Kocsis Imre

A FÜGGVÉNYEGYENLETEK EREDETÉRŐL ÉS TERMÉSZETÉRŐL

„Közelítsd meg a problémát a helyes irányból: kezdd a válasszal. Egy napon talán rátalálsz a valódi kérdésre is." (R. van Gulik)

I. BEVEZETÉS

A függvényegyenlet témakör egységes és rendszeres tárgyalása a XX. század második felében kezdődött, de az a szemlélet és megközelítési mód, mely az egyenletek felírásához vezet, régóta jelen van úgy a matematikában, mint a természet- és a társadalomtudományok számos más területén.

A természet, a társadalom folyamatait vagy absztrakt rendszereket vizsgálva a korábbi tapasztalatokra alapozott kísérletekkel és logikai megfontolásokkal hosszabb-rövidebb úton kiismerjük ezek törvényszerűségeit, a jellemző mennyiségek közötti kapcsolatokat, és eljutunk függvényekhez, melyek explicit módon leírják a vizsgált folyamatot. Egy formula – esetleg igen bonyolult – explicit formáját látva felvetődik a kérdés, hogy milyen alapvető természeti törvények vannak a kapott megoldás hátterében. Ha az ilyen típusú felvetésekre sikerül válaszolni, akkor eredményként általában a folyamat meghatározó paraméterei közötti „természetes" kapcsolatot kifejező implicit összefüggések (leggyakrabban egyenletek) adódnak. Ezt – az igen gyakran alkalmazott – megközelítési módot axiomatikus módszernek nevezzük. Függvényegyenletek elsősorban különféle problémák axiomatikus megközelítéséből származnak.

A függvényegyenletek szisztematikus vizsgálatának elindítása Aczél János nevéhez fűződik, aki 1952-től 1965-ig Debrecenben a Matematikai Intézet Analízis Tanszékének vezetőjeként alapította meg az e témakörrel foglalkozó kutatócsoportot. 1965-től a Kanadai Waterloo Egyetem professzoraként folytatta munkáját, melynek eredményeként a világ számos országában – elsősorban Európában és Észak-Amerikában – indultak kutatások ebben a témakörben. Debrecenben Daróczy Zoltán akadémikus vezetésével folytatódtak, és aktívan folynak most is a vizsgálatok ezen a területen.

Ma a függvényegyenletek vizsgálata nagyon sok szálon fut, a vizsgálati módszerek, bizonyítási technikák és az eredmények teljes körű áttekintése szinte

lehetetlen. Az utóbbi évtizedekben számos tudományterület indult fejlődésnek, amelyek új szemléletmódot kívánnak, problémáik megfogalmazásában kilépnek a „klasszikus" matematika megszokott világából. Az információelmélet, az informatika, a viselkedéstudomány, a pszichometria, a matematikai közgazdaságtan, a mesterséges intelligencia elmélete és sok egyéb tudomány a megoldandó függvényegyenletek bőséges tárházát szolgáltatják. A sokszínűség az egyenletek eredetét illetően az egyenletek sokféleségét eredményezi.
A függvényegyenlet témakör iránt érdeklődő olvasó figyelmébe ajánljuk az irodalomjegyzékben felsorolt munkákat.

2. AXIÓMARENDSZEREK, JELLEMZÉSEK

Egy folyamat vagy rendszer „működését" általában akkor tekintjük leírnak (ismertnek), ha sikerül megadni a folyamat vagy rendszer meghatározó paraméterei (állapotjelzői) közti explicit kapcsolatot (függvényt). A kísérleti vagy logikai úton nyert törvényszerűség - esetleg igen bonyolult - explicit formáját látva felvetődik a kérdés, hogy milyen alapvető törvényszerűségek vannak a kapott megoldás hátterében. Ez lényegében a paraméterek közötti „természetes" követelmények összegyűjtését jelenti, melyek általában implicit összefüggések (egyenletek) formájában állnak elő.
A vizsgált problémakör ismerői által természetesnek mondott összefüggések tulajdonsághalmazt (axiómarendszert) alkotnak. Kérdés, hogy milyen függvények tesznek eleget az axiómáknak.
Az esetek többségében van ismert megoldás: az a függvény, vagy azok a függvények, melyeket a szakértők a saját tapasztalataik alapján konstruáltak, és az adott probléma megoldásaként elfogadtak. Ilyenkor általában úgy vetődik fel a kérdés, hogy van-e más megoldás, mint a „megszokott" függvény? Ha nincs, akkor ez a korábbi eredményeket erősíti, ha van, akkor vagy az axiómákat kell felülvizsgálni, vagy el kell gondolkodni azon, hogy a korábban ismeretlen megoldásokkal mit lehet „kezdeni". Az esetek egy részében a megoldásfüggvényre kiszabott regularitási feltételek mellett már csak a „jó" megoldást kapjuk, máskor viszont kiderül, hogy a várt megoldások mellett más függvényosztályok elemei is eleget tesznek az axiómáknak.
Könnyen előfordulhat, hogy éppen egy „nem várt" megoldás tereli új irányokba a problémakör vizsgálatát, nyit új utakat, és hoz új eredményeket. Hasonló ez a fizikai elméletek ellenőrzéséhez, amikor kísérleteket végzünk egy vélt tétel alátámasztására. Ha a kísérlet eredménye igazolja a felállított törvényszerűséget, akkor „hátradőlhetünk" és „csodálhatjuk" a természet megismerése irányába tett újabb sikeres lépésünket. Ha viszont eltérés mutatkozik a várt és a bekövetkezett

eredmény között, akkor annak utána kell járnunk, meg kell értenünk mi az eltérés oka. Ezek azok a tapasztalások, melyek új utat nyitnak a kutatásnak és új, meglepő gondolatok elfogadásához vezetnek.
Az is megfogalmazható célként, hogy olyan feltételrendszert írjunk le, melynek a probléma lehetséges megoldásai közül csak bizonyosak feleljenek meg. Az ilyen feltételrendszerek előállítását az adott objektum (függvény) jellemzésnek nevezzük.

3. NÉHÁNY, FÜGGVÉNYEGYENLETRE VEZETŐ, KLASSZIKUS PROBLÉMA

Ebben a részben felvázolunk néhány problémát, és ezekhez kapcsolódóan felírjuk azokat a „természetes elvárásokat", melyektől azt várjuk, axiómarendszerként meghatározzák a problémamegoldásfüggvényeit.
Meghatározva az axiómarendszernek eleget tevő megoldásokat, egyszer azt tapasztaljuk, hogy „triviális eredményre" jutunk, ilyenkor a felületes szemlélő még azt is érezheti, hogy „erőltetett" az axiomatikus felépítés *(előfordulhat ez például a téglalap területét megadó függvény jellemzésekor)*, máskor pedig azt érezzük, hogy a természetes elvárásoknak eleget tevő függvény meglepő alakú *(ilyen érzésünk lehet például a Shannon entrópia esetén)*. Igaz ez annak ellenére, hogy mindkét esetben egyformán elfogadjuk a kiinduló feltételek természetességét.
A konkrét problémák bemutatása előtt néhány szót szólunk az additivitás egyenletéről:

(C) $$f(x+y) = f(x) + f(y)$$

az ún. **Cauchy egyenletről**, mely újra és újra megjelenik a függvényegyenletek vizsgálata során. A Cauchy egyenlet alapvető szerepe abból adódik, hogy az additivitási tulajdonság gyakran természetes követelmény a problémákhoz kapcsolódó függvények esetén.
Azt, hogy a (C) egyenlet folytonos megoldásai (vagyis a folytonos additív függvények) a lineáris függvények már Cauchy megmutatta 1821-ben. Az indoklás könnyen áttekinthető, és érdemes végiggondolni annak, aki némi tapasztalatot akar szerezni a függvényegyenletekkel kapcsolatos számolások terén.
A következő gondolatmenet érvényes attól függetlenül, hogy a (C) egyenletben szereplő f függvény értelmezési tartománya a valós számok halmaza, a nemnegatív valós számok halmaza, vagy a pozitív valós számok halmaza.

Most tegyük fel, hogy f a pozitív valós számok halmazán értelmezett valós értékű függvény ($f:]0,+\infty[\to\mathbf{R}$) és hagy (C) fennáll minden $0<x\in\mathbf{R}$ és $0<y\in\mathbf{R}$ esetén.
A (C) egyenletből indukcióval azonnal látható, hogy $f(n\cdot x) = n\cdot f(x) \quad n\in\mathbf{N}$, $0<x\in\mathbf{R}$ (**N** a pozitív egész számok halmaza), vagyis hogy az f függvényből kiemelhetők a pozitív egész szorzók.
Továbbá, ha n és m pozitív egészek, $0<x\in\mathbf{R}$, $0<t\in\mathbf{R}$ és $n\cdot x=m\cdot t$, akkor $f(n\cdot x)=f(m\cdot t)$ és a pozitív egész szorzók kiemelhetősége miatt $n\cdot f(x)=m\cdot f(t)$, így

$$f\left(\frac{m}{n}\cdot t\right)=f(x)=\frac{m}{n}\cdot f(t)$$

vagyis az f függvényből a racionális szorzók is kiemelhetők.
A $t=1$ helyettesítéssel, a $c=f(1)$ jelölést alkalmazva minden pozitív racionális r esetén $f(r) = r\cdot f(1) = c\cdot r$.
Végül, ha az f függvényről megköveteljük a folytonosságot, akkor ebből következik, hogy $f(x) = c\cdot x$, $0<x\in\mathbf{R}$.

2.1. A négyzet függvények jellemzése

Akár az ókorig is vissza lehet menni, ha függvényegyenletre vezető problémák után kutatunk, hiszen például a rekurzív sorozatokkal már Archimedesz és kortársai is foglakoztak. Az első, a mai szemmel is jelentős problémafelvetés Oresme-től származik, aki 1352-ben alkotta meg szövegesen az egyenletesen változó mennyiség fogalmát. Ez – a mai jelöléseket alkalmazva – a következő formában írható:

$$\frac{f(x_1)-f(x_2)}{f(x_2)-f(x_3)}=\frac{x_1-x_2}{x_2-x_3}$$

Oresme foglalkozott a négyzet függvények ($x\to a\cdot x^2$) jellemzésével és a korabeli nyelven megfogalmazta a következő egyenlőséget, mely a mai jelölésekkel következő formában írható:

$$\frac{f((n+1)\cdot t)-f(n\cdot t)}{f(n\cdot t)-f((n-1)\cdot t)}=\frac{2n+1}{n},\qquad 0<t\in\mathbf{R},\ n\in\mathbf{N}.$$

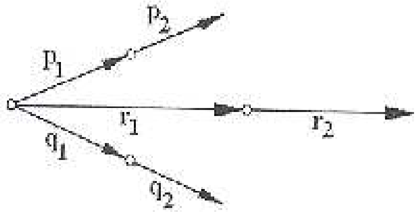
Gallilei a XVIII. században újra felvetette a problémát a szabadesés törvényszerűségét keresve. Bár nem igazolták, tényként kezelték, hogy az egyenlet megoldásai az $x\to a\cdot x^2$ ($a\in\mathbf{R}$) alakú négyzet függvények.

2.2. Erők eredője (összege)

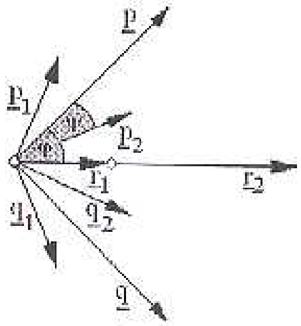
Azt, hogy egy probléma megoldása egy egyenlet megoldásaként adódik természetesnek fogadjuk el, ha például differenciálegyenletről van szó. Az alábbi példa – az erők eredőjének meghatározására szolgáló paralelogramma szabály axiomatikus megalapozása – alapján világos, hogy függvényegyenlet is alkalmas lehet megoldásfüggvény meghatározására.
A paralelogramma szabály axiomatikus megalapozását d'Alembert kezdeményezte a XVIII. század közepén. Lényegében az alábbi axiómákat fogalmazta meg:

1. AXIÓMA
A vektorok Abel csoportot alkotnak az összeadásra nézve, vagyis az összeadás kommutatív és asszociatív, létezik additív egység (a zérusvektor) és minden elemnek van additív inverze.
2. AXIÓMA
Az összeadás rotáció-automorf, azaz – egyszerűen fogalma – az összeg együtt forog a vektorokkal. *(Ennek a tulajdonságnak közvetlen következménye, hogy az eredő hossza csak a vektorok hosszától és a közbezárt szögétől függ).*
3. AXIÓMA
Az eredő hossza a vektorok hosszának és szögének folytonos függvénye.
4. AXIÓMA
A párhuzamos vektorok hossza algebrailag összegződik.

Megmutatjuk, hogy – egyenlő hosszúságú vektorok esetén – az axiómákból miként következik, hogy az összegzés megfelelő módja a paralelogramma szabály.
A 2. axiómából következik, hogy – egyenlő hosszúságú vektorok esetén – az eredő iránya a vektorok által bezárt szög felezőjének iránya, így csak a hosszra vonatkozó formulát kell levezetni.
Először az eredő hosszának a vektorok hosszától való függését vizsgáljuk.
Ha a vektorok hossza $\mathbf{x}$ $(0<x\subset\mathbf{R})$, akkor az eredő hosszát jelölje $\mathbf{f(x)}$ $(f:]0,+\infty[\to\mathbf{R})$.
Legyen $0<x\in\mathbf{R}$, $0<y\in\mathbf{R}$, és legyen $\underline{p}_1$ a $\underline{p}_2$-vel, ill. $\underline{q}_1$ a $\underline{q}_2$-vel párhuzamos vektor úgy, hogy $|\underline{p}_1|=|\underline{q}_1|=x$, $|\underline{p}_2|=|\underline{q}_2|=y$, és (a 4. axióma következtében) $|\underline{p}_1+\underline{p}_2|=|\underline{q}_1+\underline{q}_2|=x+y$. (1. ábra)



1. ábra



2. ábra

Az eredők: $\underline{r}_1 = \underline{p}_1 + \underline{q}_1$, $\underline{r}_2 = \underline{p}_2 + \underline{q}_2$, $\underline{r} = \underline{r}_1 + \underline{r}_2 = (\underline{p}_1+\underline{q}_1) + (\underline{p}_2+\underline{q}_2)$, így $|\underline{r}_1| = f(x)$, $|\underline{r}_2| = f(y)$, $|\underline{r}| = f(x+y)$.
Ekkor egyrészt a 4. axióma miatt

$$|(\underline{p}_1+\underline{q}_1) + (\underline{p}_2+\underline{q}_2)| = |\underline{r}_1+\underline{r}_2| = |\underline{r}_1| + |\underline{r}_2| = f(x) + f(y),$$

másrészt az 1. axióma miatt

$$|(\underline{p}_1+\underline{q}_1) + (\underline{p}_2+\underline{q}_2)| = |(\underline{p}_1+\underline{p}_2) + (\underline{q}_1+\underline{q}_2)| = |\underline{r}| = f(x+y),$$

vagyis (C) fennáll minden $0<x\in\mathbf{R}$ és $0<y\in\mathbf{R}$ esetén.
A 3. axióma szerint f folytonos, így $f(x)=c\cdot x$ valamely $c\in\mathbf{R}$ mellett, vagyis az eredő hossza arányos a vektorok (közös) hosszával.
Vizsgáljuk mostmár az eredő hosszának a vektorok szögétől való függését (továbbra is egyenlő hosszúságú vektorok esetén).
Két, egységnyi hosszúságú, 2φ szöget bezáró vektor eredőjének hosszát jelölje $2g(\varphi)$. Mivel a fentiek szerint az eredő hossza arányos a vektorok hosszával, két x hosszúságú, 2φ szögű vektor eredőjének hossza $x\cdot 2g(\varphi)$.
Tekintsük a $\underline{p}$, $\underline{p}_1$, $\underline{p}_2$, $\underline{q}$, $\underline{q}_1$, $\underline{q}_2$ vektorokat, melyek a következő tulajdonságokkal bírnak:
$|\underline{p}_1| = |\underline{p}_2| = |\underline{q}_1| = |\underline{q}_2| = 1$, $\underline{p} = \underline{p}_1 + \underline{p}_2$, $\underline{q} = \underline{q}_1 + \underline{q}_2$, $\underline{r}_1 = \underline{p}_1 + \underline{q}_1$, $\underline{r}_2 = \underline{p}_2 + \underline{q}_2$, $\underline{r} = \underline{p} + \underline{q}$, a $\underline{p}_1$ és a $\underline{p}_2$ ill. a $\underline{q}_1$ és a $\underline{q}_2$ vektorok szöge 2ψ, így $|\underline{p}| = |\underline{p}_1+\underline{p}_2| = |\underline{q}| = |\underline{q}_1+\underline{q}_2| = 2g(\psi)$, a $\underline{p}$ és a $\underline{q}$ vektorok szöge 2φ. (2. ábra)
Figyelembe véve, hogy az eredő hossza arányos a vektorok hosszával

$$|\underline{r}| = |\underline{p}+\underline{q}| = |(\underline{p}_1+\underline{p}_2) + (\underline{q}_1+\underline{q}_2)| = 2g(\psi)\cdot 2g(\varphi).$$

Mivel a $\underline{p}_1$ és a $\underline{q}_1$ vektorok szöge $2(\psi+\varphi)$, a $\underline{p}_2$ és a $\underline{q}_2$ vektorok szöge $2(\psi-\varphi)$,

$$|\underline{r}_1| = |\underline{p}_1+\underline{q}_1| = 2g(\psi+\varphi), \qquad |\underline{r}_2| = |\underline{p}_2+\underline{q}_2| = 2g(\psi-\varphi),$$

továbbá a 2. axióma az $\underline{r}_1$, és az $\underline{r}_2$ vektorok iránya a $\underline{p}$ és a $\underline{q}$ vektorok által bezárt szög felezője.
Így az 1. és a 4. axiómák szerint

$$|\underline{r}| = |(\underline{p}_1+\underline{p}_2)+(\underline{q}_1+\underline{q}_2)| = |(\underline{p}_1+\underline{q}_1)+(\underline{p}_2+\underline{q}_2)| = |\underline{r}_1|+|\underline{r}_2| = 2g(\psi+\varphi)+2g(\psi-\varphi).$$

Ezt összevetve az $|\underline{r}| = 4g(\psi)\cdot g(\varphi)$ egyenlőséggel, a g függvényre a

$$g(\psi+\varphi) + g(\psi-\varphi) = 2g(\psi)\cdot g(\varphi)$$

egyenlet, az ún. d'Alembert-féle függvényegyenlet adódik. A d'Alembert egyenlet folytonos megoldásai, ahogyan azt 1831-ben maga d'Alembert kimutatta:

$$g(\varphi)=0, \quad \text{vagy} \quad g(\varphi)=ch(k\varphi), \quad \text{vagy} \quad g(\varphi)=\cos(k\varphi),$$

ahol k tetszőleges valós szám.

Könnyen igazolható, hogy az axiómáknak csak a

$$g(\varphi)=\cos(\varphi)$$

függvény felel meg.

Tehát két, x hosszúságú, 2φ szögű vektor eredőjének hossza $2\cdot x\cdot\cos(\varphi)$, ami azonos a paralelogramma szabállyal számított értékkel.

2.3. Legendre-féle probléma: a téglalap területét megadó függvény jellemzése

A téglalap területét az oldalhosszakból megadó $T:\mathbf{R}^{+}\times\mathbf{R}^{+}\to\mathbf{R}$ függvényről (ahol $\mathbf{R}^{+}$ a nemnegatív valós számok halmazát jelöli) – a szemlélet alapján – feltehető, hogy teljesíti az alábbi négy tulajdonságot (axiómát):

1. AXIÓMA

$\mathbf{T(x,y) \geq 0}$, ha $x\geq 0$, $y\geq 0$ *(nemnegativitás)*

2. AXIÓMA

$\mathbf{T(x_1+x_2,y) = T(x_1,y) + T(x_2,y)}$, ha $x_1,x_2,y\in\mathbf{R}^{+}$ *(additivitás az első változóban)*

3. AXIÓMA

$\mathbf{T(x,y_1+y_2) = T(x,y_1) + T(x,y_2)}$, ha $x,y_1,y_2\in\mathbf{R}^{+}$ *(additivitás a második változóban)*

4. AXIÓMA

$\mathbf{T(1,1) = 1}$ *(az egységnégyzet területe 1)*

Kérdés: melyek azok a $T:\mathbf{R}^{+}\times\mathbf{R}^{+}\to\mathbf{R}$ függvények, melyek teljesítik az 1-4 tulajdonságokat (Legendre 1791)?

Válasz: A választ 1880-ban Darboux adta meg, miszerint csak a jól ismert a $\mathbf{T(x,y) = x\cdot y}$ függvény tesz eleget a fenti axiómáknak.

2.4. A konzisztens aggregáció problémája

A **közgazdaságtanban** a következőképpen értelmezik a konzisztens aggregáció problémáját:

Tegyük fel, hogy egy rendszerben ***m*** db **termelő** mindegyike ***n*** fajta **ráfordítással** termel. Jelölje x_{ij} a j-edik ráfordítás mértékét az i-edik termelő esetén (i=1,...,m, j=1,...,n).

Az i-edik termelő maximális kibocsátását az n változós (termelőspecifikus)

$$(x_{i1},\ldots,x_{in}) \to \mathbf{F}_i(x_{i1},\ldots,x_{in}), \qquad (i=1,\ldots,m),$$

mikroökonómiai termelési függvény írja le.

A j-edik típusú ráfordításokból adódó aggregált ráfordítás mértékét az m változós

$$(x_{1j},\ldots,x_{mj}) \to \mathbf{G}_j(x_{1j},\ldots,x_{mj}), \qquad (j=1,\ldots,n)$$

aggregáló függvényekkel számolhatjuk.

A termelőnként kiszámított $F_1(x_{11},\ldots,x_{1n})$, … , $F_m(x_{m1},\ldots,x_{mn})$ kibocsátásokból egy újabb m változós **G aggregáló függvénnyel** összesíthetjük a teljes kibocsátást, de ezt megtehetjük a ráfordításonként kapott $G_1(x_{11},\ldots,x_{m1})$,…, $G_n(x_{1n},\ldots,x_{mn})$ aggregált ráfordításokból is egy újabb n változós **F** függvénnyel, a **makroökonómiai termelési függvénnyel** is.

		ráfordítások			
		1	…	n	**kibocsátás**
termelők	1	x_{11}	…	x_{1n}	$F_1(x_{11},\ldots,x_{1n})$
	:	:		:	:
	m	x_{m1}	…	x_{mn}	$F_m(x_{m1},\ldots,x_{mn})$
	kibocsátás	$G_1(x_{11},\ldots,x_{m1})$	…	$G_n(x_{1n},\ldots,x_{mn})$	?

3. ábra

Kérdés: milyen F_1, … , F_m, G_1, … , G_n, F és G függvények mellett adja a kétféle számítás ugyanazt az eredményt (mikor lesz konzisztens az aggregáció), azaz mikor áll fenn a változók lehetséges értékei mellett a

$$G(F_1(x_{11},\ldots,x_{1n}),\ldots,F_m(x_{m1},\ldots,x_{mn})) = F(G_1(x_{11},\ldots,x_{m1}),\ldots, G_n(x_{1n},\ldots, x_{mn}))$$

ún. **általánosított biszimmetria egyenlet**?

Válasz: A probléma jelenleg is vizsgált, csak bizonyos regularitási feltételek mellett ismert a megoldása.

Ha például a ráfordításokat pénzben fejezzük ki, és az aggregálásra az egyszerű összeadást használjuk – a gyakorlatban általában ezzel az egyszerű módszerrel élnek –, akkor az általánosított biszimmetria egyenlet a sokkal egyszerűbb

$$F((x_{11},\ldots,x_{m1})+\ldots+(x_{1n},\ldots,x_{mn})) = F_1((x_{11},\ldots,x_{1n})+\ldots+F_m(x_{m1},\ldots,x_{mn}))$$

ún. **Pexider egyenletbe** megy át, amelyről ismert, hogy a folytonos megoldásai a legfeljebb elsőfokú polinomok.

Ezzel szemben az elméleti közgazdaságtanban leggyakrabban használt termelési függvények mások:

a **CD (Cobb-Douglas) függvények**:

$$F(x_1,\ldots,x_n) = a \cdot x_1^{b_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{b_n} \qquad (x_1,\ldots,x_n \in]0,+\infty[)$$

ahol $0<a\in\mathbf{R}$, $0\neq b_1\in\mathbf{R},\ldots, b_n\in\mathbf{R}$

a **CES (Constant Elasticity of Substitution) függvények**:

$$F(x_1,\ldots,x_n) = a \cdot (c_1 \cdot x_1^b + \ldots + c_n \cdot x_n^b)^{\frac{1}{b}} \qquad (x_1,\ldots,x_n \in]0,+\infty[)$$

ahol $0 \neq b \in \mathbf{R}$, $0 < c_1 \in \mathbf{R}, \ldots, 0 < c_n \in \mathbf{R}$, ami arra utal, hogy az aggregálásra az egyszerű összeadástól különböző függvényeket kell használni. A biszimmetria egyenlet megoldása ezek megtalálásához is elvezet.

2.5. Az információ méréséről

Az információ mérésének kérdését – a gyakorlatban alkalmazott kódolási, kódfejtési tapasztalataira építve – C. E. Shannon, mérnök vetette fel a XX. század közepén. Megfigyelte, hogy a jelrendszerekben az egyes szimbólumok előfordulási valószínűsége (és ennek következtében az információtartalma) általában nem azonos: az információtartalmat annál nagyobbnak találta, minél kisebb az előfordulás valószínűsége. Egy jelrendszer átlagos információtartalmára (entrópiájára), ahol az egyes szimbólumok előfordulási valószínűsége p_i $(i=1,\ldots,n)$ Shannon a

$$H_n(p_1,\ldots,p_n) = -\sum_{i=1}^{n} p_i \log_2 p_i$$

formulát javasolta. Miután ez hasonló a Maxwell-Boltzmann gázelméletben az ideális gáz entrópiáját leíró egyenlethez, Shannon ennek a mennyiségnek is az entrópia nevet adta. Az entrópia a rendszerben lévő határozatlanság (rendezetlenség) mértékének tekinthető. Az entrópiának a fizikából ismert fontos tulajdonságai: az entrópia nem negatív; az entrópia invariáns az állapotok sorrendjének felcserélésére nézve; zárt rendszerben az entrópia nem csökkenhet, vagyis az entrópiát csak külső hatással (pl. energia befektetéssel) lehet csökkenteni; ha a rendezettség növekszik, akkor az entrópia és a stabilitás csökken; a stabil rendszerek teljesen rendezetlenek.

Hogy eljussunk az információ mértékének absztrakt fogalmához, tekintsünk egy $(\Omega,\mathcal{A},P)$ Kolmogorov-féle (nem atomos) valószínűségi mezőt. Fogadjuk el, hogy információ-mennyiséget nem nulla valószínűségű véletlen eseményhez rendelhetünk, és azt, hogy az információ-mennyiség kizárólag az esemény valószínűségétől függ, azaz van olyan $I:]0,1] \to \mathbf{R}$ függvény, melyre egy $0 \neq p$ valószínűségű A esemény bekövetkezésekor nyert információ mennyisége $I(p)$. Az I függvénnyel szemben az alábbi természetes követelményeket (axiómákat) támaszthatjuk:

1. AXIÓMA

$\mathbf{I}(p) \geq 0$, ha $p \in]0,1]$

(az információ mennyisége nem lehet negatív)

2. AXIÓMA

$\mathbf{I(p \cdot q) = I(p) + I(q)}$, ha $p \in]0,1]$, $q \in]0,1]$

(független események együttes bekövetkezésekor nyert információ-mennyiség egyenlő a külön-külön nyert információmennyiségek összegével)

3. AXIÓMA

$\mathbf{I(1/2) = 1}$

(1/2 valószínűségű esemény bekövetkezésekor nyert információ-mennyiség egységnyi: 1 bit. Az elnevezés összefügg azzal, hogy egy kétállapotú tároló 1 bit tárolására alkalmas.)

Itt meg kell jegyezni, hogy a 2. axiómában szereplő egyenletből a $p=2^{-u}$, $u \in [0,+\infty[$, $q=2^{-v}$, $v \in [0,+\infty[$ helyettesítésekkel a $g(t)=I(2^{-t})$, $t \in [0,+\infty[$ függvényre szintén $g(u+v) = g(u) + g(v)$, $u \in [0,+\infty[$, $v \in [0,+\infty[$ Cauchy egyenlet adódik.

Jól ismert eredmény, hogy az 1-3 axiómákat csak a $\mathbf{H(p) = -\log_2 p}$, $p \in]0,1]$ függvény teljesíti (lásd [1]).

A $H(p) = -\log_2 p$ függvény ismeretében könnyen látható, hogy a Shannon által bevezetett formula eseményekhez rendelt információmennyiségek súlyozott átlagát adja: ha egy rendszer **n** különböző állapotban lehet, és ezek valószínűsége $\mathbf{p_1,\dots,p_n}$, akkor a rendszerhez rendelt entrópia az egyes állapotokhoz, mint véletlen eseményekhez tartozó $-\log_2 p_i$ információ-mennyiségeknek a p_i valószínűségekkel képzett súlyozott átlaga:

$$H_n(p_1,\dots,p_n) = -\sum_{i=1}^{n} p_i \log_2 p_i$$

4. IRODALOMJEGYZÉK

[1] Aczél, J., *Lectures on Functional Equations and Their Applications*, Academic Press, New York, London, 1966.

[2] Aczél, J., *On Applications and Theory of Functional Equations*, Birkhäuser, Basel, 1969. Elemente der Mathematik vom höheren Standpunkt, Band V.

[3] Aczél, J., (editor) *Functional Equations: History, Applications and Theory*, Reidel, Dordrecht, 1984.

[4] Aczél, J., *On history, applications and theory of functional equations*, In Functional equations: history, applications and theory, pages 3–12. Reidel, Dordrecht, 1984.

[5] Aczél, J., *A Short Course on Functional Equations* (Based Upon Recent Applications to the Social and Behavioral Sciences). Reidel, Dordrecht, 1987.

[6] Aczél, J., Daróczy, Z., *On Measures of Information and Their Characterization*, Academic Press, New York – San Francisco-London, 1975.

[7] Aczél, J. and Dhombres, J., *Functional Equations in Several Variables*, Cambridge University Press, Cambridge, 1989. With applications to mathematics, information theory and to the natural and social sciences.

[8] Aczél, J. and Golab, S., *Funktionalgleichungen der Theorie der geometrischen Objekte*, Pa'nstwowe Wydawnictwo Naukowe, Warsaw, 1960. Polska Akademia Nauk. Monografie Matematyczne, Tom 39.

[9] Daróczy, Z., Losonczi, L., *Über die Erweiterung der auf einer Punktmenge additiven Funktionen*, Publ. Math. Debrecen **14**(1967), 239-245.

[10] Ebanks, B.R., Sahoo, P.K., Sander, W., *Characterizations of information measures*, World Scientific, Singapore – New Jersey – London – Hong Kong, 1998.

[11] Kuczma, M., *An Introduction to the Theory of Functional Equations and Inequalities*, Pánstwowe Wydawnictwo Naukowe - Uniwersytet Slaski, Warszawa–Kraków–Katowice, 1985.

[12] Kuczma, M., Choczewski, B., and R. Ger, R., *Iterative Functional Equations*, Cambridge University Press, Cambridge, 1990.

[13] Luce, R.D., *Utility of Gains and Losses: Measurement-Theoretical and Experimantal Approaches*, Lawrence Erlbaum Publishers, London–Mahwah–New Jersey, 2000.

ON THE ORIGIN AND NATURE OF FUNCTIONAL EQUATIONS

In this paper we give a short introduction into the history functional equations. We present the so-called axiomatic method, which is widely used in various investigations in different fields of scientific research. Finally we show some examples for system of axioms leading to functional equations.