nevezünk, ha teljesíti az alábbi Cauchy-féle függvényegyenletet:

$$f(x + y) = f(x) + f(y) \quad (x, y \in \mathbb{R}).$$

Az  $f(x) = cx$  (ahol  $c \in \mathbb{R}$ ) alakú függvények ennek a függvényegyenletnek a folytonos megoldásai. Hamel 1905-ös [39] dolgozatának köszönhetően tudjuk, hogy ennek az egyenletnek vannak nem folytonos megoldásai is, sőt véve a valós számoknak mint egy a racionális számok teste feletti vektortérnek egy tetszőleges (Hamel) bázisát, bármely ezen a bázison értelmezett valós értékű függvény egyértelműen kiterjeszthető  $\mathbb{R}$ -re egy additív függvénné.

Jól ismert (és nem is nehéz igazolni azt), hogy minden additív függvény  $\mathbb{Q}$ -homogén, azaz minden  $r \in \mathbb{Q}$  esetén teljesül

$$f(rx) = rf(x) \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Folytonos additív függvények esetén ez az egyenlőség minden  $r$  valós számra is fennáll. Természetesnek tűnő probléma tehát az, hogy milyen  $s, t$  irracionális számok esetén van olyan  $f$  nem azonosan nulla additív függvény, amelyre teljesül

$$f(tx) = sf(x) \quad (x \in \mathbb{R}). \quad (1)$$

Daróczy Zoltán [9] alábbi eredménye ezt a kérdést teljesen megválaszolja.

**1.1. tétel.** *Ha  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  egy olyan nem azonosan nulla additív függvény, amelyre teljesül (1) valamilyen  $s, t \in \mathbb{R}$  irracionális számpárra, akkor vagy  $s$  és  $t$  algebraiak és egymás algebrai konjugáltjai (azaz közös a definiáló polinomjuk), vagy  $s$  és  $t$  transzcendens.*

## 2. Kiterjesztési tételek

A függvényegyenletek megoldása során nagyon sokszor áll elő az a helyzet, amikor egy valós függvényről az additivitást csak a számpároknek egy részhalmazán lehet igazolni. Az alapkérdés, hogy ilyenkor a függvény milyen közel áll az additív függvényekhez. Ezen a területen Aczél János és Erdős Pál [2] érte el az első eredményt.

**2.1. tétel.** Legyen  $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  egy olyan függvény, amelyre  $f(x + y) = f(x) + f(y)$  teljesül minden  $x, y \in [0, \infty)$  esetén. Ekkor  $f$  egyértelműen terjeszthető ki  $\mathbb{R}$ -re egy additív függvénnyé, azaz van egy olyan egyértelműen meghatározott  $\tilde{f}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  additív függvény, hogy  $\tilde{f}(x) = f(x)$  minden  $x \in [0, \infty)$  esetén.

A másik alapvető kiterjesztési tételt Daróczy Zoltán és Losonczi László [23] találta meg.

**2.2. tétel.** Legyen  $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  egy olyan függvény, amelyre  $f(x + y) = f(x) + f(y)$  teljesül minden olyan  $x, y \in [0, 1]$  esetén, amelyre  $x + y \leq 1$ . Ekkor  $f$  egyértelműen terjeszthető ki  $\mathbb{R}$ -re egy additív függvénnyé, azaz van egy olyan egyértelműen meghatározott  $\tilde{f}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  additív függvény, hogy  $\tilde{f}(x) = f(x)$  minden  $x \in [0, 1]$  esetén.

Ezek az eredmények számos további vizsgálatot indukáltak és a függvényegyenletek megoldásának a mai napig az alapvető eszközei. A teljesség igénye nélkül az olvasó figyelmét a következő dolgozatokra hívjuk fel: [3, 25, 43, 44, 52, 55, 58].

### 3. Információfüggvények jellemzése

A 60-as–70-es években az információelmélet a függvényegyenletek elmélete számára számos érdekes és mély problémát szolgáltatott. Aczél János és Daróczy Zoltán 1975-ben publikált [1] monográfiája az ezen a területen elért legfontosabb eredményeket foglalta össze. Az alábbiakban az információfüggvényekkel kapcsolatosan elért eredményekből válogatunk.

Legyen  $\beta > 0$  egy rögzített konstans. Egy  $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  leképezést  $\beta$ -típusú információfüggvénynek nevezünk, ha  $f(0) = f(1)$ ,  $f\left(\frac{1}{2}\right) = 1$ , és minden olyan  $x, y \in [0, 1)$ -ra, amelyre  $x + y \leq 1$ , fennáll az

$$f(x) + (1 - x)^\beta f\left(\frac{y}{1 - x}\right) = f(y) + (1 - y)^\beta f\left(\frac{x}{1 - y}\right)$$

egyenlet. Ha  $\beta = 1$ , akkor  $f$ -et közönséges információfüggvénynek mondjuk.

A  $\beta \neq 1$  esetben a fenti függvényegyenlet a megadott mellékfeltételek mellett megoldható, és a következő eredmény igazolható [11]:

**3.1. tétel.** *Ha  $\beta \neq 1$ , akkor  $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  pontosan akkor  $\beta$ -típusú információfüggvény, ha*

$$f(x) = \frac{1}{2^{1-\beta} - 1} (x^\beta + (1-x)^\beta - 1) \quad (x \in [0, 1]).$$

Tehát  $\beta \neq 1$  esetén a  $\beta$ -típusú információfüggvények egyértelműen meghatározottak és folytonosak. Ha képezzük a  $\beta \rightarrow 1$  határátmenetet, akkor eredményül az

$$S(x) := -x \log_2 x - (1-x) \log_2(1-x) \quad (x \in [0, 1])$$

képlettel megadható függvényt kapjuk, amit Shannon-féle információfüggvénynek nevezünk (itt a  $0 \cdot \log_2 0 := 0$  konvencióval élünk). Az könnyen látható, hogy a Shannon-függvény 1-típusú információfüggvény, azaz minden olyan  $x, y \in [0, 1]$ -ra, amelyre  $x + y \leq 1$ , teljesül az

$$f(x) + (1-x)f\left(\frac{y}{1-x}\right) = f(y) + (1-y)f\left(\frac{x}{1-y}\right)$$

függvényegyenlet.

Az információfüggvényekkel kapcsolatban természetes feltétel a nemnegativitásuk. A Shannon-függvény triviálisan ilyen, de nem nyilvánvaló, hogy van-e más nemnegatív információfüggvény. A következő eredményt Daróczy Zoltán Kátai Imrével [14] együtt találta.

**3.2. tétel.** *Ha  $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  egy korlátos és nemnegatív információfüggvény, akkor  $f = S$ .*

Ha a korlátosság feltételét elhagyjuk, akkor a helyzet gyökeresen megváltozik. Ezt Daróczy Zoltán és Maksa Gyula [24] alábbi eredménye mutatja.

**3.3. tétel.** Ha  $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  egy nemnegatív információfüggvény, akkor  $S \leq f$ . Továbbá léteznek a Shannon-függvénytől különböző nemnegatív információfüggvények.

#### 4. A természetes számok homomorfizmusai kompakt Abel-csoportokba

Daróczy Zoltánnak és Kátai Imrének az egyik fontos közös kutatási területe volt az additív számelméleti függvények aszimptotikus tulajdonságainak a vizsgálata. Ebből az együttműködésükből több mint 10 közös dolgozatuk született. A [15] dolgozat egyik főeredménye az alábbi

**4.1. tétel.** Legyen  $G$  egy kompakt Abel-csoport és legyen  $\varphi: \mathbb{N} \rightarrow G$  egy additív függvény. Ekkor  $\varphi$  pontosan akkor teljesíti a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\varphi(n+1) - \varphi(n)) = 0$$

egyenlőséget, ha minden olyan  $(n_k)$  olyan növekvő természetes számsorozat esetén, amelyre a  $(\varphi(n_k))$  sorozat konvergens, konvergens a  $(\varphi(n_k + 1))$  sorozat is.

A direkt implikáció azonnal látható. A fordított irányú implikáció igazolásához viszont nem triviális ötletre van szükség.

Ez az eredmény Daróczy Zoltán és Kátai Imre számos további közös dolgozatának volt a kiindulópontja. A teljesség igénye nélkül csak a következő cikkeket említjük meg: [16, 17, 18, 19, 20, 21, 22].

#### 5. Közeppek homogenitása

Az entrópia fogalmak axiomatikus vizsgálata során Rényi Alfréd az alábbi fogalmat vezette be: Ha adott egy  $\varphi: (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$  folytonos és szigorúan monoton függvény, akkor értelmezzük az

$$\mathcal{R}_\varphi: \bigcup_{n=1}^{\infty} (0, 1)^n \rightarrow (0, 1)$$

közepet az alábbi képlettel:

$$\mathcal{R}_\varphi(x_1, \dots, x_n) = \varphi^{-1} \left( \frac{x_1 \varphi(x_1) + \dots + x_n \varphi(x_n)}{x_1 + \dots + x_n} \right) \quad (n \in \mathbb{N}, x_1, \dots, x_n \in (0, 1)).$$

Rényi azt sejtette, hogyha ez a közép a nemteljes valószínűségeloszlások halmazán homogén, akkor  $\varphi$  vagy a logaritmus függvényhez, vagy egy hatványfüggvényhez hasonló. A sejtést Daróczy Zoltán [10] igazolta az alábbi eredményében.

**5.1. tétel.** *Legyen  $\varphi: (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$  folytonos és szigorúan monoton függvény. Ha*

$$\mathcal{R}_\varphi(tx_1, tx_2) = t\mathcal{R}_\varphi(x_1, x_2),$$

*teljesül minden olyan  $x_1, x_2, t \in (0, 1)$  esetén, amelyre  $x_1 + x_2 \leq 1$ , akkor léteznek olyan  $a, b \in \mathbb{R}$  konstansok, hogy vagy  $\varphi(x) = a \log x + b$ , vagy pedig  $\varphi(t) = ax^p + b$  teljesül minden  $t \in (0, 1)$  esetén valamilyen  $p \neq 0$  konstanssal.*

A Rényi által vizsgált közepekről kiderült, hogy egy a Bajraktarević [4, 5] által bevezetett középosztálynak egy részosztályát alkotják. Legyen  $I \subseteq \mathbb{R}$  egy (nemdegenerált) intervallum, és legyenek  $f, g: I \rightarrow \mathbb{R}$  olyan függvények, hogy  $g$  pozitív és az  $f/g$  hányadosfüggvény szigorúan monoton és folytonos. Ekkor értelmezzük a  $\mathcal{B}_{f,g}: \bigcup_{n=1}^{\infty} I^n \rightarrow I$  közepet az alábbi képlettel:

$$\mathcal{B}_{f,g}(x_1, \dots, x_n) := \left( \frac{f}{g} \right)^{-1} \left( \frac{f(x_1) + \dots + f(x_n)}{g(x_1) + \dots + g(x_n)} \right) \quad (n \in \mathbb{N}, x_1, \dots, x_n \in I).$$

Ha  $I := (0, 1)$ ,  $f(x) := x\varphi(x)$  és  $g(x) := x$ , akkor  $\mathcal{B}_{f,g}$  egyenlő a fentebb bevezetett Rényi-féle  $\mathcal{R}_\varphi$  középpel. Ha pedig  $g \equiv 1$ , akkor látható, hogy  $\mathcal{B}_{f,g}$  egy úgynevezett kváziaritmetikai középre egyszerűsödik.

A Bajraktarević-közepék homogenitásának szükséges és elegendő feltételét Aczél János és Daróczy Zoltán az alábbi tételben írták le:

**5.2. tétel.** *Legyenek  $f, g: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  olyan folytonos függvények, hogy  $g$  pozitív és  $f/g$  szigorúan monoton. Ekkor a  $\mathcal{B}_{f,g}$  közép pontosan akkor homogén, azaz teljesül rá a*

$$\mathcal{B}_{f,g}(tx_1, \dots, tx_n) = t\mathcal{B}_{f,g}(x_1, \dots, x_n) \quad (n \in \mathbb{N}, t, x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}_+).$$

függvényegyenlet, ha léteznek olyan  $p, q \in \mathbb{R}$  számok, hogy  $\mathcal{B}_{f,g}$  egyenlő a

$$\mathcal{G}_{p,q}(x_1, \dots, x_n) := \begin{cases} \left( \frac{x_1^p + \dots + x_n^p}{x_1^q + \dots + x_n^q} \right)^{\frac{1}{p-q}} & p, q \in \mathbb{R}, p \neq q, \\ \exp \left( \frac{x_1^p \log(x_1) + \dots + x_n^p \log(x_n)}{x_1^p + \dots + x_n^p} \right) & p = q \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

képlettel értelmezett  $\mathcal{G}_{p,q}: \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbb{R}_+^n \rightarrow \mathbb{R}_+$  Gini-középpel.

Megjegyezzük, hogy az [1] cikkben található tétel arra az esetre is kiterjed, amikor a  $\mathcal{B}_{f,g}$  közép a pozitív valós számok halmazának csak egy valódi részintervallumán van értelmezve, és ekkor a jellemzésben a Gini-középek konjugált komplex  $(p, q)$  párokra vonatkozó kiterjesztései is fellépnek.

## 6. Eltérésközépek és egyenlőtlenségek

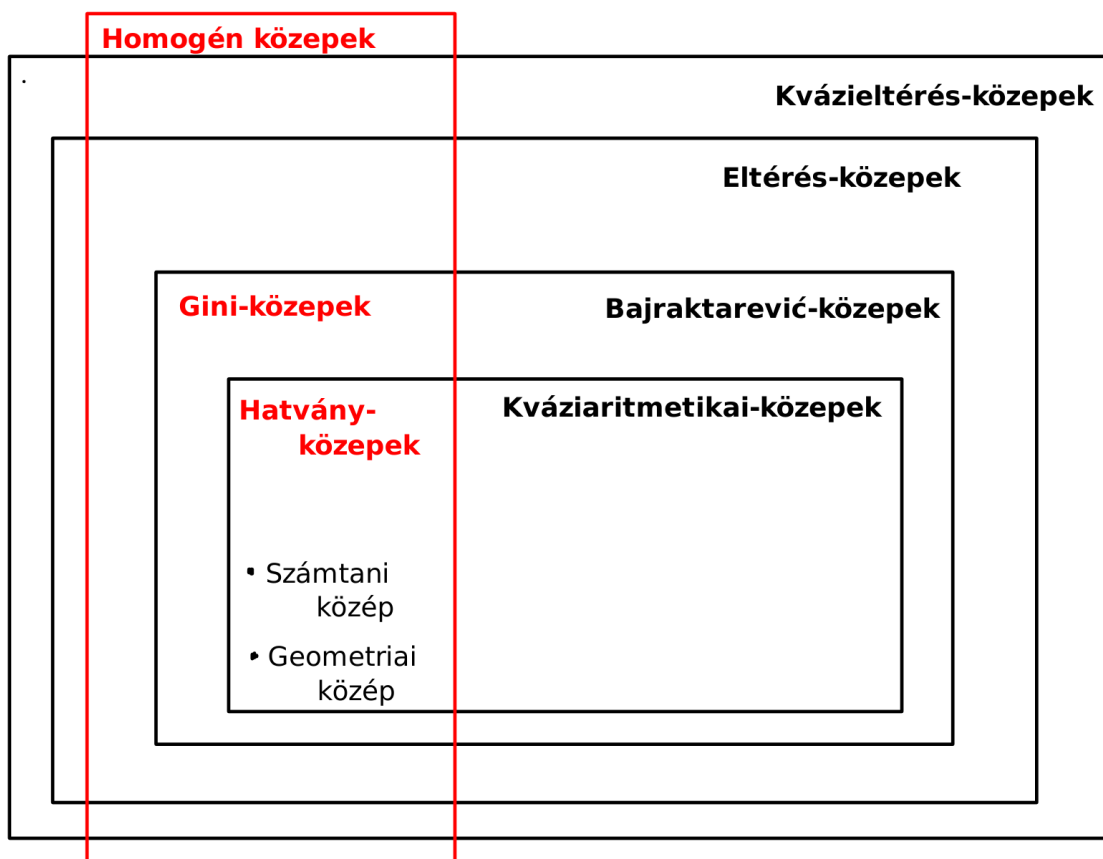
Daróczy Zoltán 1971-72-ben megjelent [12, 13] dolgozataiban a középek egy olyan új osztályát vezette be, amely az addig ismert legfontosabb középosztályokat speciális esetként tartalmazta. Legyen  $I \subseteq \mathbb{R}$  egy nemelfajuló nyílt intervallum. Egy olyan kétváltozós  $E: I \times I \rightarrow \mathbb{R}$  függvényt, amely a második változójában folytonos és szigorúan monoton csökkenő, továbbá eltűnik a diagonális elempárokon (azaz  $E(x, x) = 0$  minden  $x \in I$  esetén), eltérésfüggvénynek nevezünk. Ekkor nem nehéz belátni, hogy minden  $n \in \mathbb{N}$  és  $x_1, \dots, x_n \in I$  esetén az

$$E(x_1, y) + \dots + E(x_n, y) = 0$$

egyenletnek pontosan egy  $y$  megoldása van  $I$ -ben és ez  $\min(x_1, \dots, x_n)$  és  $\max(x_1, \dots, x_n)$  közé esik. Ezt az egyértelműen meghatározott  $y$  megoldást az  $x_1, \dots, x_n$  számok  $E$ -eltérésközepének (vagy Daróczy-közepének) nevezzük és  $\mathcal{D}_E(x_1, \dots, x_n)$ -vel jelöljük.

Könnyű belátni, hogy az  $E(x, y) := x - y$  függvény eltérésfüggvény, és hogy az általa meghatározott közép a számtani közép. A geometriai közép, a harmonikus közép,

általánosabban a hatványközepek, a kváziaritmetikai közepek, a Gini-közepek és a Bajraktarević-közepek az eltérésközepek részosztályait alkotják. A közöttük fennálló tartalmazásokat az alábbi diagram szemlélteti.



2. ábra. Közepek

Az eltérésközepekkel kapcsolatos legalapvetőbb probléma az egyenlőség, illetve az összehasonlíthatóság kérdése. De amint látni fogjuk, a Hölder- és Minkowski-típusú egyenlőtlenségek teljesülését is jellemezhetjük. A Daróczy Zoltán által talált eredmények megfogalmazásához valamelyest szűkítjük az eltérésfüggvények osztályát. Azt mondjuk, hogy egy  $E: I \times I \rightarrow \mathbb{R}$  eltérésfüggvény reguláris, ha a második változó szerint differenciálható minden diagonális pontban, és itt a második változó szerinti parciális derivált negatív. Ha  $E$  egy reguláris eltérésfüggvény, akkor az  $E$  regularizáltján az alábbiak szerint megadott  $E^*: I \times I \rightarrow \mathbb{R}$  függvényt értjük:

$$E^*(x, y) = \frac{E(x, y)}{-\partial_2 E(y, y)} \quad (x, y \in I).$$

A fenti jelölések birtokában kimondhatjuk az alábbi tételt, ami a [12] dolgozatból származik.

**6.1. tétel.** *Legyenek  $I, J, K \subseteq \mathbb{R}$  nemüres nyílt intervallumok és  $E: I \times I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $F: J \times J \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $G: K \times K \rightarrow \mathbb{R}$  reguláris eltérésfüggvények és  $f: I \times J \rightarrow K$  egy differenciálható függvény. Ekkor a*

$$\mathcal{D}_G(f(x_1, y_1), \dots, f(x_n, y_n)) \leq f(\mathcal{D}_E(x_1, \dots, x_n), \mathcal{D}_F(y_1, \dots, y_n))$$

*egyenlőtlenség akkor és csak akkor teljesül minden  $n \in \mathbb{N}$ ,  $x_1, \dots, x_n \in I$  és  $y_1, \dots, y_n \in J$  esetén, ha*

$$G^*(f(x, y), f(u, v)) \leq \partial_1 f(u, v)E^*(x, u) + \partial_2 f(u, v)F^*(y, v),$$

*érvényes minden  $x, u \in I$ -re és  $y, v \in J$ -re.*

Ebből a tételből a Minkowski- és Hölder-típusú egyenlőtlenségek fennállásának szükséges és elegendő feltételeihez lehet jutni az  $I := J := K := \mathbb{R}_+$  és  $f(x, y) := x + y$ , illetve  $f(x, y) := xy$  választásokkal. Ha a fenti tételt az  $f(x, y) = x$  függvényre alkalmazzuk, akkor a [13] dolgozatban igazolt összehasonlítási tételt kapjuk.

**6.2. tétel.** *Legyen  $I$  egy nemüres nyílt intervallum és  $E, F: I \times I \rightarrow \mathbb{R}$  reguláris eltérésfüggvények. Ekkor a*

$$\mathcal{D}_E(x_1, \dots, x_n) \leq \mathcal{D}_F(x_1, \dots, x_n) \tag{2}$$

*egyenlőtlenség akkor és csak akkor teljesül minden  $n \in \mathbb{N}$  és  $x_1, \dots, x_n \in I$  esetén, ha*

$$E^*(x, y) \leq F^*(x, y)$$

*érvényes minden  $x, y \in I$ -re.*

A Daróczy Zoltánnal közös [29] dolgozatunkban sikerült az összehasonlítási tételt az eltérésfüggvények regularitásának feltétele nélkül is megtalálni.

**6.3. tétel.** *Legyenek  $I$  egy nemüres nyílt intervallum és  $E, F: I \times I \rightarrow \mathbb{R}$  eltérésfüggvények. Ekkor a (2) egyenlőtlenség akkor és csak akkor teljesül minden  $n \in \mathbb{N}$  és  $x_1, \dots, x_n \in I$  esetén, ha létezik egy olyan  $p: I \rightarrow \mathbb{R}$  pozitív függvény, hogy*

$$E(x, y) \leq p(y)F(x, y)$$

*érvényes minden  $x, y \in I$ -re.*

Az eltérésközepeknek számos általánosítása, alkalmazása található például a következő dolgozatokban: [7, 8, 30, 31, 47, 48, 49, 50, 51]

## 7. Invarianciaegyenlet kváziaritmetikai közepekkel

Legyen  $I$  egy nemüres nyílt intervallum. Ha  $M, N: I^2 \rightarrow I$  kétváltozós közepek, akkor tetszőleges  $x, y \in I$  esetén tekintsük az

$$\begin{aligned} x_1 &:= x, & y_1 &:= y, \\ x_{n+1} &:= M(x_n, y_n), & y_{n+1} &:= N(x_n, y_n) \quad (n \in \mathbb{N}) \end{aligned}$$

képletekkel megadott Gauss-típusú iterációt. Feltételezve, hogy  $M$  és  $N$  folytonos és szigorú közepek belátható, hogy az  $(x_n)$  és  $(y_n)$  sorozatok egy közös  $K(x, y)$  határértékhez konvergálnak. Ez az eljárás egy olyan  $K: I \times I \rightarrow I$  kétváltozós közepet határoz meg, amely a

$$K(M(x, y), N(x, y)) = K(x, y) \quad (x, y \in I).$$

függvényegyenlet egyértelműen meghatározott megoldása. Ezt az egyenletet az  $(M, N)$  párra vonatkozó invarianciaegyenletnek nevezzük, és az ezt kielégítő  $K$  közepet pedig egy  $(M, N)$ -invariáns középnek mondjuk. Egy egyszerű példa az invarianciaegyenletre az alábbi azonosság

$$\sqrt{\frac{x+y}{2} \cdot \frac{2xy}{x+y}} = \sqrt{xy} \quad (x, y \in \mathbb{R}_+).$$

ami azt mutatja, hogy a kétváltozós geometriai közép invariáns a kétváltozós számtani és harmonikus közepekre nézve.

Carl Friedrich Gaussnak a számtani-geometriai középpel kapcsolatos alapvető eredménye [37] így fogalmazható:

**7.1. tétel.** *Egy folytonos  $K: \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  közép pontosan akkor megoldása a*

$$K\left(\frac{x+y}{2}, \sqrt{xy}\right) = K(x, y) \quad (x, y \in \mathbb{R}_+)$$

*egyenletnek, ha*

$$K(x, y) = \left( \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{\sqrt{x^2 \cos^2 t + y^2 \sin^2 t}} \right)^{-1} \quad (x, y \in \mathbb{R}_+).$$

A [35] dolgozat célkitűzése az olyan kétváltozós kváziaritmetikai középpárok meghatározása, amelyekhez tartozó invariáns közép szintén kváziaritmetikai. Ez a probléma könnyen kitalálható helyettesítések után arra a speciális esetre redukálható, amikor az invariáns közép a kétváltozós számtani közép. Tehát a feladat az olyan  $\varphi, \psi: I \rightarrow \mathbb{R}$  folytonos és szigorúan monoton függvények meghatározása, amelyek teljesítik a

$$\varphi^{-1}\left(\frac{\varphi(x) + \varphi(y)}{2}\right) + \psi^{-1}\left(\frac{\psi(x) + \psi(y)}{2}\right) = x + y \quad (x, y \in I) \quad (3)$$

függvényegyenletet. Ezt az egyenletet O. Sutô [56, 57] 1914-ben megjelent dolgozataiban az analitikus függvények körében vizsgálta és meghatározta megoldásait. Janusz Matkowski [45] 1999-ben kétszeri folytonos differenciálhatóság feltételezése mellett igazolta, hogy a fenti egyenletnek a megoldásai változatlanok. A probléma természetes regularitási feltételek melletti megoldását a [35] (magyar nyelven a [32]) dolgozatunkban adtuk meg.

**7.2. tétel.** Legyenek  $\varphi, \psi: I \rightarrow \mathbb{R}$  folytonos és szigorúan monoton függvények. Ekkor a (3) invarianciaegyenlet akkor és csak akkor teljesül a  $\varphi, \psi$  függvényekre, ha léteznek olyan  $a, b, c, d$  valós konstansok, hogy  $ac \neq 0$  és vagy  $\varphi(x) = ax + b$  és  $\psi(x) = cx + d$  teljesül minden  $x \in I$  esetén, vagy pedig létezik egy olyan  $p \neq 0$  valós konstans, hogy fennáll  $\varphi(x) = ae^{px} + b$  és  $\psi(x) = ce^{-px} + d$ , ha  $x \in I$ .

A tétel bizonyításának lényege annak kimutatása volt, hogy a (3) invarianciaegyenlet fennállásából a  $\varphi, \psi$  függvények kétszeri differenciálhatósága következik. Ehhez többek között Lebesgue-nek a monoton függvények majdnem mindenütti differenciálhatóságára vonatkozó tételét, vagy Baire-nek a deriválfüggvények folytonossági helyeinek a sűrűségére vonatkozó tételét is fel kellett használni. A további részletek a [35], illetve a [32] dolgozatokban találhatóak meg. A témakörrel kapcsolatos további eredmények születtek még a következő cikkekben: [6, 26, 27, 28, 32, 33, 34, 36, 38, 40, 41, 42, 46, 54].

Páles Zsolt

Debreceni Egyetem, Matematikai Intézet

## Irodalomjegyzék

- [1] J. Aczél and Z. Daróczy. *On Measures of Information and Their Characterizations*. Academic Press [Harcourt Brace Jovanovich Publishers], New York, 1975. Mathematics in Science and Engineering, Vol. 115.
- [2] J. Aczél and P. Erdős. The nonexistence of a Hamel-basis and the general solution of Cauchy's functional equation for nonnegative numbers. *Publ. Math. Debrecen*, 12:253–263, 1965.
- [3] J. Aczél and L. Losonczi. Extension of functional equations. In *The mathematics of Paul Erdős, II*, page 251–263. Springer, Berlin, 1997.
- [4] M. Bajraktarević. Sur une équation fonctionnelle aux valeurs moyennes. *Glasnik Mat.-Fiz. Astronom. Društvo Mat. Fiz. Hrvatske Ser. II*, 13:243–248, 1958.
- [5] M. Bajraktarević. Sur une généralisation des moyennes quasilinéaires. *Publ. Inst. Math. (Beograd) (N.S.)*, 3 (17):69–76, 1963.

- [6] P. Burai. Matkowski–Sutô type equation on symmetrized weighted quasi-arithmetic means. *Results Math.*, 63(1-2):397–408, 2013.
- [7] J. Chudziak. On applications of inequalities for quasideviation means in actuarial mathematics. *Math. Inequal. Appl.*, 21(3):601–610, 2018.
- [8] J. Chudziak and M. Chudziak. On some applications of quasideviation means. *J. Difference Equ. Appl.*, 25(9-10):1429–1437, 2019.
- [9] Z. Daróczy. Notwendige und hinreichende Bedingungen für die Existenz von nichtkonstanten Lösungen linearer Funktionalgleichungen. *Acta Sci. Math. (Szeged)*, 22:31–41, 1961.
- [10] Z. Daróczy. Über die gemeinsame Charakterisierung der zu den nicht vollständigen Verteilungen gehörigen Entropien von Shannon und von Rényi. *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und Verw. Gebiete*, 1:381–388, 1962.
- [11] Z. Daróczy. Generalized information functions. *Information and Control*, 16:36–51, 1970.
- [12] Z. Daróczy. A general inequality for means. *Aequationes Math.*, 7(1):16–21, 1971.
- [13] Z. Daróczy. Über eine Klasse von Mittelwerten. *Publ. Math. Debrecen*, 19:211–217 (1973), 1972.
- [14] Z. Daróczy and I. Kátai. Additive zahlentheoretische Funktionen und das Mass der Information. *Ann. Univ. Sci. Budapest. Eötvös Sect. Math.*, 13:83–88 (1971), 1970.
- [15] Z. Daróczy and I. Kátai. On additive number-theoretical functions with values in a compact Abelian group. *Aequationes Math.*, 28(3):288–292, 1985.
- [16] Z. Daróczy and I. Kátai. Additive functions. *Anal. Math.*, 12(2):85–96, 1986.

- [17] Z. Daróczy and I. Káta. On additive arithmetical functions with values in topological groups. I. *Publ. Math. Debrecen*, 33(3-4):287–291, 1986.
- [18] Z. Daróczy and I. Káta. On additive arithmetical functions with values in the circle group. *Publ. Math. Debrecen*, 34(3-4):307–312, 1987.
- [19] Z. Daróczy and I. Káta. On additive arithmetical functions with values in topological groups. II. *Publ. Math. Debrecen*, 34(1-2):65–68, 1987.
- [20] Z. Daróczy and I. Káta. Characterization of additive functions with values in the circle group. *Publ. Math. Debrecen*, 36(1-4):1–7 (1990), 1989.
- [21] Z. Daróczy and I. Káta. On additive functions taking values from a compact group. *Acta Sci. Math. (Szeged)*, 53(1-2):59–65, 1989.
- [22] Z. Daróczy and I. Káta. Characterization of additive functions with values in the circle group. II. *Publ. Math. Debrecen*, 44(3-4):391–394, 1994.
- [23] Z. Daróczy and L. Losonczi. Über die Erweiterung der auf einer Punktmenge additiven Funktionen. *Publ. Math. Debrecen*, 14:239–245, 1967.
- [24] Z. Daróczy and Gy. Maksa. Nonnegative information functions. In *Analytic function methods in probability theory (Proc. Colloq. Methods of Complex Anal. in the Theory of Probab. and Statist., Lajos Kossuth Univ. Debrecen, Debrecen, 1977)*, page 67–78. North-Holland, Amsterdam, 1979.
- [25] Z. Daróczy and Gy. Maksa. Functional equations on convex sets. *Acta Math. Hungar.*, 68(3):187–195, 1995.
- [26] Z. Daróczy and Gy. Maksa. On a problem of Matkowski. *Colloq. Math.*, 82(1):117–123, 1999.
- [27] Z. Daróczy, Gy. Maksa, and Zs. Páles. Extension theorems for the Matkowski–Sutô problem. *Demonstratio Math.*, 33(3):547–556, 2000.

- [28] Z. Daróczy, Gy. Maksa, and Zs. Páles. Functional equations involving means and their Gauss composition. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 134(2):521–530, 2006.
- [29] Z. Daróczy and Zs. Páles. On comparison of mean values. *Publ. Math. Debrecen*, 29(1-2):107–115, 1982.
- [30] Z. Daróczy and Zs. Páles. Multiplicative mean values and entropies. In *Functions, series, operators, Vol. I, II (Budapest, 1980)*, page 343–359. North-Holland, Amsterdam, 1983.
- [31] Z. Daróczy and Zs. Páles. Generalized-homogeneous deviation means. *Publ. Math. Debrecen*, 33(1-2):53–65, 1986.
- [32] Z. Daróczy and Zs. Páles. Közéértékek Gauss-féle kompozíciója és a Matkowski–Sutô probléma megoldása. *Mat. Lapok (N.S.)*, 8/9(3-4):1–53, 1998/99 (2003).
- [33] Z. Daróczy and Zs. Páles. On means that are both quasi-arithmetic and conjugate arithmetic. *Acta Math. Hungar.*, 90(4):271–282, 2001.
- [34] Z. Daróczy and Zs. Páles. A Matkowski–Sutô type problem for quasi-arithmetic means of order  $\alpha$ . In Z. Daróczy and Zs. Páles, editors, *Functional Equations – Results and Advances*, volume 3 of *Adv. Math. (Dordr.)*, page 189–200. Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 2002.
- [35] Z. Daróczy and Zs. Páles. Gauss-composition of means and the solution of the Matkowski–Sutô problem. *Publ. Math. Debrecen*, 61(1-2):157–218, 2002.
- [36] Z. Daróczy and Zs. Páles. A Matkowski–Sutô-type problem for weighted quasi-arithmetic means. *Ann. Univ. Sci. Budapest. Sect. Comput.*, 22:69–81, 2003.
- [37] C. F. Gauss. *Bestimmung der Anziehung eines elliptischen Ringes*. Akademische Verlagsgesellschaft M. B. H., Leipzig, 1927. Nachlass zur Theorie des arithmetisch-geometrischen Mittels und der Modulfunktion.

- [38] R. Grünwald and Zs. Páles. On the invariance of the arithmetic mean with respect to generalized Bajraktarević means. *Acta Math. Hungar.*, 166(2):594–613, 2022.
- [39] G. Hamel. Eine Basis aller Zahlen und die unstetigen Lösungen der Funktionalgleichung  $f(x + y) = f(x) + f(y)$ . *Math. Ann.*, 60:459–462, 1905.
- [40] J. Jarczyk. Invariance of weighted quasi-arithmetic means with continuous generators. *Publ. Math. Debrecen*, 71(3-4):279–294, 2007.
- [41] J. Jarczyk. Invariance of quasi-arithmetic means with function weights. *J. Math. Anal. Appl.*, 353(1):134–140, 2009.
- [42] J. Jarczyk and J. Matkowski. Invariance in the class of weighted quasi-arithmetic means. *Ann. Polon. Math.*, 88(1):39–51, 2006.
- [43] K. Lajkó. Applications of extensions of additive functions. *Aequationes Math.*, 11:68–76, 1974.
- [44] L. Losonczi. An extension theorem. *Aequationes Math.*, 28(3):293–299, 1985.
- [45] J. Matkowski. Invariant and complementary quasi-arithmetic means. *Aequationes Math.*, 57(1):87–107, 1999.
- [46] J. Matkowski and Zs. Páles. Characterization of generalized quasi-arithmetic means. *Acta Sci. Math. (Szeged)*, 81(3-4):447–456, 2015.
- [47] Zs. Páles. Characterization of quasideviation means. *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, 40(3-4):243–260, 1982.
- [48] Zs. Páles. Ingham Jessen's inequality for deviation means. *Acta Sci. Math. (Szeged)*, 49(1-4):131–142, 1985.
- [49] Zs. Páles. General inequalities for quasideviation means. *Aequationes Math.*, 36(1):32–56, 1988.

- [50] Zs. Páles. On a Pexider-type functional equation for quasideviation means. *Acta Math. Hungar.*, 51(1-2):205–224, 1988.
- [51] Zs. Páles. On homogeneous quasideviation means. *Aequationes Math.*, 36(2-3):132–152, 1988.
- [52] Zs. Páles. Extension theorem for functional equations with bisymmetric operations. *Aequationes Math.*, 63(3):266–291, 2002.
- [53] Zs. Páles and L. Székelyhidi. Laudation to Zoltán Daróczy. *Ann. Univ. Sci. Budapest. Sect. Comput.*, 40:9–20, 2013.
- [54] Zs. Páles and A. Zakaria. On the invariance equation for two-variable weighted nonsymmetric Bajraktarević means. *Aequationes Math.*, 93(1):37–57, 2019.
- [55] J. Rimán. On an extension of Pexider's equation. *Zbornik Rad. Mat. Inst. Beograd (N.S.)*, 1(9):65–72, 1976. Symposium en Quasigroupes et Équations Fonctionnelles (Belgrade-Novi Sad, 1974).
- [56] O. Sutô. Studies on some functional equations I. *Tôhoku Math. J.*, 6:1–15, 1914.
- [57] O. Sutô. Studies on some functional equations II. *Tôhoku Math. J.*, 6:82–101, 1914.
- [58] L. Székelyhidi. An extension theorem for a functional equation. *Publ. Math. Debrecen*, 28(3-4):275–279, 1981.