

Egyetemi doktori (PhD) értekezés tézisei

Finsler-metrizálhatósági problémák vizsgálata

Milkovszki Tamás

Témavezető: Dr. Muzsnay Zoltán



Debreceni Egyetem
Matematika- és Számítástudományok Doktori Iskola
Debrecen, 2018.

1. Motiváció és célkitűzések

Egy M sokaságon adott másodrendű közönséges homogén differenciálegyenlet-rendszernek egyértelműen megfeleltethető egy, a sokaság érintőnyalábján adott S vektormező úgy, hogy a differenciálegyenlet-rendszer megoldásai megegyeznek S integrálgörbéinek M -re való projekcióival. Ezt az S vektormezőt spraynek, S integrálgörbéinek projekcióit pedig a spray geodetikusainak nevezzük. Egy M sokaságon spray Finsler- (Riemann-) metrizálható, ha létezik egy olyan Finsler- (Riemann-) metrika az M -en melynek geodetikusai megegyeznek a spray geodetikusaival.

Ennek a problémának egy természetes általánosítása a projektív metrizálhatóság vizsgálata. Akkor mondjuk, hogy két spray projektív ekvivalens, ha geodetikusaik átparaméterezhetőek egymásba. Egy M sokaságon adott S spray projektív Finsler- (Riemann-) metrizálható, ha létezik olyan Finsler- (Riemann-) metrika M -en, melynek kanonikus spraye projektív ekvivalens S -sel.

A projektív Finsler-metrizálhatóságot elsőként Hamel [24] tanulmányozta zérus görbületű sprayk esetén, amely mint Hilbert negyedik problémájának Finsler verziója ismeretes. Rapcsák András adta meg lokálisan a projektív metrizálhatóság szükséges és elegendő feltételét egy másodrendű parciális differenciálegyenlet-rendszer formájában [41], melyeket ma Rapcsák-egyenleteknek nevezünk [14, 46, 50]. E feltételt később Szilasi József és Vattamány Szabolcs fogalmazta meg koordinátamentesen [25, 46]. A dolgozat 2 – 5. fejezetében eme túldeterminált parciális differenciálegyenlet-rendszer integrálhatósági feltételeinek meghatározásával foglalkozunk, a 6. fejezetben pedig a kanonikus konnexióval ellátott Lie-csoportok esetén tárgyaljuk a metrizálhatósági és projektív metrizálhatósági problémákat.

Az egyes fejezetek célja röviden a következő:

Az első fejezetben fejezetben bevezetjük a továbbiakban használt jelöléseket, fogalmakat. Röviden emlékeztetünk a Frölicher–Nijenhuis-elmélet alapjaira, majd a sokaság érintőnyalábján adott alapvető struktúrákkal foglalkozunk. Bevezetjük a Liouville-vektormezőt, a vertikális endomorfizmust és a sprayt, majd a sprayhez társított tenzorokkal foglalkozunk. A Cartan–Kähler-elméletről is áttekintést nyújtunk.

A második fejezetben definiáljuk a Finsler-sokaságot, továbbá a Riemann-, illetve Finsler-metrizálhatósági problémákat. Megadunk egy, az ismertektől eltérő bizonyítást arra a tételre, hogy egy S spray akkor és csakis akkor projektív Finsler-metrizálható, ha fennáll a $\mathcal{P}_S F := i_S \Omega = 0$ Rapcsák-egyenlet, ahol $\Omega = dd_J F$, és az ismertetlen F függvény egy 1-homogén függvény, azaz $\mathcal{P}_C F := \mathcal{L}_C F - F = 0$. Az $\{i_S \Omega = 0, \mathcal{L}_C F - F = 0\}$ rendszert Rapcsák-rendszernek nevezzük. Megmutatjuk, hogy a Rapcsák-rendszerhez tartozó $\mathcal{P}_1 = (\mathcal{P}_S, \mathcal{P}_C)$ differenciáloperátor akkor és csakis akkor formálisan integrálható, ha az $i_\Gamma \Omega = 0$ integrálhatósági feltétel teljesül, ahol Γ a sprayhez társított nemlineáris konnexió.

A harmadik fejezetben a $\mathcal{P}_2 = (\mathcal{P}_\Gamma, \mathcal{P}_C)$ kibővített Rapcsák-rendszer integrálhatósági feltételeit határozzuk meg, ahol $\mathcal{P}_\Gamma F = i_\Gamma \Omega$. Igazoljuk, hogy a \mathcal{P}_2 egyetlen másodrendű integrálhatósági feltétele az $i_R \Omega = 0$ alakban adható meg, ahol R a sprayhez társított nemlineáris konnexió görbülete. Továbbá megmutatjuk, hogy a

\mathcal{P}_2 rendszer szimbóluma involutív, így az integrálhatósági feltétel teljesülése esetén formálisan integrálható. Ebből következik az az ismert eredmény, hogy minden 2-dimenziós sokaságon adott spray, minden lapos spray és minden izotróp spray projektív metrizálható. Ezt (más módszerekkel) kétdimenziós sokaságokra M. Matsumoto igazolta [28], lapos és izotróp sprayk esetére pedig M. Crampin [11, 12].

A negyedik fejezet tárgya a projektív metrizálhatóságot a nem izotróp esetben leíró $\mathcal{P}_3 = (\mathcal{P}_\Gamma, \mathcal{P}_C, \mathcal{P}_\Phi)$ differenciáloperátor integrálhatóságának tanulmányozása, ahol Φ a Jacobi-endomorfizmus, és $\mathcal{P}_\Phi F = i_\Phi \Omega$. Abban a generikus esetben vizsgáljuk a \mathcal{P}_3 operátort, amikor a Φ sajátértékei páronként különböznek. Nem izotróp sprayk projektív Finsler-metrizálhatóságáról ez idáig nincsenek eredmények az irodalomban, így a negyedik (és ötödik) fejezet eredményei újak.

Meghatározzuk a másodrendű kompatibilitási feltételeket, majd megmutatjuk, hogy \mathcal{P}_3 szimbóluma nem 2-aciklikus. Spencer-féle komomológia csoportok segítségével belátjuk, hogy extra obstrukciók jelennek meg a harmadrendű szinten. Az extra harmadrendű integrálhatósági feltételeket is meghatározzuk.

Az ötödik fejezetben háromdimenziós sokaságok esetén vizsgáljuk meg a projektív metrizálhatóságot nem izotróp esetben leíró \mathcal{P}_3 differenciáloperátort. Amint azt a negyedik fejezetben megmutattuk, a $H^{2,2}(\mathcal{P}_3)$ Spencer-féle kohomológia csoport nemtriviális, így harmadrendű integrálhatósági feltételek is fellépnek. Igazoljuk, hogy a magasabb rendű kohomológia csoportok mind eltűnnek, így \mathcal{P}_3 -nak harmadrendűnél magasabbrendű kompatibilitási feltételei nincsenek. Továbbá leírjuk a reducibilis esetet, amikor a \mathcal{P}_3 operátort egy $\eta_1 \Omega(v_1, h_1) + \eta_2 \Omega(v_2, h_2) = 0$ alakú másodrendű integrálhatósági feltétellel bővítjük ki, ahol η_1 és η_2 a \mathcal{TM} -en értelmezett S spray által meghatározott függvények. Példát adunk projektív metrizálható nem izotróp sprayre.

A hatodik fejezetben azt az esetet tárgyaljuk, amikor a sokaság egy Lie-csoport a kanonikus konnexiójával.

Mivel a Riemann-sokaságok speciálisan Finsler-sokaságok is, így ha az S spray Riemann-metrizálható (illetve projektív Riemann-metrizálható), akkor Finsler-metrizálható is (illetve projektív Finsler-metrizálható). A megfordítások általában nem teljesülnek. Viszont Szabó Zoltán eredménye [44] alapján kvadratikus sprayk esetén a Finsler-metrizálhatóságból következik a Riemann-metrizálhatóság. A projektív Finsler-metrizálható sprayk osztálya azonban még a kvadratikus esetben is ténylegesen nagyobb a projektív Riemann-metrizálhatóakénál. A két probléma közti különbséget érzékelteti az is, hogy amíg minden kétdimenziós sokaság Finsler-metrizálható, addig a projektív Riemann-metrizálhatóság problémája még a kétdimenziós esetben is igen bonyolult számoláshoz vezet [10], és ebben az egy esetben tisztázott.

A hatodik fejezetben bizonyítjuk, hogy azon Lie-csoportok potenciálisan sokkal nagyobb osztálya, ahol a kanonikus spray balinvariáns projektív Finsler-metrizálható, egybeesik az balinvariáns Riemann-metrizálható sprayk osztályával. Megmutatjuk, hogy ez a tulajdonság homogén terek geodetikus orbitstruktúrájára is teljesül.

2. Az értekezés tartalma és eredményei

Előzmények

Egy n -dimenziós M sokaság érintőnyalábját TM -mel, hasított érintőnyalábját pedig $\mathcal{T}M$ -mel jelöljük. A koordinátákat M -en (x^i) , az indukált koordinátákat TM -en (x^i, y^i) jelöli.

Sprayn a sokaság hasított érintőnyalábján adott olyan S vektormezőt értünk, amelyre fennállnak a következők: $JS = C$ és $[C, S] = S$, ahol

$$J = dx^i \otimes \frac{\partial}{\partial y^i}, \quad C = y^i \frac{\partial}{\partial y^i}$$

a vertikális endomorfizmus, illetve a Liouville-vektormező. Az S spray lokális koordinátarendszerbeli alakja:

$$S = y^i \frac{\partial}{\partial x^i} + f^i(x, y) \frac{\partial}{\partial y^i}.$$

Egy S spray geodetikusan olyan $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M$ reguláris görbét értünk, melyre teljesül, hogy $S \circ \dot{\gamma} = \ddot{\gamma}$. Tetszőleges S spray esetén $\Gamma = [J, S]$ egy vektorértékű 1-forma, amelyet a sprayhez társított konnexiónak nevezünk. Ekkor $\Gamma^2 = \text{Id}$, ezért Γ -nak két sajátértéke van: a 1 és a -1 . A $+1$ sajátértékhez tartozó sajátalteret a VTM vertikális résznyaláb, a -1 sajátértékhez tartozó sajátalteret pedig HTM -mel jelöljük, és horizontális résznyalábnak nevezzük. Ekkor $T_v TM = V_v TM \oplus H_v TM$, $v \in TM$. A Γ konnexióhoz társított $h : TTM \rightarrow HTM$ horizontális és a $v : TTM \rightarrow VTM$ vertikális projektorokat a következőképpen definiáljuk:

$$h := \frac{1}{2}(\text{Id} + \Gamma) \quad \text{és} \quad v := \frac{1}{2}(\text{Id} - \Gamma).$$

A nemlineáris konnexió görbülete az alábbi vektorértékű 2-forma:

$$R = \frac{1}{2}[h, h] \in \Psi^2(TM),$$

Jacobi-endomorfizmuson pedig a a következő vektorértékű, szemibázikus 1-formát értjük:

$$\Phi := i_S R$$

Az S sprayt laposnak nevezzük, ha a Jacobi-endomorfizmusa $\Phi = \lambda J$ alakú, ahol $\lambda \in C^\infty(TM)$. Továbbá S izotróp, ha $\Phi = \lambda J - \alpha \otimes C$, ahol $\lambda \in C^\infty(TM)$, α pedig egy szemibázikus 1-forma.

Formális integrálhatóság

Legyen (B, π, M) egy vektornyaláb az M sokaság fölött $\pi : B \rightarrow M$ projekcióval. Legyen s_1, s_2 két metszése a $\text{Sec}(B)$ nyalábnak. Azt mondjuk, hogy az s_1 és az s_2

ugyanazt a k -jetet határozza meg x -ben, ha Taylor-soraik k -adrendig megegyeznek x -ben. Az $s \in \text{Sec}(B)$ által meghatározott ekvivalencia osztályt jelölje $j_k(s)_x$, az összes k -jetek halmazát pedig $J_k(B)$.

Legyenek B_1 és B_2 vektornyalábok ugyanazon M sokaság fölött. Ekkor egy $\mathcal{P}: \text{Sec}(B_1) \rightarrow \text{Sec}(B_2)$ lineáris, k -adrendű differenciáloperátor azonosítható a $p_k(\mathcal{P}): J_k(B_1) \rightarrow B_2$ leképezéssel. Egy $s \in \text{Sec}(B_1)$ metszés megoldása \mathcal{P} -nek, ha $\mathcal{P}s \equiv 0$. Az l -ed rendű formális megoldások terét $x \in M$ -ben $\text{Sol}_{k+l,x}(\mathcal{P}) := \text{Ker } p_{k+l,x}(\mathcal{P})$ fogja jelölni.

A k -adrendű \mathcal{P} differenciáloperátor formálisan integrálható, ha $\text{Sol}_l(\mathcal{P})$ vektornyaláb M felett minden $l \geq k$ -ra és a $\bar{\pi}_{l,x}: \text{Sol}_{l+1,x}(\mathcal{P}) \rightarrow \text{Sol}_{l,x}(\mathcal{P})_x$ leképezés szürjektív minden $l \geq k$ -ra.

Egy k -adrendű differenciáloperátor $\sigma_k(\mathcal{P}): S^k T^* M \otimes B_1 \rightarrow B_2$ szimbólumát úgy kapjuk, hogy csak a k -adrendű tagokon vizsgáljuk a hatását. Ha $\mathcal{E} = \{e_1 \dots e_n\}$ a $T_x M$ egy bázisa, akkor legyen

$$g_{k,x}(\mathcal{P}) = \text{Ker } \sigma_{k,x}(\mathcal{P}),$$

$$g_{k,x}(\mathcal{P})_{e_1 \dots e_j} = \left\{ A \in g_{k,x}(\mathcal{P}) \mid i_{e_1} A = \dots = i_{e_j} A = 0 \right\}, \quad j = 1, \dots, n.$$

Az \mathcal{E} bázis kvázi-reguláris, ha teljesül a következő feltétel:

$$\dim g_{k+1,x}(\mathcal{P}) = \dim g_{k,x}(\mathcal{P}) + \sum_{j=1}^n \dim g_{k,x}(\mathcal{P})_{e_1 \dots e_j}.$$

Ha minden $x \in M$ -re létezik kvázi-reguláris bázisa $T_x M$ -nek, akkor a \mathcal{P} szimbólumát involutívnek hívjuk.

A Rapcsák-rendszer formális integrálhatóságának tanulmányozásához a Cartan–Kähler-tételt és a Goldschmidt-tételt fogjuk használni.

1.2.3. Tétel (Cartan–Kähler, [9]). *Legyen \mathcal{P} egy k -adrendű reguláris lineáris parciális differenciáloperátor. Ha a $\bar{\pi}_k: \text{Sol}_{k+1}(\mathcal{P}) \rightarrow \text{Sol}_k(\mathcal{P})$ leképezés szürjektív és a \mathcal{P} szimbóluma involutív, akkor \mathcal{P} formálisan integrálható.*

A Spencer–Goldschmidt-tétel megfogalmazásához tekintsük a következő Spencer-komplexust:

$$0 \rightarrow g_{m+k}(\mathcal{P}) \xrightarrow{\delta_0^m} T^* M \otimes g_{m-1+k}(\mathcal{P}) \xrightarrow{\delta_1^m} \Lambda^2 T^* M \otimes g_{m-2+k}(\mathcal{P}) \xrightarrow{\delta_2^m} \xrightarrow{\delta_2^m} \Lambda^3 T^* M \otimes g_{m-3+k}(\mathcal{P}) \xrightarrow{\delta_3^m} \dots \xrightarrow{\delta_{n-1}^m} \Lambda^n T^* M \otimes g_{m-n+k}(\mathcal{P}) \rightarrow 0, \quad (1)$$

ahol

$$\delta_i^m: \Lambda^i T^* M \otimes g_m(\mathcal{P}) \rightarrow \Lambda^{i+1} T^* M \otimes g_{m-1}(\mathcal{P}).$$

A $H^{m,i}$ Spencer-féle kohomológia csoportot a következőképpen definiáljuk:

$$H^{m,i} = \text{Ker } \delta_i^m / \text{Im } \delta_{i-1}^m.$$

Egy k -adrendű differenciáloperátor szimbóluma r -aciklikus, ha $H^{m,i} = 0$, $0 \leq i \leq r$, $\forall m \geq k$.

1.2.4. Tétel (Spencer–Goldschmidt, [9]). *Legyen \mathcal{P} egy k -adrendű reguláris parciális differenciáloperátor. Ha a $\bar{\pi}_k: \text{Sol}_{k+1}(\mathcal{P}) \rightarrow \text{Sol}_k(\mathcal{P})$ leképezés szürjektív és az operátor szimbóluma 2-aciklikus, akkor \mathcal{P} formálisan integrálható.*

Metrizálhatóság és projektív metrizálhatóság

Egy M sokaságon adott Finsler-függvényen egy nemnegatív, folytonos $F : TM \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt értünk a sokaság TM érintőnyalábján, amely sima \mathcal{TM} -en, fibrumonként elsőfokú pozitív homogén, továbbá a $(g_{ij}(x, y)) = \left(\frac{\partial^2 E}{\partial y^i \partial y^j} \right)$ mátrix minden $(x, y) \in \mathcal{TM}$ esetén pozitív definit, ahol $E = \frac{1}{2}F^2$ az energiafüggvény. Finsler sokaságon egy (M, F) párt értünk.

Ha (M, F) egy Finsler-sokaság, akkor egyértelműen létezik egy S spray, az úgynevezett kanonikus spray, melyre $i_S dd_J E = -dE$, ahol i_S az S vektormezővel való helyettesítés operátora, d a külső deriválás és $d_J := [i_J, d]$.

Egy M sokaságon adott S spray Finsler- (illetve Riemann-) metrizálható, ha létezik olyan Finsler- (illetve Riemann-) metrika M -en, melynek kanonikus spraye S .

Azt mondjuk, hogy az S és \tilde{S} sprayk projektív ekvivalensek, ha geodetikusaik egy irányításörző átparaméterezéstől eltekintve megegyeznek. Egy M sokaságon adott S spray projektív Finsler- (illetve Riemann) metrizálható, ha létezik egy olyan M -en adott Finsler- (illetve Riemann-) metrika, melynek kanonikus spraye projektív ekvivalens S -sel.

2.1.4. Tétel ([8]). *Legyen S egy spray az M sokaságon. Ekkor M akkor és csakis akkor projektív Finsler- (illetve Riemann-) metrizálható, ha létezik egy $F : TM \rightarrow \mathbb{R}$ Lagrange-függvény, melyhez asszociált $E = \frac{1}{2}F^2$ energiafüggvény 2-homogén (illetve kvadratikus), $\frac{\partial^2 E}{\partial y^i \partial y^j}$ pozitív definit \mathcal{TM} -en és teljesül az $i_S dd_J F = 0$ egyenlet.*

Jelölje $\mathcal{P}_S F := i_S \Omega = 0$ a Rapcsák-egyenletet, ahol $\Omega = dd_J F$, és az F függvény egy 1-homogén függvény, azaz $\mathcal{P}_C F := \mathcal{L}_C F - F = 0$. Az $\{i_S \Omega = 0, \mathcal{L}_C F - F = 0\}$ rendszert Rapcsák-rendszernek nevezzük. Tehát a projektív metrizálhatóság problémája a $\mathcal{P}_1 = (\mathcal{P}_S, \mathcal{P}_C)$ parciális differenciáloperátor integrálhatóságának vizsgálatára vezethető vissza. Bizonyítjuk a következő állítást:

2.2.1. Állítás ([34]). *A \mathcal{P}_1 rendszer egy másodrendű $s = j_2(F)_x$ megoldása $x \in \mathcal{TM}$ -ben akkor és csak akkor emelhető fel harmadrendű megoldássá, ha az*

$$(i_\Gamma dd_J F)_x = 0,$$

integrálhatósági feltétel teljesül, ahol $\Gamma = [J, S]$ az S -hez társított nemlineáris konnexió.

Továbbá igazoljuk, hogy a $\mathcal{P}_1 = (\mathcal{P}_S, \mathcal{P}_C)$ differenciáloperátor szimbóluma involutív. Így a Cartan–Kähler-tétel alapján következik, hogy az $i_\Gamma dd_J F = 0$ egyenlet teljesülése esetén \mathcal{P}_1 minden másodrendű megoldása felemelhető végtelen rendű megoldássá, azaz a differenciáloperátor formálisan integrálható.

2.2.4. Tétel ([34]). *Legyen S egy spray az M sokaságon. Az S -hez társított Rapcsák-rendszer akkor és csakis akkor formálisan integrálható, ha bármely $s = j_2(F)_x$ másodrendű megoldásra teljesül az $(i_\Gamma dd_J F)_x = 0$ egyenlet.*

A kibővített Rapcsák-rendszer

Ha $\dim M \geq 2$, akkor a \mathcal{P}_1 differenciáloperátor $\mathcal{P}_\Gamma F := i_\Gamma dd_J F = 0$ kompatibilitási feltétele nem teljesül minden másodrendű megoldásra, így nem minden másodrendű megoldás emelhető fel harmadrendűvé. Ez azt jelenti, hogy a Rapcsák rendszer ebben az esetben nem lesz formálisan integrálható. A kompatibilitási feltételt a rendszerhez adva redukálhatjuk a kezdeti értékek halmazát. Tehát a továbbiakban az integrálhatósági feltétellel bővített $(\mathcal{P}_S, \mathcal{P}_C, \mathcal{P}_\Gamma)$ rendszert vizsgáljuk. Igazoljuk, hogy

3.0.1. Lemma ([34]). *A $(\mathcal{P}_S, \mathcal{P}_C, \mathcal{P}_\Gamma)$ és a $\mathcal{P}_2 = (\mathcal{P}_\Gamma, \mathcal{P}_C)$ differenciáloperátor ekvivalens: a két rendszer megoldáshalmaza megegyezik.*

Így a \mathcal{P}_S operátor el is hagyható a rendszerből, és elegendő a $\mathcal{P}_2 = (\mathcal{P}_\Gamma, \mathcal{P}_C)$ kibővített Rapcsák-rendszert vizsgálni. Bizonyítjuk az alábbi állítást:

3.1.1. Állítás ([34]). *A $\mathcal{P}_2 = (\mathcal{P}_\Gamma, \mathcal{P}_C)$ rendszer egy másodrendű $s = j_2(F)_x$ megoldása $x \in \mathcal{TM}$ -ben akkor és csak akkor emelhető fel harmadrendű megoldássá, ha az*

$$(i_R dd_J F)_x = 0,$$

integrálhatósági feltétel teljesül, ahol R a sprayhez társított nemlineáris konnexió görbülete.

Továbbá belátjuk, hogy a \mathcal{P}_2 operátor szimbóluma involutív. Így nyerjük a következő tételt:

3.1.1. Tétel ([34]). *A kiterjesztett Rapcsák-rendszer akkor és csak akkor formálisan integrálható ha minden $j_2(F)_x$ másodrendű megoldás esetén az $(i_R dd_J F)_x = 0$ egyenlet teljesül.*

Mivel 2-dimenziós sokaságok, lapos és izotróp sprayk esetén az $i_R dd_J F = 0$ feltétel automatikusan teljesül, így ezekben az esetekben a \mathcal{P}_2 operátor formálisan integrálható:

3.2.2. Tétel ([34]). *Legyen S egy spray az M sokaságon. A kibővített Rapcsák-rendszer pontosan akkor formálisan integrálható, ha az alábbiak közül az egyik teljesül:*

1. $\dim M = 2$,
2. S lapos spray,
3. S izotróp spray.

3.2.3. Következmény ([34]). *Legyen S egy analitikus spray az M analitikus sokaságon. Ha M 2-dimenziós sokaság, S lapos spray vagy S izotróp görbületű spray, akkor S lokálisan projektív Finsler-metrizálható.*

A görbületi feltétellel kiegészített Rapcsák-rendszer

Nem izotróp sprayk esetén a kibővített Rapcsák-rendszer integrálhatósági feltételeként kapott $i_R\Omega = 0$ egyenlet nem szükségképpen teljesül minden kezdeti feltételre, tehát ekkor a kiterjesztett rendszer nem formálisan integrálható. Ezért a nem izotróp sprayk projektív metrizálhatóságának tanulmányozásához az $\mathcal{P}_R F = i_R\Omega = 0$ integrálhatósági feltételt is hozzá kell venni a vizsgált parciális differenciálegyenlet-rendszerhez, és a görbületi feltételeket is tartalmazó $(\mathcal{P}_\Gamma, \mathcal{P}_C, \mathcal{P}_R)$ differenciáloperátor integrálhatóságát kell vizsgálni. Viszont az $i_R\Omega = 0$ egyenletet helyettesíthető a következő ekvivalens feltétellel: $\mathcal{P}_\Phi F := i_\Phi dd_J F = 0$, ahol Φ a Jacobi-endomorfizmus. Ebben a fejezetben a $\mathcal{P}_3 := (\mathcal{P}_\Gamma, \mathcal{P}_C, \mathcal{P}_\Phi)$ rendszer integrálhatósági feltételeit tanulmányozzuk abban az esetben, amikor a Jacobi-endomorfizmus sajátfüggvényei páronként különböznek.

Az alábbi „adaptált” bázist fogjuk számításainkban használni:

$$\mathcal{B} := \{h_1, \dots, h_n, v_1, \dots, v_n\} \subset T_x TM, \quad (2)$$

ahol a h_i vektormezők a Jacobi-endomorfizmus horizontális sajátvektorai, $h_n = S$, valamint $Jh_i = v_i$, $i = 1, \dots, n$ (és így $v_n = C$).

4.1.2. Állítás ([35]). *A \mathcal{P}_3 differenciáloperátor egy $x \in TM$ -beli másodrendű $s = j_2(F)_x$ megoldása akkor és csak akkor emelhető fel harmadrendű megoldássá, ha az*

$$\begin{aligned} i_{[\Phi, \Phi]}\Omega_x &= 0, \\ \sum_{\substack{cycl \\ ijk}} (\Omega_x([v_i, h_j], h_k))_x &= 0, \end{aligned}$$

integrálhatósági feltételek teljesülnek.

A nem izotróp eset további vizsgálata igen bonyolulttá válik, mivel a \mathcal{P}_3 szimbóluma nem 2-aciklikus, és egy nehezen kezelhető harmadrendű integrálhatósági feltétel jelenik meg a rendszer prolongálása során. Pontosabban a következőt igazoljuk:

4.2.1. Állítás ([34]). *A \mathcal{P}_3 operátor szimbóluma nem 2-aciklikus: a Spencer-féle kohomológia csoportok közül a $H^{2,2}(\mathcal{P}_3)$ nemtriviális és*

$$\dim H^{2,2}(\mathcal{P}_3) = \frac{(n-1)(n-2)}{2}.$$

Ez azt jelenti, hogy a \mathcal{P}_3 prolongáltjának integrálhatósági feltételei nem \mathcal{P}_3 integrálhatósági feltételeinek prolongáltjai, hanem $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ extra harmadrendű obstrukció jelenik meg a harmadrendű megoldások negyedrendűvé emelésekor. Azt kapjuk, hogy

4.3.1. Állítás ([35]). A \mathcal{P}_3 differenciáloperátor valamely $j_3(F)_x \in \text{Sol}_3(\mathcal{P}_3)$ harmadrendű megoldása pontosan akkor emelhető fel negyedrendű megoldássá, ha a másodrendű kompatibilitási feltételek első prolongáltjai zérusok, továbbá tetszőleges $X, Y \in T_x$ -re teljesül az alábbi egyenlet:

$$\begin{aligned} & [hX, \Phi X]\Omega(JY, Y) - [hY, \Phi Y]\Omega(X, JX) = \\ & + \Phi X \left(\sum_{\text{cycl}} \Omega([JY, hX], hY) \right) - hX \left(\sum_{\text{cycl}} \Omega([JY, \Phi X], hY) - \Omega([JY, \Phi Y], X) \right) \quad (4) \\ & - \Phi Y \left(\sum_{\text{cycl}} \Omega([JX, hX], hY) \right) + hY \left(\sum_{\text{cycl}} \Omega([JX, \Phi X], Y) - \Omega([JX, \Phi Y], X) \right). \end{aligned}$$

4.3.3. Következmény ([35]). A (2)-ben definiált adaptált bázisra vonatkozóan a (4) integrálhatósági feltétel az összegzési konvenciót nem alkalmazva az alábbi formába írható:

$$\beta_{ij}^i(\mathcal{L}_{v_i} a_{ii}) + \beta_{ij}^j(\mathcal{L}_{v_j} a_{jj}) + \gamma_{ij}^i(\mathcal{L}_{h_i} a_{ii}) + \gamma_{ij}^j(\mathcal{L}_{h_j} a_{jj}) + \sum_{k=1}^n \alpha_{ij}^k a_{kk} = 0,$$

ahol $1 \leq i, j \leq n$, $a_{ij} = \Omega(v_i, h_j)$ és az α_{ij}^k , β_{ij}^k és γ_{ij}^k függvények a spray ismeretében meghatározhatók.

A háromdimenziós eset

Legyen S egy nem izotróp spray egy háromdimenziós M sokaságon. Ekkor vizsgáljuk meg a \mathcal{P}_3 másodrendű integrálhatósági feltételeit. Az alábbi eredményeket kapjuk:

5.1.1. Állítás ([35]). Az $i_{[\Phi, \Phi]}\Omega = 0$ egyenlet azonosan teljesül.

5.1.2. Állítás ([35]). A $\sum_{i,j,k}^{\text{cycl}} (\Omega_x([v_i, h_j], h_k))_x = 0$ integrálhatósági feltétel ekvivalens az $i_{\Phi'}\Omega = 0$ egyenlettel, ahol Φ' a Jacobi-endomorfizmus dinamikus kovariáns deriváltja.

5.2.1. Állítás ([35]). A $H^{m,2}$ Spencer-féle kohomológia csoport minden $m \geq 3$ esetén triviális, így \mathcal{P}_3 prolongáltjának szimbóluma 2-aciklikus.

5.2.2. Tétel ([35]). Legyen S egy nem izotróp spray egy 3-dimenziós M sokaságon, és tegyük fel, hogy az S Jacobi-endomorfizmusának sajátfüggvényei különböznek. Ekkor a \mathcal{P}_3 differenciáloperátor akkor és csak akkor formálisan integrálható, ha

1. $\Phi' \in \text{Span}\{J, \Phi\}$.
2. A (4) kompatibilitási feltétel azonosan zérus.

5.2.3. Következmény ([35]). Legyen S egy nem izotróp analitikus spray egy 3-dimenziós analitikus sokaságon, továbbá tegyük fel, hogy az S Jacobi-endomorfizmusának sajátfüggvényei különböznek. Ha a magasabb rendű kompatibilitási feltétel reducibilis és a 5.2.2. Tétel feltételei a teljesülnek, akkor S lokálisan projektív metrizableható.

Reducibilis eset

Ebben az alfejezetben a $\mathcal{P}_4 = (\mathcal{P}_3, \mathcal{P}_\Psi)$ differenciáloperátor integrálhatósági feltételeit határozzuk meg, ahol

$$\mathcal{P}_\Psi F = \eta_1 \Omega(v_1, h_1) + \eta_2 \Omega(v_2, h_2),$$

ahol η_1 és η_2 a \mathcal{TM} -en értelmezett S spray által meghatározott függvények. A \mathcal{P}_Ψ másodrendű feltétel származhat abból, hogy $\Phi' \notin \text{Span}\{J, \Phi\}$, így \mathcal{P}_3 másodrendű komatibilitási feltétele nem teljesül (és így a \mathcal{P}_3 operátort a szokásos módon bővíteni kell vele), valamint abból, hogy az extra harmadrendű integrálhatósági feltétel reducibilis. Megmutatjuk, hogy

5.3.4. Következmény ([35]). *A \mathcal{P}_4 rendszer teljes abban az értelemben, hogy*

1. *vagy az összes kompatibilitási feltétel teljesül, és ekkor a spray lokálisan projektív metrizable,*
2. *vagy a spray nem projektív metrizable.*

Meghatározzuk a \mathcal{P}_4 kompatibilitási feltételeit is. Ezek a következő alakba írhatóak (5.3.8. Következmény):

$$\begin{aligned} \tau_4^i(\nabla \mathcal{P}_4 F) &= \eta_1^i \Omega(v_1, h_1) + \eta_2^i \Omega(v_2, h_2) \quad i = 1, 2, \\ \tau_4^j(\nabla^2 \mathcal{P}_4 F) &= \eta_1^j \Omega(v_1, h_1) + \eta_2^j \Omega(v_2, h_2) \quad j = 3, 4, 5, 6. \end{aligned}$$

ahol az η_i^k -k függvények \mathcal{TM} -en. Legyen

$$\Theta = \begin{pmatrix} \eta_1 & \eta_1^1 & \dots & \eta_1^6 \\ \eta_2 & \eta_2^1 & \dots & \eta_2^6 \end{pmatrix}.$$

5.3.9. Állítás ([35]). *A \mathcal{P}_4 operátor akkor és csak akkor formálisan integrálható, ha*

$$\text{rank } \Theta = 1.$$

5.3.10. Tétel ([35]). *Legyen S egy nem izotróp analitikus spray egy 3-dimenziós analitikus sokaságon, melynek Jacobi-endomorfizmusa generikus, azaz a sajátértékei minden $x \in \mathcal{TM}$ pontban különböznek.*

1. *Ha $\Phi' \in \text{Span}\{J, \Phi\}$ és a (4) kompatibilitási feltétel reducibilis, akkor az S spray projektív metrizable.*
2. *Ha $\Phi' \notin \text{Span}\{J, \Phi\}$ vagy a (4) kompatibilitási feltétel reducibilis de nem azonosan zérus, akkor a spray akkor és csak akkor lokálisan projektív metrizable, ha $\eta_1 \cdot \eta_2 < 0$ és $\text{rank } \Theta = 1$.*

Kanonikus sprayk invariáns projektív metrizálhatósága

Egy Lie-csoporton háromféle kanonikus konnexió adható meg: ha X, Y balinvariáns vektormezők, akkor ezeket a következőképpen definiálhatjuk:

$$\nabla_X^+ Y := [X, Y], \quad \nabla_X^- Y := 0, \quad \nabla_X^0 Y := \frac{1}{2}[X, Y].$$

Mindhárom konnexió lineáris, és mindhárom konnexiónak ugyanazok a geodetikusai: a Lie-csoport 1-paraméteres részcsoportjai és ezek eltoltjai. Ehhez a geodetikus struktúrához tartozó sprayt hívjuk a Lie-csoport kanonikus sprayének.

6.1.4. Állítás ([8]). *Egy Lie-csoport kanonikus spray-je*

1. *pontosan akkor invariáns projektív Riemann-metrizálható, ha invariáns Riemann-metrizálható,*
2. *pontosan akkor invariáns projektív Finsler-metrizálható, ha invariáns Finsler-metrizálható.*

6.1.5. Tétel ([8]). *Egy Lie-csoporthoz tartozó kanonikus spray akkor és csak akkor invariáns projektív Finsler-metrizálható, ha invariáns Riemann-metrizálható.*

6.1.6. Következmény ([8]). *Egy Lie-csoport kanonikus spraye akkor és csak akkor invariáns Riemann-, Finsler-, projektív Riemann- illetve projektív Finsler-metrizálható, ha létezik egy $\langle \cdot, \cdot \rangle$ skaláris szorzat \mathfrak{g} -n, melyre*

$$\langle [a, \alpha], \alpha \rangle = 0, \tag{5}$$

minden $a, \alpha \in \mathfrak{g}$ -re.

Egy invariáns geodetikus struktúrát az $M \cong G/H$ homogén téren geodetikus orbit struktúrának (vagy g.o. struktúrának) mondunk, ha az $o \in M$ origóból induló tetszőleges geodetikus homogén. Egy g.o. struktúrához tartozó sprayt geodetikus orbitspraynek (vagy röviden g.o. spraynek) nevezünk.

6.2.5. Állítás ([8]). *Egy g.o. spray*

1. *pontosan akkor invariáns projektív Riemann-metrizálható, ha invariáns Riemann-metrizálható,*
2. *pontosan akkor invariáns projektív Finsler-metrizálható, ha invariáns Finsler-metrizálható.*

6.2.6. Tétel ([8]). *Egy kvadratikus g.o. spray akkor és csak akkor invariáns projektív Finsler-metrizálható, ha invariáns Riemann-metrizálható.*

1. Motivations and aims

Let us consider a homogeneous system of second order ordinary differential equations on the n -dimensional manifold M . To every such system we can associate a vector field S on $\mathcal{T}M$ in a coordinate free manner, such that the solutions of the system of differential equations coincide with the projections of the integral curves of S to M . This vector field is called spray. The projections of the integral curves of S is called the geodesics of the spray. A spray is called Finsler (Riemann) metrizable, if there exists a Finsler (Riemann) structure whose geodesics coincide with the geodesics of the spray. The projective metrizability problem is more general, and perhaps more natural from the point of view of geometrical and physical applications. Two family of curves are projective equivalent, if they coincide up to an orientation preserving reparametrization. The projective Finsler (Riemann) metrizability can be formulated as follows: a spray S on M is called projective Finsler (Riemann) metrizable, if there exists a Finsler (Riemann) metric on M whose canonical spray is projective equivalent to S .

For flat sprays this problem was first studied by Hamel [24] and it is known as the Finslerian version of Hilbert's fourth problem . In the general case Rapcsák [41] obtained necessary and sufficient conditions for the projective metrizability of a spray in terms of an overdetermined system of second order partial differential equations. Coordinate free formulations of the projective metrizability problem were obtained by Klein and Voutier [25], and by Szilasi and Vattamány [46].

The first five chapters of thesis is devoted to the integrability of the Rapcsák system by using the Cartan–Kähler theory, and in the last chapter we investigate the metrizability and the projective metrizability of Lie groups and homogeneous spaces.

In Chapter 1 we introduce the the basic notations and facts. We give a brief introduction to the Frölicher–Nijenhuis theory, and the canonical structures on the tangent bundle of a manifold. We introduce the Liouville vector field, vertical endomorphism, spray and some important tensors associated to a spray. We also recall the basic tools of Cartan–Kähler theory.

In Chapter 2 we introduce the Finsler-manifold and the metrizability and projective metrizability problems. We show that a spray S is projective Finsler metrizable if and only if the equation $\mathcal{P}_S F := i_S \Omega = 0$ holds, where $\Omega = dd_J F$, and F is a 1-homogeneous function, that is $\mathcal{P}_C F := \mathcal{L}_C F - F = 0$. We prove that the differential operator $\mathcal{P}_1 = (\mathcal{P}_S, \mathcal{P}_C)$ is formally integrable if and only if the integrability condition $i_\Gamma \Omega = 0$ holds, where Γ is the nonlinear connection associated to the spray.

In Chapter 3 we compute the integrability conditions of the system $\mathcal{P}_2 = (\mathcal{P}_\Gamma, \mathcal{P}_C)$, where $\mathcal{P}_\Gamma F = i_\Gamma \Omega$. The obstruction to the integrability takes the form $i_R \Omega = 0$, where R is the curvature of the nonlinear connection associated to the spray. We show that the symbol of the system is involutive thus the conditions of the Cartan–Kähler theorem are satisfied. Hence, we can obtain that 2-dimensional manifolds, flat sprays and isotopic sprays are projectively metrizable. We remark that for these classes of spray manifolds the projective metrizability problem has been discussed in [4, 11, 12], but our approach here is different.

In Chapter 4 we consider the differential operator of the projective metrizable in the non-isotropic case, which can be written as $\mathcal{P}_3 = (\mathcal{P}_\Gamma, \mathcal{P}_C, \mathcal{P}_\Phi)$, where Φ is the Jacobi endomorphism and $\mathcal{P}_\Phi F = i_\Phi \Omega$. We consider the generic case, when the eigenvalues of Φ are pairwise distinct. We determine the second order compatibility conditions, and we prove that the symbol of this system is not 2-acyclic. Using Spencer cohomology groups we show that a complicated extra third order compatibility condition appears.

In Chapter 5 we turn our attention to the 3-dimensional case. As we have shown in Chapter 4, the Spencer cohomology group $H^{2,2}(\mathcal{P}_3)$ is non-trivial, and third order integrability conditions can arise. We prove that all of the higher order cohomology groups vanish, that is the symbol of the prolonged system is 2-acyclic. Furthermore we discuss the reducible case, where we extend the operator with the integrability condition $\eta_1 \Omega(v_1, h_1) + \eta_2 \Omega(v_2, h_2) = 0$, where η_1 and η_2 are functions on $\mathcal{T}M$ determined by the spray S . We give an example of non-isotropic projectively metrizable spray.

In Chapter 6 we consider a Lie group endowed with its canonical connection. Since every Riemannian manifold is a special Finsler manifold, therefore every Riemann metrizable (projective Riemann metrizable) spray is also Finsler metrizable (projective Finsler metrizable). The converse is not true in general. However, in the category of quadratic sprays the situation is different: using Szabó's theorem [44] the category of Riemann and Finsler metrizable sprays are the same. The projective Finsler metrizable, however, is essentially different even in the case of quadratic sprays. Therefore, the category of projective Finsler metrizable sprays is generally strictly larger than the category of Riemann metrizable sprays, even for quadratic sprays.

In Chapter 6 we show the potentially much larger class of projective Finsler metrizable sprays, corresponding to Lie groups, coincides with the class of Riemann metrizable sprays. We also generalize these results for geodesic orbit spaces.

2. Contents and new results

Preliminaries

Let M be an n -dimensional smooth manifold. TM will denote the tangent bundle of M , and $\mathcal{T}M = TM \setminus \{0\}$ the slit tangent bundle of M . We denote the local coordinates on M by (x^i) and the induced coordinates on TM by (x^i, y^i) .

A spray is a vector field S on $\mathcal{T}M$ satisfying the relations $JS = C$ and $[C, S] = S$, where

$$J = dx^i \otimes \frac{\partial}{\partial y^i}, \quad C = y^i \frac{\partial}{\partial y^i},$$

are the vertical endomorphism and the Liouville vector field. The coordinate representation of a spray S takes the form

$$S = y^i \frac{\partial}{\partial x^i} + f^i(x, y) \frac{\partial}{\partial y^i}.$$

The geodesics of a spray S are regular curves $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M$ such that $S \circ \dot{\gamma} = \ddot{\gamma}$.

To every spray S a connection $\Gamma := [J, S]$ can be associated. We have the property $\Gamma^2 = \text{Id}$, the identity map of TM . The eigenspace of Γ corresponding to the eigenvalue -1 is the *vertical space* VTM , and the eigenspace corresponding to $+1$ is called the *horizontal space*. For any $v \in TM$ we have $T_v TM = V_v TM \oplus H_v TM$. The $h : TTM \rightarrow HTM$ horizontal and the $v : TTM \rightarrow VTM$ vertical projectors associated to the connection are

$$h := \frac{1}{2}(\text{Id} + \Gamma) \quad \text{and} \quad v := \frac{1}{2}(\text{Id} - \Gamma).$$

The curvature of the connection Γ is the Nijenhuis torsion of the associated horizontal projection h :

$$R = \frac{1}{2}[h, h] \in \Psi^2(TM).$$

The Jacobi endomorphism is the vector valued semi-basic 1-form:

$$\Phi := i_S R.$$

The spray S is called flat if its Jacobi endomorphism has the form $\Phi = \lambda J$ and isotropic if $\Phi = \lambda J - \alpha \otimes C$, where $\lambda \in C^\infty(TM)$ and α is a semi-basic 1-form.

Formal integrability

Let (B, π, M) be a vector bundle over the manifold M with the projection $\pi : B \rightarrow M$. Let s_1, s_2 be two sections of the bundle $\text{Sec}(B)$. We say that s_1 and s_2 determine the same k^{th} order jet at x , if they are coincide at x up to order k . The class determined by the section $s \in \text{Sec}(B)$ at $x \in M$ is $j_k(s)_x$, and the set of all k -jets is denoted by $J_k(B)$.

Let B_1 and B_2 be vector bundles over the same base manifold M . Then a linear k^{th} order partial differential operator $\mathcal{P} : \text{Sec}(B_1) \rightarrow \text{Sec}(B_2)$ can be identified with the map $p_k(\mathcal{P}) : J_k(B_1) \rightarrow B_2$. An $s \in \text{Sec}(B_1)$ is a solution to \mathcal{P} -if $\mathcal{P}s \equiv 0$. $\text{Sol}_{k+l,x}(\mathcal{P}) := \text{Ker } p_{k+l,x}(\mathcal{P})$ denotes the set of formal solutions of order l at $x \in M$.

The k^{th} order differential operator \mathcal{P} is called formally integrable if $\text{Sol}_l(\mathcal{P})$ is a vector bundle over M for all $l \geq k$, and the map $\bar{\pi}_{l,x} : \text{Sol}_{l+1,x}(\mathcal{P}) \rightarrow \text{Sol}_{l,x}(\mathcal{P})$ is onto for every $\forall l \geq k$.

Let $\sigma_k(\mathcal{P})$ denote the symbol of \mathcal{P} determined by the highest order terms of the operator. It can be interpreted as a map $\sigma_k(\mathcal{P}) : S^k T^*M \otimes B_1 \rightarrow B_2$. If $\mathcal{E} = \{e_1 \dots e_n\}$ a basis of $T_x M$, we set

$$g_{k,x}(\mathcal{P}) = \text{Ker } \sigma_{k,x}(\mathcal{P}),$$

$$g_{k,x}(\mathcal{P})_{e_1 \dots e_j} = \left\{ A \in g_{k,x}(\mathcal{P}) \mid i_{e_1} A = \dots = i_{e_j} A = 0 \right\}, \quad j = 1, \dots, n.$$

The basis \mathcal{E} is called quasi-regular if one has

$$\dim g_{k+1,x}(\mathcal{P}) = \dim g_{k,x}(\mathcal{P}) + \sum_{j=1}^n \dim g_{k,x}(\mathcal{P})_{e_1 \dots e_j}.$$

The symbol of \mathcal{P} is called involutive if there exists at any $x \in M$ a quasi-regular basis of $T_x M$.

1.2.3. Theorem (Cartan–Kähler). *Let \mathcal{P} be a k^{th} order regular linear partial differential operator. If the map $\bar{\pi}_k: \text{Sol}_{k+1}(\mathcal{P}) \rightarrow \text{Sol}_k(\mathcal{P})$ is surjective and the symbol of \mathcal{P} is involutive, then \mathcal{P} is formally integrable.*

Let us consider the following Spencer complex

$$0 \rightarrow g_{m+k}(\mathcal{P}) \xrightarrow{\delta_0^m} T^*M \otimes g_{m-1+k}(\mathcal{P}) \xrightarrow{\delta_1^m} \Lambda^2 T^*M \otimes g_{m-2+k}(\mathcal{P}) \xrightarrow{\delta_2^m} \\ \xrightarrow{\delta_2^m} \Lambda^3 T^*M \otimes g_{m-3+k}(\mathcal{P}) \xrightarrow{\delta_3^m} \dots \xrightarrow{\delta_{n-1}^m} \Lambda^n T^*M \otimes g_{m-n+k}(\mathcal{P}) \rightarrow 0,$$

where

$$\delta_i^m : \Lambda^i T^*M \otimes g_m(\mathcal{P}) \rightarrow \Lambda^{i+1} T^*M \otimes g_{m-1}(\mathcal{P}).$$

The $H^{m,i}$ Spencer cohomology group is defined as

$$H^{m,i} = \text{Ker } \delta_i^m / \text{Im } \delta_{i-1}^m.$$

The symbol of a k^{th} order linear differential operator is r -acyclic if $H^{m,i} = 0$, $0 \leq i \leq r$, $\forall m \geq k$.

1.2.4. Theorem (Spencer–Goldschmidt). *Let \mathcal{P} be k^{th} order regular linear partial differential operator. If $\bar{\pi}_k : \text{Sol}_{k+1}(\mathcal{P}) \rightarrow \text{Sol}_k(\mathcal{P})$ is onto and the symbol of the operator is 2-acyclic then \mathcal{P} is formally integrable.*

Metrizability and projective metrizability

A Finsler function on a manifold M is a continuous function $F: TM \rightarrow \mathbb{R}$, smooth and positive away from the zero section, positively homogeneous of degree 1, and the matrix $g_{ij} = \frac{\partial^2 E}{\partial y^i \partial y^j}$ is positive definite for all $(x, y) \in TM$, where $E = \frac{1}{2}F^2$ is the energy function. The pair (M, F) is called Finsler manifold.

If (M, F) is a Finsler-manifold, then there exists a unique spray S over TM (the so called canonical spray) such that $i_S dd_J E = -dE$, where i_S is the substitution operator, d is the exterior derivative and $d_J := [i_J, d] = i_J d - di_J$.

A spray S is called Finsler (resp. Riemann) metrizable if there exist a Finsler (resp. Riemann) metric F whose canonical spray is S .

Two sprays S and \tilde{S} are called projective equivalent, if their geodesics coincide up to an orientation preserving reparametrization. A spray S is called projective Finsler (resp. Riemann) metrizable if there exist a Finsler (resp. Riemann) metric whose canonical spray is projectively equivalent to S .

2.1.4. Theorem. *A spray S is projective Finsler (resp. Riemann) metrizable if and only if there exists a Lagrange function $F: TM \rightarrow \mathbb{R}$, such that the energy function $E = \frac{1}{2}F^2$ is 2-homogeneous (resp. quadratic), $\frac{\partial^2 E}{\partial y^i \partial y^j}$ is positive definite on TM and the equation $i_S dd_J F = 0$ holds.*

Let us introduce the notation $\Omega = dd_J F$. According to Theorem 2.1.4, in order to solve the projective metrizability problem, we have to consider and investigate the integrability of the Rapcsák system: $\{i_S \Omega = 0, \mathcal{L}_C F - F = 0\}$. The equation $\mathcal{P}_S F := i_S \Omega = 0$ is called Rapcsák equation, $\mathcal{P}_C F := \mathcal{L}_C F - F = 0$ describes the

1-homogeneity condition. Therefore, the projective metrizable problem leads to the investigation of the partial differential operator $\mathcal{P}_1 = (\mathcal{P}_S, \mathcal{P}_C)$. We prove the following proposition:

2.2.1. Proposition. *A 2^{nd} order solution $s = j_2(F)_x$ at $x \in \mathcal{TM}$ of the Rapcsák system can be lifted into a 3^{rd} order solution if, and only if, one has*

$$(i_\Gamma dd_J F)_x = 0, \quad (6)$$

where $\Gamma = [J, S]$ is the canonical nonlinear connection associated to S .

Furthermore, in Proposition 2.2.3, we show that the symbol of $\mathcal{P}_1 = (\mathcal{P}_S, \mathcal{P}_C)$ is involutive. Thus by Cartan–Kähler theorem, we can conclude that if equation $i_\Gamma dd_J F = 0$ is satisfied, then every second order solution of \mathcal{P}_1 can be prolonged into an infinite order solution that is the differential operator is formally integrable.

2.2.4. Theorem. *Let S be a spray on the manifold M . Then the Rapcsák system associated to S is formally integrable if and only if for every second order solution $s = j_2(F)_x$ the equation (6) is satisfied.*

Extended Rapcsák system

If $\dim M \geq 2$, then the compatibility condition $\mathcal{P}_\Gamma F := i_\Gamma dd_J F = 0$ of the differential operator \mathcal{P}_1 is not satisfied by all second order solutions and therefore the Rapcsák system is not formally integrable in this case. Indeed, the set of initial data is too large, therefore we have to reduce it by including its compatibility condition into the system. This leads us to consider the operator $(\mathcal{P}_S, \mathcal{P}_C, \mathcal{P}_\Gamma)$. We show, that

3.0.1. Lemma. *The differential operators $(\mathcal{P}_S, \mathcal{P}_C, \mathcal{P}_\Gamma)$ and $\mathcal{P}_2 = (\mathcal{P}_\Gamma, \mathcal{P}_C)$ are equivalent: the solution sets of the two system coincide.*

Therefore, we can drop the operator \mathcal{P}_S from the system and consider the extended Rapcsák system simply as: $\mathcal{P}_2 = (\mathcal{P}_\Gamma, \mathcal{P}_C)$.

3.1.1. Proposition. *A 2^{nd} order solution $s = j_2(F)_x$ of the system $\mathcal{P}_2 = (\mathcal{P}_\Gamma, \mathcal{P}_C)$ at $x \in \mathcal{TM}$ can be prolonged into a 3^{rd} order solution, if and only if*

$$(i_R dd_J F)_x = 0.$$

Furthermore, we show that the symbol of \mathcal{P}_2 is also involutive. Therefore, we obtain the following theorem:

3.1.1. Tétel. *The extended Rapcsák system is formally integrable if and only if for every second order solution $j_2(F)_x$ the equation $(i_R dd_J F)_x = 0$ is satisfied.*

It follows

3.2.2. Theorem. *Let S be a spray on a manifold M . The extended Rapcsák system is formally integrable if and only if one of the following conditions are fulfilled:*

1. $\dim M = 2$;
2. the spray S is flat;
3. the spray S is of isotropic curvature.

3.2.3. Corollary. *Let S be an analytic spray on an analytic manifold M . If M is 2-dimensional manifold, the spray S is flat, or of isotropic curvature, then S is locally projective Finsler metrizable.*

Extended Rapcsák system with curvature condition

If the curvature of the spray S is not isotropic, then the integrability condition $i_R dd_J F = 0$ does not hold for every initial condition, therefore, the extended Rapcsák system is not formally integrable. Consequently, in order to investigate the projective metrizability in the non isotropic case we have to add the equation $\mathcal{P}_R F = i_R \Omega = 0$ to the system $(\mathcal{P}_\Gamma, \mathcal{P}_C)$ and discuss the integrability of the enlarged system $(\mathcal{P}_\Gamma, \mathcal{P}_C, \mathcal{P}_R)$. Since the curvature condition $i_R \Omega = 0$ is equivalent with the equation $\mathcal{P}_\Phi := i_\Phi \Omega = 0$, where Φ is the Jacobi endomorphism, we can replace the operator \mathcal{P}_R with \mathcal{P}_Φ and investigate the integrability of the system represented by the operator $\mathcal{P}_3 := (\mathcal{P}_\Gamma, \mathcal{P}_C, \mathcal{P}_\Phi)$.

In this chapter we investigate the integrability of the system \mathcal{P}_3 when the Jacobi endomorphism has distinct eigenvalues. In that case we can consider an adapted base

$$\mathcal{B} := \{h_1, \dots, h_n, v_1, \dots, v_n\} \subset T_x TM, \quad (7)$$

where h_i are the horizontal eigenvectors of the Jacobi endomorphism Φ with $h_n := S$, and $Jh_i = v_i$, $i = 1, \dots, n$ (consequently, $v_n = C$).

4.1.2. Proposition. *A 2^{nd} order solution $s = j_2(F)_x$ of \mathcal{P}_3 at $x \in \mathcal{T}M$ can be lifted into a 3^{rd} order solution, if and only if*

$$i_{[\Phi, \Phi]} \Omega_x = 0, \quad (8)$$

$$\sum_{\substack{cycl \\ ijk}} (\Omega_x([v_i, h_j], h_k))_x = 0. \quad (9)$$

The further analysis of \mathcal{P}_3 is complex, because the symbol of the operator is not 2-acyclic and a third order compatibility condition can arise. We proved the following

4.2.1. Proposition. *Let S be a non-isotropic spray on an n -dimensional manifold. Then the first nontrivial Spencer cohomology group is $H^{2,2}(P_3)$ and*

$$\dim H^{2,2}(P_3) = \frac{(n-1)(n-2)}{2}.$$

It follows that the integrability conditions of the prolonged system of \mathcal{P}_3 is not the prolongation of the integrability conditions of \mathcal{P}_3 . More precisely, there are $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ extra obstructions to lift a third order solution into a fourth order solution. With further analysis, we obtained the

4.3.1. Proposition. *If a 3rd order solution F of \mathcal{P}_3 at $x \in \mathcal{T}M$ can be lifted into a 4th order solution, if and only if for any horizontal vector fields $X, Y \in HTM$ we have*

$$\begin{aligned} & [hX, \Phi X]\Omega(JY, Y) - [hY, \Phi Y]\Omega(X, JX) = \\ & + \Phi X \left(\sum_{cycl} \Omega([JY, hX], hY) \right) - hX \left(\sum_{cycl} \Omega([JY, \Phi X], hY) - \Omega([JY, \Phi Y], X) \right) \quad (10) \\ & - \Phi Y \left(\sum_{cycl} \Omega([JX, hX], hY) \right) + hY \left(\sum_{cycl} \Omega([JX, \Phi X], Y) - \Omega([JX, \Phi Y], X) \right). \end{aligned}$$

at $x \in \mathcal{T}M$.

4.3.3. Corollary. *In an adapted basis (7) the compatibility condition (10) can be expressed as*

$$\beta_{ij}^i(\mathcal{L}_{v_i} a_{ii}) + \beta_{ij}^j(\mathcal{L}_{v_j} a_{jj}) + \gamma_{ij}^i(\mathcal{L}_{h_i} a_{ii}) + \gamma_{ij}^j(\mathcal{L}_{h_j} a_{jj}) + \sum_{k=1}^n \alpha_{ij}^k a_{kk} = 0,$$

where $1 \leq i, j \leq n$, $a_{ij} = \Omega(v_i, h_j)$ and the summation convention is not applied. The α_{ij}^k , β_{ij}^k , γ_{ij}^k are functions in a neighborhood of $x \in \mathcal{T}M$ determined by the Lie bracket of the elements of the local basis (7).

The three dimensional case

Let S be a non-isotropic spray on a three dimensional manifold M . We obtain the following:

5.1.1. Proposition. *The compatibility condition (8) is identically satisfied.*

5.1.2. Proposition. *The integrability condition (9) can be written as $i_{\Phi'}\Omega = 0$, where Φ' is the dynamical covariant derivative of the Jacobi endomorphism.*

5.2.1. Proposition. *For any $m \geq 3$ the Spencer cohomology group $H^{m,2}$ is trivial, therefore the symbol of the prolongation of \mathcal{P}_3 is 2-acyclic.*

5.2.2. Theorem. *Let S be a non-isotropic spray on a 3-dimensional manifold with distinct Jacobi eigenvalues. Then the PDE operator \mathcal{P}_3 is formally integrable if and only if the following two conditions are satisfied:*

1. $\Phi' \in \text{Span}\{J, \Phi\}$,

2. the compatibility condition (10) is satisfied.

5.2.3. Corollary. *Let S be a non-isotropic analytic spray on a 3-dimensional analytic manifold with distinct Jacobi eigenvalues. If the higher order compatibility condition is reducible and the conditions 1 and 2 of Theorem 5.2.2 are satisfied, then S is locally projective metrizable.*

Reducible case

In this subsection we study the differential operator $\mathcal{P}_4 = (\mathcal{P}_3, \mathcal{P}_\Psi)$, where

$$\mathcal{P}_\Psi F = \eta_1 \Omega(v_1, h_1) + \eta_2 \Omega(v_2, h_2), \quad (11)$$

and η_1 and η_2 are given functions on \mathcal{TM} determined by the spray S . The motivation of such system comes from the fact that in the case when the dynamical covariant derivative does not satisfies the condition $\Phi' \in \text{Span}\{J, \Phi\}$ or the condition (10) is reducible but not identically satisfied, then the extra integrability condition of \mathcal{P}_3 has the form (11). We have the following

5.3.4. Corollary. *The system \mathcal{P}_4 is complete in the sense that either all compatibility conditions are satisfied and the spray is projectively metrizable, or the spray is not projective metrizable.*

As 5.3.8 Corollary shows, the compatibility conditions of the operator \mathcal{P}_4 can be expressed as:

$$\begin{aligned} \tau_4^i(\nabla \mathcal{P}_4 F) &= \eta_1^i \Omega(v_1, h_1) + \eta_2^i \Omega(v_2, h_2) \quad i = 1, 2, \\ \tau_4^j(\nabla^2 \mathcal{P}_4 F) &= \eta_1^j \Omega(v_1, h_1) + \eta_2^j \Omega(v_2, h_2) \quad j = 3, 4, 5, 6. \end{aligned}$$

where η_i^k are functions on \mathcal{TM} . Let us consider the matrix

$$\Theta = \begin{pmatrix} \eta_1 & \eta_1^1 & \dots & \eta_1^6 \\ \eta_2 & \eta_2^1 & \dots & \eta_2^6 \end{pmatrix}.$$

Then we have

5.3.9. Proposition. *The operator \mathcal{P}_4 is formally integrable if and only if*

$$\text{rank } \Theta = 1.$$

5.3.10. Theorem. *Let S be a non-isotropic analytic spray on a 3-dimensional analytic manifold with distinct Jacobi eigenvalues.*

1. *If $\Phi' \in \text{Span}\{J, \Phi\}$ and the compatibility condition (10) is identically zero, then S is projectively metrizable*
2. *If $\Phi' \notin \text{Span}\{J, \Phi\}$ or the compatibility condition (10) is reducible but not identically zero, then the spray is locally projective metrizable if and only if $\eta_1 \cdot \eta_2 < 0$ and $\text{rank } \Theta = 1$.*

Invariant projective metrizable of canonical sprays

There exist three natural connections on a Lie group G : if X, Y are left invariant vector fields then we can define them in the following way:

$$\nabla_X^+ Y := [X, Y], \quad \nabla_X^- Y := 0, \quad \nabla_X^0 Y := \frac{1}{2}[X, Y].$$

All three connections are linear and have the same geodesics: the 1-dimensional subgroups of the Lie group G and their translated images. The spray associated to this geodesic structure is called the canonical spray of the Lie group. We have the following results:

6.1.4. Proposition. *The canonical spray S of a Lie group is*

1. *invariant projectively Riemann metrizable if and only if it is invariant Riemann metrizable,*
2. *invariant projectively Finsler metrizable if and only if it is invariant Finsler metrizable.*

Moreover, we have the following

6.1.5. Theorem. *The canonical spray of a Lie group is invariant projectively Finsler metrizable if and only if it is invariant Riemann metrizable.*

6.1.6. Corollary. *The canonical spray of a Lie group G is invariant (Riemann, Finsler, projectively Riemann or projectively Finsler) metrizable if and only if there exists a scalar product $\langle \cdot, \cdot \rangle$ on \mathfrak{g} such that*

$$\langle [a, \alpha], \alpha \rangle = 0,$$

for every $a, \alpha \in \mathfrak{g}$.

The results on the canonical spray and canonical geodesic structure of Lie groups can be generalized to the geodesic orbit structure of homogeneous spaces. Indeed, an invariant geodesic structure on the homogeneous space $M \cong G/H$ is called geodesic orbit structure (g.o. structure), if any geodesic $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M$ emanated from the origin $o \in M$ is homogeneous, that is

$$\gamma(t) = \lambda_{\exp tX_\gamma} o = (\exp tX_\gamma) \cdot o,$$

with some $X_\gamma \in \mathfrak{g}$, where \mathfrak{g} is the Lie algebra of G . A spray is called geodesic orbit spray (or simply g.o. spray), if it corresponds to a g.o. structure.

Concerning the geodesic orbit sprays we have the following results:

6.2.5. Proposition. *A g.o. spray is*

1. *invariant projectively Riemann metrizable if and only if it is invariant Riemann metrizable.*
2. *invariant projectively Finsler metrizable if and only if it is invariant Finsler metrizable.*

6.2.6. Theorem. *A quadratic g.o. spray is invariant projectively Finsler metrizable if and only if it is invariant Riemann metrizable.*

Hivatkozások

- [1] J.C. Álvarez Paiva: *Symplectic geometry and Hilbert's fourth problem*, J. Differential Geom., **69** (2005), 353–378.
- [2] S. Bácsó, Z. Szilasi: *On the projective theory of sprays*, Acta Math. Acad. Paed. Nyíregyháziensis, **26** (2010), 171–207.
- [3] I. Bucataru, M.F. Dahl: *Semi basic 1-forms and Helmholtz conditions for the inverse problem of the calculus of variations*, J. Geom. Mech., **1** (2009), 159–180.
- [4] I. Bucataru, Z. Muzsnay: *Projective Metrizability and Formal Integrability*, SIGMA Symmetry Integrability Geom. Methods Appl., **7** (2011), 114.
- [5] I. Bucataru, Z. Muzsnay: *Projective and Finsler metrizability: parameterization-rigidity of the geodesics*, Internat. J. Math., **23** (2012), 1250099.
- [6] I. Bucataru, Z. Muzsnay: *Sprays metrizable by Finsler functions of constant flag curvature*, Differential Geometry and its Applications, **31** (2013), 405–415.
- [7] I. Bucataru, Z. Muzsnay: *Metrizable isotropic second-order differential equations and Hilbert's fourth problem*, Journal of the Australian Mathematical Society, **97** (2014), 27–47.
- [8] I. Bucataru, T. Milkovszki, Z. Muzsnay: *Invariant metrizability and projective metrizability on Lie groups and homogeneous spaces*, Mediterranean Journal of Mathematics, **13** (2016), Issue 6, 4567–4580.
- [9] R.L. Bryant, S.S. Chern, R.B. Gardner, H.L. Goldschmidt, P.A. Griffiths: *Exterior Differential Systems*, Springer, 1991.
- [10] R.L. Bryant, M. Dunajski, M. Eastwood: *Metrisability of two dimensional projective structures*, J. Diff. Geom., **83** (2009), 465–500.
- [11] M. Crampin: *On the inverse problem for sprays*, Publ. Math. Debrecen, **70** (2007), 319–335.
- [12] M. Crampin: *Isotropic and R-flat sprays*, Houston J. Math., **33** (2007), 451–459.
- [13] M. Crampin: *Some remarks on the Finslerian version of Hilbert's fourth problem*, Houston J. Math., **37** (2011), 369–391.
- [14] M. Crampin, T. Mestdag, D.J. Saunders: *The multiplier approach to the projective Finsler metrizability problem*, Differential Geom. Appl., **30** (2012), 604–621.
- [15] M. Crampin, T. Mestdag, D.J. Saunders: *Hilbert forms for a Finsler metrizable projective class of sprays*, Differential Geom. Appl., **31** (2013), 63–79.
- [16] S. Deng, Z. Hou: *Invariant Finsler metrics on homogeneous manifolds*, J. Phys. A: Math. Gen., **37** (2004), 8245–8253.

- [17] T. Do, G.E. Prince: *New progress in the inverse problem in the calculus of variations*, Differential Geom. Appl., **45** (2016), 148–179.
- [18] M. Eastwood, V.S. Matveev: *Metric connections in projective differential geometry*, The IMA Volumes in Math. and its Appl., **144** (2008), 339–350.
- [19] A. Frölicher, A. Nijenhuis: *Theory of vector-valued differential forms*, Proc. Kon. Ned. Akad. A., **59** (1956), 338–359.
- [20] G.W. Gibbons, C.M.Warnick, M.C.Werner: *Light-bending in Schwarzschild-de-Sitter: projective geometry of the optical metric*, Class. Quant. Grav., **25** (245009), 2008.
- [21] G.W. Gibbons and C.M.Warnick: *Dark energy and projective symmetry*, arXiv:1003.3845v1, 2010.
- [22] R. Ghanam, F. Hindeleh, G. Thompson: *Bi-invariant and noninvariant metrics on Lie groups*, J. Math. Phys., **48** (2007), 112902
- [23] J. Grifone, Z. Muzsnay: *Variational Principles For Second-Order Differential Equations*, World Scientific, 2000.
- [24] G. Hamel: *Über die Geometrien, in denen die Geraden die Kürzesten sind*, Math. Ann., **57** (1903), 231–264.
- [25] J. Klein, A. Voutier: *Formes extérieures génératrices de sprays*, Ann. Inst. Fourier, **18** (1968), 241–260.
- [26] R. Liouville: *Sur les invariants de certaines équations différentielles et sur leurs applications*, Journal de l'École Polytechnique, **59** (1889), 7–76.
- [27] J.M. Lee: *Introduction to Smooth Manifolds* (2nd edition), Springer, 2013.
- [28] M. Matsumoto: *Every path space of dimension two is projectively related to a Finsler space*, Open Systems and Information Dynamics, **3** (1995), 291–303.
- [29] V. Matveev: *Geodesically equivalent metrics in general relativity*, J. Geom. Phys., **62** (2012), 675–691.
- [30] V. Matveev: *On projective equivalence and pointwise projective relation of Randers metrics*, Internat. J. Math., **23** (9) (2012), 1250093.
- [31] V. Matveev: *On projective equivalence and pointwise projective relation of Randers metrics*, Internat. J. Math., **23** (2012), 1250093.
- [32] V. Matveev, V. Kiosak: *There exist no 4-dimensional geodesically equivalent metrics with the same stress-energy tensor*, J. Geom. Phys., **78** (2014) 1–11.
- [33] T. Mestdag: *Finsler geodesics of Lagrangian systems through Routh reduction*, Mediterranean Journal of Mathematics, **13** (2016), Issue 2, 825–839.

- [34] T. Milkovszki, Z. Muzsnay: *On the projective Finsler metrizable and the integrability of Rapcsák equation*, Czechoslovak Mathematical Journal, **67** (2017), no. 2, 469–495.
- [35] T. Milkovszki, Z. Muzsnay: *About the projective Finsler metrizable: First steps in the non-isotropic case*, <https://arxiv.org/abs/1705.07271>, benyújtva.
- [36] Z. Muzsnay: *An invariant variational principle for canonical flows on Lie groups*, J. Math. Phys., **46** (2005), 112902, 11 pp.
- [37] Z. Muzsnay, P.T. Nagy: *Invariant Shen connections and geodesic orbit spaces*, Period. Math. Hungar., **51** (2005), no. 1, 37–51.,
- [38] Z. Muzsnay, G. Thompson: *Inverse problem of the calculus of variations on Lie groups*, Differential Geom. Appl., **23** (2005), 257–281.
- [39] Z. Muzsnay: *The Euler–Lagrange PDE and Finsler metrizable*, Houston J. Math., **32** (2006), 79–98.
- [40] P. Nurowski: *Is Dark Energy Meaningless?*, arXiv:1003.1503, 2010.
- [41] A. Rapcsák: *Über die bahntreuen Abbildungen metrischer Räume*, Publ. Math. Debrecen, **8** (1961), 285–290.
- [42] A. Rapcsák: *Die Bestimmung der Grundfunktionen projektiv-ebener metrischer Räume*, Publ. Math. Debrecen, **9** (1962), 164–167.
- [43] W. Sarlet, G. Thompson, G.E. Prince: *The inverse problem of the calculus of variations: the use of geometrical calculus in Douglas’s analysis*, Trans. Amer. Math. Soc., **354** (2002), 2897–2919.
- [44] Z. Szabó: *Positive definite Berwald spaces*, Tensor, New Ser., **35** (1981), 25–39.
- [45] J. Szilasi, Sz. Vattamány: *Erratum to: On the projective geometry of sprays*, Differential Geom. Appl., **13** (2000).
- [46] J. Szilasi, Sz. Vattamány: *On the Finsler-metrizabilities of spray manifolds*, Period. Math. Hungar., **44** (2002), 81–100.
- [47] J. Szilasi *A setting for spray and Finsler geometry*. In *Handbook of Finsler geometry*, Vol. 1, 2, pages 1183–1426. Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, (2003).
- [48] J. Szilasi: *Calculus along the tangent bundle projection and projective metrizable*, Differential geometry and its applications, World Scientific, (2008), 527–546.
- [49] J. Szilasi, R.L. Lovas, D.Cs. Kertész: *Connections, sprays and Finsler structures*, World Scientific, 2014.
- [50] Z. Shen: *Differential Geometry of Spray and Finsler Spaces*, Kluwer, 2001.

- [51] Z. Shen: *Lectures on Finsler Geometry*, World Scientific Publishing Co., Singapore (2001).
- [52] Cs. Vincze: *A new proof of Szabó's theorem on the riemann metrizable of Berwald manifolds*, Acta Math. Acad. Paedag. Nyíregyh., **21** (2005), 199–204.

3. Tudományos munkásság

Publikációk

A doktori értekezés alapjául szolgáló publikációk

1. Ioan Bucataru, Tamás Milkovszki and Zoltán Muzsnay: *Invariant metrizability and projective metrizability on Lie groups and homogeneous spaces*, Mediterranean Journal of Mathematics, vol. 13 (2016), Issue 6, pp 4567–4580.
2. Tamás Milkovszki, Zoltán Muzsnay: *On the projective Finsler metrizability and the integrability of Rapcsák equation*, Czechoslovak Mathematical Journal, vol. 67, no. 2 (2017), pp 469–495.
3. Tamás Milkovszki, Zoltán Muzsnay: *About the projective Finsler metrizability: first steps in the non-isotropic case*, <https://arxiv.org/abs/1705.07271>, (2017), benyújtva.

Egyéb publikációk

1. Ágota Figula, Gábor Horváth, Tamás Milkovszki, and Zoltán Muzsnay: *The Lie symmetry group of the general Liénárd-type equation*, (2018), benyújtva.

Előadások

1. Tér-idők kauzális szerkezete, Tudományos diákköri konferencia, Debrecen, 2009.
2. Projective metrizability, Bilateral Joint Workshop on Differential Geometry, Balatonföldvár, 2012.
3. Formal integrability of the Rapcsák equation, Alexandru Ioan Cuza University, Román-magyar workshop, Románia, Iasi, 2013.11.29.
4. Projective metrizability in the non isotropic case, Román-magyar workshop, Debrecen, 2014. június 4.
5. Invariant metrizability and projective metrizability on Lie groups, 9th international young researchers workshop on geometry, mechanics and control, Zaragoza, Spain, 2015.01.18-01.23.
6. Lie symmetry analysis of the FritzHugh–Nagumo model, BIOMICS meeting, Debrecen, 2015.09.11.
7. Sprays, Finsler manifolds and metrizability problems, University Of Georgia, Grúzia, Tbilisi, 2015.10.23.
8. Lie symmetry analysis of the equation $\ddot{u} = f_0(u) + f_1(u)\dot{u}$, 3rd International BIOMICS Workshop, Passau, Germany, 2016.02.08.–2016.02.10.



Nyilvántartási szám: DEENK/118/2018.PL
Tárgy: PhD Publikációs Lista

Jelölt: Milkovszki Tamás
Neptun kód: EEWPLL
Doktori Iskola: Matematika- és Számítástudományok Doktori Iskola
MTMT azonosító: 10048502

A PhD értekezés alapjául szolgáló közlemények

Idegen nyelvű tudományos közlemények külföldi folyóiratban (2)

1. **Milkovszki, T.**, Muzsnay, Z.: On the projective Finsler metrizable and the integrability of Rapcsák equation.
Czech. Math. J. 67 (2), 469-495, 2017. ISSN: 0011-4642.
DOI: <http://dx.doi.org/10.21136/CMJ.2017.0010-16>
IF: 0.364 (2016)
2. Bucataru, I., **Milkovszki, T.**, Muzsnay, Z.: Invariant Metrizability and Projective Metrizability on Lie Groups and Homogeneous Spaces.
Mediterr. J. Math. 13 (6), 4567-4580, 2016. ISSN: 1660-5446.
DOI: <http://dx.doi.org/10.1007/s00009-016-0762-0>
IF: 0.868

A közzétett folyóiratok összesített impakt faktora: 1,232

**A közzétett folyóiratok összesített impakt faktora (az értekezés alapjául szolgáló közleményekre):
1,232**

A DEENK a Jelölt által az iDEa Tudóstérbe feltöltött adatok bibliográfiai és tudományometriai ellenőrzését a tudományos adatbázisok és a Journal Citation Reports Impact Factor lista alapján elvégezte.

Debrecen, 2018.04.26.





Registry number: DEENK/118/2018.PL
Subject: PhD Publikációs Lista

Candidate: Tamás Milkovszki
Neptun ID: EEWPLL
Doctoral School: Doctoral School of Mathematical and Computational Sciences
MTMT ID: 10048502

List of publications related to the dissertation

Foreign language scientific articles in international journals (2)

1. **Milkovszki, T.**, Muzsnay, Z.: On the projective Finsler metrizable and the integrability of Rapcsák equation.
Czech. Math. J. 67 (2), 469-495, 2017. ISSN: 0011-4642.
DOI: <http://dx.doi.org/10.21136/CMJ.2017.0010-16>
IF: 0.364 (2016)
2. Bucataru, I., **Milkovszki, T.**, Muzsnay, Z.: Invariant Metrizability and Projective Metrizability on Lie Groups and Homogeneous Spaces.
Mediterr. J. Math. 13 (6), 4567-4580, 2016. ISSN: 1660-5446.
DOI: <http://dx.doi.org/10.1007/s00009-016-0762-0>
IF: 0.868

Total IF of journals (all publications): 1,232

Total IF of journals (publications related to the dissertation): 1,232

The Candidate's publication data submitted to the iDEa Tudóstér have been validated by DEENK on the basis of Web of Science, Scopus and Journal Citation Report (Impact Factor) databases.

26 April, 2018

