S Z A K D O L G O Z A T

Debrecen

2008

Debreceni Egyetem

Természettudományi Kar

Matematika Intézet

Matematikai tehetséggondozás a középiskolában

Témavezető: Dr. Pintér Ákos
Intézetigazgató

Készítette: Csegei Lászlóné
/Szül.:Szánkai Nikolett/

Tartalomjegyzék

I. Bevezető

Régebben a nemzeti boldogulás alapja a csodatévő gyerek felkutatása, támogatása volt, aki jeleskedett a művészetekben, retorikában, olvasásban, írásban. Úgy vélem, napjainkban a tehetséges gyerekekkel nem foglalkoznak megfelelőképpen, aminek oka lehet, hogy sokszor a tehetség felismerése hiányzik. A 21. században gyakran nyilvánítanak egy gyereket hiperaktívnak, ahelyett hogy megvizsgálnák viselkedésének okait. Abban mindannyian egyetértünk, hogy a tehetséget fejleszteni kell, hiszen a társadalom csak így léphet előre. A tehetséges tanulók fejlesztése leginkább differenciálással érhető el.

Dolgozatom témája az iskolán belüli, tanórán kívüli, azaz szakköri tehetséggondozás. A szakkör feladata a tanultak elmélyítése, kiegészítése, és az alkalmazási területek kiszélesítése. Célom az volt, hogy először röviden áttekintsük, milyen képességek jöhetnek szóba a jó matematikai képesség kialakulásában, és ezek hogyan befolyásolhatják a problémamegoldó gondolkodást, valamint bemutassuk, hogy az érdeklődő tanulóknak - például szakkör keretében - milyen egyéb érdekességeket, problémákat lehet bemutatni. A számelmélet alkalmas arra, hogy fejlesszük a tanulók problémalátó készségét, problémamegoldó gondolkodását.

A problémamegoldó gondolkodásnak jelentős szerepe van az oktatásban, de a hétköznapi életben is. Gondoljunk csak arra, hogy a ma emberének naponta szembe kell néznie problémaszituációkkal, amelyek egy része számelméleti alapon oldható meg. Fontos, hogy a tanulókat az iskolában is a probléma meglátására és a problémamegoldó gondolkodásra tanítsuk, neveljük.

A problémamegoldó gondolkodás fejlődése sok kérdést vethet fel a kutatók számára, amivel érdemes foglalkozni. Felvetődhet a kérdés, hogy mely képességek mennyire befolyásolják a problémamegoldó gondolkodás fejlődését, vannak-e külső befolyásoló tényezők.

A téma kutatásának nagy jelentősége van a gyakorlatban is, kiemelten az oktatásban, hiszen a pedagógusnak a legjobb eredmények elérése érdekében ismernie kell a tanulók képességeit, készségeit, és tudnia kell, hogy egy adott terület fejlesztéséhez melyik képességet kell fejleszteni, formálni. A kutatási eredmények összegzésével a kutatók jelentősen segítenék a tanárok munkáját.

II. A TEHETSÉG

1. A TEHETSÉG FOGALMA

A tehetség kibontakoztatása a tehetség felismerésével kezdődik. Az idők során három összetevőt emeltek ki és azonosították ezeket teljes egészében a tehetséggel. Az intelligenciát, a kreativitást és a motivációt.

1. Az intelligencia

Az első sikeres intelligencia teszt kidolgozása Alfred Binet és Theodor Simon nevéhez fűződik a 20. század elején. Nem sokkal ezután William Stren kidolgozta az intelligencia-hányados koncepcióját. Az IQ, az intelligencia-hányados egy viszonyszám. A mentális kor (amit a teszten elért eredmény mutat) és a valóságos kor (amit a korosztály átlagteljesítménye képvisel) hányadosa szorozva százzal. Az intelligencia eredetéről a mai napig két álláspont létezik. Az egyik álláspont, hogy az intelligenciát a környezet határozza meg. A másik szerint az öröklés a meghatározó. A magas intelligencia azonban nem feltétlenül jelent alkotóképes tehetséget, és a tehetséges emberek sem feltétlenül rendelkeznek toronymagas intelligenciával.

2. A kreativitás

A kreativitást alkotóképességként határozhatjuk meg. A kreativitás leginkább a folyamat, a produktum, a személyiség és a környezet oldaláról ragadható meg. Graham Wallas szerint a kreatív folyamat 4 szakaszból áll: előkészítés, lappangás, megvilágosodás, és igazolás.

Kreatív produktumnak tekinthető minden olyan ötlet3, elképzelés, művészi alkotás vagy tudományos elmélet, amely eredeti, újszerű és a probléma, a szituáció vagy a cél szempontjából jelentős.

Irving Taylor 5-féle kreativitást ír le:

- kifejező kreativitás: spontán kifejezés bármilyen formája elfogadható, tekintet nélkül az eredetiségre és az eredmény minőségére.
- produktív kreativitás: a hangsúly inkább a képességen van, semmint a spontaneitáson és az újszerűségen.
- feltaláló (inventív) kreativitás: a hangsúly a már meglévő dolgok újszerű felhasználásán van. Az egyén az előzőleg össze nem függő részek között új és szokatlan kapcsolatokat lát.
- újító (innovatív) kreativitás: új elvek, illetve elképzelések kerülnek kidolgozásra, aminek következtében egy egész művészeti vagy tudományág alapjai jelentősen módosulnak.

- teremtő kreativitás: egy teljesen új elv vagy felvetés születik meg, egészen fundamentális és elvont szinten.

A **kreatív személyiség** jellembzője: környezet ingereire való szokatlan érzékenység, önálló gondolkodás, nonkonform viselkedés, kitartás, ötlet gyárosok, magas tolerancia, kötöttségek kerülése. J. P. Guilford a kreativitás lényegét a divergens gondolkodásban jelölte meg. Ennek megfelelően a kreatív képességek: általános problémaérzékenység, fluencia, flexibilitás, originalitás, újrafogalmazás és elaboráció. Davis és Rimm szerint a kreatív gyerekek jellemzői a kíváncsiság, függetlenség, kitartás, flexibilitás, széles érdeklődési kör, eredetiség, humorérzék, kérdezősködés, magas energiaszint, érzékenység, türelmetlenség, élénk fantázia.

Williams szerint a kreatív embereket azért nehéz jellemezni, mert tele vannak paradoxonokkal: egyszerre nyitottak és zárkózottak, pedánsak és rendetlenek és így tovább. A kreativitást elősegítő környezet:

Torrance és mások nyomán a kreatív potenciál kioldását a következő környezeti tényezők segítik elő: nyitottság, pozitív mintaadás, útmutatás, segítségnyújtás, humorérzék, empátia.

Robert Fisher (1999) a felnőtt magatartás jellemző jegyeit így foglalja össze:

- Bátorító felnőtt: kivár; a gyermek gondolkodására koncentrál; önállóságot hangsúlyozza; aktívan figyel; mindenről úgy gondolja, hogy kivitelezhető; bíztatja a gyereket, hogy új ötletet próbáljon ki; elfogadja a gyermek döntéseit; elérhető; nyitott kérdéseket használ, értékeli a kreatív ötleteket; nem ítél gyorsan stb.
- Szorongást keltő felnőtt: figyelmetlen, erőszakos, helytelenítő, kigúnyolja a gyermeket, elutasító, rögzült cselekvéssorokhoz ragaszkodik, háttérbe szorítja a gyermeket, türelmetlen, nem ad visszajelzést, vallat, beavatkozik stb.

A tehetség fogalmára ma még nem találtak érvényes, általánosan elfogadott meghatározást a pszichológusok. A tehetséget nem lehet egyetlen kritérium alapján meghatározni. Joseph S. Renzulli alkotta meg a legismertebb többtényezős modellt. Elmélete három, a kreatív emberekre jellemző tulajdonságra épül. Az általa fontosnak tartott három tényező: átlag feletti intellektuális képesség, kreativitás, és a feladat iránti elkötelezettség.

2. A TEHETSÉG LÉLEKTANI ÉS PEDAGÓGIAI KÉRDÉSEI

A tehetség kérdései Magyarországon az első világháború éveiben, majd legintenzívebben a Horthy-korszak időszakában kerültek előtérbe. Kevés olyan pszichológiai és pedagógiai probléma váltott ki akkora érdeklődést, mint a tehetség értelmezése. Politikusok, írók, művészek, s a pszichológia és pedagógia képviselőin kívül a legkülönbözőbb tudományok művelői fejtették ki véleményüket. Nagyon sok javaslat hangzott el a tehetséges tanulók felkutatása, fejlesztése, védelme tekintetében, s kidolgozták a tehetséges tanulók oktatásának-nevelésének néhány tételét is. E javaslatok realizálását azonban alapvetően az tette lehetetlenné, hogy sem a pszichológia, sem a pedagógia nem tisztázta egyértelműen a tehetség fogalmát, kritériumait. E kérdésben nem csak Magyarországon, hanem Európa szerte élénk viták bontakoztak ki. A fogalmak és tételek tudományos kidolgozásához nagy segítséget nyújtott a kísérleti pszichológia módszereinek elterjedése. Jelentős szerepet vállalt e munkából Nagy László, így nagy érdeme, hogy megfogalmazódott, kitisztult e fontos pszichológiai és pedagógiai probléma legalapvetőbb elmélete.

Nagy László tehetségelmélete abban tér el a legtöbb kortárs felfogásától, hogy ő e kérdést többszörösen is több tényezővel összefüggésben közelíti meg. 1918 decemberében dolgozta ki a magyar közoktatás reformtervezetét. Ebben felvázolta az általa helyesnek tartott iskolarendszert az óvodától az egyetemig. „Az iskolában mindenütt oly pedagógiai berendezések létesítendők, amelyek tekintetbe veszik a gyermekek közötti egyéni különbségeket, intelligencia fokát, talentumokat, … „ –írja az általános alapelvekben. Az iskolarendszer szerves részévé teszi a rendszeres és tudományos eljárásokkal végzett tehetségvizsgálatokat. A jó pedagógiai hatás kritériumaként jelöli meg, hogy a gyermeket produktív erőkifejtésre késztessük.

A tehetség problémáját széleskörű elméleti alapra építette Nagy László, ugyanakkor aktívan vette ki részét a tehetséges tanulókkal kapcsolatos gyakorlati feladatokban is. Nevéhez fűződik a tehetséges gyermekek rajzkiállításának megszervezése 1922-ben. A gyermekrajzok pszichológiai vizsgálata tette lehetővé számára, hogy megállapítsa az eltéréseket a tehetséges és az átlagos képességekkel rendelkező tanulók között. E különbségeket a következő pontokban foglalta össze.

1. A tehetséges gyermekek valamennyien keresztülmennek azokon a fokozatokon, amelyeket az átlagos képességűek fejlődésében is tapasztalunk. A különbség abban van, hogy a tehetséges gyermekek gyorsabban fejlődnek az átlagos képességűeknél.

2. A tehetséges gyermekek elég korán olyan magas fokát érik el a képességeknek, ahová az átlagos gyermekek sohasem jutnak el.
3. A tehetséges gyermekek jellemző sajátossága a művészi beleélés. Ők nem elégednek meg a külső benyomások vagy a belső átélések objektív reprodukciójával, hanem igyekeznek kifejezni saját képzeletük eredményét is, s így önmagukat is belevetítik ábrázolásukba.
4. A tehetséges tanulóknál megfelelő összhang alakul ki az ösztönszerű és tudatos alkotóerő között. Ez utóbbi segítségével válogat impressziói között, tervez és kivitelez, és folytonos önkritikával dolgozik.
5. A tehetséges gyermekek rajzai feltűnően egyéni jellegűek, mivel semmiféle sablont nem tartanak magukra nézve irányadónak.

Megállapította, hogy a tehetséges gyermekekben sokkal inkább feltalálható az önképzésre való törekvés, a környezeti benyomások és az oktatás meghatározó szerepe.

Az iskola fontos feladata, hogy minden egyes tanulóban fokozza az egyéni munkára való képességet. Minden egyes tanulóban fejlesszük azt az egyéni értéket, ami benne van, s a lehető legtökéletesebb munka előállítására képesíti.

3. A TEHETSÉG ÁLTALÁNOS JELLEMZŐI

Kognitív jellemzők

- Szimbólumok és szimbólumrendszerek használata: A tehetséges gyerekek kiválóan bánnak a számokkal és a betűkkel. Gyakran tesznek a matematikai problémák kapcsán bonyolultabb analitikus és összegző megjegyzéseket.
- Szokatlanul jó memória: A tehetségeseknek nagy és jól felépített a memóriájuk. A tényeket és eseményeket részletesen megjegyzik, és vissza tudják mondani.
- Koncentrációs kapacitás: A tehetséges gyerek jó koncentrációs képességekkel rendelkezik, és sokáig tud egy bizonyos problémával foglalkozni.
- Fejlődési előnyök: Szellemi és fizikai fejlettségük nincsen egyensúlyban. Pszichológiai szempontból a tehetségesek bizonyos fejlődési előnyökkel rendelkeznek.
- Korai érdeklődés a beszéd iránt: A tehetséges gyermek megelőzi kortársait a nyelvfejlődésében. Nagyobb a szókincsük és hamarabb tanulnak meg olvasni.

- Kíváncsiság, tanulásvágy: A gyerek kíváncsiságából adódó miért- kérdésekre kapott válaszok segítik a gyermeket a világ megértésében és személyes fejlődésében.
- Önálló tanulásra való hajlam: A tehetséges gyermekek jobban szeretnek egyedül dolgozni, és egyedül felfedezni dolgokat.
- Sokrétű érdeklődés, kreativitás: Az a képesség, ami segítségével valaki egyéni ötleteket, gondolatokat, termékeket, fogalmakat tud előállítani.

Affektív jellemzők

- Igazságérzet: a tehetségeseknek fejlett az igazságérzete.
- Humorérzék: képes a világot könnyűszerrel venni, ami pozitív énképhez is vezet.
- Érzelmi intenzitás: a tehetségeket érő gondok, az intenzív érzelmi élmények túlérzékenységet válthatnak ki.
- Az élet és halál értelmének felfogása: intellektuálisan már képesek megérteni, de érzelmileg még nehéz felfogniuk.
- Maximalizmus: túl sok energiát fektetnek bele, hogy mindent tökéletesen végezzenek el.
- Sok energia: több feladatot képesek rövidebb idő alatt elvégezni, mint társaik.
- Kötődés: nem csak emberekhez, de szakmai tevékenységekhez is erősen kötődnek.

Az a tény, hogy bizonyos jegyek nem jellemzőek egy gyerekre, még nem jelenti azt, hogy a gyermek nem tehetséges. Másrészt az a tény, hogy bizonyos jegyek felismerhetők, még nem jelenti, hogy a gyermek feltétlenül tehetséges. Ezen jegyek jelenléte a tehetség első indikátora lehet, de határozott választ csak a szükséges azonosítási folyamat után kaphatunk.

A tehetséges diákokkal való pedagógiai tevékenységnek három mozzanatát szokás elkülöníteni:

- tehetségkoncepció kialakítása,
- tehetségazonosítás,
- tehetséggondozás.

A tehetségkoncepció kialakítása azért elsődleges, mert ha nem rendelkezünk megfelelő koncepcióval arról, hogy kik a tehetségesek, akkor nem tudjuk őket azonosítani. A tehetségkoncepció a tehetség meghatározása, körülírása. Célja: a tehetségazonosító, -gondozó tevékenységnek viszonyítási alapot és egyben értelmezési keretet nyújt.

III. ERŐSSÉGEK ÉS GYENGE PONTOK AZ ISKOLAI TEHETSÉGGONDOZÁSBAN – EURÓPAI ÖSSZEVETÉSBEN

1. Kiindulási pontok

A tehetséggondozás mai hazai és európai helyzete sok szállal kötődik egymáshoz. l987-ben alakult meg az Európai Tehetségtanács (European Council for High Ability – ECHA), s ez jelentős lendületet adott az iskolai tehetséggondozás fejlődésének itthon is. Ez a Tanács kutatókat és gyakorlati szakembereket (elsősorban pedagógusokat) tömörít, s kétévenként rendezendő konferenciáival, kiadványaival hidat épített Európa országai között. 1987-ben megalakult az ECHA Magyarországi Tagozata is, összetoborozva a hazai szakembereit a tehetséggondozásnak, majd ebből 1989-ben létrejött a Magyar Tehetséggondozó Társaság (MTT), amely kb. ötszáz fős tagságával jelentős szerepet vállal a hazai tehetséggondozás korszerű formáinak elterjesztésében. Ezzel egyidőben zajlott a rendszerváltás, amely ugyancsak kedvező helyzetet teremtett az iskolai tehetséggondozás fejlődéséhez: nagyobb lett a mozgástere az iskoláknak a tehetségprogramok indításában, s anyagiakban is több forrásból teremthettek alapot, mint a korábbi években. Az új oktatási törvény, a vonatkozó kormány- és miniszteri rendeletek is jobban ráirányították a figyelmet a tehetséggondozás fontosságára, mint azt megelőzően. Mindennek az lett az eredménye, hogy a kilencvenes évek közepétől jelentősen gazdagodtak az iskolai tehetséggondozás formái hazánkban, s folyamatos nemzetközi együttműködés is kialakult ennek hátterében. Ennek eredményeként az ezredfordulótól kezdve több, Európa sok országát átfogó összehasonlító vizsgálat történt konferenciákon, illetve kiadványokban. Ezek közül az alábbiak a legfontosabbak, s ezek adják a kiindulási pontjait előadásomnak.

2. Erős oldalak a Magyar tehetséggondozásban

a. **Törvényi szabályozás**
b. **Speciális tehetségfejlesztés**
c. **versenyek**
d. **gazdagítás tanórán kívül**

a. AZ ISKOLAI TEHETSÉGGONDOZÁS TÖRVÉNYI SZABÁLYOZÁSA

Változatos a kép Európában: több uniós tagországban nincs külön törvényi szabályozása a tehetséggondozásnak. Ebben a tekintetben elöl járnak a volt szocialista országok, ezek többségében a rendszerváltást követően az új oktatási törvényekben, rendeletekben külön is említést tesznek a tehetséges tanulókkal való foglalkozásról. Így van ez Magyarországon is, törvény és rendeletek is vannak, amelyek irányt mutatnak a tehetséggondozáshoz:

- 1993. ÉVI LXXXIX. TÖRVÉNY A KÖZOKTATÁSRÓL (többször módosítva)

A tehetséggondozás nemcsak általános szinten kerül említésre az Oktatási Törvényben, de konkrét formáinak felsorolása támpontul szolgál közvetlenül is a megvalósításhoz. Ez kiemelkedően példamutató más országok szabályozásával összevetve is. Részletek kiemelése nélkül meg kell említeni az iskolai tehetséggondozás szempontjából fontos további dokumentumokat is:

- A KORMÁNY 63./2000. RENDELETE A NEMZETI ALAPTANTERV MÓDOSÍTÁSÁRÓL;
- A 28./2000. OM RENDELET A KERETTANTERVEK KIADÁSÁRÓL, BEVEZETÉSÉRŐL ÉS ALKALMAZÁSÁRÓL;
- A KORMÁNY 111./1997. RENDELETE A TANÁRI KÉPESÍTÉS KÖVETELMÉNYEIRŐL;
- AZ OKTATÁSI MINISZTER 29./1997. RENDELETE A „TEHETSÉGFEJLESZTÉSI SZAKÉRTŐ” POSZTGRADULIS KÉPZÉS KÉPESÍTÉSI KÖVETELMÉNYEIRŐL.

Ezek egy része már módosításra került, de az új változatok mindegyikében is több olyan tételt találunk, amelyek kiemelt fontosságúnak tartják az iskolai tehetséggondozást, illetve a háttértényezők (szubjektív és objektív) megteremtésének szükségességét.

b. SPECIÁLI TEHETSÉGFEJLESZTÉS

Világszerte ismertek a magyar tehetséggondozás kiváló eredményei a zenében, sportban, matematikában, természettudományokban stb. Ezekben is van ugyan némi ingadozás, de összességében európai mércével mérve is magas szintű ez a munka Magyarországon.

c. VERSENYEK

A **versenyek** ugyancsak hatékony formái a tehetséggondozásnak, ezeknek gazdag formái alakultak ki Magyarországon, nyugodtan mondható, hogy Európa „bajnokai" vagyunk ezen a területen. Nagy hagyományai vannak a tantárgyi tanulmányi versenyeknek, ezek jelentős részét az Oktatási Minisztérium, illetve háttérintézményei szervezik. Az utóbbi évtizedben gombamód szaporodtak a regionális, illetve helyi versenyek is, ezek teljesen átszövik az iskolai tehetségfejlesztést, s jelentősen hozzájárulnak a tehetségek felfedezéséhez is. Egyetlen ponton lehet kérdőjelet tenni: milyen típusú feladatmegoldásokban versenyeznek a tanulók? A problémát az jelenti, hogy gyakran a reprodukáló tudást mérik, nem pedig a gyakorlati problémahelyzetben történő ismeret-alkalmazást, e területen kell előbbre lépni.

d. GAZDAGÍTÁS TANÓRÁN KÍVÜL

Európa-szerte sokféle hatékony formáját alkalmazzák az iskolai tehetséggondozásnak, ezek a **gazdagítás** jelenségkörébe tartoznak. Alapvetően két nagy csoportra bonthatók: egyfelől jól elkülöníthetők a rendes tanórára épülő szervezeti formák (tagozat, emelt szint, nívó csoport stb.), másfelől a tanórán kívüli lehetőségek (szakkör, önképzőkör, blokk stb.)

A tanórán kívüli programokban jól állunk itthon, több olyan is található, amely nem tantárgyhoz kötődik, ezek lehetővé teszik a nem intellektuális képességek felfedezését és fejlesztését is. Összevetve más európai országokkal a magyarországi helyzetet, az állapítható meg, hogy nálunk jóval gazdagabb a tanórán kívüli tehetséggondozási formák rendszere, mint az uniós tagországokban, ott most kezdik egyre szélesebb körben alkalmazni ezeket a formákat. A volt szocialista országok közül Lengyelországban, Romániában, Csehországban szintén gazdag rendszere működik ezeknek.

3. Gyenge pontok a Magyar tehetséggondozásban

Szemben az előzőekkel, jóval egyenetlenebb a hazai kép az alábbi területeken, mindenütt vannak kívánnivalók. Mind a hat területet áttekintjük vázlatosan, s ez támpontul szolgálhat a továbbfejlesztéshez.

a. TEHETSÉGKERESÉS, AZONOSÍTÁS
b. KOMPLEX TEHETSÉGFEJLESZTŐ PROGRAMOK
c. ÚJ SZEREPEK A TEHETSÉGFEJLESZTÉSBEN
d. CSALÁDDAL VALÓ EGYÜTTMŰKÖDÉS
e. GYORSÍTÁS
f. SZAKEMBEREK TOVÁBBKÉPZÉSE

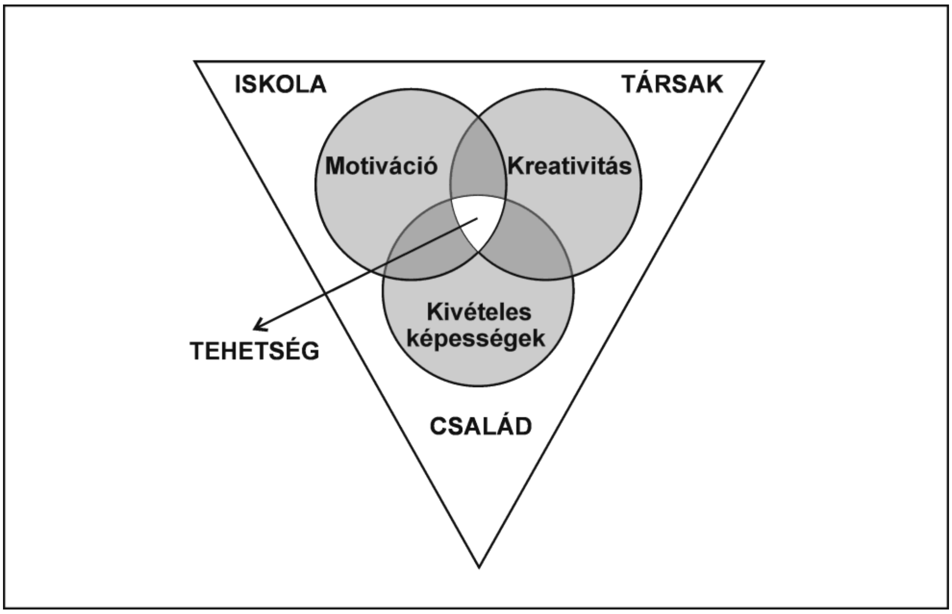
a. TEHETSÉGKERESÉS, AZONOSÍTÁS

A tehetséggondozó programok akkor hatékonyak, ha azokba olyan gyerekek kerülnek be, akik adottságaik alapján valóban odavalók. Ezért van különös jelentősége a tehetség azonosításának. A magyarországi adatok egyrészt azt mutatják, hogy sokszínű az alkalmazott módszerek tárháza, hiszen minden főbb típus megtalálható az iskolák gyakorlatában. Másrészt azonban a gyakoriságban nagy eltérések mutatkoznak: sok iskolában a kreativitás-vizsgálat nincs napirenden, az énkép-vizsgálat és a tanulási stratégiák vizsgálata pedig alig fordul elő. A korszerű tehetség-értelmezésben és -fejlesztésben az utóbbiak is kiemelkedő szerepet játszanak, ezek nélkül hiányos alappal végezzük a tehetséggondozást. Pozitívumként kell megemlíteni, hogy több iskolában alkalmazzák a sokoldalú információgyűjtést. Az egyenetlenség mögött minden bizonnyal nem a pedagógusok szándékos kitérő magatartása áll, valószínűleg nem kaptak megfelelő muníciót ezen módszerek alkalmazásához sem a pedagóguspályára való felkészítésük során. A sikeres munkának feltétele e hiányosságok pótlása is.

Főbb alapelvek a tehetség-azonosítás továbbfejlesztéséhez:

- Az azonosításhoz a Mönks-Renzulli-féle modell ad kapaszkodókat , minden összetevőre figyelnünk kell!
- A ki nem bontakozott, szunnyadó tehetség rejtekezik, gyakran ezért is nehéz felismerni: óvatosnak kell lennünk a „nem tehetséges gyerek” titulussal!
- A képesség és a teljesítmény két különböző dolog: gyakori az alulteljesítő tehetséges tanuló, ugyanakkor a jó tanulmányi eredmény nem mindig rejt tehetséget!
- Minél több forrásból szerzünk a gyerekre vonatkozó információkat teljesítményéről, képességeiről, annál megbízhatóbb az azonosítás.

A MÖNKS-RENZULLI-FÉLE MODELL



b. KOMPLEX TEHETSÉGFEJLESZTŐ PROGRAMOK

Gyakran egyoldalúak a magyar iskolai tehetségfejlesztő programok, elsősorban a képességek fejlesztésére koncentrálnak, holott a korszerű fejlesztéshez másfajta feladatok is vannak. Ezekhez az alábbiak adnak támpontot.

A képességek mellett a **személyiség-tényezők** formálásának is nagyon fontos szerepet kell kapnia a programokban.

A komplex programok **összetevői:**

- a tehetséges gyerek erős oldalának fejlesztése,
- a tehetséges gyerek gyenge oldalának fejlesztése (Csaknem minden tehetséges gyereknél van ilyen, s ez akadályozhatja az erős oldal kibontakozását, például alacsony önértékelés, biztonságérzet hiánya, stb.),
- megfelelő „légkör” megteremtése (kiegyensúlyozott társas kapcsolatok pedagógusokkal , fejlesztő szakemberekkel és a társakkal),
- szabadidős, lazító programok, amelyek biztosítják a feltöltődést, pihenést.

c. ÚJ SZEREPEK A TEHETSÉGFEJLESZTÉSBEN

Az **egyéni mentorok** rendszere is elterjedt világszerte – elsősorban középiskolás korban. Ezek szerepe a speciális fejlesztésben jelentős: a mentor a tanuló iskolán kívüli lehetőségeit is szervezi, s irányítja tartalmilag az egyéni fejlesztő programot a különösen tehetséges tanulóknál. Az uniós tagországok középiskoláiban csaknem mindenütt találunk mentor-tanárokat, akiknek csak az előbbi a feladata, normális órákat nem is tartanak. Ezen a területen jelentős lemaradásunk van, pedig az intenzív egyéni fejlesztés nélkül nem lehet hatékony a tehetséggondozás!

A **tanácsadás** rendszerének formái is szükségesek a hatékony munkához. Ez több tartalmi elemet is magába foglal: tanácsadás a tanuló számára, az őt tanító pedagógus számára és a szülő számára is. Végezheti e munkát pszichológus és „tehetségfejlesztési szakértő" is A pszichológusok számát növelni kell az iskolákban – nemcsak a hatékony tehetséggondozás érdekében! –, s el kellene érni, hogy minden iskolában legyen legalább egy „tehetségfejlesztési szakértő" végzettségű pedagógus, aki a tanácsadói szerepet teljes vagy rész-munkaidőben végzi. Európa fejlett országaitól jelentősen le vagyunk maradva ezen a téren, de más országok is (Lengyelország, Csehország, Szerbia) megelőznek bennünket.

d. CSALÁDDAL VALÓ EGYÜTTMŰKÖDÉS

A családdal való hatékony együttműködés nélkül nehéz érdemi eredményeket elérni a tehetséggondozásban. Sok tehetséggondozó iskola működik Magyarországon, ahol ez realizálódik, ugyanakkor sok iskolában jelentős hiányosságok vannak. A továbblépéshez az alábbi szempontok szolgálnak segítségül.

Az együttműködés főbb tartalmi szempontjai:

- célok tisztázása, egyeztetése, azonos követelményrendszer kialakítása,
- a fejlődés közös értékelése,
- pedagógus, más fejlesztő szakember tanácsa, módszertani segítségnyújtása,
- tehetség, képesség felismerése,
- a gyerek érzelmi támogatása, elfogadás, odafigyelés,
- közös programok szervezése,
- pályaválasztás irányítása.

e. GYORSÍTÁS

A *gyorsítás fogalma*: a tehetséges tanulók általában gyorsabban fejlődnek, mint társaik, s ezért biztosítani kell részükre azokat a kereteket, amelyek lehetővé teszik az egyéni tempóban /gyorsabban/ való haladást. Sokféle formáját alakult ki a gyorsításnak, itt a legfontosabbakat soroljuk fel.

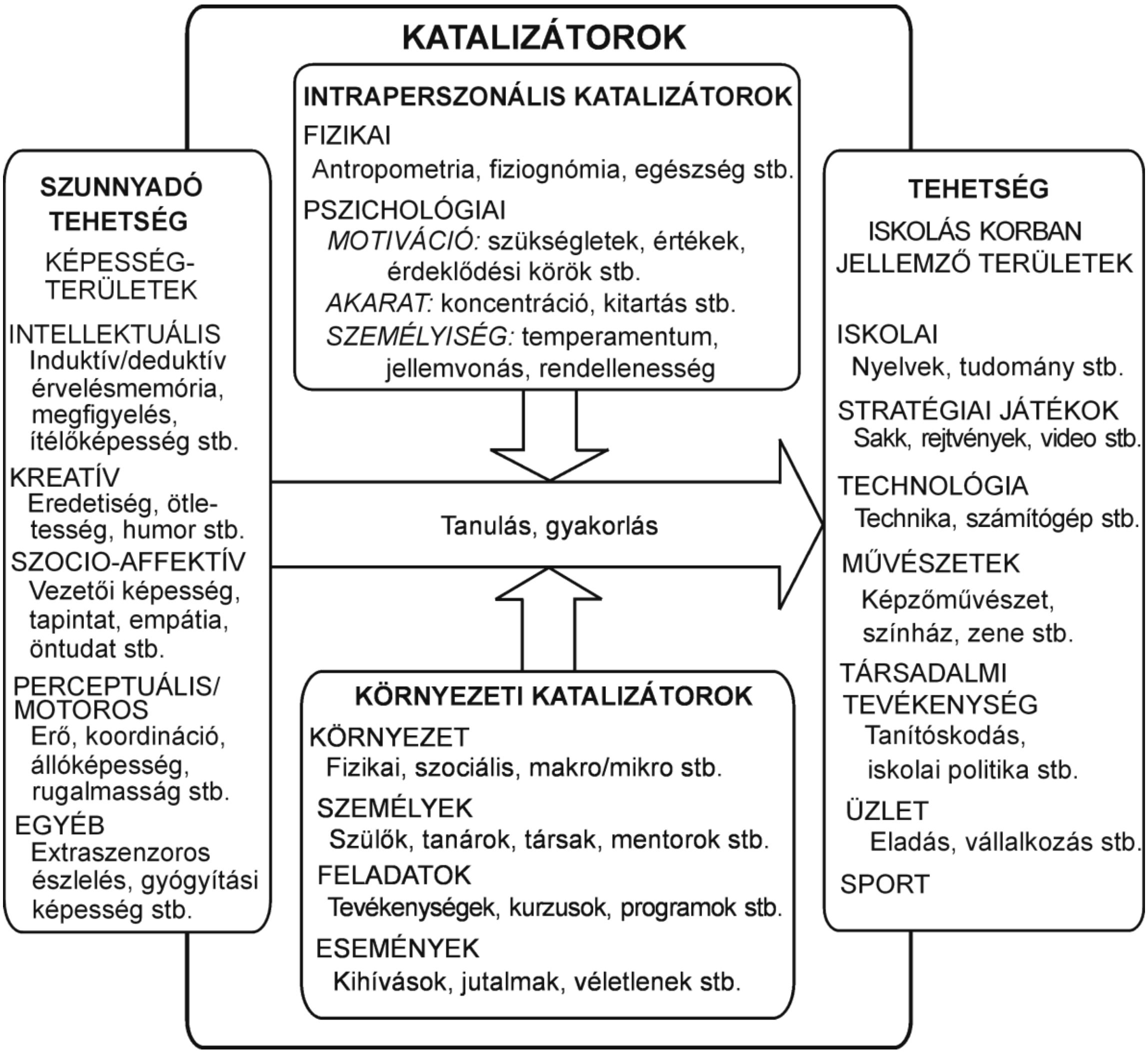
- Korábbi iskolakezdés
- Osztály-átléptetés
- D-típusú osztályok
- Egyetemi tanulmányok idő előtti elkezdése

A **gyorsítás** is elterjedt forma világszerte a tehetséggondozásban: ez azt a lehetőséget foglalja magába, hogy a normális tempót meghaladva járja végig a gyerek az iskolai oktatási rendszert. Leggyakrabban az osztályugrás fordul elő, de az is kínálkozik, hogy a tanuló egy-egy tárgyból halad gyorsabban a saját korosztályánál. Nálunk ezek a formák érdemben nem működnek, elvétve fordulnak elő – alapítványi iskoláknál. Ennek elsősorban a magyar oktatási rendszer merevsége az oka. Európa fejlett országaiban a gyorsítás eszközrendszere széles körben fordul elő, itt van mit tanulni tőlük

f. SZAKEMBEREK TOVÁBBKÉPZÉSE

Magyarországon a nyolcvanas évek második felétől egyre több iskola, nevelési intézmény indított speciális vagy komplex tehetségfejlesztő programokat. Ezzel együtt nőtt a pedagógusok részéről az az igény, hogy több információt kapjanak a hétköznapi gyakorlati tevékenységhez, hiszen az alapképzésük során nem készítették fel őket e speciális munkára. Sok tehetség-témájú előadást kértek az iskolák, majd megindult az intenzív (120 órás) tanfolyamon folyó képzés, s 1997 szeptemberében megjelent a művelődési és közoktatási miniszter 29./1997. MKM-rendelete a tehetségfejlesztési szakirányú továbbképzési szak képesítési követelményeiről. A képzés az év szeptemberében meg is indult a Kossuth Lajos Tudományegyetemen (ma Debreceni Egyetem), a Pedagógiai-Pszichológiai Tanszék szervezésében. Az oklevélben szereplő szakképzettség pontos neve a rendelet szerint: *„tehetségfejlesztési szakértő”*. Újabb előrelépést jelentett, hogy 1999-ben a KLTE megalapította a pedagógus szakvizsgaprogramot, s 2000 szeptemberében el is indította a képzést *„tehetség és fejlesztése”* elnevezéssel (41/1999./X. 13. OM Rendelet). Ez a két képzés Budapesten az Eötvös Loránd Tudományegyetemen is folyik. Ma már több mint ezer pedagógus szerzett ilyen diplomát, de ez még mindig kevés, el kellene érni, hogy minden iskolában legyen minimum egy ilyen kiképzett pedagógus.

A sokak által megfogalmazott tételt világosan mutatja a Gagné-féle ábra: az iskolának, a pedagógusnak és minden fejlesztő szakembernek kiemelt szerepe és felelőssége van a tehetségek felkutatásában és kibontakoztatásában. A fejlesztés speciális ismeretekre épül, ezt posztgraduális formában lehet megszerezni jelenleg. Folyamatban van azonban a „tehetségfejlesztő tanár” képzési program megalapítása is, amely a graduális képzésben (MA) teszi lehetővé a jövőben a felkészülést.!



A Gagné-féle ábra

IV. A MATEMATIKAI TEHETSÉGEK FŐBB TULAJDONSÁGAI

- Kitartás és feladat-elkötelezettség a problémamegoldásban.
- Fáradhatatlan, ha matematikáról van szó.
- Csodálatba ejtik a tények, formulák stb.
- Keresi a problémákat.
- Kiváló emlékezete van számokra, formulákra, viszonyokra, megoldási módokra stb.
- Rugalmas a gondolkodása a matematikai struktúrák és minták terén.
- Könnyen fordít a gondolkodásán.
- Kiemelkedően jó vizuális képzelet jellemzi.
- Problémák és absztrakt viszonyok vizualizációjának képessége mutatkozik.
- A részleteken felülemelkedik, az összetettet egyszerűbbé teszi.
- A problémát gyorsan formalizálja és általánosítja.
- Hasonló problémákra már a közbülső logikai lépések kihagyásával reagál.
- Egyszerű, egyenes és elegáns megoldásokat keres.
- Verbális problémákat is egyenletben tud megfogalmazni és kezelni.

A matematikai tehetséggondozás lehetőségei

Magyarországon régi és jól működő hagyomány a tehetséges gyerekek kiválasztása és a tehetséggondozás. Az alábbi lehetőségek állnak a matematikai tehetséggondozás rendelkezésére:

a. AZ ISKOLARENDSZEREN BELÜLI SPECIÁLIS OSZTÁLYOK

Kimondottan tehetséggondozási céllal létesültek. Körülbelül 20 gimnáziumban működnek speciális matematika tagozatos osztályok, 25-30 fős osztálylétszámmal, ami évi 500-600 gyerek bekapcsolódását jelenti. Ezekben az osztályokban az alapóraszám kétszeresében tanulnak igen magas szinten, saját tanterv szerint matematikát. A speciális osztályba komoly felvételi vizsgával lehet bekerülni.

b. A KÖZÉPISKOLAI MATEMATIKAI LAPOK (KÖMAL)

A tehetséges gyerekek megtalálásában és kiválasztásában rendkívül fontos szerepet játszik ez a több mint 100 éves folyóirat. Magyarország Európában másodikként indított iskolásoknak szóló matematikai folyóiratot (az első Franciaország volt 1875-ben). A KöMaL az 1892-es indulás óta folyamatosan megjelenik. Minden szám tartalmaz egy feladatmegoldási rovatot, minden hónapra 6-8 problémát tűz ki, különböző korosztályoknak címezve. Ehhez a versenyhez mindenki csatlakozhat, nincsenek belépési feltételek. A beküldött megoldásokat 12 évestől 18 évesig életkor szerint besorolják, és minden korosztály számára külön verseny folyik. Számos híres magyar matematikus karrierje indult a KöMaL feladatmegoldó versenyével. A későbbi számokban rendszeresen megjelennek a legjobb megoldások.

A KöMaL feladatok sikeres megoldói rendszeresen találkozóra vagy nyári feladatmegoldó táborba kapnak meghívást.

A KöMaL kiegészítéseként egy másik folyóirat is létezik, a 8-14 éves tanulóknak szóló Abacus. Ez olyan matematikai problémákat, játékokat, kísérleteket tartalmaz, amelyek megoldásait beküldhetik a tanulók, kiértékelésre a szerkesztőségbe, ezzel vesznek részt a pontversenyben.

c. TEHETSÉGGONDOZÓ TÁBOROK

Mind a felső tagozatos, mind a középiskolás korosztály számára évente rendszeresen szerveznek több napos matematikai feladatmegoldó táborokat.

d. A MATEMATIKAI VERSENYEK RENDSZERE

A verseny, mint a matematika oktatás eszköze száz év óta jelen van Magyarországon. Egyrészt a tehetségkutatás eszköze, másrészt növeli a tanulás és tanítás hatékonyságát. A versenyfeladatok kiválasztásának alapelvét a következőképpen fogalmazhatjuk meg:

A kitűzött feladat a versenyző tudásának mélységét és ne a mennyiségét mérje. Vagy a probléma megértése, vagy a megoldáshoz vezető út késztessen gondolkodásra. Úgy kell megválasztani a feladatot, hogy a kitűzött időn belül megoldható legyen.

Hazai versenyeink - más országoktól eltérően - igen korai életkorban indulnak. Számos helyi levelező versenyt szerveznek kilenc éveseknek. Ezeken a versenyeken havonta 6 feladatot tűznek ki.

Az országos szervezésű versenyek közül a 12-14 éveseknek szól a háromfordulós Varga Tamás verseny. Sokáig ez volt az egyetlen ingyenes versenye az általános iskolás korosztálynak, néhány éve azonban ez is nevezési díjas lett.

A 9-14 évesek számára szervezi a TIT a Kalmár László versenyt.

A 15-16 éves középiskolásoknak szól az iskolatípusok szerint három kategóriában és két fordulóban központilag szervezett Arany Dániel verseny.

Az Országos Középiskolai Tanulmányi Versenyen a 17-18 évesek vehetnek részt, amelyet három kategóriában, két, illetve három fordulóban szerveznek. A versenyek feladatai és eredményei minden évben megjelennek a KöMaL-ban is.

A 15-18 éves korosztály számára indítják a Kenguru tesztkérdéses versenyt. A határon túli magyar kisebbségnek nyújt lehetőséget a Nemzetközi Magyar Matematika Verseny, amelyre a világ bármely részéről indulhatnak magyarul beszélő tanulók, négy korcsoportban.

Végül a legjobbak részt vehetnek a Nemzetközi Matematikai Olimpián, ahol a magyar diákok rendszeresen kimagasló teljesítményt nyújtanak.

e. A MATEMATIKAI VERSENYEK SZEREPE

A versenyek pedagógiai szerepét sokan vitatják. A fiatalok azért is szeretnek versenyezni, mert kihívást jelent számukra az, hogy összemérhetik erejüket. A versenyre való felkészülés lehetőséget ad a matematika érdekesebb részeinek megismerésére, valamint ösztönzőleg hathat a tanulásra is. Kiváló matematikusok nyilatkoztak úgy, hogy számukra sokat jelentettek a versenyek, mert a versenyekre való felkészülés szélesítette látókörüket. A versenyzés lehetőséget ad a diákoknak arra, hogy tudásuk szintjét az ország hasonló korú diákjainak a tudásával hasonlítsák össze.

Létezik az előző véleménnyel szembenálló kijelentés is, miszerint sok kiváló matematikus nem rendelkezik jó versenyeredményekkel: a versenyeken ért kudarc a tanulóknak egy életre elveheti a kedvét a matematikától. Az életben gyorsabban boldogulnak azok a matematikusok, akik a matematikának csak egy bizonyos területével foglalkoznak, s fiatal koruk óta csak egy témában szereznek jártasságot, mert így korábban tudnak tudományos eredményeket elérni, mintha minden területet egyszerre próbálnak megismerni. Negatív eredményekhez vezethet a versenyek túlhalmozása is, sok tehetség kallódhat el ennek eredményeképp.

A versenyeztetés, mint minden pedagógiai tevékenység nagy körültekintést igényel. Nagyon fontos, hogy megértsék azt a tanulók, hogy a versenyeket inkább játéknak kell tekinteni, mint vizsgának. Aki a versenyen jó eredményt ér el, lehet belőle kiváló matematikus, de abból is lehet az, aki nem rendelkezik jó versenyeredményekkel. Jó eredmények eléréséhez azonban a jó felkészültségen túl versenyezni kell a rendelkezésre álló idővel is, meg kell birkózni az ebből adódó idegfeszültséggel, tudni kell gyorsan gondolkozni. Van, akinek ez örömet okoz, de nem mindenki rendelkezik ezekkel a tulajdonságokkal. De a siker hiányából még nem lehet a tényleges tudásra következtetni.

A versenyeken a felkészültség, a tudás és a tehetség mellett a szerencsének is van szerepe.

V. FELADATOK,KÖVETELMÉNYEK,KOMPETENCIÁK

1. Gondolkodási módszerek, halmazok, logika, kombinatorika, gráfok
2. Számelmélet, algebra
3. Függvények, az analízis elemei
4. Geometria, koordinátageometria, trigonometria
5. Valószínűség-számítás, statisztika

1. GONDOLKODÁSI MÓDSZEREK, HALMAZOK, LOGIKA, KOMBINATORIKA, GRÁFOK

Alapvető követelmények, kompetenciák:

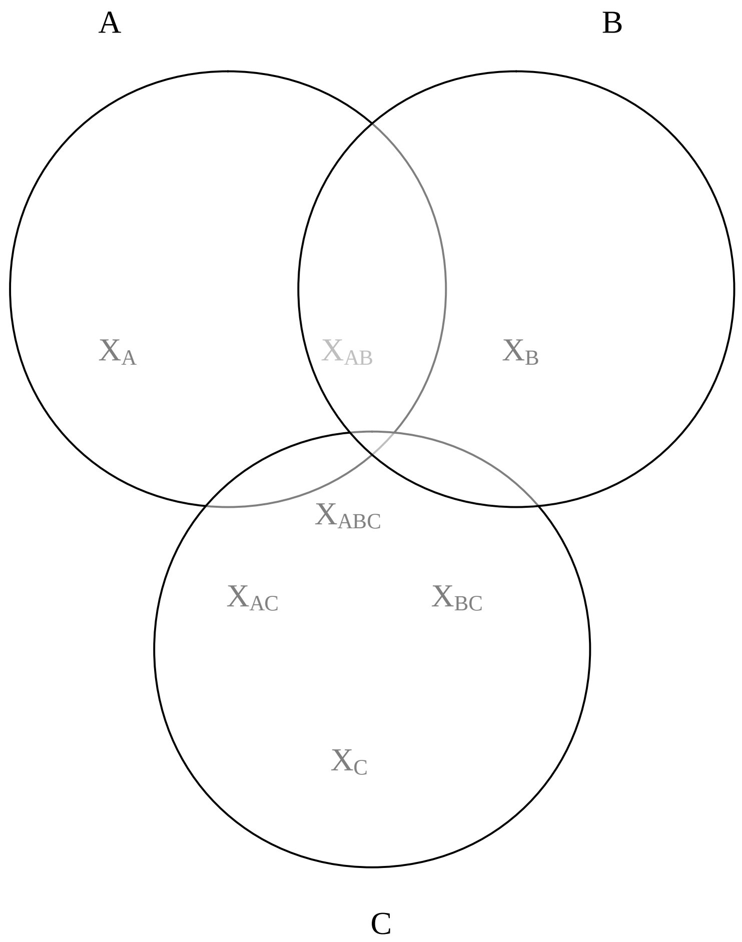
- Legyen képes a tanuló adott szövegben rejlő matematikai problémákat észrevenni, szükség esetén matematikai modellt alkotni, a modell alapján számításokat végezni, és a kapott eredményeket értelmezni.
- Legyen képes kijelentéseket szabatosan megfogalmazni, azokat összekapcsolni, kijelentések igazságtartalmát megállapítani.
- Lássa az eltéréseket, illetve a kapcsolatokat a matematikai és a mindennapi nyelv között.
- A matematika minden területén és más tantárgyakban is tudja alkalmazni a halmaz fogalmát, illetve a halmazműveleteket.
- Legyen jártas alapvető kombinatorikus gondolatmenetek alkalmazásában, s legyen képes ennek segítségével gyakorlati sorbarendezési és kiválasztási feladatok megoldására.
- Ismerje a gráfok jelentőségét, sokoldalú felhasználhatóságuk néhány területét, és legyen képes további felhasználási lehetőségek felismerésére a gyakorlati életben és más tudományágakban.

<u>Feladatok:</u>

1.1 Egy matematikai tanulmányi versenyen három feladatot tűztek ki: A-t, B-t és C-t. 25 olyan tanuló akadt, akiknek mindegyike megoldott legalább egy feladatot. Azok között a tanulók között, akik A-t nem tudták megoldani, kétszer annyian voltak olyanok, akik megoldották B-t, mint akik C-t oldották meg. Csak az A feladatot 1-gyel több tanuló oldotta meg, mint ahányan a többiek voltak, akik szintén megoldották A-t. A csupán egy feladatot megoldó tanulók fele nem tudta megoldani A-t. Hány tanuló oldotta meg csak a B feladatot?

Megoldás:

Szemléltessük körökkel azoknak a tanulóknak a halmazát, akik az A, a B, a C feladatot megoldották, a két, ill. három feladatot megoldók halmazának a körlemezek közös részei felelnek meg.



Jelölje X_A, X_B, X_C azoknak a tanulóknak a számát, akik csak az A, csak a B, ill. csak a C feladatot oldották meg, X_{AB} azokét, akik csak A-t és B-t, X_{ABC}, akik mindhárom feladatot, stb. A feladat szerint:

$$X_A + X_B + X_C + X_{AB} + X_{BC} + X_{AC} + X_{ABC} = 25$$

$$X_B + X_{BC} = 2(X_C + X_{BC})$$

$$X_A = 1 + X_{AB} + X_{AC} + X_{ABC}$$

$$X_A + X_B + X_C = 2(X_B + X_C)$$

Ebből az egyenletrendszerből kell X_B pozitív egész értékét meghatározni. Áttekinthetőbbé válnak egyenleteink, ha az ismeretleneket egy oldalra rendezzük:

$X_A + X_B + X_C + X_{AB} + X_{BC} + X_{AC} + X_{ABC} = 25$

$X_B - 2X_C - X_{BC} = 0$

$X_A - X_{AB} - X_{AC} - X_{ABC} = 1$

$X_A - X_B - X_C = 0$

Vonjuk ki az első három összegzésből a negyedik kétszeresét:
$4X_B + X_C = 26$

(2)-ből következik, hogy $X_B - 2X_C = X_{BC} \geq 0$, tehát $X_B \geq 2X_C$, ezért (5)-ből

$$26 = 4\, X_B + X_C \geq 8X_C + X_C = 9\, X_C$$

tehát

$$X_C \leq 26/9$$

És így X_C lehetséges értékei 0, 1 és 2. $X_C = 0,\ 1$ esetén (5)-nek nincs X_B-ben egész megoldása, tehát az egyetlen lehetőség: $X_C = 2$ és ebből $X_B = 6$, a B feladatot hatan oldották meg.

1.2 Egy könyvtárban egy napon több olvasó fordul meg, s mindegyikük csak egyszer jár aznap könyvtárban. Bármely három olvasó között van két olyan, aki a könyvtárban találkozik egymással. Bizonyítsuk be, hogy meg lehet adni két időpillanatot úgy, hogy bármely olvasó a két időpillanatnak legalább egyikében a könyvtárban van.

Megoldás:

Tekintsük azt a pillanatot, mikor az első olvasó eltávozik, és azt a pillanatot, mikor az utolsó megérkezik. Ha valaki e két időpillanat egyikében sem volna ott, az csak úgy lehetne, ha az első eltávozása után érkezne - hiszen előtte nem távozhat - és az utolsó érkezése előtt távozna el - , hiszen utána nem érkezhet. Ez esetben azonban ő, az első távozó és az utolsó érkező nem találkozhat, ami ellentmond a feltevésnek

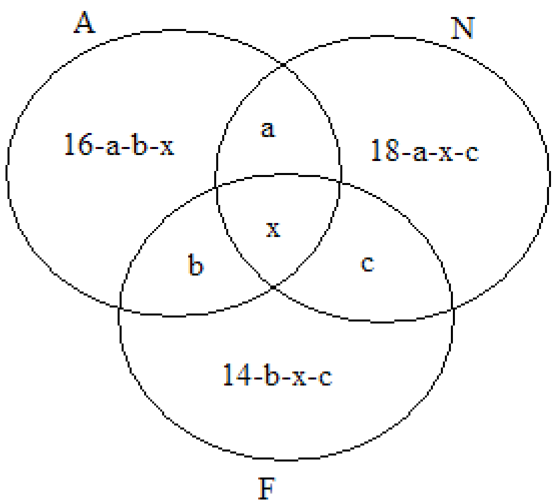
1.3 Egy harmincfős osztályban a diákok három nyelven tanulhatnak: angolt, németet vagy franciát. Angolul 16-an, németül 18-an, franciául 14-en tanulnak. Tudjuk, hogy mindenki tanul legalább egy nyelvet, és 16 tanuló pontosan két nyelvet tanul. Hányan tanulják mind a három nyelvet?

I. Megoldás:

Adjuk össze az egy-egy nyelvet tanulók számát: 16 + 18 + 14 = 48. Ebben az összegben a pontosan két nyelvet tanulók száma kétszer, a mindhárom nyelvet tanulók száma háromszor szerepel. Vonjuk ki a két nyelvet tanulók számát: 48 – 16 = 32. Ez a szám tehát az osztálylétszámánál a mindhárom nyelvet tanulók számának kétszeresével több. Tehát 1 tanuló van az osztályban, aki mindhárom nyelvet tanulja.

II. Megoldás:

16 tanuló pontosan két nyelvet tanul: $a + b + c = 16$



$30 = 16 – a – b – x + 18 – a – x – c + 14 – b – x – c + a + b + c + x$

$30 = 48 – 2x – a – b – c$

$30 = 48 – 2x – (a+b+c)$

$30 = 32 – 2x$

$\underline{x = 1}$

1.4 Három testvér matekversenyre készül. Minden feladat megoldása után annyi csokit kapnak édesanyjuktól és édesapjuktól is, ahány feladattal addig végeztek. Mindhármuknak van befejezett feladata. Hány példát oldott meg a legügyesebb gyerek, aki a következőnél több mint egy feladattal többet oldott meg, ha este a szemetesben 92 boci papírt találtak és az összes csoki elfogyott?

Megoldás:

Egy- egy gyerek az első feladta után 2, a második megoldása után már 2+4 = 6, a harmadik után már 2+4+6 = 12, … csokit ehetett. Így a 92-t a 2, 6, 12, 20, 30, 42, 56, 72, … számok összegeként kell előállítani. Mivel mindhárom gyerek dolgozott, így három szám összegéről van szó.

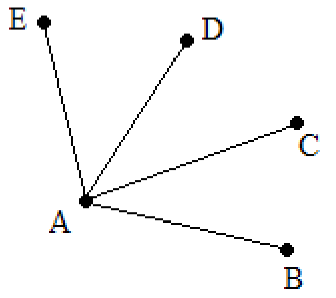
$$92 = 6 + 30 + 56 \quad \text{vagy} \quad 92 = 20 + 30 + 42$$

Mivel az első legügyesebb a következőnél több mint egy feladattal többet oldott meg, ezért az első eset a jó. Ekkor a győztes 7 feladatot oldott meg.

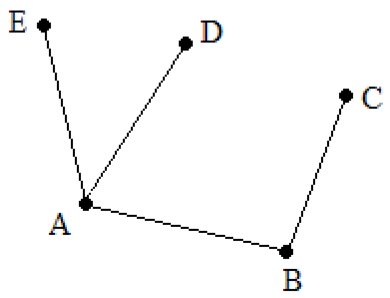
1.5 Adott 5 város, nincs közöttük három vagy több egy egyenesre eső. Ha négy egyenes szakasszal úgy szeretnénk összekötni őket, hogy mindegyik elérhető legyen bármelyikből (kereszteződés esetén alul- vagy felüljárót építünk), akkor hány különböző hálózatot építhetünk?

Megoldás:

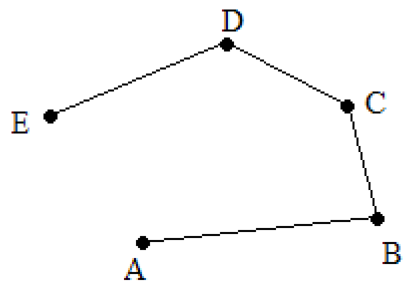
Az öt város bármelyike lehet csomópont, így öt ilyen hálózat van:



Ha A-t választjuk csomópontnak, akkor $4 \cdot 3$ különböző úthálózat van (B helyébe 4, C helyébe 3-féle választással). „A" szerepét átveheti a többi város is, így: $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ ilyen hálózat építhető:



A kezdő és végpontok kiválasztása $\binom{5}{2} = 10$ féleképpen történhet. Ezek rögzítésekor a 3 különböző csomópontot 6-féleképpen köthetjük össze. Így minden utat pontosan egyszer számoltunk össze: $6 \cdot 10 = 60$



Összesen: 5+60+60=125

2. SZÁMELMÉLET, ALGEBRA

Alapvető követelmények, kompetenciák:

- Legyen képes a tanuló betűs kifejezések értelmezésére, ismerje fel használatuk szükségességét, tudja azokat kezelni, lássa, hogy mi van a „betűk mögött”.
- Ismerje az egyenlet és az egyenlőtlenség fogalmát, megoldási módszereit (pl. algebrai, grafikus, közelítő).
- Legyen képes egy adott probléma megoldására felírni egyenleteket, egyenletrendszereket, egyenlőtlenségeket,
- egyenlőtlenség-rendszereket.
- Tudja az eredményeket előre megbecsülni, állapítsa meg, hogy a kapott eredmény reális-e.
- Az emelt szinten érettségiző diáknak legyen jártassága az összetettebb algebrai átalakításokat igénylő feladatok megoldásában is.

Feladatok:

2.1 Az a és b természetes számok legnagyobb közös osztója 1. Igazoljuk, hogy ekkor az $a + b$ és $a^2 + b^2$ számok legnagyobb közös osztója 1 vagy 2!

Megoldás:

Jelöljük az $a + b$ és az $a^2 + b^2$ legnagyobb közös osztóját d-vel. Mivel $d \mid a + b$ és $d \mid a^2 + b^2$, azért $d \mid ((a + b)^2 - a^2 - b^2)$ is fennáll, azaz $d \mid 2ab$.

Ha d-nek és a-nak lenne az 1-nél nagyobb közös osztója, mondjuk m, akkor $m \mid d$ és $d \mid a + b$ miatt $m \mid a + b$, ekkor viszont $m \mid a$, $m \mid a + b - a$ teljesülne, ami ellentmondana annak, hogy a és b relatív prímek. Ugyanígy látható be, hogy d és b legnagyobb közös osztója is 1.

A $d \mid 2ab$ oszthatóság azt jelenti, hogy d minden prímtényezője legalább akkora kitevővel szerepel 2ab-ben, mint d-ben. Azonban sem d-nek és a-nak, sem d-nek és b-nek nincs közös prímtényezője, így csak az lehetséges, hogy $d \mid 2$, azaz $d = 1$ vagy 2, s éppen ezt kellett bizonyítani. A $d = 2$ eset akkor áll fönn, ha a és b is páratlan.

2.2 Határozzuk meg az összes olyan tízes számrendszerbeli kétjegyű számot, amelyik azzal a tulajdonsággal rendelkezik, hogy a szám és a számjegyek felcserélésével kapott szám összege teljes négyzet!

Megoldás:

A kétjegyű számok $\overline{xy}$ alakúak a 10-es számrendszerben, ahol $x \neq 0$. Az ilyen alakú számok értéke $10x + y$. A feladat feltétele alapján $10x + y + 10y + x = 11(x + y)$ teljes négyzet, tehát $11(x + y) = z^2$, ahol z pozitív egész szám. Egyenletünk alapján a bal oldal osztható 11-gyel, ezért z^2 is osztható 11-gyel, de ekkor szükségképpen z is, hiszen 11 prímszám, és z^2 prímtényezős felbontásában csak úgy szerepelhet a 11 prímtényező, ha z-ben is előfordul. Ekkor viszont z^2 11^2 = 121-gyel is osztható, mert egy négyzetszám minden prímtényezőt páros kitevőn tartalmaz. Ha viszont z^2 11^2 – nel osztható, akkor $11(x + y)$ is. Ez pedig csak úgy lehetséges, hogy $x + y$ is osztható 11-gyel. De x és y számjegyek, így $1 \leq x + y \leq 18$, ezért $x + y$ egyetlen lehetséges értéke csak 11 lehet. A következő táblázat x és y lehetséges értékeit tartalmazza az $x + y = 11$ összefüggésnek megfelelően:

X	2	3	4	5	6	7	8	9
Y	9	8	7	6	5	4	3	2

A megfelelő kétjegyű számok ekkor rendre 29, 38, 47, 56, 74, 83, 92. Mind a nyolc kétjegyű szám meg is felel a feladat feltételeinek, hiszen mindegyik esetben az $\overline{xy} + \overline{yx}$ összeg értéke $121 = 11^2$.

2.3 Milyen n egész számokra prímszám $n^4 + 4$?

Megoldás:

A következő azonosságot írhatjuk fel:

$$n^4 + 4 = n^4 + 4n^2 + 4 - 4n^2 = (n^2 + 2)^2 - (2n)^2 = (n^2 - 2n + 2)(n^2 + 2n + 2)$$

Innen kapjuk, hogy $n^4 + 4$ akkor és csak akkor prím, ha a $n^2 - 2n + 2$ és $n^2 + 2n + 2$ számok közül az egyik 1, a másik pedig prím.

- Ha $n^2 – 2n + 2 = 1$, $n = 1$, így $n^2 + 2n + 2 = 5$ prím.
- Ha $n^2 + 2n + 2 = 1$,$n = - 1$, ekkor $n^2 – 2n + 2 = 5$ prím.

Tehát két olyan egész szám létezik, amelyekre $n^4 + 4$ prím, ezek a + 1 és a – 1.

2.4 Határozzuk meg az összes olyan n pozitív egész számot, amelyre $n^5 + 1$ osztható $n^3 + 1$ – gyel!

I. megoldás:

Az oszthatóság fennállása azt jelenti, hogy az $(n^5 + 1):(n^3 + 1)$ hányados a keresendő n értékekre egész szám, viszont a nem megfelelő n értékekre két szomszédos egész szám közé esik. Alakítsuk a hányadost így:

$$\frac{n^5+1}{n^3+1} = \frac{n^2(n^3+1)-(n^2-1)}{n^3+1} = n^2 - \frac{n^2-1}{n^3+1} = n^2 - r$$

Könnyű innen látni, hogy ha n = 1, akkor az alakítás második tagja r = 0, fennáll az oszthatóság, az adott kifejezések mindegyike 2.

Minden más (n > 1, egész szám) esetben viszont r értéke a 0 és 1 szomszédos egész számok közé esik, mert a számláló és a nevező pozitív és közülük az előbbi a kisebbik:

$$0 < n^2 – 1 < n(n^2 - 1) = n^3 – n < n^3 + 1,$$

tehát oszthatóság nem áll fenn. Az egyetlen megfelelő n érték az 1.

Megjegyzés: Az osztás pontos elvégzése nélkül is adhatunk választ. Ha az oszthatóság fennáll,

akkor van olyan pozitív egész e szám, amelyre

$$(n^3 + 1)e = n^5 + 1 = n^2(n^3 + 1) – (n^2 - 1),$$

$$(n^3 + 1)(n^2 – e) = n^2 – 1.$$

Osszuk a bal oldal első tényezőjét és a jobb oldalt a pozitív (n + 1)- gyel:

$$(n^2 – n + 1)(n^2 - e) = (n(n -1) + 1)(n^2 - e) = n – 1.$$

Ez teljesül, ha n = 1, e = 1, amit már láttunk. Ha viszont n > 1, akkor a bal oldalon n(n - 1) + 1 > n – 1 > 0, emiatt n^2 – e pozitív, de mivel egész is, ezért az egyenlőség lehetetlen: tehát más megfelelő n érték nincs.

II. megoldás:

Alakítsuk most a hányadost így:

$$\frac{n^5+1}{n^3+1}=\frac{(n^5+n^2)+(n^3+1)-(n^3+n^2)}{n^3+1}=n^2+1+\frac{n^2(n+1)}{(n+1)(n^2-n+1)}=(n^2+1)+\frac{n^2}{n^2-n+1}$$

itt a tört kifejezés számlálója (szerencsésen) egytagú kifejezés. A nevező pedig: n (n - 1) + 1 ≥ 1, egyenlőség az n = 1 esetben áll fenn (amikor a számláló is 1), ekkor tehát fennáll az oszthatóság.

Ha még valamely más esetben is fennáll az oszthatóság, akkor a nevező már csak valamely valódi osztója lehet n^2 – nek, tehát nem lehet nagyobb, mint $\frac{n^2}{2}$.

Mármost az egyenlőtlenségből

$$n^2 - n + 1 \le \frac{n^2}{2},\quad \frac{n^2}{2}-n+1=\frac{1}{2}(n-1)^2+\frac{1}{2}\le 0$$

következnék, ami lehetetlen, tehát n > 1 mellett nem állhat fenn a kérdéses oszthatóság.

2.5 Hány különböző valós gyöke van a

$$\frac{x-7}{2000}+\frac{x-6}{2001}+\frac{x-5}{2002}=\frac{x-2000}{7}+\frac{x-2001}{6}+\frac{x-2002}{5}$$ egyenletnek?

I. megoldás:

Az egyenlet egyismeretlenes elsőfokú egyenlet. Az ilyen egyenletek esetén a gyököket tekintve három lehetőség van:

- ha azonosság, akkor minden x valós szám megoldás,
- ha ellentmondásos az egyenlet, akkor nincs megoldása,
- ha az előbbiek egyike sem, akkor egy gyöke van.

Az egyenlet nem azonosság, hiszen pl. x= 10 esetén a bal oldal pozitív, a jobb oldal negatív. Tehát ha van, akkor egyetlen megoldása van az egyenletnek.

A törtek közös jellemzője, hogy a számlálóban és a nevezőben lévő két szám összege 2007. Az x = 2007 megoldása az egyenletnek, mert akkor mindegyik tört értéke 1 lesz, mindkét oldal értéke 3. Tehát az egyenletnek 1 megoldása van.

II. megoldás:

$$\frac{x-7}{2000}+\frac{x-6}{2001}+\frac{x-5}{2002}=\frac{x-2000}{7}+\frac{x-2001}{6}+\frac{x-2002}{5}$$

Vonjunk ki az egyenlet mindkét oldalából 3- at:

$$\frac{x-7}{2000}-1+\frac{x-6}{2001}-1+\frac{x-5}{2002}-1=\frac{x-2000}{7}-1+\frac{x-2001}{6}-1+\frac{x-2002}{5}-1$$

$$\frac{x-2007}{2000}+\frac{x-2007}{2001}+\frac{x-2007}{2002}=\frac{x-2007}{7}+\frac{x-2007}{6}+\frac{x-2007}{5}$$

$$(x-2007)\left(\frac{1}{2000}+\frac{1}{2001}+\frac{1}{2002}-\frac{1}{7}-\frac{1}{6}-\frac{1}{5}\right)=0$$

Az egyenlőség csak akkor áll fenn, ha x = 2007. Tehát az egyenletnek egy valós gyöke van.

3. FÜGGVÉNYEK, AZ ANALÍZIS ELEMEI

Alapvető követelmények, kompetenciák:

- Legyen képes a tanuló a körülötte levő világ egyszerűbb összefüggéseinek függvényszerű megjelenítésére, ezek
- elemzéséből tudjon következtetni valóságos jelenségek várható lefolyására.
- Legyen képes a változó mennyiségek közötti kapcsolat felismerésére, a függés értelmezésére. Értse, hogy a
- függvény matematikai fogalom, két halmaz elemeinek egymáshoz rendelése. Ismerje fel a hozzárendelés formáját,
- elemezze a halmazok közötti kapcsolatokat.
- Lássa, hogy a sorozat diszkrét folyamatok megjelenítésére alkalmas matematikai eszköz, a pozitív egész számok
- halmazán értelmezett függvény. Ismerje a számtani és mértani sorozatot.
- Az *emelt szinten* érettségiző diák ismerje az analízis néhány alapelemét, amelyekre más szaktudományokban is (pl. fizika) szüksége lehet. Ezek segítségével tudjon függvényvizsgálatokat végezni, szélsőértéket, görbe alatti területet számolni.

Feladatok:

3.1 Minimálisan hány éle van egy olyan 10 csúcsú gráfnak, amelynek bármely 5 csúcsa között legalább 2 él halad?

Megoldás:

Jelölje f(n) azt, hogy n csúcsú gráfban minimálisan hány élt kell behúzni ahhoz, hogy bármely 5 csúcs között legalább 2 él haladjon. A feladat f(10) meghatározása.

Azt állítjuk, hogy

$$f(n + 1) \geq (n + 1)/(n - 1)f(n).$$

tegyük fel, hogy egy n + 1 pontú gráfban bármely 5 csúcs között legalább 2 él halad, és a gráf éleinek száma pontosan f(n + 1). Hagyjuk el a legnagyobb fokszámú csúcsot és a belőle induló k darab élt; ezzel egy olyan n pontú, f(n + 1) – k élű gráfot kapunk, amelyben továbbra is bármely 5 pont között legalább 2 él halad, következésképp legalább f(n) éle van. Az $n + 1$ csúcsú gráfban a fokszámok összege az élszám kétszerese: $2f(n + 1)$, ezért $k \geq 2f(n + 1)/(n + 1)$.

Összegezve az elmondottakat,

$$f(n) \leq f(n + 1) - k \leq f(n + 1) - 2f(n + 1)/(n + 1),$$

amit átrendezve

$$f(n + 1) \geq (n + 1)/(n - 1)f(n).$$

ebből $f(5) = 2$ alapján $f(6) \geq (6/4)f(5) = 3$; $f(7) \geq (7/5)f(6) \geq 4{,}2$, azaz $f(10) \geq 12$.

A gráfunknak 10 csúcsa és 12 éle van, és megmutatjuk, hogy bármely 5 csúcsa között legalább 2 éle fut.

A gráf három komponensből áll: egy 4-pontú és két 3-pontú teljes gráfból. Ha kiválasztunk 5 csúcsot, ezek közül vagy lesz három, amelyek ugyanabba a komponensbe tartoznak, és akkor közöttük három él is fut, vagy pedig két komponensből választunk két-két pontot és a harmadikból egyet, ekkor pedig az egy komponensből választott pontpárok között fut két él.
A minimális élszám tehát 12.

3.2 Milyen a, b, c valós számokra igaz az, hogy ha egy sorozat első n elemének összege tetszőleges pozitív egész n esetén $an^2 + bn + c$ alakú, akkor a sorozat számtani sorozat?

Megoldás: Legyenek a sorozat elemei $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$; az első n elem összege S_n. A feladat szerint $S_n = an^2 + bn + c$. Ez definiálja a sorozat elemeit:
$a_1 = S_1 = a + b + c$;
$a_n = S_n - S_{n-1} = (an^2 + bn + c) - [a(n - 1)^2 + b(n - 1) + c] = a(2n - 1) + b$, ha $n \geq 2$.
A szomszédos elemek különbsége:
$a_2 - a_1 = (3a + b) - (a + b + c) = 2a - c$;
$a_n - a_{n-1} = (a(2n - 1) + b) - (a(2n - 3) + b) = 2a$; ha $n \geq 3$.
A sorozat pontosan akkor számtani sorozat, ha ezek a különbségek megegyeznek, azaz $c = 0$.

3.3 Az a és b valós paraméterek mely értékei esetén lesz a legkisebb az $|x^2 + ax + b|$ függvénynek a [-1, 1] intervallumon felvett maximuma?

Megoldás:

Azt fogjuk igazolni, hogy

$$\max_{x \in [-1;1]} |x^2 + ax + b| \geq ½,$$

és egyenlőség csak az $x^2 – ½$ polinomra áll. Tegyük fel, hogy valamilyen a, b esetén

(1) $|x^2 + ax + b| \leq ½$

teljesül minden $–1 \leq x \leq 1$ számra. Belátjuk, hogy ekkor $a = 0$, $b = -1/2$.

Az $x^2 + ax + b$ függvény a [-1; 1] intervallumon abszolút értékének maximumát vagy az intervallum valamelyik szélén, vagy – amennyiben az a [-1, 1] intervallumhoz tartozik - $x^2 + ax + b$ parabola csúcsában veszi föl. Az

$$x^2 + ax + b = (x + a/2)^2 + b – a^2/4$$

átalakítás mutatja, hogy a parabola csúcsa az $x = -a/2$ pontban van. Célszerűnek látszik tehát (1)-et a –1; +1 és –a/2 pontokban felírni (ha $|-a/2| \leq 1$). Lássuk előbb +1-re és –1-re:

(2) $–1/2 \leq 1 + a + b \leq ½$,

(3) $–1/2 \leq 1 - a + b \leq ½$,

(3)-ból: $–1/2 \leq -1 + a - b \leq ½$,

ezt (2)-höz adva

$$-1 \leq 2a \leq 1,$$

azaz

$$|a| \leq ½.$$

Ezek szerint a parabola csúcsa a [-1; 1] intervallumba esik, s így felírhatjuk ott is (1)-t:

$$–1/2 \leq b – a^2/4 \leq ½,$$

amiből

$$b \geq a^2/4 – ½ \geq -1/2.$$

(2)-t és (3)-t összeadva azt kapjuk, hogy

$$-1 \leq 2 + 2b \leq 1,$$

aminek jobb oldalából

$$b \leq -1/2.$$

Ezek alapján

$$-1/2 \geq b \geq a^2/4 - ½ \geq -1/2,$$

ami csak úgy állhat fenn, ha $b = -1/2$, $a = 0$;

ekkor $x^2 + ax + b$-re

$$\max_{x \in [-1;1]} \left| x^2 + ax + b \right| = \max_{x \in [-1;1]} \left| x^2 - 1/2 \right| = ½.$$

3.4 Melyik az a három szám, amelyek egy mértani sorozat szomszédos tagjai, és azt tudjuk még róla, hogy

a.) szorzatuk 1000, összegük 62

b.) tízes alapú logaritmusuk összege 3, összegük 62?

Megoldás: Látszólag két feladattal állunk szemben, valójában azonban csak eggyel. Mindkét esetben ugyanezt a feltételi egyenletrendszert fogjuk felírni.

Célszerű a középső számból kiindulni. Ha ezt a-val jelöljük, a megelőzőt a/q-val, a rá következőt aq-val jelölhetjük.

Ha e három szám szorzata 1000, az azt jelenti, hogy

$$a/q \cdot a \cdot aq = 1000 \rightarrow a^3 = 1000 \rightarrow a = 10.$$

Ha három szám tízes alapú logaritmusának összege 3, akkor a

$$\lg a/q + \lg a + \lg (aq) = 3$$

egyenletből

$$\lg a - \lg q + \lg a + \lg a + \lg q = 3,$$

$$3\lg a = 3,$$

$$\lg a = 1 \text{ és } a = 10.$$

Mindkét esetben tehát az a += 10 értéket kell a másik feltételi egyenletbe helyettesíteni.

$$a/q + a + aq = 62$$

$$a(1/q + 1 + q) = 62$$

$$10(1/q + 1 + q) = 62$$

ahonnan

$$5q^2 - 26q + 5 = 0$$

melynek gyökei: $q_1 = 5$ és $q_2 = 1/5$.

A keresett három szám tehát 2; 10; 50 vagy 50; 10; 2.

Ezek mindkét feladat mindegyik feltételét kielégítik.

3.5 Legyen f olyan függvény, amely a pozitív egészek halmazán van értelmezve és függvényértékei is pozitív egészek. Minden pozitív egész n-re teljesül az

$$f\,(n + 1) > f\,(f(n))$$

egyenlőtlenség.

Bizonyítsuk be, hogy minden pozitív egész n-re f (n) = n !

Megoldás:

A feladat állítását teljes indukcióval bizonyítjuk. Először megmutatjuk, hogy f (1) = 1. Ehhez bebizonyítjuk, hogy van olyan k_0, amelyre f (k_0) = 1. Ha ilyen nem létezne, képezzük a következő sorozatot:

$k_1 = f\,(k_0),\ k_2 = f\,(k_1 - 1), \ldots, k_i = f\,(k_{i-1} - 1), \ldots$

Mivel feltételezésünk szerint $f\,(k_{i-1} - 1) = k_i \neq 1$, $k_i > 1$, $k_i - 1$ pozitív egész, ezért a sorozat létezik.

(1) $f\,(n + 1) > f(f(n))$ miatt

$f\,(k_i) > f\,(f(k_{i-1} - 1)) = f\,(k_{i+1})$, ezért létezik a pozitív egészeknek egy

$f\,(k_0) > f\,(k_1) > \ldots > f\,(k_i) > f\,(k_{i+1}) > \ldots$ szigorúan monoton növekvő csökkenő végtelen sorozata, ami lehetetlen.

Van tehát olyan k_0 pozitív egész, amelyre f (k_0) = 1. Azonban nem lehet, hogy $k_0 > 1$ legyen, mert akkor (1) -ből $k_0 - 1 \geq 1$ miatt

$$f\,(\,f(\,k_0 - 1)) < f\,(k_0) = 1$$

következne, ami lehetetlen, mert f nem vehet fel 1-nél kisebb értéket, tehát f(1) = 1.

Tegyük fel, hogy a feladat állítása igaz valamely k pozitív egészre minden olyan függvényre, amely kielégíti a feladat feltételeit, tehát pl. f(k) = k. Azt kell bizonyítanunk, hogy

$f\,(k + 1) = k + 1.$

Képezzük a $\varphi(n) = f\,(n + 1) - 1$ függvényt.

Megmutatjuk, hogy $\varphi(n)$ kielégíti a feladat feltételeit. Először is, (1) -ből következik, hogy f (n + 1) > 1, tehát f (n + 1) – 1 pozitív egész. Ezért – tekintettel (1) -re:

$\varphi(\varphi(n)) = \varphi\,(f(n + 1) - 1) = f\,(f\,(n + 1)) - 1 < f\,\ (n + 2) - 1 = \varphi\,(n + 1),$

Ez azt jelenti, hogy $\varphi(n)$ eleget tesz a feladat (1) kikötésének, tehát az indukciós feltétel szerint $\varphi(k) = k$, azaz

$\varphi(k) = f\,(k + 1) - 1 = k,\qquad f\,(k + 1) = k + 1$, és ezt kellett bizonyítani.

4. GEOMETRIA, KOORDINÁTAGEOMETRIA, TRIGONOMETRIA

Alapvető követelmények, kompetenciák:

- Tudjon a tanuló síkban, illetve térben tájékozódni, térbeli viszonyokat elképzelni, tudja a háromdimenziós
- valóságot - alkalmas síkmetszetekkel - két dimenzióban vizsgálni.
- Vegye észre a szimmetriákat, tudja ezek egyszerűsítő hatásait problémák megfogalmazásában, bizonyításokban,
- számításokban kihasználni.
- Tudjon a feladatok megoldásához megfelelő ábrát készíteni.
- Tudjon mérni és számolni hosszúságot, területet, felszínt, térfogatot, legyen tisztában a mérési pontosság
- fogalmával.
- Ismerje a geometria szerepét a műszaki életben és bizonyos képzőművészeti alkotásokban.
- Az emelt szinten érettségiző diák tudja szabatosan megfogalmazni a geometriai bizonyítások gondolatmenetét.

Feladatok:

4.1 Hol helyezkednek el a koordináta-rendszerben azok a pontok, amelyeknek (x, y) koordinátái kielégítik az alábbi két egyenlőtlenséget: $|x|+|y|<3$ $\quad |x+y|+|x-y|<4$?

Megoldás:

Az $|x|+|y|<3$ egyenlőtlenség által meghatározott pontok koordinátáit megkapjuk, ha meghatározzuk az $|x|+|y|=3$ egyenletnek megfelelő pontokat, majd a koordináták abszolút értékét csökkentjük

az első síknegyedben ($x \geq 0, y \geq 0$) : x + y = 3

a másodikban ($x \leq 0, y \geq 0$) : -x + y = 3

a harmadikban : -x – y =3

a negyedikben : x – y = 3

A (3; 0), (0; 3), (-3, 0), (0; -3) csúcsokkal rendelkező négyzet belsejében lévő pontok elégítik ki az első egyenlőtlenséget.

Hasonlóan az $|x+y|+|x-y|=4$ egyenletben

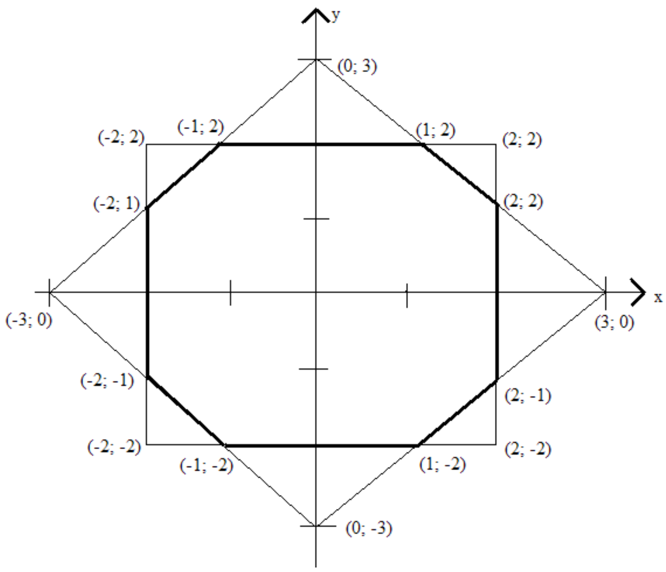
ha $x \geq 0$ és $-x \leq y \leq x$, azaz a pont a pozitív x tengellyel 45° -ot bezáró félegyenesek között van : x + y + x – y = 4 azaz x = 2

ha $y \geq 0$ és $-y \leq x \leq y$, azaz a pont a pozitív y tengellyel 45°-ot bezáró félegyenesek között van : x + y + (-x + y) = 4 azaz y = 2

ha $x \leq 0$ és $x \leq y \leq -x$, akkor -(x + y)+(-x+y) = 4 azaz x = -2

ha $y \leq 0$ és $y \leq x \leq -y$, akkor –(x + y)+ x – y = 4 azaz y = -2

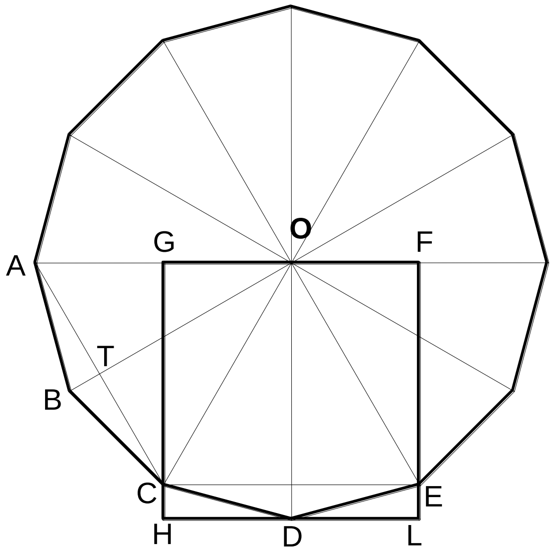
A második egyenlőtlenségből tehát (2; -2), (2; 2), (-2; 2), (-2; -2) csúcsokkal rendelkező négyzet belsejében lévő pontok felelnek meg. Mind a két egyenlőtlenséget azoknak a pontoknak a koordinátái elégítik ki, amelyek mindkét négyzet belsejében vannak. Tehát annak a nyolcszögnek a belsejében, amelynek csúcsai (2;1), (1;2), (-1;2), (-2;1), (-2; -1), (-1; -2), (1;-2), (2; -1)



4.2 Bizonyítsuk be, hogy egy *r* sugarú körbe írt szabályos tizenkétszög átdarabolható olyan téglalapba, melynek oldalai *r* és *3r*.

Megoldás:

Négy – négy kis háromszög *r* oldalú négyzetekbe darabolható át.

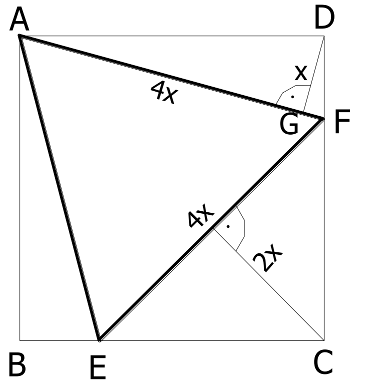


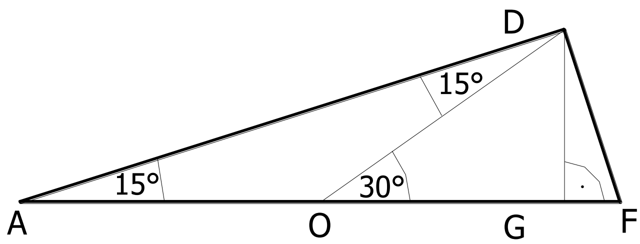
ATO és *OGC* háromszögek, ill. *OTC* és *OFE* háromszögek egybevágók. Hasonlóan: *ATB* és *DHC* háromszögek, ill. *BTC* és *ELD* háromszögek egybevágók.

Tehát az *OABCDE* átdarabolható a *GHLF* *r* oldalú négyzetbe.

4.3 Vegyük fel az *ABCD* négyzet *BC* oldalán az *E* és *CD* oldalán az *F* pontokat úgy, hogy az *AEF* háromszög szabályos legyen! Igazolja, hogy az *ABE* és *AFD* háromszögek területének összege egyenlő az *EFC* háromszög területével!

Megoldás:





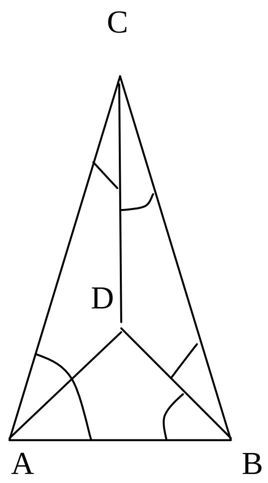
a) Az *ABE* és *AFD* derékszögű háromszögek. $AB = AD$ és $AE = AF$, így *DAF* szög 15°. Először megmutatjuk, hogy ha az *AFD* háromszög *AF* átfogójához tartozó magasság DG, akkor $AF = 4DG$. Legyen az *AF* felezőpontja *O*. Ekkor Thalész tétele alapján az *AOD* háromszög egyenlőszárú, és így *DOG* szög 30°. Az *OD*-t *OG*-re tükrözve szabályos háromszöget kapunk, tehát $AF = 2AO = 2OD = 4DG$.

b) Legyen *x*=*DG*. Ekkor az előbbiek alapján az *AFD* területének kétszerese: $4x \cdot x = 4x^2$,

másrészt *ECF* egyenlőszárú derékszögű háromszög így területete $\frac{1}{2} \cdot 4x \cdot 2x = 4x^2$.

4.4 Az ABC háromszög A csúcsánál levő szöge 70 fokos. A B és C csúcsnál levő szögek szögfelezőinek metszéspontja legyen D! Mekkora a C csúcsnál levő szög, ha tudjuk, hogy AD = BD?

Megoldás: Tekintsük a következő ábrát:

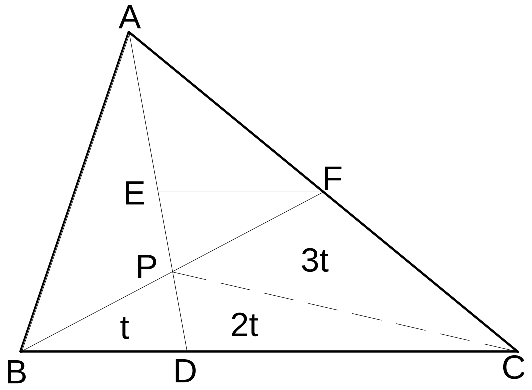


A feladat feltételei alapján AD = BD, így az ABD háromszög egyenlő szárú, ezért az A csúcsnál lévő szög = a B csúcsnál lévő szög. Mivel CD és BD a C, illetve a B csúcsnál lévő szög belső szögfelezőszakasza és a háromszög belső szögfelezői egy pontban (a beírt kör középpontjában) metszik egymást, ezért az AD szakasz az A csúcsnál fekvő 70º - os szög belső szögfelezőszakasza. Az AD = BD feltétel alapján a korábbiak szerint. Az A és a B csúcsnál lévő szögek egyenlőek, így ezek 70º - osak, azaz az ABC háromszög is egyenlő szárú. Ekkor pedig a C csúcsnál lévő szög 180º - 70º - 70º = 40º, hiszen bármely háromszög belső szögeinek összege 180º. Tehát a C csúcsnál lévő szög értéke 40º-os.

4.5 Az *ABC* háromszög *AC* oldalának felezőpontja legyen *F*, *BC* oldalának *B*-hez közelebbi harmadolópontja pedig *D*. Az *AD* és *BF* szakaszok metszéspontját jelölje *P*. Határozza meg a *DCFP* négyszög és a *BDP* háromszög területének arányát!

Megoldás:

Legyen *EF* párhuzamos *BC*-vel, *F* felezőpont ezért *EF* az *ADC* háromszög középvonala, így $EF = \frac{1}{3} BC$, ezért *BDFE* négyszög paralelogramma. Ebből következik, hogy *P* felezi a *BF* szakaszt.



Tehát *BCP* és *PCF* háromszögek területe egyenlő. Mivel *BD* szakasz a *DC* fele, ezért a *BDP* háromszög területe a *PDC* háromszög területének fele.

A fentiekből következik, hogy a *DCFP* négyszög területe a *BDP* háromszög területének ötszöröse.

5. VALÓSZÍNŰSÉG-SZÁMÍTÁS, STATISZTIKA

Alapvető követelmények, kompetenciák:

- Értse a tanuló a statisztikai kijelentések és gondolatmenetek sajátos természetét.
- Ismerje a statisztikai állítások igazolására felhasználható adatok gyűjtésének lehetséges formáit, és legyen jártas
- a kapott adatok áttekinthető szemléltetésében, különböző statisztikai mutatókkal való jellemzésében.
- Az emelt szinten érettségiző diák tudjon egyszerűbb véletlenszerű jelenségeket modellezni és a valószínűségi modellben számításokat végezni.
- Emelt szinten ismerje a véletlen szerepét egyszerű statisztikai mintavételi eljárásokban.

Feladatok:

5.1 Egy matematika tanár tanít a 9. A és a 9. B osztályban is. Íratott egy közös dolgozatot, ahol 60 pont volt a maximum. Az A osztályban 42 pont, a B osztályban 37 pont lett az átlag. Az A osztályos fiúk átlagosan 40,5, a B osztályos fiúk pedig 35,5 pontot értek el. Az A osztályban a lányok átlagosan 45, míg a B-ben a lányok 38 pontos dolgozatot írtak. Mennyi a két osztályban az összes lány átlagpontszáma, ha tudjuk, hogy a fiúké 39,5?

Megoldás:

A következő táblázat tartalmazza az ismert átlagokat. A két osztályban az összes lány átlagpontszámát jelölje *x*.

	fiúk	lányok	átlag
9. A	40,5	45	42
9. B	35,5	38	37
átlag	39,5	*x*	

A 9. A osztályban *a* fiú, a 9. B osztályban *b* fiú, a 9. A osztályban *c* lány, a 9. B osztályban *d* lány van.

A táblázat első sora alapján a következő egyenletet írhatjuk fel: $40{,}5\cdot a+45\cdot c=42\cdot(a+c)$. A táblázat második sora alapján pedig a következőt: $35{,}5\cdot b+38\cdot d=37\cdot(b+d)$.
A táblázat első oszlopa alapján $40{,}5\cdot a+35{,}5\cdot b=39{,}5\cdot(a+b)$. A táblázat második oszlopa alapján $45\cdot c+38\cdot d=x\cdot(c+d)$, vagyis $x=\dfrac{45\cdot c+38\cdot d}{c+d}$.
Az első három egyenletet rendezve $3c = 1{,}5a$, vagyis $2c = a$; $d = 1{,}5b$; $a = 4b$, vagyis $b = 0{,}25a$. A *d* kifejezhető *c* segítségével (ez azért jó, mert így a 4. egyenletben csak *c* fog szerepelni, ha behelyettesítünk): $d=1{,}5b=1{,}5\cdot 0{,}25\cdot a=1{,}5\cdot 0{,}25\cdot 2c=0{,}75c$.

Ezt beírjuk a negyedik egyenletbe, majd *c*-vel egyszerűsítünk:

$$x=\frac{45\cdot c+38\cdot d}{c+d}=\frac{45\cdot c+38\cdot 0{,}75c}{c+0{,}75c}=\frac{45+38\cdot 0{,}75}{1{,}75}=42.$$

A két osztályban az összes lány átlagpontszáma a számításaink szerint 42.

5.2 Egy 28 fős diákcsoport autóbusszal 7 napos táborozásra indul. A csoport tagjai előzőleg elhatározták, hogy a kirándulás költségeinek a fedezésére elmennek almát szedni.

a) A munka utáni elszámoláskor kiderült, hogy minden nap megduplázták előző napi bevételüket. (Egyre többen mentek, és egyre hosszabb ideig dolgoztak.) Mennyi pénzt kerestek öt nap alatt, ha az első napi munkabérük 5000 Ft volt?

Megoldás:

Mértani sorozat, ahol $q = 2$; $a_1 = 5000$; $n = 5$.

1. Az első n tag összege : $S_n = 5000 \cdot [(2^5 -1) / (2-1)] = 155\,000$..

b) Az öt napi kereset kevésnek bizonyult, ezért a 6. napon is dolgoztak, és az előző napi bevételüket most is megduplázták. Mennyit kerestek ezen a napon?

Megoldás:

$a_6 = a_1 \cdot q^5 = 5000 * 2^5 = 160\,000$.

c) A szállás megrendeléséhez szükséges hatjegyű telefonszám utolsó számjegye elmosódott a papíron, így csak az első öt jegyet tudták biztosan: 24375. A csoport egyik tagja arra biztosan emlékezett, hogya a hatjegyű szám osztható volt hattal. Melyik számjegy állhat az utolsó helyen?

Megoldás:

Egy szám hattal osztható, ha 2-vel és 3-al osztható. Ezért az utolsó helyen vagy 0 vagy 6 állhat.

d) A táborban autóbusszal utaztak, amelyre ülésrendet állítottak össze. Az első két ülésre 25-en jelentkeztek. Hányféleképpen lehet kiválasztani a tanulót, ha azt is figyelembe kell venni, hogy ki ül az ablak mellett?

Megoldás:

Az egyik helyre 25, a másik helyre pedig 24 tanuló közül választhatunk.

$25 \cdot 24 = 600$.

e) A csoportot négyszemélyes faházakban szállásolják el. Minden nap más faház lakói főzik az ebédet. Hányféleképpen lehet beosztani a főzés sorrendjét?

Megoldás:

7 faház van. A lehetséges sorrendek számát 7 elem permutációja adja meg : 7!

f) Hányféle beosztás lehetséges, ha a tervekkel ellentétben a táborozás csak öt napig tart?

Megoldás:

7 elem ötödosztályú variációja : $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 2520$.

5.3 Dísztárgynak a boltokba arany,ezüst és piros színű gyertyákat szállítanak. Összesen 120 db gyertya van az autóban. A fuvarozás során a 120 db-ból 15 eltört.

a) A hibátlan gyertyákból az első bolt 15- öt megvesz. Hányféleképpen választhatja ki a hibátlan gyertyákat, ha szín és a sorrend közömbös?

Megoldás:

A 120 gyertyából 105 hibátlan és 15 hibás, tehát a 105-ből kell kiválasztani: $\binom{115}{15}$.

b) Az arany színűből egy sem tört el, így a bolt azt mondja, hogy inkább abból szeretne 10-et és csak 5-öt a többiből (a szín és asorrend közömbös).

Megoldás:

A kedvező lehetőség $\binom{18}{10}\binom{105}{5}$.

Az összes lehetőség: $\binom{120}{15}$.

A végeredmény : $\binom{18}{10}\binom{105}{5} \Big/ \binom{120}{15}$.

5.4 Két tálban 10-10 darab golyó van, mindegyikben egy sárga, a többi piros. Bekötött szemmel választunk egy-egy golyót mindkét tálból.

a) Mekkora a valószínűsége annak, hogy a két sárgát választjuk?

Megoldás:

Annak a valószínűsége, hogy az egyik tálból a sárga golyót választjuk 0,1. A két tálból egymástól függetlenül választunk, ezért annak a valószínűsége, hogy mindkét tálból a sárgát vesszük ki $0{,}1\times0{,}1=0{,}01$.

b) Mekkora a valószínűsége annak, hogy egy sárgát és egy pirosat választunk?

Megoldás:

Annak a valószínűsége, hogy az egyik tálból a sárga golyót választjuk 0,1; annak, hogy a pirosat 0,9. A sárga golyót vagy az első, vagy a második tálból választhatjuk, ezért a két különböző színű golyó választásának valószínűsége:
$0{,}1\times0{,}9+0{,}9\times0{,}1=2\times0{,}1\times0{,}9=0{,}18$.

c) Mekkora a valószínűsége annak, hogy legalább az egyik választott golyó piros?

Megoldás:

Ha legalább az egyik golyó piros, akkor vagy az egyik piros és a másik sárga, vagy mindkettő piros. Annak a valószínűsége, hogy az egyik választott golyó piros, a másik pedig sárga a b. feladat szerint 0,18. Annak a valószínűsége, hogy mindkét választott golyó piros $0{,}9\times0{,}9=0{,}81$. Így annak a valószínűsége, hogy legalább az egyik választott golyó piros: $0{,}18+0{,}81=0{,}99$. Ugyanerre az eredményre jutunk, ha azt mondjuk, hogy akkor nem lenne egy piros golyó sem, ha mind a kétszer sárgát választunk. Tehát P(legalább az egyik piros)=1-P(mindkettő sárga)=1-0,01=0,99.

5.5 Egy osztályban a lányok testmagasságának átlaga 168 cm, a fiúké pedig 174 cm. Az osztályban 16 lány és 14 fiú van. Számítsuk ki az osztály testmagasságának átlagát.

Megoldás:

Mivel a 16 lány a testmagasságának átlaga 168 cm, ezért a lányok testmagasságának összege :
$16\cdot168=2688$ cm.

Mivel a 14 fiú testmagasságának átlaga 174 cm, ezért a fiúk testmagasságának összege :
$14\cdot174=2436$ cm.
Az osztály testmagasságának összege : 2688+2436=5124 cm.
Az osztály testmagasságának átlaga : 5124/30=170,8 cm.

VI. ÖSSZEGZÉS

A magyar iskolai tehetséggondozásnak jelentős értékei vannak, ezzel Európa élvonalában vagyunk a nemzetközi értékelések alapján.

Ugyanakkor jelentős egyenetlenségek is vannak a szakmai követelmények érvényesülésében.

Ugyancsak jelentős egyenetlenségek vannak életkori és intézmény összevetésben. A középiskolai korosztályra van legtöbb hatékonyan működő program Magyarországon, s ahogy haladunk lefele életkorban, annál kevésbé megoldott a hatékony iskolai tehetségnevelés, illetve az ahhoz szükséges „alapozás” az általános iskolában, illetve óvodában. Ugyancsak nagy eltérések vannak az egyes intézmények között is: szakmai szempontból világhírű program is funkcionál (pl.: Arany János Tehetséggondozó Program) sok iskolában, ugyanakkor sok iskolában egy-két szakkörön kívül nincs érdemi foglalkozás a tehetséges tanulókkal.

A hatékony tehetségfejlesztéshez természetesen elengedhetetlen, hogy az iskolai oktatás-nevelés színvonala általában is magas szintű legyen, ez adja az alapokat a szunnyadó tehetségek megtalálásához és sikeres fejlesztéséhez. Ehhez járul hozzá szakdolgozatom, mely egy szakkör feladatainak lehetséges sorát és megoldásait tartalmazza, de egyaránt alkalmazható iskolai dolgozatként, differenciált osztálymunkában, és az önálló tanulásban is. A feladatokkal nagyon jól mérhető, hogy a tanulók milyen mélységben sajátították el és biztonsággal tudják-e alkalmazni az alapvető matematikai ismereteket, eljárásokat.

VII. IRODALOMJEGYZÉK:

Tóth László: Pszichológia a tanításban/. –Debrecen.

Pólya György: A gondolkodás iskolája (Akkord Kiadó, 2000)

Dr. Balogh László: (A magyar Tehetséggondozó Társaság elnöke) „A magyar társadalom a tehetség szolgálatában" konferencián elhangzott előadás - Budapest, 2008. február 22.

Mező Ferenc : A tehetség tanácsadás kézikönyve – Debrecen: 2004.

http://www.komal.hu/tavoktatas

http://www.tehetseg**pont**.hu/dokumentumok/baloghlaszlo

http://www.oh.gov.hu/letolt/okev/doc/erettsegi_40_2002/matematika_vizsgakovetelmenyek