

Doktori (PhD) értekezés tézisei

**Összetett függvényegyenletek és
hasznossági függvények**

Tóth Péter

Témavezető: Dr. Boros Zoltán



DEBRECENI EGYETEM

Matematika- és Számítástudományok Doktori Iskola

Debrecen, 2026.

A tézisfüzet a disszertációban bemutatott legfontosabb fogalmak, tételek összefoglalását tartalmazza az alábbi négy fő témakörre bontva: folytonos, eltolásinvariáns függvények karakterizációi; összetett függvényegyenlet-rendszerek folytonos megoldásainak meghatározása; kváziösszegek regularitás-megőrzése; illetve hasznossági függvények karakterizációi. Az eredmények részletei a disszertáció mellett a [16] és [17] cikkekben kerültek kidolgozásra.

Motiváció

Az értekezésben bemutatott kutatásokat elsődlegesen hasznossági függvények vizsgálata motiválta, tekintve, hogy ezek jelentik a gazdasági matematikában a fogyasztói magatartás modellezésének elsődleges eszközét. Hasznossági függvény alatt egy olyan függvényt értünk, mely a fogyasztó által választható alternatívák mindegyikéhez rendel egy valós számot. A fogyasztó két alternatíva közül a nagyobb függvényértékűt preferálja.

Célkitűzésünk, hogy a leggyakrabban alkalmazott hasznossági függvények (pl.: Cobb–Douglas típusú [5], CES típusú [2] hasznossági függvények) esetén olyan, könnyen ellenőrizhető kritériumokat adjunk, melyek segítségével egyszerűen eldönthető, hogy egy adott fogyasztó viselkedését, preferenciáit érdemes-e az adott típusú hasznossági függvénnyel reprezentálni. A szakirodalomban ugyanis ilyen jellegű összehasonlítást nem találunk, bár az említett függvényosztályokat számos szerző vizsgálta különféle szempontok alapján, például a [9, 18, 20] dolgozatokban. A hasznossági függvények jellemzésére a disszertációban függvényegyenletek folytonos megoldásainak meghatározása jelenti a

fő matematikai eszközt.

Az értekezésben vizsgált összetett függvényegyenlet rendszereket a Boros Zoltán [4] cikkében szereplő

$$\begin{aligned} F(x+t, y) &= \Phi_1(F(x, y), t) \\ F(x, y+s) &= \Phi_2(F(x, y), s) \end{aligned}$$

egyenletrendszer motiválta. Itt F, Φ_1, Φ_2 egyaránt ismeretlen, valós értékű függvények. A [4] dolgozat fő eredménye szerint \mathbb{R}^2 egy nyílt, összefüggő tartományán értelmezett folytonos F megoldások előállnak egy folytonos, szigorúan monoton valós függvény és egy lineáris funkcionál kompozíciójaként. Ennek magasabb dimenziós analóg változatát, az

$$\begin{aligned} F(x_1, \dots, x_j + t_j, \dots, x_n) &= \Phi_j(F(x_1, \dots, x_j, \dots, x_n), t_j) \\ &(j = 1, \dots, n) \end{aligned}$$

egyenletrendszert vizsgáljuk és oldjuk meg az értekezésben, majd tekintjük a rendszer általánosítását. Utóbbi megoldásairól kiderül, hogy speciális kváziösszeg (ld. [13, 15]) alakúak. Ez szolgált motivációként a kváziösszegek regularitását tárgyaló fejezet vizsgálataihoz.

Eltolásinvariáns függvények

A továbbiakban \mathbb{N} jelöli a természetes számok halmazát, \mathbb{R} a valós számok halmazát, \mathbb{R}^n az $n \in \mathbb{N}$ dimenziós euklideszi teret, \mathbb{R}_+^n pedig ennek pozitív koordinátájú vektorait. A dimenzióról általában feltesszük, hogy $n \geq 2$, amennyiben nem állítjuk ennek ellenkezőjét. Továbbá $B(x, r)$ jelöli az x középpontú, r sugarú nyílt gömböt \mathbb{R}^n -ben.

Belátható, hogy az előbbi, n változós egyenlet F megoldásai rendelkeznek az alábbi tulajdonsággal: bármely $x, y \in \mathbb{R}^n$ esetén, ha $F(x) = F(y)$, akkor $F(x+t) = F(y+t)$ is igaz minden olyan $t \in \mathbb{R}^n$ vektorra, ami párhuzamos valamelyik koordinátatengellyel. Ez a tulajdonság motiválja a következő fogalmak bevezetését.

Definíció. Legyen $\emptyset \neq S \subseteq \mathbb{R}^n$ egy halmaz. Azt mondjuk, hogy az $F : S \rightarrow \mathbb{R}$ függvény *eltolásinvariáns*, ha az $F(x) = F(y)$ egyenlőségből $F(x+t) = F(y+t)$ következik, bármely olyan $x, y, t \in \mathbb{R}^n$ vektorokra, melyekre $x, y, x+t, y+t \in S$ teljesül.

Definíció. Legyen $\emptyset \neq S \subseteq \mathbb{R}^n$ egy halmaz, $F : S \rightarrow \mathbb{R}$ pedig egy függvény. Tegyük fel, hogy bármely $x, y \in S$ pontpárra és bármely olyan $0 < r \in \mathbb{R}$ sugárra, mellyel igazak a $B(x, r) \subseteq S$ és $B(y, r) \subseteq S$ tartalmazások, a következő feltevétel teljesül: ha $F(x) = F(y)$, akkor $F(x+t) = F(y+t)$ is fennáll minden $t \in B(0, r)$ esetén. Ekkor az F függvényt *lokálisan eltolásinvariánsnak* nevezzük.

Világos, hogy az eltolásinvarianciából következik annak lokális változata. Belátható, hogy nyílt, konvex tartományon értelmezett függvények esetén igaz ennek megfordítása is.

Állítás. Legyen $\emptyset \neq K \subseteq \mathbb{R}^n$ nyílt, konvex halmaz, továbbá $F : K \rightarrow \mathbb{R}$ lokálisan eltolásinvariáns függvény. Ekkor F *eltolásinvariáns*.

Folytonos, lokálisan eltolásinvariáns függvények struktúrájának megértéséhez kulcsfontosságú az alábbi észrevétel.

Tétel. Legyen $\emptyset \neq K \subseteq \mathbb{R}^n$ egy nyílt, konvex halmaz, valamint $F : K \rightarrow \mathbb{R}$ egy folytonos, lokálisan eltolásinvari-

áns függvény. Továbbá legyen adott $k \in \mathbb{N}$ illetve egy k elemű pontrendszer: $x_1, x_2, \dots, x_k \in K$. Amennyiben valamely $\alpha \in \mathbb{R}$ számra

$$F(x_1) = F(x_2) = \dots = F(x_k) = \alpha,$$

akkor $F(p) = \alpha$ teljesül minden olyan $p \in K$ pontban, mely benne van az x_1, \dots, x_k pontok affin burkában.

Ez a tétel akkor alkalmazható hatékonyan, ha garantálni tudjuk olyan, „kellően sok” pontot tartalmazó affin független pontrendszer létezését, melynek tagjaiban F ugyanazt az értéket veszi fel. A következő, folytonos (nem feltétlenül eltolásinvariáns) függvényekre vonatkozó általános egzisztenciátételünk értelmében ilyen pontrendszerek léteznek.

Tétel. *Legyen $n \in \mathbb{N}$, $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R}^n$ nyílt halmaz, $F : D \rightarrow \mathbb{R}$ pedig egy folytonos függvény. Ekkor léteznek $x_1, \dots, x_n \in D$ pontok oly módon, hogy x_1, \dots, x_n affin független pontrendszer, valamint*

$$F(x_1) = \dots = F(x_n).$$

Ezen állításokat összekapcsolva adódik, hogy egy folytonos, lokálisan eltolásinvariáns függvény globálisan konstans egymással párhuzamos hipersíkok mentén. Az értekezésben mindezt nyílt, összefüggő értelmezési tartomány esetére igazoljuk, melyből levezetjük a disszertáció első fő eredményének számító dekompozíciós tételt. A továbbiakban $p_a : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ jelöli egy rögzített $a \in \mathbb{R}^n$ vektorral való belsőszorzást, mint lineáris funkcionált.

Tétel. *Legyen $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R}^n$ nyílt, összefüggő halmaz, $F : D \rightarrow \mathbb{R}$ pedig folytonos, lokálisan eltolásinvariáns függvény.*

Ekkor létezik olyan $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ vektor és szigorúan monoton, folytonos $f : p_a(D) \rightarrow \mathbb{R}$ függvény, amivel

$$F(x_1, \dots, x_n) = f(a_1x_1 + \dots + a_nx_n)$$

teljesül minden $(x_1, \dots, x_n) \in D$ esetén.

Összetett függvényegyenlet-rendszerek folytonos megoldásai

Az eltolásinvariáns függvényekre kapott jellemzési tétel birtokában az említett

$$F(x_1 + t_1, x_2, \dots, x_n) = \Phi_1(F(x_1, x_2, \dots, x_n), t_1) \quad (1)$$

$$F(x_1, x_2 + t_2, \dots, x_n) = \Phi_2(F(x_1, x_2, \dots, x_n), t_2) \quad (2)$$

$$\vdots$$

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n + t_n) = \Phi_n(F(x_1, x_2, \dots, x_n), t_n) \quad (n)$$

függvényegyenlet-rendszer nyílt, összefüggő tartományon értelmezett folytonos megoldásait karakterizáljuk. Elsőként azt tisztázzuk, hogy a megoldásokat milyen értelemben keressük. Azt mondjuk, hogy F megoldása ennek az egyenlet-rendszernek, ha léteznek alkalmas kétváltozós, valós értékű Φ_1, \dots, Φ_n függvények, melyekkel az (1) – (n) egyenletek mindegyike fennáll.

Megmutatható, hogy az (1) – (n) egyenletrendszer megoldásai lokálisan eltolásinvariánsak, így a folytonos megoldások jellemzési tétele a korábbiak következménye.

Tétel. Legyen $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R}^n$ nyílt, összefüggő halmaz. Az $F : D \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos függvény pontosan akkor megoldása az (1) – (n) függvényegyenlet-rendszernek, ha létezik

$a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ vektor és egy szigorúan monoton, folytonos $f : p_a(D) \rightarrow \mathbb{R}$ függvény, amivel

$$F(x_1, \dots, x_n) = f(a_1x_1 + \dots + a_nx_n)$$

teljesül minden $(x_1, \dots, x_n) \in D$ esetén.

Ezután az (1) – (n) egyenletrendszert általánosítjuk úgy, hogy a változóknak az összeadás helyett általánosabb műveleteket engedünk meg. Legyen minden $k = 1, \dots, n$ esetén $\emptyset \neq I_k \subseteq \mathbb{R}$ nyílt intervallum, valamint legyen $F_k : I_k \times I_k \rightarrow I_k$ folytonos, asszociatív egyszerűsítéssel művelet. Legyen továbbá $S \subseteq I_1 \times \dots \times I_n$ egy nemüres halmaz, $u : S \rightarrow \mathbb{R}$ pedig egy függvény. Azt mondjuk, hogy u megoldása az

$$\begin{aligned} u(F_1(x_1, t_1), x_2, \dots, x_n) &= \Psi_1(u(x_1, x_2, \dots, x_n), t_1) \\ u(x_1, F_2(x_2, t_2), \dots, x_n) &= \Psi_2(u(x_1, x_2, \dots, x_n), t_2) \\ &\vdots \\ u(x_1, x_2, \dots, F_n(x_n, t_n)) &= \Psi_n(u(x_1, x_2, \dots, x_n), t_n) \end{aligned}$$

függvényegyenlet-rendszernek, ha mindegyik fenti egyenlet teljesül alkalmas Ψ_1, \dots, Ψ_n kétváltozós, valós értékű függvényekkel. Ezt az egyenletrendszert a továbbiakban (G-1) – (G-n)-ként hivatkozunk, utalva arra, hogy az (1) – (n) rendszer általánosításaként vezettük be.

Az előbbi jellemzési tételünket a folytonos, asszociatív, egyszerűsítéssel műveletek reprezentációjáról szóló Craigen–Páles-tétellel [6] ötvözve karakterizálhatjuk a (G-1) – (G-n) egyenletrendszer folytonos megoldásait is.

Tétel (Craigen–Páles, 1989). *Legyen $I \subseteq \mathbb{R}$ nemtriviális intervallum, valamint legyen $H : I \times I \rightarrow I$ egy folytonos,*

asszociatív, egyszerűsítéssel művelet. Ekkor létezik egy összeadásra nézve zárt, nem korlátos $J \subseteq \mathbb{R}$ intervallum, valamint egy $h : J \rightarrow I$ folytonos bijekció, amellyel

$$H(x, y) = h(h^{-1}(x) + h^{-1}(y))$$

teljesül minden $x, y \in I$ esetén.

A (G-1) – (G-n) egyenletrendszer folytonos megoldásainak jellemzési tétele az alábbi.

Tétel. Legyenek $\emptyset \neq I_k \subseteq \mathbb{R}$ nyílt intervallumok, $F_k : I_k \times I_k \rightarrow I_k$ pedig folytonos, asszociatív, egyszerűsítéssel műveletek minden $k = 1, \dots, n$ esetén. Legyen továbbá $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R}^n$ nyílt, összefüggő halmaz, melyre $D \subseteq I_1 \times \dots \times I_n$.

Az $u : D \rightarrow \mathbb{R}$ függvény akkor és csak akkor folytonos megoldása a (G-1) – (G-n) függvényegyenlet-rendszernek, ha létezik olyan $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ vektor, összeadásra nézve zárt $J_k \subseteq \mathbb{R}$ intervallumok, továbbá $f_k : J_k \rightarrow I_k$ homeomorfizmusok és egy szigorúan monoton, folytonos g valós függvény, amelyekre egyrészt

$$F_k(x, y) = f_k(f_k^{-1}(x) + f_k^{-1}(y)) \quad (x, y \in I_k),$$

másrészt

$$u(x_1, \dots, x_n) = g(a_1 f_1^{-1}(x_1) + \dots + a_n f_n^{-1}(x_n))$$

teljesül minden $k = 1, \dots, n$ és $(x_1, \dots, x_n) \in D$ esetén.

Kváziösszegek regularitás-megőrzési tulajdonságai

Az előző Tétel értelmében a (G-1) – (G-n) egyenletrendszer folytonos megoldásai speciális kváziösszegek (ld. [13, 15]).

Az értekezésben ilyen típusú függvények regularitási kérdéseivel is foglalkozunk.

Definíció. Legyen $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ valamint legyen $\emptyset \neq I_k \subseteq \mathbb{R}$ nyílt intervallum minden $k = 1, \dots, n$ esetén. Tegyük fel továbbá, hogy $f_k : I_k \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos, szigorúan monoton függvény minden $k = 1, \dots, n$ esetén, $g : f_1(I_1) + \dots + f_n(I_n) \rightarrow \mathbb{R}$ pedig szintén folytonos, szigorúan monoton. Ekkor az

$$F(x_1, \dots, x_n) = g(f_1(x_1) + \dots + f_n(x_n))$$

$$(x_1 \in I_1, \dots, x_n \in I_n) \quad (i)$$

módon értelmezett $F : I_1 \times \dots \times I_n \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt *kváziösszegnek* nevezzük. A g, f_1, \dots, f_n függvényeket az F kváziösszeg *generátorfüggvényeinek* hívjuk.

Kváziösszegek gyakran felbukkannak közgazdaságtani alkalmazások során, például Maksa Gyula [1, 14] munkáiban. A disszertációban bebizonyítjuk, hogy a kváziösszeg parciális deriváltjainak létezése (illetve folytonossága) maga után vonja a generátorfüggvények differenciálhatóságát (illetve a deriváltak folytonosságát).

Tétel. *Legyen $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ és tegyük fel, hogy az (i) egyenlettel definiált n változós F kváziösszeg parciálisan differenciálható. Ekkor generátorfüggvényei differenciálhatóak. Továbbá, ha F folytonosan differenciálható, akkor generátorfüggvényei folytonosan differenciálhatóak.*

Az állítás analóg verziója magasabb rendű folytonos differenciálhatóság esetén is érvényben marad.

Tétel. Legyenek $p, n \in \mathbb{N}$ pozitív egészek úgy, hogy $n \geq 2$ és tegyük fel, hogy az (i) egyenlettel definiált n változós F kváziösszeg p -szer folytonosan differenciálható. Ekkor generátorfüggvényei is p -szer folytonosan differenciálhatóak.

Az előbbi tételek alkalmazásaként a már említett Craigen–Páles-tétel [6] egy kiterjesztését kapjuk.

Következmény. Legyen $p \in \mathbb{N}$ és legyen $\emptyset \neq I \subseteq \mathbb{R}$ nyílt intervallum. Tegyük fel, hogy $H : I \times I \rightarrow I$ egy p -szer folytonosan differenciálható, asszociatív, egyszerűsítéses művelet. Ekkor létezik egy összeadásra nézve zárt, nem korlátos $J \subseteq \mathbb{R}$ nyílt intervallum, valamint egy $h : J \rightarrow I$ folytonos bijekció, melyre a h^{-1} függvény p -szer folytonosan differenciálható, $h|_{J+J}$ szintén p -szer folytonosan differenciálható, továbbá

$$H(x, y) = h(h^{-1}(x) + h^{-1}(y)) \quad (x, y \in I).$$

Hasznossági függvények karakterizációi

A disszertáció utolsó fejezetében a korábbi szakaszok eredményeinek alkalmazásaként hasznossági függvények nevezetes osztályaira kapunk jellemzési tételeket.

Definíció. Legyen $D \subseteq \mathbb{R}_+^n$ nemüres halmaz és $u : D \rightarrow \mathbb{R}$ egy függvény. Ekkor a D halmaz elemeit (n jószágból álló) *jószághosaraknak*, az u függvényt pedig *hasznossági függvénynek* nevezzük. Továbbá az

$$x \preceq_u y \iff u(x) \leq u(y) \quad (x, y \in D)$$

módon definiált $\preceq_u \subseteq D \times D$ relációt az u függvény által generált *preferencia relációnak* hívjuk. Egy $u : D \rightarrow \mathbb{R}$

hasznossági függvényt *szeparábilis*nek nevezünk, ha minden $k = 1, \dots, n$ index esetén léteznek $I_k \subseteq \mathbb{R}_+$ nyílt intervallumok, valamint $u_k : I_k \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos, szigorúan monoton növekvő ún. *parciális hasznossági függvények* oly módon, hogy $D \subseteq I_1 \times \dots \times I_n$ illetve

$$u(x_1, \dots, x_n) = u_1(x_1) + \dots + u_n(x_n)$$

teljesül bármely $(x_1, \dots, x_n) \in D$ vektorra.

A definícióban szereplő fogalmakat a legtöbb gazdasági matematika témájú tankönyvben (például [3, 11, 19]) megtalálhatjuk. Az általunk tekintett hasznossági függvényekről feltesszük, hogy folytonosak és minden változójukban szigorúan monoton növekvőek. Ezek a feltételek számos, hasznossági függvényekkel és reprezentációkkal foglalkozó klasszikus dolgozatban megjelennek (ld. Debreu [7, 8] munkáit). Könnyen látható, hogy ha φ szigorúan monoton növekvő, akkor u és $\varphi \circ u$ ugyanazt a preferencia-relációt generálja. A disszertációban belátjuk ennek megfordítását is.

Állítás. *Legyen $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R}_+^n$ egy halmaz, és tegyük fel, hogy $u : D \rightarrow \mathbb{R}$ és $v : D \rightarrow \mathbb{R}$ két hasznossági függvény úgy, hogy $\preceq_u = \preceq_v$. Ekkor létezik $\varphi : u(D) \rightarrow \mathbb{R}$ szigorúan monoton növekvő függvény, amelyre $v = \varphi \circ u$.*

Ezek alapján két hasznossági függvényt ekvivalensnek tekintünk, ha szigorúan monoton függvényvel való kompozícióval egymásba vihetők. Az előbbi észrevételek után megmutatjuk, hogy a kváziösszeg alakú hasznossági függvények éppen a szeparábilis hasznossági függvényekkel ekvivalensek. Továbbá, a kváziösszeg differenciálhatósági tulajdonságai öröklődnek a parciális hasznossági függvényekre.

Tétel. Legyen $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, és tegyük fel hogy minden $k = 1, \dots, n$ esetén $\emptyset \neq I_k \subseteq \mathbb{R}$ nyílt intervallum, valamint $u_k : I_k \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos, szigorúan monoton növekvő függvény. Legyen továbbá $\varphi : u_1(I_1) + \dots + u_n(I_n) \rightarrow \mathbb{R}$ szintén folytonos, szigorúan monoton növekvő, valamint $p \in \mathbb{N}$ jelöljön egy rögzített pozitív egész számot. Legyen a $v : I_1 \times \dots \times I_n \rightarrow \mathbb{R}$ hasznossági függvény az alábbi kvázi-összeg alakban adott:

$$v(x_1, \dots, x_n) = \varphi(u_1(x_1) + \dots + u_n(x_n)) \\ (x_1 \in I_1, \dots, x_n \in I_n).$$

Amennyiben a v függvény p -szer folytonosan differenciálható, az u_1, \dots, u_n függvények szintén p -szer folytonosan differenciálhatóak. Továbbá az

$$u(x_1, \dots, x_n) = u_1(x_1) + \dots + u_n(x_n) \\ (x_1 \in I_1, \dots, x_n \in I_n)$$

módon értelmezett $u : I_1 \times \dots \times I_n \rightarrow \mathbb{R}$ szeparábilis hasznossági függvényre $\preceq_u = \preceq_v$ teljesül.

Megjegyezzük, hogy a szeparábilis hasznossági függvények jelentőségét Gorman [10] dolgozata alaposan elemzi. Végezetül az összetett függvényegyenlet-rendszerek folytonos megoldásaira kapott dekompozíciós tételeink felhasználásával karakterizáljuk a Cobb–Douglas [5] illetve a CES típusú [2] hasznossági függvényeket. Elsőként ezt a két függvényosztályt ismertetjük.

Definíció. Legyen $D \subseteq \mathbb{R}_+^n$ nemüres halmaz és legyenek $A, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}_+$ adott konstansok. Ha az $u : D \rightarrow \mathbb{R}$ hasznossági függvény az

$$u(x_1, \dots, x_n) = A \cdot x_1^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot x_n^{\alpha_n} \quad ((x_1, \dots, x_n) \in D)$$

képlettel értelmezett, akkor az u függvényt *Cobb–Douglas típusú hasznossági függvénynek* nevezzük.

Definíció. Legyen $D \subseteq \mathbb{R}_+^n$ nemüres halmaz valamint legyenek $A > 0$, $\varrho \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ és minden $i = 1, \dots, n$ esetén $\alpha_i > 0$ adott konstansok. Ha az $u : D \rightarrow \mathbb{R}$ hasznossági függvény az

$$u(x_1, \dots, x_n) = A \cdot \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i^{\varrho} \right)^{\frac{1}{\varrho}} \quad ((x_1, \dots, x_n) \in D)$$

képlettel értelmezett, akkor azt mondjuk, hogy u *CES típusú hasznossági függvény*.

Természetes feltételezés, hogy mindkét nevezetes osztály tartalmazza a fenti definíciókban szereplő képletekkel adott függvények bármely szigorúan monoton valós függvénnyel vett kompozícióit is, hiszen a generált preferenciákat ilyen jellegű transzformáció nem befolyásolja. Ebben az értelemben teljesülnek a következő karakterizációs állítások.

Tétel. Legyen $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R}_+^n$ nyílt, összefüggő halmaz, $u : D \rightarrow \mathbb{R}$ pedig folytonos, minden változójában szigorúan monoton növekvő. Ekkor az u hasznossági függvény pontosan akkor Cobb–Douglas típusú, ha minden $k = 1, \dots, n$ esetén létezik alkalmas kétváltozós Ψ_k függvény a következő tulajdonsággal:

minden olyan $(x_1, \dots, x_n) \in D$ pontra és $t_k \in \mathbb{R}_+$ pozitív számra, amelyre

$$(x_1, \dots, x_{k-1}, x_k \cdot t_k, x_{k+1}, \dots, x_n) \in D$$

teljesül, fennáll az

$$u(x_1, \dots, x_{k-1}, x_k \cdot t_k, x_{k+1}, \dots, x_n) = \Psi_k(u(x_1, \dots, x_n), t_k)$$

egyenlet.

Megjegyzés. A Tétel szemléletesen azt fejezi ki, hogy egy hasznossági függvény pontosan akkor Cobb-Douglas típusú, ha bármely két azonos hasznosságú

$$(x_1, \dots, x_n) \quad \text{illetve} \quad (y_1, \dots, y_n)$$

jószágkosár esetén a következő teljesül: bármely $t > 0$ esetén, ha egy adott termék x_k illetve y_k mennyiségét rendre $t \cdot x_k$ -ra illetve $t \cdot y_k$ -ra változtatjuk, akkor az újonnan kapott két jószágkosár hasznossága is meg fog egyezni egymással (bármely $k = 1, \dots, n$ esetén).

Két jószágból álló jószágkosarak esetén, azaz amikor a hasznossági függvény kétváltozós, a fenti észrevétel a közömbösségi görbék (vagyis a hasznossági függvény szintvonalai, ld. [19]) segítségével is megfogalmazható: egy hasznossági függvény pontosan akkor Cobb–Douglas típusú, ha az

$$(x_1, x_2) \mapsto (t_1 x_1, t_2 x_2)$$

transzformáció bármilyen $t_1, t_2 > 0$ esetén közömbösségi görbét közömbösségi görbébe visz át.

A CES típusú hasznossági függvényekre vonatkozó analóg jellemzési tétel megfogalmazásához be kell vezetnünk a $R_\rho : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ függvényt a következő módon:

$$R_\rho(u, v) = (u^\rho + v^\rho)^{\frac{1}{\rho}} \quad (u, v \in \mathbb{R}_+),$$

ahol $\rho \neq 0$ adott paraméter. Egyszerűen belátható, hogy R_ρ egy folytonos, asszociatív, egyszerűsítéssel művelet.

Tétel. Legyen $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R}_+^n$ nyílt, összefüggő halmaz, $u : D \rightarrow \mathbb{R}$ pedig folytonos, minden változójában szigorúan monoton növekvő. Ekkor az u hasznossági függvény pontosan akkor CES típusú, ha valamilyen $\rho \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ paraméter mellett minden $k = 1, \dots, n$ esetén létezik alkalmas kétváltozós Ψ_k függvény a következő tulajdonsággal:

minden olyan $(x_1, \dots, x_n) \in D$ pontra és $t_k \in \mathbb{R}_+$ pozitív számra, amelyre

$$(x_1, \dots, x_{k-1}, R_\rho(x_k, t_k), x_{k+1}, \dots, x_n) \in D$$

teljesül, fennáll az

$$\begin{aligned} u(x_1, \dots, x_{k-1}, R_\rho(x_k, t_k), x_{k+1}, \dots, x_n) \\ = \Psi_k(u(x_1, \dots, x_n), t_k) \end{aligned}$$

egyenlet.

Megjegyzés. A Tétel szemléletes jelentése, hogy egy u hasznossági függvény pontosan akkor CES típusú (ρ paraméterrel), ha bármely két azonos hasznosságú

$$(x_1, \dots, x_n) \text{ illetve } (y_1, \dots, y_n)$$

jószágkosár esetén a következő teljesül: bármely $t > 0$ esetén, ha egy adott termék x_k illetve y_k mennyiségét rendre $(x_k^\rho + t^\rho)^{\frac{1}{\rho}}$ -ra illetve $(y_k^\rho + t^\rho)^{\frac{1}{\rho}}$ -ra változtatjuk, akkor az újonnan kapott két jószágkosár hasznossága is meg fog egyezni egymással (bármely $k = 1, \dots, n$ esetén).

A disszertációban szerepeltetjük ennek az állításnak a CES típusú hasznossági függvények közömbösségi görbéire vonatkozó következményeit. Végül egy harmadik hasznossági függvény osztályra, az ún. standardizált Mádi-Nagy-Prékopa típusú [12] hasznossági függvényekre is közlünk az előbbiekhöz hasonló jellemzési tételt.



Nyilvántartási szám: DEENK/137/2026.PL
Tárgy: PhD Publikációs Lista

Jelölt: Tóth Péter
Doktori Iskola: Matematika- és Számítástudományok Doktori Iskola
MTMT azonosító: 10079156

A PhD értekezés alapján szolgáltató közlemények

Idegen nyelvű tudományos közlemények külföldi folyóiratban (2)

1. Tóth, P.: Regularity preservation for quasiums.
Aequ. Math. 99 (6), 2855-2870, 2025. ISSN: 0001-9054.
DOI: <http://dx.doi.org/10.1007/s00010-025-01215-z>
IF: 0.7 (2024)
2. Tóth, P.: Continuous solutions of a system of composite functional equations.
Aequ. Math. 96 (6), 1179-1205, 2022. ISSN: 0001-9054.
DOI: <http://dx.doi.org/10.1007/s00010-022-00900-7>
IF: 0.8

További közlemények

Idegen nyelvű hazai könyvek (1)

3. Boros, Z., Tóth, P.: Interval chains and completeness in ultrapowers of ordered sets. University of Debrecen, Institute of Mathematics and Faculty of Informatics, Debrecen, 10 p., 2021.
(Technical Reports ; 2021. Preprints ;

Idegen nyelvű tudományos közlemények hazai folyóiratban (1)

4. Boros, Z., Tóth, P.: Interval Chains and Completeness in Ultrapowers of Ordered Sets.
Math. Pannon. 28_NS2 (1), 24-31, 2022. ISSN: 0865-2090.
DOI: <http://dx.doi.org/10.1556/314.2022.00004>

Idegen nyelvű tudományos közlemények külföldi folyóiratban (3)

5. Kiss, T., Tóth, P.: Improved Regularity for a Composite Functional equation Stemming from the Theory of Means.
Results Math. 81 (1), 1-35, 2026. ISSN: 1422-6383.
DOI: <http://dx.doi.org/10.1007/s00025-025-02585-1>
IF: 1.2 (2024)





**DEBRECENI
EGYETEM**

DEBRECENI EGYETEM
EGYETEMI ÉS NEMZETI KÖNYVTÁR
H-4002 Debrecen, Egyetem tér 1, P.f.: 400
Tel.: 52/410-443, e-mail: publikaciok@lib.unideb.hu

6. Tóth, P.: Measurable solutions of an alternative functional equation.

Aequ. Math. 100 (1), 1-16, 2026. ISSN: 0001-9054.

DOI: <http://dx.doi.org/10.1007/s00010-026-01263-z>

IF: 0.7 (2024)

7. Boros, Z., Tóth, P.: Strong geometric derivatives.

J. Math. Anal. Appl. 538 (1), 1-19, 2024. ISSN: 0022-247X.

DOI: <http://dx.doi.org/10.1016/j.jmaa.2024.128439>

IF: 1.2

A közlő folyóiratok összesített impakt faktora: 4,6

A közlő folyóiratok összesített impakt faktora (az értekezés alapjául szolgáló közleményekre):
1,5

A DEENK a Jelölt által a Tudóstérbe feltöltött adatok bibliográfiai és tudományometriai ellenőrzését a tudományos adatbázisok és a Journal Citation Reports Impact Factor lista alapján elvégezte.

Debrecen, 2026.03.30.



Short thesis for the degree of doctor of
philosophy (PhD)

**Systems of composite functional
equations and utility functions**

by Péter Tóth

Supervisor: Dr. Zoltán Boros



UNIVERSITY OF DEBRECEN

Doctoral School of Mathematical and Computational
Sciences

Debrecen, 2026

This short thesis contains a summary of the most important concepts and theorems of our dissertation. The main topics are the following: characterizations of continuous, translation invariant functions; continuous solutions of composite functional equations; regularity preservation of quasiums; characterizations of utility functions. Besides the dissertation, the details of our results are contained in the articles [16] and [17].

Motivation

The primary motivation for the research summarized in this dissertation was the investigation of utility functions. These are the prevalent tools in mathematical economics for the modelling of an individual consumer's behavior. By a utility function we mean a function which assigns a real number to each element in the set of alternatives from which the consumer may choose. The preferred alternative is the one with the smaller function value.

Our main objective is to give certain criteria which are relatively easy to check in order to decide whether a given utility function of a well-known type (such as Cobb–Douglas [5] or CES type [2]) is appropriate for the representation of a given consumer's preferences. Surprisingly, we could not find such direct comparison results in the literature, although the two notable classes of utility functions mentioned above have been investigated by many authors (see [9, 18, 20]). Our main approach for the characterization of utility functions is to determine the continuous solutions of particular systems of composite functional equations.

The systems of functional equations considered in the

dissertation are motivated by the following system consisting of two composite equations:

$$\begin{aligned} F(x+t, y) &= \Phi_1(F(x, y), t) \\ F(x, y+s) &= \Phi_2(F(x, y), s). \end{aligned}$$

Here F, Φ_1, Φ_2 are all unknown, real valued functions. This system of equations was considered by Zoltán Boros [4] under the assumption that F is defined on a restricted domain, namely on an open, connected subset of \mathbb{R}^2 . The main result of [4] is that any continuous solution F , which is defined on an open, connected domain of \mathbb{R}^2 , can be written as the composition of a strictly monotone, continuous real function and a linear functional. In the dissertation we investigate the higher dimensional analogue of this system:

$$\begin{aligned} F(x_1, \dots, x_j+t_j, \dots, x_n) &= \Phi_j(F(x_1, \dots, x_j, \dots, x_n), t_j) \\ &\quad (j = 1, \dots, n). \end{aligned}$$

It can be shown that the solutions are particular quasisums (see [13, 15]). This fact motivates the investigation of regularity properties of quasisums.

Translation invariant functions

In the sequel \mathbb{N} and \mathbb{R} denote the set of positive integers and real numbers, respectively. \mathbb{R}^n denotes the n dimensional euclidean space while \mathbb{R}_+^n contains the n dimensional vectors with positive coordinates. Usually, if we do not assume its contrary, we suppose that $n \geq 2$. Moreover, $B(x, r)$ denotes the open ball in \mathbb{R}^n with center x and radius r .

Let us observe, that if F is a solution of the system of functional equations having n members, which we have introduced above, then the following holds: for any $x, y \in \mathbb{R}^n$ such that $F(x) = F(y)$, the equation $F(x+t) = F(y+t)$ is also fulfilled, for any vector $t \in \mathbb{R}^n$ which is parallel to one of the coordinate axes. This property motivates the following notions.

Definition. Let $\emptyset \neq S \subseteq \mathbb{R}^n$ be a set and let $F : S \rightarrow \mathbb{R}$ be a function. We say that the function F is *translation invariant*, if $F(x) = F(y)$ implies $F(x+t) = F(y+t)$, for any vectors $x, y, t \in \mathbb{R}^n$ such that $x, y, x+t, y+t \in S$.

Definition. Let $\emptyset \neq S \subseteq \mathbb{R}^n$ be a set and let $F : S \rightarrow \mathbb{R}$ be a function. Suppose that for any $x, y \in S$ and for any $0 < r \in \mathbb{R}$ such that $B(x, r) \subseteq S$ and $B(y, r) \subseteq S$, the following assertion holds: if $F(x) = F(y)$ then $F(x+t) = F(y+t)$ is fulfilled for any $t \in B(0, r)$. Then the function F is said to be *locally translation invariant*.

It is clear that translation invariance implies its local version. One can easily verify the reverse implication, provided that the domain of definition is open and convex.

Proposition. Let $\emptyset \neq K \subseteq \mathbb{R}^n$ be an open, convex set, moreover let $F : K \rightarrow \mathbb{R}$ be a locally translation invariant function. Then F is translation invariant.

In order to understand the structure of continuous, locally translation invariant functions, the following observation is crucial.

Theorem. Let $\emptyset \neq K \subseteq \mathbb{R}^n$ be an open, convex set and let $F : K \rightarrow \mathbb{R}$ be a continuous, locally translation invariant

function. Moreover let $x_1, \dots, x_k \in K$ be a given collection of points for some $k \in \mathbb{N}$. If

$$F(x_1) = F(x_2) = \dots = F(x_k) = \alpha$$

holds for some number $\alpha \in \mathbb{R}$, then $F(p) = \alpha$ is also fulfilled for such points $p \in K$ which are contained in the affine hull of x_1, \dots, x_k .

The full potential of this theorem can be exploited in situations when there exist a "large" set of affinely independent points where the function attains the same value. Our following, general existence theorem for continuous (not necessarily translation invariant) functions ensures the existence of such systems of points.

Theorem. *Let $n \in \mathbb{N}$ and let $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R}^n$ be an open set. Suppose that $F : D \rightarrow \mathbb{R}$ is a continuous function. Then there exist points $x_1, \dots, x_n \in D$ such that x_1, \dots, x_n are affinely independent, moreover*

$$F(x_1) = \dots = F(x_n).$$

Merging these preliminary results we obtain that a continuous, locally translation invariant function is globally constant on parallel hyperplanes. In the dissertation this statement is proved for the case of open, connected domains. Eventually, this proposition implies the following decomposition theorem, which is the first main result of the dissertation. In the sequel, $p_a : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ denotes the inner product with any fixed vector $a \in \mathbb{R}^n$ (as a linear functional).

Theorem. *Let $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R}^n$ be an open, connected set and let $F : D \rightarrow \mathbb{R}$ be a continuous, locally translation invariant*

function. Then there exist a vector $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ and a continuous, strictly monotone function $f : p_a(D) \rightarrow \mathbb{R}$ such that

$$F(x_1, \dots, x_n) = f(a_1 x_1 + \dots + a_n x_n)$$

holds for all vectors $(x_1, \dots, x_n) \in D$.

Continuous solutions of systems of composite functional equations

Applying this decomposition theorem for translation invariant functions, we characterize the continuous solutions of the already mentioned system of composite functional equations

$$F(x_1 + t_1, x_2, \dots, x_n) = \Phi_1(F(x_1, x_2, \dots, x_n), t_1) \quad (1)$$

$$F(x_1, x_2 + t_2, \dots, x_n) = \Phi_2(F(x_1, x_2, \dots, x_n), t_2) \quad (2)$$

$$\vdots$$

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n + t_n) = \Phi_n(F(x_1, x_2, \dots, x_n), t_n) \quad (n).$$

We first need to clarify that in what sense are we looking for solutions. We say that F is a solution of the system (1) – (n), if there exist some two-variable real valued functions Φ_1, \dots, Φ_n such that all of the equations above are fulfilled.

It turns out that the solutions of the system (1) – (n) are locally translation invariant, so the characterization theorem of the continuous solutions is a consequence of our previous results.

Theorem. *Let $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R}^n$ be an open, connected set. The continuous function $F : D \rightarrow \mathbb{R}$ is a solution of the system of functional equations (1) – (n) if, and only if, there exist*

a vector $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ and a continuous, strictly monotone function $f : p_a(D) \rightarrow \mathbb{R}$ such that

$$F(x_1, \dots, x_n) = f(a_1x_1 + \dots + a_nx_n)$$

holds for all $(x_1, \dots, x_n) \in D$.

In the next part we generalize the system of functional equations (1) – (n). In each of the variables the addition is replaced by a more general binary operation. That is, for all $k = 1, \dots, n$, let $\emptyset \neq I_k \subseteq \mathbb{R}$ be an open interval, moreover let $F_k : I_k \times I_k \rightarrow I_k$ be a continuous, associative, cancellative operation. Suppose that $S \subseteq I_1 \times \dots \times I_n$ is a nonempty set and $u : S \rightarrow \mathbb{R}$ is a function. We say that u is a solution of the system of functional equations

$$\begin{aligned} u(F_1(x_1, t_1), x_2, \dots, x_n) &= \Psi_1(u(x_1, x_2, \dots, x_n), t_1) \\ u(x_1, F_2(x_2, t_2), \dots, x_n) &= \Psi_2(u(x_1, x_2, \dots, x_n), t_2) \\ &\vdots \\ u(x_1, x_2, \dots, F_n(x_n, t_n)) &= \Psi_n(u(x_1, x_2, \dots, x_n), t_n) \end{aligned}$$

if all of the equations above are fulfilled for some appropriate two-variable real valued functions Ψ_1, \dots, Ψ_n . This system of equations will be referred to as (G-1) – (G-n), indicating that it is a generalized version of the system (1) – (n).

Combining our previous characterization theorem with the representation theorem of continuous, associative, cancellative operations by Craigen and Páles [6], we are able to describe the continuous solutions of (G-1) – (G-n).

Tétel (Craigen–Páles, 1989). *Let $I \subseteq \mathbb{R}$ be a nontrivial interval, moreover let $H : I \times I \rightarrow I$ be a continuous, associative, cancellative binary operation. Then there exist an*

unbounded interval $J \subseteq \mathbb{R}$ which is closed under addition, and a continuous bijection $h : J \rightarrow I$ such that

$$H(x, y) = h(h^{-1}(x) + h^{-1}(y))$$

holds for all $x, y \in I$.

The characterization of the continuous solutions of the system (G-1) – (G-n) is the following.

Theorem. Let $\emptyset \neq I_k \subseteq \mathbb{R}$ be an open interval and let $F_k : I_k \times I_k \rightarrow I_k$ be a continuous, associative, cancellative operation, for all $k = 1, \dots, n$. Moreover, suppose that $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R}^n$ is an open, connected set such that $D \subseteq I_1 \times \dots \times I_n$.

Then the continuous function $u : D \rightarrow \mathbb{R}$ is a solution of the system of functional equations (G-1) – (G-n) if, and only if, there exist a vector $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$, some open intervals $J_k \subseteq \mathbb{R}$ closed under addition, moreover some homeomorphisms $f_k : J_k \rightarrow I_k$ and a continuous, strictly monotone real function g such that

$$F_k(x, y) = f_k(f_k^{-1}(x) + f_k^{-1}(y)) \quad (x, y \in I_k)$$

and also

$$u(x_1, \dots, x_n) = g(a_1 f_1^{-1}(x_1) + \dots + a_n f_n^{-1}(x_n))$$

hold for all $k = 1, \dots, n$ and for all $(x_1, \dots, x_n) \in D$.

Regularity preservation for quasiums

According to the previous theorem, the continuous solutions of (G-1) – (G-n) are particular quasiums (see [13, 15]). In the dissertation we discuss regularity properties of such functions.

Definition. Let $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ and suppose that $I_k \subseteq \mathbb{R}$ is a nonempty open interval for $k = 1, \dots, n$. Moreover, let $f_k : I_k \rightarrow \mathbb{R}$ be continuous, strictly monotone functions for $k = 1, \dots, n$ and let $g : f_1(I_1) + \dots + f_n(I_n) \rightarrow \mathbb{R}$ be also continuous, strictly monotone. Then the function $F : I_1 \times \dots \times I_n \rightarrow \mathbb{R}$ defined by

$$F(x_1, \dots, x_n) = g(f_1(x_1) + \dots + f_n(x_n))$$

$$(x_1 \in I_1, \dots, x_n \in I_n) \quad (\text{i})$$

is called a *quasisum*. The functions g, f_1, \dots, f_n are called the *generators* of F .

Quasisums often appear in mathematical economics, for example, in the works [1, 14] of Gyula Maksa. Applying some classical results from real functions theory we are able to prove that the existence (and, respectively, continuity) of the partial derivatives of a quasisum implies the existence (respectively, the continuity) of the derivatives of the generators.

Theorem. *Let $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ and suppose that the n -variable quasisum F defined by the formula (i) is partially differentiable. Then the generators of F are differentiable. Moreover, if F is continuously differentiable, then its generators are continuously differentiable.*

The statement remains valid in the case of higher order continuous differentiability.

Theorem. *Let $p, n \in \mathbb{N}$ be positive integers such that $n \geq 2$ and suppose that the n -variable quasisum F defined by the formula (i) is p -times continuously differentiable. Then the*

generators of F are p -times continuously differentiable as well.

Applying the previous two Theorems, we obtain an augmented version of the Craigen–Páles theorem.

Corollary. *Let $p \in \mathbb{N}$ and let $\emptyset \neq I \subseteq \mathbb{R}$ be an open interval. Suppose that $H : I \times I \rightarrow I$ is a p -times continuously differentiable, associative, cancellative operation. Then there exist an unbounded open interval $J \subseteq \mathbb{R}$ which is closed under addition, moreover a continuous bijection $h : J \rightarrow I$ such that h^{-1} is p -times continuously differentiable, $h|_{J+J}$ is also p -times continuously differentiable, moreover*

$$H(x, y) = h(h^{-1}(x) + h^{-1}(y)) \quad (x, y \in I).$$

Characterization of utility functions

In the final part of the dissertation, applying the results of the preceding sections, we establish characterization theorems for notable classes of utility functions.

Definition. Let $D \subseteq \mathbb{R}_+^n$ be a nonempty set and let $u : D \rightarrow \mathbb{R}$ be a function. Then an element of D will be called a *bundle of goods* (consisting of n goods) and u will be called a *utility function*. Furthermore, the relation $\preceq_u \subseteq D \times D$ defined as

$$x \preceq_u y \iff u(x) \leq u(y) \quad (x, y \in D)$$

is the *preference relation* generated by the utility function u . The utility function $u : D \rightarrow \mathbb{R}$ is called *additively separable*, if there exist nonempty open intervals $I_k \subseteq \mathbb{R}_+$ and so-called *subutility functions* $u_k : I_k \rightarrow \mathbb{R}$ which are

continuous, strictly increasing for $k = 1, \dots, n$ such that $D \subseteq I_1 \times \dots \times I_n$ and

$$u(x_1, \dots, x_n) = u_1(x_1) + \dots + u_n(x_n)$$

holds for all $(x_1, \dots, x_n) \in D$.

The previous concepts can be found in most of the textbooks concerning mathematical economics (for instance, in [3, 11, 19]). We always suppose that the considered utility functions are continuous, moreover they are strictly increasing in each variable. These regularity assumptions appear in many classical results concerning representations of preferences by utility functions (for instance, in the works [7, 8] of Debreu). It is easy to see that if φ is strictly increasing, then u and $\varphi \circ u$ generate the same preference relation. We prove the converse of this statement in the dissertation.

Proposition. *Let $D \subseteq \mathbb{R}_+^n$ be a nonempty set and let $u : D \rightarrow \mathbb{R}$ and $v : D \rightarrow \mathbb{R}$ be two utility functions with $\preceq_u = \preceq_v$. Then there exists a strictly increasing function $\varphi : u(D) \rightarrow \mathbb{R}$ such that $v = \varphi \circ u$.*

After these observations we deduce that utility functions of quasium form are equivalent to additively separable utility functions. Moreover, the differentiability properties of the quasium are inherited by the subutility functions. The equivalence of two utility functions means that they both generate the same preference relation. In other words, they are strictly monotone transforms of each other.

Theorem. *Let $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ and suppose that $\emptyset \neq I_k \subseteq \mathbb{R}$ is an open interval for $k = 1, \dots, n$. Moreover, let $u_k : I_k \rightarrow$*

\mathbb{R} be continuous, strictly increasing for $k = 1, \dots, n$ and let $\varphi : u_1(I_1) + \dots + u_n(I_n) \rightarrow \mathbb{R}$ be also continuous, strictly increasing. Let $p \in \mathbb{N}$ be a fixed positive integer. Suppose that the utility function $v : I_1 \times \dots \times I_n \rightarrow \mathbb{R}$ defined by

$$v(x_1, \dots, x_n) = \varphi(u_1(x_1) + \dots + u_n(x_n)) \\ (x_1 \in I_1, \dots, x_n \in I_n).$$

is p -times continuously differentiable. Then the functions u_1, \dots, u_n are p -times continuously differentiable.

Moreover, for the additively separable utility function $u : I_1 \times \dots \times I_n \rightarrow \mathbb{R}$ defined by

$$u(x_1, \dots, x_n) = u_1(x_1) + \dots + u_n(x_n) \\ (x_1 \in I_1, \dots, x_n \in I_n)$$

we have $\preceq_u = \preceq_v$.

We shall mention that the significance of additively separable utility functions is thoroughly investigated by Gorman [10]. Finally, applying the decomposition theorems obtained earlier for continuous solutions of systems of composite functional equations, we characterize the Cobb–Douglas type [5] and CES type [2] utility functions. We supply the definitions of these two classes of utility functions.

Definition. Let $D \subseteq \mathbb{R}_+^n$ be a nonempty set, moreover let $A, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}_+$ be given constants. If the utility function $u : D \rightarrow \mathbb{R}$ has the form

$$u(x_1, \dots, x_n) = A \cdot x_1^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot x_n^{\alpha_n} \quad ((x_1, \dots, x_n) \in D),$$

then u is called a *Cobb–Douglas type* utility function.

Definition. Let $D \subseteq \mathbb{R}_+^n$ be a nonempty set, moreover let $A > 0$, $\varrho \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ and $\alpha_i > 0$ be given constants, for every $i = 1, \dots, n$. If the utility function $u : D \rightarrow \mathbb{R}$ has the form

$$u(x_1, \dots, x_n) = A \cdot \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i^\varrho \right)^{\frac{1}{\varrho}} \quad ((x_1, \dots, x_n) \in D),$$

then u is called a *CES type* utility function.

It is natural to assume that these classes contain not only the functions given by the particular formulas above, but any composition of those with some strictly increasing real function (since the generated preference relation is invariant under such transformations). In this sense, the following characterizations are valid.

Theorem. Let $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R}_+^n$ be an open, connected set and let $u : D \rightarrow \mathbb{R}$ be a continuous function which is strictly increasing in each variable. Then u is a Cobb–Douglas type utility function if, and only if, for every index $k = 1, \dots, n$, there exist a two-variable real valued function Ψ_k with the following property:

for all points $(x_1, \dots, x_n) \in D$ and for any positive number $t_k \in \mathbb{R}_+$ fulfilling

$$(x_1, \dots, x_{k-1}, x_k \cdot t_k, x_{k+1}, \dots, x_n) \in D,$$

the functional equation

$$u(x_1, \dots, x_{k-1}, x_k \cdot t_k, x_{k+1}, \dots, x_n) = \Psi_k(u(x_1, \dots, x_n), t_k)$$

holds.

Remark. In an illustrative sense, this Theorem expresses the fact that a utility function is of Cobb–Douglas type if, and only if, for an arbitrary pair of bundles (x_1, \dots, x_n) and (y_1, \dots, y_n) , the following holds: for any $t > 0$, if we modify the quantities x_k and y_k of the same good to the new quantities $t \cdot x_k$ and $t \cdot y_k$, respectively, then the utility of the two newly obtained bundles will again coincide with each other (for every $k = 1, \dots, n$).

In the two dimensional case, (that is, when each bundle consists of two goods), this property can be formulated via the level sets of the utility function. In the context of utility, these level sets are called the indifference curves of the function, as it is mentioned in e.g. [19]. Using this terminology, a utility function is of Cobb–Douglas type if, and only if, the mapping

$$(x_1, x_2) \mapsto (t_1 x_1, t_2 x_2)$$

transforms any indifference curve into another indifference curve whenever $t_1, t_2 > 0$.

Before formulating an analogous statement for CES type utility functions, we have to introduce the mapping $R_\varrho : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ defined as

$$R_\varrho(u, v) = (u^\varrho + v^\varrho)^{\frac{1}{\varrho}} \quad (u, v \in \mathbb{R}_+),$$

where $\varrho \neq 0$ is a given parameter. It is easy to see that R_ϱ is a continuous, associative, cancellative operation.

Theorem. *Let $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R}_+^n$ be an open, connected set and let $u : D \longrightarrow \mathbb{R}$ be a continuous function which is strictly increasing in each variable. Then u is a CES type utility function if, and only if, there exists a parameter $\varrho \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$*

and, for every index $k = 1, \dots, n$, there exist a two-variable function Ψ_k with the following property:

for all points $(x_1, \dots, x_n) \in D$ and for any positive numbers $t_k \in \mathbb{R}_+$ fulfilling

$$(x_1, \dots, x_{k-1}, R_\rho(x_k, t_k), x_{k+1}, \dots, x_n) \in D,$$

the functional equation

$$\begin{aligned} u(x_1, \dots, x_{k-1}, R_\rho(x_k, t_k), x_{k+1}, \dots, x_n) \\ = \Psi_k(u(x_1, \dots, x_n), t_k) \end{aligned}$$

holds.

Remark. This characterization theorem can be interpreted as follows. A utility function u is of CES type (with parameter ρ) if, and only if, for any two bundles (x_1, \dots, x_n) and (y_1, \dots, y_n) with the same utility the following property holds: for any $t > 0$, if we modify the quantities x_k and y_k of the same good to the new quantities $(x_k^\rho + t^\rho)^{\frac{1}{\rho}}$ and $(y_k^\rho + t^\rho)^{\frac{1}{\rho}}$ respectively, then the utility of the two newly obtained bundles will again coincide with each other (for every $k = 1, \dots, n$).

In the dissertation we formulate a corollary of this theorem, concerning the indifference curves of CES type utility functions. Finally, we also supply a similar characterization of the standardized Mádi-Nagy-Prékopa type [12] utility functions.

Válogatott hivatkozások – Selected references

- [1] J. Aczél, G. Maksa, M. Taylor, *Equations of Generalized Bisymmetry and of Consistent Aggregation: Weakly Surjective Solutions Which May Be Discontinuous at Places*, Journal of Mathematical Analysis and Applications **214**/1 (1997) 22–35.
- [2] K. J. Arrow, H. B. Chenery, B. S. Minhas, R. M. Solow, *Capital-Labor Substitution and Economic Efficiency*, The Review of Economics and Statistics **43**/3 (1961), 225–250.
- [3] P. Berck, A. Strøm, K. Sydsæter, *Economists' Mathematical Manual*. Springer, Berlin, 2005.
- [4] Z. Boros, *Systems of generalized translation equations on a restricted domain*, Aequationes Mathematicae **67** (2004), 106–116.
- [5] C. W. Cobb, P. H. Douglas, *A Theory of Production*, The American Economic Review **18**/1 (1928), 139–165.
- [6] R. Craigen, Z. Páles, *The associativity equation revisited*, Aequationes Mathematicae **37** (1989), 306–312.

- [7] G. Debreu, *Representation of a preference ordering by a numerical function*, Edited by R. Thrall, R. L. Davis, and C. Coombs, *Decision processes*. John Wiley and Sons, New York (1954), 159–165.
- [8] G. Debreu, *Topological Methods in Cardinal Utility Theory*, in K. J. Arrow, S. Karlin and P. Suppes: *Mathematical Methods in the Social Sciences*, 1959. Stanford University Press (1960), 16–26.
- [9] J. H. Faro, *Cobb–Douglas preferences under uncertainty*, *Economic Theory* **54** (2013), 273–285.
- [10] W. Gorman, *The structure of utility functions*, *The Review of Economic Studies* **35** (1968), 367–390.
- [11] P. J. Hammond, K. Sydsæter, *Mathematics for Economic Analysis*. Prentice Hall, Upper Saddle River, 1995.
- [12] Mádi-Nagy G., Prékopa A., *Egy többváltozós hasznossági függvény*, *Alkalmazott Matematikai Lapok* **21** (2004), 23–34.
- [13] G. Maksa, *Solution of generalized bisymmetry type equations without surjectivity assumptions*, *Aequationes Mathematicae* **57** (1999), 50–74.
- [14] G. Maksa, *Quasisums and generalized associativity*, *Aequationes Mathematicae* **69** (2005), 6–27.
- [15] G. Maksa, E. Nizsalóczki, *Quasi-sums in several variables*, *Acta Mathematica Academiae Paedagogicae Nyiregyhaziensis* **22/2** (2006), 193–207.

- [16] P. Tóth, *Continuous solutions of a system of composite functional equations*, *Aequationes Mathematicae* **96** (2022), 1179–1205.
- [17] P. Tóth, *Regularity preservation for quasiums*, *Aequationes Mathematicae* **99** (2025), 2855–2870.
- [18] W. Trockel, *Classification of budget-invariant monotonic preferences*, *Economics Letters* **30**/1 (1989), 7–10.
- [19] H. R. Varian, *Intermediate Microeconomics*. 8th ed., W. W. Norton & Company, New York – London, 2010.
- [20] X. Wang, Y. Fu, *Some Characterizations of the Cobb-Douglas and CES Production Functions in Microeconomics*, *Abstract and Applied Analysis* (2013)
<https://doi.org/10.1155/2013/761832>



Candidate: Péter Tóth
Doctoral School: Doctoral School of Mathematical and Computational Sciences
MTMT ID: 10079156

List of publications related to the dissertation

Foreign language scientific articles in international journals (2)

1. Tóth, P.: Regularity preservation for quasiums.
Aequ. Math. 99 (6), 2855-2870, 2025. ISSN: 0001-9054.
DOI: <http://dx.doi.org/10.1007/s00010-025-01215-z>
IF: 0.7 (2024)
2. Tóth, P.: Continuous solutions of a system of composite functional equations.
Aequ. Math. 96 (6), 1179-1205, 2022. ISSN: 0001-9054.
DOI: <http://dx.doi.org/10.1007/s00010-022-00900-7>
IF: 0.8

List of other publications

Foreign language Hungarian books (1)

3. Boros, Z., Tóth, P.: Interval chains and completeness in ultrapowers of ordered sets. University of Debrecen, Institute of Mathematics and Faculty of Informatics, Debrecen, 10 p., 2021.
(Technical Reports ; 2021. Preprints ;

Foreign language scientific articles in Hungarian journals (1)

4. Boros, Z., Tóth, P.: Interval Chains and Completeness in Ultrapowers of Ordered Sets.
Math. Pannon. 28_NS2 (1), 24-31, 2022. ISSN: 0865-2090.
DOI: <http://dx.doi.org/10.1556/314.2022.00004>

Foreign language scientific articles in international journals (3)

5. Kiss, T., Tóth, P.: Improved Regularity for a Composite Functional equation Stemming from the Theory of Means.
Results Math. 81 (1), 1-35, 2026. ISSN: 1422-6383.
DOI: <http://dx.doi.org/10.1007/s00025-025-02585-1>
IF: 1.2 (2024)





UNIVERSITY of
DEBRECEN

UNIVERSITY AND NATIONAL LIBRARY

UNIVERSITY OF DEBRECEN

H-4002 Egyetem tér 1, Debrecen

Phone: +3652/410-443, email: publikaciok@lib.unideb.hu

6. Tóth, P.: Measurable solutions of an alternative functional equation.

Aequ. Math. 100 (1), 1-16, 2026. ISSN: 0001-9054.

DOI: <http://dx.doi.org/10.1007/s00010-026-01263-z>

IF: 0.7 (2024)

7. Boros, Z., Tóth, P.: Strong geometric derivatives.

J. Math. Anal. Appl. 538 (1), 1-19, 2024. ISSN: 0022-247X.

DOI: <http://dx.doi.org/10.1016/j.jmaa.2024.128439>

IF: 1.2

Total IF of journals (all publications): 4,6

Total IF of journals (publications related to the dissertation): 1,5

The Candidate's publication data submitted to the Tudóstér have been validated by DEENK on the basis of the Journal Citation Report (Impact Factor) database.

30 March, 2026

