



Computer-based mathematics education at the beginning of the 21st century

Számítógéppel segített matematikaoktatás a 21. század elején

doktori (PhD) értekezés tézisei

Gyöngyösi Erika

Debreceni Egyetem
Debrecen, 2004.

Content

I. Theoretical background	2
I.1. A general overview on computer-based education	3
I.2. The impacts of new technologies on mathematics education	4
I.3. The role of continuing professional development programmes in mathematics education	11
II. Aims and methods	12
II.1. Aims	12
II.2. Measuring tools	14
II.3. Methods	15
III. Research results	17
III.1. A general overview on computer-based education	17
III.2. Using the computer to visualise graph-oriented problems	18
III.3. Effects of mathematics competitions and games on education and the role of computers in analysing the results of competitions and in making the most of them	20
III.4. Continuing professional development for mathematics teachers: computer-based programmes	21
Magyar nyelvű tézisek	24
Bibliography	49
Publications of Erika Gyöngyösi	54

I. Theoretical background

One of the most important tasks in mathematics education today is the revision of the curricula and teaching methods to take advantage of electronic information technology.

However, it is very difficult to determine the real impact of those ideas and projects in the daily life of mathematics classrooms, and there is very little research evidence validating the overwhelming optimism of computer technologies in this field.

Studies describing mainly empirical experiences regarding the impact of electronic technologies were considered in this dissertation. According to Kaput (1992) "Anyone who presumes to describe the roles of technology in mathematics education faces challenges akin to describing a newly active volcano – the mathematical mountain is changing before our eyes, with myriad forces operating on it and within it simultaneously. Many of these forces contain a technological component".

This doctoral thesis contains new results in the field of computer-based education. In the first chapter we give a general overview on computer-based education. Our results are also published in [13]. In the second part we describe how to use computers to visualise graph-oriented problems. More details can be found in [14]. In the third part we examine the effects of mathematics competitions and games on education and the role of computers in analysing the results of competitions and in making the most of them [15]. Finally, in the fourth chapter we study continuing development for mathematics teachers: computer-based programmes. We also published our results in [12], [13]. We give a brief description of these four parts of the dissertation separately.

I.1. A general overview on computer-based education

We give a general overview on the impacts of electronic technologies in order to determine how they can be applied effectively to improve mathematics education. We consider benefits and challenges of computer-based education. The structure of this doctoral dissertation is based on the optimistic research results of enthusiastic proponents of computer-based teaching but with some critical regards relating to difficulties and challenges that new technologies may bring. For the sake of obtaining objective research results we used the same structure in the relating research studies Gyöngyösi (2002).

According to Bennett (1996-1997) for computers to accomplish in education what they have done elsewhere, one new element is essential: they must be allowed to teach students without a human in the intermediary position between the student and the computer. This failure to allow computers to teach is the reason technology thus far has been a dismal failure in schools. Computers, however, will never eliminate human pedagogy. They will make the profession more satisfying, engaging and fulfilling. They will allow teachers to be better educators, the ultimate reward for any dedicated instructor.

However, Kaput and Thompson (1992, 1994) further warn that the uncritical acceptance of technological inventions created for other audiences do not fulfil expectations. Drijvers (1999) described some obstacles that students encounter using computer algebra software. Tall (1993) diagnosed students' difficulties in learning mathematics.

1.2. The impacts of new technologies on mathematics education

- a) One approach to describe the roles of new technologies in mathematics education is to examine how they are affecting each content area. For example, we can consider arithmetic, geometry, algebra, calculus, probability and statistics and examine how technology impacts regarding curriculum and pedagogy. Computer numerical tools like spreadsheets, vector and matrix operators, and statistical data analysis utilities provide attractive opportunities to enrich teaching of concepts and to extend the reach of problem solving in secondary school and university mathematics topics. But according to Fey (1989) with the exception of statistics, those tools seem to have made little impact on standard curricula and the use of computers for numerical investigations of mathematical concepts seems recently to have been overshadowed by the attraction of dynamic colour graphic displays representing the same ideas.

We carried out research in computer-based teaching and learning of graph-oriented problems. We describe our results in the second part of the thesis.

The list of theories relating to this topic is quite long. Already Piaget (1985, p. 49) has pointed out that "actions and operations become schematised objects of thought or assimilation".

According to Meissner (2003) this idea has become very important today to understand the development of concept images.

According to Gray and Tall (1991, p. 72) there is a "duality between process and concept in mathematics, in particular using the same symbolism to present both a process (such as the addition of two numbers $3+2$) and the product of that process (the sum $3+2$). The ambiguity of notation allows the successful thinker the flexibility in thought to move between the process to carry out a mathematical task and the concept to be mentally manipulated as part of a wider schema". The successful mathematical thinker uses a mental structure called procept (Tall 1991, p. 251), "which is an amalgam of process and concept."

Gray and Tall (1994) proposed the following definitions: "An elementary procept is the amalgam of three components: a process which produces a mathematical object, and a symbol which is used to represent either process or object. A procept consists of a collection of elementary procepts which have the same object".

In Tall et al. (2000) we find examples for symbols as process and concept. For more details on the theory of procepts see Gray and Tall 1991, Sfard 1987, Dubinsky 2000, Meissner 2003 a, and others.).

One of the fundamental ideas of mathematics is the concept of functions. To understand the concept of functions it is essential to comprehend the variables, rule and values of functions as a unity that is as a procept. Sfard (1992, p 64) identified a constant three-step pattern in the successive transitions from operational to structural conceptions. "First there must be a process performed on the already familiar objects, then the idea of turning this process into a more compact, self-

contained whole should emerge, and finally an ability to view this new entity as a permanent object in its own right must be acquired.” Skemp (1978) distinguished between instrumental understanding and relational understanding.

- b) Another approach is to study technologies that simply transfer the traditional curriculum from print to computer screen. Mackie (1992) noted that most computer-assisted learning has been limited to teaching the same things in much the same way but with the benefit of a computer to reduce the tedious arithmetic work or control the pace of presentation of material. We do not consider this approach in details in the present dissertation.
- c) In the third part of the thesis we focus on another approach that is we orient our discussion towards technologies that would be employed in the organisation teaching/learning environments, and assessment of achievement. As mathematics competitions and games are a valuable supplement to classroom teaching by providing new ideas on mathematics in an environment with less pressure and they form an important stimulus to mathematical learning, catalysing discussions which pursue the unknown and mysterious, and in general in many cases catalysing an increased love of learning, we discuss their role in mathematics education.

Pedagogical strategies regarding competitions were given by Kovács (1997), Kántorné, Kántor (1999), Róka (1992). According to Kántorné and Varga (2002) mathematics competitions can be especially inspiring for the able student, but materials of all standards can be developed, even allowing the

average student to realise that mathematics can be done in a relaxing atmosphere and even be fun and useful in everyday life. Students who can face unexpected situations and solve new problems should be and will be in great demand.

On the other hand with the help of computers multi-choice tests are easy to correct and enable us to assess results quickly and impartially. Typical errors and misconceptions in the process of reasoning can be detected, too. Comparative statistics can be made from students' results and significant data can be obtained. These tests can be used in a class in order to assess the frequency of certain misconceptions formed by students taught by one particular teacher. Moreover, groups of students from different schools can be tested. Thus teachers can detect weak points of their own teaching practice that enables them to improve it. Furthermore teachers working in different schools can share their experiences and work out projects together in order to improve their teaching potentials. It is of considerable importance for teachers to be aware of these misconceptions and after finding their reasons they can develop teaching strategies to correct and avoid them during mathematics lessons or students' preparation work for competitions. Hence the effectiveness of teaching and learning can be improved.

Czeglédy (1994) describes how to form and learn mathematics concepts in mathematics education and illustrates some typical errors in formulating definitions and he also draws our attention to some potential errors made by teachers while they are improving students' thinking strategies.

Rational errors as obstacles of correct problem solving strategies were studied by Ben-Zeev, (1995a), Sternberg and Ben-Zeev (1996). Ambrus (1995) emphasized that problem solving strategies can be improved by choosing the correct representation model.

We also examined how teachers can take the best advantage of computers not only in detecting and correcting students' misconceptions but we also gave a short description of the potentials of applying mathematics software for improving their teaching practice.

Artigue et al. (1993) shows that the use of Computer Algebraic Systems is most frequently presented as: permitting a more effective development of an experimental approach to mathematics, allowing for the exploration of problems which are more interesting than those usually encountered, and not strictly within the school syllabus, through using calculation aids (numerical, algebraic and graphical) provided by the computer and providing a more user-friendly atmosphere for teaching and more suited to the needs of the particular learner.

According to Tall (1986, p. 2) "the computer is programmed to enable the user to manipulate examples of mathematical processes and to see them dynamically. Through experience in this way, pupils may come to see specific examples (single entities) as generic examples (representatives of a class of examples), which in turn help in the abstraction of the general concept".

Fey (1989) concluded that proponents of the symbol manipulation software have speculated that there are at least

three ways that its use could make significant impact on mathematics education. First, it seems clear that the software power extends the complexity of algebraic expressions that can be effectively handled at any level of instruction. Second, with computer assistance on routine symbol manipulation it seems quite possible to reorient instruction to focus on the conceptual understanding and procedural planning that remain essential in mathematical problem solving. Third, in much the same way that the Cabri geometry tool facilitates exploratory learning, symbol manipulation utility programs can support rapid exploration of patterns in algebraic reasoning – leading to discovery of important general principles. This tool and the environment it creates have two principal objectives: to restore the act of discovery and conjecturing to a geometry course that has become a deadly routine of proving things that have been well known for centuries, and to facilitate inductive reasoning by making multiple tests of conjectures easy to execute.

The importance of inductive reasoning as a special case of plausible reasoning was emphasised by Pólya (1988).

According to Lakatos (1998) the deductive reasoning is against original and critical thinking and he was in favour of heuristic reasoning that focuses on the process of collecting data, conjecturing, and finding counterexamples or generalisations.

For example Cabri geometry program helps students make and test conjectures about properties of basic geometric figures by simulating the sorts of drawings and measurements that a mathematician would make in the course of a search for patterns. More generally, as Tall (1984) concluded computer

programs are designed both for demonstration purposes and for student investigations, allowing students the freedom to explore and enrich their concept images in a more personal way.

However, to exploit the various computer graphics capabilities or to transfer from one to another is a non-trivial problem. But the computer so reduces time and tedium in calculations and one can go so much further with more difficult problems that the mind is freed to concentrate on the theoretical structure of the mathematics. This has very important implications for how we are to view the curriculum of the future: it is not just a matter of adding an experiment element, but the opportunity to clarify the nature of the mathematical theory itself. The numerical, graphic and symbol manipulation tools provided by computers each offers unique kinds of insight and power in mathematical teaching, learning and problem solving. However, the promise and potential problems that may result from the use of these tools are largely unknown at this time. That computational aids overall do a better job of holding students' mathematical interest and challenging them to use their intellectual power to mathematical achievement than do traditional static media is unquestionable.

The real question needing investigation concerns the circumstances where each is appropriate. The potential in using technology to extend the range of human mathematical learning and problem solving is only beginning to be focused on by research and development projects, much less in the day-to-day life of mathematics classrooms. While some may choose to wait until a clearer picture of the 'best' response emerges, the situation right now offers impressive opportunities for progress.

The underlying reasons why new approaches are often disfavoured were formulated by Machiavelli: "It must be considered that there is nothing more difficult to carry out, nor more doubtful of success... than to initiate a new order of things". But a small step is better than no step at all. Effective use of computers for instruction can realise the kinds of teaching and learning environments that most teachers long for, while they struggle with the constraints of traditional classroom and curricular conditions. Revision of curricular goals, to acknowledge that computers and other electronic information technologies are now standard tools for problem solving and decision-making in science, business, government, and industry will lead to significant change in mathematics education. There are many important questions to be answered, but we really have no better choice except for finding answers to those questions and we need to bring school and university mathematics into the electronic information age.

1.3. The role of continuing professional development programmes in mathematics education

Finally we describe the role of continuing professional development (CPD) programmes in mathematical education. We give a brief description of a particular CPD programme 'algorithmic mathematics' for mathematics teachers in secondary education. We made a questionnaire about the motivation of the participants, the difficulties of studying encountered during this CPD programme, the new knowledge obtained and its utilisation in the teaching practice, the effectiveness of the CPD, possible disappointment in the programme,

and suggestions for making this CPD more effective, opinions of participants about the future of computer-based education. We also requested what kind of changes the participants consider to be useful concerning the matters of the content and those of the form in order to make this CPD even better (Gyöngyösi; 2000).

The study of the attitudes and motivation towards information technology (most frequently) computers has a shorter but more intensive history.

Claims with respect to attitude are difficult to interpret because there is no way of disentangling the influence of differing feelings regarding technology and mathematics. Therefore, I was glad to read a paper by Professor Galbraith and Professor Haines (2000) whose purpose was to design and validate attitude scales for use in programmes in which computer technology is specifically directed towards assisting mathematics learning.

II. Aims and methods

II.1. Aims

The aim of this thesis is to draw attention to the newest results of scientific researches and to the importance and potentials of the more effective use of the modern technologies, especially computers, in mathematics education.

Moreover, another aim is to study why computers have not achieved in education what they have done elsewhere: they have not brought a total revolution yet. The computer, if used more effectively, could

bring advances that would improve education dramatically and it is of significant importance as the whole fate of the nation rests on its schools.

It is clear that fundamental changes in traditional methods of mathematical teaching and learning are possible. But it is also clear that benefiting from the advantages and minimising the difficulties will require a great deal of thoughtful research and development work.

On the basis of our research work the following hypotheses can be formulated.

- 1.1. Computers can be used to hold students' interest, to challenge them and to make learning interesting by reducing the burden of long and tiring calculations or that of sophisticated drawings and by visualising relations and properties.
- 1.2. The computer can be programmed to enable the user to manipulate examples of mathematical processes and to see them dynamically.
- 1.3. Software that will satisfy the needs of the total curriculum can be created by programmers cooperating with teacher researchers who consider how they want to prepare students before they use computers, how much computers can cover, where to place computer instruction into their teaching plan, how to integrate computers with their testing and grading, and how much time to give students to interact with computer lessons.
- 1.4. The machine can be programmed to diagnose errors and then remedial exercises can be provided before moving forward. Also, data processing is much easier with the help of computers.
- 1.5. The use of computers permitting a more effective development of an experimental approach to mathematics, allowing for the

exploration of problems is more interesting than those usually encountered, and not strictly within the school syllabus. Also, computers provide a more user-friendly atmosphere for teaching and they are more suited to the needs of the individual learner. Even games can be used to sharpen some skills. New games requiring intellectual acumen can be developed for computers.

- 1.6. There is a need for training teachers to remove an immediate and major obstacle to full use of computers in today's schools.

II.2. Measuring tools

II.2.1 Test papers for students

- a) In two case studies we examined the improvement of two secondary students' mathematical achievements while they were being taught with the help of mathematics computer software. We considered graph-oriented problems in the pre- and post tests. On the one hand elementary constructive activities were needed for students to solve the problems being of convergent type. On the other hand tests contained divergent problems. Problems of partly divergent type were open in content; instructions were open and problems were assumed to be solved in as many different ways as possible. We tried to choose the same type of problems in the pre- and post tests in order to obtain as objective results as possible.

- b) In order to diagnose typical students' misconceptions we analysed and compare their results in mathematics competitions with the help of computers (especially multi-choice tests were considered).

II.2.2. Questionnaires for teachers

According to our aims to describe the effects of a continuing professional development programme 'algorithmic mathematics' we made a questionnaire. The questionnaire contained open questions and teachers were asked to reply anonymously.

II.3. Methods

- II.3.1. In order to collect data to give a general overview on the benefits and challenges of computer-based education several hours and days were spent in national and foreign libraries as well as conferences, workshops and meetings were visited. Moreover, several professionals in this research field were contacted.
- II.3.2. To study the value added impact of computer use in graph-oriented problems (Gyöngyösi; 2004) we carried out research between April and June, 2003 at a Hungarian secondary grammar school (Ady Endre Gimnázium in Debrecen) known to be the third most successful grammar school in Debrecen. Before students were introduced to the software Graphmatica they were asked to complete a pre-test (5 mathematical problems, 100 total points) that were designed to measure three areas of mathematical knowledge: transformations of functions, solving quadratic equations and inequalities. After the pre-test students participated in a session of

10 mathematics lessons in the computer laboratory where problems in the pre-test and other relevant exercises were solved and discussed together with the teacher. During these activities with software an internal methodology based on our observations and analysis of the results of the pre-test was used.

- II.3.3. To find students' misconceptions we analysed students' results obtained in mathematics competitions. Computer was used to assess students' results and according to their incorrect answers we considered the underlying misconceptions.
- II.3.4. We give a brief description of a particular continuing professional development programme 'algorithmic mathematics' for mathematics teachers in secondary education. We made a questionnaire for the participating teachers. There were thirteen mathematics teachers of secondary education who participated in this continuing training and there were only eight of them who were ready to answer to the questions of the query anonymously. Questions were open and as the number of responses was low enough (8) we could easily classify the teachers' answers. We classified their answers according to their motivation, studying difficulties, new knowledge obtained and its utilisation, effectiveness of the programme, disappointments. We also required them to give suggestions how to make the CPD programme more effective.

III. Research results

III.1. A general overview on the impacts of computer-based education

Benefits	Objections
○ Computers serve as <u>extensions of human minds</u>. Computers are <u>flexible</u>. As a student learns, the computers will continually evaluate his or her progress. It will diagnose errors and then provide remedial exercises before moving forward. It will also make lessons stimulating and interesting to enhance learning and retention. ○ Programmers will not have to reinvent effective routines. They will be able to copy and <u>use the skilful teaching techniques</u> that minds of human instructors have developed over many ages. Software allows the machine to use ideas of different	● Computers are useless without human programming, ● Machines can break down, and students will be left with nothing to do. ● Computer programs always have bugs, and the students will be left without material. ● Manhandling computers and destroying them. ● Students will waste time if no teacher checks on them. ● A machine can not make judgements that a human can make. ● A machine can not teach values, only facts. ● A machine can not develop interaction among students. ● A machine can not give necessary and meaningful

Benefits	Objections
<u>teachers to reach diverse students.</u> Every computer through its programming can mimic more than one model teacher. ○ <u>Computers can enhance other teaching aids.</u>	personal attention to students. • A school system with computers as teachers will turn out automatons, not warm, friendly humans. • Computers can be dangerous to the eyesight. • Computers can be dangerous because of a malady that pains thousands of people in offices where computers are used regularly. • Some students will be unable to use computers and will receive no education. • The cost of giving every student a computer is prohibitive. • If computers could be teachers, schools would use them in that way.

III.2. Using the computer to visualise graph-oriented problems

We have carried out research to determine more precisely the impact of a computer-based teaching programme in some graph-oriented problems.

We have grasped the nettle to try to understand some aspects of what it is that technology brings to teaching and learning mathematics. We showed how computer influence the improvement of two students on some graph-oriented problems.

Test results show that with the computer programme GRAPHMATICA the ability of plotting functions and carrying out function transformations was considerably improved in the case of the first student (from 38% up to 100%). Furthermore, in both cases an obvious improvement of the aesthetic sense of the students drawing colourful figures of functions in the post-test can be observed.

Students tended to choose *an algebraic approach while solving equations* and thus *the computer software was not useful* to change this habit even if a graphical method had been more practical; therefore it had not much impact on the improvement of their problem-solving.

Considering the observed students' difficulties with signs of expressions, however, only a slight improvement can be observed after the computer-based teaching session.

In both cases *the greatest improvement can be observed in students' strategies for solving quadratic inequalities.*

Pedagogies for such instructional sessions are still in the process of development or refinement, and within this enterprise the interaction between mathematics and technology is of considerable importance. We would like to draw attention to positive impacts of electronic technologies on different topics of mathematics and in order to find

how to take the best advantage of them further research is needed but we consider it realisable.

Our experience shows that the computer, if used properly, may be a powerful adjunct to teach graph-oriented problems. A future study that looks at the correlation between the usage of mathematical software and mathematics skills such as exploring translations and reflections of graphs and developing graphical approaches to solving equations and inequalities as well as exploring areas of mathematics in which using computers does or does not make any positive impact on the improvement of mathematical skills would be of interest.

III.3. Effects of mathematics competitions and games on education and the role of computers in analysing the results of competitions and in making the most of them

In this part of the dissertation we described how mathematics competitions and games form an important complementary component of mathematical education, at various levels. They should form an important stimulus to mathematical learning; catalysing discussions and an increased love of learning. Secondly, typical students' errors in the process of reasoning can be easily detected after analysing their solutions given to different problems of mathematics competitions.

With the help of computers it is easy to analyse and compare students' results and to diagnose their weak points. It is of considerable importance for teachers to be aware of these errors and after finding their reasons they can develop teaching strategies to correct and avoid errors and misconceptions during mathematics lessons or

students' preparation work for competitions. We also examined how teachers can take the best advantage of computers not only in detecting and correcting students' misconceptions but we also gave a short description of the potentials of applying mathematics software for improving their teaching practice.

III.4. Continuing professional development for mathematics teachers: computer-based programmes

Finally we emphasise the importance of continuing professional development. A general model for the system of continuing professional development is describe in the paper Gyöngyösi (2000).

This part of the dissertation has two messages: schools can use technology more effectively, and for the welfare of students, teachers and society, they must do so. Secondly, initial teacher training is not enough; teachers need continuing professional development (CPD) as the technology changes, as new and more effective applications are developed and as more is learned about learning with technology.

As the majority of present teachers lack the needed expertise to use computer mathematics software teachers must be taught to use computers and mathematics software. Additionally, future teachers now being taught in schools of education are not equipped to teach with computers. Preparing teachers to use computers is a process that is never completed. A general model of continuing professional development can be found in the paper Gyöngyösi (2000).

Therefore, continuing professional development for mathematics teachers plays an important role in the revolution of the whole educational system. In Hungary, according to governmental regulation each teacher has to take part in CPD in every seven year from her or his graduation up to the age of 50.

Teachers are already grossly overburdened. Very few teachers have adequate time for planning and preparing to use technology. With these problems confronting teachers when they use computers, their attitudes are, understandably, often antagonistic toward the machines. Present use of computers often burdens teachers and there are many difficulties in the classroom.

We describe a CPD programme 'algorithmic mathematics' and its impacts on the participating teachers' improvement. Each teacher (100%) considered this CPD training effective and the majority of them can use this knowledge in their teaching practice.

Teachers need to develop their knowledge and to learn the newest computer applications in order to develop their teaching capacities. The teaching staff of the University of Debrecen is qualified enough to run more CPD programmes for mathematics teachers and teachers of secondary education are in need of continuing their studies and they are motivated but not encouraged and supported enough to take part in continuing education.

More subjects directly helping the teaching practice in the secondary education should be presented. Mathematics teachers participating in continuing education need to have a more active role during their own continuing training and they need to share their experiences and

problems with each other. More effective previous assessment of demands is needed, and collecting experiences of participants would be very useful in order to increase effectiveness of CPD programmes.

As Kaput (1994) noted these technologies, although growing in importance and penetration of practice, are not part of the mainstream activity of mathematics education researchers and on the other hand they are regarded as the province of specialists in the development and use of these technologies. To use technology in mathematics education research is intellectually demanding and one must continually rethink pedagogical and curricular motives and contexts.

To use technology in mathematics education research also involves other practical complications. Computer materials, especially software, are expensive and time-consuming to produce, and are seldom available off the shelf in the needed form. The role of impact of technological innovation is thus an open question.

I. Elméleti előzmények

A mai matematikaoktatás egyik legfontosabb feladata az elektronikus információs technológia előnyeinek kihasználása a tanterv és tanítási módszerek fejlesztésével.

Bár az igazság az, hogy a technológia valódi hatását a mindennapi osztálytermi matematikatanítás keretein belül nagyon nehéz meghatározni és nagyon kevés kutatói bizonyíték létezik, amely alátámasztaná a számítógépes technológiával kapcsolatos túláradó optimizmust ezen a területen.

Azokat a tanulmányokat tartottuk fontosnak ebben a disszertációban, amelyek főleg az elektronikus technológiák hatására vonatkozó empirián alapuló tapasztalatokat fogalmaznak meg.

Kaput megfogalmazása szerint (1992) „bárki, aki arra vállalkozik, hogy leírja a technológia matematikaoktatásra gyakorolt hatását, nem kevesebbre vállalkozik, mintha egy újra kitörni készülő vulkánt írna le – a matematika hegyvonulata a szemünk előtt változik, számtalan erő hat rá és emellett egyidejűleg. Ezen erők közül több is tartalmaz technológiai komponenst.”

Ez a doktori disszertáció új eredményeket tartalmaz a számítógéppel segített oktatás területén. Az első fejezetben általános képet adunk a számítógéppel segített oktatásról. Eredményeinket publikáltuk is [13]-ban. A második részben bemutatjuk, hogyan használhatók a számítógépek grafikus problémák vizualizációjára. További információk találhatók [14]-beli munkánkban. A harmadik részben vizsgáljuk a matematikaversenyek és játékok hatásait a

matematikaoktatásra és a számítógépek szerepét a versenyeredmények analizálásában és azok hasznosításában [15]. Végül, a negyedik fejezetben tanulmányozzuk a matematikatanár-továbbképzést: a számítógéppel támogatott programokat. Eredményeinket publikáltuk is [12] és [13]-ban. Röviden külön-külön ismertetjük a disszertáció négy részét.

1.1. A számítógéppel segített oktatás általános jellemzése

Az első részben általánosan bemutatjuk az elektronikus technológiák hatását, annak érdekében, hogy meghatározzuk, hogyan lehet azokat hatékonyan használni a matematika oktatás fejlesztése érdekében. Bemutatjuk milyen előnyökkel, és ellenvéleményekkel kell számolni a számítógépes oktatással kapcsolatban. A doktori disszertáció szerkezete egyrészt a számítógéppel segített oktatás lelkes kutatóinak optimista kutatási eredményeire épül, de egészséges kritikai érzéssel, tekintettel vagyunk az új technológia bevezetésével járó nehézségekre és kihívásokra. Az objektív kutatási eredmények érdekében ugyanezt a felépítést alkalmaztuk a témával kapcsolatos kutatómunkánk bemutatásában is Gyöngyösi (2002).

Bennett (1996-1997) szerint az oktatás krízisének egyszerű megoldása van: felmenteni a tanárokat a megszokott kötelezettségeik alól és hagyni, hogy a számítógépek tanítsák a tanulókat. Bővebben az ő tanulmányában lehet olvasni a számítógépekkel megvalósított oktatásról, amely során az összes tantárgyat számítógépek taníttatának a tanárok helyett, azonban ez ma még kissé idealisztikus ötletnek tűnik, mégis érdemes átgondolni ezt a lehetőséget is.

A számítógépek használata azonban soha nem fogja kizárni a pedagógusok részvételét az oktatásban, hanem még sikeresebbé,

megnyerőbbé teszik ezt a szakmát. Lehetővé teszik, hogy a tanárok jobb nevelő és oktatómunkát végezhesenek, ami a végső célja minden elhivatott oktatónak.

Kaput és Thompson (1992, 1994) továbbá arra figyelmeztet, hogy a más közönségek számára alkotott technológiai találmányok kritikátlan elfogadása nem fogja teljesíteni az elvárásokat. Drijvers (1999) bemutatott néhány akadályt, amelyekkel a tanulók szembesülnek a komputer algebra szoftverek használata során. Tall (1993) diagnosztizálta a tanulók nehézségeit a matematikatanulás során.

1.2. Az új technológiák hatásai a matematikaoktatásra

- a) Az új technológiák matematikaoktatásban betöltött szerepének vizsgálatában az egyik megközelítés az, ha megvizsgáljuk hogyan hatnak az egyes tartalmi területekre, kiválasztva a matematikai tartalom valamely szempontját, mint az analízisünk alapját. Például tekintjük az algebrát, aritmetikát, geometriát, analízist, valószínűség számítást, és statisztikát és vizsgáljuk, hogyan hat a technológia a tanterv és a pedagógia szempontjából. A számítógépes numerikus eszközök, mint például a táblázatkezelők, vektor-, mátrixkezelők és statisztikai adatelemző eszközök, vonzó lehetőséget kínálnak a matematikai fogalmak tanításának gazdagításához és a probléma megoldás kereteinek kiterjesztéséhez a középiskolai és az egyetemi matematika témaköreiben. De Fey (1989) szerint a statisztika kivételével, ezek az eszközök úgy tűnik kevés hatást gyakoroltak eddig a standard tantervre, továbbá a matematikai fogalmak numerikus felfedezésére használt számítógépek hatását úgy tűnik, jelenleg

beárnyékolja az egyazon fogalmakat reprezentáló dinamikus, színes grafikai megjelenítések vonzereje.

Kutatásaink során a grafikus problémák számítógéppel segített tanítását és tanulását vizsgáltuk. Eredményeinket a dolgozat második részében mutatjuk be. A témával kapcsolatos szakirodalmak listája elég bőséges.

Piaget (1985, p. 49) rámutatott arra, hogy a „cselekvések és műveletek, a gondolat vagy asszimiláció sematizált objektumaivá válnak”. Meissner (2003) szerint ez az ötlet nagyon fontossá vált napjainkban, mert szükségesek ahhoz, hogy megértsük a fogalomképek fejlődését.

Gray és Tall (1991, p. 72) szerint „dualitás van a matematikai folyamat és fogalom között, különösen, amikor ugyanazt a szimbólumrendszert használjuk mind a folyamat (például két szám összeadása $3+2$ során), mind pedig a folyamat eredményének ($3+2$ összege) jelölésére. A jelölés kétértelműsége lehetővé teszi a sikeres problémamegoldók részére a rugalmas váltást a gondolkodásukban a folyamatról, amely matematikai feladat végrehajtását jelképezi, a fogalomra, amely mentálisan kezelve egy szélesebb séma része”. A sikeres problémamegoldó a procept-nak nevezett mentális struktúrát használja (Tall; 1991, p. 251), „amely nem más, mint folyamat és fogalom ötvöze”.

Gray és Tall (1994) a következő definíciót javasolta: „Egy elemi procept három komponens ötvöze: a folyamaté, amely egy matematikai objektumot hoz létre, és a szimbólumé, amely mind a folyamat, mind az objektum reprezentációját szolgálja. A procept elemi proceptek gyűjteménye, amelyek ugyanarra az objektumra vonatkoznak”. Tall és szerzőtársai (2000) művében

találunk példákat szimbólumokra, mint folyamatra és fogalomra. A proceptek elméletéről további részletek találhatók Gray és Tall (1991), Sfard (1987), Dubinszky (2000), Meissner (2003) és mások tanulmányaiban.

A matematika egyik alapfogalma a függvény. A függvények megértéséhez alapvető, hogy egységében értsük a függvényváltozók, hozzárendelése szabály, függvényértékek fogalmát, mint egy proceptet. Sfard (1992, p. 64) egy állandó, háromlépéses sémát azonosított be az operációs és strukturális felfogási szintek közötti egymás utáni fázisokban. „Az első dolog, amit el kell sajátítanunk, a már ismert objektumokon végrehajtott művelet, aztán eszme, amely ezt a műveletet egy összetettebb, önálló egészévé fűzi össze, és végül az a képesség, hogy ezt az egységet, mint állandó objektumot szemléljük”.

Skemp (1978) megkülönbözteti az instrumentális és a relációs megértést.

- b) Az új technológiák matematikaoktatásban betöltött szerepének tanulmányozásában egy másik megközelítés, amely szerint a azok hatása nem több, mint a hagyományos tanterv nyomtatott tananyagának egyszerű átvitele a képernyőre. Mackie (1992) szerint, a számítógéppel támogatott tanulás már régóta csak ugyanazon dolgoknak, nagyjából ugyanazon a módon megfogalmazott tanítására korlátozódik, csak a számítógép azon előnyét használva ki, hogy lecsökkenti a fárasztó aritmetikai munkát vagy ellenőrzi a tananyag bemutatásának menetét. Ezt a megközelítési módot jelen dolgozatunkban nem tárgyaljuk részletesen.

- c) A disszetáció harmadik részében, figyelmünket a kérdéskör azon megközelítésére irányítjuk, amely során azt vizsgáljuk, hogy az új technológiák hogyan alkalmazhatók hatékonyan a tanítás/tanulás környezetének szervezésében, és az eredmények felmérésében. Mivel a matematikaversenyek és játékok értékes kiegészítői az mindennapi matematika óráknak, azáltal, hogy új ötleteket közvetítenek egy felszabadultabb tanulási környezetben, és fontos szerepet játszanak a matematikatanulás iránti vágy felkeltésében, vitákra serkentő hatásukkal, amely az ismeretlen és misztikus világ megismerését célozza, és általában véve előmozdítja a tanulás szeretetét, ezért fontos, hogy megvizsgáljuk szerepüket a matematikaoktatásban. A matematikaversenyekkel kapcsolatos pedagógiai stratégiák kidolgozásában sokat tettek Kovács (1997), Kántorné, Kántor (1999), Róka (1992). Kántorné és Varga (2002) szerint a matematika versenyek különösen ösztönző erővel hatnak a tehetséges tanulókra, de mivel minden szintű tudás mérésére alkalmas versenytesztek is kidolgozhatók, ezért az átlagos tanulóknak is alkalmat kínálnak annak megtapasztalására, hogy a matematika megfelelő környezetben szórakozást is nyújthat számukra és mindenképpen hasznos a mindennapi életükben.

Azok a tanulók tudnak majd jobban megfelelni a való élet igazi kihívásainak, akik a váratlan helyzetekben is megtalálják magukat és képesek addig még nem látott, új problémák megoldására. A matematikaversenyek óriási pozitívuma, hogy arra képezik ki a tanulókat, hogy megfeleljenek ezeknek a kihívásoknak.

Másrészt a feleletválasztós tesztek könnyen javíthatók, és ez lehetővé teszi az eredmények gyors és pártatlan kiértékelését.

Összehasonlító statisztikákkal szignifikáns statisztikai eredmények nyerhetők a különböző versenyzők matematikai teljesítményeiről. A tanulók eredményeinek elemzése lehetővé teszi az illető korosztályú tanulók tipikus gondolkodási hibáinak detektálását. Mérhető egy osztályon belül bizonyos tanulói gondolkodási hibák előfordulásának gyakorisága. Sőt, különböző iskolák tanulói csoportjai is tesztelhetők és az eredmények összehasonlíthatók az országos felmérések eredményeivel. Így a tanárok tudatosíthatják saját tanítási gyakorlatuk esetleges gyenge pontjait, amely lehetővé teszi számukra azok megerősítését. Továbbá a különböző középiskolákban dogozó tanárok megoszthatják egymással hasznos tapasztalataikat, és együtt dolgozhatnak ki projecteket annak érdekében, hogy fejlesszék saját tanítási képességeiket. Nagyon fontos, hogy a tanárok tudatában legyenek a tanulói tévképzeteknek, illetve hibáknak és azok okainak megtalálása után nagyobb sikerrel munkálkodhatnak azon, hogy megelőzzék, vagy javítsák a tanulók gondolkodási hibáit a tanórákon vagy a tanulók versenyekre való felkészülése során. Valójában így járulhat hozzá minden tanár ahhoz, ami közös érdekük, a tanítás és tanulás hatékonyságának növeléséhez.

Czeplédy (1994) részletesen foglalkozik a fogalomalkotással, ismeretszerzéssel az iskolai matematika oktatásban, amely során bemutat néhány tipikus definiálási hibát és a tanár gondolkodásfejlesztő munkájának lehetséges hibáira hívja fel a figyelmet.

A racionális hibákat, mint a helyes problémamegoldó stratégiák kialakításának akadályait, Ben-Zeev (1995a) Sternberg

és Ben-Zeev (1996) tanulmányozták. Ambrus (1995) hangsúlyozta a tanulói aktivitás fontosságát a reprezentációs síkok közötti váltáskor. „Az egyik reprezentációs módról a másikra való áttérés növeli a rugalmasságot, és a problémamegoldás hatékonyságát. A megfelelő reprezentációmód kiválasztása fontos tényező a problémamegoldásban.”

Továbbá tanulmányoztuk, hogy a tanárok hogyan vehetik a legtöbb hasznát a számítógépeknek nem pusztán a tanulói tévedések felfedésében és javításában, de röviden leírtuk, milyen előnyös lehetőségeket nyújt a matematikai jellegű szoftverek alkalmazása a matematika tanítási gyakorlat hatékonyságának növeléséhez.

Artigue és társszerzői (1993) a komputer algebra rendszereket leggyakrabban úgy jellemzik, mint olyan eszközök, amelyek lehetővé teszik a felfedezésre épülő matematikatanulást, megengedve olyan problémák feltárását, amelyek érdekesebbek a szokásos problémáknál, amelyekkel a tanítási órákon foglalkoznak, és amelyek esetleg nem is szerepelnek az előírt tantervben. Ezen túl, a számítógépek sokoldalú kapacitását kihasználva (numerikus, algebrai, grafikus) felhasználóbarát környezetet teremtenek a tanításhoz, amely jobban illeszkedik az individuális tanulás eszméjéhez.

Tall (1986, p. 2) szerint „a számítógép beprogramozható úgy, hogy a felhasználó képes legyen matematikai folyamatok példáinak manipulálására és dinamikusán szemlélni azokat”. Ezen tapasztalatok alapján a tanulók megtanulják a specifikus példákat (egyedülálló mennyiségeket) generikus (mint a példák

osztályainak reprezentációit) példának tekinteni, amely viszont segíti az általános fogalom absztrakcióját”.

Fey (1989) arra a következtetésre jutott, hogy a szimbolikus adatkezelő szoftverek támogatói arra számítanak, hogy létezik legalább három módja annak, hogy használatuk jelentős hatást gyakorolhasson a matematikaoktatásra. Először is, világosnak tűnik, hogy a szoftver hatalma kiterjed minden olyan bonyolultságú algebrai kifejezésre, amely hatékonyan kezelhető az oktatás bármely szintjén. Másodszor, a számítógép segítségével végrehajtott rutin szimbolikus adatkezelés, úgy tűnik lehetővé teszi, hogy az oktatás középpontjába a fogalmi megértést és a folyamat tervezést állítsa, amely alapvető jelentőségű a matematikai problémamegoldásban. A harmadik mód pedig, többé kevésbé ugyanúgy, mint ahogy a Cabri geometriai eszköz elősegíti a felfedezései tanulást, a szimbolikus numerikus adatkezelés kiszolgáló programjai támogathatják az algebrai bizonyítás sémáinak gyors felfedezését, amely fontos általános alapelvek felfedezéséhez vezet. Ennek az eszköznek és a környezetnek, amelyet teremt két alapvető célja van: visszaállítani a felfedezései tanulást és a találgatásra épülő okoskodást a geometriai kurzusok során, amelyek a dolgok bizonyításának unalmas, évszázadok óta jól ismert rutin műveleteivé váltak, továbbá, elősegíteni az induktív okoskodást, könnyen végrehajtható többváltozós tesztek elkészítésével.

Az induktív okoskodás jelentőségét, amely a plauzibilis gondolkodás speciális esete, már Pólya (1994) is hangsúlyozta.

Lakatos (1998) szerint a deduktív okoskodás akadályozza az induktív, kritikus gondolkodás kifejlődését, ezért Lakatos

szerint a heurisztikus cáfolatok a matematika fejlődésének a motorjai. Gondolkodásának középpontjában a globális ellenpéldák, cáfolatok, kritikák, definíciók állnak, amelyek valamilyen matematikai felfedezésre vezettek.

A Cabri geometria program segíti a diákokat abban, hogy találgassanak és teszteljék feltevéseiket alapvető geometriai alakzatok tulajdonságairól, olyan ábrák és mérések szimulálásával, amelyeket egy matematikus végezne, a sémák kutatása során.

Általánosabban, ahogy Tall (1984) mondta, a számítógépes programokat mind demonstrációs, mind pedig a tanulói vizsgálódások céljaira tervezték, lehetővé téve a tanulóknak a szabad felfedezést, továbbá, hogy személyesebb módon gazdagítsák a tanulók fogalom képzeit. A különböző számítógépes grafikák lehetőségeinek kihasználása, vagy az átmenet az egyikről a másikra azonban nem triviális probléma. De a számítógép nagyon lecsökkenti az idő és energiaigényes számításokat, és az ember sokkal előrébb juthat bonyolultabb problémák megoldásában azáltal, hogy az agy felszabadul a mechanikus gondolkodás alól, ami által lehetővé válik, hogy a matematika elméleti struktúrájára koncentráljon. Ez nagyon fontos jelentőségű abban a kérdésben, hogy hogyan szemléljük a jövő tantervét: a számítógép használat nem pusztán egy kísérleti elem hozzáadását jelenti, de lehetőséget arra, hogy magát a matematikai elmélet természetét tisztázzuk.

A számítógép nyújtotta numerikus, grafikus és szimbolikus adatkezelő eszközök mindegyike bepillantást és egyedülálló hatalmat biztosít a matematikatanításban, tanulásban és

problémamegoldásban. Azonban az ígéretes lehetőségek és potenciális problémák, amelyek ezen eszközök használatából adódhatnak, jelenleg kevésbé ismertek, ezért óvatossá kell lennünk alkalmazásukat illetően.

Megkérdőjelezhetetlen, hogy a számítógépes segédeszközök általában jobbak, mint a hagyományos statikus média, a tanulók matematika iránti érdeklődésének fenntartásában és abban, hogy próbára tegye intellektuális képességeiket a matematikai eredmények elérésében. A valódi vizsgálatot igénylő kérdés, azokat a körülményeket célozza, amelyek során eldönthető, melyik alkalmazása a megfelelő.

A technológia felhasználásának lehetősége, amely arra irányul, hogy kiterjessze az emberi matematika tanulás és problémamegoldás tartományát, még csak most kerül a kutató és fejlesztő projektek középpontjába, és még kevésbé van jelen az osztálytermi matematikatanítás mindennapi életében. Amíg vannak néhányan, akik azt az utat választják, hogy kivárlják, amíg a 'legjobb' válasz tisztább képe bontakozik ki, addig a jelenlegi helyzet a hatékony fejlődés lehetőségét kínálja.

A legkifejezőbbben Machiavelli fejezte ki annak elvi okait, hogy miért válnak az új megközelítések gyakran kegyvesztetté: „figyelembe kell venni, hogy semmit nem nehezebb kivitelezni; és semmi sikere nem kétségesebb ... mint bevezetni a dolgok egy új elrendezését.” De még egy kis lépés is jobb a semminél. A számítógépek hatékony használatának bevezetése az oktatásba, olyan tanítási és tanulási környezetet teremthet, amelyre a legtöbb tanár vágyik, miközben a hagyományos osztálytermi és tantervi megkötöttségekkel küszködik. A tantervi célok újragondolása,

annak elismerése, hogy a számítógépek és más elektronikus technológiák manapság standard eszközei a problémamegoldásnak és döntés előkészítésnek a tudományban, az üzleti életben, a politikában és az iparban jelentős változásokhoz fog vezetni a matematikaoktatásban. Sok fontos kérdést kell még megválaszolni, de valójában nincs jobb választási lehetőség annál, hogy megkeressük a válaszokat ezekre a kérdésekre, hiszen nekünk kell az iskolai és egyetemi matematika az elektronikus információ korába való bevezetésének eszméjét felkarolnunk.

1.3. A továbbképző programok szerepe a matematikaoktatásban

Végül pedig, bemutatjuk a tanártovábbképző programok szerepét a matematikaoktatásban. Bemutatunk egy konkrét, megvalósult tanártovábbképző programot és hatását. Kutatásaink során kérdőíves felmérést készítettünk a tanártovábbképzés résztvevőinek motiváltságáról, a továbbképzési program során felmerülő nehézségekről, a továbbképzés során szerzett új ismeretekről és azok felhasználásáról, az esetleges csalódásokról a programot illetően, a továbbképzés hatékonyságát elősegítő javaslatokról, továbbá a résztvevők véleményéről a számítógéppel segített oktatás jövőjét illetően. Továbbá arról is érdeklődtem, hogy a résztvevők milyen változásokat tennének a továbbképzés tartalmával és formájával kapcsolatban, amely javítaná az illető továbbképzést. (Gyöngyösi; 2000).

Az információs technológia (leggyakrabban számítógépek) iránti beállítódás és motiváció kérdésének már rövidebb, de alaposabb története van.

Az attitűdökkel kapcsolatos állításokat nehéz értelmezni, mert nincs mód annak kibogozásához, hogy a különböző érzelmek a technológiára vagy a matematikára vonatkoznak-e. Ezért örültem, amikor találtam egy cikket Gailbraith és Haines (2000) professzor uraktól, akik azt a célt tűzték ki, hogy megterveznek és érvényesítenek olyan attitűdskálákat, amelyek érvényesek olyan programok vizsgálata során, amelyekben a számítógépes technológia elsősorban a matematikatanítás segítségét célozza.

II. Célok és módszerek

II.1. Célok

Ennek a doktori értekezésnek a célja, hogy felhívja a figyelmet a legújabb tudományos kutatások eredményeire és a modern technológiák, különösen a számítógépek hatékonyabb kihasználásának lehetőségeire a matematikaoktatásban.

További cél, tanulmányozni, hogy a számítógépek miért nem érték el ugyanazt a hatást az oktatásban, mint amit mindenhol máshol: miért nem hoztak még teljes megújulást? A számítógép, ha hatékonyabban használnák, olyan előnyökkel járna, amelyek drámai módon fejlesztenék az oktatást, ami kiemelkedő jelentőségű a nemzet egész sorsának alakulásában, minthogy az függ az iskolázottság alakulásától.

Nyilvánvaló, hogy a matematikatanítás és tanulás hagyományos módszereinek alapvető megváltoztatása nem lehetetlen. De az is világos,

hogyan az előnyök maximális kihasználása és a problémák minimalizálása széleskörű, átgondolt kutatói és fejlesztő munkát igényel.

Ez alapján hipotéziseink az alábbiak:

- 1.1 A számítógépek képesek fenntartani a tanulók érdeklődését, próbára tenni képességeiket, és érdekessé tenni a tanulást, lerövidítve a hosszú, fáradtságos számításokat vagy megkönnyítve és megszépítve a bonyolult ábrák készítését, szerkesztését, segítve a vizuális tanulást.
- 1.2 A számítógép programozható úgy, hogy képessé tegye a felhasználót matematikai fogalmak és eljárások modelljeit manipulálni és ez által dinamikus látásmódot kialakítani.
- 1.3 A programozók és kutatótanárok összefogásával és együttműködésével olyan szoftverek alkotása lehetséges, amelyek megfelelnek a teljes tanterv elvárásainak. A kutatótanárok feladata meghatározni, hogyan készítsék fel a tanulókat, a számítógép használat előtt, mennyit lehetne a tananyagból számítógép segítségével oktatni, hol és hogyan lehetne elhelyezni a számítógépes oktatást a tanmenetükben, hogyan tudnák integrálni a számítógépeket a tesztelő és értékelő folyamatokban, és mennyi időt adnának a tanulóknak a számítógéppel való interaktív tanulásra.
- 1.4 A gépek beprogramozhatók a tanulói hibák felismerésére és ezek felfedése után ismétlődő feladatokat adnának a hibát elkövető tanulóknak, mielőtt továbblépnének a tanulási folyamatban. Továbbá az adatfeldolgozás is könnyebb a számítógépek segítségével.
- 1.5 Számítógépek használata lehetővé teszi a matematika felfedezései tanulási folyamatának hatékonyabb kifejlődését, motiválva

a problémák felfedezésére, a szabályok megsejtésére, a sejtések kipróbálására, megkönnyítve a vizualizációt és felébresztve a bizonyítás igényét. Ez az új megközelítés, a felfedezéssel tanulás érdekesebb, mint a megszokott hagyományos és gyakran még az előírt tanterv határain kívül eső tudás elsajátítását is lehetővé teszi. Sőt, a számítógépek felhasználóbarát atmoszférát teremtenek a tanításhoz, amely jól segíti az individuális tanulás megvalósítását. A játékok különösen segíthetik bizonyos képesség kifejtését. Intellektuális, éles elmét igénylő számítógépes játékok fejleszthetők ki számítógépes alkalmazásokra.

- 1.6 Szükség van a tanárok képzésére, és továbbképzésére, hogy elháruljon a legnagyobb akadály a számítógépek teljes kihasználása elől korunk iskoláiban.

II.2. Mérésszközök

II.2.1 Tanulói feladatlapok

- a) Két esettanulmány elemzésével megvizsgáljuk két középiskolás tanuló matematikai teljesítményének fejlődését, miközben számítógépes szoftverek használatával tanították őket. Függvényekkel kapcsolatos problémákat választottunk az elő- és utótesztben. A feladatok egyrészt konvergens jellegű, elemi konstruáló tevékenységet kívántak meg a tanulóktól. Másrészt a tesztek divergens problémákat tartalmaztak. A részben divergens feladatok tartalmilag nyíltak voltak; az instrukciókat tekintve is nyíltak voltak és több megoldás megtalálását tették lehetővé. Igyekeztünk ugyanolyan típusú feladatokat választani

az elő- és az utótesztben, hogy amennyire csak lehet, objektív kutatási eredményekhez jussunk.

- b) A tipikus tanulói tévedések diagnosztizálása érdekében analizáltuk és összehasonlítottuk a matematikaversenyek eredményeit számítógépek segítségével (elsősorban a feleletválasztós teszteket tekintettük).

II.2.2. Tanári kérdőívek

Ahhoz, hogy a céljainknak megfelelően, leírjuk az 'algorithmikus matematika' tanár-továbbképző program hatásait, egy kérdőívet készítettünk. A kérdőív nyitott kérdéseket tartalmazott és a tanárokat név nélküli válaszáadásra kértük.

II.3. Módszerek

- II.3.1. A számítógéppel segített oktatás előnyeinek és kihívásainak általános bemutatásához szükséges adatgyűjtés érdekében, a szerző sok órát és napot töltött a hazai és nemzetközi könyvtárakban, továbbá konferenciák, 'workshop'-ok és gyűlések látogatásával. Sőt számos, a témában illetékes szakemberekkel lépett kapcsolatba.

- II.3.2. Ahhoz, hogy megvizsgáljuk mennyivel járul hozzá a számítógép használata a matematikai grafikus problémák sikeres megoldásához (Gyöngyösi; 2004), kutatómunkát végeztünk 2003 április és június között egy magyarországi középiskolában (a debreceni Ady Endre

Gimnáziumban), amely a nem hivatalos rangsor szerint a harmadik legjobb középiskola Debrecenben.

Mielőtt a tanulókat bevezettük a Graphmatica nevű szoftver használatának rejtelmeibe, megkértük őket egy elő-teszt megírására (ez a teszt öt matematikai problémát tartalmazott, az elérhető pontok száma maximálisan 100 pont volt), amelyet a matematikatudás három területének mérésére fejlesztettünk ki: függvény transzformációk, másodfokú egyenletek és egyenlőtlenségek megoldása. Az elő-teszt után a tanulók egy 10 matematikaórából álló foglalkozáson vettek részt a számítógépteremben, ahol először az elő-teszt problémáinak, majd a témakör hasonló feladatának megoldására és azok megbeszélésére került sor a tanár és a számítógép segítségével. A szoftverrel végrehajtott tanulói tevékenység során belső metodológiát alkalmaztunk, megfigyeléseinkre és az elő-teszt eredményeinek kiértékelésére építve.

- II.3.3. A tanulói tévedések megtalálásához analizáltuk a tanulói eredményeket, amelyeket a matematikaversenyeken értek el. A számítógép segítségével mértük fel a tanulók eredményeit és a hibás válaszaik alapján tekintettük a háttérben húzódó hibás elképzeléseket.
- II.3.4. Röviden bemutatunk egy megvalósult, és középiskolai matematikatanároknak meghirdetett 'algoritmikus matematika' nevű tanár-továbbképző programot. Kérdőívet készítettünk a tanár-továbbképző programban részt vett tanároknak. Tizenhárom középiskolai matematikatanár vett részt az illető továbbképzésben

és közülük csak nyolcan válaszoltak a kérdőívekre névtelenül. A kérdőív nyitott kérdéseket tartalmazott és mivel a válaszok száma alacsony volt (8), így könnyen osztályokba tudtuk sorolni a tanári válaszokat. A motivációjuk, tanulási nehézségeik, a megszerzett új tudásuk, és azok hasznosítása, a program hatékonysága, az esetleges csalódásaik alapján rendszereztük a válaszaikat. Továbbá megkértük a tanárokat, hogy tegyenek javaslatokat arra, hogyan lehet az illető továbbképzési programot még hatékonyabbá tenni.

III. Kutatási eredmények

III.1. A számítógéppel segített oktatás általános jellemzői

A számítógépek előnyei és ellenvélemények a használatukkal szemben

Előnyök	Ellenvélemények
○ A számítógépek <u>túlszárnyalják az emberi agy képességeit.</u> ○ A számítógépek <u>rugalmasak.</u> Ahogy a tanuló halad a tanulás során, a számítógép folyamatosan kiértékeli a fejlődését. Megállapítja a hibákat és utána ismétlő feladatokat ad, mielőtt továbbhaladna az anyaggal. Továbbá az órát ösztönzővé és érdekessé teszi, kedvet csinál a tanuláshoz és	• Emberi programozás nélkül, a számítógépek használhatatlanok. • A gépek elromolhatnak, és a tanulók így elfoglaltság nélkül maradnak. • A programokban mindig történhetnek üzemzavarok, és a tanulók ekkor is tananyag nélkül maradnak. • Néhány tanuló rosszul kezeli és tönkre is teszi a számítógépeket. • A tanulók el fogják vesztegetni az idejüket, ha nincs tanári

Előnyök	Ellenvélemények
fenntartja a tanulási kedvet. ○ A programozóknak nem szükséges újra feltalálnia <u>hatékony tanítási technikákat</u>. Csak le kell tudniuk <u>másolni és használni</u> az <u>ügyes tanítási technikákat</u>, amelyeket az emberi oktatók <u>agya kifejlesztett</u> sok ezer év alatt. ○ A számítógépek <u>vonzóbbá válhatnak a többi tanári segédeszköznél</u>.	ellenőrzés. • A számítógépek, tényeken túl nem képesek értékeket közvetíteni • A gépek nem képesek olyan ítéleteket hozni, mint az emberi lények. • A gép nem képes a tanulók közti interakciókat kiépíteni. • A gép nem képes megadni a szükséges és a nagyértékű személyes figyelmet a tanulóknak. • A számítógépekkel ellátott iskolarendszer robotembereket képez, nem melegszívű, barátságos emberi lényeket. • A számítógépek veszélyesek lehetnek a tanulók látóképességére, mert a monitor képernyőjéről kell olvasniuk. • A számítógépek veszélyesek lehetnek egy olyan betegség miatt, amely több ezer, irodában dolgozó és a számítógépeket rendszeresen használó embernek okoz fájdalmat • Néhány tanuló képtelen lesz használni a számítógépeket vagy

Előnyök	Ellenvélemények
	azért, mert félnek, vagy azért, mert nem kompetensek és így nem nő a műveltségük. • A tanulónkénti egy számítógép költségei korlátozó tényezőt jelentenek. • Ha a számítógépeket ilyen módon fel lehetne használni az oktatásban, akkor már régen így használnák őket, mivel már így is számítógépek millióit használják az oktatásban,

III.2. Hogyan használhatók a számítógépek a grafikus problémák vizualizációjában?

Kutatásokat végeztünk, hogy pontosabban meghatározzuk a számítógéppel segített tanító programok hatását néhány grafikus probléma esetén.

Kutatásainkban megpróbáltuk megérteni annak néhány aspektusát, hogy mi újat nyújthat a technológia a matematikatanítás és tanulás során. Bemutattuk hogyan hatott a számítógéppel segített matematikaoktatás két kiválasztott tanuló matematikatudásának fejlődésére grafikus problémák esetén.

A teszt eredményei azt mutatják, hogy a Graphmatica szoftver használata a *függvényábrázolás* és *függvény transzformációk*

kivitelezésének képességében jelentős fejlődést eredményezett a kísérletben részt vevő egyik tanulónál (38%-ról 100%-ra). Sőt, mindkét esetben megfigyelhetően *fejlődött az esztétikai szépérzékelésre való hajlamuk* a tanulóknak, mivel az utóteszt során, az elő-tesztben még nem jellemző módon, színes ábrákat készítettek a függvényábrázolás során a papíron.

A tanulók az *algebrai megoldási módszert részesítették előnyben továbbra is a grafikussal szemben az egyenletmegoldás során*, ezért arra a következtetésre jutottunk, hogy ennek megváltozásában a számítógépes szoftver nem bizonyult ez esetben hasznosnak és nem volt nagy hatása a problémamegoldásuk fejlődésére.

Azonban a tanulók *előjelekkel* kapcsolatos problémáinak tekintetében *csak enyhe fejlődés* figyelhető meg a számítógéppel segített oktatás után.

Mindkét esetben a *legnagyobb fejlődés*, a tanulók *másodfokú egyenlőtlenések megoldási stratégiájának fejlődésében* figyelhető meg.

Az ilyen jellegű oktatási kísérletek pedagógiája még a fejlődő folyamatban van, és további kutatásra szorul. Mindenesetre mi ezzel a kutatásunkkal is szeretnénk felhívni a figyelmet a technológia pozitív hatásainak kihasználására a matematikaoktatás különböző területein, amelynek mikéntjét további kutatásokkal, a jelen kutatást folytatva és az eredményeket kiegészítve megvalósíthatónak tartunk.

Tapasztalataink azt mutatják, hogy a számítógép használat nagymértékben hozzájárulhat a grafikus és geometriai problémák sikeres tanításához.

A jövőbeli kutatások feladata megállapítani, hogy milyen mértékben járul hozzá a számítógépes matematika szoftverek használata a sikeres matematikaoktatáshoz és a matematika mely területein használhatók sikeresen és hogyan.

III.3. A matematika versenyek hatása az oktatásra, és a számítógépek szerepe a versenyek eredményeinek feldolgozásában és hasznosításában

A disszertációnak ebben a részében fejezetben azt tanulmányozzuk, milyen fontos kiegészítő szerepe van a matematika versenyeknek a matematikaoktatásban. A matematika versenyeknek fel kell kelteniük a matematikatanulás iránti vágyat; vitákra kell serkenteniük, és a tanulás szeretetét kell előmozdítani. A matematika versenyeknek azonban van egy matematika didaktikai szempontból óriási haszna, még hozzá az, hogy lehetőséget biztosítanak a tanulók által gyakran elkövetett gondolkodási nehézségek összegyűjtésére, rendszerezésére és a megfelelő tanulságok levonására. Ezek a kutatási eredmények rádobbnethetik a tanárokat arra, hogy mi, és miért okoz nehézséget a tanulóknak a problémamegoldás során.

A számítógép segítségével könnyen elvégezhető a tanulók versenyeredményeinek összehasonlító elemzése, amivel diagnosztizálhatók a tanulók gyenge pontjai. A tipikus gondolkodási hibák előfordulása csökkenthető, ha a tanár számít rájuk, ha már előzetesen védekezik ellenük, ez hozzásegíti a tanárokat a felkészítő munka stratégiájának kidolgozásához.

Továbbá tanulmányoztuk, hogy a tanárok hogyan vehetik a legtöbb hasznát a számítógépeknek nem pusztán a tanulói tévedések felfedésében és javításában, de röviden leírtuk, milyen előnyös lehetőségeket nyújt a matematikai jellegű szoftverek alkalmazása a matematika tanítási gyakorlat hatékonyságának növeléséhez.

III.4. Matematikatanár-továbbképzés: számítógéppel segített oktatást célzó programok

Végül a tanár-továbbképzések jelentőségét hangsúlyozzuk. A tanártovábbképzési rendszer egy általános modelljét mutatjuk be tanulmányunkban Gyöngyösi (2000).

A dolgozat utolsó részének két üzenete van: egyrészt az iskolák hatékonyabban hasznosíthatnák a számítógépek nyújtotta előnyöket és a tanulók, tanárok és a társadalom érdekében így kell tenniük. Másrészt a tanárok alapképzése nem elég, mert ahogyan a technológia változik, új és hatékonyabb számítógépes alkalmazásokat fejlesztenek ki, továbbá egyre többet tudnak meg a számítógéppel segített oktatásról, ezért a tanároknak állandó továbbképzésre van szükségük. A tanár-továbbképzés egy általános modellje megtalálható Gyöngyösi (2000) tanulmányában.

Minthogy a jelenlegi tanárok többsége nem rendelkezik a matematikai szoftverek tanításban való felhasználásához szükséges szakképzettséggel, ezért meg kell tanítani őket erre. Ráadásul, a jövő tanárai, akiket most képeznek az oktatási intézményekben, sincsenek felkészítve arra, hogyan tanítsanak a számítógépekkel. A tanárok felkészítése a számítógépek alkalmazására, egy olyan folyamat, amelynek soha nincs vége.

A tanár-továbbképzéseknek kiemelkedő jelentősége van az egész oktatási rendszer megreformálásában. Magyarországon, a törvényi szabályozás értelmében minden tanár köteles részt venni hétévente a tanár-továbbképzésekben, a végzésüket követő években, egészen ötven éves korukig.

A tanárok már így is túl vannak terhelve. Nagyon kevés tanár tud megfelelő időt szánni a számítógéppel támogatott tanítási tervek elkészítésében és a szükséges előkészületek megtételében. Ezekkel a problémákkal szembesülve, a tanárok hozzáállása az új technológia alkalmazásához, érthetően, gyakran antagonisztikus. A számítógépek jelenlegi használata tovább nehezíti a tanárok munkáját és sok más probléma merül fel az osztálytermi alkalmazásukkor is. Ebben a részben bemutatok egy tanár-továbbképzési programot, méghozzá az „algoritmikus matematika” programot, és annak hatásait a résztvevő tanárok fejlődésére.

Minden tanár (100%) hatékornak ítélte az „algoritmikus matematika” tanár-továbbképzést és a többségük fel is tudja használni a továbbképzés során szerzett új ismereteit a tanítási gyakorlatuk során.

A tanároknak szükségük van a tudásuk fejlesztésére és a legújabb számítógépes alkalmazások megtanulására ahhoz, hogy fejlesszék tanítási kapacitásukat. A Debreceni Egyetem tanári kara szakmailag jól képzett ahhoz, hogy további továbbképzéseket hirdessen meg a matematikatanároknak, továbbá a középiskolai tanároknak, szükségük van tanulmányaik folytatására és erre eléggé motiváltak is, de nincsenek eléggé támogatva a továbbképzésben való részvételben.

Több, a középiskolai tanítási gyakorlatot közvetlenül segítő tantárgy tanítására lenne szükség. A továbbképzésben részt vett matematika tanároknak aktívabb szerepet kell szánni saját továbbképzésük során és szükség van arra is, hogy megosszák tapasztalataikat és problémáikat egymással. Az igények hatékonyabb előzetes felmérésére is szükség van, továbbá a résztvevők tapasztalatainak összegyűjtése is nagyon hasznos lenne a továbbképzés hatékonyságának növeléséért.

Ahogy Kaput (1994) megjegyezte, ezek a technológiák, bár jelentőségük növekszik és egyre inkább bekerülnek a tanítási gyakorlatba, még sincsenek benne a matematikai kutatások fő áramvonalában, másrészt pedig úgy tekintik azokat, mintha az ezen technológiák fejlesztésével és felhasználásával foglalkozó specialisták hatáskörébe tartoznának. A technológiák felhasználásának kutatása a matematikaoktatásban, intellektuálisan megerőltető és a tanárnak folyamatosan át kell gondolnia pedagógiai és tantervi motívumait és tartalmát.

A technológia felhasználása a matematikai oktatást kutató munkákban tartalmaz egy másik gyakorlati nehézséget. A számítógépes anyagok, különösen a szoftverek drágák és időigényes a gyártásuk, ráadásul ritkán emelhetők le csak úgy készen, a szükséges formában a polcra. Ezért aztán a technológiai innováció szerepe továbbra is nyitott kérdés.

Bibliography

- [1] Ambrus, A. (1995): *Bevezetés a matematikadidaktikába*. Egyetemi jegyzet, ELTE Eötvös kiadó, 31-56.
- [2] Artigue, M., Drouhard, J. P., Lagrange, J. B. (1993): *Acquisition de connaissances concernant l'impact de l'intégration de logiciels de calcul formel dans l'enseignement des mathématiques sur les représentations et pratiques mathématiques des élèves de l'enseignement secondaire*, IREM, Université Paris 7.
- [3] Bennett, F. (1996-97): *Computers as tutors: solving the crisis in education*. Doktori disszertáció, University of Minnesota.
- [4] Ben-Zeev, T. (1995a): *The nature and origin of rational errors in arithmetic thinking: Introduction from examples and prior knowledge*. Cognitive Science, 19, 341-376.
- [5] Czeglédy, I (1994): *Matematika tantárgypedagógia I-II*. Főiskolai jegyzet. Calibra kiadó, Budapest, 27-35.
- [6] Drijvers, P. (1999): *Students encountering obstacles using a CAS*. Accepted for publication in the International Journal of Computers for Mathematical Learning.

- [7] Dubinsky, E. (2000): *Towards a Theory of Learning Advanced Mathematical Concepts*. In: Abstracts of Plenary Lectures and Regular Lectures. ICME9, Tokyo/Makuhari, Japan.
- [8] Fey, T.J. (1989): *Technology and mathematics education: a survey of recent developments and important problems*. In: Educational Studies in Mathematics 20, 237-272.
- [9] Galbraith, P., Haines, C. (2000): *Mathematics-computing attitude scales*. Monographs in Continuing Education.
- [10] Gray, E. M., Tall, D. O. (1991): *Duality, Ambiguity and Flexibility in Successful Mathematical Thinking*. In: Proceedings of PME 15, Vol. II, pp. 72-79, Assisi, Italy.
- [11] Gray, E. M., Tall, D. O. (1994): *Duality, Ambiguity and Flexibility: A Proceptual View of Simple Arithmetic*. In: Journal for Research in Mathematics Education, vol. 26, 115-141.
- [12] A hazai tanártovábbképzés helyzete és egy lehetséges modellje /Continuative education for teachers in Hungary and a potential model/ In *Új Pedagógiai Szemle* 2000. február, Budapest.
- [13] Gyöngyösi E. (2002): *Continuing education for mathematics teachers of secondary education to use computers more effectively and to improve*

education. In: International Journal for Mathematics Teaching and Learning, March, 1-20.

[14] Gyöngyösi, E. (2004): *Using the computer to visualise graph-oriented problems*. Under publish in Teaching Mathematics and Computer Science.

[15] Gyöngyösi, E. (2002): *Mathematics competitions and their role in education*. Acta Acad. Paed. Agriensis, Sectio Mathematicae 26 (2002), 115-124.

[16] Kántorné, Kántor S. (1999), *Nemzetközi magyar matematikaversenyek*. Studium, Debrecen, 1999.

[17] Kántorné, Varga T. (2002): *Matematikai versenytessztektről*. In: Matematikatanár-képzés matematikatanár-továbbképzés. 6(2002), 87-105.

[18] Kaput, J.J. (1992): *Technology and mathematics education*. In: D.A. Grouws (ed.), Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning, p. 515-556, New York: Macmillan.

[19] Kaput, J.J. (1994): *Technology in mathematics education research: The first 25 years in the JRME*. In: Journal of Research into Mathematics Education 25(6), 676-684.

[20] Kovács A. (1997): *Válogatott érettségi-felvételi feladatok matematikából 1996-1996*. Tóth Könyvkereskedés Kft.

[21] Lakatos, I. (1998): *Bizonyítások és cáfolatok*. Typotex Kft., Budapest.

- [22] Mackie, D.M. (1992): *An evaluation of computer-assisted learning in mathematics*. In: International Journal of Mathematics Education in Science and Technology 23(5), 731-737.
- [23] Meissner H. (2003): *Procepts in Geometry*. In: European Research in Mathematics Education 11.
- [24] Piaget, J. (1985): *The Equilibrium of Cognitive Structures*. Harvard University Press, Cambridge MA.
- [25] Pólya, Gy. (1988): *Indukció és analógia*. Gondolat, Budapest
- [26] Róka S. (1992), *1000 feladat az elemi matematika köréből*. Typotex Kft, 1992.
- [27] Sfard, A. (1987): *Two conceptions of mathematical notions: operational and structural*. In: Proceedings of PME-XI, vol. III, 162-169, Momtréal, Canada.
- [28] Sfard, A. (1992): *Operational origins of mathematical objects and the quandary of reification – the case of function*. In: G. Harel and E. Dubinsky (eds.), *The Concept of Function: Aspects of Epistemology and Pedagogy*, MAA Notes, vol. 25, 59-84, Mathematical Association of America, Washington DC.

- [29] Skemp, R.R (1978): *A matematikatanulás pszichológiája*.
Sternberg, J. R., Ben-Zeev T. (1996): *A matematikai gondolkodás természete*. Vince kiadó, 41-63.
- [30] Tall, D. (1984): *Visualizing higher level mathematical concepts using computer graphics*. Mathematics Education Research Centre, Warwick University, U.K.
- [31] Tall, D. O. (1986): *'Building and Testing a Cognitive Approach to the Calculus Using Interactive Computer Graphics'*, Doctoral Thesis, University of Warwick.
- [32] Tall, D. O. (ed.) (1991): *Advanced Mathematical Thinking*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, NL.
- [33] Tall, D. O. , Thomas, M., Davis, G., Gray, E. M., Simpson, A. (2000): *What is the object of the encapsulation of a process?* To appear in: Journal of Mathematical Behavior.
- [34] Tall, D.O. (1993): *Diagnosing students' difficulties in learning mathematics*. In: Math. Educ. Sci. Technol., 1993, Vol. 24, No. 2, 209-222.

Publications of Erika Gyöngyösi

Publications

- [1] A hazai tanártovábbképzés helyzete és egy lehetséges modellje /Continuative education for teachers in Hungary and a potential model/ In *Új Pedagógiai Szemle* 2000. február, Budapest.
- [2] Continuing education for mathematics teachers of secondary education to use computers more effectively and to improve education. In: *International Journal for Mathematics Teaching and Learning* (2002) March., Exeter.
- [3] Mathematics Competitions and Their Role in Education. In *Acta Acad. Agriensis Sectio Mathematicae*, Eger, 29 (2002), 115-124.
- [4] How to improve mathematical education? Conference proceeding, 'Varga Tamás Napok', ELTE, Budapest, 2002
- [5] On some special Finsler Metrics in Psychometry by Sándor Bácsó, Erika Gyöngyösi, Ildikó Papp, Brigitta Szilágyi. In *Acta Acad. Agriensis Sectio Mathematicae*. Eger, 30 (2003), 23-30.
- [6] Using the computer to visualise graph-oriented problems. Accepted to publish in *Teaching Mathematics and Computer Science*.
- [7] A számítógéppel segített oktatás/Computer-aided teaching/ Accepted to publish in *Új Pedagógiai Szemle*

Presentations

- 03/10 Gyöngyösi, E: Continuing professional development programmes, 2nd conference of PhD students in mathematics education, City University, London, England.
- 02/11 Gyöngyösi, E: How to Improve Mathematics Education, Conference for the memory of Professor Tamás Varga, Eötvös Lóránt University of Arts and Sciences, Budapest, Hungary.
- 12/12 Gyöngyösi, E: Presentation on how the research work was carried out for the article 'Using the computer to visualise graph-oriented problems, Seminar at the University of Debrecen, Debrecen, Hungary.