

Egyetemi doktori (PhD) értekezés tézisei

Függvényegyenletek és csoportthatások; szubkvadratikus függvények

Kézi Csaba Gábor

Témavezetők:

Dr. Bessenyei Mihály egyetemi docens

Dr. Gilányi Attila egyetemi docens



DEBRECENI EGYETEM

Matematika- és Számítástudományok Doktori Iskola

Debrecen, 2014.

Bevezetés

A függvényegyenletek kulcsfontosságú szerepet töltenek be a matematika különböző ágaiban, mint például a matematikai analízisben, a geometriában, az információelméletben. Ezen túlmenően a matematikán kívül más tudományterületeken (a fizikában, biológiában, közgazdaságtanban, pszichológiában, szociológiában) is számos probléma megoldásánál találkozhatunk függvényegyenletekkel.

A függvényegyenletek az utóbbi időben helyet kaptak a közép-, sőt általános iskolai versenyeken is. A versenyfeladatok szintjén megjelenő egyenletek egyik jellegzetes típusa egyetlen ismeretlen függvényt tartalmaz, amely többféle argumentummal szerepel. A megoldás alap gondolata az argumentumok újrahelyettesítése, amivel az egyenletből olyan egyenletrendszer kapható, amely elemi eszközökkel megoldható.

Az értekezés első négy fejezetének motivációját pontosan az említett versenyfeladatok, valamint Babbage [5] idevágó munkássága adja. Vizsgáljuk középpontjában az

$$F \circ (f \circ g_1, \dots, f \circ g_r, \text{id}) = 0 \quad (1)$$

egyenlet áll, ahol $F: \mathbb{R}^{r+1} \rightarrow \mathbb{R}$, valamint $g_1, \dots, g_r: H \rightarrow H$ adott függvények és $H \subset \mathbb{R}$ nem üres halmaz. Természetesen ilyen általánosságban nincs remény az ismeretlen f függvény meghatározására, vagy akár csak létezésének/egyértelműségének igazolására. Ezért minden esetben feltecsszük, hogy g_1, \dots, g_r csoportot alkot a kompozíció műveletére nézve. Ekkor a fenti egyenletet a g_k elemekkel komponálva, r darab egyenlet nyerhető, melyben r darab ismeretlen, nevezetesen az $f \circ g_k$ függvények szerepelnek.

Az értekezés első fejezetében a további vizsgálatokhoz elengedhetetlenül szükséges algebrai eszközöket ismertetjük, valamint a későbbiekben alkalmazott jelölésrendszert vezetjük be. A további három fejezetben az (1) egyenletet különböző alakokban tekintjük, és ezek megoldhatóságát vizsgáljuk.

A disszertáció ötödik fejezetének fő eredménye a szakirodalomban vizsgált kétféle szubkvadrátikus függvényfogalom összehasonlítása. Az egyik definíció a konkáv függvények azon geometriai jelentésének egy módosítása, miszerint minden differenciálható konkáv függvény érintője a „függvénygörbe fölött halad”. Ehhez kapcsolódóan Shosana Abramovich, Graham Jameson és Gord Sinnamon a [3] és a [4] cikkekben vezette be az alábbi definíciót: az $f: [0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ függvény *erősen szubkvadrátikus*, ha minden $x \geq 0$ esetén létezik olyan $c_x \in \mathbb{R}$, hogy

$$f(y) - f(x) \leq c_x(y - x) + f(|y - x|) \quad (y \geq 0). \quad (2)$$

A másik fogalom a normanégyszet egyenlet (paralelogramma azonosság, vagy Jordan–von Neumann egyenlet) „egyenlőtlenség” változata. Ennek megfelelően azt mondjuk, hogy az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény *gyengén szubkvadrátikus*, ha teljesül az

$$f(x + y) + f(x - y) \leq 2f(x) + 2f(y) \quad (x, y \in \mathbb{R}) \quad (3)$$

egyenlőtlenség. A fejezetben áttekintjük a szubkvadrátikus függvények ismert, főbb tulajdonságait, majd a [12] cikkünkre támaszkodva az említett két fogalom közötti kapcsolatot tisztázzuk.

1. Csoportelméleti háttér

A fejezet egy csoportelméleti összefoglalója azoknak a tételeknek, amelyekre a következő három fejezetben szükségünk van. Ugyanitt történik a későbbiekben használt jelölésrendszer rögzítése. Ebben a szakaszban az egyik legfontosabb állítás az orbit-stabilizátor tétel, amely kulcsfontosságú szerepet játszik a következő fejezetek fő tételeiben.

Lemma. *Legyen $H \subseteq \mathbb{R}$ nem üres halmaz, $G(H)$ függvénycsoport, $\xi \in H$ tetszőleges. Ekkor*

$$G_\xi(H) := \{g \in G(H) \mid g(\xi) = \xi\}$$

részcsoportha $G(H)$ -nak. Tekintsük a $G(H)$ csoport $G_\xi(H)$ szerinti bal oldali mellékosztályait. Ekkor a $G(H)$ -beli g és h elemek pontosan akkor tartoznak ugyanabba a mellékosztályba, ha $g(\xi) = h(\xi)$, azaz ξ orbitjának elemszáma egyenlő ξ stabilizátorának $G(H)$ -beli indexével.

A továbbiakban szükségünk lesz az indexhalmazon bevezetett $*$ művelethez. Legyen $G = \{g_1, \dots, g_r\}$ egy tetszőleges csoport, s definiáljuk a $*$ műveletet az $L = \{1, \dots, r\}$ indexhalmazon a következő módon: $i * j = k$ pontosan akkor, ha $g_i g_j = g_k$.

2. Lineáris függvényegyenletek és csoporthatások

A fejezetben a

$$\sum_{k=1}^r \alpha_k f \circ g_k = h$$

alakú lineáris függvényegyenlet általános megoldását határozzuk meg. Itt g_1, \dots, g_r a valós számok halmazának egy részhalmazán értelmezett olyan függvények, melyek a függvénykompozíció műveletére nézve csoportot alkotnak, valamint $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ és h az előbb említett halmazon értelmezett adott, valós értékű függvények. Ezen egyenletek megoldása során az $f \circ g_k$ helyettesítésekkel az egyenletből újabb egyenleteket kapunk. Mivel az eredeti függvényegyenlet lineáris volt, ezért ilyenkor egy lineáris egyenletrendszerhez jutunk, így alkalmas regularitási feltétel mellett, például a Cramer-szabály alkalmazásával az egyenletrendszer megoldható lesz. A fenti függvényegyenletre egy stabilitási állítást is megfogalmazunk. Fő tételünk az alábbi módon hangzik:

Tétel. *Legyen $H \subset \mathbb{R}$ nem üres halmaz, legyenek továbbá*

$$g_1, \dots, g_r: H \rightarrow H$$

olyan függvények, melyek a kompozíció műveletére nézve csoportot alkotnak, valamint legyenek

$$\alpha_1, \dots, \alpha_r; h: H \rightarrow \mathbb{R}$$

adottak. Tegyük fel, hogy az

$$A := [\alpha_{j^*i-1} \circ g_i]$$

mátrix determinánsa nem nulla a H halmazon. Jelölje A_h azt a mátrixot, melyet A -ból kapunk úgy, hogy annak első oszlopát a $(h \circ g_1, \dots, h \circ g_r)$ vektorral helyettesítjük. Ekkor az

$$f = \frac{\det A_h}{\det A}$$

módon definiált függvény egyértelmű megoldása a

$$\sum_{k=1}^r \alpha_k f \circ g_k = h$$

egyenletnek H -n. Tegyük fel továbbá, hogy $\varphi: H \rightarrow \mathbb{R}$ eleget tesz az

$$\left| \sum_{k=1}^r \alpha_k \varphi \circ g_k - h \right| \leq \varepsilon.$$

egyenlőtlenségnek. Ekkor teljesül az

$$|f - \varphi| \leq \varepsilon \|A^{-1}\|_\infty$$

összefüggés.

3. Nemlineáris explicit függvényegyenletek

A harmadik fejezetben Charles Babbage angol matematikus vizsgálatait által motiválva vizsgálatunk középpontjában az

$$F(f \circ g_1, \dots, f \circ g_r) = h$$

alakú függvényegyenletek állnak, ahol g_1, \dots, g_r , valamint F és h adott függvények, továbbá $\{g_1, \dots, g_r\}$ csoportot alkot a függvénykompozíció műveletével. Meghatározandó az f ismeretlen függvény. Ki fog derülni, hogy ezek az egyenletek csak bizonyos számú kezdetiérték feltétel megadása mellett oldhatók meg. Ezek számát az algebrai struktúra stabilizátora határozza meg. Fő tételünk igazolásában az inverzfüggvény-tétel játssza a fő szerepet. Tételünk a következőképpen hangzik:

Tétel. Legyen $H \subset \mathbb{R}$ nem üres, nyílt halmaz, $\xi \in H$ és

$$G(H) = \{g_1, \dots, g_{mn}\}$$

folytonos függvények csoportja a

| ○ | g_1 | g_{n+1} | ⋯ | g_{kn+1} | ⋯ | $g_{(m-1)n+1}$ |
|-------|-------|-----------|---|--------------|---|----------------|
| g_1 | g_1 | g_{n+1} | ⋯ | g_{kn+1} | ⋯ | $g_{(m-1)n+1}$ |
| g_2 | g_2 | g_{n+2} | ⋯ | g_{kn+2} | ⋯ | $g_{(m-1)n+2}$ |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋱ | ⋮ | ⋱ | ⋮ |
| g_l | g_l | g_{n+l} | ⋯ | g_{kn+l} | ⋯ | $g_{(m-1)n+l}$ |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋱ | ⋮ | ⋱ | ⋮ |
| g_n | g_n | g_{2n} | ⋯ | $g_{(k+1)n}$ | ⋯ | g_{mn} |

(4)

táblázat szerint. Legyen $\eta \in \mathbb{R}^n$, továbbá

$$p = (\eta, \dots, \eta) \in \mathbb{R}^{mn}$$

és $h: H \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos függvény. Legyen $F: \mathbb{R}^{mn} \rightarrow \mathbb{R}$ olyan folytonosan differenciálható függvény, melyre

$$F(p_{*i}) = h \circ g_i(\xi) \quad (i = 1, \dots, mn)$$

Definiáljuk az $A: \mathbb{R}^{mn} \rightarrow \mathcal{M}$ leképezést az alábbi módon:

$$A(x) := [\partial_{j_{*i}-1} F(x_{*i})].$$

Ha A reguláris a p pontban és

$$G_\xi(H) \subset Z(G(H)),$$

akkor létezik egy ξ -t tartalmazó, $G(H)$ -invariáns nyílt $H_0 \subset H$ halmaz és egy egyértelműen meghatározott $f: H_0 \rightarrow \mathbb{R}$ differenciálható függvény, amely teljesíti az

$$\begin{aligned} F(f \circ g_1(t), \dots, f \circ g_{mn}(t)) &= h(t), \\ f \circ g_{kn+l}(\xi) &= \eta_l. \end{aligned}$$

egyenletet.

4. Nemlineáris implicit függvényegyenletek

Ebben a fejezetben az

$$F(f \circ g_1, \dots, f \circ g_r, \text{id}) = 0$$

alakú függvényegyenletet vizsgáljuk, ahol $\{g_1, \dots, g_r\}$, valamint F adott függvények, továbbá $\{g_1, \dots, g_r\}$ csoportot alkot a kompozíció műveletére nézve. Vizsgálatainkban az implicitfüggvény-tétel, valamint a közönséges differenciálegyenletekre vonatkozó globális egzisztencia- és unicitási tétel kap kulcsszerepet. Fő tételünk:

Tétel. *Legyen $H \subset \mathbb{R}$ nem üres, nyílt halmaz, $\xi \in H$ és*

$$G(H) = \{g_1, \dots, g_{mn}\}$$

folytonos függvények csoportja a (4) szerinti táblázattal. Legyen $\eta \in \mathbb{R}^n$, továbbá

$$p = (\eta, \dots, \eta) \in \mathbb{R}^{mn}$$

és $F: \mathbb{R}^{mn} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ olyan folytonosan differenciálható függvény, melyre minden $i = 1, \dots, mn$ esetén teljesül, hogy

$$F(p_{*i}, g_i(\xi)) = 0.$$

Definiáljuk az $A: \mathbb{R}^{mn} \rightarrow \mathcal{M}$ és $B: \mathbb{R}^{mn} \rightarrow \mathbb{R}^{mn}$ leképezéseket az

$$A(x, t) := [\partial_{j_{*i-1}} F(x_{*i}, g_i(t))],$$

$$B(x, t) := [\partial_{mn+1} F(x_{*i}, g_i(t))g'_i(t)]$$

formula szerint. Tegyük fel, hogy A reguláris a (p, ξ) pontban. Ha vagy $m = 1$ vagy $m \geq 2$ és az $x \rightarrow A^{-1}B(x, t)$ leképezés Lipschitz a (p, ξ) egy környezetében, akkor létezik egy $G(H)$ -invariáns, nyílt, ξ -t tartalmazó $H_0 \subseteq H$ halmaz és egy egyértelműen meghatározott $f: H_0 \rightarrow \mathbb{R}$ differenciálható függvény, mely eleget tesz az

$$\begin{aligned} F(f \circ g_1(t), \dots, f \circ g_{mn}(t), t) &= 0, \\ f \circ g_{kn+l}(\xi) &= \eta_l. \end{aligned}$$

egyenletnek.

Ezt követően az előbb ismertetett tétel két következményét is ismertetjük. Az első következményben F lineáris függvény. A tétel jelöléseit megtartva az $A(x, t)$ mátrix csak a második változótól függ, így az $x \rightarrow A(x, t)$ leképezés Lipschitz tulajdonsága azonnal adódik. Ez a következmény hasonló állítást fogalmaz meg, mint az előző fejezet főtétele, azonban ez egy „gyengébb” állítást, mivel itt a regularitási feltételek erősebbek. A második következményben a vizsgált egyenlet nem lineáris, de az $A(x, t)$ mátrix csak az első változótól függ.

Következmény. Legyen $H \subseteq \mathbb{R}$ nem üres, nyílt halmaz, $\xi \in H$, és

$$G(H) = \{g_1, \dots, g_{mn}\}$$

folytonos függvények csoportja a (4) szerinti táblázattal. Legyenek

$$\alpha_1, \dots, \alpha_{mn}: H \rightarrow \mathbb{R}$$

folytonos függvények, továbbá legyen $h: H \rightarrow \mathbb{R}$ folytonosan differenciálható. Definiáljuk az alábbi mátrixot:

$$D(t) := [\alpha_{j*i-1} \circ g_i(t)].$$

Ha D reguláris a ξ pontban, akkor létezik egy ξ -t tartalmazó $G(H)$ -invariáns, nyílt $H_0 \subseteq H$ halmaz és egy egyértelműen meghatározott $f: H_0 \rightarrow \mathbb{R}$ függvény, mely eleget tesz az

$$\alpha_1 f \circ g_1 + \dots + \alpha_{mn} f \circ g_{mn} = h$$

egyenletnek.

Következmény. Legyen $H \subseteq \mathbb{R}$ nem üres, nyílt halmaz, $\xi \in H$, és

$$G(H) = \{g_1, \dots, g_{mn}\}$$

folytonos függvények csoportja a (4) szerinti táblázattal. Legyen $\eta \in \mathbb{R}^n$, továbbá

$$p = (\eta, \dots, \eta) \in \mathbb{R}^{mn}$$

és legyen $F: \mathbb{R}^{mn} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ folytonosan differenciálható függvény úgy, hogy

$$F(p_{*i}) = h \circ g_i(\xi) \quad (i = 1, \dots, mn)$$

teljesül. Tegyük föl, hogy a $D: \mathbb{R}^{mn} \rightarrow \mathcal{M}$,

$$D(x) := [\partial_{j_{*i-1}} F(x_{*i})]$$

leképezés reguláris a p pontban. Ha vagy $m = 1$ vagy $m \geq 2$ és az $x \rightarrow D^{-1}(x)$ leképezés Lipschitz a p környezetében, akkor létezik egy $G(H)$ -invariáns, ξ -t tartalmazó, $H_0 \subseteq H$ nyílt halmaz és egy egyértelműen meghatározott, differenciálható $f: H_0 \rightarrow \mathbb{R}$ függvény, mely eleget tesz az

$$f \circ g_{kn+l}(\xi) = \eta_l$$

feltételnek és teljesíti az

$$F(f \circ g_1(t), \dots, f \circ g_{mn}(t)) = h(t)$$

függvényegyenletet.

A bemutatott eredményeket a [7], [8], [9] dolgozatokban közöltük, jelentősen kiegészítve, megjavítva Bessenyei [6] tételét.

5. Szubkvadratikus függvények

Az ötödik fejezetben ismertetjük az erősen szubkvadratikus függvények fogalmát: az $f: [0, \infty] \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt erősen szubkvadratikusnak mondjuk, ha minden $x \geq 0$ esetén létezik olyan $c_x \in \mathbb{R}$ valós szám, hogy

$$f(y) - f(x) \leq c_x(y - x) + f(|y - x|) \quad (y \in \mathbb{R}),$$

majd néhány elemi példát mutatunk azon függvényekre, melyek eleget tesznek az említett egyenlőtlenségnek. Ezt követően leírjuk az erősen szubkvadratikusan függvények legfontosabb tulajdonságait. Ezután megadjuk a gyengén szubkvadratikusan függvények definícióját. Azt mondjuk, hogy az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény kvadratikusan, ha teljesíti a normanégyszert egyenletet (vagy paralelogramma azonosságot, vagy Jordan–von Neumann azonosságot):

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x) + 2f(y) \quad (x, y \in \mathbb{R}).$$

Ehhez kapcsolódóan, mint ahogyan az additív függvényekből definiáljuk a szubadditív függvényeket, ugyanúgy a kvadratikusan függvényekből definiálhatjuk a gyengén szubkvadratikusan függvényeket: azt mondjuk, hogy az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény gyengén szubkvadratikusan, ha minden $x, y \in \mathbb{R}$ esetén teljesíti az

$$f(x+y) + f(x-y) \leq 2f(x) + 2f(y) \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

egyenlőtlenséget. Ebben a szakaszban ismertetjük ezen függvények fontosabb tulajdonságait példákkal illusztrálva. A fentiekben definiált kétféle szubkvadratika fogalom közötti kapcsolat vizsgálatának kérdése elsőként a 2007-ben, Noszvajon rendezett „Conference on Inequalities and Applications '07” konferencián merült fel. Ebben a fejezetben precízen leírjuk a kétféle definíció közötti kapcsolatot. Ki fog derülni, hogy ha $f: [0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ erősen szubkvadratikusan függvény, akkor teljesül az

$$f(x+y) + f(x-y) \leq 2f(x) + 2f(y) \quad (x \geq y \geq 0).$$

egyenlőtlenség. A vizsgált függvények értelmezési tartománya nem egyezik meg, így természetes módon adódik, hogy tekintsük az erősen szubkvadratikusan függvények páros kiterjesztését, és az így kapott függvények vizsgáljuk a gyengén szubkvadratikusan függvényekkel való kapcsolatát. Látni fogjuk, hogy ha $f: [0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ erősen szubkvadratikusan függvény, akkor az $\bar{f}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\bar{f}(x) = \begin{cases} f(x), & \text{ha } x \geq 0 \\ f(-x), & \text{ha } x < 0 \end{cases}$$

módon definiált páros kiterjesztése gyengén szubkvadratikus. Az előbbi tétel megfordítása nem igaz: azaz megadható olyan $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gyengén szubkvadratikus függvény, melynek a $[0, \infty[$ intervallumra való leszűkítése nem erősen szubkvadratikus. Ebben a szakaszban bevezetünk és megvizsgálunk egy harmadik egyenlőtlenséget, mely az előzőekhez szorosan kapcsolódik:

$$\bar{f}(x+y) + \bar{f}(|x-y|) \leq 2\bar{f}(x) + 2\bar{f}(y) \quad (x, y \in \mathbb{R}).$$

Megmutatjuk, hogy ha $f: [0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ erősen szubkvadratikus függvény, akkor az $\bar{f}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ páros kiterjesztése teljesíti az

$$\bar{f}(x+y) + \bar{f}(|x-y|) \leq 2\bar{f}(x) + 2\bar{f}(y) \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

egyenlőtlenséget. A szakaszban szereplő eredményeket a [12] cikkben publikáltuk.

Introduction

The theory of functional equations has applications in many areas of mathematics, e.g. in geometry, in information theory, in probability theory, in economics and in social sciences.

Motivated by some investigations of Babbage and a method of solving certain functional equations arising in competition problems, we investigate a class of functional equations.

Motivated by the feature of mathematical calculations, Babbage studied examples of functional equations and their solutions, of increasing generality and complexity [5]. Denoting the identical mapping of \mathbb{R} by id , the general form of these equations is

$$F \circ (f \circ g_1, \dots, f \circ g_r, \text{id}) = 0 \quad (5)$$

where the functions F, g_1, \dots, g_n are given (with appropriate range and domain) and f is to be determined. Of course, there is no hope to give the general solution of (5) under such general circumstances. As Babbage himself illustrates it via several examples, it may occur that, having a particular solution, infinitely many functions f can be created satisfying the equation above, although the family of such functions may not be the complete collection of all solutions.

In the first chapter we summarize some results of group theory, which we will use in the next chapters and we introduce the notations which will be used in the dissertation. The following three chapters we investigate the equation (5) in several forms.

The main part of the fifth chapter is the problem of investigating the connections between the different concepts of subquadraticity. During the recent years, subquadratic functions have been considered by several authors. However, two different concepts of subquadraticity have been considered.

Using a simple modification of the geometric notion of concave functions, in their papers [3], [4], S. Abramovich, G. Jameson and G. Sinnamon introduced the concept calling a function $f: [0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ strongly subquadratic if, for each $x \geq 0$, there exists a constant $c_x \in \mathbb{R}$ such that the

inequality

$$f(y) - f(x) \leq c_x(y - x) + f(|y - x|) \quad (6)$$

is valid for all nonnegative y .

The other concept of subquadraticity is related to quadratic functions: a function $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ is called quadratic if it satisfies the square-norm (in other terminologies also called parallelogram or Jordan–von Neumann) equation

$$f(x + y) + f(x - y) = 2f(x) + 2f(y)$$

for all $x, y \in \mathbb{R}$. Based on this notion and analogously to the concepts of additive and subadditive functions, $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ is called subquadratic if it fulfils the inequality

$$f(x + y) + f(x - y) \leq 2f(x) + 2f(y)$$

for all $x, y \in \mathbb{R}$.

1. Preliminaries, terminology, group theory

In this chapter we summarize some results of group theory, which we will use in the next chapters and we introduce the notations which will be used in the dissertation. In this chapter the most important statement the Orbit-Stabilizer Theorem, which plays the key role in the proofs of the theorems of the next chapters.

Lemma. *Let $H \subseteq \mathbb{R}$ be a nonempty set, $G(H)$ be a group of functions. Let $\xi \in H$ be arbitrary. Then*

$$G_\xi(H) = \{g \in G(H) \mid g(\xi) = \xi\}$$

is a subgroup of $G(H)$. Consider the left cosets of $G_\xi(H)$ in $G(H)$. Then, the elements g and h of $G(H)$ belong to the same left coset if and only if $g(\xi) = h(\xi)$.

For our convenience, introduce the following concept. Assume $G = \{g_1, \dots, g_r\}$ is an arbitrary finite group. Define the operation $*$ on the L via the conventions $i * j = k$ if and only if $g_i g_j = g_k$ holds.

2. Linear functional equations and group of substitutions

In this chapter we consider the functional equation

$$\sum_{k=1}^r \alpha_k f \circ g_k = h,$$

where g_1, \dots, g_r ; $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ and h are given functions with appropriate domains and ranges. Furthermore we assume that the functions g_1, \dots, g_r generate a group under the operation of composition. Applying the composition f_k the equation can be reduced to systems of equations with unknowns $f_k = f \circ g_k$ after composition with g_k . The system is linear and hence if we assume some regularity properties the solution can be expressed by Cramer's rule. In this section we prove a stability theorem for the investigated equation. The main theorem of this chapter is:

Theorem. *Let $H \subset \mathbb{R}$ a nonempty set and*

$$g_1, \dots, g_r: H \rightarrow H$$

be functions forming a group under the operation of composition. Also let

$$\alpha_1, \dots, \alpha_r; h: H \rightarrow \mathbb{R}$$

be given functions, and assume that the determinant the matrix

$$A := [\alpha_{j*i-1} \circ g_i]$$

is nonsingular on H . If A_h stands for the matrix which is obtained from A replacing the first column by, in turn, $h \circ g_1, \dots, h \circ g_r$, then $f: H \rightarrow \mathbb{R}$ given by

$$f = \det A_h / \det A$$

is the unique solution of

$$\sum_{k=1}^r \alpha_k f \circ g_k = h$$

on H . Moreover, if $\varphi: H \rightarrow \mathbb{R}$ satisfies the inequality

$$\left| \sum_{k=1}^r \alpha_k \varphi \circ g_k - h \right| \leq \varepsilon,$$

then the next inequality holds:

$$|f - \varphi| \leq \varepsilon \|A^{-1}\|_{\infty}.$$

3. Nonlinear explicit functional equations

In the *third chapter* motivated by some investigations of Charles Babbage, we study a class of single variable functional equations:

$$F(f \circ g_1, \dots, f \circ g_r) = h,$$

where g_1, \dots, g_r, F and h are given functions and $\{g_1, \dots, g_r\}$ form a group under the operation of composition. It turns out that the algebraic structure of a stabilizer determines the number of initial value conditions for the functional equation. In the proof of the main result, the Implicit Function Theorem plays the key role. The main theorem is:

Theorem. *Let $H \subset \mathbb{R}$ be a nonempty open set, $\xi \in H$, and*

$$G(H) = \{g_1, \dots, g_{mn}\}$$

be a group of continuous functions by the tabular

| ○ | g_1 | g_{n+1} | \dots | g_{kn+1} | \dots | $g_{(m-1)n+1}$ |
|----------|----------|-----------|----------|--------------|----------|----------------|
| g_1 | g_1 | g_{n+1} | \dots | g_{kn+1} | \dots | $g_{(m-1)n+1}$ |
| g_2 | g_2 | g_{n+2} | \dots | g_{kn+2} | \dots | $g_{(m-1)n+2}$ |
| \vdots | \vdots | \vdots | \ddots | \vdots | \ddots | \vdots |
| g_l | g_l | g_{n+l} | \dots | g_{kn+l} | \dots | $g_{(m-1)n+l}$ |
| \vdots | \vdots | \vdots | \ddots | \vdots | \ddots | \vdots |
| g_n | g_n | g_{2n} | \dots | $g_{(k+1)n}$ | \dots | g_{mn} |

(7)

Let $\eta \in \mathbb{R}^n$,

$$p = (\eta, \dots, \eta) \in \mathbb{R}^{mn}$$

and let $h: H \rightarrow \mathbb{R}$ be a continuous function, $F: \mathbb{R}^{mn} \rightarrow \mathbb{R}$ be a continuously differentiable function such that

$$F(p_{*i}) = h \circ g_i(\xi) \quad (i = 1, \dots, mn).$$

Define the mapping $A: \mathbb{R}^{mn} \rightarrow \mathcal{M}$ by

$$A(x) := [\partial_{j_*i-1} F(x_{*i})].$$

If A is regular at p and

$$G_\xi(H) \subset Z(G(H)),$$

then there exist a $G(H)$ -invariant open set $H_0 \subset H$ containing ξ and a unique differentiable function $f: H_0 \rightarrow \mathbb{R}$ satisfying the equation

$$\begin{aligned} F(f \circ g_1(t), \dots, f \circ g_{mn}(t)) &= h(t), \\ f \circ g_{kn+l}(\xi) &= \eta_l. \end{aligned}$$

4. Nonlinear implicit functional equations

In the fourth chapter of the dissertation we investigate the equations,

$$F(f \circ g_1, \dots, f \circ g_r) = h,$$

where $\{g_1, \dots, g_r\}$ and F are given functions and $\{g_1, \dots, g_r\}$ form a group under the operation of composition. In the investigations we utilise the Implicit Function Theorem and the Global Existence and Uniqueness Theorem.

Theorem. *Let $H \subseteq \mathbb{R}$ be a nonempty open subset, $\xi \in H$, and*

$$G(H) = \{g_1, \dots, g_{mn}\}$$

be a group of continuously differentiable functions by (7). Let $\eta \in \mathbb{R}^n$,

$$p = (\eta, \dots, \eta) \in \mathbb{R}^{mn}$$

and let $F: \mathbb{R}^{mn} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ be a continuously differentiable function such that

$$F(p_{*i}, g_i(\xi)) = 0$$

hold for all $i = 1, \dots, mn$. Define the mappings $A: \mathbb{R}^{mn} \rightarrow \mathcal{M}$ and $B: \mathbb{R}^{mn} \rightarrow \mathbb{R}^{mn}$ by

$$\begin{aligned} A(x, t) &:= [\partial_{j_{*i-1}} F(x_{*i}, g_i(t))], \\ B(x, t) &:= [\partial_{mn+1} F(x_{*i}, g_i(t))g'_i(t)] \end{aligned}$$

and assume that A is regular at (p, ξ) . If either $m = 1$ or $m \geq 2$ and the mapping $x \rightarrow A^{-1}B(x, t)$ is Lipschitz in a neighborhood of (p, ξ) then there exist a $G(H)$ -invariant open set $H_0 \subseteq H$ containing ξ and a unique differentiable function $f: H_0 \rightarrow \mathbb{R}$ satisfying

$$\begin{aligned} F(f \circ g_1(t), \dots, f \circ g_{mn}(t), t) &= 0, \\ f \circ g_{kn+l}(\xi) &= \eta_l. \end{aligned}$$

The chapter contains two Corollaries. In the first one, we consider the case when F is linear in its arguments except for the last one. In this setting, keeping the notations of the Main Theorem, the matrix $A(x, t)$ depends only on its second variable. In particular, the Lipschitz property of the mapping $x \rightarrow A(x, t)$ is straightforward. In the second Corollary F is nonlinear, but does not depend on the free variable. This phenomenon is reflected in the fact that the matrix $A(x, t)$ depends only on the first variable.

Corollary. Let $H \subseteq \mathbb{R}$ be a nonempty open set, $\xi \in H$, and

$$G(H) = \{g_1, \dots, g_{mn}\}$$

be a group of continuously differentiable functions by (7). Let

$$\alpha_1, \dots, \alpha_{mn}: H \rightarrow \mathbb{R}$$

be continuous, $h: H \rightarrow \mathbb{R}$ be continuously differentiable functions and

$$D(t) := [\alpha_{j^*i-1} \circ g_i(t)].$$

If D is regular at ξ , then there exist a $G(H)$ -invariant open set $H_0 \subseteq H$ containing ξ and a unique differentiable function $f: H_0 \rightarrow \mathbb{R}$ satisfying the functional equation

$$\alpha_1 f \circ g_1 + \dots + \alpha_{mn} f \circ g_{mn} = h.$$

Corollary. Let $H \subseteq \mathbb{R}$ be a nonempty open set, $\xi \in H$, and

$$G(H) = \{g_1, \dots, g_{mn}\}$$

be a group of continuously differentiable functions by (7). Let $\eta \in \mathbb{R}^n$, $p = (\eta, \dots, \eta) \in \mathbb{R}^{mn}$ and let $F: \mathbb{R}^{mn} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ be a continuously differentiable function such that

$$F(p_{*i}) = h \circ g_i(\xi)$$

hold for all $i = 1, \dots, mn$. Assume that the mapping $D: \mathbb{R}^{mn} \rightarrow \mathcal{M}$ defined by

$$D(x) := [\partial_{j^*i-1} F(x_{*i})]$$

is regular at p . If either $m = 1$ or $m \geq 2$ and the mapping $x \rightarrow D(x)$ is Lipschitz in a neighborhood of p , then there exist a $G(H)$ -invariant open set $H_0 \subseteq H$ containing ξ and a unique differentiable function $f: H_0 \rightarrow \mathbb{R}$ satisfying the conditions

$$f \circ g_{kn+l}(\xi) = \eta_l$$

and functional equation

$$F(f \circ g_1(t), \dots, f \circ g_{mn}(t)) = h(t).$$

These results were presented in the [7], [8], [9] papers, which generalize the Theorems of Bessenyei [6].

5. Subquadratic functions

In the *fifth chapter* we give the definition of strongly subquadratic functions. A function $f: [0, \infty] \rightarrow \mathbb{R}$ is said to be strongly subquadratic if for any $x \geq 0$ there exists a constant $c_x \in \mathbb{R}$ such that

$$f(y) - f(x) \leq c_x(y - x) + f(|y - x|) \quad (y \in \mathbb{R}),$$

thereafter. We show some basic examples for this functions. In this chapter we describe the main properties of strongly subquadratic functions. Then we define weakly subquadratic functions. The other concept of subquadraticity is related to quadratic functions. A function $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ is called quadratic if it satisfies the square-norm (in other terminologies the parallelogram or Jordan–von Neumann) equation

$$f(x + y) + f(x - y) = 2f(x) + 2f(y) \quad (x, y \in \mathbb{R}).$$

Based on this notion and analogously to the concepts of additive and subadditive functions $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ is called subquadratic if it fulfils the inequality

$$f(x + y) + f(x - y) \leq 2f(x) + 2f(y) \quad (x, y \in \mathbb{R}).$$

We show the main properties and give some examples of these functions. The main part of this chapter is the problem of investigating the connections between the different concepts of subquadraticity. This problem arose during the Conference on Inequalities and Applications '07 held in Noszvaj, Hungary in 2007. In this section summarizing and extending these results, we completely describe the relation between the two concepts of subquadraticity. It turns out that if $f: [0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ is strongly subquadratic, then it satisfies the inequality

$$f(x + y) + f(x - y) \leq 2f(x) + 2f(y) \quad (x \geq y \geq 0).$$

The domains of the investigated functions are not equal, thus we introduce the even extension of strongly subquadratic function and examine the connection between these functions and weakly subquadratic functions. It can be proved that, if $f: [0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ is a strongly subquadratic function then its

even extension $\bar{f}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ defined by,

$$\bar{f}(x) = \begin{cases} f(x), & \text{ha } x \geq 0 \\ f(-x), & \text{ha } x < 0 \end{cases}$$

is weakly subquadratic. The converse of the previous theorem is not true: more precisely, there exists a weakly subquadratic function $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ such that its restriction $f: [0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ is not strongly subquadratic. On the other hand we introduce and investigate a third inequality related to both concepts of subquadraticity, namely

$$\bar{f}(x + y) + \bar{f}(|x - y|) \leq 2\bar{f}(x) + 2\bar{f}(y) \quad (x, y \in \mathbb{R}).$$

We prove that if $f: [0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ is a strongly subquadratic function then its even extension $\bar{f}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ satisfies the inequality

$$\bar{f}(x + y) + \bar{f}(|x - y|) \leq 2\bar{f}(x) + 2\bar{f}(y) \quad (x, y \in \mathbb{R}).$$

The results of this chapter were published in paper [12].

Irodalomjegyzék

- [1] S. Abramovich, *1. Remark*, Problems and Remarks, Inequalities and Applications (Eds. C. Bandle, A. Gilányi, L. Losonczi, Zs. Páles, M. Plum), Birkhäuser Verlag, Basel, Boston, Berlin, 2009, xli.
- [2] S. Abramovich, *On superquadracity*, J. Math. Inequal. **3** (2009), 329–339.
- [3] S. Abramovich, G. Jameson, G. Sinnamon, *Refining of Jensen's inequality*, Bull. Math. Soc. Sci. Math. Roumanie (N.S.) **95** (2004), 3–14.
- [4] S. Abramovich, G. Jameson, G. Sinnamon, *Inequalities for averages of convex and superquadratic functions*, JIPAM, J. Inequal. Pure Appl. Math. **5** (2004), Art. 91.
- [5] Ch. Babbage, *An essay towards a calculus of functions I.*, Phil. Trans. **105** (1815), 389–423.
- [6] M. Bessenyei, *Functional equations and finite groups of substitutions*, Amer. Math. Monthly **117** (2010), no. 10, 921–927.
- [7] M. Bessenyei and Cs. G. Kézi, *Functional equations and group substitutions*, Linear Algebra Appl. **434** (2011), no. 6, 1525–1531.
- [8] M. Bessenyei, G. Horváth and Cs. G. Kézi, *Functional equations on finite groups of substitutions*, Expo. Math. **30**, (2012), no. 3, 283–294.
- [9] M. Bessenyei and Cs. G. Kézi, *Solving functional equations via finite substitutions*, Aequationes Math. **85** (2013), no. 3, 593–600.
- [10] A. Gilányi, *Remark on subquadratic functions*, Presented at the conference on *Inequality and applications 2007*, Noszvaj, Hungary, September 2007.
- [11] A. Gilányi, *5. Remark (Remark on subquadratic functions, related to Shoshana Abramovich's talk and remark)*, Problems and Remarks, Inequalities and Applications (Eds. C. Bandle, A. Gilányi, L. Losonczi, Zs. Páles, M. Plum), Birkhäuser Verlag, Basel, Boston, Berlin, 2009, xliii–xlv.
- [12] A. Gilányi, Cs. Kézi, K. Troczka-Pawelec, *On two different concepts of subquadracity*, Inequalities and Applications 2010 **161** (2012), 209–215.

Előadások

1. *On subquadratic functions*, 4th International Students' Conference on Analysis, 2008, Zamárdi, Hungary.
2. *On log-subquadratic functions*, 5th International Students' Conference on Analysis, 2009, Szare, Poland.
3. *Connections between two subquadratic notions*, 6th International Students' Conference on Analysis, 2010, Sikfőkút (Noszvaj), Hungary.
4. *On subquadratic functions*, János Bolyai Memorial Conference, August 30–September 4, Budapest, Hungary–Marosvásárhely, Romania.
5. *Functional equations and group of substitutions*, Conference on Inequalities and Applications '10, 2010, Hajdúszoboszló, Hungary.
6. *Functional equations and finite group of substitutions II.*, 11th Katowice–Debrecen Winter Seminar on Functional Equations and Inequalities, 2011, Wisła, Poland.
7. *On two different concept of subquadraticity*, 7th International Students' Conference on Analysis, 2011, Wisła, Poland.
8. *Szubkvadratikus függvényekről*, 18. Épületgépészeti, Gépészeti és Építőipari Szakmai Napok, 2012, Debrecen.