Geometriai objektumok és jelentésük a Finsler geometriában

Geometric Quantities and Their Meanings in Finsler Geometry

doktori (PhD) értekezés tézisei

Xinyue Cheng

Debreceni Egyetem
Debrecen, 2005.

Geometriai objektumok és jelentésük a Finsler geometriában

Geometric Quantities and Their Meanings in Finsler Geometry

doktori (PhD) értekezés tézisei

Xinyue Cheng

Debreceni Egyetem
Debrecen, 2005.

Absztrakt

A Finsler geometriában több igen fontos geometriai objektum található. A **K** zászlógörbület a Riemann geometria szekcionális görbületének analógja. A **Ric** Ricci görbület egy másik fontos Riemann geometriai objektum. Ezen kívül több, nem Riemann geometriai objektummal rendelkezünk. A **C** Cartan torzió az elsődleges geometriai objektum. Több objektum származtatható a Busemann-Hausdorff térfogat formából, mint például a τ torzítás. A τ vertikális deffierenciálja a tangens téren megadja az $\mathbf{I} := \tau_{y^k} dx^k$ Cartan torziót. $\mathbf{C}, \tau$ és az **I** alapvető geometriai objektumok, amelyek meghatározzák a Riemann metrikákat a Finsler metrikák között. A **C** geodetikusok mentén vett differenciálja meghatározza a **L** Landsberg görbületet. A τ geodetikusok mentén vett horizontális deriváltja előállítja az úgynevezett $\mathbf{S} := \tau_{|k} y^k$ S-görbületet. Az **I** geodetikusok mentén vett horizontális deriváltját a $\mathbf{J} := \mathbf{I}_{|k} y^k$ Landsberg görbületnek hívjuk. A $G^i(x, y)$ geodetikus együtthatókból definiálhatjuk a **B** Berwald görbületet és az **E** fő Berwald görbületet, amelyek a következő képletekkel vannak megadva

$$B_j{}^i{}_{kl} := \frac{\partial^3 G^i}{\partial y^j \partial y^k \partial y^l}, \qquad E_{ij} := \frac{1}{2} B_m{}^m{}_{ij}.$$

Továbbá, definiálhatjuk a **D** Douglas görbületet **B**-ből és **E**-ből. Látható, hogy τ, **I**, **S** , **J**, **C**, **L** és **B**, **E**, **D** mind eltűnik Riemann metrikák esetén. A zászlógörbület szoros kapcsolatban van a nem Riemann tulajdonságokkal.

A projektív Finsler geometria nagyon fontos része a Finsler geometriának és a Ricci görbület egy fontos szerepet játszik a projektív Finsler geometriában. Z. Shen bebizonyította, hogy két egymáshoz projektív vonatkozásban lévő g és $\tilde{g}$ Einstein metrika egy n-dimenziós kompakt M sokaságon a következő tulajdonsággal rendelkezik: az Einstein konstansok ugyanazzal az előjellel rendelkeznek. Mindazonáltal, ha az Einstein konstansok negatívak és egyenlők, akkor a $g = \tilde{g}$. A 3-as fejezetben folytatjuk a Finsler terek projektív vonatkozásainak tanulmányozását és megadunk a Ricci görbületekre vonatkozóan egy összehasonlító tételt.

3.2. Tétel([ChSh1]) Legyen (M, g) egy teljes Finsler sokaság és $\tilde{g}$ egy másik Finsler metrika M-en, amelyik projektív vonatkozásban van g-vel. Tegyük fel, hogy

$$\widetilde{\mathbf{Ric}} \leq \mathbf{Ric}.$$

Ekkor a projektív megfeleltetés triviális. Továbbá, a $\tilde{g}$ horizontálisan párhuzamos g-vel ($\nabla \tilde{g} = 0$), és a Riemann görbületek egyenlők $\tilde{\mathbf{R}} = \mathbf{R}$.

Továbbá, a 3.2 Tételből Finsler metrikák prejektív vonatkozásaira az S-görbületek kapcsolatára tudunk rámutatni.

[Sh3] Z. Shen, Differential Geometry of Spray and Finsler Spaces, Kluwer Academic Publishers, 2001.

[Sh9] Z. Shen, Riemann-Finsler Geometry, World Scientific, Singapore, 2005.

Publications That Are Joint with the Dissertation

1. X. Chen:
   The Ricci curvature in Finsler projective geometry
   J. of Math. (PRC) (to appear)

2. X. Cheng:
   On projectively flat Finsler spaces
   Advances in Math. (China), **31**(4)(2002), 337-342.

3. X. Chen and Z. Shen:
   A comparison theorem on the Ricci curvature in projective geometry
   Annals of Global Analysis and Geometry, **23**(2)(2003), 141-155.

4. X. Chen and Z. Shen:
   Randers metrics with special curvature properties
   Osaka J. of Math. **40**(2003), 87-101.

5. X. Chen and Z. Shen:
   Finsler metrics with special curvature properties
   Periodica Math. Hungarica, **48**(1-2)(2004), 33-47.

6. X. Chen and Z. Shen:
   Projectively flat Finsler metrics with almost isotropic S-curvature
   Acta Mathematica Scientia (to appear)

7. X. Chen and Z. Shen:
   On Douglas metrics
   Publ. Math. Debrecen, **66**(3-4)(2005), 503-512.

8. X. Chen, X. Mo and Z. Shen:
   On the flag curvature of Finsler metrics of scalar curvature
   J. of London Math. Soc. **68**(2)(2003), 762-780.

References

[AIM] P. Antonelli, R. Ingarden and M. Matsumoto, The Theory of Sprays and Finsler Spaces with Applications in Physics and Biology, Kluwer Academic Publishers, 1993.

[BaMa1] S. *Bácsó* and M. Matsumoto, On Finsler spaces of Douglas type. A generalization of the notion of Berwald space, Publ. Math. Debrecen, **51**(1997),385-406.

[BaMa2] S. *Bácsó* and M. Matsumoto, Reduction theorems of certain Landsberg spaces to Berwald spaces, Publ. Math. Debrecen, **48**(1996), 357-366.

[Ch1] X. Chen, The Ricci curvature in Finsler projective geometry, J. of Math.(PRC)(to appear).

[Ch2] X. Cheng, On projectively flat Finsler spaces, Advances in Math. (China), **31**(4)(2002),337-342.

[ChSh1] X. Chen and Z. Shen, A comparison theorem on the Ricci curvature in projective geometry, Annals of Global Analysis and Geometry, **23**(2)(2003), 141-155.

[ChSh2] X. Chen and Z. Shen, Randers metrics with special curvature properties, Osaka J. of Math.**40**(2003), 87-101.

[ChSh3] X. Chen and Z. Shen, Finsler metrics with special curvature properties, Periodica Math. Hungarica, **48**(1-2)(2004), 33-47.

[ChSh4] X. Chen and Z. Shen, Projectively flat Finsler metrics with almost isotropic S-curvature, Acta Mathematica Scientia (to appear).

[ChSh5] X. Chen and Z. Shen, On Douglas metrics, Publ. Math. Debrecen, **66**(3-4)(2005), 503-512.

[CMS] X. Chen, X. Mo and Z. Shen, On the flag curvature of Finsler metrics of scalar curvature, J. of London Math. Soc. **68**(2)(2003), 762-780.

[Ma] M. Matsumoto, On C-reducible Finsler spaces, Tensor, N. S. **24**(1972), 29-37.

[Ra] A. Rapcsák, A., Über die bahntreaen Abbildungen metrisher Räume, Publ. Math. Debrecen, **8**(1961), 285-290.

[Sh2] Z. Shen, Lectures on Finsler Geometry, World Scientific, Singapore, 2001.

3.6. Tétel([ChSh1]) Legyen (M, g) egy teljes Finsler sokaság és $\tilde{g}$ egy másik Finsler metrika M-en, amely projektív vonatkozásban van g-vel. Tegyük fel, hogy a g és $\tilde{g}$ kielégítik a

$$\widetilde{\mathbf{Ric}} \leq \mathbf{Ric}, \qquad \tilde{\mathbf{S}} = \mathbf{S}$$

feltételeket. Ekkor a projektív vonatkozás g és $\tilde{g}$ között triviális. Továbbá, $\tilde{g}$ horizontálisan párhuzamos g-vel, és a Riemann görbületek megegyeznek $\tilde{\mathbf{R}} = \mathbf{R}$, és $dV_{\tilde{g}}$ skalárszorosa a dV_g-hez.

Ha a 3.2. Tételben az egyenlőtlenséget egyenlőségre cseréljük, akkor a következő tételt kapjuk.

3.9. Tétel([Ch1]) Legyen F egy olyan Finsler metrika az M sokaságon és $\tilde{F}$ egy másik Finsler metrika M-en, amelyek projektívek egymáshoz. Tegyük fel, hogy F és $\tilde{F}$ kielégítik

$$\widetilde{\mathbf{Ric}} = \mathbf{Ric}.$$

Ekkor F akkor és csak akkor teljes, ha $\tilde{F}$ is teljes. Ebben az esetben bármely közös $c(t)$ geodetikus mentén

$$\frac{F(\dot{c}(t))}{\tilde{F}(\dot{c}(t))} = konstans.$$

Továbbá, a projektív vonatkozásban lévő Riemann metrikákat is tanulmányozzuk, és vizsgáljuk a több speciális görbületi tulajdonságokkal rendelkező síkprojektív Finsler metrikákat a 6-ik és 7-ik fejezetben. Az egyik fontos probléma a Finsler geometriában a lokálisan síkprojektív Finsler metrikák tanulmányozása.

A másik fontos probléma a Finsler geometriában a skalárgörbületű Finsler metrikák jellemzése. Ez a probléma eddig még nem megoldott, sőt nem megoldott a konstans zászlógörbületekre sem. A 4-ik fejezetben azokat a skalárgörbületű Finsler metrikákat tanulmányozzuk, amikoris a F izotróp S-görbülettel rendelkezik vagy relatíve izotrópikus Landsberg görbülettel.

4.1. Tétel([CMS][ChSh3]) Legyen (M, F) egy n-dimenziós skalárgörbületű Finsler sokaság $\mathbf{K}(x, y)$ zászlógörbülettel. Tegyük fel, hogy

$$\mathbf{S} = (n+1)c(x)F(x, y).$$

Ekkor létezik egy $\sigma(x)$ skalárfüggvény M-en úgy, hogy

$$\mathbf{K} = 3\frac{c_{x^m} y^m}{F(x, y)} + \sigma(x).$$

Speciális esetként, $c = konstans$ akkor és csak akkor ha $\mathbf{K} = \mathbf{K}(x)$ skalárfüggvény M-en.

4.2. Tétel([CMS][ChSh3]) Legyen (M, F) egy n-dimenziós skalárgörbületű Finsler sokaság $\mathbf{K}(x, y)$ zászlógörbülettel. Tegyük fel, hogy

$$\mathbf{J} + c(x)F\mathbf{I} = 0.$$

Ekkor a $\mathbf{K}$ zászlógörbület és τ torzió eleget tesz a következő egyenlőségnek

$$\frac{n+1}{3}\mathbf{K}_{y^k} + \left(\mathbf{K} + c(x)^2 - \frac{c_{x^m}y^m}{F(x,y)}\right)\tau_{y^k} = 0.$$

(a) Ha $c(x) = konstans$, akkor létezik egy olyan $\rho(x)$ skalárfüggvény M-en úgy, hogy

$$\mathbf{K} = -c^2 + \rho(x)e^{-\frac{3\tau(x,y)}{n+1}}, \qquad y \in T_xM \setminus \{0\}.$$

(b) Tegyük fel, hogy F nem Riemann az M egy nyílt részhalmazán. Ekkor $\mathbf{K} = \mathbf{K}(x)$ akkor és csak akkor ha $\mathbf{K} = -c^2$ egy nempozitív konstans. Ebben az esetben $\rho(x) = 0$.

Tulajdonképpen, minden $F = \alpha + \beta$ skalárgörbületű Randers metrika (dimenzió $n > 2$) eleget tesz az $\mathbf{S} = (n+1)c(x)F$ vagy a $\mathbf{J} + c(x)F\mathbf{I} = 0$ egyenlőségeknek, ahol a $c(x)$ egy M-en lévő függvény. Ezáltal érdekesnek gondoljuk az 5-ik fejezetben azon Randers metrikák tanulmányozását, amelyek eleget tesznek a $\mathbf{J} + c(x)F\mathbf{I} = 0$ egyenlőségnek, továbbá ismertetjük a $\mathbf{K} = \lambda(x)$ és a $\mathbf{J} + c(x)F\mathbf{I} = 0$ zászlógörbületű Randers metrikák osztályozását.

5.3. Tétel([ChSh2][ChSh3]) Legyen $F = \alpha + \beta$ egy Randers metrika az M sokaságon. Egy $c = c(x)$ skalárfüggvényre M-en a következők ekvivalensek

(a) $\mathbf{J} + c(x)F\mathbf{I} = 0$;

(b) $e_{00} = 2c(\alpha^2 - \beta^2)$ és β zárt forma.

5.5. Tétel([ChSh2][ChSh3]) Legyn $F = \alpha + \beta$ egy Randers metrika az M n-dimenziós sokaságon, amely eleget tesz

1. $\mathbf{K} = \lambda(x)$, azaz $y \in T_xM$ független;
2. $\mathbf{J} + c(x)F\mathbf{I} = 0$ valamilyen $c(x)$ M-en lévő skalárfüggvényre.
   Ekkor $\mathbf{K} = constant = -c^2 \leq 0$. Továbbá, F vagy lokálisan Minkowski ($\mathbf{K} = -c^2 = 0$) vagy F a következő formulával rendelkezik

$$F = \Theta \pm \frac{<\mathbf{a}, y>}{1 + <\mathbf{a}, x>}$$

($\mathbf{K} = -c^2 = -1/4$) ahol Θ egy Funk metrikát jelent a $\mathbf{B}^n$ egységgömbbön és minden $\mathbf{a} \in \mathbf{R}^n$ esetén $|\mathbf{a}| < 1$.

(b) If $\mathbf{K} \equiv -c^2 + \frac{c_{x^m}y^m}{F}$ on Ω, then $c = constant$ and F is either locally Minkowskian ($c = 0$) or, up to a scaling, locally isometric to the metric

$$\Theta_a := \Theta(x, y) + \frac{< a, y >}{1+, a, x >} \qquad (c = \frac{1}{2})$$

or its reverse

$$\bar{\Theta}_a := \Theta(x, -y) - \frac{< a, y >}{1 + < a, x >} \qquad (c = -\frac{1}{2}),$$

where $a \in \mathbf{R}^n$ is a constant vector and $\Theta(x, y)$ is Funk metric on Ω.

The Douglas metrics form a rich class of Finsler metrics including locally projectively flat Finsler metrics. The class of Douglas metrics is also much larger than that of Berwald metrics. The study on Douglas metrics will enhance our understanding on the geometric meaning of non-Riemannian quantities. In section 8, we discuss Douglas metrics with relatively isotropic Landsberg curvature or isotropic mean Berwald curvature. Then we introduce the Finsler metrics of isotropic Berwald curvature. We prove an equivalence among the above metrics.

Theorem 8.8.([ChSh5]) Let (M, F) be a non-Riemannian Douglas manifold of dimension $n \geq 3$. Then the following are equivalent,

(a) F has relatively isotropic Landsberg curvature, $\mathbf{L} + cF\mathbf{C} = 0$;

(b) F has isotropic mean Berwald curvature, $\mathbf{E} = \frac{n+1}{2}cF^{-1}h$, where $c = c(x)$ is a scalar function on M.

Furthermore, we have the following

Theorem 8.9.([ChSh5]) Let F be a non-Riemannian Finsler metric on a manifold of dimension $n \geq 3$. The following are equivalent.

(a) F is of isotropic Berwald curvature;

(b) F is a Douglas metric with isotropic mean Berwald curvature;

(c) F is a Douglas metric with relatively isotropic Landsberg curvature.

Corollary 8.10. For a non-Riemannian Douglas metric F on a manifold of dimension $n \geq 3$. The following are equivalent.

(i) $\mathbf{L} + c(x)F\mathbf{C} = 0$;

(ii) $B^i_{jkl} = c(x)\left\{F_{jk}\delta^i_l + F_{jl}\delta^i_k + F_{kl}\delta^i_j + F_{jkl}y^i\right\}$;

(iii) $\mathbf{E} = \frac{n+1}{2}c(x)F^{-1}h.$

It is clear that Corollary 8.10 generalizes Bácsó and Matsumoto's result which says that, for a Douglas metric F, $\mathbf{L} = 0$ if and only if $\mathbf{B} = 0$ ([BaMa2]).

and the flag curvature of F is given by

$$\begin{aligned} K &= 3\left\{\frac{c_{x^k}(x)y^k}{F(x,y)} + c(x)^2\right\} + \mu \\ &= \frac{3}{4}\left\{\mu + 4c(x)^2\right\}\frac{F(x,-y)}{F(x,y)} + \frac{\mu}{4}. \end{aligned}$$

(B1) when $\mu = -1$, we can express $\alpha = \alpha_{-1}$. In this case,

$$c(x) = \frac{\lambda + < a, x >}{2\sqrt{(\lambda + < a, x >)^2 \pm (1 - |x|^2)}},$$

where $\lambda \in \mathbf{R}$ and $a \in \mathbf{R}^n$ with $|a|^2 < \lambda^2 \pm 1$.

(B2) when $\mu = 0$, we can express $\alpha = \alpha_0$. In this case,

$$c(x) = \frac{\pm 1}{2\sqrt{\kappa + 2 < a, x > + |x|^2}},$$

where $\kappa > 0$ and $a \in \mathbf{R}^n$ with $|a|^2 < \kappa$.

(B3) when $\mu = 1$, we can express $\alpha = \alpha_{+1}$. In this case,

$$c(x) = \frac{\varepsilon + < a, x >}{2\sqrt{1 + |x|^2 - (\varepsilon + < a, x >)^2}},$$

where $\varepsilon \in \mathbf{R}$ and $a \in \mathbf{R}^n$ with $|\varepsilon|^2 + |a|^2 < 1$.

We also study projectively flat Randers metrics with isotropic S-curvature in the case when the manifold M is closed. And then, in section 7, we study and characterize locally projectively flat Finsler with isotropic S-curvature and obtain the following

Theorem 7.1.([ChSh4]) Let $F = F(x,y)$ be a locally projectively flat Finsler metric on an open subset $\Omega \subset \mathbf{R}^n$. Suppose that F has isotropic S-curvature, $\mathbf{S} = (n+1)c(x)F$. Then the flag curvature is in the form

$$\mathbf{K} = 3\frac{c_{x^m}y^m}{F} + \sigma,$$

where $\sigma = \sigma(x)$ is a scalar function on Ω.

(a) If $\mathbf{K} \neq -c^2 + \frac{c_{x^m}y^m}{F}$ on Ω, then $F = \alpha + \beta$ is a projectively flat Randers metric with isotropic S-curvature $\mathbf{S} = (n+1)cF$;

Továbbá, tanulmányozni fogjuk az izotróp S-görbületű Randers metrikákat a 6-ik fejezetben. Először a következő tételeket nyerjük.

6.3. Tétel([ChSh2]) Legyen $F = \alpha + \beta$ egy Randers metrika az n-dimenziós M sokaságon. Egy M sokaságon megadott $c = c(x)$ skalárfüggvényre a következők ekvivalensek

(a) $\mathbf{S} = (n+1)cF$;

(b) $\mathbf{E} = (1/2)(n+1)c(x)F^{-1}h$;

(c) $e_{00} = 2c(\alpha^2 - \beta^2)$.

6.4. Tétel([ChSh2]) Legyen $F = \alpha + \beta$ egy Randers metrika a M n-dimenziós sokaságon. M-en megadott $c = c(x)$ skalárfüggvényre a következők ekvivalensek,

(a) $\mathbf{L} + c(x)F\mathbf{C} = 0$ (vagy $\mathbf{J} + cF\mathbf{I} = 0$);

(b) $\mathbf{S} = (n+1)cF$ és β zárt.

(c) $\mathbf{E} = (1/2)(n+1)c(x)F^{-1}h$ és β zárt.

Az jól ismert, hogy minden lokálisan síkprojektív Finsler metrika skalárgörbületű. Felhasználva a zászlógörbületre vonatkozó formulát osztályozzuk a lokálisan síkprojektív izotróp S-görbülettel rendelkező Randers metrikákat.

6.6. Tétel([CMS][ChSh3]) Legyen $F = \alpha + \beta$ lokálisan síkprojektív Randers metrika az n-dimenziós M sokaságon és μ jelölje az α metrika szekcionális konstans görbületét. Tegyük fel, hogy az S-görbület izotróp és $\mathbf{S} = (n+1)c(x)F$. Ekkor F a következőképpen osztályozható.

(A) Ha $\mu + 4c(x)^2 \equiv 0$, akkor $c(x) = konstans$ és $K = -c^2 \leq 0$.

(A1) ha $c = 0$, akkor F lokálisan Minkowski, ahol $K = 0$;

(A2) ha $c \neq 0$, akkor az F lokálisan izometrikus a következő Randers metrikához $\mathbf{B}^n \subset \mathbf{R}^n$ egységgömbön, ahol

$$F(x,y) = \Theta \pm \frac{< \mathbf{a}, y >}{1 + < \mathbf{a}, x >},$$

miközben $\mathbf{a} \in \mathbf{R}^n$ ahol $|\mathbf{a}| < 1$, és az F negatív konstans $K = -\frac{1}{4}$ zászlógörbülettel rendelkezik.

(B) Ha $\mu + 4c(x)^2 \neq 0$, akkor az F a következőképpen adott

$$F(x,y) = \alpha(x,y) - \frac{2c_{x^k}(x)y^k}{\mu + 4c(x)^2}$$

és az F zászlógörbülete a következőképpen adható meg

$$\begin{aligned} K &= 3\left\{\frac{c_{x^k}(x)y^k}{F(x,y)} + c(x)^2\right\} + \mu \\ &= \frac{3}{4}\left\{\mu + 4c(x)^2\right\}\frac{F(x,-y)}{F(x,y)} + \frac{\mu}{4}. \end{aligned}$$

(B1) ha $\mu = -1$, akkor az α-t az $\alpha = \alpha_{-1}$ fejezhetjük ki. Ebben az esetben a

$$c(x) = \frac{\lambda + < a, x >}{2\sqrt{(\lambda + < a, x >)^2 \pm (1 - |x|^2)}},$$

ahol $\lambda \in \mathbf{R}$ és $a \in \mathbf{R}^n$ miközben $|a|^2 < \lambda^2 \pm 1$.

(B2) ha $\mu = 0$, akkor az α-t az $\alpha = \alpha_0$ fejezhetjük ki. Ebben az esetben a

$$c(x) = \frac{\pm 1}{2\sqrt{\kappa + 2 < a, x > + |x|^2}},$$

ahol $\kappa > 0$ és $a \in \mathbf{R}^n$ miközben $|a|^2 < \kappa$.

(B3) ha $\mu = 1$, akkor az α-t az $\alpha = \alpha_{+1}$ fejezhetjük ki. Ebben az esetben a

$$c(x) = \frac{\varepsilon + < a, x >}{2\sqrt{1 + |x|^2 - (\varepsilon + < a, x >)^2}},$$

ahol $\varepsilon \in \mathbf{R}$ és $a \in \mathbf{R}^n$ miközben $|\varepsilon|^2 + |a|^2 < 1$.

A továbbiakban tanulmányozzuk az izotróp S-görbülettel rendelkező síkprojektív Randers metrikákat amikor az M sokaság zárt. Ekkor a 7-ik fejezetben tanulmányozzuk és jellemezzük az izotróp S-görbülettel rendelkező lokálisan síkprojektív Finsler tereket és a következőket kapjuk

7.1. Tétel([ChSh4]) Legyen $F = F(x, y)$ egy lokálisan síkprojektív Finsler metrika az $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ nyílt részhalmazon. Tegyük fel, hogy F izotróp S-görbülettel rendelkezik, ahol $\mathbf{S} = (n+1)c(x)F$. Ekkor a zászlógörbület a következő formulával rendelkezik

$$\mathbf{K} = 3\frac{c_{x^m}y^m}{F} + \sigma,$$

ahol $\sigma = \sigma(x)$ az Ω-n definiált skalárfüggvény.

(a) Ha $\mathbf{K} \neq -c^2 + \frac{c_{x^m}y^m}{F}$ az Ω-n, akkor $F = \alpha + \beta$ egy síkprojektív Randers metrika izotróp S-görbülettel, ahol $\mathbf{S} = (n+1)cF$;

Furthermore, we study Randers metrics with isotropic S-curvature in section 6. We first obtain the following theorems.

Theorem 6.3.([ChSh2]) Let $F = \alpha + \beta$ be a Randers metric on an n-dimensional manifold M. For a scalar function $c = c(x)$ on M, the following are equivalent

(a) $\mathbf{S} = (n+1)cF$;

(b) $\mathbf{E} = (1/2)(n+1)c(x)F^{-1}h$;

(c) $e_{00} = 2c(\alpha^2 - \beta^2)$.

Theorem 6.4.([ChSh2]) Let $F = \alpha + \beta$ be a Randers metric on an n-dimensional manifold M. For a scalar function $c = c(x)$ on M, the following are equivalent,

(a) $\mathbf{L} + c(x)F\mathbf{C} = 0$ (or $\mathbf{J} + cF\mathbf{I} = 0$);

(b) $\mathbf{S} = (n+1)cF$ and β is closed.

(c) $\mathbf{E} = (1/2)(n+1)c(x)F^{-1}h$ and β is closed.

It is known that every locally projectively flat Finsler metric is of scalar curvature. Using the obtained formula for the flag curvature in Theorem 4.1, we classify locally projectively flat Randers metrics with isotropic S-curvature.

Theorem 6.6.([CMS][ChSh3]) Let $F = \alpha + \beta$ be a locally projectively flat Randers metric on an n-dimensional manifold M and μ denote the constant sectional curvature of α. Suppose that the S-curvature is isotropic, $\mathbf{S} = (n+1)c(x)F$. Then F can be classified as follows.

(A) If $\mu + 4c(x)^2 \equiv 0$, then $c(x) = constant$ and $K = -c^2 \leq 0$.

(A1) if $c = 0$, then F is locally Minkowskian with $K = 0$;

(A2) if $c \neq 0$, then after a scaling, F is locally isometric to the following Randers metric on the unit ball $\mathbf{B}^n \subset \mathbf{R}^n$,

$$F(x, y) = \Theta \pm \frac{< \mathbf{a}, y >}{1 + < \mathbf{a}, x >},$$

where $\mathbf{a} \in \mathbf{R}^n$ with $|\mathbf{a}| < 1$, and F has negative constant flag curvature $K = -\frac{1}{4}$.

(B) If $\mu + 4c(x)^2 \neq 0$, then F is given by

$$F(x, y) = \alpha(x, y) - \frac{2c_{x^k}(x)y^k}{\mu + 4c(x)^2}$$

Theorem 4.2.([CMS][ChSh3]) Let (M, F) be an n-dimensional Finsler manifold of scalar curvature with flag curvature $\mathbf{K}(x, y)$. Suppose that

$$\mathbf{J} + c(x)F\mathbf{I} = 0.$$

Then the flag curvature $\mathbf{K}$ and the distortion τ satisfy

$$\frac{n+1}{3}\mathbf{K}_{y^k} + \left(\mathbf{K} + c(x)^2 - \frac{c_{x^m}y^m}{F(x,y)}\right)\tau_{y^k} = 0.$$

(a) If $c(x) = constant$, then there is a scalar function $\rho(x)$ on M such that

$$\mathbf{K} = -c^2 + \rho(x)e^{-\frac{3\tau(x,y)}{n+1}}, \qquad y \in T_xM \setminus \{0\}.$$

(b) Suppose that F is non-Riemannian on any open subset of M. Then $\mathbf{K} = \mathbf{K}(x)$ if and only if $\mathbf{K} = -c^2$ is a nonpositive constant. In this case, $\rho(x) = 0$.

In fact, all known Randers metrics $F = \alpha + \beta$ of scalar curvature (in dimension $n > 2$) satisfy $\mathbf{S} = (n+1)c(x)F$ or $\mathbf{J} + c(x)F\mathbf{I} = 0$, where $c(x)$ is a function on M. Motivated by such phenomena, in section 5, we study Randers metrics satisfying $\mathbf{J} + c(x)F\mathbf{I} = 0$ and classify Randers metrics with flag curvature $\mathbf{K} = \lambda(x)$ and $\mathbf{J} + c(x)F\mathbf{I} = 0$.

Theorem 5.3.([ChSh2][ChSh3]) Let $F = \alpha + \beta$ be a Randers metric on a manifold M. For a scalar function $c = c(x)$ on M, the following are equivalent

(a) $\mathbf{J} + c(x)F\mathbf{I} = 0$;

(b) $e_{00} = 2c(\alpha^2 - \beta^2)$ and β is closed.

Theorem 5.5.([ChSh2][ChSh3]) Let $F = \alpha + \beta$ be Randers metric on an n-dimensional manifold M satisfying

1. $\mathbf{K} = \lambda(x)$ is independent of $y \in T_xM$;
2. $\mathbf{J} + c(x)F\mathbf{I} = 0$ for some scalar function $c(x)$ on M.
   Then $\mathbf{K} = constant = -c^2 \leq 0$. Further, F is either locally Minkowskian ($\mathbf{K} = -c^2 = 0$) or in the form

$$F = \Theta \pm \frac{<\mathbf{a}, y>}{1+<\mathbf{a}, x>}$$

($\mathbf{K} = -c^2 = -1/4$) after a scaling, where Θ denotes the Funk metric on the unit ball $\mathbf{B}^n$ and $\mathbf{a} \in \mathbf{R}^n$ is a constant vector with $|\mathbf{a}| < 1$.

(b) Ha $\mathbf{K} \equiv -c^2 + \frac{c_{x^m}y^m}{F}$ az Ω-n, akkor $c = konstans$ és F vagy lokálisan Minkowski ($c = 0$) vagy lokálisan izometrikus

$$\Theta_a := \Theta(x, y) + \frac{<a, y>}{1+, a, x>} \qquad (c = \frac{1}{2})$$

metrikához vagy pedig a következő metrikához

$$\bar{\Theta}_a := \Theta(x, -y) - \frac{<a, y>}{1+<a, x>} \qquad (c = -\frac{1}{2}),$$

ahol $a \in \mathbf{R}^n$ egy konstans vektor és $\Theta(x, y)$ egy Funk metrika Ω-n.

A Douglas metrikák a Finsler metrikák egy igen gazdag osztálya, amely magában foglalja a síkprojektív Finsler metrikákat. A Douglas metrikák osztálya sokkal gazdagabb, mint a Berwald metrikáké. A Douglas metrikák tanulmányozása lehetőséget ad a nem Riemannian geometriai objektumok jellemzésére. A 8-ik fejezetben tanulmányozzuk azokat a Douglas metrikákat, amelyek relatív izotróp Landsberg görbülettel vagy izotróp Berwald görbülettel rendelkeznek. Vizsgálatainkban a következő tételeket kapjuk.

8.8. Tétel([ChSh5]) Legyen (M, F) egy nem Riemann Douglas sokaság, amelynek dimenziója $n \geq 3$. Ekkor a következők ekvivalensek,

(a) F relatív izotróp Landsberg görbülettel rendelkezik, ahol $\mathbf{L} + cF\mathbf{C} = 0$;

(b) F izotróp Berwald görbülettel rendelkezik, ahol $\mathbf{E} = \frac{n+1}{2}cF^{-1}h$, miközben $c = c(x)$ egy skalár függvény M-en.

Továbbá a következőket kapjuk

8.9. Tétel([ChSh5]) Legyen F egy nem Riemann Finsler metrika az M sokaságon, ahol a dimenzió $n \geq 3$. Ekkor a következők ekvivalensek.

(a) F egy izotróp Berwald görbülettel rendelkezik;

(b) F egy izotróp Berwald görbülettel rendelkező Douglas metrika;

(c) F egy relatív izotróp Landsberg görbülettel rendelkező Douglas metrika.

8.10. Következmény Egy nem Riemann F Douglas metrikára $n \geq 3$ dimenzió esetén a következők ekvivalensek.

(i) $\mathbf{L} + c(x)F\mathbf{C} = 0$;

(ii) $B^i_{jkl} = c(x)\left\{F_{jk}\delta^i_l + F_{jl}\delta^i_k + F_{kl}\delta^i_j + F_{jkl}y^i\right\}$;

(iii) $\mathbf{E} = \frac{n+1}{2}c(x)F^{-1}h$.

Világos, hogy a 8.10 következmény Bácsó és Matsumoto eredményének általánosítása, amely azt mondja, hogy egy F Douglas metrika esetén $\mathbf{L} = 0$ akkor és csak akkor, ha $\mathbf{B} = 0$ ([BaMa2]).

Abstract

There are several important geometric quantities in Finsler geometry. The flag curvature $\mathbf{K}$ is an analogue of the sectional curvature in Riemannian geometry. The Ricci curvature $\mathbf{Ric}$ is another kind of Riemannian geometric quantity. Besides, we have some so-called non-Riemannian geometric quantities. The Cartan torsion $\mathbf{C}$ is a primary quantity. There is another quantity which is determined by the Busemann-Hausdorff volume form, that is the so-called distortion τ. The vertical differential of τ on each tangent space gives rise to the mean Cartan torsion $\mathbf{I} := \tau_{y^k} dx^k$. $\mathbf{C}, \tau$ and $\mathbf{I}$ are the basic geometric quantities which characterize the Riemannian metrics among Finslers metrics. Differentiating $\mathbf{C}$ along geodesics gives rise to the Landsberg curvature $\mathbf{L}$. The horizontal derivative of τ along geodesics is the so-called S-curvature $\mathbf{S} := \tau_{|k} y^k$. The horizontal derivative of $\mathbf{I}$ along geodesics is called the mean Landsberg curvature $\mathbf{J} := \mathbf{I}_{|k} y^k$. From the geodesic coefficients $G^i(x,y)$, we can define the Berwald curvature $\mathbf{B}$ and the mean Berwald curvature $\mathbf{E}$ which are defined by

$$B_j{}^i{}_{kl} := \frac{\partial^3 G^i}{\partial y^j \partial y^k \partial y^l}, \quad E_{ij} := \frac{1}{2} B_m{}^m{}_{ij}.$$

Furthermore, we can define the Douglas curvature $\mathbf{D}$ by $\mathbf{B}$ and $\mathbf{E}$. Obviously, τ, $\mathbf{I}$, $\mathbf{S}$, $\mathbf{J}$, $\mathbf{C}$, $\mathbf{L}$ and $\mathbf{B}$, $\mathbf{E}$, $\mathbf{D}$ all vanish for Riemannian metrics. The Riemann curvature measures the shape of the space while the non-Riemannian quantities describe the change of the "color" on the space. It is found that the flag curvature is closely related to these non-Riemannian quantities.

Finsler projective geometry is an important part of Finsler geometry and the Ricci curvature plays an important role in the Finsler projective geometry. Z. Shen proved that for two pointwise projectively related Einstein metrics g and $\tilde{g}$ on an n-dimension compact manifold M, their Einstein constants have the same sign. In addition, if their Einstein constants are negative and equal, then $g = \tilde{g}$. In section 3, we continue to study pointwise projectively related Finsler metrics and give a comparison theorem on the Ricci curvatures.

Theorem 3.2.([ChSh1]) Let (M,g) be a complete Finsler manifold and $\tilde{g}$ another Finsler metric on M, which is pointwise projectively related to g. Suppose that

$$\widetilde{\mathbf{Ric}} \leq \mathbf{Ric}.$$

Then the projective equivalence is trivial. Further, $\tilde{g}$ is horizontally parallel with respect to g, $\nabla\tilde{g} = 0$ and the Riemann curvatures are equal, $\tilde{\mathbf{R}} = \mathbf{R}$.

Furthermore, we obtain an additional conclusion to Theorem 3.2 for projectively related Finsler metrics with the same S-curvatures.

Theorem 3.6.([ChSh1]) Let (M,g) be a complete Finsler manifold and $\tilde{g}$ another Finsler metric on M, which is pointwise projectively related to g. Suppose that both g and $\tilde{g}$ satisfy

$$\widetilde{\mathbf{Ric}} \leq \mathbf{Ric}, \qquad \tilde{\mathbf{S}} = \mathbf{S}.$$

Then the projective equivalence between g and $\tilde{g}$ is trivial. Further, $\tilde{g}$ is horizontally parallel with respect to g, the Riemann curvatures are equal, $\tilde{\mathbf{R}} = \mathbf{R}$, and $dV_{\tilde{g}}$ is proportional to dV_g.

If we modify the inequality in Theorem 3.2 into equality, we obtain the following theorem.

Theorem 3.9.([Ch1]) Let F be a Finsler metric on a manifold M and $\tilde{F}$ a another Finsler metric on M which is pointwise projectively related to F. Suppose that both F and $\tilde{F}$ satisfy

$$\widetilde{\mathbf{Ric}} = \mathbf{Ric}.$$

Then F is complete if and only if $\tilde{F}$ is complete. In this case, along any geodesic $c(t)$ of F or $\tilde{F}$,

$$\frac{F(\dot{c}(t))}{\tilde{F}(\dot{c}(t))} = constant.$$

Besides, we study pointwise projectively related Riemannian metrics. We also discuss the projectively flat Finsler metrics with some special curvature properties in sections 6 and 7. One of the important problems in Finsler geometry is to study and characterize locally projectively flat Finsler metrics.

Another important problem in Finsler geometry is to study and characterize Finsler metrics of scalar curvature. This problem has not been solved yet, even for Finsler metrics of constant flag curvature. In section 4, we disscuss the Finsler metrics of scalar curvature and partially determine the flag curvature when F is of isotropic S-curvature or relatively isotropic mean Landsberg curvature.

Theorem 4.1.([CMS][ChSh3]) Let (M,F) be an n-dimensional Finsler manifold of scalar curvature with flag curvature $\mathbf{K}(x,y)$. Suppose that

$$\mathbf{S} = (n+1)c(x)F(x,y).$$

Then there is a scalar function $\sigma(x)$ on M such that

$$\mathbf{K} = 3\frac{c_{x^m} y^m}{F(x,y)} + \sigma(x).$$

In particular, $c = constant$ if and only if $\mathbf{K} = \mathbf{K}(x)$ is a scalar function on M.