Egyetemi doktori (PhD) értekezés tézisei

EHRESMANN-SOKASÁGOK, SPRAYK ÉS VONALELEM D-SOKASÁGOK TRANSZFORMÁCIÓI

Pék Johanna
Témavezető: Dr. Szilasi József egyetemi docens

Debreceni Egyetem
Matematika- és Számítástudományok Doktori Iskola
Debrecen, 2009.

Bevezetés

Disszertációnk fő témája az affinitás- és az automorfizmus-csoport kapcsolatának tisztázása Ehresmann-konnexiók, illetve a $\tau^*\tau$ visszahúzott nyalábon adott reguláris kovariáns deriválások esetén. E vizsgálatokkal párhuzamban az Ehresmann-konnexiók általános elméletét is kiegészítjük néhány új észrevétellel, valamint néhány fontos ismert tétel új bizonyításával. A dolgozat 6 fejezetből épül fel, beleértve egy Appendixet.

Az első fejezet az alapvető megállapodások rögzítése mellett néhány, a továbbiakban felhasználásra kerülő fontos fogalomra és tényre emlékeztet, valamint egyszerű technikai jellegű észrevételeket tartalmaz. A későbbiekben jól használható értelmezését adjuk a $\tau^*\tau$ nyalábon definiált kovariáns deriválások geodetikusainak („autoparalel görbéinek").

A második fejezetben bevezetjük és a szükséges mélységig tárgyaljuk a disszertáció szempontjából fontos speciálisabb fogalmakat és konstrukciókat. Leírjuk, hogy az érintőnyaláb kanonikus objektumai, valamint bizonyos vektormezők és szelések hogyan transzformálódnak az alapsokaság egy diffeomorfizmusa által származtatott előretolás (push-forward) alkalmával.

A harmadik fejezetben megmutatjuk, hogy egy szemispray automorfizmus- és affinitáscsoportja egybeesik (3.2.5.).

A negyedik fejezet tárgyalja a disszertációban az Ehresmann-konnexiókkal kapcsolatban felvetett problémák jelentős részét. A bevezető szakaszban Crampin és Grifone egy alapvető tételére adunk egy, az ismerteknél némileg egyszerűbb bizonyítást. Részletesen leírjuk az Ehresmann-konnexió és egy diffeomorfizmus általi visszahúzottja alapvető geometriai adatainak kapcsolatát (4.2.10. lemma). A 4.3. szakaszban két Ehresmann-konnexió különbségtenzorát tárgyaljuk. Megmutatjuk, hogy – egy kanonikus, injektív nyalábleképezéstől eltekintve – egy Ehresmann-konnexiónak és a hozzá csatolt szemisprayből származó Ehresmann-konnexiónak a különbségtenzora az Ehresmann-konnexió erős torziójának $\frac{1}{2}$-szerese. Ebből, egyebek mellett, közvetlenül következik az a fontos, ismert tétel, hogy egy Ehresmann-konnexiót egyértelműen meghatároz az erős torziója és a hozzá csatolt szemispray. A 4.4. szakaszban megmutatjuk, hogy egy Ehresmann-konnexió affinitás-csoportja megegyezik a hozzá csatolt szemispray affinitás-csoportjával, homogén Ehresmann-konnexió esetén pedig a csatolt Berwald-deriválás affinitás-csoportjával. A 4.5. szakasz teljes egészében új eredményeket tartalmaz. Igazoljuk, hogy egy Ehresmann-konnexió automorfizmus-csoportja részcsoportja az általa indukált Berwald-deriválás automorfizmus-csoportjának. Bebizonyítjuk, hogy az alapsokaság egy diffeomorfizmusa akkor és csak akkor automorfizmusa egy Ehresmann-konnexiónak, ha automorfizmusa a hozzá csatolt szemispraynek és invariánsan hagyja az erős torziót. Eredményeinkből következik, hogy egy diffeomorfizmus pontosan akkor automorfizmusa egy Ehresmann-konnexiónak, ha affinitás és invariánsan hagyja az erős torziót. Megmutatjuk ennek alapján, hogy az a klasszikus tétel, miszerint egy sokaságon adott kovariáns deriválás automorfizmusai éppen a torziót invariánsan hagyó affinitások, kis mértékben élesíthető.

Az ötödik fejezet első szakasza a visszahúzott nyaláb kovariáns deriválásaival kapcsolatos különböző regularitási feltételeket és egy Ehresmann-konnexióhoz való csatoltságukat tárgyalja. Az 5.2. szakasz első tételében explicite leírjuk, miként konstruálható reguláris kovariáns deriválásból Ehresmann-konnexió, majd (5.2.2.) bebizonyítjuk, hogy ez az egyetlen olyan Ehresmann-konnexió, amelyre vonatkozóan az adott kovariáns deriválás horizontális-deflexiója eltűnik. Speciálisan: egy Ehresmann-konnexió által indukált Berwald-konnexióból is származik egy Ehresmann-konnexió; megmutatjuk, hogy a két Ehresmann-konnexió különbségtenzora éppen az eredeti Ehresmann-konnexió tenziója. Az 5.3. szakaszban igazoljuk, hogy a visszahúzott nyalábon értelmezett reguláris kovariáns deriválások affinitás-csoportja egybeesik az indukált Ehresmann-konnexió affinitás-csoportjával. Az 5.4. szakasz a 4.5. szakasszal állítható párhuzamba, és miként az, ez is csupa új eredményt tartalmaz. Főbb tételeink, jelentősen támaszkodva az Ehresmann-konnexiókra vonatkozó analóg tételekre, a reguláris kovariáns deriválások automorfizmusait jellemzik olyan affinitásokként, amelyek bizonyos torziókat invariánsan hagynak.

A disszertáció valamennyi fontosabb eredményét indexmentes számolással, ill. meggondolásokkal igazoljuk; a koordinátás megközelítés ezeknél a problémáknál szinte áttekinthetetlenül bonyolult lenne, ugyanakkor a tárgyalás során a fontos objektumok mindegyikének megadjuk a koordinátás előállítását is. Mindezek mellett a koordinátás nézőpontnak szenteljük a teljes Appendixet, amelyben levezetjük egy szemispray koefficienseinek, továbbá egy Ehresmann-konnexió, egy $\tau^*\tau$ nyalábon adott kovariáns deriválás, valamint egy tetszőleges vektornyalábon adott kovariáns deriválás Christoffel-szimbólumainak transzformációs szabályait térképcsere esetén. A kifejtés során időről-időre kitérünk a bevezetett fogalmak és a nyert eredmények történeti vonatkozásaira is, ebben a tekintetben azonban nem törekedhettünk teljességre.

A következőkben, fejezetről fejezetre haladva, részletesebb összefoglalását adjuk a disszertáció tartalmának.

1. Vektornyalábok és kovariáns deriválás

Az első fejezetben rögzítjük jelöléseinket, megállapodásainkat és emlékeztetünk néhány olyan alapvető fogalomra és tényre, amelyeket a disszertációban állandóan alkalmazni fogunk.

(a) *Sokaság*on egy véges (de nem nulla) dimenziójú, Hausdorff, összefüggő, megszámlálható bázisú sima sokaságot értünk. $C^\infty(M)$ az M sokaságon értelmezett valós értékű sima függvények gyűrűje, $\mathrm{Diff}(M)$ jelöli az M sokaság összes diffeomorfizmusai által alkotott csoportot.

(b) Egy $\pi\colon E \longrightarrow M$ sima szürjekció *k-rangú valós vektornyaláb*, ha
(1) tetszőleges $E_p := \pi^{-1}(p)$ *fibrum*a k-dimenziós valós vektortér;

(2) minden $p \in M$ ponthoz megadható p-nek egy $\mathcal{U}$ környezete, valamint egy $\varphi\colon \mathcal{U} \times \mathbb{R}^k \longrightarrow \pi^{-1}(\mathcal{U})$ diffeomorfizmus úgy, hogy bármely $q \in \mathcal{U}$ esetén a

$$v \in \mathbb{R}^k \longmapsto \varphi(q, v) \in E_q$$

leképezés lineáris izomorfizmus.
Ekkor E-t, M-et, illetve π-t rendre *totáltér*nek, *bázissokaság*nak, illetve *projekció*nak nevezzük. Egy $\sigma\colon M \longrightarrow E$ leképezés *szelés*e π-nek, ha $\pi \circ \sigma = 1_M$. Ha $\mathcal{U} \subset M$ nyílt halmaz, $\sigma\colon \mathcal{U} \longrightarrow E$ sima leképezés és $\pi \circ \sigma = 1_{\mathcal{U}}$, akkor σ-t $\mathcal{U}$ fölötti *lokális szelés*nek hívjuk. π szeléseinek $C^\infty(M)$-modulusát $\mathrm{Sec}(\pi)$-vel jelöljük.

Ha $\pi\colon E \longrightarrow M$ k-rangú valós vektornyaláb, akkor minden $p \in M$ pontnak létezik olyan $\mathcal{U}$ környezete, amely fölött megadható lokális szelések egy $(\sigma_\alpha)_{\alpha=1}^k$ sorozata úgy, hogy az

$$\mathcal{U} \times \mathbb{R}^k \to \pi^{-1}(\mathcal{U}), \quad \left(q, \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \vdots \\ \nu_k \end{pmatrix} \right) \mapsto \nu^1 \sigma_1(q) + \cdots + \nu^k \sigma_k(q)$$

leképezés diffeomorfizmus. Ez egy karakterisztikus tulajdonsága a vektornyaláboknak, amelyet a disszertációban definiáló tulajdonságként kezelünk.

(c) Egy $\pi_1\colon E_1 \longrightarrow M_1$ és $\pi_2\colon E_2 \longrightarrow M_2$ vektornyaláb közötti *nyalábleképezés*en olyan (F, f) leképezéspárt értünk, ahol $F\colon E_1 \longrightarrow E_2$ és $f\colon M_1 \longrightarrow M_2$ sima leképezések, amelyekre $\pi_2 \circ F = f \circ \pi_1$ teljesül, és bármely $p \in M_1$ pont esetén az

$F \restriction (E_1)_p$ leszűkítés ($\mathbb{R}$-) lineáris leképezés $(E_1)_p$-ből $(E_2)_{f(p)}$-be. Egy (F, f) nyalábleképezést *nyalábizomorfizmus*nak hívunk, ha F diffeomorfizmus. Egy vektornyaláb önmagára való nyalábizomorfizmusát *nyalábautomorfizmus*nak nevezzük.

(d) Legyenek $\pi_1 \colon E_1 \longrightarrow M$ és $\pi_2 \colon E_2 \longrightarrow M$ közös bázissokasággal rendelkező vektornyalábok. Egy $F \colon E_1 \longrightarrow E_2$ leképezést *erős nyalábleképezés*nek mondunk, ha $(F, 1_M)$ nyalábleképezés π_1-ből π_2-be. A disszertációban gyakran alkalmazzuk *az erős nyalábleképezések alaplemmá*ját (1.2.2.): egy $\mathcal{F} \colon \mathrm{Sec}(\pi_1) \longrightarrow \mathrm{Sec}(\pi_2)$ leképezés akkor és csak akkor $C^\infty(M)$-lineáris, ha létezik olyan $F \colon E_1 \longrightarrow E_2$ erős nyalábleképezés, amelyre $\mathcal{F}(\sigma) = F \circ \sigma$ teljesül, minden $\sigma \in \mathrm{Sec}(\pi_1)$ esetén.

(e) Ha (F, f) nyalábautomorfizmusa a $\pi \colon E \longrightarrow M$ vektornyalábnak, akkor egy $\sigma \in \mathrm{Sec}(\pi)$ szelés F általi *előretolt*ja a

$$F_\# \sigma := F \circ \sigma \circ f^{-1}$$

szelés. Bármely $h \in C^\infty(M)$ függvény esetén teljesül, hogy

$$F_\#(h\sigma) = (h \circ f^{-1}) F_\# \sigma.$$

(f) Egy M n-dimenziós sokaság *érintőnyaláb*ja az a $\tau \colon TM \longrightarrow M$ (olykor τ_M-mel jelölt) vektornyaláb, ahol tetszőleges $p \in M$ pont fibruma a T_pM érintőtér. Ha $\varphi \colon M \longrightarrow N$ sima leképezés, akkor φ *érintőleképezése* vagy *deriváltj*a az a $\varphi_* \colon TM \longrightarrow TN$ leképezés, amelyet a

$$(\varphi_*)(v)(h) := v(h \circ \varphi); \qquad v \in T_pM,\ h \in C^\infty(N)$$

előírás értelmez. (φ_*, φ) nyalábleképezése τ_M-nek τ_N-re, és így

$$\tau_N \circ \varphi_* = \varphi \circ \tau_M, \qquad \tau_{TN} \circ \varphi_{**} = \varphi_* \circ \tau_{TM}.$$

(g) $\mathfrak{X}(M) := \mathrm{Sec}(\tau_M)$ jelöli az M-en értelmezett *vektormezők* $C^\infty(M)$-modulusát; $[X, Y]$ az $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ vektormezők *Lie-zárójele*. Egy $\xi \in \mathfrak{X}(TM)$ vektormező és egy TM-en értelmezett A $\binom{1}{1}$-tenzor $[\xi, A]$ *Frölicher-Nijenhuis zárójelén* az

$$[\xi, A]\eta := [\xi, A\eta] - A[\xi, \eta], \qquad \eta \in \mathfrak{X}(TM)$$

előírással definiált $\binom{1}{1}$-tenzort értjük.

(h) Az $X \in \mathfrak{X}(M)$ és az $Y \in \mathfrak{X}(N)$ vektormezőt φ-*megfelelőnek* nevezzük egy $\varphi\colon M \longrightarrow N$ sima leképezésre vonatkozóan, ha $\varphi_* \circ X = Y \circ \varphi$; ekkor az $X \underset{\varphi}{\sim} Y$ jelölést használjuk. $\varphi \in \mathrm{Diff}(M)$ esetén $\varphi_\# X$ (lásd (e)) az az egyetlen vektormező M-en, amely φ-megfelelésben áll X-szel.

(i) Az $\mathbb{R}$ sokaság szokásos $(\mathbb{R}, r) := (\mathbb{R}, 1_{\mathbb{R}})$ térképéhez tartozó koordinátavektormezőt $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}$-rel jelöljük. Egy $\gamma\colon I \longrightarrow M$ (sima) görbe *sebességvektormezője* a $\dot\gamma := \gamma_* \circ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}$, *gyorsulásvektormezője* a

$$\ddot\gamma := \dot{\dot\gamma} = \dot\gamma_* \circ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} = \left(\gamma_* \circ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\right)_* \circ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}$$

γ-, illetve $\dot\gamma$-menti vektormező. Ha $\varphi\colon M \longrightarrow M$ sima leképezés, akkor

$$\dot{\overline{\varphi \circ \gamma}} = \varphi_* \circ \dot\gamma, \qquad \ddot{\overline{\varphi \circ \gamma}} = \varphi_{**} \circ \ddot\gamma.$$

(j) Egy $\pi\colon E \longrightarrow M$ vektornyalábon adott *kovariáns deriválás*on olyan

$$D\colon \mathfrak{X}(M) \times \mathrm{Sec}(\pi) \longrightarrow \mathrm{Sec}(\pi), \qquad (X, \sigma) \longmapsto D_X\sigma$$

leképezést értünk, amely az első változójában tenzoriális, a másodikban pedig deriváció. Ha (F, f) automorfizmusa π-nek, és

$$(F^{\#}D)_X\sigma := F_{\#}^{-1} D_{f_{\#}X} F_{\#}\sigma,$$

akkor $F^{\#}D$ szintén kovariáns deriválás π-n, ezt D F általi *visszahúzottjá*nak hívjuk. $F^{\#}D = D$ esetén azt mondjuk, hogy F *automorfizmus*a D-nek, a D automorfizmusai által alkotott csoportot $\mathrm{Aut}(D)$-vel jelöljük.

(k) Ha $\pi\colon E \longrightarrow M$ egy vektornyaláb és $c\colon I \longrightarrow M$ egy sima görbe, akkor egy $s\colon I \longrightarrow E$ sima leképezést *c-menti szelés*nek mondunk, ha $\pi \circ s = c$. A c-menti szelések egy $C^\infty(I)$-modulust alkotnak, amelyet $\mathrm{Sec}_c(\pi)$-vel jelölünk. Ha D kovariáns deriválás π-n, akkor egyértelműen létezik olyan $D_c\colon \mathrm{Sec}_c(\pi) \longrightarrow \mathrm{Sec}_c(\pi)$ $\mathbb{R}$-lineáris leképezés, amely eleget tesz a következő feltételeknek:
(1) bármely $s \in \mathrm{Sec}_c(\pi)$ és $f \in C^\infty(I)$ esetén $D_c(fs) = f's + fD_cs$,
(2) ha $\sigma \in \mathrm{Sec}(\pi)$ és $s := \sigma \circ c$, akkor $(D_cs)(t) = D_{\dot{c}(t)}\sigma$, $t \in I$.
A D_c leképezést a D-hez csatolt *c-menti kovariáns deriválás*nak nevezzük.

(l) A τ_M érintőnyaláb τ fölötti *visszahúzott*ja (pull-backje) az a $\tau^*\tau$ vektornyaláb, amelynek totáltere

$$TM \times_M TM := \{(v, w) \in TM \times TM \mid \tau(v) = \tau(w)\},$$

és projekciója a $(v, w) \in TM \times TM \longmapsto v \in TM$ leképezés. Szükségünk van arra a $\mathring{\tau}^*\tau$ visszahúzott nyalábra is, ahol $\mathring{\tau}\colon \mathring{T}M \longrightarrow M$ a τ a hasított érintőnyaláb: $\mathring{T}M := TM \setminus o(M)$ ($o \in \mathfrak{X}(M)$ a zérus vektormező), $\mathring{\tau} := \tau \restriction \mathring{T}M$.

$\tau^*\tau$ széléseinek $\mathrm{Sec}(\tau^*\tau)$ $C^\infty(TM)$-modulusát generálják az

$$\widehat{X}\colon v \in TM \mapsto \widehat{X}(v) := (v, X(\tau(v))) \in TM \times_M TM,\ X \in \mathfrak{X}(M)$$

bázikus vektormezők.
A $\delta\colon v \in TM \longmapsto \delta(v) := (v, v) \in TM \times_M TM$ szelést $\tau^*\tau$ *kanonikus szelés*ének hívjuk.

(m) Egy $D\colon \mathfrak{X}(TM) \times \mathrm{Sec}(\tau^*\tau) \longrightarrow \mathrm{Sec}(\tau^*\tau)$ kovariáns deriválás *geodetikus*án olyan $\gamma\colon I \longrightarrow M$ reguláris görbét értünk, amely eleget tesz a $D_{\dot\gamma}(\delta \circ \dot\gamma) = 0$ feltételnek; ami ekvivalens a $D_{\ddot\gamma(t)}\delta = 0$, $t \in I$ feltétellel (lásd (k)/(2)).

2. Struktúrák az érintőnyalábon

Ebben a fejezetben röviden összefoglaljuk a τ_M érintőnyalábon értelmezhető alapvető kanonikus objektumokat, és leírjuk, hogyan változnak egy előretolás hatására.

(a) $f^{\mathsf{v}} := f \circ \tau$ és $f^{\mathsf{c}} \colon v \in TM \longmapsto f^{\mathsf{c}}(v) := v(f) \in \mathbb{R}$ egy $f \in C^\infty(M)$ függvény *vertikális*, illetve *teljes lift*je. Ha $\varphi \colon M \longrightarrow M$ sima leképezés, akkor $(f \circ \varphi)^{\mathsf{c}} = f^{\mathsf{c}} \circ \varphi_*$.

(b) Egy TM-en értelmezett ξ vektormezőt *vertikális*nak mondunk, ha $\xi \underset{\tau}{\sim} 0$; a vertikális vektormezők $\mathfrak{X}^{\mathsf{v}}(TM)$ algebrája részalgebrája az $\mathfrak{X}(TM)$ Lie-algebrának. Egy $X \in \mathfrak{X}(M)$ vektormező *vertikális lift*je az az egyértelműen létező X^{v} vertikális vektormező, amely eleget tesz a $X^{\mathsf{v}} f^{\mathsf{c}} = (Xf)^{\mathsf{v}}$ feltételnek, bármely $f \in C^\infty(M)$ esetén. Létezik egy kitüntetett vertikális vektormező TM-en, a C-vel jelölt *Liouville-vektormező*, amelyet azzal jellemezhetünk, hogy $Cf^{\mathsf{v}} = 0$ és $Cf^{\mathsf{c}} = f^{\mathsf{c}}$ $(f \in C^\infty(M))$.

(c) Tetszőleges $X \in \mathfrak{X}(M)$ vektormezőhöz egyértelműen létezik olyan $X^{\mathsf{c}} \in \mathfrak{X}(TM)$ vektormező, amelyre $X^{\mathsf{c}} f^{\mathsf{v}} = (Xf)^{\mathsf{v}}$ és $X^{\mathsf{c}} f^{\mathsf{c}} = (Xf)^{\mathsf{c}}$ teljesül bármely $f \in C^\infty(M)$ esetén; ezt a vektormezőt X *teljes lift*jének nevezzük. Ekkor $X^{\mathsf{c}} \underset{\tau}{\sim} X$, és $X \underset{\varphi}{\sim} Y$ maga után vonja $X^{\mathsf{c}} \underset{\varphi_*}{\sim} Y^{\mathsf{c}}$ teljesülését (2.1.3. lemma). Ha $\varphi \in \mathrm{Diff}(M)$, akkor $(\varphi_*)_\# X^{\mathsf{c}} = (\varphi_\# X)^{\mathsf{c}}$.

(d) Fontos szerepet játszik a

$$0 \longrightarrow TM \times_M TM \xrightarrow{\mathbf{i}} TTM \xrightarrow{\mathbf{j}} TM \times_M TM \longrightarrow 0,$$

kanonikus egzakt sorozat, ahol $\mathbf{i}$ és $\mathbf{j}$ az alábbiak szerint van értelmezve:

$$\mathbf{i}(v,w) := \dot{c}(0);\ \ c(t) := v + tw\ (t \in \mathbb{R});\ \ \mathbf{j}(z) := (\tau_{TM}(z), \tau_*(z)).$$

A $\mathbf{J} := \mathbf{i} \circ \mathbf{j}$ leképezést TTM *vertikális endomorfizmusának* hívjuk. A 1./(d)-ben mondottak alapján $\mathbf{i}$ és $\mathbf{j}$ $C^\infty(TM)$-homomorfizmusokat indukál a megfelelő szelések modulusai között, ezeket szintén $\mathbf{i}$-vel és $\mathbf{j}$-vel jelöljük. Hasznosak a következő relációk:

$$C = \mathbf{i}\delta, \qquad [C, \mathbf{J}] = -\mathbf{J};$$
$$\mathbf{j}X^{\mathsf{c}} = \widehat{X}, \quad \mathbf{j} \circ X^{\mathsf{v}} = 0, \quad \mathbf{J}X^{\mathsf{c}} = X^{\mathsf{v}},$$
$$[X^{\mathsf{v}}, \mathbf{J}] = [X^{\mathsf{c}}, \mathbf{J}] = 0, \qquad (X \in \mathfrak{X}(M)).$$

Könnyen ellenőrizhető, hogy tetszőleges $\gamma\colon I \longrightarrow M$ sima görbe esetén $\mathbf{j} \circ \ddot{\gamma} = \delta \circ \dot{\gamma}$ (2.2.1. lemma).

(e) Ha $\varphi \in \mathrm{Diff}(M)$, és $\varphi_* \times \varphi_*$ jelöli a

$$(u, v) \in TM \times_M TM \longmapsto (\varphi_*(u), \varphi_*(v)) \in TM \times_M TM$$

leképezést, akkor $(\varphi_* \times \varphi_*, \varphi_*)$ nyalábautomorfizmusa $\tau^*\tau$-nak. $\varphi_\# \widetilde{X}$-mal jelöljük egy $\widetilde{X} \in \mathrm{Sec}(\tau^*\tau)$ szelés $\varphi_* \times \varphi_*$ általi előretoltját; ekkor (v.ö. 1./(e))

$$\varphi_\# \widetilde{X} = (\varphi_* \times \varphi_*) \circ \widetilde{X} \circ \varphi_*^{-1}.$$

Speciálisan, *tetszőleges M-en adott X vektormező esetén* $\varphi_\# \widehat{X} = \widehat{\varphi_\# X}$ (2.3.2. lemma), *teljesül továbbá, hogy* $\varphi_\# \delta = \delta$.

2.3.3. Lemma. *Ha $\varphi\colon M \longrightarrow M$ sima leképezés, akkor*

$$\varphi_{**} \circ \mathbf{i} = \mathbf{i} \circ (\varphi_* \times \varphi_*), \qquad (\varphi_* \times \varphi_*) \circ \mathbf{j} = \mathbf{j} \circ \varphi_{**},$$
$$\varphi_{**} \circ \mathbf{J} = \mathbf{J} \circ \varphi_{**}.$$

Amennyiben φ diffeomorfizmus, úgy (2.3.4. következmény)

$$(\varphi_*)_\# C = C, \qquad (\varphi_*)_\# X^{\mathsf{v}} = (\varphi_\# X)^{\mathsf{v}} \quad (X \in \mathfrak{X}(M));$$

továbbá (2.3.5. következmény)

$$(\varphi_*)_\# \circ \mathbf{i} = \mathbf{i} \circ \varphi_\#, \qquad \varphi_\# \circ \mathbf{j} = \mathbf{j} \circ (\varphi_*)_\#,$$
$$(\varphi_*)_\# \circ \mathbf{J} = \mathbf{J} \circ (\varphi_*)_\#.$$

3. Spray-sokaságok

Ebben a fejezetben definiáljuk a másodrendű vektormezőket és legfontosabb variánsaikat. Felidézzük és összegyűjtjük a hozzájuk kapcsolódó alapvető tényeket, és megtesszük első észrevételeinket az affinitásaik és automorfizmusaik kapcsolatára vonatkozóan.

(a) Egy $\mathring{T}M$ fölött sima $S\colon TM \longrightarrow TTM$ leképezés *szemispray*, ha $\tau_{TM} \circ S = 1_{TM}$, zérusvektort zérusvektorba visz, és eleget tesz a $\mathbf{j}S = \delta$ (vagy – ekvivalens módon – a $\mathbf{J}S = C$) feltételnek. Egy szemisprayt *másodrendű vektormező*nek mondunk, ha a teljes értelmezési tartományán sima. *Spray*n olyan C^1-osztályú szemisprayt értünk, amely másodfokú pozitív homogén abban az értelemben, hogy $[C, S] = S$. Egy C^2-osztályú sprayt *affin spray*nek nevezünk.

(b) Ha S szemispray TM-en, akkor tetszőleges $\xi \in \mathfrak{X}(TM)$, illetve $X \in \mathfrak{X}(M)$ esetén $\mathbf{J}[\mathbf{J}\xi, S] = \mathbf{J}\xi$ (Grifone-reláció), teljesül továbbá, hogy $[X^{\mathsf{v}}, S] = X^{\mathsf{c}} + \eta$, ahol $\eta \in \mathfrak{X}^{\mathsf{v}}(TM)$.

(c) Egy reguláris $\gamma \colon I \longrightarrow M$ görbe *geodetikus*a egy S szemispraynek, ha a sebességvektormezője integrálgörbéje S-nek, azaz ha $S \circ \dot{\gamma} = \ddot{\gamma}$. Egy $\varphi \colon M \longrightarrow M$ diffeomorfizmus *affinitás*a (vagy *totálgeodetikus transzformáció*ja) egy S szemispraynek, ha megőrzi a geodetikusokat (mint parametrizált görbéket), vagyis ha

$$\ddot{\overline{\varphi \circ \gamma}} = S \circ \dot{\overline{\varphi \circ \gamma}}, \qquad \textit{minden } \gamma \colon I \longrightarrow M \textit{ geodetikus esetén.}$$

Egy S szemispray affinitásai Lie-csoportot alkotnak, amelyet $\mathrm{Aff}(S)$-sel jelölünk.

(d) Ha S szemispray és $\varphi \in \mathrm{Diff}(M)$, akkor $(\varphi_*)_\# S$ szintén szemispray, és – speciálisan – spray, ha S is spray. φ-t S *automorfizmus*ának hívjuk, ha $(\varphi_*)_\# S = S$, azaz ha $\varphi_{**} \circ S = S \circ \varphi_*$. $\mathrm{Aut}(S)$ jelöli S automorfizmusainak csoportját.

(e) *Ha S szemispray és $\varphi \in \mathrm{Diff}(M)$, akkor tetszőleges $\gamma \colon I \longrightarrow M$ geodetikus esetén*

$$(\varphi_{**} \circ S - S \circ \varphi_*) \circ \dot{\gamma} = 0 \qquad (3.2.2.);$$

teljesül továbbá, hogy

$$\mathrm{Aff}(S) = \mathrm{Aut}(S) \qquad (3.2.5.).$$

4. Ehresmann-konnexiók

Ebben a fejezetben az Ehresmann-konnexiókat vizsgáljuk. Egyrészt néhány fontos ismert tételt igazolunk új eszközök és ötletek segítségével (4.1.3., 4.3.2.-4.3.5.), másrészt pedig – és ez a fejezet fő eredménye – egy Ehresmann-konnexió automorfizmusait jellemezzük az affinitásai és az erős torziója segítségével (4.5.7.). Mindez, egy gondos diszkusszió révén, lehetővé teszi annak a klasszikus tételnek egy élesítését, amely szerint 'egy sokaság diffeomorfizmusa pontosan akkor automorfizmusa egy kovariáns deriválásnak, ha affinitás és megőrzi a torziót'.

(a) Egy M sokaság fölötti $\mathcal{H}$ *Ehresmann-konnexión* a 3./(d)-beli kanonikus egzakt sorozat olyan jobboldali hasítását értjük, amely $\mathring{T}M \times_M TM$ fölött sima, és amelyre tetszőleges $p \in M$, $v \in T_pM$ esetén $\mathcal{H}(o(p), v) := (o_*)_p(v)$ teljesül, ahol $o \in \mathfrak{X}(M)$ a zérus vektormező. $\mathbf{h} := \mathcal{H} \circ \mathbf{j}$, $\mathbf{v} := 1_{TTM} - \mathbf{h}$, $\mathcal{V} := \mathbf{i}^{-1} \circ \mathbf{v}$ és $S_{\mathcal{H}} := \mathcal{H} \circ \delta$ rendre a $\mathcal{H}$ Ehresmann-konnexióhoz csatolt *horizontális projektor*, *vertikális projektor*, *vertikális leképezés* és *szemispray*. Egy $X \in \mathfrak{X}(M)$ vektormező ($\mathcal{H}$ szerinti) *horizontális lift*je az $X^{\mathsf{h}} := \mathcal{H}(\widehat{X}) = \mathbf{h}X^{\mathsf{c}} \in \mathfrak{X}(\mathring{T}M)$ vektormező.

(b) Ha S szemispray M fölött, akkor egyértelműen létezik olyan $\mathcal{H}_S$ Ehresmann-konnexió, hogy

$$\mathcal{H}_S(\widehat{X}) = \frac{1}{2}(X^{\mathsf{c}} - [X^{\mathsf{v}}, S]), \quad \forall X \in \mathfrak{X}(M) \qquad (\textit{Crampin}).$$

A $\mathcal{H}$-hoz tartozó horizontális projektor

$$\mathbf{h}_S = \frac{1}{2}(1_{\mathfrak{X}(TM)} - [S, \mathbf{J}]) \qquad (\textit{Grifone})$$

(4.1.3. állítás).

(c) Legyen $\mathcal{H}$ Ehresmann-konnexió az M sokaság fölött. Ha

$$\nabla_\xi \widetilde{Y} := \mathbf{j}[\mathbf{v}\xi, \mathcal{H}\widetilde{Y}] + \mathcal{V}[\mathbf{h}\xi, \mathbf{i}\widetilde{Y}]; \qquad \xi \in \mathfrak{X}(TM),\ \widetilde{Y} \in \mathrm{Sec}(\mathring{\tau}^*\tau),$$

akkor ∇ kovariáns deriválás $\mathring{\tau}^*\tau$-n, amelyet a $\mathcal{H}$ által indukált *Berwald-deriválás*nak hívunk. A

$$\nabla^{\mathsf{h}}_{\widetilde{X}} \widetilde{Y} := \nabla_{\mathcal{H}\widetilde{X}} \widetilde{Y}, \ \text{ illetve a } \ \nabla^{\mathsf{v}}_{\widetilde{X}} \widetilde{Y} := \nabla_{\mathbf{i}\widetilde{X}} \widetilde{Y} \quad (\widetilde{X}, \widetilde{Y} \in \mathrm{Sec}(\mathring{\tau}^*\tau))$$

formulával értelmezett ∇^{h}, illetve ∇^{v} operátor a ($\mathcal{H}$-hoz tartozó) *h-Berwald deriválás*, illetve (*kanonikus*) *vertikális deriválás*. (Könnyen látható, hogy ∇^{v} nem függ az Ehresmann-konnexió megválasztásától.) Egy $\mathcal{H}$ Ehresmann-konnexió $\mathbf{t}$ *tenzió*ja, $\mathbf{T}$ *torzió*ja, és $\mathbf{T}^{\mathsf{s}}$ *erős torzió*ja rendre a $\mathbf{t} := \nabla^{\mathsf{h}}\delta$, $\mathbf{T}(\widetilde{X}, \widetilde{Y}) := \nabla^{\mathsf{h}}_{\widetilde{X}} \widetilde{Y} - \nabla^{\mathsf{h}}_{\widetilde{Y}} \widetilde{X} - \mathbf{j}[\mathcal{H}\widetilde{X}, \mathcal{H}\widetilde{Y}]$ $(\widetilde{X}, \widetilde{Y} \in \mathrm{Sec}(\mathring{\tau}^*\tau))$ és $\mathbf{T}^{\mathsf{s}} := \mathbf{t} + i_\delta \mathbf{T}$ tenzor. $\mathcal{H}$ *homogén*, ha a tenziója eltűnik. *Homogén esetben az $S_{\mathcal{H}}$ csatolt szemispray spray. Megfordítva, ha $S_{\mathcal{H}}$ spray, akkor* $\mathbf{t}(\delta) = 0$ (4.2.3. lemma).

4.3.2. Állítás. $\frac{1}{2}\mathbf{i}\mathbf{T}^{\mathsf{s}} = \mathcal{H} - \mathcal{H}_{S_{\mathcal{H}}}$, *ahol az $\mathcal{H}_{S_{\mathcal{H}}}$ Ehresmann-konnexió az $S_{\mathcal{H}}$ szemisprayből származik* (lásd (b)).
Következményként adódik (4.3.3., 4.3.4.), hogy *egy $\mathcal{H}$ Ehresmann-konnexiót tekintve az alábbi három feltétel ekvivalens: (i) $\mathcal{H}$ erős torziója eltűnik. (ii) $\mathcal{H} = \mathcal{H}_{S_{\mathcal{H}}}$. (iii)* $\mathbf{t} = 0$

és $\mathbf{T} = 0$.
Ugyancsak 4.3.2. alapján nyerhető a

4.3.5. Következmény (*Unicitás-tétel*). *Egy Ehresmann-konnexiót egyértelműen meghatározza az erős torziója és az általa indukált szemispray.*

(d) Amennyiben $\mathcal{H}$ Ehresmann-konnexió M fölött és $\varphi \in \mathrm{Diff}(M)$, úgy $\varphi^{\#}\mathcal{H} := \varphi_{**}^{-1} \circ \mathcal{H} \circ (\varphi_* \times \varphi_*)$ szintén Ehresmann-konnexió, $\mathcal{H}$ φ általi *visszahúzottja.* Ha $\varphi^{\#}\mathcal{H} = \mathcal{H}$, és így $\varphi_{**} \circ \mathcal{H} = \mathcal{H} \circ (\varphi_* \times \varphi_*)$, akkor φ-t $\mathcal{H}$ *automorfizmus*ának nevezzük. $\mathrm{Aut}(\mathcal{H})$ jelöli $\mathcal{H}$ automorfizmusainak csoportját. *A következő állítások ekvivalensek:*

$$\text{(i)}\;\; \varphi \in \mathrm{Aut}(\mathcal{H}), \qquad \text{(ii)}\;\; (\varphi_* \times \varphi_*) \circ \mathcal{V} = \mathcal{V} \circ \varphi_{**},$$
$$\text{(iii)}\;\; \varphi_{**} \circ \mathbf{h} = \mathbf{h} \circ \varphi_{**}, \quad \text{(iv)}\;\; \varphi_{**} \circ \mathbf{v} = \mathbf{v} \circ \varphi_{**},$$
$$\text{(v)}\;\; (\varphi_*)_{\#} X^{\mathsf{h}} = (\varphi_{\#} X)^{\mathsf{h}}, \quad \text{minden } X \in \mathfrak{X}(M)\text{-re}$$

(4.5.2. állítás). *Ha (i)-(v) valamelyike, és ezért bármelyike teljesül, akkor* $\mathbf{t}$, $\mathbf{T}$ *és* $\mathbf{T}^{\mathsf{s}}$ *eleget tesz a*

$$\varphi_{\#} \circ \mathbf{t} = \mathbf{t} \circ \varphi_{\#}, \; \varphi_{\#} \circ \mathbf{T} = \mathbf{T} \circ (\varphi_{\#} \times \varphi_{\#}), \; \varphi_{\#} \circ \mathbf{T}^{\mathsf{s}} = \mathbf{T}^{\mathsf{s}} \circ \varphi_{\#}$$

felcserélési relációknak (4.5.3. állítás).

4.5.4. és 4.5.5. Állítások. *Legyen $\mathcal{H}$ egy M sokaság fölötti Ehresmann-konnexió, és legyen ∇ a $\mathcal{H}$ által indukált Berwald-deriválás. Ekkor*

$$\mathrm{Aut}(\mathcal{H}) \subset \mathrm{Aut}(\nabla) \cap \mathrm{Aut}(S_{\mathcal{H}}).$$

Megfordítva, ha S szemispray M fölött, akkor

$$\mathrm{Aut}(S) \subset \mathrm{Aut}(\mathcal{H}_S).$$

4.5.6. Tétel. *Az M sokaság egy φ diffeomorfizmusa akkor és csak akkor automorfizmusa egy (M fölötti) $\mathcal{H}$ Ehresmann-konnexiónak, ha automorfizmusa $S_{\mathcal{H}}$-nak és eleget tesz a $\varphi_{\#} \circ \mathbf{T^s} = \mathbf{T^s} \circ \varphi_{\#}$ relációnak.*

(e) Egy $\gamma\colon I \longrightarrow M$ reguláris görbe *geodetikus*a a $\mathcal{H}$ Ehresmann-konnexiónak, ha $\mathcal{V} \circ \ddot{\gamma} = 0$, vagy – ekvivalens módon – $\mathbf{h} \circ \ddot{\gamma} = \ddot{\gamma}$. *$\mathcal{H}$ geodetikusai egybeesnek a csatolt $S_{\mathcal{H}}$ szemispray geodetikusaival* (4.4.2. állítás). *$\mathcal{H}$ homogenitása esetén $\mathcal{H}$-nak és az által indukált Berwald-deriválásnak ugyanazok a geodetikusai* (4.4.4. lemma). *Ez a tulajdonság pontosan akkor teljesül, ha $S_{\mathcal{H}}$ spray* (4.4.6. állítás).

(f) Egy $\varphi \in \mathrm{Diff}(M)$ leképezés *affinitás*a egy (M sokaság fölötti) $\mathcal{H}$ Ehresmann-konnexiónak, ha megőrzi a geodetikusokat mint parametrizált görbéket (v.ö. 3./(c)). A $\mathcal{H}$ összes affinitása által alkotott csoportot $\mathrm{Aff}(\mathcal{H})$-val jelöljük. Ugyanígy definiálhatjuk egy $\tau^*\tau$-n értelmezett D és egy M-en adott $\mathring{D}$ kovariáns deriválás $\mathrm{Aff}(D)$ és $\mathrm{Aff}(\mathring{D})$ affinitáscsoportját. Az (e) pontban tett észrevételekből azonnal adódik, hogy

$$\mathrm{Aff}(\mathcal{H}) = \mathrm{Aff}(S_{\mathcal{H}}) \qquad \text{(4.4.3. következmény);}$$

és hogy

$$\mathrm{Aff}(\mathcal{H}) = \mathrm{Aff}(\nabla), \quad \textit{ha } \mathcal{H} \textit{ homogén} \qquad \text{(4.4.5. következmény).}$$

Mivel $\mathrm{Aut}(S_{\mathcal{H}}) = \mathrm{Aff}(S_{\mathcal{H}})$ (lásd 3.2.5.), a 4.5.6. tétel a következő fontos eredményhez vezet:

4.5.7. Következmény. *φ pontosan akkor automorfizmusa a $\mathcal{H}$ Ehresmann-konnexiónak, ha affinitása $\mathcal{H}$-nak és $\varphi_\# \circ \mathbf{T}^{\mathbf{s}} = \mathbf{T}^{\mathbf{s}} \circ \varphi_\#$.*

Végül, tekintve egy $\mathring{D}$ kovariáns deriválást az M sokaságon, új jellemzését adjuk a $\mathring{D}$-automorfizmusoknak.

4.5.8. Tétel. *$\varphi \in \mathrm{Aut}(\mathring{D})$ pontosan akkor teljesül, ha $\varphi \in \mathrm{Aff}(\mathring{D})$ és $\varphi_\# \circ i_\delta \mathbf{T} = i_\delta \mathbf{T} \circ \varphi_\#$, ahol $\mathbf{T}(\widehat{X}, \widehat{Y}) = \mathbf{i}^{-1}(T(\mathring{D})(X,Y))^{\mathsf{v}}$, $T(\mathring{D})$ $\mathring{D}$ torziója és $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$.*

5. Vonalelem D-sokaságok

Ebben a fejezetben a $\tau^*\tau$ nyalábon adott kovariáns deriválásokat vizsgálunk. Többféle regularitás-fogalmat vezetünk be és jellemezzük ezeket. Megmutatjuk, hogy bármely $\tau^*\tau$-on adott reguláris kovariáns deriválásból kanonikusan származtatható egy Ehresmann-konnexió. Konstrukcióink egy Ehresmann-konnexió tenziójának új interpretációjához is elvezetnek. A fejezet fő eredményei (5.4.7., 5.4.9., 5.4.11.) korábbi állítások (4.5.6., 4.5.8.) általánosításai a $\tau^*\tau$ visszahúzott nyalábon adott reguláris kovariáns deriválásokra.

(a) *Vonalelem D-sokaság*on olyan (M, D) párt értünk, ahol M egy sima sokaság, D pedig kovariáns deriválás a $\tau^*\tau$ visszahúzott nyalábon. A D-hez tartozó D^{v} *v-kovariáns deriválás*t a $D^{\mathsf{v}}_{\widetilde{X}}\widetilde{Y} = D_{\mathbf{i}\widetilde{X}}\widetilde{Y}$ $(\widetilde{X}, \widetilde{Y} \in \mathrm{Sec}(\tau^*\tau))$ előírással értelmezzük. D

*torzió*ja a

$$T(D)(\xi,\eta) := D_\xi \mathbf{j}\eta - D_\eta \mathbf{j}\xi - \mathbf{j}[\xi,\eta]; \qquad \xi,\eta \in \mathfrak{X}(TM)$$

formulával definiált $T(D)$ $\binom{1}{2}$-tenzor. Az

$$\mathcal{S}(\widetilde{X},\widetilde{Y}) := \nabla^{\mathsf{v}}_{\widetilde{Y}}\widetilde{X} - D^{\mathsf{v}}_{\widetilde{Y}}\widetilde{X}; \qquad \widetilde{X},\widetilde{Y} \in \operatorname{Sec}(\tau^*\tau)$$

előírással adott $\mathcal{S}$ különbségtenzort D *Finsler-torzió*jaként is említjük. Ha egy $\mathcal{H}$ Ehresmann-konnexiót is kijelölünk M fölött, akkor a D kovariáns deriválás $\mathcal{T}$ ($\mathcal{H}$-) *horizontális torzió*ját, $T^{\mathsf{v}}(D)$ ($\mathcal{H}$-) *vertikális torzió*ját, és $\mathcal{P}$ *horizontális különbségtenzor*át rendre a

$$\begin{aligned}\mathcal{T}(\widetilde{X},\widetilde{Y}) &:= D_{\mathcal{H}\widetilde{X}}\widetilde{Y} - D_{\mathcal{H}\widetilde{Y}}\widetilde{X} - \mathbf{j}[\mathcal{H}\widetilde{X},\mathcal{H}\widetilde{Y}],\\ T^{\mathsf{v}}(D)(\xi,\eta) &:= D_\xi\mathcal{V}\eta - D_\eta\mathcal{V}\xi - \mathcal{V}[\xi,\eta],\\ \mathcal{P}(\widetilde{X},\widetilde{Y}) &:= D_{\mathcal{H}\widetilde{X}}\widetilde{Y} - \nabla_{\mathcal{H}\widetilde{X}}\widetilde{Y}.\end{aligned}$$

formulákkal vezetjük be, ahol $\widetilde{X},\widetilde{Y} \in \operatorname{Sec}(\tau^*\tau)$, $\xi,\eta \in \mathfrak{X}(TM)$. Megjegyezzük, hogy $\mathcal{P}(\widetilde{X},\widetilde{Y}) = T^{\mathsf{v}}(D)(\mathcal{H}\widetilde{X},\mathbf{i}\widetilde{Y})$.

(b) Legyen D kovariáns deriválás $\tau^*\tau$-n. A $\mu := D\delta$, illetve $\mu^{\mathsf{v}} := \mu \circ \mathbf{i}$ $\binom{1}{1}$-tenzort D *deflexió*jának, illetve *v-deflexió*jának nevezzük. D *reguláris*, ha μ^{v} fibrumonként injektív; *erősen reguláris*, ha $\mu^{\mathsf{v}} = 1_{\operatorname{Sec}(\tau^*\tau)}$; *vertikálisan természetes*, ha $D^{\mathsf{v}} = \nabla^{\mathsf{v}}$.

5.1.4. Lemma. $\mu^{\mathsf{v}} = 1_{\operatorname{Sec}(\tau^*\tau)} - i_\delta\mathcal{S}$.

5.1.6. Következmény. *Egy kovariáns deriválás pontosan akkor vertikálisan természetes, erősen reguláris, illetve reguláris, ha* $\mathcal{S} = 0$, $i_\delta\mathcal{S} = 0$, *illetve ha* $1_{\operatorname{Sec}(\tau^*\tau)} - i_\delta\mathcal{S}$ *bijektív. A vertikális* *természetesség maga után vonja az erős regularitást, az erős regularitásból pedig következik a regularitás.*

(c) Legyen D kovariáns deriválás $\tau^*\tau$-n és legyen $\mathcal{H}$ M fölötti Ehresmann-konnexió. Ha $D^{\mathsf{h}}_{\widetilde{X}}\widetilde{Y} := D_{\mathcal{H}\widetilde{X}}\widetilde{Y}$ ($\widetilde{X}, \widetilde{Y} \in \mathrm{Sec}(\tau^*\tau)$), akkor azt mondjuk, hogy D^{h} a $\mathcal{H}$-hoz tartozó ***h-kovariáns deriválás***. D ***$\mathcal{H}$-deflexiója*** a $\mu^{\mathcal{H}} := D^{\mathsf{h}}\delta = \mu \circ \mathcal{H}$ $\binom{1}{1}$-tenzor. D ***$\mathcal{H}$-hoz csatolt***, ha $\mathrm{Ker}(\mu) = \mathrm{Im}(\mathcal{H})$; ***$D$ erősen csatolt a $\mathcal{H}$-hoz***, ha $\mu = \mathcal{V}$. Megmutatjuk a következőket:
– *egy $\mathcal{H}$ Ehresmann-konnexió által indukált Berwald-deriválás pontosan akkor erősen csatolt $\mathcal{H}$-hoz, ha $\mathcal{H}$ homogén* (5.1.8.);
– *D akkor és csak akkor csatolt $\mathcal{H}$-hoz, ha reguláris és $\mu^{\mathcal{H}} = 0$* (5.1.9./(1));
– *D pontosan akkor erősen csatolt $\mathcal{H}$-hoz, ha erősen reguláris és $\mu^{\mathcal{H}} = 0$* (5.1.9./(2)).

(d) Legyen D reguláris kovariáns deriválás a $\tau^*\tau$ visszahúzott nyalábon. A 5.2.1. tétel, 5.2.2. és 5.2.7. állítások eredményeit a következőképpen foglalhatjuk össze: *Egyértelműen létezik olyan $\mathcal{H}_D$ Ehresmann-konnexió, hogy D $\mathcal{H}_D$-deflexiója eltűnik. Bázikus vektormezőkön $\mathcal{H}_D$ hatását a*

$$\mathcal{H}_D(\widehat{X}) = X^{\mathsf{c}} - \mathbf{i}(\mu^{\mathsf{v}})^{-1} D_{X^{\mathsf{c}}}\delta, \qquad X \in \mathfrak{X}(M).$$

összefüggés adja meg. A $\mathcal{H}_D$-hez tartozó horizontális projektor a

$$\mathbf{h}_D = 1_{\mathfrak{X}(TM)} - \mathbf{i}(\mu^{\mathsf{v}})^{-1} D_{X^{\mathsf{c}}}\delta$$

leképezés, és $\mathrm{Im}(\mathcal{H}_D) = \mathrm{Ker}(\mu)$. *$\mathcal{H}_D$ akkor és csak akkor származik szemisprayből* a 4./(b) szerinti értelemben, *ha*

$\mathcal{T}(\widetilde{X},\widetilde{Y}) = \mathcal{P}(\widetilde{X},\widetilde{Y}) - \mathcal{P}(\widetilde{Y},\widetilde{X})$ $(\widetilde{X},\widetilde{Y} \in \mathrm{Sec}(\tau^*\tau))$, ahol $\mathcal{T}$ és $\mathcal{P}$ a $\mathcal{H}_D$-hez tartozó horizontális torzió, illetve különbségtenzor. Ha – speciálisan – D erősen reguláris, akkor $\mathcal{H}_D(\widehat{X}) = X^{\mathsf{c}} - \mathbf{i}D_{X^{\mathsf{c}}}\delta$, $\mathbf{h}_D = 1_{\mathfrak{X}(TM)} - \mathbf{i} \circ \mu$.
$\mathcal{H}_D$-t a D által indukált Ehresmann-konnexió*nak nevezzük.*

(e) Legyen adott egy $\mathcal{H}$ Ehresmann-konnexió, és legyen ∇ a $\mathcal{H}$ által indukált Berwald-deriválás. Ekkor tekinthetjük a ∇ által indukált $\mathcal{H}_\nabla$ Ehresmann-konnexiót, és a következő eredményhez jutunk:

A tenzió interpretációja (5.2.4.) **:** $\mathbf{it} = \mathcal{H} - \mathcal{H}_\nabla$.

(f) A dolgozat fő részét lezáró 5. fejezetben többféle jellemzést adunk egy $\tau^*\tau$-n értelmezett D reguláris kovariáns deriválás automorfizmusaira. Az 5.4.7., 5.4.9. és 5.4.11. tételek eredményei az alábbiakban foglalhatók össze.

Tekintve a D által indukált $\mathcal{H}_D$ Ehresmann-konnexiót, és képezve erre vonatkozóan a $\mathbf{T}^{\mathsf{s}}$, $\mathcal{T}$ és $T^{\mathsf{v}}(D)$ torziókat, valamint a $\mathcal{P}$ különbségtenzort, egy $\varphi \in$ Diff(M) diffeomorfizmusra a következő állítások ekvivalensek:
(i) $\varphi \in \mathrm{Aut}(D)$.
(ii) $\varphi \in \mathrm{Aut}(\mathcal{H}_D)$, és φ eleget tesz a $\varphi_\# \circ \mathcal{S} = \mathcal{S} \circ (\varphi_\# \times \varphi_\#)$, $\varphi_\# \circ \mathcal{P} = \mathcal{P} \circ (\varphi_\# \times \varphi_\#)$ relációknak.
(iii) $\varphi \in \mathrm{Aff}(D)$, és φ eleget tesz a $\varphi_\# \circ \mathbf{T}^{\mathsf{s}} = \mathbf{T}^{\mathsf{s}} \circ \varphi_\#$, $\varphi_\# \circ \mathcal{S} = \mathcal{S} \circ (\varphi_\# \times \varphi_\#)$, $\varphi_\# \circ \mathcal{P} = \mathcal{P} \circ (\varphi_\# \times \varphi_\#)$ relációknak.
(iv) $\varphi \in \mathrm{Aff}(D)$, és φ eleget tesz a $\varphi_\# \circ T(D) = T(D) \circ ((\varphi_*)_\# \times (\varphi_*)_\#)$, $\varphi_\# \circ T^{\mathsf{v}}(D) = T^{\mathsf{v}}(D) \circ ((\varphi_*)_\# \times (\varphi_*)_\#)$ relációknak.

6. Appendix: a koordinátás nézőpont

Az Appendixben levezetjük egy szemispray koefficienseinek, egy Ehresmann-konnexió és egy, a $\tau^*\tau$ nyalábon adott kovariáns deriválás, valamint egy tetszőleges π vektornyalábon adott kovariáns deriválás Christoffel-szimbólumainak transzformációs szabályát térképcsere esetén. Mai nyelven történő (de koordinátás) leírását adjuk a Varga Ottó által bevezetett invariáns differenciálnak. Kiderül, hogy ez az operátor azonosítható a Hashiguchi-féle „vonalelem-sokaságon adott affin konnexió”-val, és hogy mindkét differenciálási eljárás a disszertációban szereplő, a $\tau^*\tau$ nyalábon értelmezett kovariáns deriválás egy-egy lokális megjelenítésének tekinthető.

Introduction

The main purpose of our Thesis is to describe the exact relation between the automorphism group and the affinity group in the case of an Ehresmann connection and of a regular covariant derivative operator on the pull-back bundle $\tau^*\tau$ (where $\tau\colon TM \longrightarrow M$ is the tangent bundle of a manifold M). Working on these problems we also obtained, as a by-product, some interesting new and partly new results concerning the general theory of Ehresmann connections and covariant derivatives, including new proofs of important known theorems.

The Thesis consists of five chapters and an appendix. In Chapter 1 we fix our basic notation, conventions, recall some fundamental concepts and facts, and make some simple observations of technical character.

In Chapter 2 we introduce the special concepts and constructions which we need for our investigations (canonical objects on the tangent bundle, push-forward of vector fields and sections, etc.).

In Chapter 3 we show that the automorphism group and the affinity group of a semispray coincide.

Chapter 4 is devoted to Ehresmann connections. In the first section we give a simple, partly new proof of a fundamental theorem, discovered independently by M. Crampin and J. Grifone. In terms of the difference tensor of two Ehresmann connections, we give a new interpretation of the strong torsion of an Ehresmann connection, which leads to a simple deduction of further classical theorems. The main results of the chapter are presented in section 4.5. We show that the automorphism group of an Ehresmann connection is a subgroup of the automorphism group of the Berwald derivative associated to the connection. We prove that a diffeomorphism of the base manifold is an automorphism of an Ehresmann connection, if and only if, it is an automorphism of the associated semispray and preserves the strong torsion. This result leads to a characterization of automorphisms as strong-torsion preserving affinities, and, after a careful discussion, a strengthening of the analogous result concerning the automorphisms of a D-manifold.

In Chapter 5 we deal with covariant derivatives on $\tau^*\tau$. We introduce and characterize different regularity conditions and associatedness concepts. Starting from a regular covariant derivative, we construct a natural Ehresmann connection $\mathcal{H}$ such that the $\mathcal{H}$-deflection of the covariant derivative vanishes. In particular, we obtain a new interpretation of the tension of an Ehresmann connection. The main results of the chapter characterize the automorphisms of a regular covariant derivative as affinities which preserve some torsions.

Throughout the Thesis, we formulate our definitions and theorems intrinsically, i.e., in an index-free manner, but we also pay attention to their description in terms of local coordinates; the whole Appendix is devoted to these aspects.

In the following we present a more detailed summary of the contents of the Thesis, chapter by chapter.

1. Vector bundles and covariant differentiation

The aim of the first chapter is to fix our notation, conventions, and to recall some basic concepts and facts which will be used throughout the Thesis.

(a) By a *manifold* we always mean a connected, Hausdorff, second countable smooth manifold of finite (positive) dimension. $C^\infty(M)$ is the ring of smooth real-valued functions on a manifold M, $\mathrm{Diff}(M)$ denotes the group of diffeomorphisms of M.

(b) A real *vector bundle* of rank k over a manifold M is a smooth map $\pi\colon E \longrightarrow M$ such that
(1) each *fibre* $E_p := \pi^{-1}(p)$, $p \in M$ is a k-dimensional real vector space;
(2) for each $p \in M$ there is a neighbourhood $\mathcal{U}$ of p in M and a diffeomorphism $\varphi\colon \mathcal{U} \times \mathbb{R}^k \longrightarrow \pi^{-1}(\mathcal{U})$ such that for each $q \in \mathcal{U}$, the map

$$v \in \mathbb{R}^k \longmapsto \varphi(q, v) \in E_q$$

is a linear isomorphism.
Then E, M and π are called the *total space*, the *base manifold* and the *projection*, respectively. A smooth map $\sigma\colon M \longrightarrow E$ is a *section* of π if $\pi \circ \sigma = 1_M$. More generally, a section over an open subset $\mathcal{U} \subset M$ is a smooth map $\sigma\colon \mathcal{U} \longrightarrow E$ with $\pi \circ \sigma = 1_{\mathcal{U}}$. $\mathrm{Sec}(\pi)$ denotes the $C^\infty(M)$-module of sections of π.

If $\pi\colon E \longrightarrow M$ is a real vector bundle of rank k, then for each point $p \in M$ there exists a neighbourhood $\mathcal{U}$ of p and a family $(\sigma_\alpha)_{\alpha=1}^k$ of sections over $\mathcal{U}$ such that the map

$$\mathcal{U} \times \mathbb{R}^k \to \pi^{-1}(\mathcal{U}), \quad \left(q, \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \vdots \\ \nu_k \end{pmatrix} \right) \mapsto \nu^1 \sigma_1(q) + \cdots + \nu^k \sigma_k(q)$$

is a diffeomorphism. This is a characteristic property of vector bundles, used in the Thesis as the defining property.

(c) If $\pi_1\colon E_1 \longrightarrow M_1$ and $\pi_2\colon E_2 \longrightarrow M_2$ are two vector bundles, then a *bundle map* of π_1 into π_2 is a pair (F, f) of smooth maps $F\colon E_1 \longrightarrow E_2$ and $f\colon M_1 \longrightarrow M_2$ such that $\pi_2 \circ F = f \circ \pi_1$, and for each $p \in M_1$ the restriction $F \restriction (E_1)_p$ is an ($\mathbb{R}$-) linear map of $(E_1)_p$ into $(E_2)_{f(p)}$. A bundle map (F, f) is called an *isomorphism* if F is a diffeomorphism. An *automorphism* of a vector bundle is an isomorphism of the bundle onto itself.

(d) Let $\pi_1\colon E_1 \longrightarrow M$ and $\pi_2\colon E_2 \longrightarrow M$ be vector bundles with common base manifold. Then a smooth map $F\colon E_1 \longrightarrow E_2$ is said to be a *strong bundle map* if $(F, 1_M)$ is a bundle map of π_1 into π_2. Throughout the Thesis is (tacitly) used the *fundamental lemma of strong bundle maps* (1.2.2): a map $\mathcal{F}\colon \mathrm{Sec}(\pi_1) \longrightarrow \mathrm{Sec}(\pi_2)$ is $C^\infty(M)$-linear, if and only if, there is a strong bundle map $F\colon E_1 \longrightarrow E_2$ such that $\mathcal{F}(\sigma) = F \circ \sigma$, for all $\sigma \in \mathrm{Sec}(\pi_1)$.

(e) If (F, f) is an automorphism of the vector bundle $\pi\colon E \longrightarrow M$, then the *push-forward of a section* $\sigma \in \mathrm{Sec}(\pi)$ by F is the section

$$F_{\#}\sigma := F \circ \sigma \circ f^{-1}.$$

Then for any function $h \in C^{\infty}(M)$ we have

$$F_{\#}(h\sigma) = (h \circ f^{-1})F_{\#}\sigma.$$

(f) The *tangent bundle* of an n-dimensional manifold M is the vector bundle $\tau\colon TM \longrightarrow M$ (denoted also by τ_M) whose fibre at a point $p \in M$ is the tangent space T_pM. If $\varphi\colon M \longrightarrow N$ is a smooth map, then its *tangent map* or *derivative* $\varphi_*\colon TM \longrightarrow TN$ is given by

$$(\varphi_*)(v)(h) := v(h \circ \varphi); \qquad v \in T_pM,\ h \in C^{\infty}(N).$$

Then (φ_*, φ) is a bundle map of τ_M into τ_N, and hence

$$\tau_N \circ \varphi_* = \varphi \circ \tau_M, \qquad \tau_{TN} \circ \varphi_{**} = \varphi_* \circ \tau_{TM}.$$

(g) $\mathfrak{X}(M) := \mathrm{Sec}(\tau_M)$ is the $C^{\infty}(M)$-module of *vector fields* on M; $[X, Y]$ is the *Lie bracket* of $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$. If $\xi \in \mathfrak{X}(TM)$ and $A\colon \mathfrak{X}(TM) \longrightarrow \mathfrak{X}(TM)$ is a type $\binom{1}{1}$ tensor on TM, then their *Frölicher-Nijenhuis bracket* is the $\binom{1}{1}$ tensor $[\xi, A]$ given by

$$[\xi, A]\eta := [\xi, A\eta] - A[\xi, \eta], \qquad \eta \in \mathfrak{X}(TM).$$

(h) Two vector fields $X \in \mathfrak{X}(M)$, $Y \in \mathfrak{X}(N)$ are called *φ-related* with respect to a smooth map $\varphi\colon M \longrightarrow N$ if

$\varphi_* \circ X = Y \circ \varphi$; then we write $X \underset{\varphi}{\sim} Y$. If $\varphi \in \mathrm{Diff}(M)$, then $\varphi_\# X$ (see (e)) is the unique vector field on M which is φ-related to X.

(i) We denote by $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}$ the canonical vector field on $\mathbb{R}$ arising from the usual chart $(\mathbb{R}, r) := (\mathbb{R}, 1_{\mathbb{R}})$. The *velocity field* of a (smooth) curve $\gamma\colon I \longrightarrow M$ is $\dot\gamma := \gamma_* \circ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}$, the *acceleration field* of γ is

$$\ddot\gamma := \dot{\dot\gamma} = \dot\gamma_* \circ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} = \left(\gamma_* \circ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\right)_* \circ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\ .$$

If $\varphi\colon M \longrightarrow M$ is a smooth map, then

$$\dot{\overline{\varphi \circ \gamma}} = \varphi_* \circ \dot\gamma, \qquad \ddot{\overline{\varphi \circ \gamma}} = \varphi_{**} \circ \ddot\gamma.$$

(j) A *covariant derivative* in a vector bundle $\pi\colon E \longrightarrow M$ is a map

$$D\colon \mathfrak{X}(M) \times \mathrm{Sec}(\pi) \longrightarrow \mathrm{Sec}(\pi), \qquad (X, \sigma) \longmapsto D_X\sigma$$

such that D is tensorial in X and a derivation in σ. If (F, f) is an automorphism of π, and

$$(F^\# D)_X\sigma := F_\#^{-1} D_{f_\# X} F_\# \sigma,$$

then $F^\# D$ is also a covariant derivative in π, the *pull-back of* D via F. If $F^\# D = D$, then F is called an *automorphism of* D. $\mathrm{Aut}(D)$ denotes the group of automophisms of the covariant derivative D.

(k) Let $\pi\colon E \longrightarrow M$ be a vector bundle, and $c\colon I \longrightarrow M$ a smooth curve. A smooth map $s\colon I \longrightarrow E$ is said to be a *section along* c if $\pi \circ s = c$. The sections along c form a $C^\infty(I)$-module denoted by $\mathrm{Sec}_c(\pi)$. If D is a covariant derivative in π, then there is a unique $\mathbb{R}$-linear map $D_c\colon \mathrm{Sec}_c(\pi) \longrightarrow \mathrm{Sec}_c(\pi)$ such that
(1) if $s \in \mathrm{Sec}_c(\pi)$ and $f \in C^\infty(I)$, then $D_c(fs) = f's + fD_cs$,
(2) if $\sigma \in \mathrm{Sec}(\pi)$ and $s := \sigma \circ c$, then $(D_cs)(t) = D_{\dot{c}(t)}\sigma$, $t \in I$.
D_c is called the *covariant derivative along* c.

(l) The *pull-back of* τ_M *over* τ is the vector bundle $\tau^*\tau$ with total space

$$TM \times_M TM := \{(v, w) \in TM \times TM \mid \tau(v) = \tau(w)\},$$

and projection $(v, w) \in TM \times TM \longmapsto v \in TM$. We also consider the vector bundle $\mathring{\tau}^*\tau$, where $\mathring{\tau}\colon \mathring{T}M \longrightarrow M$ is the deleted bundle for τ, i.e., $\mathring{T}M := TM \setminus o(M)$, $o \in \mathfrak{X}(M)$ is the zero vector field, and $\mathring{\tau} := \tau \restriction \mathring{T}M$.

The $C^\infty(TM)$-module $\mathrm{Sec}(\tau^*\tau)$ is generated by the *basic vector fields*

$$\widehat{X}\colon v \in TM \mapsto \widehat{X}(v) := (v, X(\tau(v))) \in TM \times_M TM,\ X \in \mathfrak{X}(M).$$

The section $\delta\colon v \in TM \longmapsto \delta(v) := (v, v) \in TM \times_M TM$ is called the *canonical section* of $\tau^*\tau$.

(m) By a *geodesic of a covariant derivative* $D\colon \mathfrak{X}(TM) \times \mathrm{Sec}(\tau^*\tau) \longrightarrow \mathrm{Sec}(\tau^*\tau)$ we mean a regular curve $\gamma\colon I \longrightarrow M$ satisfying the condition $D_{\dot\gamma}(\delta \circ \dot\gamma) = 0$. Equivalently (see (k)/(2)), γ is a geodesic of D, if and only if, $D_{\ddot\gamma(t)}\delta = 0$, for all $t \in I$.

2. Structures on the tangent bundle

In this chapter we offer a brief summary of the basic canonical objects living on the tangent bundle τ_M. In particular, we describe, how these objects change under a push-forward operation.

(a) $f^{\mathsf{v}} := f \circ \tau$ and $f^{\mathsf{c}}\colon v \in TM \longmapsto f^{\mathsf{c}}(v) := v(f) \in \mathbb{R}$ are the *vertical* and the *complete lift of a function* $f \in C^\infty(M)$, respectively. If $\varphi\colon M \longrightarrow M$ is a smooth map, then $(f \circ \varphi)^{\mathsf{c}} = f^{\mathsf{c}} \circ \varphi_*$.

(b) A vector field ξ on TM is called *vertical*, if $\xi \underset{\tau}{\sim} 0$; the vertical vector fields form a subalgebra $\mathfrak{X}^{\mathsf{v}}(TM)$ of the Lie algebra $\mathfrak{X}(TM)$. The *vertical lift* of a vector field X on M is the unique vertical vector field X^{v} which satisfies $X^{\mathsf{v}} f^{\mathsf{c}} = (Xf)^{\mathsf{v}}$ for all $f \in C^\infty(M)$. We have a canonical vertical vector field, the *Liouville vector field* C on TM. It may be characterized by the two conditions $Cf^{\mathsf{v}} = 0$ and $Cf^{\mathsf{c}} = f^{\mathsf{c}}$, for all $f \in C^\infty(M)$.

(c) The *complete lift of a vector field* $X \in \mathfrak{X}(M)$ is the unique vector field $X^{\mathsf{c}} \in \mathfrak{X}(TM)$ satisfying $X^{\mathsf{c}} f^{\mathsf{v}} = (Xf)^{\mathsf{v}}$ and $X^{\mathsf{c}} f^{\mathsf{c}} = (Xf)^{\mathsf{c}}$ for all $f \in C^\infty(M)$. Then $X^{\mathsf{c}} \underset{\tau}{\sim} X$, and

$X \underset{\varphi}{\sim} Y$ implies $X^{\mathsf{c}} \underset{\varphi_*}{\sim} Y^{\mathsf{c}}$ (Lemma 2.1.3). If $\varphi \in \mathrm{Diff}(M)$, then $(\varphi_*)_\# X^{\mathsf{c}} = (\varphi_\# X)^{\mathsf{c}}$.

(d) We have the *canonical exact sequence*

$$0 \longrightarrow TM \times_M TM \xrightarrow{\mathbf{i}} TTM \xrightarrow{\mathbf{j}} TM \times_M TM \longrightarrow 0$$

of strong bundle maps defined by

$$\mathbf{i}(v, w) := \dot{c}(0), \quad c(t) := v + tw \quad (t \in \mathbb{R}),$$
$$\text{and} \quad \mathbf{j}(z) := (\tau_{TM}(z), \tau_*(z)).$$

$\mathbf{J} := \mathbf{i} \circ \mathbf{j}$ is said to be the *vertical endomorphism* of TTM. By 1/(d), $\mathbf{i}$ and $\mathbf{j}$ induce $C^\infty(TM)$-homomorphisms at the level of sections, which we denote by the same symbols. We have the relations

$$C = \mathbf{i}\delta, \qquad [C, \mathbf{J}] = -\mathbf{J};$$

and, for each $X \in \mathfrak{X}(M)$,

$$\mathbf{j}X^{\mathsf{c}} = \widehat{X}, \quad \mathbf{j} \circ X^{\mathsf{v}} = 0, \quad \mathbf{J}X^{\mathsf{c}} = X^{\mathsf{v}}, \quad [X^{\mathsf{v}}, \mathbf{J}] = [X^{\mathsf{c}}, \mathbf{J}] = 0.$$

It is easy to check that $\mathbf{j} \circ \ddot{\gamma} = \delta \circ \dot{\gamma}$, for any smooth curve $\gamma \colon I \longrightarrow M$ (Lemma 2.2.1).

(e) If $\varphi \in \mathrm{Diff}(M)$, and $\varphi_* \times \varphi_*$ denotes the map

$$(u, v) \in TM \times_M TM \longmapsto (\varphi_*(u), \varphi_*(v)) \in TM \times_M TM,$$

then $(\varphi_* \times \varphi_*, \varphi_*)$ is an automorphism of $\tau^*\tau$. We denote by $\varphi_\# \widetilde{X}$ the push-forward of a section $\widetilde{X} \in \mathrm{Sec}(\tau^*\tau)$ by $\varphi_* \times \varphi_*$; then (confer 1/(e))

$$\varphi_\# \widetilde{X} = (\varphi_* \times \varphi_*) \circ \widetilde{X} \circ \varphi_*^{-1}.$$

We have, in particular, *for any vector field* X *on* M, $\varphi_\# \widehat{X} = \widehat{\varphi_\# X}$ (Lemma 2.3.2), *and* $\varphi_\# \delta = \delta$.

Lemma 2.3.3. *If* $\varphi \colon M \longrightarrow M$ *is a smooth map, then*

$$\varphi_{**} \circ \mathbf{i} = \mathbf{i} \circ (\varphi_* \times \varphi_*), \qquad (\varphi_* \times \varphi_*) \circ \mathbf{j} = \mathbf{j} \circ \varphi_{**},$$
$$\varphi_{**} \circ \mathbf{J} = \mathbf{J} \circ \varphi_{**}.$$

If φ *is a diffeomorphism, then* (Corollary 2.3.4)

$$(\varphi_*)_\# C = C, \qquad (\varphi_*)_\# X^{\mathsf{v}} = (\varphi_\# X)^{\mathsf{v}} \quad (X \in \mathfrak{X}(M));$$

furthermore (Corollary 2.3.5)

$$(\varphi_*)_\# \circ \mathbf{i} = \mathbf{i} \circ \varphi_\#, \qquad \varphi_\# \circ \mathbf{j} = \mathbf{j} \circ (\varphi_*)_\#,$$
$$(\varphi_*)_\# \circ \mathbf{J} = \mathbf{J} \circ (\varphi_*)_\#.$$

3. Spray manifolds

In this chapter we define the second-order vector fields and their most important mutations. We collect some basic facts on semisprays, and we have a first look at their affinity and automorphism groups.

(a) A map $S\colon TM \longrightarrow TTM$, smooth on $\overset{\circ}{T}M$, is said to be a *semispray*, if $\tau_{TM} \circ S = 1_{TM}$, it sends zeros to zeros, and satisfies the condition $\mathbf{j}S = \delta$ (or, equivalently, $\mathbf{J}S = C$). A semispray is called a *second-order vector field*, if it is smooth on its whole domain. By a *spray* we mean a semispray of class C^1, which is positive-homogeneous of degree two in the sense that $[C, S] = S$. An *affine spray* is a spray of class C^2.

(b) If S is a semispray on TM, then

$$\mathbf{J}[\mathbf{J}\xi, S] = \mathbf{J}\xi \quad \text{for all } \ \xi \in \mathfrak{X}(TM) \quad - \quad \textit{Grifone's relation};$$
$$[X^{\mathsf{v}}, S] = X^{\mathsf{c}} + \eta, \ \ \eta \in \mathfrak{X}^{\mathsf{v}}(TM), \quad \text{for all } \ X \in \mathfrak{X}(M).$$

(c) A regular curve $\gamma\colon I \longrightarrow M$ is a *geodesic* of a semispray S if its velocity field is an integral curve of S, i.e., $S \circ \dot{\gamma} = \ddot{\gamma}$. A diffeomorphism $\varphi\colon M \longrightarrow M$ is an *affinity* (or *totally geodesic transformation*) of S if it preserves the geodesics considered as parametrized curves, i.e., if

$$\ddot{\overline{\varphi \circ \gamma}} = S \circ \dot{\overline{\varphi \circ \gamma}}, \qquad \text{for all geodesic } \gamma\colon I \longrightarrow M.$$

The affinities of a semispray S form a Lie group, denoted by $\mathrm{Aff}(S)$.

(d) If S is a semispray and $\varphi \in \mathrm{Diff}(M)$, then $(\varphi_*)_\# S$ is also a semispray, which remains a spray, if S is spray. φ is called an *automorphism of* S, if $(\varphi_*)_\# S = S$, i.e., $\varphi_{**} \circ S = S \circ \varphi_*$. $\mathrm{Aut}(S)$ denotes the group of automorphisms of S.

(e) We have the following simple results (3.2.2, 3.2.5): *if S is a semispray and $\varphi \in \mathrm{Diff}(M)$, then*

$$(\varphi_{**} \circ S - S \circ \varphi_*) \circ \dot{\gamma} = 0, \qquad \textit{for all geodesics } \gamma \colon I \longrightarrow M;$$
$$\mathrm{Aff}(S) = \mathrm{Aut}(S).$$

4. Ehresmann connections

This chapter is devoted to our investigations on Ehresmann connections. On the one hand, using new ideas and tools, we reproduce some important known results (4.1.3, 4.3.2-4.3.5). On the other hand, and this is the main result of the chapter, we characterize the automorphisms of an Ehresmann connection in terms of its affinities and strong torsion (4.5.7). After a careful discussion, we obtain a strengthening of the classical theorem: 'a diffeomorphism is an automorphism of a covariant derivative on a manifold, if and only if, it is an affinity and preserves the torsion'.

(a) Roughly speaking, an *Ehresmann connection* $\mathcal{H}$ over a manifold M is a left splitting of the canonical exact sequence in 3/(d), smooth only on $\mathring{T}M \times_M TM$, and given on $o(M) \times_M TM$ by $\mathcal{H}(o(p), v) := (o_*)_p(v)$; $p \in M$, $v \in T_pM$. We associate to any Ehresmann connection $\mathcal{H}$ the *horizontal projector* $\mathbf{h} := \mathcal{H} \circ \mathbf{j}$, the *vertical projector* $\mathbf{v} = 1_{TTM} - \mathbf{h}$, the *vertical map* $\mathcal{V} := \mathbf{i}^{-1} \circ \mathbf{v}$ and the *semispray* $S_{\mathcal{H}} := \mathcal{H} \circ \delta$. The *horizontal lift* of a vector field $X \in \mathfrak{X}(M)$ with respect to $\mathcal{H}$ is $X^{\mathsf{h}} := \mathcal{H}(\widehat{X}) = \mathbf{h}X^{\mathsf{c}} \in \mathfrak{X}(\mathring{T}M)$.

(b) If S is a semispray over M, then there is a unique Ehresmann connection $\mathcal{H}_S$ such that

$$\mathcal{H}_S(\widehat{X}) = \frac{1}{2}(X^{\mathsf{c}} - [X^{\mathsf{v}}, S]) \quad \text{for all } X \in \mathfrak{X}(M) \quad (\textit{Crampin}),$$

with horizontal projector

$$\mathbf{h}_S = \frac{1}{2}(1_{\mathfrak{X}(TM)} - [S, \mathbf{J}]) \quad (\textit{Grifone})$$

(Proposition 4.1.3).

(c) Let $\mathcal{H}$ be an Ehresmann connection over M. If

$$\nabla_\xi \widetilde{Y} := \mathbf{j}[\mathbf{v}\xi, \mathcal{H}\widetilde{Y}] + \mathcal{V}[\mathbf{h}\xi, \mathbf{i}\widetilde{Y}]; \qquad \xi \in \mathfrak{X}(TM),\ \widetilde{Y} \in \operatorname{Sec}(\mathring{\tau}^*\tau),$$

then ∇ is a covariant derivative in $\mathring{\tau}^*\tau$, called the *Berwald derivative* induced by $\mathcal{H}$. The operators ∇^{h} and ∇^{v} defined by

$$\nabla^{\mathsf{h}}_{\widetilde{X}} \widetilde{Y} := \nabla_{\mathcal{H}\widetilde{X}} \widetilde{Y} \quad \text{and} \quad \nabla^{\mathsf{v}}_{\widetilde{X}} \widetilde{Y} := \nabla_{\mathbf{i}\widetilde{X}} \widetilde{Y} \quad (\widetilde{X}, \widetilde{Y} \in \operatorname{Sec}(\mathring{\tau}^*\tau))$$

are called the *h-Berwald derivative* (belonging to $\mathcal{H}$) and the (*canonical*) *vertical derivative*, respectively. The latter does not depend on the choice of the Ehresmann connection. The *tension* $\mathbf{t}$, the *torsion* $\mathbf{T}$, and the *strong torsion* $\mathbf{T}^{\mathsf{s}}$ of $\mathcal{H}$ are defined, respectively, by $\mathbf{t} := \nabla^{\mathsf{h}}\delta$, $\mathbf{T}(\widetilde{X}, \widetilde{Y}) = \nabla^{\mathsf{h}}_{\widetilde{X}}\widetilde{Y} - \nabla^{\mathsf{h}}_{\widetilde{Y}}\widetilde{X} - \mathbf{j}[\mathcal{H}\widetilde{X}, \mathcal{H}\widetilde{Y}]$ $(\widetilde{X}, \widetilde{Y} \in \operatorname{Sec}(\mathring{\tau}^*\tau))$ and $\mathbf{T}^{\mathsf{s}} := \mathbf{t} + i_\delta \mathbf{T}$. $\mathcal{H}$ is called *homogeneous* if its tension vanishes. *In the homogeneous case the associated semispray $S_{\mathcal{H}}$ is a spray. Conversely, if $S_{\mathcal{H}}$ is a spray, then*

$\mathbf{t}(\delta) = 0$ (Lemma 4.2.3).

Proposition 4.3.2. $\frac{1}{2}\mathbf{i}\mathbf{T}^{\mathsf{s}} = \mathcal{H} - \mathcal{H}_{S_{\mathcal{H}}}$, *where* $\mathcal{H}_{S_{\mathcal{H}}}$ *is the Ehresmann connection determined by* $S_{\mathcal{H}}$ *accoroding to (b).*
As a corollary, we obtain that *the following three conditions concerning an Ehresmann connection* $\mathcal{H}$ *are equivalent: (i) the strong torsion of* $\mathcal{H}$ *vanishes; (ii)* $\mathcal{H} = \mathcal{H}_{S_{\mathcal{H}}}$*; (iii)* $\mathbf{t} = 0$ *and* $\mathbf{T} = 0$ (4.3.3, 4.3.4). 4.3.2 also implies

Corollary 4.3.5 (*unicity theorem*). *An Ehresmann connection is uniquely determined by its strong torsion and associated semispray.*

(d) If $\mathcal{H}$ is an Ehresmann connection over M and $\varphi \in \mathrm{Diff}(M)$, then $\varphi^{\#}\mathcal{H} := \varphi_{**}^{-1} \circ \mathcal{H} \circ (\varphi_* \times \varphi_*)$ is also an Ehresmann connection, the *pull back of* $\mathcal{H}$ *via* φ. If $\varphi^{\#}\mathcal{H} = \mathcal{H}$, and hence $\varphi_{**} \circ \mathcal{H} = \mathcal{H} \circ (\varphi_* \times \varphi_*)$, then φ is called an *automorphism of* $\mathcal{H}$. $\mathrm{Aut}(\mathcal{H})$ denotes the group of automorphisms of $\mathcal{H}$. *The following are equivalent:*

$$\textit{(i)}\ \ \varphi \in \mathrm{Aut}(\mathcal{H}), \qquad \textit{(ii)}\ \ (\varphi_* \times \varphi_*) \circ \mathcal{V} = \mathcal{V} \circ \varphi_{**},$$
$$\textit{(iii)}\ \ \varphi_{**} \circ \mathbf{h} = \mathbf{h} \circ \varphi_{**}, \quad \textit{(iv)}\ \ \varphi_{**} \circ \mathbf{v} = \mathbf{v} \circ \varphi_{**},$$
$$\textit{(v)}\ \ (\varphi_*)_{\#} X^{\mathsf{h}} = (\varphi_{\#} X)^{\mathsf{h}}, \quad \textit{for all } X \in \mathfrak{X}(M)$$

(Proposition 4.5.2). *If one, and hence all of these conditions are satisfied, then* $\mathbf{t}$, $\mathbf{T}$ *and* $\mathbf{T}^{\mathsf{s}}$ *satisfy the relations*

$$\varphi_{\#} \circ \mathbf{t} = \mathbf{t} \circ \varphi_{\#},\ \ \varphi_{\#} \circ \mathbf{T} = \mathbf{T} \circ (\varphi_{\#} \times \varphi_{\#}),\ \ \varphi_{\#} \circ \mathbf{T}^{\mathsf{s}} = \mathbf{T}^{\mathsf{s}} \circ \varphi_{\#}$$

(Proposition 4.5.3).

Propositions 4.5.4 and 4.5.5. *Let* $\mathcal{H}$ *be an Ehresmann* *connection over M, and let ∇ be the Berwald derivative induced by $\mathcal{H}$. Then*

$$\operatorname{Aut}(\mathcal{H}) \subset (\operatorname{Aut}(\nabla) \cap \operatorname{Aut}(S_{\mathcal{H}}))\,.$$

Conversely, if S is a semispray over M, then

$$\operatorname{Aut}(S) \subset \operatorname{Aut}(\mathcal{H}_S).$$

Theorem 4.5.6. *A diffeomorphism φ of M is an automorphism of an Ehresmann connection $\mathcal{H}$ over M, if and only if, $\varphi \in \operatorname{Aut}(S_{\mathcal{H}})$ and satisfies the relation $\varphi_{\#} \circ \mathbf{T^s} = \mathbf{T^s} \circ \varphi_{\#}$.*

(e) A regular curve $\gamma\colon I \longrightarrow M$ is said to be a *geodesic of an Ehresmann connection* $\mathcal{H}$ if $\mathcal{V} \circ \ddot{\gamma} = 0$, or, equivalently, if $\mathbf{h} \circ \ddot{\gamma} = \ddot{\gamma}$. *The geodesics of $\mathcal{H}$ coincide with the geodesics of the associated semispray $S_{\mathcal{H}}$* (Proposition 4.4.2). *If $\mathcal{H}$ is homogeneous, then $\mathcal{H}$ and the Berwald derivative induced by $\mathcal{H}$ have the same geodesics* (Lemma 4.4.4). *The latter property holds, if and only if, $S_{\mathcal{H}}$ is a spray* (Proposition 4.4.6).

(f) A map $\varphi \in \operatorname{Diff}(M)$ is said to be an *affinity* of an Ehresmann connection $\mathcal{H}$ over M, if it preserves the geodesics as parametrized curve (cf. 3/(c)). $\operatorname{Aff}(\mathcal{H})$ denotes the group of affinities of $\mathcal{H}$. We define in the same way the affinity groups $\operatorname{Aff}(D)$ and $\operatorname{Aff}(\mathring{D})$ of a covariant derivative D in $\tau^*\tau$ and a covariant derivative $\mathring{D}$ on M, respectively. Our observations in (e) imply immediately the following corollaries:

$$\mathrm{Aff}(\mathcal{H}) = \mathrm{Aff}(S_{\mathcal{H}}) \quad \text{(Corollary 4.4.3);}$$
$$\mathrm{Aff}(\mathcal{H}) = \mathrm{Aff}(\nabla), \quad \textit{if } \mathcal{H} \textit{ is homogeneous} \quad \text{(Corollary 4.4.5).}$$

Since $\mathrm{Aut}(S_{\mathcal{H}}) = \mathrm{Aff}(S_{\mathcal{H}})$ by 3.2.5, Theorem 4.5.6 leads to the important

Corollary 4.5.7. *$\varphi \in \mathrm{Aut}(\mathcal{H})$ if and only if $\varphi \in \mathrm{Aff}(\mathcal{H})$ and $\varphi_\# \circ \mathbf{T}^{\mathbf{s}} = \mathbf{T}^{\mathbf{s}} \circ \varphi_\#$.*

Finally, we consider a covariant derivative $\overset{\circ}{D}$ on the manifold M, and give a new characterization of $\overset{\circ}{D}$-automorphisms.

Theorem 4.5.8. *$\varphi \in \mathrm{Aut}(\overset{\circ}{D})$ if and only if $\varphi \in \mathrm{Aff}(\overset{\circ}{D})$ and $\varphi_\# \circ i_\delta \mathbf{T} = i_\delta \mathbf{T} \circ \varphi_\#$, where $\mathbf{T}(\widehat{X}, \widehat{Y}) = \mathbf{i}^{-1}(T(\overset{\circ}{D})(X,Y))^{\mathsf{v}}$ ($T(\overset{\circ}{D})$ is the torsion of $\overset{\circ}{D}$; $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$).*

5. D-manifolds with line-elements

In this chapter we consider covariant derivatives in the pull-back bundle $\tau^*\tau$. We define various regularity concepts and characterize them. We show that any regular covariant derivative in $\tau^*\tau$ gives rise to canonically an Ehresmann connection. These constructions lead naturally to a new interpretation of the tension. The main results of the chapter (5.4.7, 5.4.9, 5.4.11) generalize our previous results (4.5.6, 4.5.8) to this context.

(a) By a *D-manifold with line-elements* we mean a pair (M, D) consisting of a manifold M and a covariant derivative D

in $\tau^*\tau$. The *v-covariant derivative* D^{v} belonging to D is given by $D^{\mathsf{v}}_{\widetilde{X}}\widetilde{Y} = D_{\mathbf{i}\widetilde{X}}\widetilde{Y}$ ($\widetilde{X}, \widetilde{Y} \in \mathrm{Sec}(\tau^*\tau)$). The *torsion* $T(D)$ of D is defined by

$$T(D)(\xi,\eta) := D_\xi \mathbf{j}\eta - D_\eta \mathbf{j}\xi - \mathbf{j}[\xi,\eta]; \qquad \xi,\eta \in \mathfrak{X}(TM).$$

The difference tensor $\mathcal{S}$ given by

$$\mathcal{S}(\widetilde{X},\widetilde{Y}) := \nabla^{\mathsf{v}}_{\widetilde{Y}}\widetilde{X} - D^{\mathsf{v}}_{\widetilde{Y}}\widetilde{X}; \qquad \widetilde{X},\widetilde{Y} \in \mathrm{Sec}(\tau^*\tau)$$

is mentioned as the *Finsler torsion* of D. In the presence of an Ehresmann connection $\mathcal{H}$ we define the ($\mathcal{H}$-) *horizontal torsion* $\mathcal{T}$, the ($\mathcal{H}$-) *vertical torsion* $T^{\mathsf{v}}(D)$, and the *horizontal difference tensor* $\mathcal{P}$ as follows: for each $\widetilde{X},\widetilde{Y} \in \mathrm{Sec}(\tau^*\tau)$; $\xi,\eta \in \mathfrak{X}(TM)$,

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}(\widetilde{X},\widetilde{Y}) &:= D_{\mathcal{H}\widetilde{X}}\widetilde{Y} - D_{\mathcal{H}\widetilde{Y}}\widetilde{X} - \mathbf{j}[\mathcal{H}\widetilde{X},\mathcal{H}\widetilde{Y}],\\
T^{\mathsf{v}}(D)(\xi,\eta) &:= D_\xi \mathcal{V}\eta - D_\eta \mathcal{V}\xi - \mathcal{V}[\xi,\eta],\\
\mathcal{P}(\widetilde{X},\widetilde{Y}) &:= D_{\mathcal{H}\widetilde{X}}\widetilde{Y} - \nabla_{\mathcal{H}\widetilde{X}}\widetilde{Y}.
\end{aligned}$$

We note that $\mathcal{P}(\widetilde{X},\widetilde{Y}) = T^{\mathsf{v}}(D)(\mathcal{H}\widetilde{X},\mathbf{i}\widetilde{Y})$.

(b) Let D be a covariant derivative in $\tau^*\tau$. The $\binom{1}{1}$ tensors $\mu := D\delta$ and $\mu^{\mathsf{v}} := \mu \circ \mathbf{i}$ are said to be the *deflection* and the *v-deflection* of D, respectively. We say that D is *regular*, if μ^{v} is fibrewise injective; *strongly regular*, if $\mu^{\mathsf{v}} = 1_{\mathrm{Sec}(\tau^*\tau)}$; *vertically natural*, if $D^{\mathsf{v}} = \nabla^{\mathsf{v}}$.

Lemma 5.1.4. $\mu^{\mathsf{v}} = 1_{\mathrm{Sec}(\tau^*\tau)} - i_\delta \mathcal{S}$.

Corollary 5.1.6. *D is vertically natural* $\iff$ $\mathcal{S} = 0$*; D is strongly regular* $\iff$ $i_\delta\mathcal{S} = 0$*; D is regular* $\iff$ $1_{\mathrm{Sec}(\tau^*\tau)} - i_\delta\mathcal{S}$

is bijective. Vertical naturality implies strong regularity, strong regularity implies regularity.

(c) Let a covariant derivative D in $\tau^*\tau$ and an Ehresmann connection $\mathcal{H}$ over M be given. Define the *h-covariant derivative* D^{h} by $D^{\mathsf{h}}_{\widetilde{X}}\widetilde{Y} := D_{\mathcal{H}\widetilde{X}}\widetilde{Y}$ for all $\widetilde{X}, \widetilde{Y} \in \mathrm{Sec}(\tau^*\tau)$. Then $\mu^{\mathcal{H}} := D^{\mathsf{h}}\delta = \mu \circ \mathcal{H}$ is said to be the $\mathcal{H}$*-deflection of* D. D is *associated to* $\mathcal{H}$, if $\mathrm{Ker}(\mu) = \mathrm{Im}(\mathcal{H})$; D is *strongly associated to* $\mathcal{H}$, if $\mu = \mathcal{V}$. We show:
– *the Berwald derivative induced by* $\mathcal{H}$ *is strongly associated to* $\mathcal{H}$*, if and only if,* $\mathcal{H}$ *is homogeneous* (5.1.8);
– *D is associated to $\mathcal{H}$, if and only if, D is regular and* $\mu^{\mathcal{H}} = 0$ (5.1.9/(1));
– *D is strongly associated to $\mathcal{H}$, if and only if, D is strongly regular and* $\mu^{\mathcal{H}} = 0$ (5.1.9/(2)).

(d) Let D be a regular covariant derivative in $\tau^*\tau$. The results of Theorem 5.2.1 and Propositions 5.2.2, 5.2.7 may be summarized as follows.
There is a unique Ehresmann connection $\mathcal{H}_D$ such that the $\mathcal{H}_D$-deflection of D vanishes. On basic vector fields $\mathcal{H}_D$ acts by

$$\mathcal{H}_D(\widehat{X}) = X^{\mathsf{c}} - \mathbf{i}(\mu^{\mathsf{v}})^{-1} D_{X^{\mathsf{c}}}\delta, \qquad X \in \mathfrak{X}(M).$$

The horizontal projector associated to $\mathcal{H}_D$ is

$$\mathbf{h}_D = 1_{\mathfrak{X}(TM)} - \mathbf{i}(\mu^{\mathsf{v}})^{-1} D_{X^{\mathsf{c}}}\delta;$$

and $\mathrm{Im}(\mathcal{H}_D) = \mathrm{Ker}(\mu)$*. $\mathcal{H}_D$ is generated by a semispray according to 4/(b), if and only if,* $\mathcal{T}(\widetilde{X}, \widetilde{Y}) = \mathcal{P}(\widetilde{X}, \widetilde{Y}) - \mathcal{P}(\widetilde{Y}, \widetilde{X})$

$(\widetilde{X}, \widetilde{Y} \in \mathrm{Sec}(\tau^*\tau))$, where $\mathcal{T}$ and $\mathcal{P}$ are the horizontal torsion and difference tensors with respect to $\mathcal{H}_D$. If, in particular, D is strongly regular, then $\mathcal{H}_D(\widehat{X}) = X^{\mathsf{c}} - \mathbf{i}D_{X^{\mathsf{c}}}\delta$, $\mathbf{h}_D = 1_{\mathfrak{X}(TM)} - \mathbf{i} \circ \mu$. $\mathcal{H}_D$ is said to be the *Ehresmann connection induced by D.*

(e) Let an Ehresmann connection $\mathcal{H}$ be given, and let ∇ be the Berwald derivative induced by $\mathcal{H}$. Then we may consider the Ehresmann connection $\mathcal{H}_\nabla$ induced by ∇, and obtain the following

Interpretation of the tension (5.2.4): $\mathbf{it} = \mathcal{H} - \mathcal{H}_\nabla$.

(f) Finally, we turn to the various characterizations of the automorphisms of a regular covariant derivative D in $\tau^*\tau$, and summarize the result of Theorems 5.4.7, 5.4.9, 5.4.11. We consider the induced Ehresmann connection $\mathcal{H}_D$, and form the torsions $\mathbf{T}^{\mathsf{s}}$, $\mathcal{T}$, $T^{\mathsf{v}}(D)$ and the difference tensor $\mathcal{P}$ with respect to $\mathcal{H}_D$. *For a diffeomorphism φ of M the following are equivalent:*
(i) $\varphi \in \mathrm{Aut}(D)$.
(ii) $\varphi \in \mathrm{Aut}(\mathcal{H}_D)$ and φ satisfies the relations $\varphi_\# \circ \mathcal{S} = \mathcal{S} \circ (\varphi_\# \times \varphi_\#)$, $\varphi_\# \circ \mathcal{P} = \mathcal{P} \circ (\varphi_\# \times \varphi_\#)$.
(iii) $\varphi \in \mathrm{Aff}(D)$ and φ satisfies the relations $\varphi_\# \circ \mathbf{T}^{\mathsf{s}} = \mathbf{T}^{\mathsf{s}} \circ \varphi_\#$, $\varphi_\# \circ \mathcal{S} = \mathcal{S} \circ (\varphi_\# \times \varphi_\#)$, $\varphi_\# \circ \mathcal{P} = \mathcal{P} \circ (\varphi_\# \times \varphi_\#)$.
(iv) $\varphi \in \mathrm{Aff}(D)$ and φ satisfies the relations $\varphi_\# \circ T(D) = T(D) \circ ((\varphi_*)_\# \times (\varphi_*)_\#)$, $\varphi_\# \circ T^{\mathsf{v}}(D) = T^{\mathsf{v}}(D) \circ ((\varphi_*)_\# \times (\varphi_*)_\#)$.

6. Appendix: a coordinate view

We deduce the rules of transformation under a change of the chart of the functions (semispray coefficients, Christoffel symbols) which describe locally, i.e., in a chart, our basic objects. We present a modern interpretation of the invariant differential introduced by Ottó Varga [42]. It turns out that this operator, as well as Hashiguchi's 'affine connection in a manifold with line elements' ([23]) are just different sides of the same coin, a covariant derivative operator in $\tau^*\tau$ in the sense of the Thesis.

Tudományos munkásság

Referált kiadványokban megjelent, illetve elfogadott dolgozatok

1. R. L. Lovas, J. Pék and J. Szilasi, Ehresmann connections, metrics and good metric derivatives, *Advanced Studies in Pure Mathematics*, **48** (2007), Finsler Geometry, Sapporo 2005 – In Memory of Makoto Matsumoto, 263–308.

2. J. Pék and J. Szilasi, Automorphisms of Ehresmann connections, *Acta Math. Hungar.*, 2008, DOI: 10.1007/s10474-008-9139-X (17 oldal)

Előkészítés alatt

J. Pék and J. Szilasi, Automorphisms of line-element D-manifolds

TDK-dolgozat

Pék Johanna, Differenciálgeometriai vizsgálatok az érintőnyaláb-projekció mentén. Tudományos diákköri dolgozat; Debrecen, 2004. (38 oldal)

Előadások

1. Differenciálgeometriai vizsgálatok az érintőnyaláb-projekció mentén. Országos Tudományos Diákköri Konferencia; Budapest, 2005. március 21.

2. Automorphisms of Ehresmann connections. XXIIIrd International Workshop on Differential Geometric Methods in Theoretical Mechanics; Balatonföldvár, 2008. augusztus 24-30.

3. Ehresmann-konnexiók automorfizmusai. Debrecen-Szeged geometriai találkozó, 2008. szeptember 5.

Irodalomjegyzék

[1] H. Akbar-Zadeh, Les espaces de Finsler et certains de leurs généralisations, *Ann. Scient. Éc. Norm. Sup. (3)*, **80** (1963), 1–79.

[2] H. Akbar-Zadeh, *Initiation to Global Finslerian Geometry*, Elsevier, Amsterdam, 2006.

[3] W. Ambrose, R. S. Palais and I. M. Singer, Sprays, *Anais da Academia Brasileira de Ciências*, **32** (1960), 163–178.

[4] W. Ballmann, *Vector Bundles and Connections*, http://www.math.uni-bonn.de/people/hwbllmnn/archiv/concurvb.ps

[5] M. Berger, *A Panoramic View of Riemannian Geometry*, Springer-Verlag, Berlin, 2003.

[6] F. Brickell, On the differentiability of affine and projective transformations, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **16** (1965), 567–574.

[7] F. Brickell and R. S. Clark, *Differentiable Manifolds*, Van Nostrand Reinhold, London, 1970.

[8] E. Cartan, Sur les variétés à connexion affine et le théorie de le relativité généralisée, *Ann. École Norm. Sup.* **40** (1923), 325–412; **41** (1924), 1–25; **42** (1925), 17–88.

[9] E. Cartan, *Les espaces de Finsler*; Paris, Hermann, 1934.

[10] M. Crampin, On horizontal distributions on the tangent bundle of a differentiable manifold, *J. London Math. Soc., (2)* **3** (1971), 178–182.

[11] M.Crampin, On the differential geometry of the Euler – Lagrange equation and the inverse problem of Lagrangian dynamics, *J. Phys. A: Math. Gen.* **14** (1981), 2567–2575.

[12] M. Crampin, Generalized Bianchi identities for horizontal distributions, *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.*, **94** (1983), 125–132.

[13] M.Crampin, Connections of Berwald type, *Publ. Math. Debrecen* **57** (2000), 455–473.

[14] P. Dazord, *Propriétés globales des géodésiques des espaces de Finsler*, Thèse(575), Publ. Dép. Math. (Lyon, 1969).

[15] M. de León and P. R. Rodrigues, *Methods of Differential Geometry in Analytical Mechanics*, North-Holland, Amsterdam, 1989.

[16] J.-G. Diaz, Etude des tenseurs de courbure en géométrie finslérienne, *Thése de 3éme cycle*, **118** (1972)

[17] P. Dombrowski, MR **37** # 3469

[18] C. Ehresmann, Les connexions inifinitésimales dans un espace fibré différentiable, *Coll. Top. (Espaces Fibrés)*, Bruxelles, 1950, 29–55, Masson, Paris, 1951.

[19] W. Goldmann and M. W. Hirsch, The radiance obstruction and parallel forms on affine manifolds, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **286** (1984), 629–649.

[20] W. Greub, S. Halperin and J. R. Vanstone, *Connections, Curvature, and Cohomology*, Vol.I, Academic Press, New York, 1972.

[21] W. Greub, S. Halperin and J. R. Vanstone, *Connections, Curvature, and Cohomology*, Vol.II, Academic Press, New York, 1973.

[22] J. Grifone, Structure presque tangente et connexions I, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, **22** (1972), 287–334.

[23] M. Hashiguchi, On parallel displacements in Finsler spaces, *J. Math. Soc. Japan* **10** (4) (1958), 365–379.

[24] S. Lang, *Fundamentals of Differential Geometry*, Springer-Verlag, New York, 2001.

[25] O. Loos, Automorphism Groups of Second Order Differential Equations, *Mh. Math.*, **96** (1983), 195–207.

[26] R. L. Lovas, J. Pék and J. Szilasi, Ehresmann connections, metrics and good metric derivatives, *Advanced Studies in Pure Mathematics*, **48** (2007), Finsler Geometry, Sapporo 2005 – In Memory of Makoto Matsumoto, 263–308.

[27] M. Matsumoto, *The theory of Finsler connections*, Publ. of the Study Group of Geometry, **5**, Department of Math. Okayama Univ., 1970.

[28] M. Matsumoto, *Foundations of Finsler geometry and special Finsler spaces*, Kaiseisha Press, Saikawa, Otsu, 1986.

[29] A. Moór, Entwicklung einer Geometrie der allgemeinen metrischen Linienelementräume, *Acta Sci. Math. (Szeged)* **17** (1956), 85–120.

[30] P. T. Nagy, On the theory of Finsler connections and their equivalence, *Acta Sci. Math. Szeged*, **37** (1975), 331–338.

[31] B. O'Neill, *Semi-Riemannian Geometry with Applications to Relativity*, Academic Press, New York, 1983.

[32] J. Pék and J. Szilasi, Automorphisms of Ehresmann connections, *Acta Math. Hungar.*, 2008, DOI: 10.1007/s10474-008-9139-X (17 oldal)

[33] Gy. Soós, Über Gruppen von Automorphismen in affinzusammenhängenden Räumen von Linienelementen, *Publ. Math. Debrecen*, **4** (1956), 249–302.

[34] M. Spivak, *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry*, Vol.II (2nd Edition), Publish or Perish, 1979.

[35] Z. I. Szabó, Über Zusammenhänge vom Finsler-Typ, *Publ. Math. Debrecen*, **27** (1980), 77–88.

[36] Szilasi József, *Bevezetés a differenciálgeometriába*, Kossuth Egyetemi Kiadó, Debrecen, 1998.

[37] J. Szilasi, *A Setting for Spray and Finsler Geometry*. In: P. L. Antonelli (ed.): Handbook of Finsler Geometry, Vol.2,

Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2003., 1182–1426.

[38] J. Szilasi, Calculus along the tangent bundle projection and projective metrizability, *In: Differential Geometry and its Applications - Proceedings of the 10th International Conference on DGA2007*, World Scientific, Singapore, 2008., 527–546.

[39] J. Szilasi and Á. Győry, A generalization of a theorem of H. Weyl, *Rep. Math. Phys.*, **53** (2004), 261–273.

[40] L. Tamássy, Zur metrisierbarkeit der affinzusammenhängenden Räum, *Demonstratio Mathematica*, VI (1973), 851–859.

[41] J. R. Vanstone, A generalization of Finsler geometry, *Canad. J. Math.* **14** (1962), 87–112.

[42] O. Varga, Über affinzusammenhängende Mannigfaltigkeiten von Linienelementen insbesondere deren Äquivalenz, *Publ. Math. Debrecen*, **1** (1949), 7–17.

[43] J. Vilms, Totally geodesic maps, *J. Differential Geometry*, **4** (1970), 73–79.

[44] H. Weyl, Reine infinitesimalgeometrie, *Math. Z.*, **2** (1918), 384-411.

[45] H. Whitney, Differentiable manifolds, *Annals of Math.*, **27** (1936), 645–680.

[46] K. Yano and A. Ledger, Linear connections on tangent bundles, *J. London Math. Soc.*, **39** (1964), 495–500.