

Gazdaságmatematikai és statisztikai ismeretek

/Elméleti jegyzet/

Gazdaságmatematikai és statisztikai ismeretek

/Elméleti jegyzet/

Szerző:

Vincze Szilvia

Debreceni Egyetem Gazdálkodástudományi és Vidékfejlesztési Kar (1 - 8. fejezet)

Kovács Sándor

Debreceni Egyetem Gazdálkodástudományi és Vidékfejlesztési Kar (9 - 16. fejezet)

Szerkesztő:

Vincze Szilvia – Kovács Sándor

Lektor:

Szűcs István

Szent István Egyetem



Debreceni Egyetem
Gazdálkodástudományi és
Vidékfejlesztési Kar



Pannon Egyetem
Georgikon Kar

Debreceni Egyetem, AGTC • Debrecen, 2013

©Vincze Szilvia, Kovács Sándor, 2013

Kézirat lezárva: 2013. május 30.

ISBN 978-615-5183-43-0

DEBRECENI EGYETEM AGRÁR- ÉS GAZDÁLKODÁSTUDOMÁNYOK CENTRUMA

Nemzeti Fejlesztési Ügynökség
www.ujjszechenyiterv.gov.hu
06 40 638 638



MAGYARORSZÁG MEGÚJUL



A projekt az Európai Unió támogatásával, az Európai Szociális Alap társfinanszírozásával valósul meg.

A kiadvány a TÁMOP-4.1.2.A/1-11/1-2011-0029 projekt keretében készült.

TARTALOMJEGYZÉK

ELŐSZÓ.....	8
1. HALMAZELMÉLET ÉS SZÁMHALMAZOK.....	9
1.1 A HALMAZ FOGALMA, JELÖLÉSEK	9
1.2 RÉSZHALMAZ, HATVÁNYHALMAZ	9
1.3 HALMAZOK SZEMLÉLTETÉSE	10
1.4 MŰVELETEK HALMAZOKKAL	10
1.5 SZÁMHALMAZOK.....	12
1.5.1 A természetes számok halmaza	12
1.5.2 Az egész számok halmaza.....	12
1.5.3 A racionális számok halmaza.....	13
1.5.4 A valós számok halmaza	13
1.6. ELLENŐRZŐ KÉRDÉSEK	16
2. RELÁCIÓK ÉS FÜGGVÉNYEK	18
2.1. A DESCARTES-SZORZAT, A RELÁCIÓ FOGALMA	18
2.2. A RELÁCIÓ ÉRTELMEZÉSI TARTOMÁNYA, ÉRTÉKKÉSZLETE, INVERZE, AZ ÖSSZETETT RELÁCIÓ	19
2.3. A FÜGGVÉNY FOGALMA	20
2.4. HALMAZOK SZÁMOSSÁGA	20
2.5. ELLENŐRZŐ KÉRDÉSEK.....	21
3. EGYVÁLTOZÓS VALÓS FÜGGVÉNYEK	22
3.1. AZ EGYVÁLTOZÓS VALÓS FÜGGVÉNY FOGALMA, MŰVELETEK	22
3.2. AZ EGYVÁLTOZÓS VALÓS FÜGGVÉNY ZÉRUSHELYE	23
3.3. KORLÁTOSSÁG, MONOTONITÁS, SZÉLSŐÉRTÉK	24
3.4. KONVEX ÉS KONKÁV FÜGGVÉNYEK, INFLEXIÓS PONT	25
3.5. PÁROS ÉS PÁRATLAN FÜGGVÉNYEK	26
3.6. PERIODIKUS FÜGGVÉNYEK.....	26
3.7. AZ EGYVÁLTOZÓS VALÓS FÜGGVÉNYEK NEVEZETES OSZTÁLYAI	26
3.7.1. <i>Algebrai függvények</i>	26
3.7.2. <i>Transzcendens függvények</i>	32
3.7.3. <i>Egyéb nevezetes függvények</i>	38
3.8. FÜGGVÉNYTRANSZFORMÁCIÓK.....	41
3.9. ELLENŐRZŐ KÉRDÉSEK	44
4. SOROZATOK	46
4.1. A SOROZAT MEGADÁSA, SZEMLÉLTETÉSE, MŰVELETEK SOROZATOKKAL	46
4.2. A SOROZAT TULAJDONSÁGAI	47
4.3. SOROZAT KONVERGENCIÁJA	48
4.4. SOROZATOK HATÁRÉRTÉKÉNEK KISZÁMÍTÁSÁRA VONATKOZÓ TÉTELEK.....	49
4.5. RÉSZSOROZAT.....	50
4.6. VÉGTELEN, MINT HATÁRÉRTÉK	50
4.7. A SZÁMTANI ÉS A MÉRTANI SOROZAT	51
4.8. A MÉRTANI SOROZAT ALKALMAZÁSAI	52
4.8.1 Kamatos kamatszámítás	52
4.8.2 Járadékszámítás	53
4.8.3 Kölcsönök törlesztése	53
4.8.4 Ismétlődő beruházások	54
4.8.5 Hozadékszámítás	54
4.9. ELLENŐRZŐ KÉRDÉSEK.....	55
5. FÜGGVÉNYEK HATÁRÉRTÉKE ÉS FOLYTONOSSÁGA.....	56
5.1. FÜGGVÉNYEK HATÁRÉRTÉKE VÉGES HELYEN.....	56
5.2. HATÁRÉRTÉK A VÉGTELENBEN	56

5.3. A FÜGGVÉNY FOLYTONOSSÁGA.....	57
5.4. ELLENŐRZŐ KÉRDÉSEK	58
6. DIFFERENCIÁLSZÁMÍTÁS	59
6.1. A DIFFERENCIA- ÉS A DIFFERENCIÁLHÁNYADOS FOGALMA	59
6.2. DERIVÁLÁSI SZABÁLYOK	62
6.3. AZ ELEMI FÜGGVÉNYEK DERIVÁLTJAI.....	63
6.4. A L'HOSPITAL-SZABÁLY	64
6.5. MAGASABBRENDŰ DERIVÁLTAK	64
6.6. TELJES FÜGGVÉNYVIZSGÁLAT.....	65
6.7. ELASZTICITÁS	66
6.8. RÁFORDÍTÁS - HOZAM FÜGGVÉNYEK ELEMZÉSE	67
6.9. ELLENŐRZŐ KÉRDÉSEK	68
7. MÁTRIXOK ÉS DETERMINÁNSOK.....	69
7.1. A MÁTRIX FOGALMA	69
7.2. A MÁTRIX TRANSZPONÁLTJA	70
7.3. SPECIÁLIS MÁTRIXOK	70
7.4. MŰVELETEK MÁTRIXOKKAL.....	71
7.4.1. Mátrixok összeadása, skalárral szorzása és lineáris kombinációja	71
7.4.2. Mátrix szorzása mátrixszal.....	72
7.5. A DETERMINÁNSFÜGGVÉNY	74
7.6. A DETERMINÁNSFÜGGVÉNY NÉHÁNY TULAJDONSÁGA	76
7.7. ELLENŐRZŐ KÉRDÉSEK	77
8. LINEÁRIS EGYENLETRENDSZEREK	78
8.1. LINEÁRIS EGYENLETRENDSZEREK MEGOLDÁSA	78
8.1.1. Egyenletrendszerek megoldása Gauss-eliminációval	78
8.1.2. A Cramer-szabály	82
8.2. A HOMOGÉN EGYENLETRENDSZER MEGOLDÁSÁRÓL	82
8.3. ELLENŐRZŐ KÉRDÉSEK	83
9. VEKTORTEREK ÉS A BÁZISTRANSZFORMÁCIÓ	84
9.1. VEKTORTEREK	84
9.1.1. Lineáris kombináció, lineáris függetlenség, lineáris függőség	84
9.1.2. Generátorrendszer, dimenzió, bázis	85
9.1.3. Altér, rang, kompatibilitás	86
9.1.4. Az egyenletrendszer mátrixos alakja	87
9.2. AZ ELEMI BÁZISTRANSZFORMÁCIÓ ÉS ALKALMAZÁSAI.....	88
9.2.1. Az elemi bázistranszformáció	88
9.2.2. Lineáris függőség/függetlenség meghatározása	89
9.2.3. A kompatibilitás vizsgálata.....	89
9.2.4. Mátrix/vektorrendszer rangjának megállapítása	90
9.2.5. Mátrix inverzének meghatározása.....	90
9.2.6. Egyenletrendszer megoldása.....	90
9.3. ELLENŐRZŐ KÉRDÉSEK	90
10. TÖBBVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK	92
10.1. EUKLIDESZI TÉR, SKALÁRIS SZORZAT, NORMA, TÁVOLSÁG	92
10.2. TÖBBVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK HATÁRÉRTÉKE, FOLYTONOSSÁGA	94
10.3. PARCIÁLIS DERIVÁLTAK	94
10.4. DERIVÁLÁSI SZABÁLYOK	95
10.5. A TÖBBVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK SZÉLSŐÉRTÉK-SZÁMÍTÁSA	96
10.6. TÖBBVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK LOKÁLIS ÉS GLOBÁLIS MAXIMUMA ÉS MINIMUMA	97
10.7. A MAGASABBRENDŰ PARCIÁLIS DERIVÁLT FOGALMA	97
10.8. A TÖBBVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK FELTÉTEL NÉLKÜLI SZÉLSŐÉRTÉKÉNEK MEGHATÁROZÁSA	98

10.9. FELTÉTELES SZÉLSŐÉRTÉK.....	99
10.10. ELLENŐRZŐ KÉRDÉSEK	101
11. KOMBINATORIKA	102
11.1. PERMUTÁCIÓ	102
11.1.1. <i>Ismétlés nélküli permutáció</i>	102
11.1.2. <i>Ismétléses permutáció</i>	102
11.2. VARIÁCIÓ	103
11.2.1. <i>Ismétlés nélküli variáció</i>	103
11.2.2. <i>Ismétléses variáció</i>	103
11.3. KOMBINÁCIÓ	103
11.3.1. <i>Ismétlés nélküli kombináció</i>	103
11.3.2. <i>Ismétléses kombináció</i>	104
11.4. BINOMIÁLIS TÉTEL.....	104
11.5. BINOMIÁLIS EGYÜTTHATÓK NÉHÁNY TULAJDONSÁGA	105
11.6. ELLENŐRZŐ KÉRDÉSEK	106
12. VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁS	107
12.1. AZ ESEMÉNY MATEMATIKAI FOGALMA, ESEMÉNYTÉR.....	107
12.2. MŰVELETEK ESEMÉNYEKKEL.....	107
12.3. A VALÓSZÍNŰSÉG MATEMATIKAI FOGALMA	109
12.4. A VALÓSZÍNŰSÉG KISZÁMÍTÁSÁNAK MÓDJAI	112
12.4.1. <i>A klasszikus valószínűség</i>	112
12.4.2. <i>Visszatevéses mintavétel</i>	112
12.4.3. <i>A visszatevés nélküli mintavétel</i>	113
12.4.4. <i>A valószínűség geometriai kiszámítása</i>	114
12.5. A FELTÉTELES VALÓSZÍNŰSÉG	114
12.6. ESEMÉNYEK FÜGGETLENSÉGE	115
12.7. TELJES VALÓSZÍNŰSÉG TÉTELE, BAYES TÉTEL	115
12.8. ELLENŐRZŐ KÉRDÉSEK	116
13. VALÓSZÍNŰSÉGI VÁLTOZÓK.....	118
13.1. AZ ELOSZLÁSFÜGGVÉNY TULAJDONSÁGAI	118
13.2. A SÚRÚSÉGFÜGGVÉNY ÉS TULAJDONSÁGAI	119
13.3. NEVEZETES DISZKRÉT ELOSZLÁSOK	122
13.3.1. <i>A binomiális eloszlás</i>	122
13.3.2. <i>A geometriai eloszlás</i>	122
13.3.3. <i>A Poisson-eloszlás</i>	122
13.4. NEVEZETES ABSZOLÚT FOLYTONOS ELOSZLÁSOK	123
13.4.1. <i>Az egyenletes eloszlás</i>	123
13.4.2. <i>Az exponenciális eloszlás</i>	123
13.4.3. <i>A normális eloszlás</i>	123
13.5. A NAGY SZÁMOK TÖRVÉNYE	125
13.6. ELLENŐRZŐ KÉRDÉSEK	126
14. STATISZTIKAI ALAPFOGALMAK	127
14.1. A STATISZTIKA FOGALMA	127
14.2. ALAPFOGALMAK	128
14.3. A STATISZTIKAI SOKASÁG TÍPUSAI	128
14.4. ISMÉRVEK	128
14.5. STATISZTIKAI SOROK	129
14.5.1. <i>Mennyiségi sorok</i>	130
14.5.2. <i>Egyéb sorok</i>	130
14.5.3. <i>A statisztikai sorok jellegzetességei</i>	130
14.6. STATISZTIKAI TÁBLÁK	131
14.7. FORMAI ÉS TARTALMI KÖVETELMÉNYEK.....	131

14.8. STATISZTIKAI VISZONYSZÁMOK.....	133
14.8.1. Egyenemű viszonyyszámok	134
14.8.2. Különnemű adatok viszonyítása	137
14.9. KÖZÉPÉRTÉKEK	138
14.9.1. Számított középértékek	139
14.9.2. Helyzeti középértékek	142
14.10. SZÓRÓDÁS ÉS MUTATÓI	144
14.10.1. Terjedelem	144
14.10.2. Középelérés.....	144
14.10.3. Abszolút átlageltérés	144
14.10.4. Variancia (szórásnégyzet).....	145
14.10.5. Négyzetes átlageltérés (szórás)	145
14.11. STATISZTIKAI INDEXEK	146
14.11.1. Abszolút számokból számított indexek.....	146
14.11.2. Viszonyyszámokból számított indexek	148
14.12. ELLENŐRZŐ KÉRDÉSEK	151
TÁRGYMUTATÓ.....	153
IRODALOMJEGYZÉK.....	157

ELŐSZÓ

A jegyzet a Magyar felsőoktatás MsC képzésében résztvevő, Vidékfejlesztési és gazdasági agrármérnöki szakos hallgatók számára készült a TÁMOP-4.1.2.A/1-11/1-2011-0029 sz. „A Vidékfejlesztési és gazdasági agrármérnöki mesterképzési szakok és a feltétellel belépők felzárkóztatása, esettanulmányokon alapuló, gyakorlatorientált, modul rendszerű tananyagának fejlesztése, különös tekintettel az informatikai eszközök alkalmazására” című pályázat keretében. A pályázatban vállaltak alapján gazdaságmatematika¹ és statisztika témakörben egy elméleti és egy gyakorlati jegyet készült el.

Az elméleti részben szem előtt tartottuk azt aényt, hogy nem matematikusok képezéséhez kell igazítani az ismeretanyagot. Célunk az volt, hogy a hallgatókat megismertessük azokkal a főbb matematikai alapeszközökkel, amelyek a mezőgazdasági, közgazdasági, természettudományi, valamint informatikai tantárgyak tanulmányozásához nélkülözhetetlenek. Ennek érdekében arra törekedtünk, hogy a lehető legegyszerűbben, szemléletes módon jussunk el az alkalmazható matematikai módszerekhez, valamint, hogy a matematikai ismereteket - ahol csak erre lehetőségünk volt - bizonyítások nélkül, a legalapvetőbb fogalmakat példákkal alátámasztva hozzuk közelebb az Olvasóhoz, és alapot teremtsünk arra, hogy sor kerülhessen majd alkalmazási lehetőségekre egy külön gyakorlati jegyzetben. Az elméleti ismeretek gyakorlati kapcsolódásaként említhetjük meg a termelési tényezők rendszerezését, a tényezőkapcsolatok függvényekkel történő feltárásának lehetőségét, valamint a különböző gazdasági becsléseket és a pénzügyi műveletek hozadékainak számítását, illetve a gazdasági és egyéb információk statisztikai eszközökkel történő feldolgozását, elemzését.

A jegyzet keretei között nem törekedtünk teljes elméleti felépítésre. A középiskolai matematikai fogalmakat közvetlenül használtuk és fejlesztettük tovább, egyszerű példákon keresztül megpróbáltuk értelmezni a definíciókat, tételeket. Tudatában vagyunk annak, hogy célkitűzéseinket nem minden tekintetben sikerült maradék nélkül megvalósítani. Ha azonban előre tudtunk lépni a matematika mezőgazdasági és gazdasági, természettudományi alkalmazása komplexebb ismeretanyagának kidolgozásában és a különböző területeken tanuló hallgatókat közelebb hozhattuk a matematikához, akkor fáradtságunk már nem volt hiábavaló.

a Szerzők

¹ A jegyzet matematikai fejezetei nagyban támaszkodnak a Bíró és Vincze (2000) könyvének anyagára.

1. HALMAZELMÉLET ÉS SZÁMHALMAZOK

A természetben lejátszódó események, jelenségek kölcsönhatásban állnak egymással. A kapcsolatok leírása, vizsgálata és gyakorlati alkalmazása a mindennapi nyelv segítségével a legtöbb esetben igen nehézkes, sőt időnként kivitelezhetetlen. Így kialakult egy sajátos nyelv, amely megkönnyíti a dolgunkat. E nyelv alapeleme a függvény, amely igen jelentős szerepet játszik a gazdasági és az élet egyéb területein, a mezőgazdasági és ipari termelésben, valamint a kutatásban is. A függvény általános fogalmához szükségünk van a halmaz fogalmának ismeretére, valamint meg kell ismerkednünk néhány, a halmazokhoz kapcsolódó szakirodalmi fogalommal is (Rimán, 1992; Csernyák, 1998).

1.1 A halmaz fogalma, jelölések

A halmaz fogalmát a matematikában nem definiáljuk, tulajdonságaival körülírt alapfogalomnak tekintjük. A **halmaz** bizonyos jól meghatározott, különböző objektumoknak az összességét jelenti. A halmazokat általában latin nagybetűkkel ($H, K, L, \dots$), elemeit pedig latin kisbetűkkel ($h, k, l, \dots$) jelöljük.

A halmazt alkotó objektumok **a halmaz elemei**, az elem fogalmát is alapfogalomnak tekintjük. Egy halmazban annak mindegyik eleme csak egyszer fordul elő, és az elemek sorrendje tetszőleges. Egy halmaz akkor tekinthető adottnak, ha minden elemről egyértelműen el tudjuk dönteni, hogy benne van-e az adott halmazban vagy sem.

A **halmaz megadása** az elemeinek megadását jelenti, amely történhet a halmaz elemeinek felsorolásával, vagy a halmaz elemeire jellemző közös tulajdonság megadásával. Létezik olyan halmaz is, amelynek egyetlen eleme sincs. Az ilyen halmazt **üres halmaznak** nevezzük és $\emptyset$ -val jelöljük. Ha egy halmaznak véges sok eleme van, akkor véges halmazról, ellenkező esetben végtelen halmazról beszélünk.

Definíció. Két halmaz egyenlő, ha ugyanazokból az elemekből áll. A H és K halmazok egyenlőségére a $H = K$ jelölést, ennek tagadására a $H \neq K$ jelölést használjuk.

1.2 Részhalmaz, hatványhalmaz

Definíció. A H halmaz a K halmaz **részhalmaza**, ha a H minden eleme benne van a K halmazban. Ennek jelölése: $H \subseteq K$. Azt is mondhatjuk, hogy a “ H benne van a K -ban”, vagy “ K tartalmazza H -t”. Ez szimbólumokkal a következőképpen fejezhető ki: $\forall h \in H \Rightarrow h \in K$. Ha a H halmaz a K halmaznak részhalmaza, de $H \neq K$, akkor a H valódi részhalmaza a K -nak. Ennek jelölése: $H \subset K$.

Megjegyzés. A $\subseteq, \subset$ a tartalmazás, illetve a valódi tartalmazás jele; ezek tagadása: $\not\subseteq, \not\subset$. A részhalmaz definíciója alapján az üres halmaz része minden halmaznak, és minden halmaz része önmagának: $\emptyset \subseteq H, H \subseteq H$. Ez azt jelenti, hogy bármely nemüres halmaznak van legalább két részhalmaza. Ezeket a részhalmazokat **triviális részhalmazoknak** nevezzük.

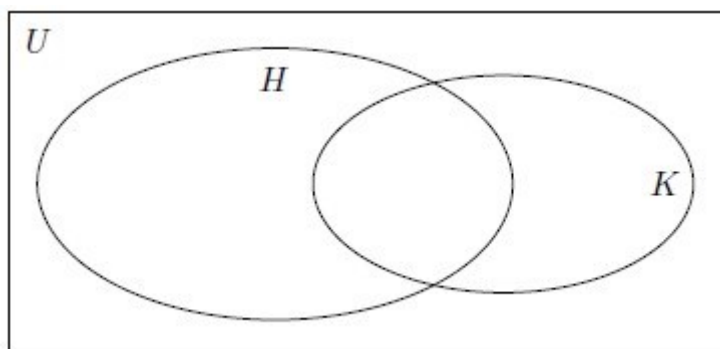
Tétel. A H és K halmazok pontosan akkor **egyenlők**, ha $H \subseteq K$ és $K \subseteq H$ tartalmazás egyidejűleg fennáll.

Definíció. Egy adott H halmaz összes részhalmazainak halmazát a H **hatványhalmazának** nevezzük. Jele: $P(H)$, vagy 2^H .

Tétel. Ha egy H halmaznak n darab eleme van, akkor a $P(H)$ halmaznak 2^n eleme van.

1.3 Halmazok szemléltetése

A halmazok szemléltetésére gyakran használunk ábrákat, ezeket a halmazokat a sík bizonyos tartományaival (pl. körlapokkal, téglalapokkal,...) jeleníthetjük meg. Ezeket az ábrákat **Venn-diagramoknak** nevezzük (1. ábra).



1. ábra: Az U alaphalmaz, illetve a H és K halmazok Venn-diagramja

Forrás: Bíró és Vincze (2000)

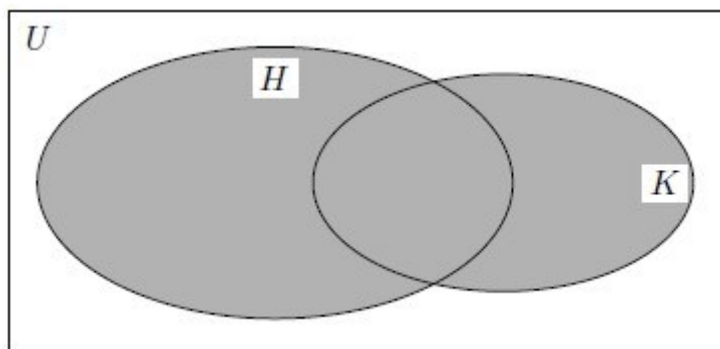
A továbbiakban mindig feltesszük, hogy a szóban forgó H , K ,... halmazok egy adott U halmaznak a részhalmazai. Az ilyen U halmazt **alaphalmaznak** (univerzumnak) hívjuk. Az U alaphalmazt általában téglalappal, a H , K ,... részhalmazokat pedig valamilyen zárt görbével határolt tartománnyal ábrázoljuk. A későbbiek során a szemléltetés megkönnyítheti a halmazokra vonatkozó összefüggések igazolását.

1.4 Műveletek halmazokkal

Tekintsük az U alaphalmazt, illetve a H és K halmazokat, amelyekre teljesül, hogy: $H, K \subseteq U$.

Definíció. Két (vagy több) halmaz **uniója** (egyesítése) azoknak az elemeknek a halmaza, melyek a megadott halmazok közül legalább az egyikben benne vannak (2. ábra).

Jele: $\cup$, szimbólumokkal: $H \cup K = \{x \in U \mid x \in H \text{ vagy } x \in K\}$.



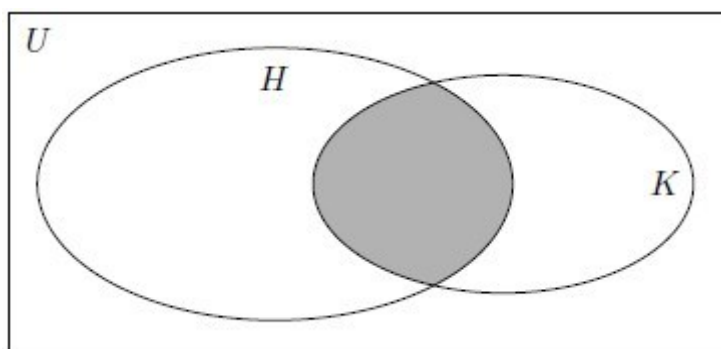
2. ábra: A H és K halmazok uniója

Forrás: Bíró és Vincze (2000)

Minden $H, K, L \subseteq U$ halmaz esetén az unióképzésre teljesülnek a következő tulajdonságok:

- (1) $H \cup K = K \cup H$, azaz kommutatív;
- (2) $H \cup (K \cup L) = (H \cup K) \cup L$, azaz asszociatív;
- (3) $H \cup H = H$, azaz idempotens;
- (4) $K \cup U = U$;
- (5) $H \cup \emptyset = H$.

Definíció. Két (vagy több) halmaz **metszete** (közös része) azoknak az elemeknek a halmaza, melyek a megadott halmazok mindegyikében benne vannak (3. ábra). Jele: $\cap$, szimbólumokkal: $H \cap K = \{x \in U \mid x \in H \text{ és } x \in K\}$.



3. ábra: A H és K halmazok metszete

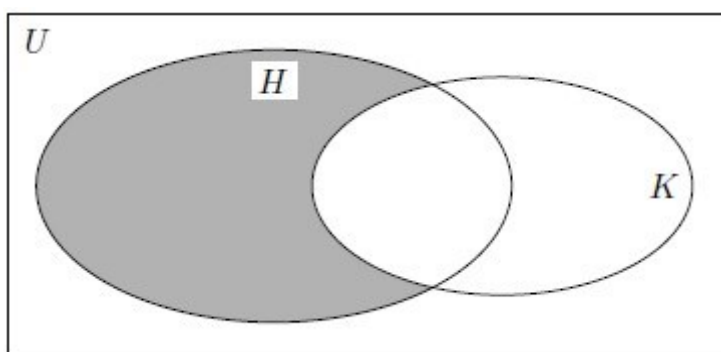
Forrás: Bíró és Vincze (2000)

Definíció. Azt mondjuk, hogy két halmaz **diszjunkt**, ha metszetük az üres halmaz. Az unió- és metszetképzésre $\forall H, K, L \subseteq U$ halmaz esetén teljesülnek az alábbi állítások:

- (1) $H \cup (H \cap K) = H$, $H \cap (H \cup K) = H$, abszorpciós tulajdonság;
- (2) $(H \cup K) \cap L = (H \cap L) \cup (K \cap L)$ és $(H \cap K) \cup L = (H \cup L) \cap (K \cup L)$, disztributivitás.

Definíció. A H és K halmaz **különbségén** a H összes olyan elemének halmazát értjük, melyek nincsenek benne a K halmazban (4. ábra). Jele: $H \setminus K$.

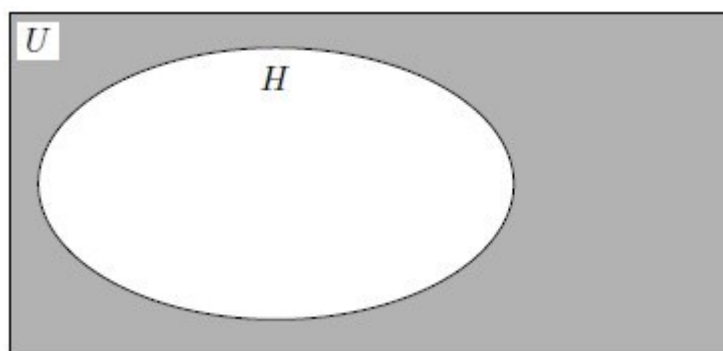
Szimbólumokkal: $H \setminus K = \{x \in H \mid x \notin K\}$.



4. ábra: A H és K halmazok különbsége

Forrás: Bíró és Vincze (2000)

Definíció. A H halmaz alaphalmazra vonatkozó **komplementere** (kiegészítő halmaza) az $U \setminus H$ halmaz (5. ábra). Jele: H^c vagy $\bar{H}$. Szimbólumokkal: $H^c = \{x \in U \mid x \notin H\}$.



5. ábra: A H halmaz komplementere

Forrás: Bíró és Vincze (2000)

Tetszőleges $H, K, L \subseteq U$ halmazra teljesülnek a következők:

- (1) $U^c = \emptyset$, $\emptyset^c = U$;
- (2) $(K^c)^c = K$;
- (3) $K \cup K^c = U$, $K \cap K^c = \emptyset$;
- (4) ha $K = H$, akkor $K^c = H^c$;
- (5) ha $K \subseteq H$, akkor $H^c \subseteq K^c$;
- (6) De Morgan-azonosságok: $(K \cap H)^c = K^c \cup H^c$, $(K \cup H)^c = K^c \cap H^c$;
- (7) $H \setminus K = \emptyset$ akkor és csak akkor, ha $H \subseteq K$.

1.5 Számhalmazok

Ebben a részben az egyértelműség, illetve az egységes jelölés miatt a szakirodalommal összhangban tekintsük át a számfogalom felépítését (Szendrei, 1996).

1.5.1 A természetes számok halmaza

Definíció. Az $\mathbf{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots\}$ halmazt a *természetes számok* halmazának nevezzük. Ebben a halmazban két műveletet értelmezünk, az összeadás és a szorzás műveletét:

$$\forall n, m \in \mathbf{N} \text{ esetén } n + m \in \mathbf{N} \text{ és } n \cdot m \in \mathbf{N}.$$

1.5.2 Az egész számok halmaza

Definíció. A $\mathbf{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ halmazt az *egész számok* halmazának nevezzük. Ebben a halmazban három műveletet értelmezünk: az összeadás, a kivonás és a szorzás műveletét.

$$\forall x, y \in \mathbf{Z} \text{ esetén } x + y \in \mathbf{Z}, x - y \in \mathbf{Z} \text{ és } x \cdot y \in \mathbf{Z}.$$

Megjegyzés. Látható, hogy ebben a halmazban már az összeadás inverz művelete, a kivonás is elvégezhető, valamint az, hogy $\mathbf{N} \subset \mathbf{Z}$.

1.5.3 A racionális számok halmaza

Definíció. A $\mathbf{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \mid p, q \in \mathbf{Z}, q \neq 0 \right\}$ halmazt a **racionális számok** halmazának nevezzük. A

$\frac{p}{q}$ kifejezést közönséges törtnek mondjuk, melynek p a számlálója, q a nevezője. Ebben a halmazban négy műveletet értelmezünk: az összeadás, a kivonás, a szorzás és az osztás műveletét.

$$\forall x, y \in \mathbf{Q} \text{ esetén } x + y \in \mathbf{Q}, x - y \in \mathbf{Q}, x \cdot y \in \mathbf{Q} \text{ és } \frac{x}{y} \in \mathbf{Q} (y \neq 0).$$

Megjegyzés.

- (1) Látható, hogy ebben a halmazban már a szorzás inverz művelete, az osztás is elvégezhető (kivéve a 0-val való osztást), valamint az, hogy $\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q}$.
- (2) A racionális szám tizedes tört alakja vagy véges, vagy szakaszosan ismétlődő végtelen tizedes tört.

Tétel.

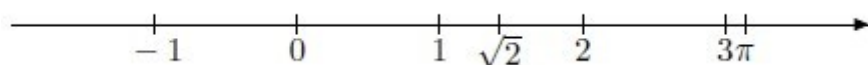
- (1) Bármely véges vagy szakaszosan ismétlődő végtelen tizedes tört fel írható két egész szám hányadosaként.
- (2) Minden racionális szám felírható véges vagy szakaszosan ismétlődő végtelen tizedes tört alakban.

1.5.4 A valós számok halmaza

Definíció. Az olyan számokat, amelyek tizedes tört kifejezése végtelen, de nem szakaszosan ismétlődő, **irracionális számoknak** mondjuk.

Definíció. A racionális és az irracionális számok halmazának unióját a **valós számok** halmazának nevezzük és $\mathbf{R}$ -rel jelöljük.

Megjegyzés. A valós számok ábrázolhatók számegyenesen (6. ábra).



6. ábra: A valós számegyenes

Forrás: Bíró és Vincze (2000)

A valós számok halmazában elvégezhetők az alpműveletek:

- (1) $\forall x, y \in \mathbf{R}$ esetén $x + y \in \mathbf{R}$,
- (2) $\forall x, y \in \mathbf{R}$ esetén $x - y \in \mathbf{R}$,
- (3) $\forall x, y \in \mathbf{R}$ esetén $x \cdot y \in \mathbf{R}$,
- (4) $\forall x, y \in \mathbf{R}, y \neq 0$ esetén $\frac{x}{y} \in \mathbf{R}$.

Az összeadás és a szorzás tulajdonságai:

- (1) $x + y = y + x$ és $x \cdot y = y \cdot x \quad \forall x, y \in \mathbf{R}$, azaz kommutatív,
- (2) $(x + y) + z = x + (y + z)$ és $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z) \quad \forall x, y, z \in \mathbf{R}$, azaz asszociatív,
- (3) $(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z \quad \forall x, y, z \in \mathbf{R}$, azaz disztributív,
- (4) $\exists 0 \in \mathbf{R}$ úgy, hogy $x + 0 = x \quad \forall x \in \mathbf{R}$, (létezik a nulla elem),
- (5) $\exists 1 \in \mathbf{R}$ úgy, hogy $1 \cdot x = x \quad \forall x \in \mathbf{R}$, (létezik az egységelem),
- (6) $\forall x \in \mathbf{R}$ esetén $\exists y \in \mathbf{R}$ úgy, hogy $x + y = 0$ (ezt az y elemet nevezzük az x elem negatívjának, amelyről igazolható, hogy egyértelmű és $y = -x$),
- (7) $\forall 0 \neq x \in \mathbf{R}$ esetén $\exists y \in \mathbf{R}$ úgy, hogy $y \cdot x = 1$
(ezt az elemet nevezzük az x elem reciprokának, amelyről igazolható, hogy egyértelmű és $y = \frac{1}{x}$ vagyis $y = x^{-1}$).

Definíció.

- (1) A $H \subset \mathbf{R}$ halmaz **felülről korlátos**, ha $\exists l \in \mathbf{R}$ úgy, hogy az l elem minden H -beli elemnél nagyobb egyenlő.
- (2) A $H \subset \mathbf{R}$ halmaz **alulról korlátos**, ha $\exists k \in \mathbf{R}$ úgy, hogy a k elem minden H -beli elemnél kisebb egyenlő.
- (3) Ha egy halmaz alulról és felülről is korlátos, akkor **korlátosnak** nevezzük.

Definíció.

- (1) Ha a $H \subset \mathbf{R}$ halmaz felülről korlátos, akkor a H felső korlátainak legkisebbikét **pontos felső korlátnak** (idegen szóval supremumnak) nevezzük. Másként fogalmazva a pontos felső korlát az, amely minden felső korlátnál kisebb egyenlő. Jele: ***sup H***.
- (2) Ha a $H \subset \mathbf{R}$ halmaz alulról korlátos, akkor a H alsó korlátainak legnagyobbikát **pontos alsó korlátnak** (idegen szóval infimumnak) nevezzük. Másként fogalmazva a pontos alsó korlát az, amely minden alsó korlátnál nagyobb egyenlő. Jele: ***inf H***.

Megjegyzés. A valós számok halmazának fontos tulajdonsága, hogy benne minden felülről korlátos halmaznak van pontos felső korlátja és minden alulról korlátos halmaznak van pontos alsó korlátja.

Definíció.

- (1) Ha a H felülről korlátos halmaznak van H -beli felső korlátja, akkor ezt a H **maximumának** mondjuk. Jele: ***max H***.
- (2) Ha a H alulról korlátos halmaznak van H -beli alsó korlátja, akkor ezt a H **minimumának** mondjuk. Jele: ***min H***.

Megjegyzés.

- (1) Egy H halmaz maximuma pontosan akkor létezik, ha a H halmaz supremuma a H halmazban van, és ekkor $\sup H = \max H$.
- (2) Egy H halmaz minimuma pontosan akkor létezik, ha a H halmaz infimuma a H halmazban van, és ekkor $\inf H = \min H$.

Megjegyzés.

- (1) Minden valós számnál van nagyobb természetes szám.
- (2) A racionális számok a számegyenesen mindenütt sűrűn helyezkednek el. Azaz bármely két különböző valós szám között van racionális szám.

Definíció. Az $I \subseteq \mathbf{R}$ halmazt *intervallumnak* nevezzük, ha $\forall x, y \in I$ és $x \leq z \leq y$ esetén $z \in I$, azaz bármely két elemével együtt a köztük lévő elemeket is tartalmazza. Ha $I = \{x\}$, akkor I -t elfajult intervallumnak mondjuk.

Jelölések.

- (1) $[a, b] = \{x \in \mathbf{R} \mid a \leq x \leq b\}$,
- (2) $[a, b[= \{x \in \mathbf{R} \mid a \leq x < b\}$,
- (3) $]a, b] = \{x \in \mathbf{R} \mid a < x \leq b\}$,
- (4) $]a, b[= \{x \in \mathbf{R} \mid a < x < b\}$.

Definíció. Az $\mathbf{R}_b := \mathbf{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ halmazt *a valós számok kibővített halmazának* nevezzük. Ebben a halmazban $-\infty < +\infty$ és minden $x \in \mathbf{R}$ -re teljesül, hogy $-\infty < x < +\infty$.

Megjegyzés. Az $\mathbf{R}^+$ halmaz a pozitív valós számokat tartalmazza, azaz

$$\mathbf{R}^+ = \{x \in \mathbf{R} \mid x > 0\}.$$

Definíció. Legyen $x \in \mathbf{R}$. Ekkor

(1)

$$x + (+\infty) = +\infty + x = +\infty,$$

$$x + (-\infty) = -\infty + x = -\infty$$

és

$$\frac{x}{+\infty} = \frac{x}{-\infty} = 0;$$

(2) ha $x > 0$, akkor

$$x \cdot (+\infty) = (+\infty) \cdot x = +\infty$$

$$x \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot x = -\infty$$

(3) ha $x < 0$, akkor

$$x \cdot (+\infty) = (+\infty) \cdot x = -\infty$$

$$x \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot x = +\infty$$

(4)

$$\begin{aligned} (+\infty) + (+\infty) &= +\infty, \\ (-\infty) + (-\infty) &= -\infty, \\ -(+\infty) &= -\infty, \\ -(-\infty) &= +\infty, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (+\infty) \cdot (+\infty) &= +\infty, \\ (-\infty) \cdot (-\infty) &= +\infty, \\ (+\infty) \cdot (-\infty) &= -\infty, \\ (-\infty) \cdot (+\infty) &= -\infty. \end{aligned}$$

Megjegyzés. A $-\infty$ és $+\infty$ szimbólumokkal végzett alábbi műveleteket nem értelmezzük:

$$(1) (+\infty) + (-\infty)$$

$$(2) (-\infty) + (+\infty)$$

$$(3) 0 \cdot (+\infty)$$

$$(4) 0 \cdot (-\infty)$$

$$(5) (+\infty) \cdot 0$$

$$(6) (-\infty) \cdot 0$$

$$(7) \frac{+\infty}{+\infty}$$

$$(8) \frac{+\infty}{-\infty}$$

$$(9) \frac{-\infty}{+\infty}$$

$$(10) \frac{-\infty}{-\infty}$$

Definíció. Legyen $a \in \mathbf{R}$. Ekkor

$$(1)]a, +\infty[= \{x \mid x \in \mathbf{R} \text{ és } x > a\},$$

$$(2) [a, +\infty[= \{x \mid x \in \mathbf{R} \text{ és } x \geq a\},$$

$$(3)]-\infty, a[= \{x \mid x \in \mathbf{R} \text{ és } x < a\},$$

$$(4)]-\infty, a[= \{x \mid x \in \mathbf{R} \text{ és } x \leq a\},$$

1.6. Ellenőrző kérdések

1. Mit értünk halmazon?
2. Hogyan adhatunk meg egy halmazt?
3. Mikor mondjuk, hogy két halmaz egyenlő?
4. Legyen a H és K tetszőleges két halmaz. Mikor mondjuk, hogy a H halmaz részhalmaza a K halmaznak?
5. Mit értünk triviális részhalmazokon?
6. Definiálja a hatványhalmaz fogalmát.
7. Hogyan szemléltethetjük a halmazokat?
8. Mit értünk két vagy több halmaz egyesítésén és milyen tulajdonságokkal rendelkezik?
9. Mit értünk két vagy több halmaz metszetén és milyen tulajdonságokkal rendelkezik?
10. Mit értünk disztributivitáson az egyesítés és metszetképzés szempontjából?
11. Mikor mondjuk, hogy két vagy több halmaz diszjunkt?
12. Adjon meg diszjunkt halmazokat.
13. Mit értünk két halmaz különbségén, milyen tulajdonságokkal rendelkezik?
14. Definiálja a komplementerhalmaz fogalmát, és adjon meg néhány, a komplementerre vonatkozó tulajdonságot.
15. Mit mondhatunk egy halmaz komplementerének komplementeréről?

16. Igaz-e minden halmazra, hogy $((H \setminus K) \cup (K \setminus H)) \subset H \cup K$?
17. Milyen kapcsolat van a H és a K halmazok között, ha $H \setminus K = \emptyset$ és $H \cup K = H$?
18. Milyen kapcsolat van a H és a K halmazok között, ha $H \setminus K = \emptyset$ és $H \cap K = H$?
19. Milyen kapcsolat van a H és a K halmazok között, ha $H \setminus K = \emptyset$ és $K \setminus H = \emptyset$?
20. Venn-diagram segítségével döntse el, hogy igazak-e az alábbi állítások!
 - a) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$
 - b) $(A \cap B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$
21. Mit értünk természetes számokon? Milyen műveleteket végezhetünk a természetes számok halmazán?
22. Mit értünk az egész számokon? Milyen műveleteket végezhetünk az egész számok halmazán?
23. Definiálja a racionális számok halmazát. Milyen műveleteket végezhetünk a racionális számok halmazában?
24. Mik azok az irracionális számok?
25. Definiálja a valós számok halmazát. Milyen alpműveleteket végezhetünk a valós számok halmazán?
26. Adja meg a valós számok halmazában értelmezett összeadás és szorzás tulajdonságait.
27. Legyen H egy valós részhalmaza a valós számok halmazának, Mikor nevezzük a H halmazt felülről, ill. alulról korlátosnak?
28. Definiálja a H halmazt (ha a H egy valós részhalmaza a valós számok halmazának) pontos alsó, ill. pontos felső korlátját.
29. Mit értünk egy H felülről korlátos halmaz maximumán?
30. Mit értünk egy H alulról korlátos halmaz minimumán?
31. Adja meg az intervallum fogalmát.
32. Hogyan kell intervallumot megrajzolni, majd számhalmaz formával megadni?
33. Döntse el az alábbi állításokról, hogy igaz vagy hamis-e?
 - a) Bármely szakaszosan ismétlődő végtelen tizedes tört felírható két egész szám hányadosaként.
 - b) A racionális számok végtelen tizedes tört alakban írhatók fel.
 - c) Ha a $H (\subset \mathbb{R})$ alulról korlátos halmaz, akkor alsó korlátainak legkisebbikét pontos alsó korlátnak nevezzük.
 - d) Egy H halmaz maximuma pontosan akkor létezik, ha a H halmaz pontos felső korlátja a H halmazban van és ekkor $\sup H = \max H$.
 - e) Minden valós számnál van nagyobb természetes szám.

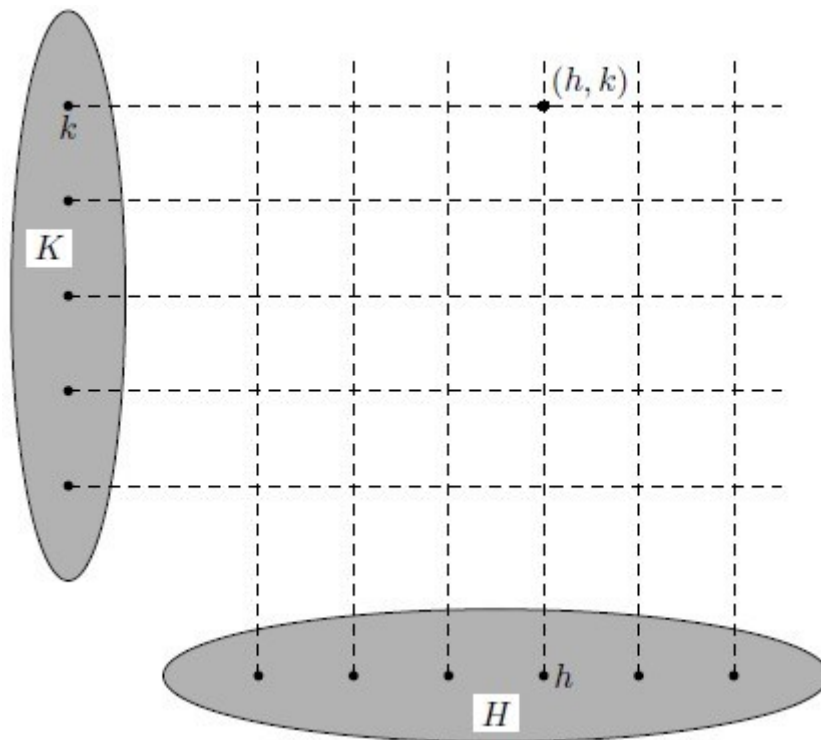
2. RELÁCIÓK ÉS FÜGGVÉNYEK

Mind a hétköznapi, mind a tudományos életben gyakran előfordul, hogy bizonyos halmazok elemei között kapcsolat figyelhető meg. A kapcsolat fogalmának matematikai leírása a reláció.

Legyen az h, k két tetszőleges elem. Ha ezek közül az egyiket, mondjuk a h -t elsőnek, a k -t másodiknak kijelöljük, akkor **rendezett elempárról** beszélünk, és ezt (h,k) -val jelöljük. A rendezett elempárok között az egyenlőséget a következőképpen értelmezzük: $(h,k) = (l,m) \Leftrightarrow h = l \text{ és } k = m$.

2.1. A Descartes-szorzat, a reláció fogalma

Definíció. Legyenek H, K nemüres halmazok. H és K **Descartes szorzatán** a rendezett elempárokból álló $H \times K = \{(h,k) \mid h \in H, k \in K\}$ halmazt értjük. Szemléletesen a 7. ábrán mutatja be a Descartes-szorzatot.



7. ábra: H és K halmazok Descartes-szorzata

Forrás: Bíró és Vincze (2000)

Definíció. Legyenek adottak a $H_1, H_2, \dots, H_n$ ($n \geq 2$) nemüres halmazok. A $H_1, H_2, \dots, H_n$ halmazok Descartes-szorzata a

$H_1 \times H_2 \times \dots \times H_n = \{ (h_1, h_2, \dots, h_n) \mid h_1 \in H_1, h_2 \in H_2, \dots, h_n \in H_n \}$ halmaz, ahol a $(h_1, h_2, \dots, h_n)$ -t **rendezett szám n -esnek** nevezzük.

Megjegyzés.

- (1) Az $\mathbf{R} \times \mathbf{R} = \mathbf{R}^2$ halmazt **kétdimenziós térnek** (síknak), az $\mathbf{R} \times \mathbf{R} \times \mathbf{R} = \mathbf{R}^3$ halmazt pedig **háromdimenziós térnek** nevezzük.
- (2) A valós számokat úgy szemléltethetjük, hogy a valós számok halmaza és a számegyenes között kölcsönösen egyértelmű hozzárendelést létesítünk. Számpárok esetén a derékszögű koordináta-rendszer segítségével a sík pontjai és az $\mathbf{R}^2$ halmaz elemei között létesíthető kapcsolat. Hasonlóan értelmezhető a háromdimenziós tér pontjai és az $\mathbf{R}^3$ között is kapcsolat.

Definíció. A H és a K halmazok közötti $H \times K$ Descartes-féle szorzatának bármely ρ részhalmazát a H és a K halmazok közötti **relációnak** nevezzük. (A H és a K sorrendje fontos!)

Megjegyzés.

- (1) Azt a tényt, hogy $(h, k) \in \rho$, így fejezhetjük ki: “a h elem ρ relációban van a k elemmel”.
- (2) Az $(h, k) \in \rho$ jelölés mellett használatosak még a következő jelölések is: $h \rho k$, $\rho(h, k)$, ρhk .
- (3) A relációt úgy szemléltethetjük, hogy a $H \times K$ Descartes-féle szorzat ábráján a ρ elemeit jelölő pontokat megjelöljük.
- (4) A H halmazt tárgyhalmaznak, a K halmazt képhalmaznak nevezzük.

2.2. A reláció értelmezési tartománya, értékkészlete, inverze, az összetett reláció

Definíció. A ρ **reláció értelmezési tartománya** azon h ($\in H$) elemeknek a halmaza, amelyekhez van olyan k ($\in K$), hogy $(h, k) \in \rho$, azaz

$$D_\rho = \{h \in H \mid \exists k \in K: (h, k) \in \rho\} \subseteq H.$$

Definíció. A ρ **reláció értékkészlete** azoknak a k ($\in K$) elemeknek a halmaza, amelyekhez van olyan h ($\in H$), hogy $(h, k) \in \rho$, azaz

$$R_\rho = \{k \in K \mid \exists h \in H: (h, k) \in \rho\} \subseteq K.$$

Definíció. A ρ **reláció inverzén** azt a ρ^{-1} -gyel jelölt relációt értjük, amelyet a következőképpen definiálunk:

$$\rho^{-1} = \{(k, h) \mid (h, k) \in \rho\} \subseteq K \times H.$$

Definíció. Legyen $\rho \subseteq H \times K$ és $\rho' \subseteq K \times L$ adott reláció. A belőlük képzett **összetett reláció:**

$$\rho' \circ \rho = \{(h, l) \in H \times L \mid \exists k \in K: (h, k) \in \rho \text{ és } (k, l) \in \rho'\}.$$

A $\rho' \circ \rho$ a H és L elemei közötti reláció.

2.3. A függvény fogalma

Definíció. Legyenek X, Y nemüres halmazok. Az $f \subseteq X \times Y$ relációt *függvénynek* nevezzük, ha $(x, y) \in f$ és $(x, z) \in f$ esetén $y = z$ (azaz, ha az f reláció egyértelmű).

Megjegyzés.

- (1) Egy X -beli elemhez legfeljebb egy Y -beli elem tartozhat. Ebben az esetben az egyértelmű y elemet $f(x)$ -szel jelöljük, és az “ f függvény x -beli értéke”-nek mondjuk.
- (2) Mivel minden függvény egy reláció, így a függvény értelmezési tartományának és értékkészletének definíciója megegyezik a reláció értelmezési tartományával és értékkészletével, ugyanaz a jelölése is, mint a relációk esetében.
- (3) Ha az f értelmezési tartománya az X halmaz, akkor az $f \subseteq X \times Y$ jelölés helyett az $f: X \rightarrow Y$ jelölést használjuk. Ha az f értékkészlete az Y halmaz, akkor azt mondjuk, hogy az f függvény Y -ra képező.

Definíció. Legyen $f: X \rightarrow Y$ függvény, $H \subseteq X$, $K \subseteq Y$. A H halmaz f szerinti képe $f(H) = \{y \in Y \mid \exists x \in H: f(x) = y\}$.

A K halmaz f szerinti ősképe $f^{-1}(K) = \{x \in X \mid f(x) \in K\}$.

Definíció. Az f függvény invertálható, ha az f^{-1} reláció is függvény. Ekkor f^{-1} -et az f függvény **inverz függvényének** nevezzük.

Definíció. Legyen $f: X \rightarrow Y$ függvény. Ha $\forall y \in Y$ elemre $f^{-1}(y)$ legfeljebb egy X -beli elemet tartalmaz, akkor az f -et **kölcsönösen egyértelmű leképezésnek** nevezzük X -ről Y -ba. Ezt másképpen kifejezve: f kölcsönösen egyértelmű leképezése X -nek Y -ba, ha $f(x_1) \neq f(x_2)$, valahányszor $x_1 \neq x_2$ és $x_1, x_2 \in X$.

Megjegyzés. Csak a kölcsönösen egyértelmű leképezéseknek van inverze.

Definíció. Legyenek X, Y, Z adott nemüres halmazok úgy, hogy $X \subseteq Y$, és legyen $f: Y \rightarrow Z$ adott függvény. Legyen $g: X \rightarrow Z$ olyan függvény, melyre $f(x) = g(x)$ minden $x \in X$ esetén. Ekkor g -t az f X -re vonatkozó **leszűkítésének** mondjuk.

Definíció. Adott f, g függvények esetén a $g \circ f$ kompozíciót összetett függvénynek mondjuk. Ha $f: X \rightarrow Y$, $g: Y \rightarrow Z$, akkor $h = g \circ f: X \rightarrow Z$ függvény, melyre $h(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x))$.

2.4. Halmazok számossága

Definíció. A H és K halmaz **egyenlő számosságú**, ha van olyan $f: H \rightarrow K$ invertálható függvény, melynek értékkészlete a K halmaz. Jele: $H \sim K$, amit úgy olvasunk, hogy H ekvivalens K -val.

Definíció. Azt mondjuk, hogy a H **véges halmaz**, ha vagy üres halmaz, vagy van olyan n pozitív egész, hogy H ekvivalens az $\{1, 2, 3, 4, \dots, n\}$ halmazzal. Az utóbbi esetben azt mondjuk, hogy a H halmaz n elemű, vagy azt, hogy a H halmaz elemeinek száma n .

Definíció.

- (1) Azt mondjuk, hogy a H halmaz **végtelen**, ha nem véges.
- (2) A H halmaz **megszámlálhatóan végtelen**, ha ekvivalens a természetes számok halmazával.
- (3) Azt mondjuk, hogy a H halmaz **megszámlálható**, ha véges vagy megszámlálhatóan végtelen.

Tétel. Egy halmaz akkor és csak akkor végtelen számosságú, ha ekvivalens valamelyik valódi részhalmazával.

Definíció. Azt mondjuk, hogy a H halmaz számossága kisebb vagy egyenlő, mint a K halmaz számossága, ha van olyan részhalmaza a K -nak, amely egyenlő számosságú az H -val. A H halmaz számossága kisebb, mint a K halmaz számossága, ha a számossága kisebb egyenlő, de nem egyenlő K számosságával.

2.5. Ellenőrző kérdések

1. Adja meg a rendezett pár fogalmát.
2. Mit értünk a H és K nemüres halmazok Descartes szorzatán?
3. Hogyan szemléltethetjük a Descartes szorzatot?
4. Mit ért rendezett szám n -esen?
5. Definiálja a reláció fogalmát!
6. Mit értünk a reláció értelmezési tartományán, értékkészletén és inverzén?
7. Adja meg az összetett reláció fogalmát.
8. Mi a függvény, és hogyan lehet megadni egy függvényt?
9. Mit értünk egy függvény értelmezési tartományán és értékkészletén?
10. Definiálja a kölcsönösen egyértelmű leképezés fogalmát.
11. Mit értünk a függvény inverzén?
12. Mikor mondjuk, hogy két halmaz egyenlő számosságú?
13. Mikor mondjuk, hogy a H halmaz véges halmaz?
14. Mikor mondjuk, hogy a H halmaz végtelen halmaz?
15. Adja meg, hogy a H halmazt mikor nevezzük megszámlálhatatlanul végtelennek, ill. megszámlálhatónak?

3. EGYVÁLTOZÓS VALÓS FÜGGVÉNYEK

A függvény fogalmának nemcsak a matematikában van kiemelkedő szerepe, de nélkülözhetetlen a gazdasági élet és a természet folyamatainak leírásában, az ipari és mezőgazdasági tervezésben egyaránt. Ha sikerül ugyanis azt megállapítani, hogy bizonyos mennyiségek adott értékeinél más tőlük függő mennyiségek milyen értéket vesznek fel, vagy bizonyos mennyiségek megváltozására más mennyiségek hogyan reagálnak, akkor ez segítséget jelenthet az adott terület szakemberei számára. A felismert törvényszerűségeket a szakemberek igyekeznek zárt formában megfogalmazni, és függvényekkel megadni.

A tervezés, az elemzés vagy a termelés területén gyakran találkozhatunk függvényekkel. Ezen függvények közül talán legjelentősebbek a termelési függvények; amelyek többek között arra a kérdésre adnak választ, hogy a termelési feltételek (ráfordítások: föld, műtrágya, a műveletek elvégzési ideje stb.) hogyan befolyásolják a termelés eredményét. A függvények felismerését azonban nehezíti az a tény, hogy ezek a függvénykapcsolatok gyakran csak tendencia jellegűek, számos véletlen körülmény is befolyásolja őket. Ezekhez a függvényekhez általában a regresszió- és korrelációanalízis segítségével juthatunk el.

A matematikai módszerek alkalmazása esetén is nélkülözhetetlenek a függvények elemzésének fogalmai, eszközei, a függvények jellemző sajátosságai. Az előzőekben ismertetésre került a függvény általános fogalma. Ebből kiindulva tudjuk értelmezni az egyváltozós valós függvényt.

3.1. Az egyváltozós valós függvény fogalma, műveletek

Definíció. Legyen $D \subseteq \mathbf{R}$. Az $f: D \rightarrow \mathbf{R}$ függvényt *egyváltozós valós függvénynek* nevezzük.

Megjegyzés. Az egyváltozós valós függvények szemléltetésére Descartes-féle derékszögű koordinátarendszert használunk, melyben az $(x, f(x))$ számpárokat ábrázolva kapjuk meg az f függvény grafikonját.

Definíció. Legyen $D \subseteq \mathbf{R}$, $f, g: D \rightarrow \mathbf{R}$ adott függvények, $c \in \mathbf{R}$. Ekkor a $c \cdot f$, $f + g$,

$f - g$, $f \cdot g$, $\frac{f}{g}$ függvényeket az f c -szeresének, f és g összegének, különbségének, szorzatának, illetve hányadosának nevezzük, és a következőképpen értelmezzük:

$$(1) (c \cdot f)(x) = c \cdot f(x),$$

$$(2) (f + g)(x) = f(x) + g(x),$$

$$(3) (f - g)(x) = f(x) - g(x),$$

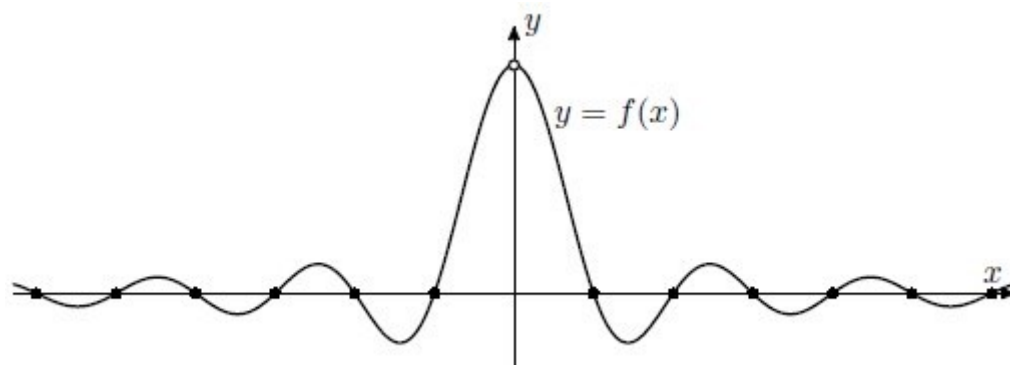
$$(4) (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$$

$$(5) \left(\frac{f}{g} \right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, \text{ feltéve, hogy } g(x) \neq 0 \text{ minden } x \in D \text{ esetén.}$$

3.2. Az egyváltozós valós függvény zérushelye

Definíció. Legyen $D \subseteq \mathbf{R}$, $f: D \rightarrow \mathbf{R}$ adott függvény. Az $x_0 \in D$ pontot az f függvény **zérushelyének** nevezzük, ha $f(x_0) = 0$.

A zérushely geometriai jelentése. A függvény zérushelyét a függvény grafikonja és az x tengely metszéspontja adja (8. ábra).



8. ábra: A zérushely geometriai jelentése

Forrás: Bíró és Vincze (2000)

Definíció. Az $f(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \dots + a_1 \cdot x + a_0$ alakú függvényt n -ed fokú racionális egész függvénynek vagy n -ed fokú polinomfüggvénynek vagy egyszerűen csak n -ed fokú **polinomnak** (röviden polinomnak) nevezzük, ahol az a_i ($i = 0, 1, \dots, n$) együtthatók valós számok és $a_n \neq 0$.

Tétel. Az $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \dots + a_1 \cdot x + a_0$ polinomnak ($a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ adott valós számok és $a_n \neq 0$) legfeljebb n számú zérushelye lehet.

Megjegyzés. Ezt röviden úgy is mondjuk, hogy egy n -edfokú polinomnak legfeljebb n valós gyöke van.

A p polinom adott $x = x_0$ helyen vett helyettesítési értékének meghatározására a Horner-elrendezést használhatjuk. A Horner-elrendezés a

$$\begin{aligned} p(x) &= a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \dots + a_1 \cdot x + a_0 = \\ &= (\dots((a_n x + a_{n-1})x + a_{n-2})x + \dots + a_1)x + a_0 \end{aligned}$$

polinom α helyen vett helyettesítési értékének (és így a zérushelyének, azaz a $p(\alpha)=0$ egyenlet valós gyökének) meghatározására szolgál. A felhasználandó adatokat az alábbi módon rendezzük táblázatba:

1. táblázat: A Horner-elrendezés táblázatos formája

	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	...	a_0
α	a_n	$a_n \cdot \alpha + a_{n-1}$	$(a_n \cdot \alpha + a_{n-1}) \cdot \alpha + a_{n-2}$		$p(\alpha)$

Forrás: Bíró és Vincze (2000)

Az 1. táblázatot nevezzük **Horner-féle táblázatnak**. Az első sorában p együtthatói állnak (csökkenő hatványok szerinti sorrendben), a második sor elemeit pedig úgy kapjuk, hogy a bal oldali szomszédos elem α -szorosához hozzáadjuk az éppen kérdéses rovat fölötti együtthatót. Az a_0 alá éppen a $p(\alpha)$, az α helyen felvett helyettesítési érték kerül. Ha $p(\alpha) = 0$, akkor α zérushelye a p -nek. A Horner-elrendezés gyök behatárolására

is alkalmas, mert ha $p(x_1) > 0$ és $p(x_2) < 0$, vagy $p(x_1) < 0$ és $p(x_2) > 0$, akkor x_1 és x_2 között legalább egy gyök van.

Tétel. Ha α az $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \dots + a_1 \cdot x + a_0$, ($a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ valós számok és $a_n \neq 0$) polinomnak zérushelye, akkor az f mindig felírható a következő alakban:

$$f(x) = (x - \alpha) \cdot g(x) \quad \forall x \in \mathbf{R},$$

ahol $g: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $g(x) = b_{n-1} \cdot x^{n-1} + \dots + b_1 \cdot x + b_0$, ($b_0, b_1, b_2, \dots, b_{n-1}$ valós számok, $b_{n-1} \neq 0$). Az $(x - \alpha)$ szorzót **gyöktényezőnek** nevezzük.

Megjegyzés. Azaz f mindig osztható az $(x - \alpha)$ gyöktényezővel, sőt az osztást éppúgy végezhetjük, mint a valós számok körében.

Tétel. Ha az $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \dots + a_1 \cdot x + a_0$, ($a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ valós számok és $a_n \neq 0$) polinom $f(x) = (x - \alpha)^k \cdot g(x)$ ($k \in \mathbf{N}$) alakban írható fel és $g(\alpha) \neq 0$, akkor az " α " szám k -szoros zérushelye az f polinomnak.

A p polinom zérushelyét kereshetjük egy közelítő módszer segítségével is, az intervallum felezés módszerével, vagy röviden **felező módszerrel**.

Tekintsük az $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ polinomot, és az $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$, $x_1 < x_2$ pontokat. Amennyiben $f(x_1)$ és $f(x_2)$ ellentétes előjelűek, az azt jelenti, hogy x_1 és x_2 között a függvénynek biztosan van legalább egy zérushelye. Vegyük az $x_3 = \frac{x_1 + x_2}{2}$ pontot (x_3 az $[x_1, x_2]$ intervallum felezőpontja), és vizsgáljuk meg az $f(x_3)$ előjelét, majd vegyük az x_3 ponthoz x_1 és x_2 közül azt a pontot, amelyre a függvényérték ellentétes előjelű lesz az $f(x_3)$ -mal. Így új intervallumot kapunk ($[x_1, x_3]$ vagy $[x_3, x_2]$), ennek vesszük a felezőpontját. Az eljárást tovább folytatva a függvény zérushelyét tetszőleges pontossággal közelíthetjük meg.

3.3. Korlátosság, monotonitás, szélsőérték

Definíció. Legyen $D \subseteq \mathbf{R}$, $f: D \rightarrow \mathbf{R}$ adott függvény.

- (1) Az f függvényt **alulról korláatosnak** nevezzük, ha értékkészlete alulról korláatos halmaz, azaz létezik $k \in \mathbf{R}$ úgy, hogy $k \leq f(x)$ minden $x \in D$ esetén.
- (2) A g függvényt **felülről korláatosnak** nevezzük, ha értékkészlete felülről korláatos halmaz, azaz létezik $l \in \mathbf{R}$ úgy, hogy $g(x) \leq l$ minden $x \in D$ esetén.
- (3) Ha a h függvény alulról és felülről is korláatos, akkor **korláatos függvénynek** nevezzük.

Definíció. Legyen $D \subseteq \mathbf{R}$, $f: D \rightarrow \mathbf{R}$ adott függvény.

- (1) Az f függvény **monoton növekvő**, ha $\forall x_1, x_2 \in D : x_1 < x_2$ esetén $f(x_1) \leq f(x_2)$.
- (2) Az f függvény **szigorúan monoton növekvő**, ha $\forall x_1, x_2 \in D : x_1 < x_2$ esetén $f(x_1) < f(x_2)$.
- (3) Az f függvény **monoton csökkenő**, ha $\forall x_1, x_2 \in D : x_1 < x_2$ esetén $f(x_1) \geq f(x_2)$.
- (4) Az f függvény **szigorúan monoton csökkenő**, ha $\forall x_1, x_2 \in D : x_1 < x_2$ esetén $f(x_1) > f(x_2)$.

Definíció. Az $x_0 \in \mathbf{R}$ pont egy $\delta > 0$ sugarú **környezetén** az $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$ nyílt intervallumot értjük. Matematikai jelöléssel: $G(x_0, \delta) = \{x \in \mathbf{R} \mid x - \delta \leq x \leq x + \delta\}$.

Definíció. Minden $x_0 \in \mathbf{R}$ esetén azon $x \in \mathbf{R}$ számok halmazát, melyre $x > x_0$, a $+\infty$ **egy környezetének** nevezzük és $]x_0, +\infty[$ -nel jelöljük.

Megjegyzés: Hasonlóan értelmezzük a $-\infty$ **egy környezetét** is, amit $] -\infty, x_0[$ -al jelölünk.

Definíció. Legyen $D \subseteq \mathbf{R}$, $f: D \rightarrow \mathbf{R}$ adott függvény és $x_0 \in D$. Az f függvénynek az x_0 pontban

- (1) **abszolút minimuma** (globális minimuma) van, ha $f(x_0) \leq f(x)$ minden $x \in D$ esetén,
- (2) **abszolút maximuma** (globális maximuma) van, ha $f(x_0) \geq f(x)$ minden $x \in D$ esetén,
- (3) **abszolút szélsőértéke** (globális szélsőértéke) van, ha ott abszolút minimuma vagy abszolút maximuma van,
- (4) **helyi minimuma** (lokális minimuma) van, ha létezik olyan $\delta > 0$, amelyre fennáll, hogy $f(x_0) \leq f(x)$ minden $x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\cap D$ esetén,
- (5) **helyi maximuma** (lokális maximuma) van, ha létezik olyan $\delta > 0$, amelyre fennáll, hogy $f(x_0) \geq f(x)$ minden $x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\cap D$ esetén,
- (6) **helyi szélsőértéke** (lokális szélsőértéke) van, ha ott helyi minimuma vagy helyi maximuma van.

Megjegyzés. Ha az f függvénynek az x_0 -ban szélsőértéke van, akkor az x_0 -t **szélsőértékhelynek** nevezzük.

3.4. Konvex és konkáv függvények, inflexiós pont

Definíció. Legyen $D \subseteq \mathbf{R}$, $f: D \rightarrow \mathbf{R}$ adott függvény, $a, b \in D$ és $a < b$.

- (1) Azt mondjuk, hogy az f függvény **konvex** az $[a, b]$ -n, ha minden $x_1, x_2 \in [a, b]$ és minden $\lambda \in [0, 1]$ esetén

$$f(\lambda \cdot x_1 + (1 - \lambda) \cdot x_2) \leq \lambda \cdot f(x_1) + (1 - \lambda) \cdot f(x_2),$$

azaz ha minden $x_1, x_2 \in [a, b]$ esetén a $P_1(x_1, f(x_1))$ és $P_2(x_2, f(x_2))$ pontokat összekötő húr a függvénygörbe fölött halad.

- (2) Azt mondjuk, hogy a g függvény **konkáv** az $[a, b]$ -n, ha minden $x_1, x_2 \in [a, b]$ és minden $\lambda \in [0, 1]$ esetén

$$g(\lambda \cdot x_1 + (1 - \lambda) \cdot x_2) \geq \lambda \cdot g(x_1) + (1 - \lambda) \cdot g(x_2),$$

azaz ha minden $x_1, x_2 \in [a, b]$ esetén a $P_1(x_1, g(x_1))$ és $P_2(x_2, g(x_2))$ pontokat összekötő húr a függvénygörbe alatt halad.

Definíció. Legyen $D \subseteq \mathbf{R}$, $f: D \rightarrow \mathbf{R}$ adott függvény, $x_0 \in D$. Az x_0 az f **függvény inflexiós pontja**, ha létezik $\delta > 0$ úgy, hogy az $]x_0 - \delta, x_0]$ intervallumon az f függvény konvex, az $[x_0, x_0 + \delta[$ intervallumon pedig konkáv, vagy pedig az f függvény konkáv az $]x_0 - \delta, x_0]$ intervallumon, az $[x_0, x_0 + \delta[$ intervallumon pedig konvex.

Megjegyzés. Az inflexiós pont a függvény olyan pontja, ahol a konvexitás megváltozik.

3.5. Páros és páratlan függvények

Definíció. Legyen $D \subseteq \mathbf{R}$, $f: D \rightarrow \mathbf{R}$ adott függvény.

- (1) Azt mondjuk, hogy az f függvény **páros**, ha minden $x \in D$ esetén $-x \in D$ és $f(-x) = f(x)$.
- (2) Azt mondjuk, hogy az f függvény **páratlan**, ha minden $x \in D$ esetén $-x \in D$ és $f(-x) = -f(x)$.

Megjegyzés. Könnyen ellenőrizhető, hogy minden olyan $f(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \dots + a_1 \cdot x + a_0$, ($a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ valós számok és $a_n \neq 0$) alakú függvény, amely az x -nek csak páros kitevős hatványát tartalmazza, páros függvény. Könnyen ellenőrizhető, hogy minden olyan $f(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \dots + a_1 \cdot x + a_0$, ($a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ valós számok és $a_n \neq 0$) alakú függvény, amely az x -nek csak páratlan kitevős hatványát tartalmazza, páratlan függvény.

3.6. Periodikus függvények

Definíció. Legyen $D \subseteq \mathbf{R}$, $f: D \rightarrow \mathbf{R}$ adott függvény. Az f függvény periodikus, ha létezik $p \in \mathbf{R}$, $p \neq 0$ úgy, hogy minden $x \in D$ esetén, ha $x+p \in D$ akkor $f(x)=f(x+p)$. Ekkor a p számot **periódusnak** nevezzük.

3.7. Az egyváltozós valós függvények nevezetes osztályai

I. Algebrai függvények

1. Racionális egész függvények (polinomok)
2. Racionális törtfüggvények
3. Irracionális függvények

II. Transzcendens függvények

1. Exponenciális és logaritmikus függvények
2. Trigonometrikus és arcus függvények

III. Egyéb nevezetes függvények

1. Abszolútérték függvény
2. Előjel- (vagy signum) függvény
3. Egészrész és törtrész függvény

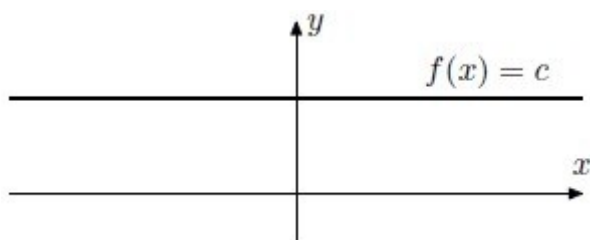
3.7.1. Algebrai függvények

Algebrai függvényeknek nevezzük az olyan függvényeket, amelyeket a négy alpművelet, a természetes kitevőjű hatványozás és a gyökvonás véges számú, egymást követő alkalmazásával adhatunk meg.

3.7.1.1. Racionális egész függvények

Azokat az algebrai függvényeket, amelyek képletében csak a négy alpművelet és az egész kitevőjű hatványozás fordul elő, **racionális egész függvényeknek** nevezzük.

a.) Konstansfüggvény. $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = c$ ($c \in \mathbf{R}$).



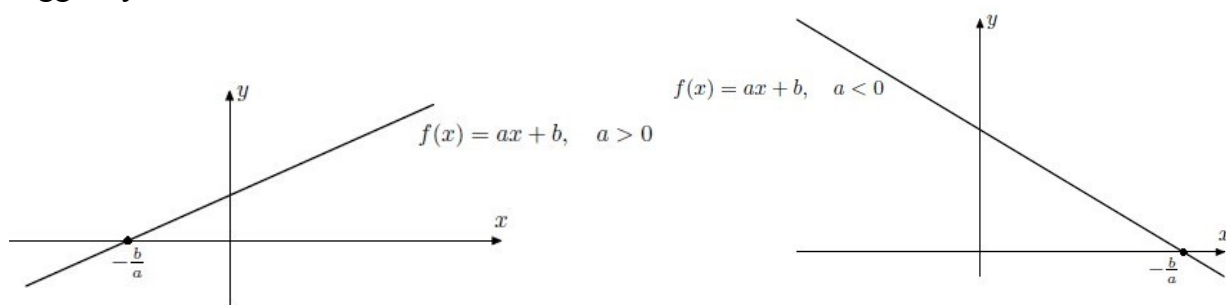
9. ábra: A konstansfüggvény grafikonja

Forrás: Bíró és Vincze (2000)

Grafikonja egy x tengellyel párhuzamos egyenes (9. ábra). Ez a függvény egyszerre monoton növekvő és csökkenő. Minden valós szám minimum- és maximumhelye. Minimuma: c , maximuma: c . Az f páros és periodikus függvény. A vizsgált konstansfüggvény értékkészlete az $R_f = \{c\}$ egyelemű halmaz.

b.) Elsőfokú vagy lineáris függvény. $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = ax + b$, ahol $a, b \in \mathbf{R}, a \neq 0$.

A függvény grafikonja egy egyenes. Az f -nek egy zérushelye van a $-\frac{b}{a}$ helyen. Az f függvény nem korlátos.



10. ábra: A lineáris függvény grafikonja

Forrás: Bíró és Vincze (2000)

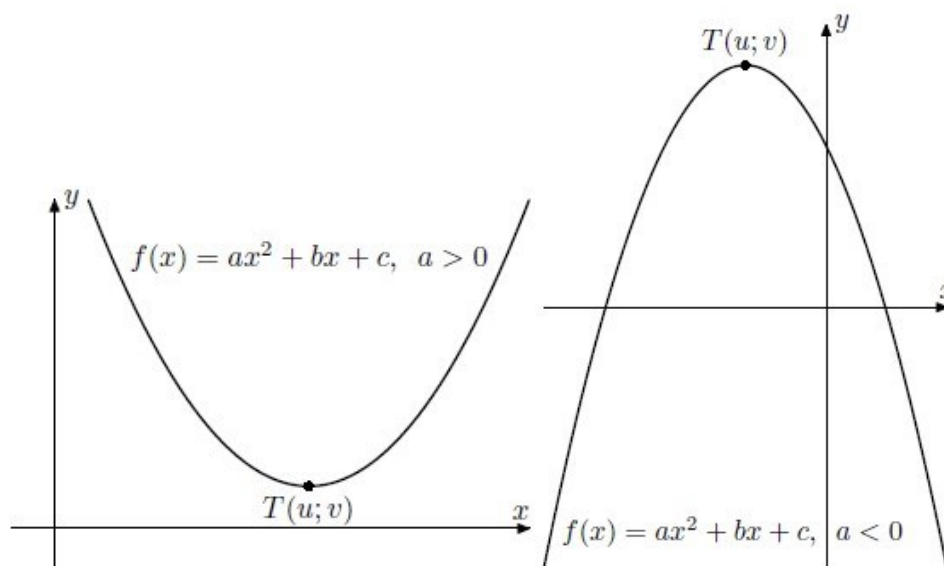
Ha $a > 0$, akkor a függvény szigorúan monoton növekvő (10. ábra). Ha $a < 0$ (10. ábra), akkor a függvény szigorúan monoton csökkenő. Ha $a=1$ és $b=0$, akkora az f -et identikus függvénynek nevezzük. Az identikus függvény páratlan. Ha $b = 0$, akkor f páratlan, egyébként f se nem páros, se nem páratlan. Az f kölcsönösen egyértelmű leképezés, így van inverze. Értékkészlete az $R_f = \mathbf{R}$ halmaz.

c.) Másodfokú függvény $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = ax^2 + bx + c$, ahol $a, b, c \in \mathbf{R}, a \neq 0$. Az f függvény képe parabola. Zérushelyeinek száma 2; 1 vagy 0 attól függően, hogy a

$D = b^2 - 4ac$ szám pozitív, nulla vagy negatív. A zérushelyek a $-\frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

számok. A parabola egyenlete $f(x) = a(x - u)^2 + v$ alakra hozható, ahol $u = -\frac{b}{2a}$,

$v = \frac{4ac - b^2}{4a}$. A $T(u, v)$ a parabola tengelypontja (11. ábra). Az f nem kölcsönösen egyértelmű leképezés, ezért nincs inverze.



11. ábra: A másodfokú függvény grafikonja

Forrás: Bíró és Vincze (2000)

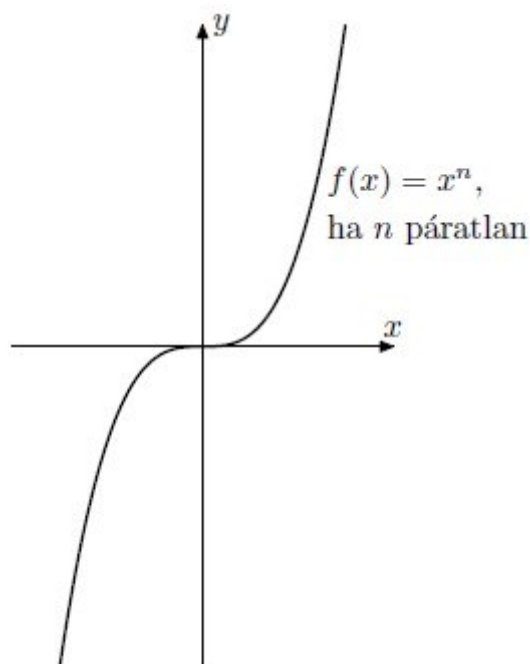
- i) Ha az $a > 0$ (11. ábra), akkor az f függvény szigorúan monoton csökkenő $]-\infty, u]$ intervallumon és szigorúan monoton növekedő az $[u, \infty[$ intervallumon. Az u helyen a függvénynek abszolút minimuma van, a minimum értéke $f(u) = v$. A függvény alulról korlátos, felülről nem. A függvény konvex. Értékkészlete az $R_f = [v, \infty[$ halmaz.
- ii) Ha az $a < 0$ (11. ábra), akkor az f szigorúan monoton növekedő a $]-\infty, u]$ intervallumon és szigorúan monoton csökkenő az $[u, \infty[$ intervallumon. Az u helyen a függvénynek abszolút maximuma van, a maximum értéke $f(u) = v$. E függvény felülről korlátos, alulról nem korlátos. A függvény konkáv. Az f értékkészlete az $R_f =]-\infty, v]$ halmaz.

Az a előjelétől függetlenül ha $b = 0$, akkor az f páros függvény, ha $b \neq 0$, akkor az f se nem páros, se nem páratlan függvény.

d.) Hatványfüggvény. $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = x^n$ ($n \in \mathbf{N}$).

E függvény sajátosságát az határozza meg, hogy az n páros, vagy páratlan.

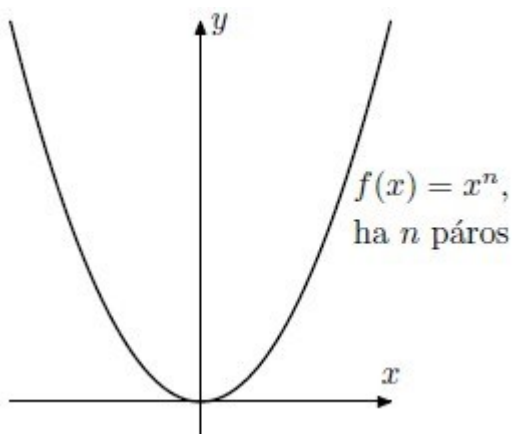
- (i) Ha az n páratlan (12. ábra), akkor az f szigorúan monoton növekedő függvény. Sem alulról, sem felülről nem korlátos, páratlan függvény. Egyetlen zérushelye van, az $x = 0$. Sem abszolút, sem lokális szélsőértéke nincs. Az f kölcsönösen egyértelmű így van inverze. A függvény értékkészlete $R_f = \mathbf{R}$.



12. ábra: A hatványfüggvény grafikonja, ha n páratlan

Forrás: Bíró és Vincze (2000)

- (ii) Ha az n páros (13. ábra), akkor az f függvény a $]-\infty, 0]$ intervallumon szigorúan monoton csökkenő, a $[0, \infty[$ intervallumon szigorúan monoton növekedő. Alulról korlátos, páros függvény. Az f -nek abszolút minimuma van az $x = 0$ -ban. A 0 az f függvény egyetlen zérushelye. Ez nem kölcsönösen egyértelmű leképezés, tehát nincs inverze. Az f függvény értékkészlete $R_f = R^+ \cup \{0\}$.



13. ábra: A hatványfüggvény grafikonja, ha n páros

Forrás: Bíró és Vincze (2000)

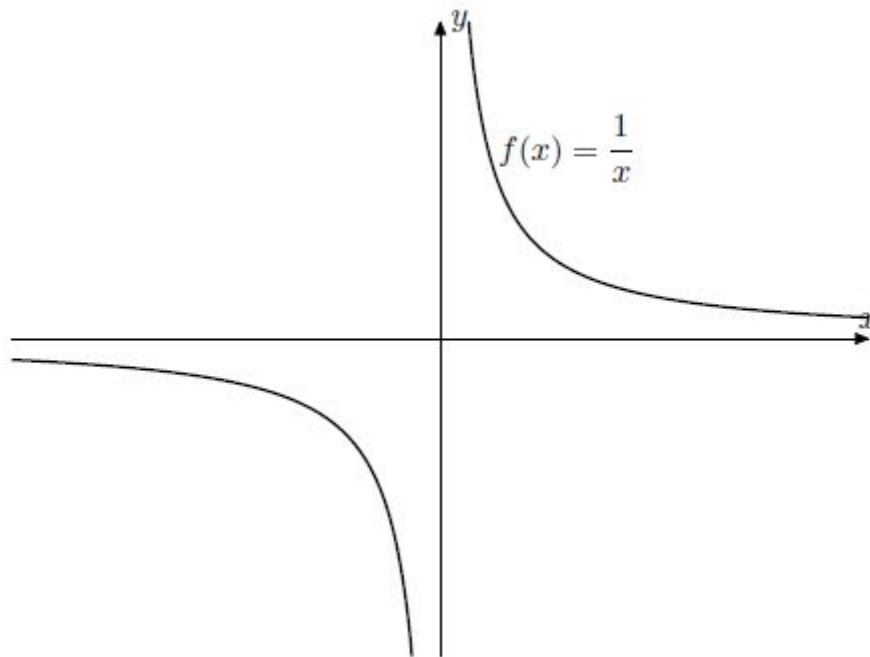
3.7.1.2. Racionális törtfüggvények

Két racionális egész függvény hányadosát **racionális törtfüggvénynek** nevezzük:

$$f(x) = \frac{a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \dots + a_1 \cdot x + a_0}{b_m \cdot x^m + b_{m-1} \cdot x^{m-1} + \dots + b_1 \cdot x + b_0},$$

ahol $m \geq 1$ és $b_m \neq 0$. Ha $n < m$, akkor **valódi törtfüggvényről** beszélünk. Az f függvény értelmezve van minden olyan x -re, ahol a nevező nem 0.

a.) A legegyszerűbb **törtfüggvény** az $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x}$

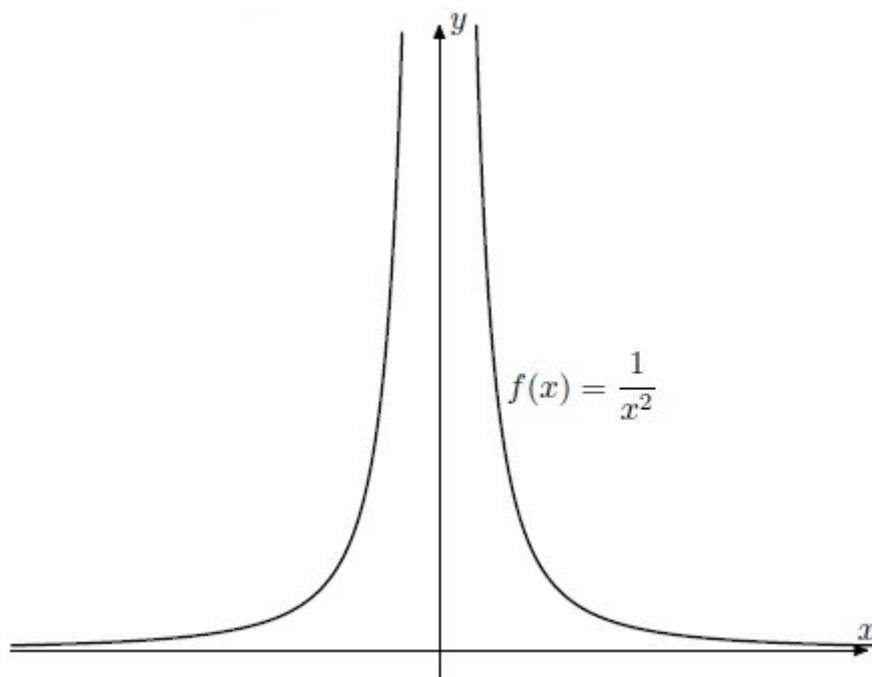


14. ábra: A legegyszerűbb törtfüggvény grafikonja

Forrás: Bíró és Vincze (2000)

Az $f(x) = \frac{1}{x}$ függvény grafikonja olyan hiperbola, amelynek aszimptotái a koordinátatengelyek (14. ábra). Az f nem korlátos, páratlan függvény. Kölcsonösen egyértelmű leképezés, érdekes tulajdonsága, hogy önmagának az inverze. Sem zérushelye, sem abszolút, sem lokális szélsőérték helye nincs. A $]-\infty, 0[$ intervallumon és a $]0, \infty[$ intervallumon is szigorúan monoton csökkenő. Értékkészlete $R_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

b.) Az $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = \frac{1}{x^2}$ törtfüggvény



15. ábra: Az $f(x) = \frac{1}{x^2}$ törtfüggvény grafikonja

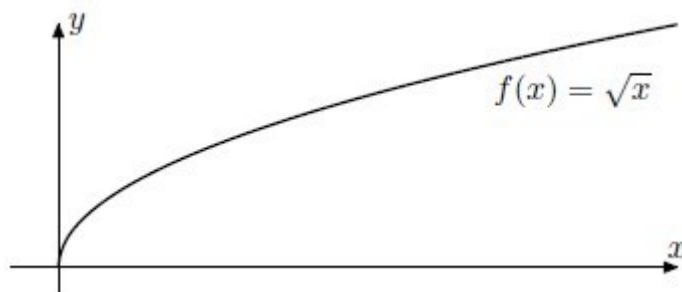
Forrás: Bíró és Vincze (2000)

A 15. ábrán látható törtfüggvény alulról korlátos, páros függvény. Nem kölcsönösen egyértelmű leképezés, így nincs inverze. Zérushelye nincs. A $]-\infty, 0[$ intervallumon a függvény szigorúan monoton növekvő, a $]0, \infty[$ intervallumon pedig szigorúan monoton csökkenő. Az f függvény értékkészlete $R_f = \mathbf{R}^+$.

3.7.1.3. Irracionális függvények

Irracionális függvénynek nevezzük azokat az algebrai függvényeket, amelyek nem racionális függvények.

Négyzetgyökfüggvény: $f: \mathbf{R}^+ \cup \{0\} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = \sqrt{x}$ ($x \geq 0$).



16. ábra: A négyzetgyökfüggvény grafikonja

Forrás: Bíró és Vincze (2000)

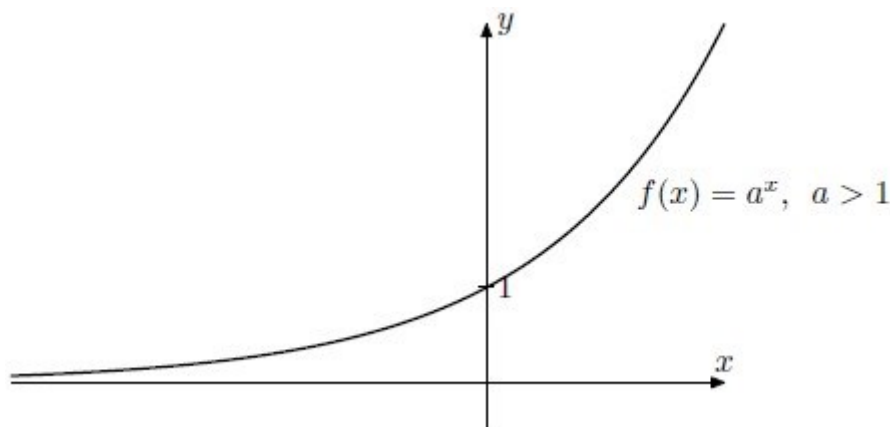
A négyzetgyökfüggvény (16. ábra) alulról korlátos függvény, az $x = 0$ -ban abszolút szélsőérték helye van. Kölcsonösen egyértelmű leképezés, így létezik inverze. A függvény szigorúan monoton növekedő, egyetlen zérushelye $x = 0$ -ban van. Az f függvény értékkészlete $R_f = R^+ \cup \{0\}$.

3.7.2. Transzcendens függvények

Transzcendens függvényeknek a nem algebrai függvényeket nevezzük.

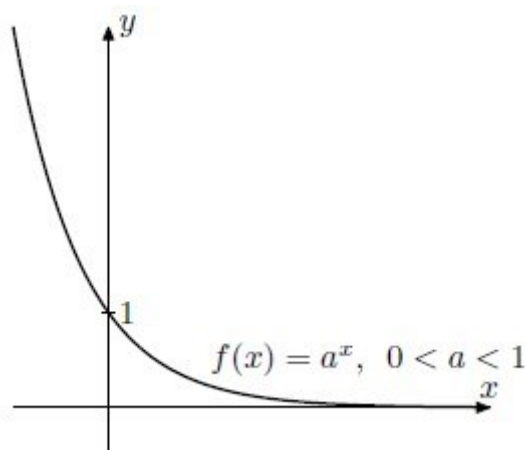
3.7.2.1. Exponenciális, logaritmus függvények

- a.) Ha $a \in R^+ \setminus \{1\}$, akkor az $f: R \rightarrow R$, $f(x) = a^x$ függvényt **exponenciális függvénynek** nevezzük. Racionális kitevő esetén a hatvány középiskolában tanult definícióját használjuk: $a^{\frac{k}{n}} = (\sqrt[n]{a})^k$. Kimutatható, hogy egyetlen olyan függvény van, amely ezt teljesíti, ezt jelöljük a^x -szel. Az $f(x) = a^x$ függvény se nem páros, se nem páratlan függvény. Alulról korlátos, felülről nem korlátos, zérushelye nincs.



17. ábra: Az „a” alapú exponenciális függvény, ha $a > 1$

Forrás: Bíró és Vincze (2000)

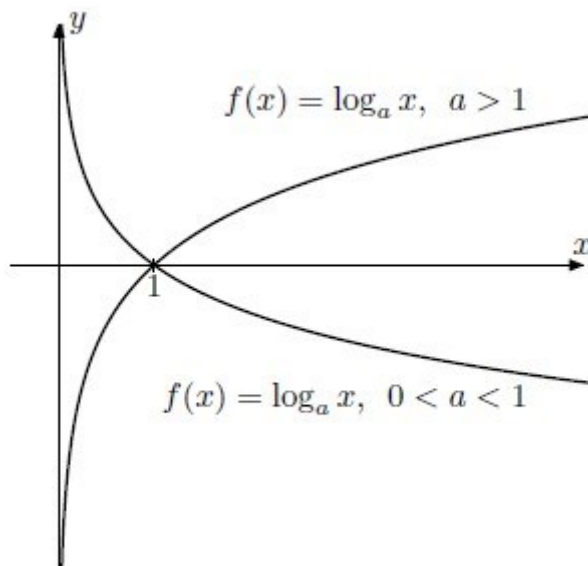


18. ábra: Az „a” alapú exponenciális függvény, ha $0 < a < 1$

Forrás: Bíró és Vincze (2000)

Ha az $a > 1$ (17. ábra), akkor az f függvény szigorúan monoton növekvő, ha $0 < a < 1$ (18. ábra), a függvény szigorúan monoton csökkenő. Az exponenciális függvény értékkészlete $R_{\text{exp}} = R^+$. Kölsönösen egyértelmű leképezés, inverze az a -alapú logaritmussfüggvény.

b.) Ha az $a \in R^+ \setminus \{1\}$, akkor az $f: R^+ \rightarrow R$, $f(x) = \log_a(x)$ függvényt „ a ” alapú **logaritmussfüggvénynek** nevezzük (19. ábra).



19. ábra: Az „ a ” alapú logaritmussfüggvény

Forrás: Szerényi (1988)

Az f se nem páros, se nem páratlan függvény. Nem korlátos, egyetlen zérushelye az $x = 1$ pontban van. Ha $a > 1$, akkor a függvény szigorúan monoton növekvő, míg a $0 < a < 1$ esetben a függvény szigorúan monoton csökkenő. Az f függvény kölcsönösen egyértelmű leképezés, így van inverze, mégpedig az exponenciális függvény. A logaritmussfüggvény értékkészlete $R_f = R$.

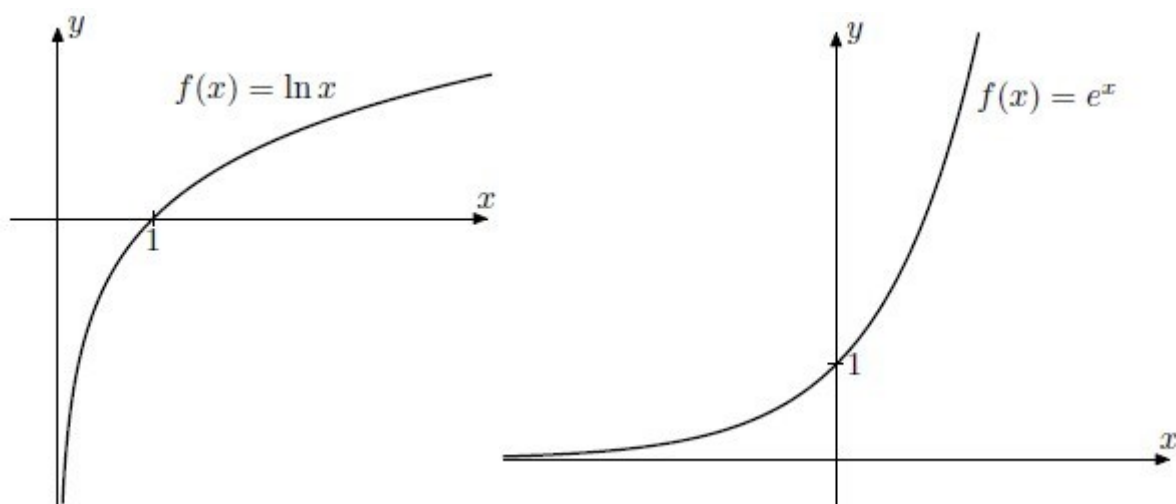
Az a^x és a $\log_a(x)$ függvényeket - lévén egymás inverzei az $a^{\log_a(x)} = x$, és a $\log_a(a^x) = x$ összefüggések kötik össze.

c.) A **természetes alapú exponenciális (e^x) és logaritmuss ($\ln(x)$)** függvény. Mint azt a későbbiekben látni fogjuk, az $e \approx 2,714...$ irracionális szám speciális szerepet játszik a matematikában. Az e -t **Euler-féle számnak** nevezzük. Az e szám a matematikában alapvető jelentőségű. Az e -alapú logaritmuss természetes logaritmussnak, azaz “logaritmuss naturalisz”-nak mondjuk és $\ln$ szimbólummal jelöljük:

$$\log_e(x) = \ln(x) \quad (x > 0).$$

$$a^x = e^{x \cdot \ln a} \text{ és } \log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)} \quad (a > 0, a \neq 1).$$

Az e^x függvény (20. ábra) jellemzése megegyezik az a^x függvény jellemzésével, abban az esetben, ha $a > 1$. Az $\ln(x)$ függvény (20. ábra) jellemzői pedig a $\log_a(x)$ függvény jellemzőivel egyeznek meg, ahol $a > 1$.



20. ábra: A természetes alapú exponenciális és logaritmus függvények

Forrás: Bíró és Vincze (2000)

3.7.2.2. Trigonometrikus függvények

Azokat a függvényeket, amelyek az $f(x) = \sin(x)$ és $g(x) = \cos(x)$ függvényekből, valamint a valós számokból véges sok összeadás, kivonás, szorzás és osztás útján állíthatók elő, **trigonometrikus függvényeknek** nevezzük.

Trigonometrikus függvény a **sinus**, **cosinus**, **tangens** és **cotangens** függvény. E függvények mindegyike periodikus. A sinus és cosinus függvények periódusa 2π , a tangens és cotangens függvényeké pedig π .

A sinus és cosinus függvény tulajdonságai ($k \in \mathbf{Z}$):

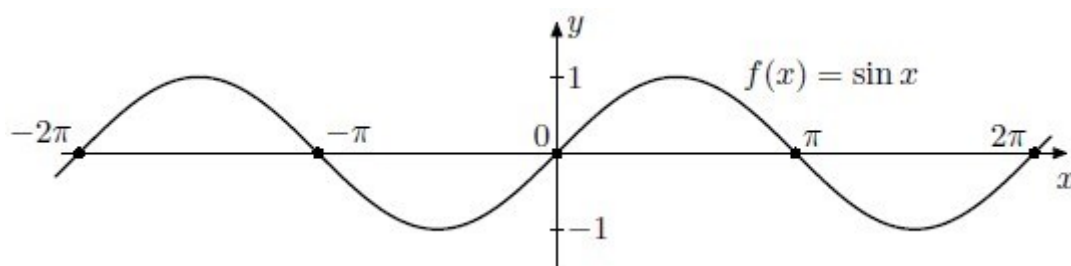
(x)	R_f	Maximum	Minimum	Növekedés	Csökkenés	Paritás
$\sin(x)$	$[-1, 1]$	$\frac{\pi}{2} + 2k\pi$	$3\frac{\pi}{2} + 2k\pi$	$\left[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right]$	$\left[\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right]$	Páratlan
$\cos(x)$	$[-1, 1]$	$2k\pi$	$\pi + 2k\pi$	$[\pi + 2k\pi, 2\pi + 2k\pi]$	$[2k\pi, \pi + 2k\pi]$	Páros

Mind a sinus (21. ábra), mind a cosinus (23. ábra) függvény korlátos. A tangens és cotangens függvényt a

$\frac{\sin(x)}{\cos(x)}$, illetve a $\frac{\cos(x)}{\sin(x)}$ hányadossal értelmezzük, így

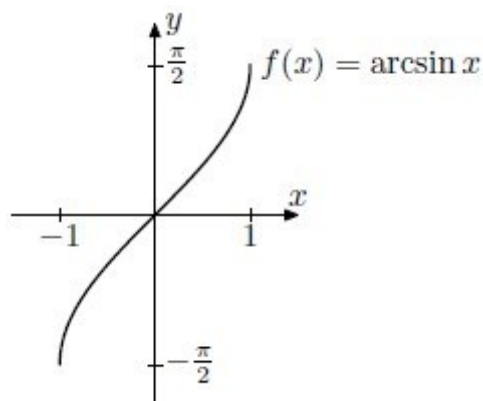
$$D_{\text{tg}} = \mathbf{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi, k \in \mathbf{Z} \right\}, \text{ és } D_{\text{ctg}} = \mathbf{R} \setminus \{k \cdot \pi, k \in \mathbf{Z}\}$$

A tangens függvény szakaszonként szigorúan monoton növekedő, a cotangens függvény szakaszonként szigorúan monoton csökkenő. Sem abszolút, sem lokális szélsőértékük nincs. Mindkét függvény páratlan, $R_{\text{tg}} = R_{\text{ctg}} = \mathbf{R}$.



21. ábra: A sinus függvény

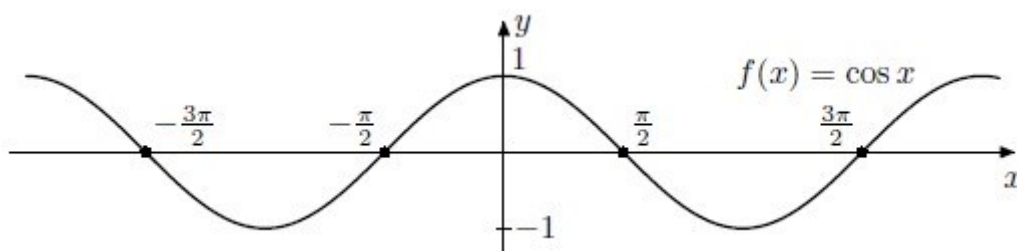
Forrás: Bíró és Vincze (2000)



22. ábra: Az arcussinus függvény

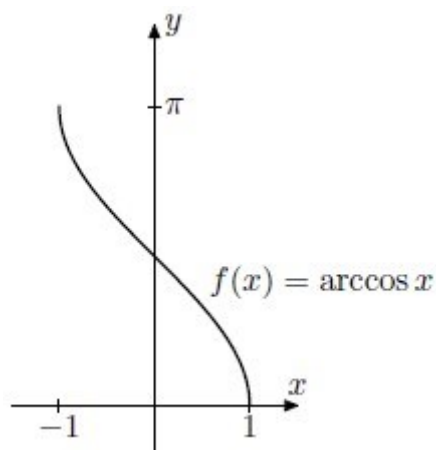
Szerényi (1988)

Az $y = \sin(x)$, $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ függvény inverze az $y = \arcsin(x)$ függvény, melyet “arkuszszinusz”-nak olvasunk. Az inverz függvény értelmezési tartománya a $D_{\arcsin} = \{x \in \mathbf{R} \mid -1 \leq x \leq 1\}$ halmaz, amely minden $x \in D_{\arcsin}$ esetén azt a $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ zárt intervallumba eső szöget adja meg (radiánban), amelynek a sinusa x .



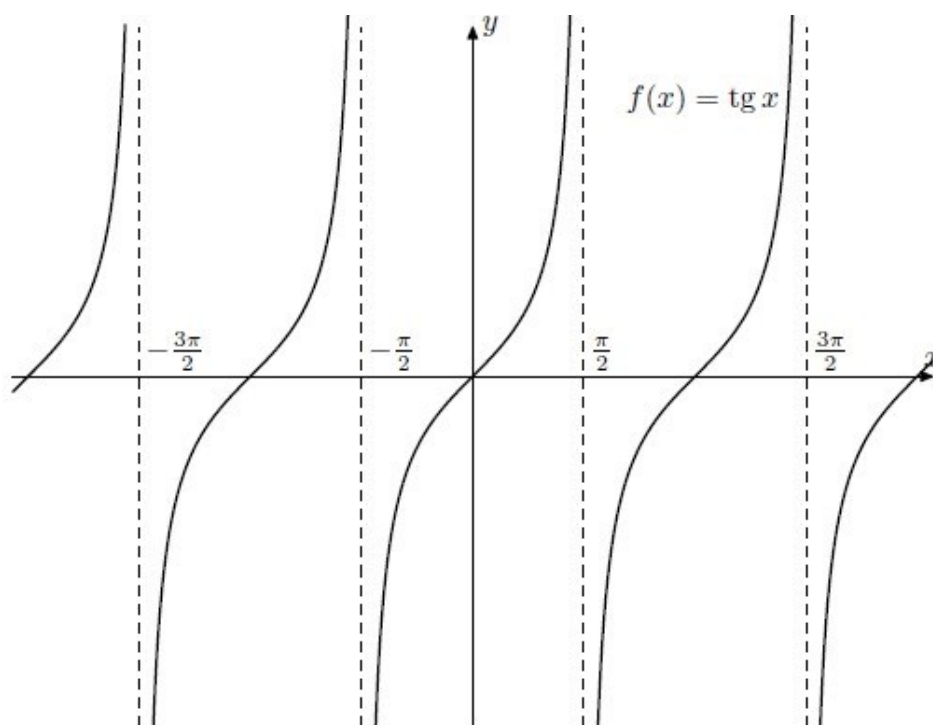
23. ábra: A cosinus függvény

Bíró és Vincze (2000)

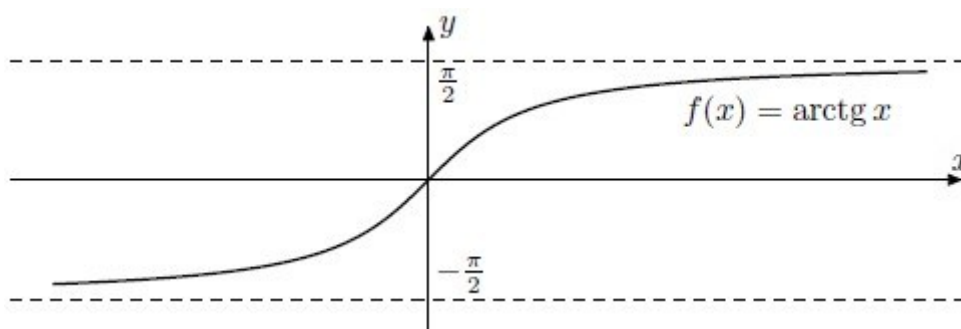


24. ábra: **Az arcuscosinus függvény**
Szerényi (1988)

Az $y = \cos(x)$, $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ függvény inverze az $y = \arccos(x)$ függvény, melyet “arkuszkoszinusz”-nak olvasunk (24. ábra). Az inverz függvény értelmezési tartománya a $D_{\arccos} = \{x \in \mathbf{R} \mid -1 \leq x \leq 1\}$ halmaz, és amelyben az y azt a $[0, \pi]$ intervallumba eső szöget adja meg (radiánban), amelynek a cosinusa x .



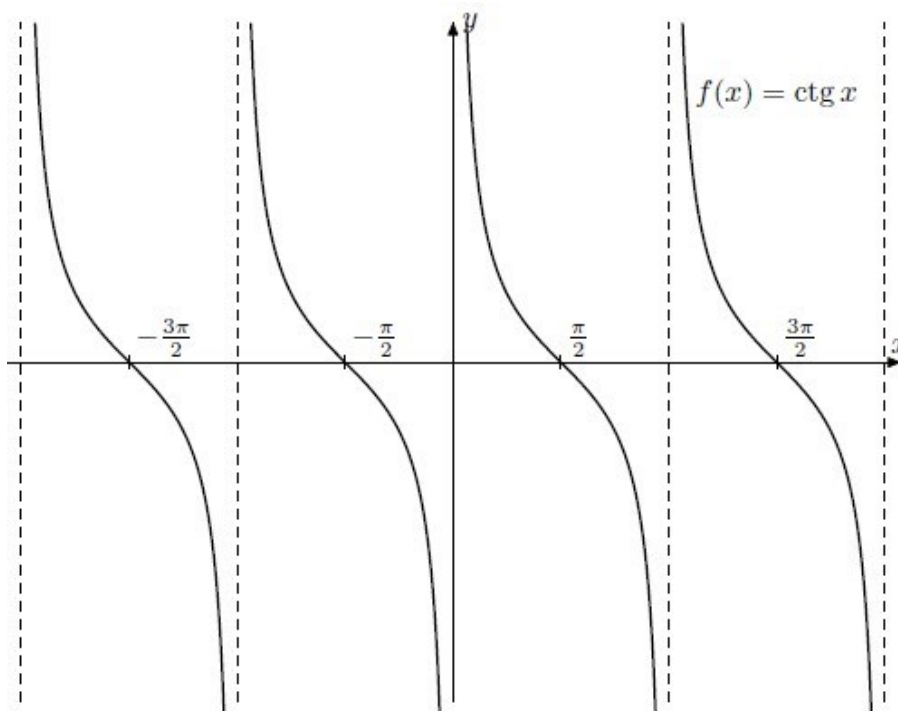
25. ábra: **A tangens függvény**
Bíró és Vincze (2000)



26. ábra: Az arcustangens függvény

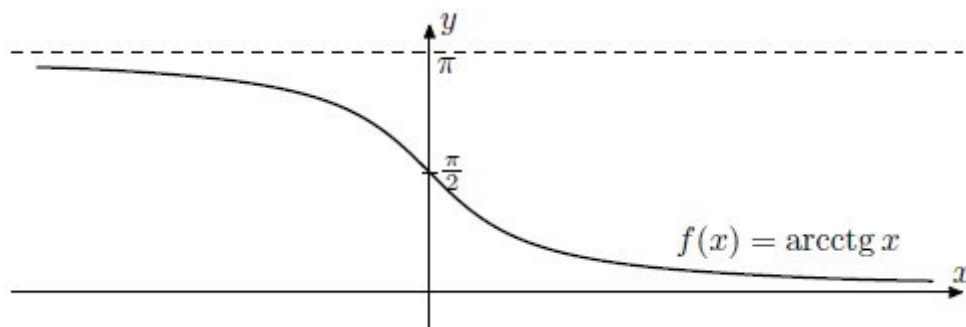
Szerényi (1988)

Az $y = \text{tg}(x)$, $x \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$ függvény (25. ábra) inverze az $y = \text{arctg}(x)$ függvény, melyet “arkusztangens”-nek olvasunk (26. ábra). Az inverz függvény értelmezési tartománya a $D_{\text{arctg}} = \mathbf{R}$ halmaz, és az y azt a $\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$ intervallumba eső szöget adja meg (radiánban), amelynek a tangense x .



27. ábra: A cotangens függvény

Bíró és Vincze (2000)



28. ábra: Az arcuscotangens függvény

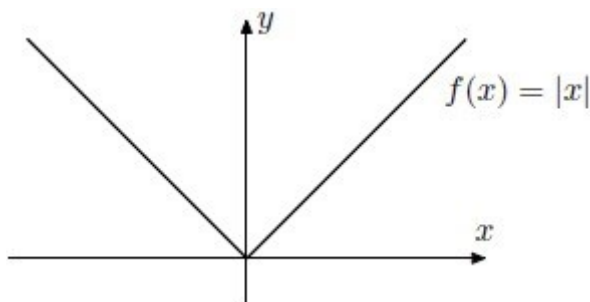
Szerényi (1988)

Az $y = \text{ctg}(x)$, $x \in]0, \pi[$ függvény (27. ábra) inverze az $y = \text{arctg}(x)$ függvény, melyet “arkuszcotangens”-nek olvasunk (28. ábra). Az inverz függvény értelmezési tartománya a $D_{\text{arctg}} = \mathbf{R}$ halmaz, és az y azt a $[0, \pi]$ intervallumba eső szöget adja meg (radiánban), amelynek a cotangense x .

3.7.3. Egyéb nevezetes függvények

3.7.3.1. Abszolútérték függvény

Az $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = |x| = \begin{cases} x, & \text{ha } x \geq 0 \\ -x & \text{ha } x < 0 \end{cases}$ függvényt **abszolút érték függvénynek** nevezzük (29. ábra).



29. ábra: Az abszolút érték függvény

Bíró és Vincze (2000)

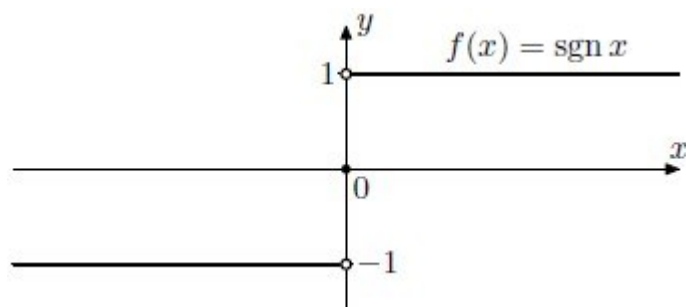
A definícióból következik, hogy a grafikonja a számegyenes pozitív felén az $f(x) = x$ függvény grafikonjával, a számegyenes negatív felén pedig az $f(x) = -x$ függvény grafikonjával azonos. Az f függvény a $]-\infty, 0]$ intervallumon szigorúan monoton csökkenő, a $[0, \infty[$ intervallumon szigorúan monoton növekedő. Az $x = 0$ pontban a függvénynek abszolút minimuma van és ez a hely egyben zérushely is. A függvény alulról korlátos és páros. Nem kölcsönösen egyértelmű leképezés, ezért nincs inverze. Értékkészlete $R_f = [0, \infty[$.

3.7.3.2. Előjelfüggvény

Az $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x > 0 \\ 0, & \text{ha } x = 0 \\ -1, & \text{ha } x < 0 \end{cases}$ függvényt **signum-, vagy előjelfüggvénynek**

nevezzük (30. ábra).

A függvény monoton növekedő, korlátos. Minden negatív szám (abszolút) minimumhely, minden pozitív szám (abszolút) maximumhely. A minimumértéke -1 , a maximumértéke 1 . A signum függvény páratlan függvény. Nem kölcsönösen egyértelmű leképezés, ezért nincs inverze. Egy zérushelye van az $x = 0$ pontban. Értékkészlete az $R_{\text{sgn}} = \{-1, 0, 1\}$ háromelemű halmaz.



30. ábra: Az előjelfüggvény grafikonja

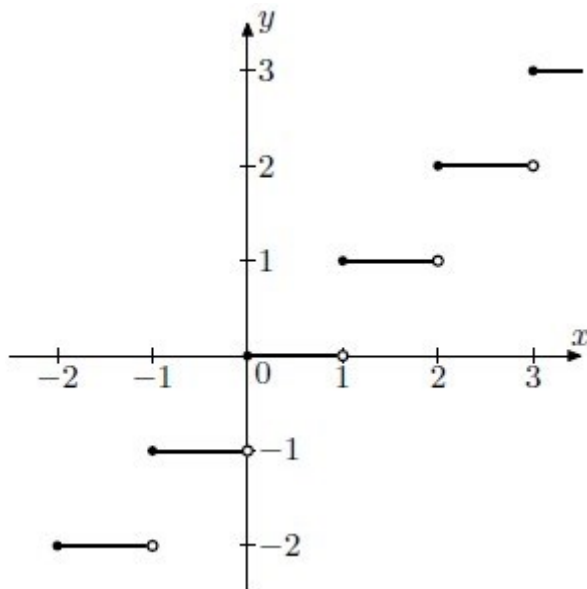
Bíró és Vincze (2000)

3.7.3.3. Egészrész- és törtrész függvények

Definíció. Egy $x \in \mathbb{R}$ szám **egészrészének** a nála nem nagyobb egész számok legnagyobbikát nevezzük. Jele: $[x]$. Egy $x \in \mathbb{R}$ szám **törtrészének** az $x - [x]$ számot hívjuk.

Definíció. **Egészrész függvénynek** az a: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $a(x) = [x]$ függvényt, **törtrész függvénynek** a $t: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $t(x) = x - [x]$ függvényt nevezzük.

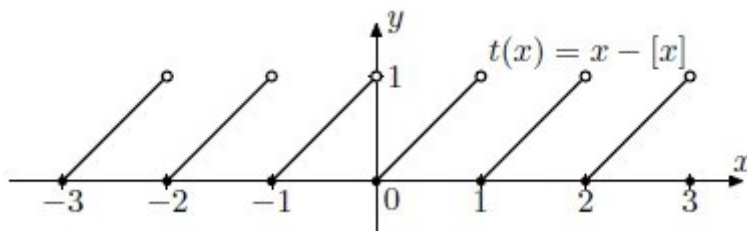
Az egészrész függvény lépcsős függvény. Grafikonja egységnyi hosszúságú, balról zárt, jobbról nyílt szakaszokból áll (31. ábra). Ez a függvény nem korlátos, monoton növekedő. Minden $x \in \mathbb{R}$ helyen lokális maximuma van. Az egészrész függvénynek végtelen sok zérushelye van, ezek halmaza a $[0,1[$ intervallum. Értékkészlete $\mathbb{R} = \mathbb{Z}$.



31. ábra: Az egészrész függvény grafikonja

Bíró és Vincze (2000)

A törtrész függvény 1 hosszúságú, párhuzamos, balról zárt, jobbról nyílt szakaszokból áll (32. ábra). Ez a függvény korlátos, szakaszonként monoton növekedő. Minden $x \in \mathbb{Z}$ helyen abszolút minimuma van, értéke 0. Ezek a helyek egyúttal zérushelyek is. A t függvénynek sem abszolút, sem lokális maximuma nincs. Se nem páros, se nem páratlan függvény. A törtrész függvény periodikus, periódusa 1. Értékkészlete a $[0,1[$ intervallum.



32. ábra: A törtrész függvény grafikonja

Bíró és Vincze (2000)

Sem az egészrész, sem a törtrész függvény nem kölcsönösen egyértelmű leképezés, ezért egyiknek sincs inverze.

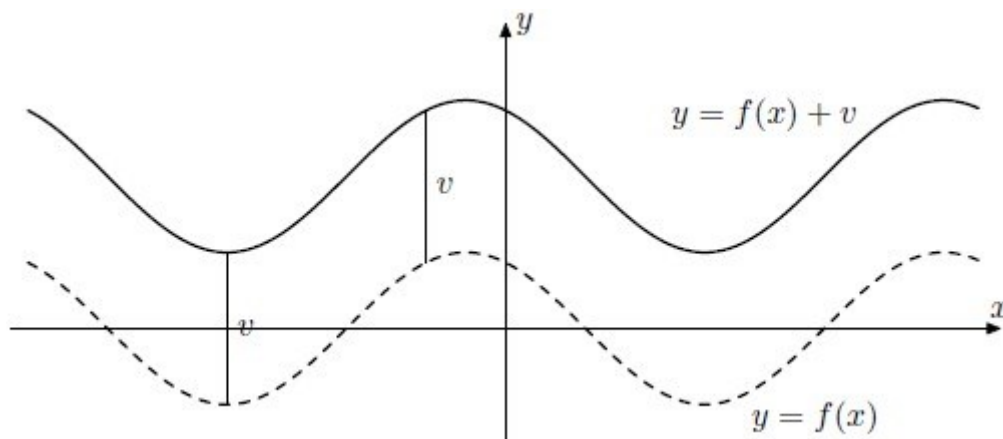
3.8. Függvénytranszformációk

A függvények ábrázolását legtöbbször megkönnyíti az, ha egyszerűbb függvények segítségével, több lépésen keresztül jutunk el a grafikonhoz. Ezt az eljárást **függvénytranszformációnak** nevezzük.

Tegyük fel, hogy az f függvényünk grafikonját ismerjük a Descartes-féle koordináta-rendszerben.

1. Eltolás az ordinátatengely (y tengely) mentén

Legyen v rögzített valós szám. Az $f + v$, vagyis az $x \rightarrow f(x) + v$, $x \in D_f$ függvény görbéje az f függvény görbéjének y irányú eltolásával nyerhető (33. ábra). Az eltolás nagysága $|v|$, az előjele pedig a v előjelének felel meg.

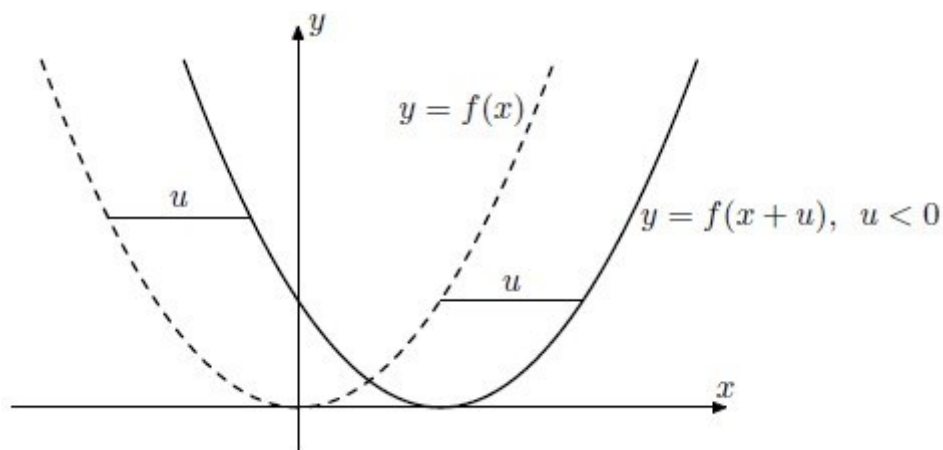


33. ábra: A függvény eltolása az y tengely mentén

Bíró és Vincze (2000)

2. Eltolás az abszcisszatengely (x tengely) mentén

Az $x \rightarrow f(x + u)$, $(x + u) \in D_f$ függvény ábrája az f függvény ábrájának x tengely irányú eltolásával adódik. Az eltolás mértéke $|u|$. Ha $u > 0$, akkor balra történik az eltolás, ha $u < 0$, akkor pedig jobbra (34. ábra).

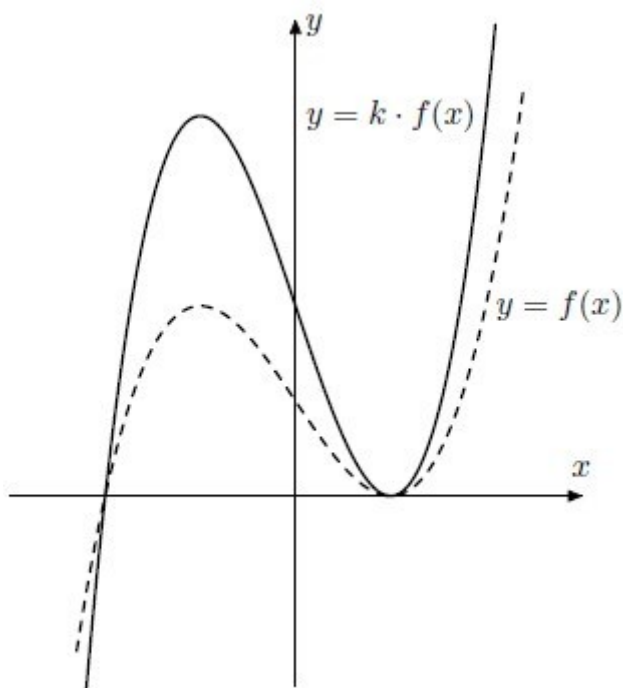


34. ábra: A függvény eltolása az x tengely mentén

Bíró és Vincze (2000)

3. Az abszcisszatengelyre merőleges k-szoros nyújtás

A $k \cdot f(x)$ vagyis az $x \rightarrow k \cdot f(x)$, $x \in D_f$, $k > 0$ függvény grafikonja az f függvény grafikonjának y irányú k -szoros nyújtásával kapható meg (35. ábra).

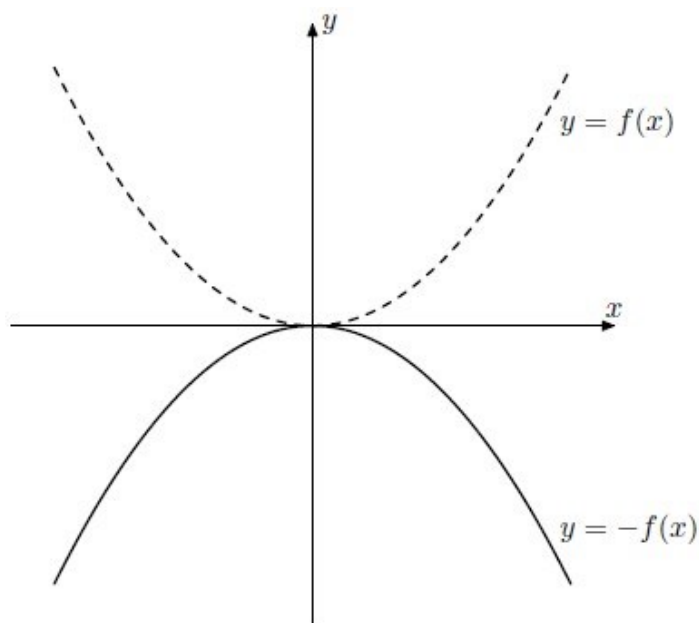


35. ábra: A függvény k -szoros nyújtása y tengely mentén

Bíró és Vincze (2000)

4. Az x tengelyre való tükrözés

A $-f$, vagyis az $x \rightarrow -f(x)$, $x \in D_f$ függvény grafikonja az f függvény grafikonjának az x tengelyre vonatkozó tükörképe (36. ábra).

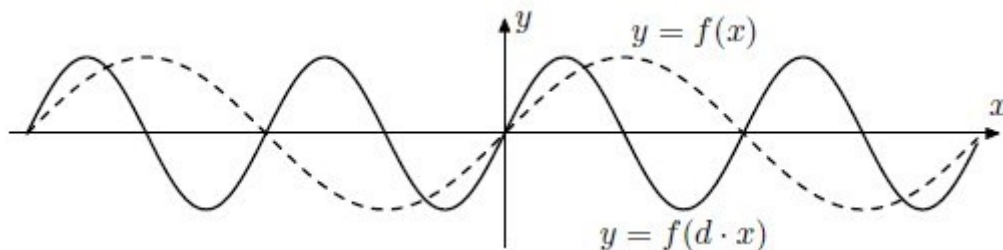


36. ábra: A függvény x tengelyre történő tükrözése

Bíró és Vincze (2000)

5. Ordinátatengelyre merőleges d -szeres nyújtás vagy zsugorítás

Az $x \rightarrow f(d \cdot x)$, $d \cdot x \in D_f$ függvény grafikonját az f függvény grafikonjának x -tengely irányú, az y tengelytől számított $\frac{1}{d}$ -szeres változtatásával kapjuk. Ez $0 < d < 1$ esetén nyújtást jelent, $d > 1$ esetén zsugorítást. A 37. ábrán egy 2-szeres nyújtás látható.

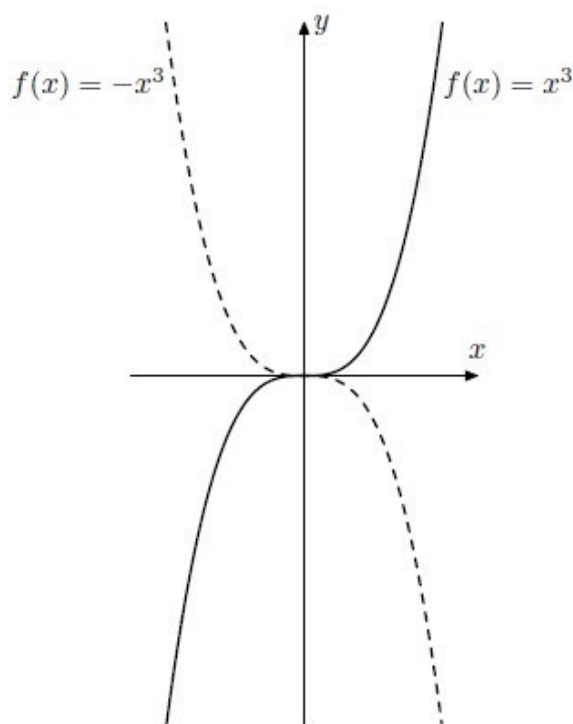


37. ábra: Kétszeres nyújtás sinus függvényre az x tengely mentén

Bíró és Vincze (2000)

6. Az y -tengelyre való tükrözés

Az $x \rightarrow f(-x)$, $-x \in D_f$ függvény grafikonja az f függvény grafikonjának az y -tengelyre vonatkozó tükörképe (38. ábra).



38. ábra: Az $f(x) = x^3$ függvény y tengelyre tükrözése

Bíró és Vincze (2000)

3.9. Ellenőrző kérdések

1. Definiálja az egyváltozós valós függvény fogalmát.
2. Hogyan lehet szemléltetni az egyváltozós valós függvényeket?
3. Derékszögű koordináta rendszerben milyen kapcsolat van a függvény és inverze között?
4. Milyen műveleteket értelmezünk két egyváltozós valós függvény között, hogyan értelmezzük ezeket?
5. Mit nevezünk egy adott függvény zérushelyének?
6. Mi a zérushely geometriai jelentése?
7. Mi az az n -ed fokú polinom-függvény (röviden polinom)?
8. Mit tud mondani egy polinom zérushelyeinek számáról?
9. Milyen módszerekkel lehet megkeresni egy polinom zérushelyeit?
10. Ismertesse a Horner-elrendezés lényegét.
11. Mit jelent az intervallum felezés módszere?
12. Mikor mondjuk, hogy egy függvény korlátos?
13. Mikor mondjuk, hogy egy függvény monoton? Mikor mondjuk, hogy egy függvény egy adott intervallumon (szigorúan) monoton nő? Mikor mondjuk, hogy egy függvény egy adott intervallumon (szigorúan) monoton csökken?
14. Mikor mondjuk, hogy egy egyváltozós valós függvénynek az értelmezési tartományának egy pontjában abszolút maximuma, ill. minimuma van?
15. Mikor mondjuk, hogy egy egyváltozós valós függvénynek az értelmezési tartományának egy pontjában helyi maximuma, ill. minimuma van?
16. Mikor mondjuk, hogy egy függvény konvex, ill. konkáv?
17. Mit nevezünk egy adott függvény inflexiós pontjának?
18. Mi az inflexiós pont geometriai jelentése?
19. Mit jelentenek a következők egy függvénnyel kapcsolatban: periodicitás, párosság, páratlanság?
20. Adjon meg páros függvényt és ábrázolja Descartes-féle derékszögű koordináta rendszerben.
21. Adjon meg páratlan függvényt és ábrázolja Descartes-féle derékszögű koordináta rendszerben.
22. Sorolja fel az egyváltozós valós függvények nevezetes osztályait.
23. Rajzolja fel a tanult alapfüggvényeket.
24. Mi az a függvény-transzformáció?
25. Milyen függvény-transzformációkat ismer, szemléltesse ezeket Descartes-féle derékszögű koordináta rendszerben.
26. Döntse el, hogy az alábbi állítások igazak vagy hamisak-e.
 - a) Függvénynek nevezzük az egyértelmű relációt.
 - b) Egy halmaz pontosan akkor végtelen számosságú, ha ekvivalens valamelyik valódi részhalmazával.
 - c) Minden üres halmaz véges.
 - d) A természetes számok halmaza megszámlálható.
27. Döntse el az alábbi állításokról, hogy melyek igazak, ill. hamisak.
 - a) Egy n -ed fokú polinomnak $(n-1)$ gyöke van.
 - b) Az inflexiós pont a függvény olyan pontja, ahol a függvény alaki tulajdonsága megváltozik.
 - c) A páros függvények az y tengelyre szimmetrikus függvények.
 - d) Az x^3 függvény páros függvény.
 - e) A trigonometrikus függvények periodikus függvények.

- f) A konstansfüggvény monoton növekvő függvény.
- g) A lineáris függvénynek vagy nincs zérushelye vagy 1 zérushelye van.
- h) Az $y=x$ függvényt identikus függvénynek nevezzük.
- i) A másodfokú függvénynek nincs inverze, mert kölcsönösen egyértelmű leképezés.
- j) Az $y=\frac{1}{x}$ függvény képe hiperbola.
- k) Transzcendens függvényeknek az algebrai függvényeket nevezzük.
- l) Az exponenciális függvény invertálható és inverze a hatványfüggvény.
- m) Az abszolútérték függvénynek az $X=0$ pontban abszolút minimuma van és ez a hely egyben zérushely is.

4. SOROZATOK

A korábbi fejezetben már ismertetésre került az egyváltozós valós függvény néhány jellemzője. Megismerkedtünk többek között a monotonitás, az inflexiós pont, a szélsőérték stb. fogalmával. Ezek meghatározása nagy jelentőséggel bír, és az eljárások ismerete, amelyek segítségével ezeket meghatározzuk alapvetőek. Ezen eljárások megértéséhez azonban előbb meg kell ismerkednünk a függvény adott helyen vett határértékének fogalmával. Ehhez azonban meg kell ismernünk egy speciális függvényt, a sorozatot.

A matematikai analízis legfontosabb fogalmát, a határérték fogalmát egy speciális függvénytípus segítségével vezetjük be (Császár, 1983; Rudin, 1978).

Definíció. A természetes számok halmazán értelmezett valós értékű $a: \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{R}$ függvényt **valós számsorozatnak** (röviden **sorozatnak**) nevezzük.

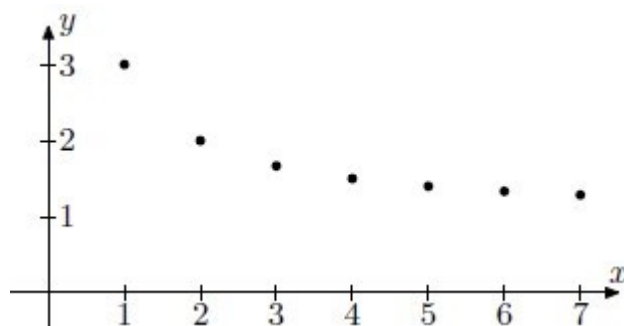
Megjegyzés. Az „a” sorozat „n” helyen felvett helyettesítési értékét, amit az „a” sorozat n-edik tagjának (elemének) nevezünk a_n -nel jelöljük. A sorozat jelölésére pedig az (a_n) szimbólumot használjuk.

4.1. A sorozat megadása, szemléltetése, műveletek sorozatokkal

A sorozatokat általában **képlettel** adhatjuk meg, azaz megadjuk a sorozat általános (n-edik) tagját. Ezt a megadási módot explicit megadási módnak nevezzük. A másik mód a **rekurzióval** történő megadás, ami azt jelenti, hogy megadjuk a sorozat néhány kezdő tagját, majd előírjuk, hogyan kell a sorozat bármely tagját az előzőek ismeretében kiszámítani.

Megjegyzés. A gyakorlatban is naponta találkozhatunk sorozatokkal, például ha feljegyezzük napról napra a keltetőben kikelt kacsák számát, a napi csapadékmennyiséget mm-ben megadva stb. A gyakorlatban előforduló sorozatoknak mindig véges sok eleme van, ezek a **véges sorozatok**. A véges sorozatok megadása elemeik **felsorolásával** történhet. Az analízisben általában olyan sorozatokkal foglalkozunk, amelyeknek végtelen sok elemük van, ezek az ún. **végtelen sorozatok**.

Mivel a sorozat egy speciális függvény, így a függvény ábrázolásánál tanultak alapján koordináta-rendszerben is szemléltethető (39. ábra).

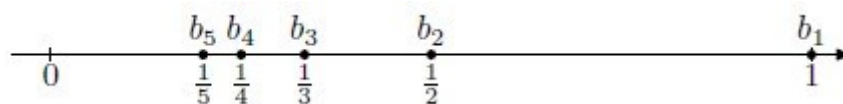


39. ábra: Sorozat szemléltetése koordináta-rendszerben

Forrás: Bíró és Vincze (2000)

A másik lehetőség a sorozat szemléltetésére az, hogy számegyenesen jelöljük a sorozat tagjait, és az így kapott pontsorozatot tekintjük a sorozat képének. A koordináta-rendszerben történő ábrázolás során a pontokat nem köthetjük össze folytonos

vonallal (40. ábra).



40. ábra: Sorozat szemléltetése számegyenesen

Forrás: Bíró és Vincze (2000)

Definíció. Legyen adott az (a_n) és a (b_n) sorozat. Ekkor

- (1) a **két sorozat összege** a $c_n = a_n + b_n$ ($\forall n \in \mathbb{N}$) képlettel értelmezett (c_n) sorozat,
- (2) a **két sorozat különbsége** a $c_n = a_n - b_n$ ($\forall n \in \mathbb{N}$) képlettel értelmezett (c_n) sorozat,
- (3) a **két sorozat szorzata** a $c_n = a_n \cdot b_n$ ($\forall n \in \mathbb{N}$) képlettel értelmezett (c_n) sorozat,
- (4) a **két sorozat hányadosa** a $c_n = \frac{a_n}{b_n}$, $b_n \neq 0$ ($\forall n \in \mathbb{N}$) képlettel értelmezett (c_n) sorozat,
- (5) egy sorozat $\lambda \in \mathbb{R}$ **skalárszorosa** a $c_n = \lambda \cdot a_n$, ($\forall n \in \mathbb{N}$) képlettel értelmezett (c_n) sorozat.

4.2. A sorozat tulajdonságai

A függvények egyik lényeges tulajdonsága a monotonitás, az ott elmondott definíciók sorozatokra mint speciális függvényekre is érvényesek.

Definíció.

- (1) Az (a_n) sorozatot **monoton növekedőnek** nevezzük, ha minden $n \in \mathbb{N}$ esetén fennáll, hogy $a_n \leq a_{n+1}$.
- (2) Az (a_n) sorozatot **szigorúan monoton növekedőnek** nevezzük, amennyiben minden $n \in \mathbb{N}$ esetén fennáll, hogy $a_n < a_{n+1}$.
- (3) Az (a_n) sorozatot **monoton csökkenőnek** nevezzük, ha minden $n \in \mathbb{N}$ esetén fennáll, hogy $a_n \geq a_{n+1}$.
- (4) Az (a_n) sorozatot **szigorúan monoton csökkenőnek** nevezzük, amennyiben minden $n \in \mathbb{N}$ esetén fennáll, hogy $a_n > a_{n+1}$.

Az (a_n) sorozat monotonitását az $a_{n+1} - a_n$ különbséggel, vagy az $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ hányadossal célszerű megvizsgálnunk. Nyilvánvaló ugyanis, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$a_{n+1} - a_n = \begin{cases} \geq 0, & \text{akkor az } (a_n) \text{ sorozat monoton nő} \\ \leq 0, & \text{akkor az } (a_n) \text{ sorozat monoton csökken} \end{cases}$$

továbbá ha $a_n > 0$ és minden $n \in \mathbb{N}$ -re

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \begin{cases} \geq 1, & \text{akkor az } (a_n) \text{ sorozat monoton nő} \\ \leq 1, & \text{akkor az } (a_n) \text{ sorozat monoton csökken} \end{cases}$$

A sorozatoknál is lényeges tulajdonság a **korlátosság**. Erről a függvények tulajdonságainál részletesen volt szó, s ennek megfelelően beszélhetünk sorozat esetén is az alsó és felső korlátról, valamint a sorozat korlátosságáról.

Definíció.

- (1) Az (a_n) sorozatot **alulról korláatosnak** mondjuk, ha értékkészlete alulról korláatos, azaz létezik $k \in \mathbf{R}$ úgy, hogy $k \leq a_n$ minden $n \in \mathbf{N}$ esetén.
- (2) Az (a_n) sorozatot **felülről korláatosnak** mondjuk, ha értékkészlete felülről korláatos, azaz létezik $K \in \mathbf{R}$ úgy, hogy $K \geq a_n$ minden $n \in \mathbf{N}$ esetén.
- (3) Az (a_n) **sorozat korláatos**, ha alulról és felülről is korláatos.

Megjegyzés. Ha egy sorozat monoton növekedő, akkor alulról korláatos, és az egyik alsó korlátja a sorozat első tagja. Ha egy sorozat monoton csökkenő, akkor felülről korláatos, és egyik felső korlátja a sorozat első tagja.

Definíció.

- (1) Az (a_n) alulról korláatos sorozat legnagyobb alsó korlátját az (a_n) **sorozat pontos alsó korlátjának** vagy infimumának mondjuk. Jele: $\inf a_n$.
- (2) Az (a_n) felülről korláatos sorozat legkisebb felső korlátját az (a_n) **sorozat pontos felső korlátjának** vagy supremumának mondjuk. Jele: $\sup a_n$.

Definíció.

- (1) Az (a_n) **sorozat minimuma** a sorozatnak az az a_{m_0} tagja, amelyre minden $n \in \mathbf{N}$ esetén teljesül, hogy $a_{m_0} \leq a_n$.
- (2) Az (a_n) **sorozat maximuma** a sorozatnak az az a_{m_0} tagja, amelyre minden $n \in \mathbf{N}$ esetén teljesül, hogy $a_{m_0} \geq a_n$.

Megjegyzések.

- (1) Infimum és supremum mindig létezik, minimum és maximum azonban nem.
- (2) Legyen az $\inf a_n = k_0$. Amennyiben van olyan eleme a sorozatnak, amely éppen k_0 , akkor ez azt jelenti, hogy a sorozatnak van minimuma.
- (3) Legyen a $\sup a_n = K_0$. Amennyiben van olyan eleme a sorozatnak, amely éppen K_0 , akkor ez azt jelenti, hogy a sorozatnak van maximuma.

4.3. Sorozat konvergenciája

Definíció. Azt mondjuk, hogy az (a_n) sorozat konvergens és határértéke az $A \in \mathbf{R}$ szám, ha minden $\varepsilon > 0$ -hoz létezik $N_\varepsilon \in \mathbf{N}$ (ε -tól függő) szám úgy, hogy $|a_n - A| < \varepsilon$ minden $n > N_\varepsilon$ esetén.

Azt, hogy az (a_n) sorozat konvergens és határértéke az $A \in \mathbf{R}$ szám, így jelöljük: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$, és így olvassuk: „limesz n tart a végtelenbe a_n egyenlő A ”. A $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$ jelölés mellett szokás még alkalmazni az $a_n \rightarrow A$ ($n \rightarrow \infty$) jelölést is, amit így olvasunk ki: “az a_n tart az A -hoz”.

Megjegyzések.

- (1) Az $|a_n - A| < \varepsilon$ egyenlőtlenség azt jelenti, hogy $A - \varepsilon < a_n < A + \varepsilon$, azaz az a_n az $]A - \varepsilon, A + \varepsilon[$ nyílt intervallumban, vagyis A -nak az ε sugarú környezetében van. Az (a_n) sorozat konvergenciája azt jelenti, hogy létezik olyan $A \in \mathbf{R}$ szám, amelynek minden környezete olyan, hogy a környezeten kívül a sorozatnak csak véges sok eleme, a környezeten belül pedig végtelen sok eleme van.
- (2) A definícióban szereplő ε pozitív számot **hibakorlátnak**, az N_ε számot az ε -hoz tartozó **küszöbindexnek** nevezzük.

(3) Mivel $|a_n - A| = |(a_n - A) - 0|$, ezért az (a_n) sorozat A -hoz való konvergenciája egyenértékű az $(a_n - A)$ sorozat 0 -hoz való konvergenciájával.

Definíció. Azt mondjuk, hogy az (a_n) sorozat **divergens**, ha nem konvergens.

Definíció. Az (a_n) sorozat **nullsorozat**, ha konvergens és határértéke a 0 .

Tétel. A határérték mindig egyértelmű.

Tétel. Minden konvergens sorozat korlátos.

Megjegyzés. A tétel nem fordítható meg, azaz ha egy sorozat korlátos, abból még nem következik, hogy konvergens is. Például az $a_n = (-1)^n$ sorozat korlátos, de nem konvergens. Ha azonban a korlátosságot még a monotonitással is kiegészítjük, akkor abból már adódik a konvergencia.

Tétel. Ha az (a_n) sorozat monoton növekvő (csökkenő) és felülről (alulról) korlátos, akkor konvergens és $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sup(a_n)$ ($\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \inf(a_n)$)

Megjegyzés. Belátható, hogy az $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ sorozat korlátos, és monoton növekvő, így

konvergens. Ennek a határértékét nevezzük „ e ” számnak: $e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

4.4. Sorozatok határértékének kiszámítására vonatkozó tételek

Az alábbiakban megfogalmazott tételek sok esetben elősegítik a sorozat határértékének gyors kiszámítását. A tételeket bizonyítás nélkül fogadjuk el.

Tétel. Legyen (a_n) és (b_n) konvergens sorozat. Ekkor az $(a_n + b_n)$ is konvergens sorozat és $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n) + \lim_{n \rightarrow \infty} (b_n)$, vagyis konvergens sorozatok összegének a határértéke a sorozatok határértékének az összege.

Tétel. Legyen (a_n) konvergens és (b_n) korlátos sorozat, továbbá $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n) = 0$. Ekkor $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = 0$.

Tétel.

(1) Legyenek az (a_n) és (b_n) konvergens sorozatok. Ekkor $(a_n \cdot b_n)$ sorozat is konvergens és $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n) \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} (b_n)$, vagyis konvergens sorozatok szorzatának a határértéke a sorozatok határértékeinek a szorzata.

(2) Legyenek az (a_n) és (b_n) konvergens sorozatok és $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n) \neq 0$. Ekkor az $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ sorozat is konvergens sorozat és $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n)}{\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n)}$, vagyis konvergens sorozatok

hányadosának a határértéke a sorozatok határértékének a hányadosa, feltéve, hogy a nevezőben szereplő határérték nem 0 .

(3) Legyen az (a_n) sorozat konvergens és $\lambda \in \mathbf{R}$. Ekkor a $(\lambda \cdot a_n)$ sorozat is

konvergens és $\lim_{n \rightarrow \infty} (\lambda \cdot a_n) = \lambda \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n)$, vagyis konvergens sorozat skalárszorosának a határértéke a sorozat határértékének a skalárszorosa.

4.5. Részsorozat

Definíció. Ha az $\alpha: \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}$ szigorúan monoton nő és $b_n: \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{R}$ olyan, hogy $b_n = a_{\alpha(n)}$, akkor a (b_n) sorozatot az (a_n) sorozat **részsorozatának** nevezzük.

Megjegyzés. Az $\alpha(n)$ sorozatot szokás **indexsorozatnak** is nevezni.

Tétel. Ha az (a_n) és (b_n) konvergens sorozatok, és $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n) = A$, $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n) = B$, valamint $a_n \leq b_n$, akkor $A \leq B$.

Tétel. (Rendőr elv) Ha az (a_n) és (b_n) valós számsorozatokra minden $n \in \mathbf{N}$ esetén teljesül, hogy $a_n \leq b_n \leq c_n$, és $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n) = A = \lim_{n \rightarrow \infty} (c_n)$, akkor (b_n) is konvergál a közös határértékhez és $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n) = B$.

4.6. Végtelen, mint határérték

Definíció.

- (1) Az (a_n) **sorozat $a + \infty$ -be divergál**, ha minden $m \in \mathbf{R}$ esetén létezik N_m (m -től függő) küszöbindex, hogy $a_n > m$ minden $n > N_m$ -re. Jele: $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n) = +\infty$.
- (2) Az (a_n) **sorozat $a - \infty$ -be divergál**, ha minden $k \in \mathbf{R}$ esetén létezik N_k (k -től függő) küszöbindex, hogy $a_n < k$ minden $n > N_k$ -ra. Jele: $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n) = -\infty$.

Megjegyzés. A határértékekkel kapcsolatos állítások többsége igaz a $\pm\infty$ határértékekre is, amennyiben a $+\infty$ és $-\infty$ jelekkel elvégzendő műveleteknek van értelmük.

Tétel. Ha az (a_n) sorozat minden eleme pozitív (negatív) és $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n) = 0$, akkor

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{a_n} \right) = +\infty \quad \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{a_n} \right) = -\infty \right).$$

Tétel. Legyen az (a_n) sorozat konvergens és $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n) = A$, továbbá legyen (b_n) divergens és $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n) = +\infty$. Ekkor

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = +\infty$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = -\infty \quad \text{és}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = \begin{cases} +\infty, & \text{ha } A > 0 \\ -\infty, & \text{ha } A < 0 \end{cases}$$

Megjegyzés: $A = 0$ esetén a szorzat határértékére nincs a fentiekhez hasonló egyértelmű szabály, a $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n)$ határérték mindig más és más.

Tétel. Tegyük fel, hogy az (a_n) sorozat elemei 0-tól különböznek és $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n) = +\infty$, vagy

$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n) = -\infty$. Ekkor az $\left(\frac{1}{a_n}\right)$ sorozat konvergens és $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{a_n}\right) = 0$.

Tétel. (Nevezetes határértékek)

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} (c^n) = \begin{cases} +\infty, & \text{ha } c > 1 \\ 1, & \text{ha } c = 1 \\ 0, & \text{ha } -1 < c < 1 \end{cases}$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} (n^q) = \begin{cases} +\infty, & \text{ha } q > 0, \quad q \in \mathbb{R} \\ 1, & \text{ha } q = 0 \\ 0, & \text{ha } q < 0, \quad q \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$(3) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{c} = 1, \quad \text{ha } c > 0$$

$$(4) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

$$(5) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

$$(6) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{e}$$

$$(7) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{c}{n}\right)^n = e^c$$

$$(8) \text{ Ha az } (r_n) \text{ sorozat olyan, hogy } |r_n| > 1 \text{ és } \lim_{n \rightarrow \infty} |r_n| = +\infty, \text{ akkor } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{r_n}\right)^{r_n} = e.$$

Definíció. Az (a_n) sorozatnak az „ a ” $\in [-\infty, +\infty]$ **torlódási pontja**, ha az „ a ” minden környezetében az (a_n) sorozatnak végtelen sok tagja van.

Megjegyzés: A torlódási pont fogalmára a függvény határértékének definiálásánál lesz szükség. A torlódási pontok halmaza sohasem üres.

4.7. A számtani és a mértani sorozat

Az egyértelműség kedvéért ismételjük át a számtani és mértani sorozatokról tanultakat.

Definíció. Az $a_1, a_2, a_3, \dots$ sorozatot **számtani sorozatnak** nevezzük, ha létezik $d \in \mathbb{R}$ úgy, hogy az $a_{n+1} - a_n = d$ egyenlőség teljesül minden $n \in \mathbb{N}$ esetén.

Megjegyzés. A d állandót a **számtani sorozat különbségének** vagy **differentiájának** nevezzük. Ha $d > 0$, akkor a számtani sorozat szigorúan monoton növekvő, ha $d < 0$, akkor szigorúan monoton csökkenő, míg ha $d=0$, akkor a sorozat minden tagja egyenlő.

A sorozat tetszőleges tagja megadható az első tag és a sorozat differentiájának ismeretében: $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$.

A számtani sorozat első „n” tagjának az összegét S_n -nel jelöljük: $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$

Ismeretes, hogy
$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{2a_1 + (n-1) \cdot d}{2} \cdot n.$$

Definíció. Az $a_1, a_2, a_3, \dots$ sorozatot *mértani sorozatnak* nevezzük, ha létezik $q \in \mathbf{R}$ úgy, hogy az $a_{n+1} = q \cdot a_n$ egyenlőség teljesül minden $n \in \mathbf{N}$ esetén.

Megjegyzés. A q állandót a *mértani sorozat hányadosának* vagy *kvóciensének* nevezzük. Az $a_1 > 0$ esetben

- (1) ha $q < 0$, akkor a mértani sorozat tagjai váltakozó előjelűek,
- (2) ha $0 < q < 1$, akkor a mértani sorozat szigorúan monoton csökkenő,
- (3) ha $q = 1$, akkor a mértani sorozat minden tagja egyenlő,
- (4) ha $q > 1$, akkor a mértani sorozat szigorúan monoton növekedő,
- (5) ha $q = 0$, akkor a mértani sorozat többi tagja (azaz $a_2, a_3, \dots$) 0-val egyenlő.

A mértani sorozat tetszőleges tagja: $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$,

Az első „n” tagjának összege: $S_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$.

A mértani sor összegét $n \rightarrow \infty$ esetén megkapjuk S_n -ből a következő módon:

$$a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + a_1 q^3 + \dots = a_1 \cdot \frac{1}{1-q}, \quad \text{ha } |q| < 1$$

4.8. A mértani sorozat alkalmazásai

4.8.1 Kamatos kamatszámítás

Néhány alapfogalmat szükséges bevezetni a kamatos kamatszámítás tárgyalása előtt.

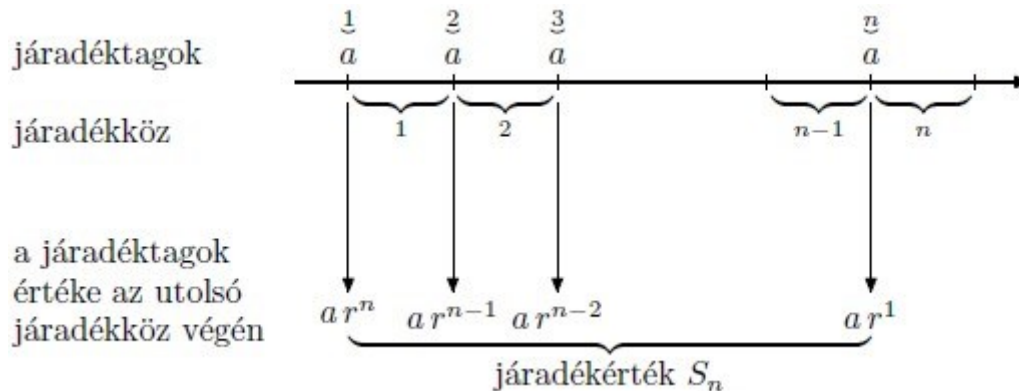
- (1) **Kamat:** A kölcsönök után az adós által időarányosan fizetendő pénzösszeg.
- (2) **Kamatláb:** A pénz használatáért egy megállapodás szerinti időtartamra fizetendő kamat és a tőke közötti százalékban megadott arány, jele: I (százalékban kifejezve). Jelölje a kezdeti állományt a_0 ,
- (3) **Kamattényező:** Azt mutatja meg, hogy a jelenlegi pénzösszeg egy kamatozási időszak alatt hányszorosára növekszik, jele: r és a kamatlábból levezethető az $r = 1 + \frac{I}{100}$ képlettel. Jelölje a_0 a jelenlegi pénzállományt, „n” a kamatozási időszakok számát, I a kamatlábat %-ban, r a kamattényezőt, a_n pedig a jövőbeli pénzállományt. Ekkor „n” időszak elteltével a jövőbeni pénzállományunk értéke a következőképpen adható meg:

$$a_n = a_0 \cdot \left(1 + \frac{I}{100}\right)^n = a_0 \cdot r^n$$

4.8.2. Járadékszámítás

A járadékszámítás is a mértani sorozathoz kapcsolódó gyakorlati feladat. Feladata az azonos időközönként (az időszak elején!) befizetett „a” összegek és ezek kamatos kamataiból ($a \cdot r^1$; $a \cdot r^2$; ... $a \cdot r^{n-1}$; $a \cdot r^n$) összegyűlt tőke összegének a meghatározása. Járadéknak az egyenlő időközönként esedékes pénzmennyiséget nevezzük.

Előfordulhat az, hogy feladatunk vagy a kamattényező, vagy a járadéktag, vagy pedig az időközök számának meghatározása. A gyakorlatban általában ez utóbbi feladat fordul elő.



41. ábra: A járadéktagok értékének alakulása

Forrás: Bíró és Vincze (2000)

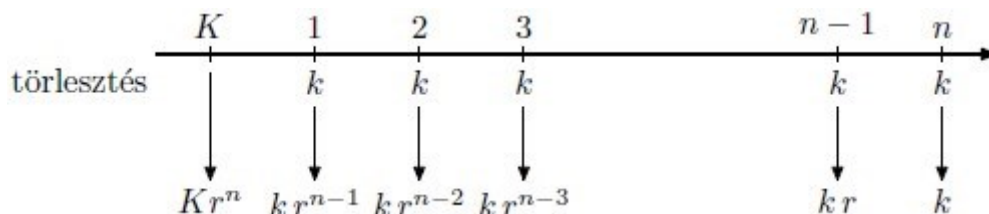
A feladat megoldása az $a \cdot r + a \cdot r^2 + \dots + a \cdot r^{n-1} + a \cdot r^n$ véges mértani sor összegének a meghatározását jelenti (41. ábra). A mértani sorozat összegképlete alapján:

$$S_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} = a \cdot r \cdot \frac{r^n - 1}{r - 1}.$$

Megjegyzés: Amennyiben az időszak végén tesszük be az „a” összeget, akkor a képlet a következőképpen módosul: $S_n = a \cdot \frac{r^n - 1}{r - 1}$.

4.8.3. Kölcsönök törlesztése

Jelöljük K-val a kölcsönt, a kamatot I százalékkal. Évente k Ft-ot törlesztünk. A 42. ábrán mind a kölcsönnek, mind a törlesztéseknek az úgynevezett **jövőértékét**, azaz kamatos kamattal megnövelt értékét tüntettük fel (42. ábra).



42. ábra: A kölcsöntörlesztés folyamata

Forrás: Bíró és Vincze (2000)

Az n-edik év végén a tartozásunk a következő képlettel adható meg, ha a kölcsön felvételének az időszaka végén kezdjük meg a törlesztést:

$$K_n = K \cdot r^n - k \cdot \frac{r^n - 1}{r - 1}.$$

A $K \cdot r^n$ az egyösszegű K kölcsön jövőbeli értékét jelenti, míg a $k \cdot \frac{r^n - 1}{r - 1}$ az általunk fizetett törlesztések kamattal felnövekedett értékeiből álló mértani sorozat összegképletét adja, amikor a kettő érték megegyezik, akkor zárul a törlesztés, vagyis azon „n” esetén, amelyre: $K_n = K \cdot r^n - k \cdot \frac{r^n - 1}{r - 1} = 0$

4.8.4. Ismétlődő beruházások

A beruházási számításoknál a kamatos kamat és a járadékszámítás módszereit alkalmazzuk. Legyen A_1 egy gazdaság tiszta jövedelme az egyik évben. Beruházásokra ennek és minden következő év tiszta jövedelmének $b\%$ -át fordítják. A beruházások az előző év tiszta jövedelmét $I\%$ -kal emelik ($r=1+I/100$). Mekkora az „n” év alatti beruházások összege (B_n)? Jelölje $A_1, A_2, \dots, A_n$ az egyes időszakok tiszta jövedelmét, $a_1, a_2, \dots, a_n$ az egyes időszakok beruházásait és „b” a beruházási tényezőt. Ekkor az első beruházás: $a_1 = A_1 \cdot b$, a következő év tiszta jövedelme: $A_2 = A_1 \cdot r$. A második beruházás: $a_2 = A_2 \cdot b = A_1 \cdot r \cdot b = a_1 \cdot r$, a következő év tiszta jövedelme:

$$A_3 = A_2 \cdot r = A_1 \cdot r^2.$$

A harmadik beruházás: $a_3 = A_3 \cdot b = A_2 \cdot r \cdot b = A_1 \cdot r^2 \cdot b = a_1 \cdot r^2$ stb.

A beruházások összegét az $a_1, a_1 \cdot r, a_1 \cdot r^2, \dots, a_1 \cdot r^{n-1}$ mértani sorozat összege

adja, azaz $B_n = a_1 \cdot \frac{r^n - 1}{r - 1}.$

4.8.5. Hozadékszámítás

A beruházással kapcsolatban igen fontos kérdésként merülhet fel az, hogy vajon mekkora értéket kell a beruházott eszközöknek évenként hozniuk, hogy a beruházás megtérüljön.

Egy vállalkozás K értékben vásárol egy berendezést, melynek élettartama „n” év. Mekkora értéket kell ennek a berendezésnek évenként hoznia, hogy ez az értéket évenkénti beruházásnak tekintve a beruházások felnövekedett értéke egyenlő legyen a K összeg felnövekedett értékével? A „beruházás” átlagos jövedelmezősége $I\%$. A beruházásra fordított K összeg r kamattényezővel n év múlva $K \cdot r^n$ összegre növekszik. Az ismeretlen évenkénti beruházásnak tekintett hozadék értékét jelölje H .

Ekkor a felnövekedett érték: $B_n = H \cdot \frac{r^n - 1}{r - 1}.$

H értékét a következő egyenlet megoldásával határozhatjuk meg: $K \cdot r^n - H \cdot \frac{r^n - 1}{r - 1} = 0$

4.9. Ellenőrző kérdések

1. Definiálja a sorozat fogalmát!
2. Hogyan lehet megadni egy sorozatot?
3. Hogyan lehet a sorozatokat szemléltetni?
4. Milyen műveleteket értelmezhetünk két sorozat között?
5. Mikor mondjuk, hogy egy sorozat monoton, ill. korlátos?
6. Mit értünk egy sorozat pontos alsó ill. pontos felső korlátján?
7. Mit értünk egy sorozat maximumán, ill. minimumán?
8. Mikor mondjuk, hogy egy sorozat határértéke az A valós szám?
9. Mikor mondjuk, hogy egy sorozat ∞ -be ill. $-\infty$ -be tart?
10. Milyen kapcsolat van a sorozatok konvergenciája és korlátossága között? megfordítható-e ez a tétel?
11. Milyen kapcsolat van a sorozatok monotonitása, korlátossága és konvergenciája között? Megfordíthatók-e ezek az állítások?
12. Mit tud két konvergens sorozat összegéről, szorzatáról és hányadosáról?
13. Ha (a_n) és (b_n) konvergens sorozat, akkor mit állíthatunk az (a_n+b_n) sorozat konvergenciájáról?
14. Ha (a_n) és (b_n) konvergens sorozat, akkor mit állíthatunk az (a_nb_n) sorozat konvergenciájáról?
15. Adjon meg sorozatokra vonatkozóan nevezetes határértékeket.
16. Mit ért számtani, ill. mértani sorozaton?
17. Ismertesse a kamatos kamat számítás lényegét.
18. Mit nevezünk egyszerű kamatnak?
19. Mi az a kamattényező?
20. Mi az a járadékszámítás?
21. Mit értünk infláció alatt?
22. Mondja el a jövőérték-számítás lényegét.
23. Ismertesse a beruházási számítások esetében alkalmazott módszereket, képleteket.
24. Döntse el, hogy az alábbi állítások közül melyek igazak, ill. hamisak.
 - a. Egy sorozat maximuma és minimuma mindig létezik, supremuma ill. infimuma azonban nem.
 - b. Azt mondjuk, hogy egy sorozat divergens, ha nem konvergens.
 - c. A határérték mindig egyértelmű.
 - d. Minden konvergens sorozat korlátos.
 - e. Ha egy sorozat korlátos, akkor konvergens is.
 - f. Az $a_n = (-1)^n$ sorozat korlátos és konvergens, határértéke az 1.
 - g. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e^{-1}$
 - h. Konvergens sorozat skalárszorosának a határértékei a sorozat határértékének a skalárszorosa.
 - i. Ha egy számtani sorozat differenciája kisebb mint 0, akkor a sorozat szigorúan monoton növekvő.
 - j. Ha a mértani sorozat kvóciense 0, akkor a mértani sorozat minden tagja 0-val egyenlő.
 - k. A mértani sorozat első „n” tagjának az összege: $S_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}$

5. FÜGGVÉNYEK HATÁRÉRTÉKE ÉS FOLYTONOSSÁGA

5.1. Függvények határértéke véges helyen

A sorozat határértékének segítségével bevezetjük a függvény határértékének a fogalmát. „A határérték és az ezzel kapcsolatos vizsgálatok eredményei lehetővé teszik például annak vizsgálatát, hogy bizonyos függvényekkel leírható gazdasági folyamatok hogyan függnek az ezt befolyásoló tényezőktől, és hogy milyen körülmények között érhető el a – valamilyen szempontból – legjobb eredmény” (Denkinger, 1997).

Legyen $D \subseteq \mathbf{R}$ és $f: D \rightarrow \mathbf{R}$ adott függvény. Tekintsük az $(x_n) \in D$ sorozatot. Ekkor létrehozhatjuk az $(f(x_n))$ sorozatot, amelyet a függvényértékek sorozatának nevezünk. Legyen az $x_0 \in \mathbf{R}$ adott, amelynek környezetében az f függvény értelmezve van. Az f értelmezési tartományában adjunk meg egy x_0 -hoz konvergáló sorozatot, és vizsgáljuk meg, hogy a függvényértékek sorozata konvergens-e.

Definíció. Legyen $D \subseteq \mathbf{R}$ és $f: D \rightarrow \mathbf{R}$ adott függvény és x_0 a D halmaz torlódási pontja. Azt mondjuk, hogy az f **függvény határértéke az x_0 -ban** A , ha minden $x_n \in D$

$(x_n \neq x_0)$, $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n) = x_0$ sorozat esetén az $(f(x_n))$ sorozat konvergens és $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$.

Jele: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, és ezt úgy olvassuk, hogy “limesz x tart x_0 esetén $f(x)$ egyenlő A -val”

Megjegyzés. Fontos, hogy csak $x_n \neq x_0$ elemeken tekintjük az f értékét. Az $f(x_0)$ értéke nem befolyásolja a $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ értékét. Az x_0 helyen a határérték nemcsak véges lehet, hanem $\pm \infty$ is.

Tétel. Legyen $D \subseteq \mathbf{R}$, $f: D \rightarrow \mathbf{R}$ és x_0 legyen torlódási pontja mind az $]x_0, \infty[\cap D$ -nek, mind pedig az $]-\infty, x_0[\cap D$ -nek. Ekkor az f függvénynek pontosan akkor létezik a határértéke az x_0 -ban, ha itt létezik a bal, ill. jobb oldali határértéke, és ezek egyenlők. Ez a közös határérték lesz az f függvény x_0 -beli határértéke.

Definíció.

- (1) Legyen $D \subseteq \mathbf{R}$, $f: D \rightarrow \mathbf{R}$, $x_0 \in \mathbf{R}$ torlódási pontja az $]x_0, +\infty[\cap D$ -nek. Az f függvénynek x_0 -ban létezik a **jobb oldali határértéke**, ha az f függvény $]x_0, +\infty[\cap D$ -re való leszűkítésének létezik a határértéke. Jele:

$$\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = y_0$$

- (2) Legyen $D \subseteq \mathbf{R}$, $f: D \rightarrow \mathbf{R}$, $x_0 \in \mathbf{R}$ torlódási pontja az $]-\infty, x_0[\cap D$ -nek. Az f függvénynek x_0 -ban létezik a **bal oldali határértéke**, ha az f függvény $]-\infty, x_0[\cap D$ -re való leszűkítésének létezik a határértéke. Jele:

$$\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = y_0$$

5.2. Határérték a végtelenben

Definíció.

- (1) Legyen $D \subseteq \mathbf{R}$ felülről nem korlátos halmaz, $f: D \rightarrow \mathbf{R}$ adott függvény, továbbá $x_n \in D$ olyan sorozat, amelyre $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n) = \infty$. Ha az $(f(x_n))$ sorozat minden ilyen tulajdonságú (x_n) sorozat esetén konvergens és $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$, akkor azt

mondjuk, hogy az f függvénynek is létezik a **határértéke a végtelenben** és ez A -val egyenlő. Jele: $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$

- (2) Legyen $D \subseteq \mathbf{R}$ felülről nem korlátos halmaz, $f: D \rightarrow \mathbf{R}$ adott függvény, továbbá $x_n \in D$ olyan sorozat, amelyre $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n) = \infty$. Ha az $(f(x_n))$ sorozat minden ilyen tulajdonságú (x_n) sorozat esetén konvergens és $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$, akkor azt mondjuk, hogy az f függvénynek is létezik a **határértéke a mínusz végtelenben** és ez A -val egyenlő. Jele: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A$

5.3. A függvény folytonossága

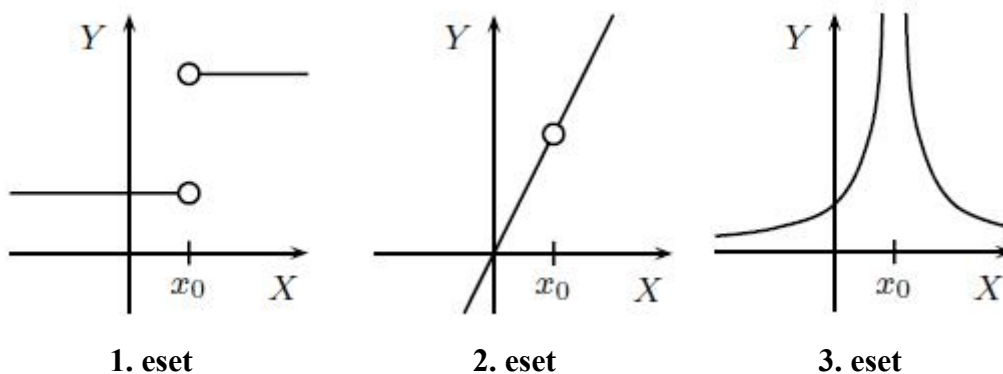
Definíció. Legyen $D \subseteq \mathbf{R}$, $f: D \rightarrow \mathbf{R}$ adott függvény és $x_0 \in D$ torlódási pontja D -nek. Az f **függvény folytonos az x_0 -ban**, ha f -nek létezik véges határértéke x_0 -ban és az megegyezik a függvény helyettesítési értékével, azaz $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

Ha $x_0 \in D$ nem torlódási pontja D -nek, akkor x_0 -ban az f -et folytonosnak tekintjük.

Ha az f függvény a $K \subseteq D$ halmaz minden pontjában folytonos, akkor azt mondjuk, hogy az f függvény folytonos a K halmazon. Ha az f függvény a D halmaz minden pontjában folytonos, akkor azt mondjuk, hogy az f folytonos az értelmezési tartományán, vagy röviden: f folytonos függvény.

Megjegyzés. Ha az f függvény az értelmezési tartományának valamely pontjában nem folytonos, akkor a függvénynek ott szakadási helye van.

Definíció. Az f függvénynek x_0 -ban **elsőfajú szakadása** van, ha x_0 -ban szakadása van és itt létezik a jobb és bal oldali határértéke, de nem egyezik meg (43. ábra, 1. eset). Ha még az is teljesül, hogy a jobb és bal oldali határérték megegyezik, akkor ez a **szakadás megszüntethető** (43. ábra, 2. eset). A függvény **szakadási helye másodfajú**, ha nem elsőfajú (43. ábra, 3. eset).



43. ábra: A függvény szakadásának alapesetei

Forrás: Saját szerkesztés

5.4. Ellenőrző kérdések

1. Mit értünk egy függvény torlódási pontján?
2. Hogyan definiálná egy függvény határértékét az értelmezési tartományának egy adott pontjában?
3. Mit értünk egy függvény $x=x_0$ pontbeli jobb, ill. bal oldali határértékén?
4. Mikor mondjuk, hogy egy függvény folytonos az $x=x_0$ helyen?
5. Mit értünk a függvény tágabb értelemben vett határértékén? (Mikor mondjuk, hogy egy függvénynek az $x=x_0$ helyen tágabb értelemben vett határértéke: ∞ ?)
6. Mikor mondjuk, hogy egy függvénynek a ∞ -ben vett határértéke az A valós szám?
7. Mikor mondjuk, hogy egy függvény folytonos az $x=x_0$ helyen?
8. Mit értünk elsőfajú, ill. másodfajú szakadású helyen?
9. Döntse el, hogy az alábbi állítások közül melyek igazak és hamisak.
 - a) A függvény x_0 helyen vett határértéke csak véges lehet.
 - b) Ha az f függvény az értelmezési tartományának valamely pontjában nem folytonos, akkor ott a függvénynek szakadási helye van.

6. DIFFERENCIÁLSZÁMÍTÁS

6.1. A differencia- és a differenciálhányados fogalma

A matematikai analízis egyik legfontosabb fogalma a differenciálhányados, ebben a fejezetben ezzel a fogalommal ismerkedünk meg. A differenciálhányados szerepe mind a matematika, mind pedig más tudományok, így a mezőgazdasági kutatások területén is alapvető fontosságú.

Egy klasszikus példa a fizikából: az útfüggvény differenciálhányados függvénye a sebességfüggvény. A közgazdaságtanból: a határtermék a termelési függvény differenciálhányadosa.

Fogadjuk el egy adott mezőgazdasági nagyüzem vonatkozásában, hogy a kukorica termésátlaga ($f(x)$) és a felhasznált vegyes műtrágya mennyisége (x) közötti kapcsolatot az $f(x) = 5 + 4x - x^2$ függvény írja le. Vizsgáljuk meg, hogyan változik a hektáronkénti termés mennyisége $x_0 = 1$ tonna vegyes műtrágya felhasználásától való eltérés esetén, az eltérés függvényében. Tekintsük e célból az $x_0 = 1$ környezetének egy x pontját, és jelöljük az $x - x_0$ különbséget h -val (ezt a h -t a független változó növekményének nevezzük) és az x pontbeli $f(x)$ függvényérték, és az $f(x_0)$ különbségét pedig $H(h)$ -val (ez a $H(h)$ függő változó növekménye). Példánkban a $H(h) = f(1+h) - f(1) = [5 + 4(1+h) - (1+h)^2] - (5 + 4 \cdot 1 - 1^2) = 5 + 4 + 4h - 1 - 2h - h^2 - 8 = 2h - h^2$. A h konkrét értékének megadásával már kiszámítható a várható termésátlag változás is. Például $h = 0,2$ mellett $H(0,2) = 2 \cdot 0,2 - 0,2^2 = 0,396$, ami azt jelenti, hogy 0,2 t-val növelve a műtrágya mennyiségét 396 kg-mal változik meg a termésátlag minden más körülmény változatlansága mellett. Ha a műtrágya mennyiség változásának egységre jutó változását is meg akarjuk határozni, akkor képezni kell a $W(h) = \frac{H(h)}{h}$ ($h \neq 0$) hányadost.

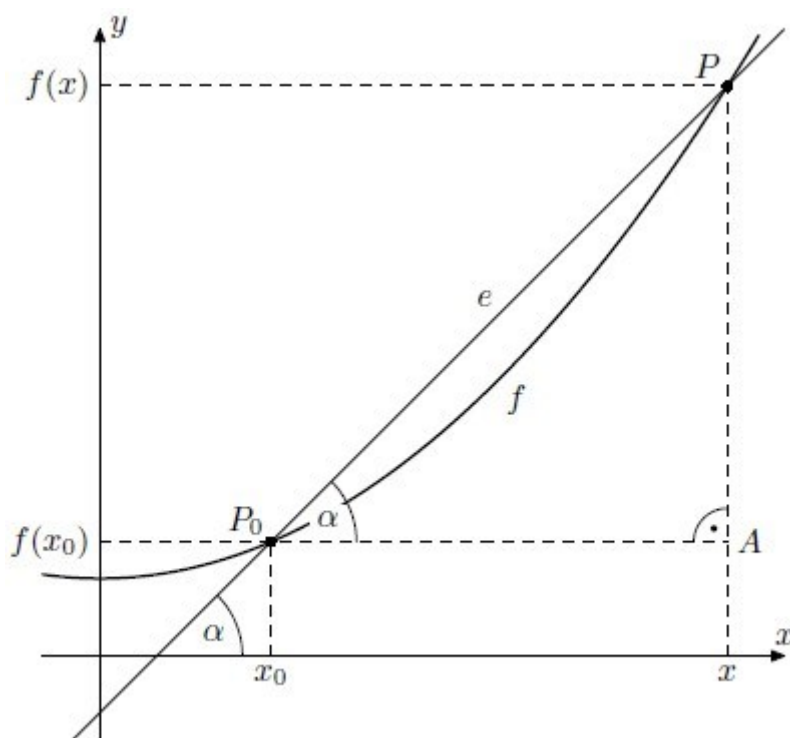
Ez szintén egy függvény, amelyet differenciahányados függvénynek nevezünk. Az ábráról leolvasható, hogy a differenciahányados geometriailag az x_0 és x abszcisszájú pontokon átmenő szelő iránytangensét jelenti. Ha azonban az $x_0 = 1$ pontban szeretnénk meghatározni a műtrágya mennyiség változásának egységre jutó változását, akkor ez problémát jelenthet, hiszen a $W(h)$ függvény nincs értelmezve a $h = 0$ -nál. Meghatározhatjuk azonban a W függvény határértékét a 0-ban:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{H(h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2h - h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(2 - h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 2 - h = 2,$$

ami éppen a fenti kérdésre ad választ. A matematikában ezt a határértéket a függvény adott x_0 pontjához tartozó differenciálhányadosának nevezzük.

Szabatosan a következőképpen fogalmazhatjuk meg a differencia- és differenciálhányados fogalmát.

Tekintsük az f függvény grafikonját és a grafikon x_0 és x ($x_0 \neq x$) abszcisszájú pontjain áthaladó „e” egyenest. Ezt az egyenest nevezzük a függvény $P_0(x_0, f(x_0))$ és $P(x, f(x))$ pontjaihoz tartozó szelőnek (44. ábra).



44. ábra: A differenciahányados geometriai szemléltetése

Forrás: Bíró és Vincze (2000)

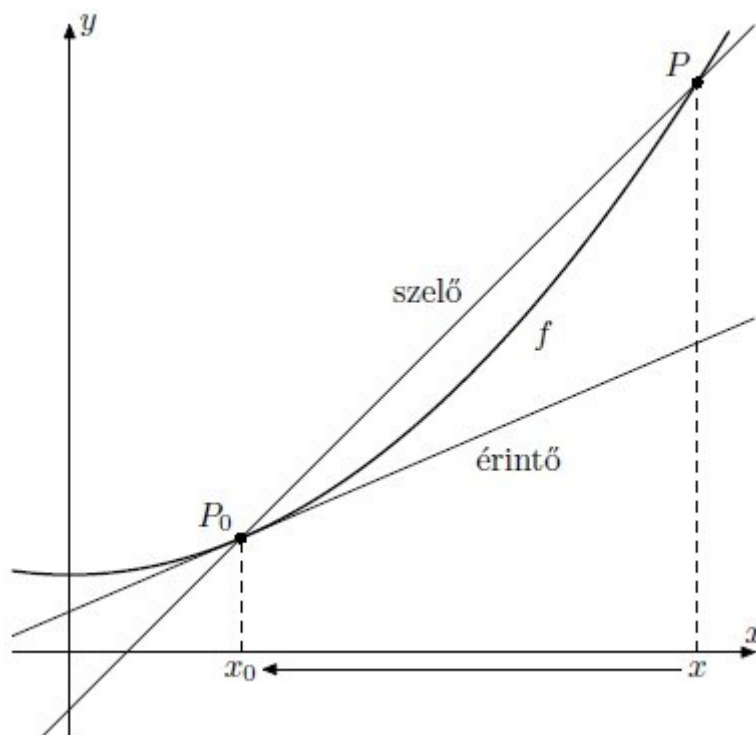
Definíció. Legyen $H \subseteq \mathbf{R}$. Az x_0 a H **belső pontja**, ha van az x_0 -nak olyan D nyílt környezete, melyre $D \subseteq H$.

Definíció. Legyen $H \subseteq \mathbf{R}$, $x_0 \in H$ belső pont, $f: H \rightarrow \mathbf{R}$. Az f függvény x_0 -beli differenciahányados függvénye a $d(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$, $x \neq x_0$ függvény.

Megjegyzés. A differenciahányados geometriai jelentése a két ponton átmenő szelő meredeksége (45. ábra).

Rögzítsük az x_0 pontot. Ha x_0 rögzített és x tetszőleges, akkor a szelő meredeksége függ az x megválasztásától. Közelítsünk az x ponttal az x_0 -hoz.

Ha létezik a $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ határérték, akkor ez az f függvény $(x_0, f(x_0))$ pontjához tartozó érintő meredeksége (45. ábra).



45. ábra: A differenciálhányados geometriai szemléltetése

Forrás: Bíró és Vincze (2000)

Definíció. Legyen $f: H \rightarrow \mathbf{R}$ és $x_0 \in H$ belső pont. Azt mondjuk, hogy az f **függvény differenciálható (deriválható) az x_0 pontban**, ha a differenciálhányados függvénynek létezik az x_0 pontban véges határértéke. A $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$ számot az f függvény x_0 -beli differenciálhányadosának (**deriváltjának**) nevezzük.

Megjegyzés.

- (1) Ha a $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ határérték nem létezik, akkor azt mondjuk, hogy az f függvény nem differenciálható x_0 -ban.
- (2) Ha az $f: H \rightarrow \mathbf{R}$ függvény a $D \subseteq H$ halmaz minden pontjában differenciálható, akkor azt mondjuk, hogy az f függvény differenciálható a D halmazon. Ha az f függvény az értelmezési tartományának minden pontjában differenciálható, akkor az $f': H \rightarrow \mathbf{R}$ függvény az f differenciálhányados-függvénye vagy derivált-függvénye.
- (3) A deriváltfüggvény jelölésére gyakran használják a $\frac{df}{dx}$ jelölést is.
- (4) Az f függvény x_0 -beli deriváltja geometriai értelemben az x_0 -beli érintőjének a meredekségével egyenlő. A derivált segítségével az x_0 -beli érintő egyenlete az alábbiak szerint adható meg:

$$y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0).$$

Vizsgáljuk meg a folytonosság és a differenciálhatóság kapcsolatát.

Tétel. Ha az $f: H \rightarrow \mathbf{R}$ függvény differenciálható $x_0 \in H$ -ban, akkor f folytonos is x_0 -ban.

Megjegyzés. A tétel megfordítva nem igaz, a folytonosságból nem következik a differenciálhatóság.

6.2. Deriválási szabályok

A következőtételek lehetővé teszik, hogy a függvények differenciálhányadosainak meghatározását elemi függvények differenciálhányadosaira vezessük vissza.

Tétel. Ha az f és g függvény differenciálható x_0 -ban, akkor $f + g$ is differenciálható x_0 -ban, és $(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$.

Tétel. Ha az f és g függvény differenciálható x_0 -ban, akkor $f \cdot g$ is differenciálható x_0 -ban, és $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$.

Következmény. Ha az f függvény az értelmezési tartomány x_0 pontjában differenciálható és $c \in \mathbf{R}$, akkor a $c \cdot f$ függvény is differenciálható az x_0 pontban és

$$(c \cdot f)'(x_0) = c \cdot f'(x_0).$$

Tétel. Ha f és g differenciálható x_0 -ban és $g(x_0) \neq 0$, akkor $\frac{f}{g}$ is differenciálható x_0 -

$$\text{ban és } \left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g'(x_0)}{g^2(x_0)}.$$

Tétel. Az összetett függvény deriválási szabálya. Ha $H_1, H_2 \subseteq \mathbf{R}$, $f: H_1 \rightarrow H_2$, $g: H_2 \rightarrow \mathbf{R}$. Legyen $x_0 \in H_1$ belső pont, és tegyük fel, hogy $y_0 = f(x_0) \in H_2$ belső pont. Ekkor, ha f differenciálható x_0 -ban és g differenciálható y_0 -ban, akkor $g \circ f$ is differenciálható x_0 -ban, és $(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$.

Megjegyzés. Az előző tételek kettőnél több tagú kifejezésekre is alkalmazhatók. Például három tényező esetén a következő módon:

$$\begin{aligned} (1) \quad & (f + g + h)'(x_0) = ((f + g) + h)'(x_0) = \\ & = (f + g)'(x_0) + h'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0) + h'(x_0). \\ (2) \quad & (f \cdot g \cdot h)'(x_0) = ((f \cdot g) \cdot h)'(x_0) = (f \cdot g)'(x_0) \cdot h(x_0) + (f \cdot g)(x_0) \cdot h'(x_0) = \\ & = (f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)) \cdot h(x_0) + f(x_0) \cdot g(x_0) \cdot h'(x_0) = \\ & = f'(x_0) \cdot g(x_0) \cdot h(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0) \cdot h(x_0) + f(x_0) \cdot g(x_0) \cdot h'(x_0). \\ (3) \quad & (f(g(h(x_0))))' = f'(g(h(x_0))) \cdot g'(h(x_0)) \cdot h'(x_0). \end{aligned}$$

Tétel. Az inverz függvény deriválási szabálya. Ha az $f:]a, b[\rightarrow]c, d[$ kölcsönösen egyértelmű folytonos függvény differenciálható $a < x_0 < b$ pontban, és $f'(x_0) \neq 0$, akkor az $f^{-1}:]c, d[\rightarrow]a, b[$ inverz függvény differenciálható $y_0 = f(x_0)$ pontban, és

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$$

6.3. Az elemi függvények deriváltjai

Az elemi függvények differenciálhányadosaira vonatkozó szabályokat egyrészt a definíció felhasználásával, másrészt pedig a már megismert általános összefüggések alapján vezetjük le (Banach, 1967; Denkinger és Gyurkó, 1987).

Tétel. Tetszőleges r racionális szám esetén az $f(x) = x^r$ hatványfüggvény az értelmezési tartománya minden 0-tól különböző pontjában differenciálható, és $(x^r)' = r \cdot x^{r-1}$.

Megjegyzés. A tétel irracionális kitevő esetén is érvényes.

Tétel. Az $f(x) = \ln(x)$ és a $g(x) = \log_a(x)$ függvények az értelmezési tartományuk minden pontjában differenciálhatók, és $[\ln(x)]' = \frac{1}{x}$, valamint $[\log_a(x)]' = \frac{1}{x \cdot \ln(a)}$.

Tétel. Az $f(x) = a^x$ és $g(x) = e^x$ függvények az értelmezési tartományuk minden pontjában differenciálhatók, és $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$, valamint $(e^x)' = e^x$.

Tétel. Az $f(x) = \sin(x)$ és $g(x) = \cos(x)$ függvények az értelmezési tartományuk minden pontjában differenciálhatók, és $[\sin(x)]' = \cos(x)$ és $[\cos(x)]' = -\sin(x)$

Tétel. Az $f(x) = \operatorname{tg} x$ és $g(x) = \operatorname{ctg} x$ függvények az értelmezési tartományuk minden pontjában differenciálhatók, és $[\operatorname{tg}(x)]' = \frac{1}{[\cos(x)]^2}$, illetve $[\operatorname{ctg}(x)]' = -\frac{1}{[\sin(x)]^2}$.

Bronstejn és Szemengyajev (1987) alapján az elemi függvények deriváltjai a következőképpen adhatók meg:

- | | | |
|------|-----------------------------------|--|
| (1) | $f(x) = c$ | $f'(x) = 0$ |
| (2) | $f(x) = x^n$ | $f'(x) = n \cdot x^{n-1}$ |
| (3) | $f(x) = e^x$ | $f'(x) = e^x$ |
| (4) | $f(x) = a^x$ | $f'(x) = a^x \cdot \ln(a)$ |
| (5) | $f(x) = \ln(x)$ | $f'(x) = \frac{1}{x}$ |
| (6) | $f(x) = \log_a(x)$ | $f'(x) = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\ln(a)}$ |
| (7) | $f(x) = \sin(x)$ | $f'(x) = \cos(x)$ |
| (8) | $f(x) = \cos(x)$ | $f'(x) = -\sin(x)$ |
| (9) | $f(x) = \operatorname{tg}(x)$ | $f'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$ |
| (10) | $f(x) = \operatorname{ctg}(x)$ | $f'(x) = -\frac{1}{\sin^2(x)}$ |
| (11) | $f(x) = \arcsin(x)$ | $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, x < 1$ |
| (12) | $f(x) = \arccos(x)$ | $f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, x < 1$ |
| (13) | $f(x) = \operatorname{arctg}(x)$ | $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ |
| (14) | $f(x) = \operatorname{arcctg}(x)$ | $f'(x) = -\frac{1}{1+x^2}$ |

6.4. A L'Hospital-szabály

A függvények határértékének megállapítása nem mindig egyszerű feladat, de vannak olyan esetek, amikor a differenciálszámítás segítségével egyszerűsíthető a probléma.

Tétel. (L'Hospital-szabály): Legyen $-\infty \leq a < b \leq +\infty$, $f, g:]a, b[\rightarrow \mathbf{R}$, és legyen $a \leq x_0 \leq b$. Ha f és g differenciálható függvények $]a, b[\setminus \{x_0\}$ -on, $g'(x) \neq 0$ minden

$x \in]a, b[$ -re és

$$(1) \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0 = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \text{ vagy } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \pm\infty = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x), \text{ valamint}$$

$$(2) \text{ létezik } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A \text{ véges, vagy végtelen határérték,}$$

$$\text{akkor } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$$

Megjegyzés. A L'Hospital-szabály a $\frac{0}{0}$, vagy $\frac{\infty}{\infty}$ alakú határértékek meghatározására használható. Megfelelő helyettesítéssel viszont más alakú függvények határértékének meghatározása is elvégezhető:

$$(1) 0 \cdot \infty \text{ alakú: ha } f, g \text{ olyan, hogy } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0 \text{ } \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \pm\infty, \text{ akkor}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}, \text{ ami már } \frac{0}{0} \text{ alakú, hiszen ha } \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \pm\infty, \text{ akkor}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{g(x)} = 0,$$

$$(2) \infty - \infty \text{ alakú: ha } f, g \text{ olyan, hogy } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty \text{ } \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty, \text{ akkor}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) - g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(f(x) - g(x))/(f(x) + g(x))}{\frac{1}{f(x) + g(x)}}, \text{ ahol a nevező határértéke}$$

végtelen. Ha a számlálónak van határértéke és véges, akkor a tört határértéke 0, ha a számláló határértéke végtelen, akkor alkalmazható a L'Hospital-szabály.

6.5. Magasabbrendű deriváltak

Definíció. Legyen $H \subseteq \mathbf{R}$, $f: H \rightarrow \mathbf{R}$ differenciálható, és tegyük fel, hogy az $x_0 \in H$ pontban az $f': H \rightarrow \mathbf{R}$ deriváltfüggvény differenciálható. Ekkor azt mondjuk, hogy az f **kétszer differenciálható** x_0 -ban, és az f második deriváltja az $x_0 \in H$ -ban $f''(x_0) = (f'(x_0))'$. Ha az f a H minden pontjában kétszer differenciálható, akkor f -et kétszer differenciálható függvénynek nevezzük, és $f'': H \rightarrow \mathbf{R}$ függvény az f második deriváltfüggvénye.

Megjegyzés. A **magasabbrendű deriváltakat** az alábbi rekurzióval értelmezzük: amennyiben az $f^{(n)}: H \rightarrow \mathbf{R}$ n -edik deriváltfüggvény létezik és differenciálható x_0 -ban, akkor $f^{(n+1)}(x_0) = (f^{(n)}(x_0))'$ az f függvény x_0 -beli $(n+1)$ -edik deriváltja. Ha az f függvény a H halmaz minden pontjában $(n+1)$ -szer differenciálható, akkor f $(n+1)$ -szer

differentiálható függvény.

Megjegyzés. Az f függvény végtelen sokszor differentiálható az x_0 -ban, ha minden n pozitív egészre létezik az n -edik deriváltja.

Megjegyzés. f 0-adik deriváltja: $f^{(0)} = f$. További jelölések: $f^{(1)} = f'$, $f^{(2)} = f''$, $f^{(3)} = f'''$.

Tétel. Legyen $H \subseteq \mathbf{R}$, $f: H \rightarrow \mathbf{R}$, $]a, b[\subset H$, f differentiálható $]a, b[-n$.

- (1) f monoton nő $]a, b[-n \Leftrightarrow f'(x) \geq 0$ minden $x \in]a, b[-re$,
- (2) f monoton csökken $]a, b[-n \Leftrightarrow f'(x) \leq 0$ minden $x \in]a, b[-re$,
- (3) f szigorúan monoton nő $]a, b[-n$, ha $f'(x) \geq 0 \forall x \in]a, b[-re$, és nincs olyan $]c, d[\subset]a, b[$ (részintervallum), melyre $f'(x) = 0$ minden $x \in]c, d[-re$,
- (4) f szigorúan monoton csökken az $]a, b[-n$, ha $f'(x) \leq 0, \forall x \in]a, b[-re$, és nincs olyan $]c, d[\subset]a, b[$, melyre $f'(x) = 0$ minden $x \in]c, d[-re$,
- (5) f konstans $]a, b[-n \Leftrightarrow$ ha $f'(x) = 0$ minden $x \in]a, b[-re$.

Tétel. Legyen $H \subseteq \mathbf{R}$, $f: H \rightarrow \mathbf{R}$, $]a, b[\subset H$ és f differentiálható $]a, b[-n$.

- (1) f konvex $]a, b[-n \Leftrightarrow f'$ monoton nő $]a, b[-n$,
- (2) f konkáv $]a, b[-n \Leftrightarrow f'$ monoton csökken $]a, b[-n$.

Tétel. Legyen $H \subseteq \mathbf{R}$, $f: H \rightarrow \mathbf{R}$, $]a, b[\subset H$, f kétszer differentiálható $]a, b[-n$.

- (1) f konvex $]a, b[-n \Leftrightarrow f''(x) \geq 0$ minden $x \in]a, b[-re$,
- (2) f konkáv $]a, b[-n \Leftrightarrow f''(x) \leq 0$ minden $x \in]a, b[-re$.

Tétel. Legyen $H \subseteq \mathbf{R}$, $f: H \rightarrow \mathbf{R}$ $(n + 1)$ -szer differentiálható függvény. Ha x_0 a H belső pontja úgy, hogy

$f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(n)}(x_0) = 0$, de $f^{(n+1)}(x_0) \neq 0$, akkor

- (1) ha n páros, akkor x_0 inflexiós pont,
- (2) ha n páratlan, akkor x_0 szélsőérték hely, és ha $f^{(n+1)}(x_0) > 0$, akkor x_0 minimum hely, ha $f^{(n+1)}(x_0) < 0$, akkor x_0 maximum hely.

Tétel. Legyen $H \subseteq \mathbf{R}$, $f: H \rightarrow \mathbf{R}$ differentiálható függvény. Ha $f'(x_0) = 0$ és f' az x_0 -ban előjelet vált, akkor az x_0 az f függvény szélsőérték helye.

Tétel. Legyen $H \subseteq \mathbf{R}$, $f: H \rightarrow \mathbf{R}$ kétszer differentiálható függvény. Ha $f'(x_0) = 0$ és f'' az x_0 -ban előjelet vált, akkor az x_0 pontban az f függvénynek inflexiós pontja van.

6.6. Teljes függvényvizsgálat

A valós életből vett törvényszerűségek vizsgálatánál és ezen törvényszerűségek kvantitatív formában való megfogalmazásánál gyakran kell függvényeket alkalmazni. Többéves tapasztalati, vagy mesterségesen beállított kísérletek által szolgáltatott adatokból regresszióanalízis segítségével az összefüggéseket bizonyos pontossággal jellemző függvények képleteit határozzuk meg. Mind a jelenséget leíró függvény kiválasztásához, mind a jelenség elméleti elemzéséhez ismernünk kell az egyes függvények jellemzőit. Ezen jellemzők meghatározásához használhatjuk fel a határértékszámítás és a differentiálszámítás eszközeit, melyek eredményeként eljuthatunk a függvény grafikonjához.

A grafikonok szemléltetik a függvények tulajdonságait, amelyek által képet kaphatunk a vizsgált jelenség sajátosságairól. Legyen adott az $y = f(x)$ függvény. Ennek a függvénynek a vizsgálatán - mint az előzőekből is kitűnik - olyan jellemzők meghatározását értjük, amelyek segítségével pontosan felrajzolható a függvény grafikonja, amely az adott függvény lényegi vonásait is közelebb hozza számunkra. Függvényvizsgálaton azt értjük, hogy módszeresen megállapítjuk a függvény tulajdonságait az alábbiakban felsorolt szempontok alapján:

- (1) Az értelmezési tartomány meghatározása.
- (2) A függvény zérushelyeinek a meghatározása.
- (3) A függvény határértékének a vizsgálata (a végtelenben, vagy az értelmezési tartomány végpontjaiban, és a szakadási helyeken).
- (4) Megkeressük a függvény lehetséges szélsőérték helyeit.
- (5) Megkeressük a függvény lehetséges inflexiós pontjait.
- (6) A függvény lehetséges szélsőérték helyei, lehetséges inflexiós pontjai, szakadási helyei segítségével táblázatot készítünk. A deriváltak segítségével meghatározzuk a függvény menetét, konvexitási intervallumait. A táblázatból leolvassuk, hogy hol vannak a függvénynek szélsőérték helyei és inflexiós pontjai. Ha vannak, akkor meghatározzuk azok koordinátáit.
- (7) A táblázat, a szakadási helyek és a zérushelyek segítségével megrajzoljuk a függvényt.
- (8) Az ábráról leolvassuk a függvény értékkészletét.

6.7. Elaszticitás

Legyen az $y = f(x)$ függvény értelmezési tartománya és értékkészlete a pozitív számok halmaza. Feleltessük meg az (x,y) koordináta-rendszer első síknegyede pontjainak az (u,v) koordináta-rendszer azon pontjait, melyre

$$u = \ln(x) \text{ és } v = \ln(y).$$

Az új koordináta-rendszerben ábrázolva az eredeti függvényünket a $v = g(u)$ függvény képét kapjuk meg. A $v = g(u)$ függvény u_0 helyen vett differenciálhányadosát az eredeti f függvény x_0 helyéhez tartozó **elaszticitásának** nevezzük, és a jele: E . Az E -t a definíció alapján a következőképpen fejezhetjük ki. Mivel

$$v = \ln(y) \Rightarrow v = \ln(f(x)) = \ln(f(e^u)),$$

Így v -t, mint összetett függvényt deriválva kapjuk E -t:

$$E(x) = \frac{1}{f(e^u)} \cdot f'(e^u) \cdot e^u,$$

felhasználva, hogy $e^u = x$, kapjuk, hogy:

$$E(x) = \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x) \cdot x = \frac{x}{f(x)} \cdot f'(x),$$

Ha meg akarjuk kapni az elaszticitás szemléletes jelentését, az E-t az alábbiak szerint alakítsuk át:

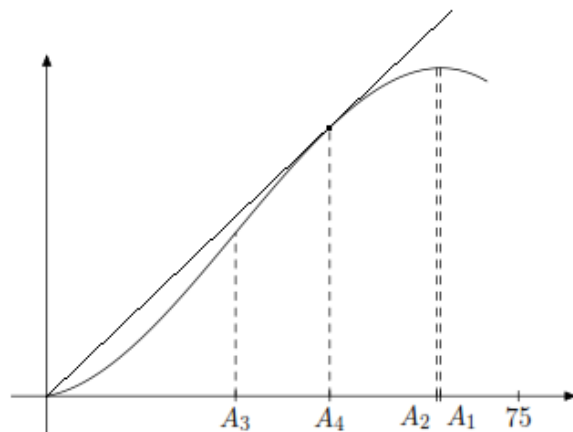
$$E(x) = \frac{x}{f(x)} \cdot f'(x) = \frac{x}{f(x)} \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}{\frac{x - x_0}{x}}.$$

Ebből leolvasható, hogy az elaszticitás egy adott f függvény valamely x pontjában a függő változó relatív megváltozása és a független változó relatív megváltozása hányadosának a határértéke $x \rightarrow x_0$ esetén.

Amennyiben ismerjük a független változó relatív megváltozását (pl. százalékban), akkor az elaszticitás segítségével megbecsülhető a függő változó megváltozása. Ha tehát a független változó α %-kal megváltozik, akkor a függő változó közelítően $\alpha \cdot E(x)$ %-kal változik. Az elaszticitás szemléletes jelentéséből az következik, hogy ez a becslés annál pontosabb, minél kisebb a független változó megváltozása.

6.8. Ráfordítás - hozam függvények elemzése

Egy termék előállítása általában több tényezőtől függ. Ha ezeket a befolyásoló tényezőket értékükkel helyettesítjük, és ezekhez rendeljük hozzá a várható hozam értékét, akkor azt mondjuk, hogy ez a függvény a ráfordítás-hozam függvény (Tóth és Horváth, 1991). Egy ilyen függvényt tapasztalati úton, kísérletek kiértékelése alapján határozhatunk meg. Tekintsük a 46. ábrán látható ráfordítás-hozam függvényt.



46. ábra: A ráfordítás-hozam függvény alakja és nevezetes pontjai

Forrás: Tóth és Horváth (1991)

Ezzel a függvénnyel kapcsolatban a legfontosabb kérdéseket az alábbiakban ismertetésre kerülő pontokban foglalhatjuk össze:

- (1) Hol lesz maximális a hozam értéke? A függvény ismeretében a válasz egyszerű, ott, ahol $f'(x) = 0$ és $f''(x) < 0$. Ezt a pontot a beruházás során akkor célszerű elérni, ha bármilyen áron maximális hozamra törekszünk. A 46. ábrán ezt a helyet A_1 -gyel jelöltük.
- (2) Hol ad 1000 Ft plusz ráfordítás 1000 Ft plusz termelési értéket? A nyereség akkor lesz 0, ha a függvény meredeksége éppen 1, azaz $f'(x) = 1$. A 46. ábrán ezt

a helyet A_2 -vel jelöltük.

- (3) Hol lesz maximális az 1000 Ft ráfordításra eső termelési növekedés? Ez akkor lesz maximális, ha f' maximális, azaz $f''(x) = 0$, és f'' az adott pontban előjelet vált. A kapott megoldást mindenképpen célszerű meghaladni, mert ekkor növekszik leggyorsabban a bevétel (46. ábra, A_3 hely).
- (4) Mikor lesz az átlagos hatékonyság maximális? Átlagos hatékonyságon az addigi összes termelési érték ($f(x)$) és az összes ráfordítás (x) hányadosát értjük, azaz $\frac{f(x)}{x}$ hányadosot értjük. A 46. ábrán látható, hogy ez a hányados az origótól az $(x, f(x))$ pontokhoz húzott szelő meredeksége. Ez akkor a legnagyobb, ha a szelő éppen érinti a függvény grafikonját. Mivel az érintő meredeksége az $f'(x)$, ezért $f'(x) = \frac{f(x)}{x}$. Azt a helyet (x érték) kell tehát megkeresni, ahol teljesül a fenti egyenlőség. A 46. ábrán ezt a helyet az A_4 jelöli.

6.9. Ellenőrző kérdések

1. Definiálja a differencia- és a differenciáhányados fogalmát és adja meg ezek geometriai jelentését!
2. Hogyan deriváljuk az $f+g$ függvényt az x_0 pontban, ha az f és g függvény is differenciálható x_0 -ban?
3. Hogyan deriváljuk az $f \cdot g$ függvényt az x_0 pontban, ha az f és g függvény is differenciálható x_0 -ban?
4. Hogyan deriváljuk az f/g függvényt az x_0 pontban, ha az f és g függvény is differenciálható x_0 -ban?
5. Adja meg az elemi függvény deriválási szabályát.
6. Írja fel az elemi függvények deriváltjait!
7. Mi az a L' Hospital szabály, mire alkalmazzuk?
8. Mikor mondjuk, hogy egy függvény kétszer differenciálható?
9. Mit értünk magasabbrendű deriváltak alatt?
10. Milyen kapcsolat van a függvény elsőrendű deriváltja és monotonitása között?
11. Milyen kapcsolat van a függvény másodrendű deriváltja és a monotonitása között?
12. Ismertesse a teljes függvényvizsgálat lépéseit!
13. Ismertesse a deriváltak alkalmazását a függvények teljes vizsgálatánál!
14. Mi az az elaszticitás?
15. Döntse el, hogy az alábbi állítások közül melyek igazak ill. hamisak.
 - a) A differenciahányados geometriailag két ponton átmenő szelő meredeksége.
 - b) Ha az f függvény differenciálható az értelmezési tartományának x_0 pontjában, akkor ott folytonos is.
 - c) Ha az f függvény folytonos az értelmezési tartományának x_0 pontjában, akkor ott f_0 differenciálható is.
 - d) Az L' Hospital szabály a $\frac{0}{0}$ alakú határértékek meghatározására szolgál.

7. MÁTRIXOK ÉS DETERMINÁNSOK

7.1. A mátrix fogalma

A gyakorlatban naponta sok-sok számadattal kell dolgoznunk. Ezeket az adatokat legtöbbször célszerű - az áttekinthetőség kedvéért – táblázatba rendezni. Például egy egyetem elsőéves agrármérnök hallgatói 1. csoportjának az első féléves vizsgákon szerzett vizsgajegyeit táblázatba rendezve:

Tantárgyak	5	4	3	2	1
matematika	2	4	6	7	0
fizika	2	3	7	5	2
kémia	0	2	8	8	1
állattan	0	5	4	5	5

Ebben a formában az adatok könnyen áttekinthetők, összehasonlíthatók. Ha azonban az évfolyam összes csoportjáról és ugyanezekről a tantárgyakról van szó, fölösleges a fejléceket mindig megismételni, egy-egy csoport jegyeit elegendő az alábbi alakban megadni:

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 & 7 & 0 \\ 2 & 3 & 7 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 8 & 8 & 1 \\ 0 & 5 & 4 & 5 & 5 \end{pmatrix}$$

Lényeges, hogy melyik szám melyik helyen áll. A felírt táblázatot mátrixnak nevezzük.

Definíció. Helyezzünk el $n \times m$ elemet egy olyan téglalap alakú táblázatba, amelynek n sora és m oszlopa van; az i -edik sor és a j -edik oszlop közös elemét jelöljük a_{ij} -vel; a táblázat elemeit szögletes, vagy kerek zárójellel foglaljuk egybe. Az így szerkesztett táblázatot **mátrixnak** nevezzük, pontosabban $n \times m$ típusú mátrixnak:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} = (a_{ij}).$$

Megjegyzések.

- (1) Az a_{ij} elem esetén az i indexet ($i=1,2,\dots,n$) **sorindexnek**, a j indexet ($j=1,2,\dots,m$) pedig **oszlopindexnek** szokás nevezni.
- (2) Ha azt is fel akarjuk tüntetni, hogy a mátrixnak n sora és m oszlopa van, ezt így tehetjük meg: $A_{n \times m} = (a_{ij})_{n \times m}$.
- (3) A mátrix elemei lehetnek valós vagy komplex számok, függvények, vektorok

és esetleg mátrixok is. A továbbiakban - ha mást nem mondunk - olyan mátrixokkal foglalkozunk, amelynek elemei valós számok.

7.2. A mátrix transzponáltja

Definíció. Ha az

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

mátrix sorait és oszlopait felcseréljük egymással, akkor az A **mátrix transzponáltját** kapjuk, amit A^T -vel (vagy A^* -gal) jelölünk:

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1m} & a_{2m} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

Megjegyzés. A transzponálás azt jelenti, hogy az első sor elemeiből az első oszlop elemei, a második sor elemeiből a második oszlop elemei stb. lesznek. Egy $n \times m$ -es típusú mátrix transzponáltja $m \times n$ -es típusú lesz.

7.3. Speciális mátrixok

- (1) **Kvadratikus**, vagy **négyzetes mátrix**: olyan mátrix, ahol a sorok és oszlopok száma megegyezik egymással, azaz $n = m$. Jelölése: A_n .

Megjegyzés. A kvadratikus mátrixoknál bevezetjük a **főátló**, illetve a **mellékátló** fogalmát. A mátrix főátlóján szemléletesen a bal felső sarokból a jobb alsó sarokba húzott átlót, mellékátlón a jobb felső sarokból a bal alsó sarokba húzott átlót értjük.

- (2) **Diagonálmátrix**, vagy **átlósmátrix**: az olyan kvadratikus mátrix, amelynek csak a főátlójában van 0-tól különböző elem. Azaz:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & 0 \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

- (3) **Egységmátrix**: az a diagonálmátrix, amelynek főátlójában minden elem 1. Jele: E_n .

$$E_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

- (4) **Felső (C mátrix)**, illetve **alsó háromszögmátrix (D mátrix)**: az olyan négyzetes mátrix, melynek a főátlója alatt vagy felett csupa 0 áll:

$$C = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ \vdots & \vdots & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & \cdots & a_{44} \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$$

(5) **Zérusmátrix** (vagy **nullmátrix**): az olyan mátrix, amelynek minden eleme 0.

(6) **Oszlopmátrix** (**oszlopvektor**): olyan mátrix, amelynek egyetlen oszlopa van.

$$A_{n \times 1} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix} = \underline{a}$$

(7) **Sormátrix** (**sorvektor**): olyan mátrix, amelynek egyetlen sora van.

$$B_{1 \times m} = (b_{11} \quad \cdots \quad b_{1m}) = \underline{b}$$

7.4. Műveletek mátrixokkal

Definíció. *Két mátrix azonos típusú*, ha mindkettő $n \times m$ -es, azaz mindkettőben ugyanannyi sor és ugyanannyi oszlop van.

Definíció: *Két mátrix pontosan akkor egyenlő* egymással, ha azonos típusúak és a megfelelő helyeken állandó elemik rendre megegyeznek.

7.4.1. Mátrixok összeadása, skalárral szorzása és lineáris kombinációja

Az összeadás művelete csak az azonos típusú mátrixok halmazán értelmezett.

Definíció. Az $A_{n \times m} = (a_{ij})$ és $B_{n \times m} = (b_{ij})$ mátrixok összegén azt a $C_{n \times m} = (c_{ij})$ mátrixot értjük, amelynek minden elemére

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \quad i=1,2,\dots,n; \quad j=1,2,\dots,m.$$

A mátrixok összeadásának tulajdonságai:

- (1) Minden A, B azonos típusú mátrix esetén $A + B = B + A$, azaz kommutatív.
- (2) Minden A, B, C azonos típusú mátrix esetén $(A + B) + C = A + (B + C)$, azaz asszociatív.
- (3) Minden A mátrix esetén, $A + O = A$, ahol O az A -val megegyező típusú nullmátrix.
- (4) Minden A mátrix esetén létezik $(-A)$ -val jelölt A -val azonos típusú mátrix úgy, hogy $A + (-A) = O$.

Definíció. Legyen az $A_{n \times m} = (a_{ij})$ mátrix és $\lambda \in \mathbf{R}$ adott. A $\lambda \cdot A$ mátrixon azt a $B_{n \times m} = (b_{ij})$ mátrixot értjük, amelynek bármely elemére

$$b_{ij} = \lambda \cdot a_{ij}, \quad i=1,2,\dots,n; \quad j=1,2,\dots,m.$$

Megjegyzés. Mátrix szorzása skalárral tehát úgy történik, hogy minden elemét megszorozzuk az adott számmal.

A skalárral való szorzás tulajdonságai:

- (1) Minden A mátrix és $\lambda \in \mathbf{R}$ esetén: $\lambda \cdot A = A \cdot \lambda$.
- (2) Minden A mátrix és $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$ esetén: $(\lambda + \mu) \cdot A = \lambda \cdot A + \mu \cdot A$ és $\lambda \cdot (A + B) = \lambda \cdot A + \lambda \cdot B$.
- (3) Minden A, B mátrix és $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$ esetén: $(\lambda + \mu) \cdot A = \lambda \cdot A + \mu \cdot A$ és $\lambda \cdot (A + B) = \lambda \cdot A + \lambda \cdot B$.
- (4) Minden A mátrix esetén $1 \cdot A = A$ és $O \cdot A = O$, ahol O ugyanolyan típusú nullmátrix, mint A .

Definíció. Ha az $A_1, A_2, \dots, A_n$ azonos típusú mátrixokat rendre megszorozzuk a $k_1, k_2, \dots, k_n$ valós számokkal és a szorzatokat összeadjuk, akkor az így kapott

$k_1 \cdot A_1 + k_2 \cdot A_2 + \dots + k_n \cdot A_n = L$ mátrixot az adott mátrixok **lineáris kombinációjának** nevezzük.

7.4.2. Mátrix szorzása mátrixszal

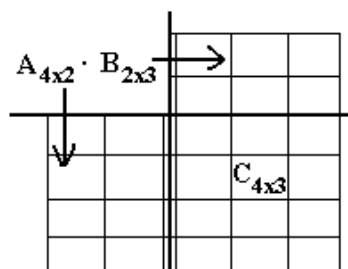
Definíció. Az $n \times m$ típusú $A = (a_{ij})$ és az $m \times p$ típusú $B = (b_{ij})$ mátrixok $A \cdot B$ szorzatán azt az $n \times p$ típusú C mátrixot értjük, amelynek minden c_{ij} elemére

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{im}b_{mj} = \sum_{k=1}^m a_{ik} \cdot b_{kj}, \text{ ahol } i=1,2,\dots,n \text{ és } j=1,2,\dots,p.$$

Megjegyzés. Az $A = (a_{ij})$ mátrixnak a $B = (b_{ij})$ mátrixszal való $A \cdot B$ szorzatát csak akkor értelmezzük, ha az A mátrixnak ugyanannyi oszlopa van, mint ahány sora a B mátrixnak. Ekkor az eredménymátrix sorainak száma megegyezik az A mátrix sorainak a számával, oszlopainak száma pedig egyenlő a B mátrix oszlopainak a számával.

Megjegyzés. Az eredménymátrix i -edik sorának k -adik elemét úgy kapjuk meg, hogy az első (A) mátrix i -edik sorát “szorozzuk” a második (B) mátrix k -adik oszlopával oly módon, hogy az első elemet az első elemmel, a másodikat a másodikkal stb., az m -ediket az m -edikkel szorozzuk össze, és ezeket a szorzatokat összegezzük. Ezt a “szorzást” **sor-oszlop kompozíciónak** nevezzük.

A szorzatmátrix kiszámításakor könnyű hibázni, a kiszámított elemeket rossz helyre írni. Ezért célszerű úgy elhelyezni a két szorzandó mátrixot, hogy a beírandó elem helyét ne lehessen eltéveszteni. Az alábbi elrendezés (47. ábra) egy ilyen lehetőséget mutat, amelyet **Falk-módszernek** nevezünk. Az $A_{4 \times 2}$ és $B_{2 \times 3} = C_{4 \times 3}$ szorzat Falk-sémába rendezve a 47. ábrán látható:



47. ábra: A Falk-módszer szorzatmátrix kiszámításának megkönnyítésére

Forrás: Bíró-Vincze (2000)

Az eredménymátrix eleme tehát éppen annak a sornak és oszlopnak a kompozíciója, amelynek a metszéspontjában áll.

Megjegyzés. Ezen módszer segítségével könnyű a számításunk ellenőrzése is, erre alkalmas az ún. **oszlop-**, illetve **sorösszeg próba**. Oszlopösszeg próba esetén adjuk össze az A mátrix oszlopaiban álló elemeket és összegeket írjuk az A mátrix utolsó sora alá. Ezután végezzük el ezzel a sorral (sormátrix-szal) is a szorzást, és a kapott eredményt írjuk az A·B szorzatmátrix utolsó sora alá. Ha helyes volt a szorzás, akkor az A·B szorzatmátrix oszlopaiban álló elemek összegét kapjuk.

A mátrix-szorzás tulajdonságai:

- (1) Van olyan A és B mátrix, hogy A·B és B·A is elvégezhető, de $A \cdot B \neq B \cdot A$, vagyis nem kommutatív.
- (2) Minden A, B és C mátrix esetén, amikor a műveletek elvégezhetők: $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$ és $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$, azaz disztributív.
- (3) Minden olyan A mátrixra és E egységmátrixra, ahol a szorzások elvégezhetők: $A \cdot E = A$ és $E \cdot A = A$.
- (4) Minden olyan A mátrix és O nullmátrix esetén, ahol a szorzás elvégezhető, teljesül, hogy $A \cdot O = O$ és $O \cdot A = O$.

Definíció. Az A n×n-es mátrix inverze az az A^{-1} -gyel jelölt n×n-es mátrix, melyre teljesül, hogy $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$.

Megjegyzés. Nem minden kvadratikusan mátrixnak van inverze.

Példa. Egy élelmiszerüzletben egy eladó I., II., III. típusú csomag összeállítására veszi fel a rendelést, mégpedig az elsőből 3 db-ot, a másodikból 4 db-ot, a harmadikból 5-öt rendelnek. A rendelést az $x = (3, 4, 5)$ vektorokkal jellemezhetjük. Az egyes csomagfajták összeállítását a következő A mátrixszal írhatjuk le:

	csokoládé (dkg)	ital (üveg)	cigaretta (doboz)	virág (szál)
I. csomag	25	1	3	2
II. csomag	20	1	5	3
III. csomag	0	2	4	2

Határozza meg az összes megrendelt csomag összeállításához szükséges árumennyiséget, valamint a megrendelt csomagok árát, ha az egységárak a következők: 1 dkg csokoládé 1 Ft, 1 üveg ital 80 Ft, 1 doboz cigaretta 6 Ft, 1 szál virág 8 Ft. Az egységárakat jellemezzük az $y = (1, 80, 6, 8)$ vektorral.

Megoldás:

A szükséges árumennyiséget az $x \cdot A$ szorzatmátrix adja meg, a megrendelt csomagok értékét pedig az $x \cdot A \cdot y^T$ szorzat adja meg.

7.5. A determinánsfüggvény

Definíció. A kvadrátikus mátrixok halmazán értelmezett valós értékű függvényt *determináns-függvénynek* nevezzük, ha

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

esetén $\det A = |A| = \sum (-1)^I \cdot a_{1i_1} \cdot a_{2i_2} \cdot \dots \cdot a_{ni_n}$, ahol az összegzés az $1, 2, \dots, n$ számok összes lehetséges $i_1, i_2, \dots, i_n$ sorrendjére terjed ki, I pedig az $i_1, i_2, \dots, i_n$ sorrendben az inverziók számát adja meg, vagyis azt, hogy hányszor fordul elő az az eset, hogy $i_k > i_l$, ha $k < l$.

Megjegyzés.

- (1) Az 1×1 -es mátrix egyetlen valós szám, aminek determinánsa maga a szám.
- (2) Az $n \times n$ -es mátrix determinánsát úgy kapjuk, hogy minden sorból kiválasztunk egy elemet úgy, hogy minden oszlopból is csak egyet válasszunk, ezeket összeszorozzuk, vesszük az összes ilyen szorzatot, és ezeket megfelelő előjellel ellátva összegezzük.

A definíció alapján meghatározzuk az $A_{2 \times 2} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ mátrix determinánsát!

Készítsük el az összes lehetséges kéttagú szorzatokat, melyeket úgy kapunk, hogy minden sorból kiválasztunk egy elemet úgy, hogy minden oszlopból is egyet válasszunk. Két ilyen szorzat van: $a_{11} \cdot a_{22}$, ill. $a_{12} \cdot a_{21}$. Az inverziók számának meghatározásához a sorindexeket növekvő sorrendbe rakjuk, és az oszlopindexeket vizsgáljuk. Az $a_{11} \cdot a_{22}$ szorzatnál az oszlopindexek: 1, 2, ekkor az inverziók száma 0. Az $a_{12} \cdot a_{21}$ szorzat esetén az oszlopindexek: 2, 1, ekkor az inverziók száma 1, hiszen $2 > 1$. Tehát a determináns a következőképpen adódik:

$$|A_{2 \times 2}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = (-1)^0 \cdot a_{11} \cdot a_{22} + (-1)^1 \cdot a_{12} \cdot a_{21} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

azaz egy 2×2 -es mátrix determinánsát úgy számoljuk, hogy a főátlóban lévő elemek szorzatából kivonjuk a mellékátlóban lévő elemek szorzatát.

A definíció alapján meghatározzuk az $A_{3 \times 3} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ mátrix determinánsát is!

Készítsük el az összes lehetséges háromtagú szorzatot, a sorindexeket rakjuk növekvő sorrendbe és nézzük meg az oszlopindexeknél az inverziók számát (48. ábra)!

a háromtagú szorzatok	oszlopindexek	az inverziók
$a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33}$	1,2,3	$I=0$
$a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32}$	1,3,2	$I=1$, mert $3>2$
$a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33}$	2,1,3	$I=1$, mert $2>1$
$a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31}$	2,3,1	$I=2$, mert $2>1, 3>1$
$a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32}$	3,1,2	$I=2$, mert $3>1, 3>2$
$a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31}$	3,2,1	$I=3$, mert $3>2, 3>1, 2>1$

48. ábra: Segédlet a 3×3 -as mátrix determinánsának meghatározásához

Forrás: Bíró és Vincze (2000)

Azaz

$$\begin{aligned}
 |A_{3 \times 3}| &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \\
 &= (-1)^0 \cdot a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + (-1)^1 \cdot a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} + (-1)^1 \cdot a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} + \\
 &+ (-1)^2 \cdot a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + (-1)^2 \cdot a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} + (-1)^3 \cdot a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} = \\
 &= a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} = \\
 &= (a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32}) - (a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} + a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} + a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31})
 \end{aligned}$$

A 3×3 -as mátrix determinánsának kiszámításához a **Sarrus-szabály** néven ismert egyszerű módszert célszerű alkalmazni (Bronstejn és Szemengyajev, 1987):

$$\begin{aligned}
 |A_{3 \times 3}| &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \\
 &= (a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32}) - (a_{31} \cdot a_{22} \cdot a_{13} + a_{32} \cdot a_{23} \cdot a_{11} + a_{33} \cdot a_{21} \cdot a_{12})
 \end{aligned}$$

Megjegyzés. Észrevehető, hogy a $n \times n$ -es ($n \geq 4$) mátrix esetén a definíció szerint történő számolás nagyon hosszadalmas lenne, hiszen például 4×4 -es mátrix esetén a determináns $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ tagú összeg. Ezért $n \geq 4$ esetén az $n \times n$ -es mátrixok determinánsának a meghatározására már az ún. kifejtési tételt célszerű használni.

Példa. Határozza $A_{3 \times 3} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ -1 & 5 & 4 \end{pmatrix}$ mátrix determinánsát Sarrus-szabállyal.

Megoldás: $(1 \cdot 3 \cdot 4 + 2 \cdot 1 \cdot (-1) + 0 \cdot 0 \cdot 5) - ((-1) \cdot 3 \cdot 0 + 5 \cdot 1 \cdot 1 + 4 \cdot 0 \cdot 2) = 10 - 5 = 5$

Tétel (Kifejtési tétel). Az $n \times n$ -es mátrix determinánsát a következő módon határozhatjuk meg:

$$A_{n \times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^n a_{ik} \cdot A_{ik} = \sum_{i=1}^n a_{ik} \cdot A_{ik},$$

ahol az első esetben a kifejtés az i -edik sor szerint ($i = 1, 2, \dots, n$), a másodikban a k -adik oszlop szerint ($k = 1, 2, \dots, n$) történt. Az A_{ik} az i -edik sor k -adik eleméhez tartozó **algebrai aldetermináns**, aminek az értékét úgy kapjuk, hogy az eredeti mátrix i -edik sorát és k -adik oszlopát elhagyjuk és a kapott $(n-1) \times (n-1)$ -es mátrix determinánsának az értékét szorozzuk $(-1)^{i+k}$ -val. Azaz $A_{ik} = (-1)^{i+k} \cdot D_{ik}$, ahol D_{ik} tehát egy $(n-1) \times (n-1)$ -es mátrix determinánsa, amit az a_{ik} elemhez tartozó **aldeterminánsnak** mondunk.

Megjegyzés. Nyilvánvaló, hogy a kapott $(n-1) \times (n-1)$ -es mátrix determinánsának meghatározása visszavezethető $(n-2) \times (n-2)$ -es mátrix determinánsának meghatározására, így véges sok lépésben eljutunk a 2×2 -es mátrix determinánsához.

7.6. A determinánsfüggvény néhány tulajdonsága

A determináns értékének a kiszámítását az alábbiakban megfogalmazott tulajdonságok nagymértékben elősegítik.

- (1) A mátrix determinánsának értékét megkaphatjuk bármelyik sora, vagy oszlopa szerinti kifejtéssel is.
- (2) A determináns értéke nem változik, ha a mátrixot transzponáljuk, azaz $|A| = |A^T|$.
- (3) A determináns értéke c -szeresére változik, ha a mátrix valamelyik sorának, vagy oszlopának minden elemét megszorozzuk c -vel (azaz a determinánsfüggvény homogén).
- (4) Ha egy mátrix valamely sorában, vagy oszlopában csak 0 elem áll, akkor a determináns értéke 0.
- (5) Ha egy mátrixban felcserélünk két oszlopot (vagy két sort), akkor a determináns értéke a (-1) -szeresére változik.
- (6) Ha egy mátrixban két oszlop (vagy sor) megegyezik, akkor a determináns értéke 0.
- (7) Ha egy mátrix valamely oszlopa (vagy sora) egy másik oszlop (vagy sor) skalárszorosa, akkor a determináns értéke 0, hiszen ekkor a skalárt kiemelve olyan mátrixhoz jutunk, melyben két oszlop (vagy sor) megegyezik.
- (8) Ha egy mátrix valamely oszlopához (vagy sorához) egy másik oszlop (vagy sor) skalárszorosát adjuk, akkor a determináns értéke nem változik.
- (9) Az egységmátrix determinánsa 1.
- (10) Minden felső háromszögmátrix, illetve minden alsó háromszögmátrix determinánsa megegyezik a főátlóban lévő elemek szorzatával.

Tétel. Szorzatmátrix determinánsa egyenlő a determinánsok szorzatával:
 $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$.

Megjegyzések.

- (1) Ha az A mátrixnak létezik az A^{-1} -gyel jelölt inverze, akkor $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$
- (2) Kvadratikus mátrixnak akkor és csak akkor van inverze, ha $\det A \neq 0$.

Tétel. Az A kvadratikus **mátrix inverze** $A^{-1} = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}$, ahol

$$b_{ij} = \frac{A_{ji}}{|A|},$$

és A_{ji} a j -edik sor i -edik eleméhez tartozó algebrai aldetermináns.

7.7. Ellenőrző kérdések

1. Hogyan magyarázná el a mátrix fogalmát?
2. Mit jelent az, hogy egy mátrix 3x4-es típusú?
3. Mikor mondjuk, hogy két mátrix egyenlő?
4. Mit értünk a mátrix transzponáltján?
5. Mi a szimmetrikus és antiszimmetrikus mátrix?
6. Mi a mátrix diagonálisa?
7. Sorolja fel, hogy milyen speciális mátrixokat ismer és jellemezze ezeket.
8. Mikor mondjuk, hogy két mátrix azonos típusú?
9. Hogyan értelmezzük a mátrixok összeadását, skalárral való szorzatát és a mátrixok lineáris kombinációját?
10. Összeadható-e egy 3x2-es és egy 2x3-as mátrix?
11. Össze tudjuk-e szorozni a 3x4-es mátrixot az 1x4-es sormátrix transzponáltjával?
12. Mi a Falk-módszer?
13. Mire használja a sor-, ill. oszlopösszeg próbát?
14. Mi az a determináns?
15. Mit jelent az i -edik sor szerinti sorba fejtés?
16. Mi az az algebrai aldetermináns?
17. Mi a Sarrus-szabály?
18. Sorolja fel a determinánsfüggvény néhány tulajdonságát.
19. Milyen mátrix az inverz mátrix?
20. Hogyan lehet inverzmátrixot meghatározni?
21. Mikor van egy mátrixnak inverze?
22. Az alábbi állítások közül melyek igazak ill. hamisak:
 - a) Az összeadás művelete csak kvadratikus mátrixok halmazán értelmezett.
 - b) A Sarrus-szabályt a 4x4-es kvadratikus mátrixok determinánsának meghatározására használjuk.
 - c) Ha egy mátrixban két oszlopot felcserélünk, akkor a determináns értéke nem változik.
 - d) Ha egy mátrix valamely oszlopához egy másik oszlop skalárszorosát adjuk, akkor a determináns értéke (-1) -szeresére változik.

8. LINEÁRIS EGYENLETRENDSZEREK

Definíció. Az

$$(1) \quad \begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots &\quad \quad \quad \vdots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \cdots + a_{kn}x_n &= b_k \end{aligned}$$

egyenletek halmazát, ahol x_j valós számok ($j = 1, \dots, n$) az ismeretleneket, a_{ij} adott valós számok ($i = 1, 2, \dots, k$, $j = 1, 2, \dots, n$) az ismeretlenek együtthatóit jelentik és a b_i -k adott valós számok, **lineáris egyenletrendszernek** nevezzük.

Megjegyzés.

- (1) Amennyiben $b_1 = b_2 = \dots = b_k = 0$, az egyenletrendszert **homogénnek**, ellenkező esetben **inhomogénnek** mondjuk.
- (2) A $c_1, c_2, \dots, c_n$ számok az egyenletrendszer megoldását adják, ha az x_i ismeretlenek helyére helyettesítve minden egyenletet kielégítenek.

8.1. Lineáris egyenletrendszerek megoldása

Az egyenletrendszerek megoldhatóságának vizsgálata azt jelenti, hogy egy adott egyenletrendszerről el tudjuk dönteni azt, hogy van megoldása, vagy nincs, és ha van, akkor hogyan oldható meg. Ha az egyenletrendszernek nincs megoldása, akkor **ellentmondásosnak** nevezzük, ellenkező esetben pedig **megoldhatónak**.

Ha csak egyetlen megoldás létezik (azaz pontosan egy $x_1, x_2, \dots, x_n$), akkor az egyenletrendszert **határozottnak**, vagy **regulárisnak**, ha több megoldása is van az egyenletrendszernek, akkor **határozatlan**, vagy **irregulárisnak** mondjuk.

Definíció. Két egyenletrendszert **ekvivalensnek** nevezünk, ha a megoldásaik azonosak.

Megjegyzés. Ekvivalens egyenletrendszert kapunk, ha

- (1) Az egyenletrendszer valamelyik egyenletét $\lambda = 0$ -val ($\lambda \in \mathbb{R}$) megszorozzuk.
- (2) Valamelyik egyenlethez az egyenletrendszer egy másik egyenletét hozzáadjuk.
- (3) Két egyenletet felcserélünk.
- (4) Az egyenleten belül felcseréljük a tagok sorrendjét.

8.1.1. Egyenletrendszerek megoldása Gauss-eliminációval

Tekintsük az (1) egyenletrendszert. Feltételezzük, hogy az a_{ij} együtthatók között van zérustól különböző. Tegyük fel, hogy $a_{11} \neq 0$, ha esetleg az lenne, akkor az egyenletek sorrendjének felcserélésével biztosan található olyan x_1 , melynek együtthatója nem nulla (ellenkező esetben ugyanis $(n-1)$ ismeretlenes lenne az egyenletrendszer). Tehát az egyenletek sorrendjének felcserélésével az $a_{11} \neq 0$ elérhető.

Az első egyenletet osszuk el a_{11} -gyel, a második egyenlethez adjuk hozzá az első egyenlet $-\frac{a_{21}}{a_{11}}$ -szeresét, így a második egyenletben az x_1 ismeretlen már nem fog szerepelni.

Hasonlóan az i -edik egyenlethez adjuk hozzá az első $-\frac{a_{i1}}{a_{11}}$ -szeresét, ekkor az i -edik egyenletben már nem szerepel az x_1 . Ezek az átalakítások ekvivalens átalakítások, és így az alábbi (1) egyenletrendszerrel ekvivalens (2) egyenletrendszerhez jutunk:

$$(2) \quad \begin{aligned} x_1 + a'_{12}x_2 + \dots + a'_{1n}x_n &= b'_1 \\ a'_{22}x_2 + \dots + a'_{2n}x_n &= b'_2 \\ \vdots & \\ a'_{k2}x_2 + \dots + a'_{kn}x_n &= b'_k \end{aligned}$$

A (2) egyenletrendszer olyan alakú, hogy a második, a harmadik, ... , k -edik egyenletben nem szerepel x_1 , vagyis ott az x_1 -et kiküszöböltük. Ha a (2) első egyenletét nem vesszük figyelembe, akkor a maradék $(k-1)$ egyenlet egy $(n-1)$ ismeretlenből álló egyenletrendszert alkot. Ha a

$$(3) \quad \begin{aligned} a'_{22}x_2 + \dots + a'_{2n}x_n &= b'_2 \\ \vdots & \\ a'_{k2}x_2 + \dots + a'_{kn}x_n &= b'_k \end{aligned}$$

egyenletrendszer megoldható, akkor a (2) is megoldható és ha $x_2, \dots, x_n$ a (3) egy megoldása, akkor ezek az $x_2, \dots, x_n$ értékek és a (2) egyenletrendszerből felírt

$$x_1 = b'_1 - (a'_{12}x_2 + \dots + a'_{1n}x_n)$$

a (2) lineáris egyenletrendszer megoldását adják.

Így a k egyenletből álló n ismeretlenes (1) lineáris egyenletrendszer megoldhatóságát és megoldását visszavezettük egy $(k-1)$ egyenletből álló $(n-1)$ ismeretlenes lineáris egyenletrendszer vizsgálatára. Ebből a visszavezetési eljárásból látható, hogy ha az egyenletrendszer megoldható, akkor az (1) valamennyi megoldása felírható az együtthatókból a négy alapművelet segítségével.

Az eljárásunkat ismételjük meg a (2) utolsó $(k-1)$ egyenletén, majd így tovább. Az eljárás akkor ér véget, ha már nincs több egyenletünk, vagy az egyenletrendszer további egyenleteinek a bal oldalán minden együttható 0. Így az (1) egyenletrendszerrel egyenértékű egyenletrendszerhez jutunk, amely a következő alakú:

$$(4) \quad \begin{aligned} x_1 + a^*_{12}x_2 + a^*_{13}x_3 + \dots + a^*_{1n}x_n &= b^*_1 \\ x_2 + a^*_{23}x_3 + \dots + a^*_{2n}x_n &= b^*_2 \\ \vdots & \\ x_r + a^*_{r,r+1}x_{r+1} + \dots + a^*_{rn}x_n &= b^*_r \\ 0 &= b^*_{r+1} \\ \vdots & \\ 0 &= b^*_k \end{aligned}$$

ahol $r \leq \min(k, n)$. Ezt az egyenletrendszert az (1)-hez tartozó **trapéz alakú lineáris egyenletrendszernek** nevezzük. Speciális esetben az egyenletrendszer háromszög alakú.

Elemezzük tovább a Gauss-elimináció általános menetét!

Tétel. Minden lineáris egyenletrendszer véges sok lépésben vele ekvivalens trapéz alakú lineáris egyenletrendszerré alakítható.

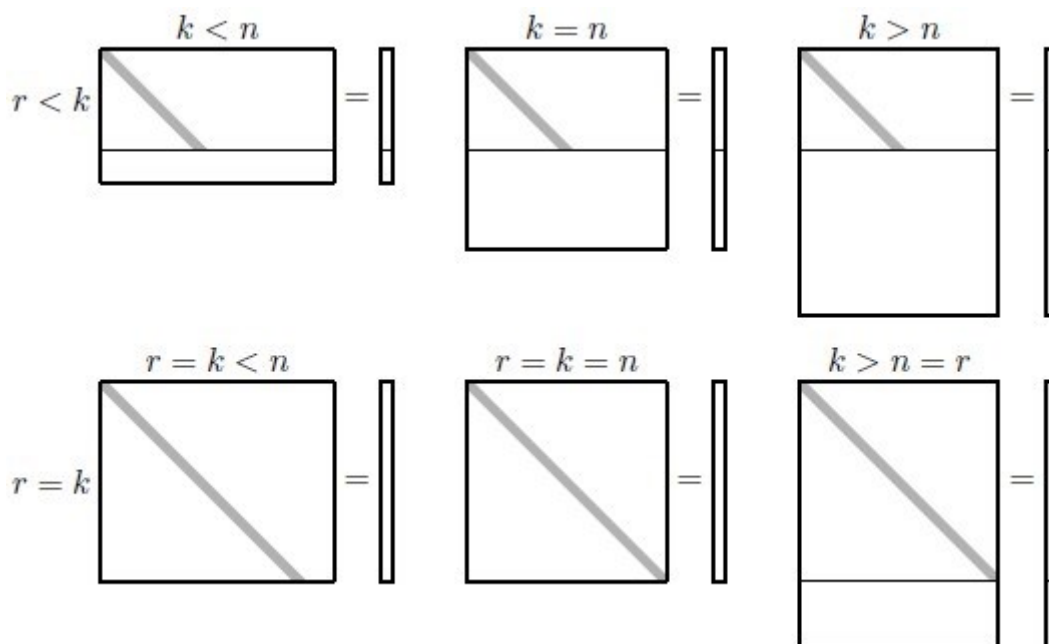
Tétel. Az (1) egyenletrendszer pontosan akkor oldható meg, ha a hozzá tartozó trapéz alakú lineáris egyenletrendszer azon egyenleteiben, amelyeknek a bal oldalán csupa nulla áll, a jobb oldali konstansok is nullával egyenlők.

Megjegyzés. Azaz a trapéz alakú lineáris egyenletrendszer pontosan akkor oldható meg, ha

$$b_{r+1}^* = b_{r+2}^* = \dots = b_k^* = 0.$$

A trapéz alakú (4) lineáris egyenletrendszerből amellet, hogy eldönthető, hogy megoldható-e az egyenletrendszer, megoldhatóság esetén a megoldások is megadhatók. A trapéz alakú lineáris egyenletrendszer pontosan akkor határozott, ha $n = r$. Ha $r < n$, akkor határozatlan, és ekkor partikuláris megoldást kapunk. (A trapéz alakú lineáris egyenletrendszer pontosan akkor ellentmondásos, ha létezik olyan i , melyre teljesül, hogy $r + 1 \leq i \leq n$ és $b_i^* \neq 0$.)

Tegyük fel, hogy a (4) megoldható. Tekintsük ekkor az első r egyenletet, ami szemléletesen a 49. ábrán a vízszintes egyenes fölötti egyenleteket jelenti.



49. ábra: A trapéz alakú lineáris egyenletrendszerek formái a megoldhatóságuk tekintetében

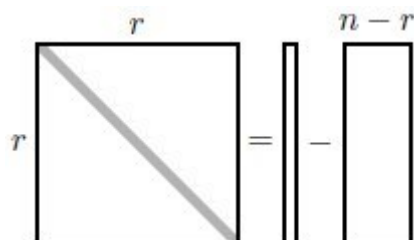
Forrás: Bíró és Vincze (2000)

A kapott egyenleteket rendezzük át az alábbi módon:

$$\begin{aligned}
 x_1 + a_{12}^* x_2 + a_{13}^* x_3 + \dots + a_{1r}^* x_r &= b_1^* - (a_{1,r+1}^* x_{r+1} + \dots + a_{1n}^* x_n) \\
 x_2 + a_{23}^* x_3 + \dots + a_{2r}^* x_r &= b_2^* - (a_{2,r+1}^* x_{r+1} + \dots + a_{2n}^* x_n) \\
 &\vdots \\
 x_r &= b_r^* - (a_{r,r+1}^* x_{r+1} + \dots + a_{rn}^* x_n)
 \end{aligned}
 \tag{5}$$

Ekkor az alábbi esetek valamelyikéhez jutunk el, attól függően, hogy $n > r$ vagy $n = r$

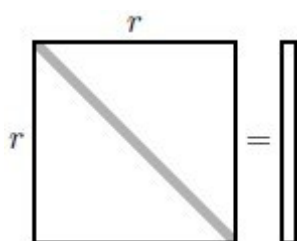
(1) Ha $n > r$, akkor a 50. ábrán látható alakú az (5) egyenletrendszer:



50. ábra: Az $n > r$ alapeset szemléltetése

Forrás: Bíró és Vincze (2000)

(2) Ha $n = r$, akkor az 51. ábrán látható alakú az (5) egyenletrendszer:



51. ábra: Az $n = r$ alapeset szemléltetése

Forrás: Bíró és Vincze (2000)

Az (5) egyenletrendszer utolsó egyenletéből x_r , az utolsó előttiből $x_{r-1}, \dots$, az első egyenletből pedig x_1 fejezhető ki. Ekkor az $x_1, x_2, \dots, x_r$ ismeretlenek:

$$\begin{aligned}
 x_1 &= l_{1,r+1} x_{r+1} + \dots + l_{1n} x_n + l_1 \\
 x_2 &= l_{2,r+1} x_{r+1} + \dots + l_{2n} x_n + l_2 \\
 &\vdots \\
 x_r &= l_{r,r+1} x_{r+1} + \dots + l_{rn} x_n + l_r
 \end{aligned}$$

alakban írhatók fel, ahol az együtthatók meghatározott konstansok, az $x_{r+1}, \dots, x_n$ pedig tetszőleges értékek lehetnek.

Az (5) egyenletrendszer összes megoldását az $x_1, \dots, x_r, \dots, x_n$ értékek adják. A (4)-ben az utolsó $(k - r)$ egyenlet összes együtthatója 0, ezért az előbbi értékek a (4) minden egyenletét kielégítik. A (4) lineáris egyenletrendszer azonban ekvivalens (1)-gyel, azaz az (5) megoldásai egyben az (1) összes megoldását is adják.

8.1.2. A Cramer-szabály

Tétel (Cramer-szabály).

Tekintsük az alábbi

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots &\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned}$$

n egyenletből álló n darab ismeretlent tartalmazó egyenletrendszert, ahol az a_{ik} és b_i -k ($i, k = 1, \dots, n$) konstansok és $x_1, x_2, \dots, x_n$ ismeretlenek. Legyen A az egyenletrendszer együtthatómátrixa, és tegyük fel, hogy az A mátrix determinánsa nem nulla. Ekkor

$$x_i = \frac{d_i}{|A|}, \text{ ahol } i = 1, \dots, n,$$

ahol d_i annak az $n \times n$ -es mátrixnak a determinánsa, amit úgy kapunk, hogy az A mátrix i -edik oszlopát kicseréljük $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n)^T$ -re.

8.2. A homogén egyenletrendszer megoldásáról

A homogén egyenletrendszernek mindig létezik megoldása, amely az $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$. Ezt a megoldást **triviális megoldásnak** nevezzük. A kérdés az, hogy a homogén egyenletrendszernek mikor van triviálisól különböző megoldása.

Tétel. A homogén egyenletrendszer megoldásaira a következők igazak: ha $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ és $\beta_1, \dots, \beta_n$ megoldások, akkor az

$$\alpha_1 + \beta_1, \dots, \alpha_n + \beta_n \text{ és } c \cdot \alpha_1, \dots, c \cdot \alpha_n$$

is megoldás.

A korábban tárgyalt Gauss-féle eliminációs eljárással minden homogén lineáris egyenletrendszer az alábbi vele ekvivalens egyenletrendszerré alakítható:

$$\begin{aligned} x_1 + d_{12}x_2 + d_{13}x_3 + \dots + d_{1r}x_r &= -(d_{1,r+1}x_{r+1} + \dots + d_{1n}x_n) \\ x_2 + d_{23}x_3 + \dots + d_{2r}x_r &= -(d_{2,r+1}x_{r+1} + \dots + d_{2n}x_n) \\ &\vdots \\ x_r &= -(d_{r,r+1}x_{r+1} + \dots + d_{rn}x_n) \end{aligned}$$

$$(k-r) \text{ egyenlet } \begin{cases} 0 = 0 \\ \vdots \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Megjegyzés.

- (1) A homogén lineáris egyenletrendszernek pontosan akkor van csak triviális megoldása, ha $n = r$.
- (2) A homogén lineáris egyenletrendszernek pontosan akkor van végtelen sok megoldása, ha $n > r$.

- (3) Ha a homogén lineáris egyenletrendszerben kevesebb egyenlet van, mint ismeretlen, akkor mindig van triviális megoldása.

8.3. Ellenőrző kérdések

1. Mit értünk lineáris egyenletrendszeren?
2. Mikor mondjuk, hogy egy lineáris egyenletrendszer homogén, ill. inhomogén?
3. Mit tud mondani a lineáris egyenletrendszerek megoldásáról?
4. Mikor mondjuk, hogy egy lineáris egyenletrendszer ellentmondásos?
5. Mikor mondjuk, hogy két lineáris egyenletrendszer ekvivalens?
6. Milyen lineáris egyenletrendszer megoldási módszereket ismer?
7. Ismertesse a Gauss-elimináció lényegét.
8. Mikor és hogyan alkalmazhatjuk a Cramer-szabályt?
9. Milyen tanult módszerrel tudná megoldani azt a lineáris egyenletrendszert, amely 3 egyenletből és 5 ismeretlennel áll?
10. Mit tud mondani a homogén lineáris egyenletrendszerek megoldásáról?
11. Döntse el, hogy az alábbi állítások közül melyek igazak, ill. hamisak
 - a) Ha egy lineáris egyenletrendszernek több megoldása is van, akkor az egyenletrendszert irregulárisnak mondjuk.
 - b) Két egyenletrendszer ekvivalens, ha mindkettő ugyanannyi egyenletet tartalmaz és ugyanannyi ismeretlennel áll.
 - c) Minden lineáris egyenletrendszer véges sok lépésben vele ekvivalens trapéz alakú lineáris egyenletrendszerré alakítható.
 - d) A Cramer szabály csak olyan lineáris egyenletrendszerek megoldására használható, amely inhomogén és az együttható-mátrixának a determinánsa nem nulla.
 - e) Ha a homogén lineáris egyenletrendszerben kevesebb egyenlet van, mint ismeretlen, akkor csak triviális megoldása létezik a lineáris egyenletrendszernek.

9. VEKTORTEREK ÉS A BÁZISTRANSZFORMÁCIÓ

9.1. Vektorterek

Definíció. A V halmazt *vektortérnek* (vagy *lineáris térnek*) nevezzük, ha értelmezve van benne két művelet az összeadás és a skalárral való szorzás (azaz $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ esetén $\exists \mathbf{x} + \mathbf{y} \in V$, és $\mathbf{x} \in V, \lambda \in V$ esetén $\exists \lambda \mathbf{x} \in V$) az alábbi tulajdonságokkal:

- (1) $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ esetén $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x}$, azaz kommutatív,
- (2) $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in V$ esetén $(\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z} = \mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z})$, azaz asszociatív,
- (3) $\exists \mathbf{0} \in V$ (nullelem, vagy zéruselem), hogy $\forall \mathbf{x} \in V$ esetén $\mathbf{x} + \mathbf{0} = \mathbf{x}$,
- (4) $\forall \mathbf{x} \in V$ esetén létezik $-\mathbf{x} \in V$ (az $\mathbf{x}$ elem negatívja, vagy additív inverze) úgy, hogy $\mathbf{x} + (-\mathbf{x}) = \mathbf{0}$,
- (5) $\forall \alpha, \beta \in \mathbf{R}, \forall \mathbf{x} \in V$ esetén $(\alpha + \beta) \cdot \mathbf{x} = \alpha \cdot \mathbf{x} + \beta \cdot \mathbf{x}$,
- (6) $\forall \alpha \in \mathbf{R}, \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ esetén $\alpha \cdot (\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \alpha \cdot \mathbf{x} + \alpha \cdot \mathbf{y}$,
- (7) $\forall \alpha, \beta \in \mathbf{R}, \forall \mathbf{x} \in V$ esetén $(\alpha \cdot \beta) \cdot \mathbf{x} = \alpha \cdot (\beta \cdot \mathbf{x})$,
- (8) $\forall \mathbf{x} \in V$ esetén $1 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x}$.

Megjegyzés.

- (1) A fenti axiómákból következik, hogy $0 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}$ minden $\mathbf{x} \in V$.
- (2) A vektortér elemeit vektoroknak nevezzük, még akkor is, ha az elemek nem a hagyományos értelemben vett vektorok.
- (3) Ha a vektortér definíciójában szereplő két műveleten kívül még más műveletek elvégezhetőségét is megköveteljük, akkor speciális vektorteret definiálunk. Azt a vektorteret, amelyben a középiskolában már megismert skaláris szorzás érvényességét is megköveteljük, *euklideszi térnek* nevezzük. A térbeli irányított szakaszok például euklideszi teret alkotnak.

9.1.1. Lineáris kombináció, lineáris függetlenség, lineáris függőség

Definíció. Az $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \dots, \mathbf{a}_n$ vektorok $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n$ skalárokkal vett *lineáris kombinációja* az $\alpha_1 \cdot \mathbf{a}_1 + \alpha_2 \cdot \mathbf{a}_2 + \alpha_3 \cdot \mathbf{a}_3 + \dots + \alpha_n \cdot \mathbf{a}_n$ kifejezés.

Megjegyzés.

- (1) Az $\alpha_1 \cdot \mathbf{a}_1 + \alpha_2 \cdot \mathbf{a}_2 + \alpha_3 \cdot \mathbf{a}_3 + \dots + \alpha_n \cdot \mathbf{a}_n$ kifejezés vektort határoz meg.
- (2) Az $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n$ skalárokat a lineáris kombináció együtthatóinak nevezzük.

Definíció. Az $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \dots, \mathbf{a}_n$ vektorok *lineárisan független vektorrendszert* alkotnak, ha az $\alpha_1 \cdot \mathbf{a}_1 + \alpha_2 \cdot \mathbf{a}_2 + \alpha_3 \cdot \mathbf{a}_3 + \dots + \alpha_n \cdot \mathbf{a}_n = \mathbf{0}$ egyenlőség csak az $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \dots = \alpha_n = 0$ esetben áll fenn.

Megjegyzés. A lineáris függetlenség azt jelenti, hogy az $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \dots, \mathbf{a}_n$ vektorokból a nullvektort csak csupa nulla skalárokkal vett lineáris kombinációval (azaz csak triviális lineáris kombinációval) lehet előállítani.

Definíció. Az $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \dots, \mathbf{a}_n$ vektorrendszer *lineárisan függő*, ha nem lineárisan független.

Megjegyzés.

- (1) A lineáris függőség azt jelenti, hogy az $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \dots, \mathbf{a}_n$ vektorokból a nullvektort nem csak csupa nulla skalárokkal vett lineáris kombinációval lehet előállítani.
- (2) Tehát $V = \mathbf{R}^n$ esetén lineáris függetlenség, illetve függőség vizsgálatánál egy homogén egyenletrendszert kell megoldani. Ha a homogén egyenletrendszernek csak triviális megoldása létezik, akkor azt mondjuk, hogy a vektorrendszer lineárisan független, míg ha létezik triviálistól különböző megoldás (azaz végtelen sok megoldása van), akkor a vektorrendszer lineárisan függő.

Tétel.

- (1) Ha az $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \dots, \mathbf{a}_n$ vektorrendszer lineárisan függő, akkor közülük legalább egy előállítható a többi lineáris kombinációjaként.
- (2) Ha egy vektorrendszer lineárisan függő, akkor újabb vektort hozzávéve, a vektorrendszer továbbra is lineárisan függő marad.
- (3) Ha egy vektorrendszer lineárisan független, akkor bármely vektorát elhagyva, a vektorrendszer továbbra is lineárisan független marad.

9.1.2. Generátorrendszer, dimenzió, bázis

Definíció.

- (1) Az $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \dots, \mathbf{a}_n$ vektorrendszer **generátorrendszer**, ha a vektortér minden eleme előállítható az $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \dots, \mathbf{a}_n$ vektorok lineáris kombinációjaként.
- (2) Az $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \dots, \mathbf{a}_n$ vektorrendszer **bázis**, ha lineárisan független és generátorrendszer.

Tétel. Ha az $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \dots, \mathbf{a}_n$ a V vektortér egy bázisa, a $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_k$ a V vektortér egy másik bázisa, akkor $n = k$.

Megjegyzés. A vektortérben tehát a bázisok tagszáma egyenlő.

Definíció.

- (1) Ha a V vektortérnek van véges sok elemből álló bázisa, akkor **véges dimenziós**nak mondjuk.
- (2) A V vektortér **n -dimenziós**, ha a benne lévő bázisok tagszáma n .

Tétel.

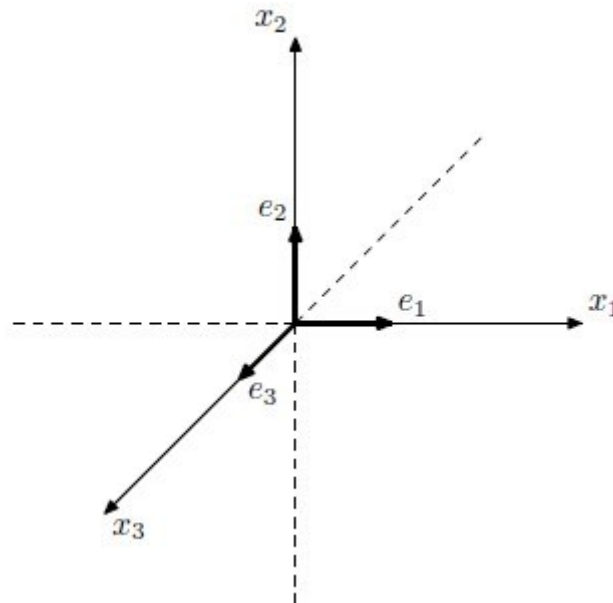
- (1) Az n -dimenziós V vektortér bármely vektora egyértelműen kifejezhető a bázisvektorainak lineáris kombinációjaként.
- (2) Az n -dimenziós V vektortérben legfeljebb n darab lineárisan független vektor lehet, azaz az n -dimenziós V vektortérben n -nél több vektor lineárisan függő vektorrendszert alkot.

Definíció. Ha az $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \dots, \mathbf{a}_n$ vektorrendszer a V vektortér egy bázisa, és $\mathbf{x} \in V$ esetén $\mathbf{x} = x_1 \cdot \mathbf{a}_1 + x_2 \cdot \mathbf{a}_2 + x_3 \cdot \mathbf{a}_3 + \dots + x_n \cdot \mathbf{a}_n$, akkor az $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ számokat az $\mathbf{x}$ vektor $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \dots, \mathbf{a}_n$ **bázisra vonatkozó koordinátáinak** nevezzük.

Megjegyzés. Az $\mathbf{R}^n$ vektortér $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ bázisát **természetes bázisnak** nevezzük, ahol:

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \mathbf{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

Megjegyzés. A térben a természetes bázist a következő módon képzelhetjük el: válasszunk ki 3 egységvektort a térben ($\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$), amelyek páronként merőlegesek egymásra, és úgy helyezkednek el, mint jobb kezünk hüvelyk ujjá, mutató ujjá és középső ujjá (52. ábra).



52. ábra: Az $\mathbf{R}^3$ tér természetes bázisa

Forrás: Bíró és Vincze (2000)

Az ilyen vektorrendszerrel azt mondjuk, hogy jobbsodrású rendszert alkotnak. A síkbeli vektorok esetén az $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ egymásra merőleges egységvektorok, továbbá az $\mathbf{e}_1$ -et az $\mathbf{e}_2$ -be (az óramutató járásával ellenkező irányú) 90°-os elforgatás viszi.

9.1.3. Altér, rang, kompatibilitás

Definíció. Ha a V vektortérnek van olyan részhalmaza, ami szintén vektortér ugyanazokkal a műveletekkel, akkor ezt **altérnek** (vagy **lineáris altérnek**) nevezzük.

Megjegyzés. Az altér olyan tulajdonságú, hogy az összeadás és a skalárral szorzás nem vezet ki belőle, vagyis ha $K \subseteq V$ altér, akkor minden $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in K$ esetén $\lambda \cdot \mathbf{x} + \mu \cdot \mathbf{y} \in K$.

Definíció. Az $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \dots, \mathbf{a}_n$ vektorokkal **generált altér** az

$$L(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \dots, \mathbf{a}_n) = \{\alpha_1 \mathbf{a}_1 + \alpha_2 \mathbf{a}_2 + \alpha_3 \mathbf{a}_3 + \dots + \alpha_n \mathbf{a}_n \mid \alpha_i \in \mathbf{R}, i = 1, 2, 3, \dots, n\}$$

halmazt értjük.

Megjegyzés. Ebben a vektortérben az $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \dots, \mathbf{a}_n$ vektorok generátorrendszert alkotnak, de csak akkor alkotnak bázist, ha lineárisan függetlenek.

Definíció. Az $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \dots, \mathbf{a}_n$ vektorrendszer rangján az $L(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \dots, \mathbf{a}_n)$ generált altér dimenzióját értjük. Jele: $\text{rg}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \dots, \mathbf{a}_n)$.

Megjegyzés.

- (1) A vektorrendszer rangja megegyezik a benne lévő maximális számú lineárisan független vektorok számával.
- (2) A vektorrendszer rangját nem változtatjuk meg, ha
 - a) valamelyik vektorát nem nulla skalárral megszorozzuk,
 - b) egyik vektorához hozzáadjuk bármely vektorát,
 - c) megváltoztatjuk a vektorok sorrendjét.

Definíció. A $\mathbf{b}$ vektor akkor kompatibilis az $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \dots, \mathbf{a}_n$ vektorrendszerrel, ha teljesül, hogy $\mathbf{b} \in L(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \dots, \mathbf{a}_n)$.

Megjegyzés. A $\mathbf{b}$ vektor kompatibilis az $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \dots, \mathbf{a}_n$ vektorrendszerrel, ha előállítható azok lineáris kombinációjaként.

9.1.4. Az egyenletrendszer mátrixos alakja

Az (1) egyenletrendszer együtthatóiból alkotott

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \end{pmatrix}$$

mátrixot az egyenletrendszer **együtthatómátrixának** nevezzük. Legyen

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ és } \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix},$$

akkor a lineáris egyenletrendszer röviden a következő alakban írható le:

$$A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$$

Ezt nevezzük az **egyenletrendszer mátrixos alakjának**. Ha

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{k1} \end{pmatrix}, \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ \vdots \\ a_{k2} \end{pmatrix}, \dots, \mathbf{a}_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{kn} \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_k \end{pmatrix},$$

akkor

$$x_1 \cdot \mathbf{a}_1 + x_2 \cdot \mathbf{a}_2 + x_3 \cdot \mathbf{a}_3 + \dots + x_n \cdot \mathbf{a}_n$$

az **egyenletrendszer vektoros alakja**.

Tétel (Kronecker-Capelli). Egy lineáris egyenletrendszer pontosan akkor oldható meg, ha $\text{rg}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \dots, \mathbf{a}_n) = \text{rg}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \dots, \mathbf{a}_n, \mathbf{b})$.

9.2. Az elemi bázistranszformáció és alkalmazásai

9.2.1. Az elemi bázistranszformáció

A vektorterek vizsgálatánál nagyon fontos szerepet játszik a bázis megválasztása. A bázis definíciója szerint az $\mathbf{R}^n$ vektortér minden n számú lineárisan független vektorrendszer bázist alkot az n koordinátájú vektorok terében.

Vizsgáljuk meg azt, hogyan lehet a tér egy bázisáról áttérni a tér egy másik bázisára!

Definíció. Ha az $\mathbf{R}^n$ tér valamely adott bázisáról áttérünk egy másik bázisára, akkor *bázistranszformációról* beszélünk.

Definíció. A bázistranszformációnak azt a legegyszerűbb esetét, amelynél az adott bázisnak egy lépésben csak egy bázisvektorát cseréljük ki, *elemi bázistranszformációnak* nevezzük.

Legyen az $\mathbf{R}^n$ vektortér egy bázisa a $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_n$ vektorrendszer. Legyen továbbá $\mathbf{c} \neq 0$ az $\mathbf{R}^n$ egy vektora. A $\mathbf{c}$ kifejezhető a bázisvektorok lineáris kombinációjaként, azaz

$$\mathbf{c} = c_1 \mathbf{b}_1 + c_2 \mathbf{b}_2 + \dots + c_n \mathbf{b}_n,$$

ahol a $c_1, c_2, \dots, c_n$ skalárok a $\mathbf{c}$ vektornak a $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_n$ bázisra vonatkozó koordinátáit jelentik.

Annak a feltétele, hogy a $\mathbf{c}$ vektort a $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_n$ bázisba beírassuk például a $\mathbf{b}_1$ vektor helyébe, az, hogy a $\mathbf{c}$ vektornak a $\mathbf{b}_1$ bázisra vonatkozó koordinátája nullától különböző legyen.

Kérdés: Hogyan alakulnak az $\mathbf{R}^n$ vektorainak a koordinátái az elemi bázistranszformáció végrehajtása után?

Tegyük fel, hogy az $\mathbf{R}^n$ egyik tetszőleges $\mathbf{x}$ vektorának a $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_n$ bázisra vonatkozó koordinátái az $x_1, x_2, \dots, x_n$ skalárok. Ez azt jelenti, hogy

$$\mathbf{x} = x_1 \mathbf{b}_1 + x_2 \mathbf{b}_2 + \dots + x_n \mathbf{b}_n.$$

Tegyük fel, hogy az adott kikötés mellett áttérünk a $\mathbf{c}, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_n$ bázisra. Mivel $c_1 \neq 0$, így $\mathbf{c} = c_1 \mathbf{b}_1 + c_2 \mathbf{b}_2 + \dots + c_n \mathbf{b}_n$ alapján

$$\mathbf{b}_1 = \frac{1}{c_1} \cdot \mathbf{c} - \frac{1}{c_1} \cdot c_2 \cdot \mathbf{b}_2 - \dots - \frac{1}{c_1} \cdot \mathbf{b}_n.$$

Ezt a formulát az $\mathbf{x} = x_1 \mathbf{b}_1 + x_2 \mathbf{b}_2 + \dots + x_n \mathbf{b}_n$ -be helyettesítve az

$$\mathbf{x} = \left(\frac{x_1}{c_1} \cdot \mathbf{c} - \frac{x_1}{c_1} \cdot c_2 \cdot \mathbf{b}_2 - \dots - \frac{x_1}{c_1} \cdot \mathbf{b}_n \right) + x_2 \mathbf{b}_2 + \dots + x_n \mathbf{b}_n$$

egyenlőséghez jutunk, amely egy egyszerű átrendezés után

$$\mathbf{x} = \frac{x_1}{c_1} \cdot \mathbf{c} + \left(x_2 - \frac{x_1 c_2}{c_1} \right) \mathbf{b}_2 + \dots + \left(x_n - \frac{x_1 c_n}{c_1} \right) \mathbf{b}_n$$

alakra hozható. Ezt tovább alakítva:

$$\mathbf{x} = \frac{x_1}{c_1} \cdot \mathbf{c} + \left(\frac{x_2 c_1 - x_1 c_2}{c_1} \right) \cdot \mathbf{b}_2 + \dots + \left(\frac{x_n c_1 - x_1 c_n}{c_1} \right) \cdot \mathbf{b}_n$$

A jobboldalon álló

$$\frac{x_1}{c_1}; \left(\frac{x_2 c_1 - x_1 c_2}{c_1} \right); \dots; \left(\frac{x_n c_1 - x_1 c_n}{c_1} \right)$$

skalárok az $\mathbf{x}$ vektornak az új bázisra vonatkozó koordinátáit jelentik.

A $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_n$ bázisra vonatkozó helyzet:

bázis	c	x
$\mathbf{b}_1$	c_1	x_1
$\mathbf{b}_2$	c_2	x_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\mathbf{b}_n$	c_n	x_n

A $\mathbf{c}, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_n$ bázisra vonatkozó helyzet:

bázis	c	x
$\mathbf{c}$	1	$\frac{x_1}{c_1}$
$\mathbf{b}_2$	0	$\frac{x_2 c_1 - x_1 c_2}{c_1}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\mathbf{b}_n$	0	$\frac{x_n c_1 - x_1 c_n}{c_1}$

A c_1 -et **generáló elemnek** nevezzük (generáló elem csak 0-tól különböző szám lehet).

9.2.2. Lineáris függőség/függetlenség meghatározása

A bázistranszformáció segítségével adott vektorrendszerrel el tudjuk dönteni, hogy lineárisan függő, vagy lineárisan független vektorrendszert alkot-e. Mivel a bázistranszformációs táblázat bal oldali oszlopának elemei mindig bázist alkotnak, ezért ha a vektorrendszer minden vektorát bevisszük a bázisba, akkor a vektorrendszer lineárisan független, ha nem sikerül minden vektort bevinni a bázisba, akkor a vektorrendszer lineárisan függő (mivel a fennmaradó tagok előállíthatók a többi lineáris kombinációjaként).

9.2.3. A kompatibilitás vizsgálata

Adott az $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ vektorrendszer és a $\mathbf{b}$ vektor. Feladatunk annak a vizsgálata, hogy a $\mathbf{b}$ vektor benne fekszik-e az $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ vektorok által generált lineáris altérben, azaz előáll-e a $\mathbf{b}$ az $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ lineáris kombinációjaként. A módszer azonos az előzővel, az eljárás addig tart, amíg a bázisba bevihető $\mathbf{a}_i$ vektorok el nem fogynak. Ha a $\mathbf{b}$ vektor csak az $\mathbf{a}_i$ vektorok lineáris kombinációjaként áll elő, akkor kompatibilis, ellenkező esetben nem kompatibilis.

9.2.4. Mátrix/vektorrendszer rangjának megállapítása

Mátrix vagy vektorrendszer rangjának megállapítása során azt kell megvizsgálnunk, hogy az adott oszlopvektorok közül maximálisan hány vektort tudunk bevinni a bázisba.

9.2.5. Mátrix inverzének meghatározása

Az inverz mátrixra fennáll, hogy $A \cdot A^{-1} = E$. Ez az egyenlőség azt jelenti, hogy az E egységmátrix e_i ($i = 1, 2, \dots, n$) oszlopvektorai is előállíthatók az A mátrix a_i ($i = 1, 2, \dots, n$) oszlopvektoraiból. Ezt elérhetjük olyan elemi bázistranszformációkkal, amelyekkel az E mátrix egységvektorai helyébe rendre az $a_1, a_2, \dots, a_n$ vektorokat cseréljük. Ekkor az e_i egységvektorok kifejezhetők az a_i ($i = 1, \dots, n$) vektorok lineáris kombinációjaként!

9.2.6. Egyenletrendszer megoldása

Az $A \cdot x = b$ mátrixegyenletet megoldani annyit jelent, hogy meg kell határoznunk mindazon x vektorokat, amelyek eleget tesznek az egyenletrendszernek. Keressük tehát azt az x vektort, amely a b vektort az A együtthatómátrix oszlopvektorai által generált altérre vonatkozóan kompatibilissé teszi.

Ha a kompatibilitás fennáll, akkor az egyenletrendszernek biztosan van megoldása (esetleg több is lehet), ha azonban nem áll fenn a kompatibilitás, nincs megoldás. (Azt szoktuk mondani, hogy ebben az esetben ellentmondás van az egyenletrendszer egyenletei között.)

A lineáris egyenletrendszer általános megoldását $x_r = d - D \cdot x_s$ alakban adjuk meg, ahol x_r komponensei a kiemelt x_i -k, a d komponensei a megváltozott b komponensek, az x_s az esetleg visszamaradt x_i -k, míg a D a visszamaradt együtthatómátrix.

9.3. Ellenőrző kérdések

1. Mi az a vektortér?
2. Hogyan értelmezzük a vektorok lineáris kombinációját?
3. Mikor mondjuk, hogy egy vektorrendszer lineáris független?
4. Hogyan magyarázná el, hogy mit jelent a vektorrendszer lineáris függősége?
5. Mondjon olyan tételt, amely lineáris függőségre ill. függetlenségre vonatkozik.
6. Igaz-e, hogy ha egy vektorrendszer lineárisan függő, akkor közülük egyetlen egy vektor sem állítható elő a többi lineáris kombinációjaként?
7. Igaz-e, hogy ha egy vektorrendszer lineárisan függő, akkor újabb vektort hozzávéve a vektorrendszer továbbra is lineárisan függő marad?
8. Igaz-e, hogy ha egy vektorrendszer lineárisan független, akkor bármely vektort elhagyva, a vektorrendszer továbbra is lineárisan független marad?
9. Mikor mondjuk, hogy egy vektorrendszer generátorrendszer?
10. Milyen tulajdonságokkal kell egy vektorrendszernek rendelkeznie, hogy bázis legyen?
11. Mikor mondjuk, hogy egy bázis véges dimenziós?
12. Igaz-e az, hogy egy n -dimenziós vektortér bármely vektora kifejezhető a bázisvektorainak lineáris kombinációjaként?
13. Mit értünk bázisra vonatkozó koordináták alatt?
14. Adjon meg természetes bázist háromdimenziós vektortérben.

15. Mi az az altér?
16. Hogyan definiálná a vektorrendszer rangját?
17. Mondjon olyan műveleteket, melynek alkalmazásával nem változik meg egy vektorrendszer rangja.
18. Mit jelent, hogy egy vektor kompatibilis egy vektorrendszerrel?
19. Hogyan írható fel egy lineáris egyenletrendszer mátrixos alakban?
20. Mit mond ki Kronecker-Capelli tétele?
21. Állapítsa meg, hogy az alábbi állítások közül melyek igazak, ill. hamisak.
 - a) A térbeli irányított szakaszok euklideszi teret alkotnak.
 - b) Egy vektorrendszer lineárisan független, ha a nullvektort csak csupa nulla skalárokkal vett lineáris kombinációval lehet belőlük előállítani.
 - c) Egy vektorrendszer lineárisan függő, ha bármely vektora előállítható a többi vektor lineáris kombinációjaként.
 - d) Az n dimenziós vektortér bármely vektora kifejezhető bázisvektorainak lineáris kombinációjaként.
 - e) A vektorrendszer rangja megegyezik a benne lévő maximális számú lineárisan független vektorok számával.
 - f) Egy vektor kompatibilis egy vektorrendszerrel, ha a vektor kifejezhető a vektorrendszer vektorainak lineáris kombinációjaként.
22. Mi az a bázistranszformáció?
23. Mit nevezünk elemi bázistranszformációnak?
24. Mire alkalmazható a bázistranszformáció módszere?
25. Hogyan lehet bázistranszformációval megállapítani egy vektorrendszerről, hogy az lineárisan függő, vagy független-e?
26. Hogyan lehet bázistranszformációval megállapítani, hogy egy vektor kompatibilis-e egy vektorrendszerrel?
27. Mondja el, hogy bázistranszformáció segítségével hogyan állapítja meg egy mátrixról annak rangját?
28. Mutassa be, hogy bázistranszformáció alkalmazásával hogy lehet megadni egy mátrix inverzét.
29. Mi a feltétele annak, hogy bázistranszformáció segítségével meghatározzuk egy egyenletrendszer megoldását? Mi a megoldhatóság feltétele?
30. Homogén lineáris egyenletrendszer megoldható bázistranszformációval?
31. Írja fel a lineáris egyenletrendszer általános megoldását bázistranszformáció alkalmazása esetén.

10. TÖBBVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK

Az eddigiekben csak egyváltozós valós függvényekről volt szó, ahol a függvény értelmezési tartománya és értékkészlete is a valós számok valamely részhalmaza volt. Az egyváltozós valós függvény megadja, hogy a független változó megváltozásának hatására a függő változó hogyan reagál. A gyakorlatban előforduló feladatok jelentős részét azonban nem tudjuk kezelni az egyváltozós valós függvényekre vonatkozó ismereteink segítségével, így szükségünk van arra, hogy bevezessük a **többváltozós függvény** fogalmát. Tekintsük az alábbi egyszerű példát:

Tegyük fel, hogy egy gazdaság 500 hektáron búzát, 400 hektáron kukoricát, 200 hektáron burgonyát, 100 hektáron napraforgót és 50 hektáron dohányt termel. A különböző növények termésátlagai bizonyos intervallumokon belül változnak. Ha az x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 szimbólumok a növények termésátlagait jelölik, akkor a gazdaság adottságait ismerve feltehetjük, hogy a

$$0 \leq x_1 \leq 50,$$

$$0 \leq x_2 \leq 100,$$

$$0 \leq x_3 \leq 300,$$

$$0 \leq x_4 \leq 20,$$

$$0 \leq x_5 \leq 60$$

relációk teljesülnek.

Ha meg akarjuk határozni a megtermelt termék várható összmenyiségét (jelöljük ezt y -nal), akkor ezt úgy tehetjük meg, hogy rögzítjük az x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 értékét, s ezeket a rögzített termésátlagokat a megfelelő termelési területekkel megszorozzuk, majd az eredményeket összeadjuk. Számos – a feltételek által megengedett - termésátlag változathoz meghatározhatóak az összmenyiségek. Az összmenyiségek értékei (y -ok) egy halmazt alkotnak, amelyet jelöljünk Y -nal. A termésátlagok egy-egy rögzített szám-ötöséhez (amely $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ módon jelölhető, ahol az x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 sorrendje kötött) tartozik egy "y" érték, amely számötösöket szintén tekinthetjük egy halmaz (X) elemeinek. Amikor kiszámítjuk a termésátlagok egy rögzített számötöséhez a várható összes termékmennyiséget, nem teszünk mást, mint az előbbieken megadott két halmaz egy-egy elemét egymáshoz rendeljük, azaz az X halmaz elemeihez hozzárendeljük az Y halmaz elemeit. A hozzárendelés szabályát az

$$y = 500x_1 + 400x_2 + 200x_3 + 100x_4 + 50x_5$$

reláció adta meg, amely egy ötváltozós függvény. A többváltozós függvénytanunk mi csak azon részével foglalkozunk, amelyek a további tanulmányaink során szükségesek.

10.1. Euklideszi tér, skaláris szorzat, norma, távolság

Definíció. Legyen adott az $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ és $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, az $\mathbf{R}^n$ (n -dimenziós vektortér) két tetszőleges eleme. A két vektor **skaláris szorzatán** (vagy belső szorzatán) a következő valós számot értjük:

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n = \sum_{i=1}^n x_i y_i \in \mathbf{R}.$$

A skaláris szorzat tulajdonságai. Legyen $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathbf{R}^n$ tetszőlegesen adott. Ekkor

- (1) $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \geq 0$, továbbá $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 0$ pontosan akkor, ha $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.
- (2) $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle$, azaz szimmetrikus,
- (3) $\langle \alpha \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \alpha \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$, ahol $\alpha \in \mathbf{R}$, azaz homogén,
- (4) $\langle \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}_1, \mathbf{y} \rangle + \langle \mathbf{x}_2, \mathbf{y} \rangle$, azaz additív.

Megjegyzés. Az $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0$ egyenlőségből nem következik, hogy a szorzat valamelyik tényezője nulla. Ha $\mathbf{x} = (1, 1, 1) \in \mathbf{R}^3$ és $\mathbf{y} = (1, 2, -3) \in \mathbf{R}^3$, ekkor az $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0$, de $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ és $\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$.

Definíció. A belsőszorzattal ellátott $\mathbf{R}^n$ vektorteret *n-dimenziós euklideszi térnek* nevezzük.

A skaláris szorzat értelmezése lehetővé teszi, hogy a valós szám abszolút értékének a fogalmát az $\mathbf{R}^n$ térre is kiterjesszük.

Definíció. Legyen $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$. Az $\mathbf{x}$ vektor *hosszán*, vagy *euklideszi normáján* az

$$|\mathbf{x}| = \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$$

Tétel. Legyen α tetszőleges valós szám, $\mathbf{x}$ és $\mathbf{y}$ pedig két tetszőleges $\mathbf{R}^n$ -beli vektor. Ekkor igazak a következő állítások:

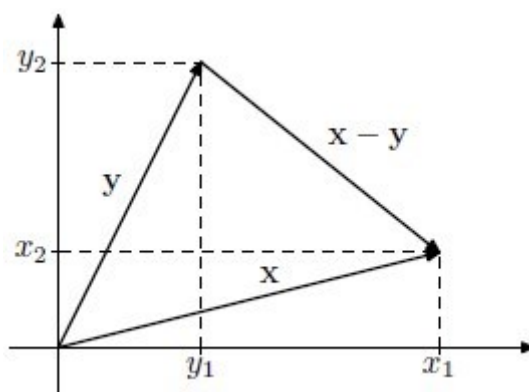
- (1) $|\mathbf{x}| \geq 0$, és $|\mathbf{x}| = 0$ pontosan akkor, ha $\mathbf{x} = \mathbf{0}$,
- (2) $|\alpha \cdot \mathbf{x}| = |\alpha| \cdot |\mathbf{x}|$, továbbá érvényes az
- (3) $|\mathbf{x} + \mathbf{y}| \leq |\mathbf{x}| + |\mathbf{y}|$ egyenlőtlenség, amit háromszög-egyenlőtlenségnek nevezünk.

Az euklideszi norma segítségével definiálhatjuk az $\mathbf{R}^n$ -ben a távolság fogalmát is.

Definíció. Legyen $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{R}^n$. Ezek egymástól való *távolságát* – amit $q(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ -nal jelölünk – a következő egyenlőséggel értelmezzük:

$$q(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = |\mathbf{y} - \mathbf{x}| = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + \dots + (y_n - x_n)^2}.$$

Az $\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2$ és az $\mathbf{y} = (y_1, y_2) \in \mathbf{R}^2$ vektorok távolsága a 53. ábra alapján a Pithagorasz-tétel segítségével számolható az $|\mathbf{x} - \mathbf{y}| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$ képlettel.



53. ábra: Két $\mathbf{R}^2$ -beli vektor távolsága

Forrás: Bíró és Vincze (2000)

Tétel. Ha $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ és $\mathbf{z}$ az $\mathbf{R}^n$ tetszőleges vektora, akkor

- (1) $q(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \geq 0$, és a $q(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$ pontosan akkor, ha $\mathbf{x} = \mathbf{y}$,
- (2) $q(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = q(\mathbf{y}, \mathbf{x})$,
- (3) $q(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \leq q(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + q(\mathbf{y}, \mathbf{z})$.

10.2. Többváltozós függvények határértéke, folytonossága

Legyen $D \subseteq \mathbf{R}^n$. Az $f: D \rightarrow \mathbf{R}$ függvényt ***n*-változós valósértékű függvénynek** nevezzük. A függvényt jelölhetjük a következőképpen:

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \text{ vagy } y = f(\mathbf{x}), \text{ ahol } \mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n.$$

Definíció. Az $\mathbf{x}_0 \in \mathbf{R}^n$ pont ***r* sugarú (nyílt gömb) környezete** a következő:

$$G(\mathbf{x}_0, r) = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n \mid |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| < r\}$$

Definíció. Az $\mathbf{x}_0 \in \mathbf{R}^n$ pont a $H \subseteq \mathbf{R}^n$ halmaz ***belső pontja***, ha van az $\mathbf{x}_0$ -nak olyan $G(\mathbf{x}_0, r)$ környezete, amely benne van a H -ban.

Definíció. Az $\mathbf{x}_0 \in \mathbf{R}^n$ pont a $H \subseteq \mathbf{R}^n$ halmaz ***torlódási pontja***, ha az $\mathbf{x}_0$ -nak minden $G(\mathbf{x}_0, r)$ környezetében van tőle különböző H -beli pont.

Definíció. Az $\mathbf{x}_m \in \mathbf{R}^n$ ***vektorsorozat konvergens*** és határértéke az $\mathbf{x}_0 \in \mathbf{R}^n$ vektor, ha minden $\varepsilon > 0$ -hoz létezik $M_\varepsilon \in \mathbf{N}$ küszöbszám úgy, hogy $m > M_\varepsilon$ esetén $|\mathbf{x}_m - \mathbf{x}_0| < \varepsilon$.

Jele: $\lim_{m \rightarrow \infty} \mathbf{x}_m = \mathbf{x}_0$

Definíció: Legyen $D \subseteq \mathbf{R}^n$, $\mathbf{x}_0$ a D halmaz torlódási pontja. $f: D \rightarrow \mathbf{R}$ ***függvény határértéke*** $\mathbf{x}_0$ -ban A , ha minden $\lim_{m \rightarrow \infty} \mathbf{x}_m = \mathbf{x}_0$ sorozat esetén, ahol $\mathbf{x}_m \in D \setminus \{\mathbf{x}_0\}$, a függvényértékek $(f(\mathbf{x}_m))$ sorozata A -hoz konvergál. Jele: $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = A$.

Definíció. Legyen $D \subseteq \mathbf{R}^n$, $f: D \rightarrow \mathbf{R}$. Az f ***függvény folytonos*** az $\mathbf{x}_0 \in D$ -ben, ha minden $\varepsilon > 0$ -hoz létezik $\delta > 0$ úgy, hogy minden $\mathbf{x} \in D$ -re $|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| < \delta$ esetén $|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0)| < \varepsilon$.

Megjegyzés. Legyen $D \subseteq \mathbf{R}^n$, $f: D \rightarrow \mathbf{R}$. Az f pontosan akkor folytonos az $\mathbf{x}_0$ torlódási pontban, ha

- (1) $\mathbf{x}_0$ -ban értelmezve van,
- (2) létezik az f határértéke $\mathbf{x}_0$ -ban,
- (3) az $\mathbf{x}_0$ -beli határérték megegyezik a helyettesítési értékkel.

10.3. Parciális deriváltak

Definíció. Egy $D \subseteq \mathbf{R}^2$ halmazon értelmezett kétváltozós $f: D \rightarrow \mathbf{R}$ függvény $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$ pontbeli ***első változója szerinti parciális deriváltja*** alatt a

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a_1 + h, a_2) - f(a_1, a_2)}{h} = f'_{x_1}(\mathbf{a}) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{a})$$

határértéket értjük, ha ez létezik.

Definíció. Legyen $f: D(\subseteq \mathbf{R}^n) \rightarrow \mathbf{R}$ n -változós valós függvény, az f függvénynek az $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in D$ pontbeli x_j változó szerinti parciális deriváltjának a

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{a}) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a_1, \dots, a_{j-1}, a_j + h, a_{j+1}, \dots, a_n) - f(a_1, \dots, a_{j-1}, a_j, a_{j+1}, \dots, a_n)}{h}$$

határértéket nevezzük, amennyiben létezik.

A parciális deriváltak jelölésére használatosak még az alábbi jelek is:

$$f'_{x_j}(\mathbf{a}) = \partial_{x_j} f(\mathbf{a}) = \partial_j f(\mathbf{a}) = f'_j(\mathbf{a}) \quad (j = 1, \dots, n).$$

Megjegyzés. A parciális derivált nem egyéb, mint az $\mathbf{a}$ ponton áthaladó, j -edik koordináta tengellyel párhuzamos egyenesre leszűkített, és így már csak egyetlen, a j -edik változótól függő függvény közöséges deriváltja az $\mathbf{a}_j$ pontban.

Definíció. Az $f_{x_j}: D(\subseteq \mathbf{R}^n) \rightarrow \mathbf{R}$ függvényt, mely az értelmezési tartomány minden $\mathbf{a}$ pontjához az $f_{x_j}(\mathbf{a})$ -t ($j = 1, \dots, n$) rendeli, az x_j **változó szerinti parciális deriváltfüggvénynek** nevezzük.

A parciális deriváltaknál sokszor folytonosan differenciálhatóságot követelünk meg. Értelmezzük a folytonosan differenciálhatóság fogalmát az értelmezési tartomány egy pontjában, illetve az egész értelmezési tartományon.

Definíció. Az $f: D(\subseteq \mathbf{R}^n) \rightarrow \mathbf{R}$ függvény **folytonosan differenciálható**

- (1) az $\mathbf{a} \in D$ pontban, ha a egy gömbkörnyezetében léteznek a parciális deriváltak és az $\mathbf{a}$ -ban folytonosak,
- (2) a D halmazon (értelmezési tartományon), ha a parciális deriváltjai D minden pontjában léteznek és folytonosak.

A parciális deriváltfüggvények meghatározása a gyakorlatban az egyváltozós valós függvényekre megismert deriválási szabályok alkalmazásával történik úgy, hogy az x_j -n kívüli változókat átmenetileg konstansnak tekintjük.

10.4. Deriválási szabályok

Tétel. Legyen adott a $h: D(\subseteq \mathbf{R}^n) \rightarrow \mathbf{R}$, $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$ és ($j = 1, 2, \dots, n$). Ha

- (1) $h(\mathbf{x}) = c \cdot f(\mathbf{x})$, akkor $\frac{\partial h}{\partial x_j}(\mathbf{x}) = c \cdot \frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{x})$,
- (2) $h(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})$, akkor $\frac{\partial h}{\partial x_j}(\mathbf{x}) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{x}) + \frac{\partial g}{\partial x_j}(\mathbf{x})$,
- (3) $h(\mathbf{x}) = \frac{f(\mathbf{x})}{g(\mathbf{x})}$, akkor $\frac{\partial h}{\partial x_j}(\mathbf{x}) = \frac{\frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{x}) \cdot g(\mathbf{x}) - \frac{\partial g}{\partial x_j}(\mathbf{x}) \cdot f(\mathbf{x})}{[g(\mathbf{x})]^2}$, ha $g(\mathbf{x}) \neq 0$,
- (4) $h(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) \cdot g(\mathbf{x})$, akkor $\frac{\partial h}{\partial x_j}(\mathbf{x}) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{x}) \cdot g(\mathbf{x}) + \frac{\partial g}{\partial x_j}(\mathbf{x}) \cdot f(\mathbf{x})$
- (5) $h(\mathbf{x}) = f(g(\mathbf{x}))$, akkor $\frac{\partial h}{\partial x_j}(\mathbf{x}) = f'(g(\mathbf{x})) \cdot \frac{\partial g}{\partial x_j}(\mathbf{x})$, ha f egyváltozós függvény.

Tétel. Legyen $E \subseteq \mathbf{R}^n$, $g: E \rightarrow \mathbf{R}$ folytonosan differenciálható. Legyen $D \subseteq \mathbf{R}^n$, $f_i: D \rightarrow \mathbf{R}$ ($i = 1, \dots, k$) folytonosan differenciálható. Amennyiben minden $x \in D$ esetén $y = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_k(x)) \in E$, akkor a D halmazon értelmezett

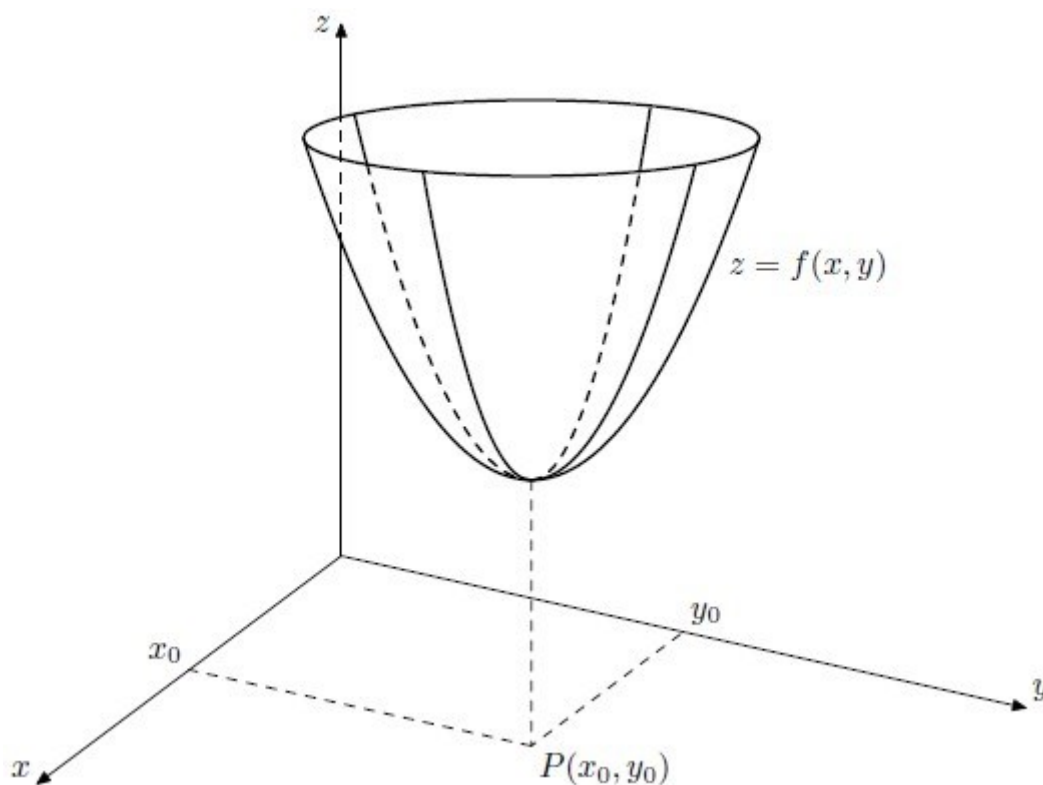
$$x \mapsto h(x) = g(y) = g(f_1(x), f_2(x), \dots, f_k(x))$$

összetett függvény is folytonosan differenciálható, és a j -edik változó szerinti parciális deriváltjai a következő szabállyal kaphatók:

$$\partial_j h(x) = \partial_1 g(y) \cdot \partial_j f_1(x) + \partial_2 g(y) \cdot \partial_j f_2(x) + \dots + \partial_k g(y) \cdot \partial_j f_k(x)$$

10.5. A többváltozós függvények szélsőérték-számítása

A többváltozós függvények a mezőgazdasági gyakorlatban elsősorban különféle mennyiségek egymásra gyakorolt hatásának vizsgálatában, valamint különféle gazdasági problémák optimális megoldásában játszanak jelentős szerepet. A gazdasági problémák optimális megoldását általában többváltozós függvények szélsőértékeik meghatározására lehet visszavezetni. Tekintsük az 54. ábrán látható kétváltozós függvény grafikonját:



54. ábra: A kétváltozós függvény grafikonja

Forrás: Bíró és Vincze (2000)

Az 54. ábrán látható, hogy az f -nek az értelmezési tartomány $P(x_0, y_0)$ pontjában lokális minimuma van. A kérdés az, hogy hogyan kereshetők meg a többváltozós függvények szélsőérték helyei.

10.6. Többváltozós függvények lokális és globális maximuma és minimuma

Definíció. Az $f: D(\subseteq \mathbf{R}^n) \rightarrow \mathbf{R}$ n -változós függvény valós függvénynek az értelmezési tartomány $\mathbf{x}_0$ pontjában *helyi* (lokális) *maximuma* van, ha az $\mathbf{x}_0$ -nak valamely $G(\mathbf{x}_0, r)$ környezetében $f(\mathbf{x}_0) \geq f(\mathbf{x})$ minden $\mathbf{x} \in D \cap G(\mathbf{x}_0, r)$ esetén. *Globális maximumról* beszélünk, ha a fenti reláció nemcsak $\mathbf{x}_0$ valamely környezetében, hanem az egész értelmezési tartományon fennáll.

Definíció. Az $f: D(\subseteq \mathbf{R}^n) \rightarrow \mathbf{R}$ n -változós függvény valós függvénynek az $\mathbf{x}_0 \in D$ pontban *helyi* (lokális) *minimuma* van, ha az $\mathbf{x}_0$ -nak valamely $G(\mathbf{x}_0, r)$ környezetében $f(\mathbf{x}_0) \leq f(\mathbf{x})$ minden $\mathbf{x} \in D \cap G(\mathbf{x}_0, r)$ esetén. *Globális minimumról* beszélünk, ha a fenti reláció nemcsak $\mathbf{x}_0$ valamely környezetében, hanem az egész értelmezési tartományon fennáll.

10.7. A magasabbrendű parciális derivált fogalma

A többváltozós függvények parciális deriváltjait a továbbiakban elsőrendű parciális deriváltaknak nevezzük. Többváltozós függvények szélsőértékhelyének meghatározására az első- és másodrendű parciális deriváltakat használjuk fel, ehhez azonban még értelmeznünk kell a többváltozós függvények magasabbrendű parciális deriváltjait.

Definíció. Az $f: D(\subseteq \mathbf{R}^n) \rightarrow \mathbf{R}$ n -változós valós függvény parciális deriváltjainak parciális deriváltjai – amennyiben azok léteznek – *másodrendű parciális deriváltaknak* nevezzük.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\mathbf{a}) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a}) \right) \quad (i, j=1, 2, \dots, n)$$

Ezek az f függvény $\mathbf{a}$ pontbeli x_i és x_j változó szerinti másodrendű parciális deriváltjai. További jelölések: $\frac{\partial^2 f}{\partial x_{jx_i}}(\mathbf{a}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_{ji}}(\mathbf{a}) = f''_{x_{jx_i}}(\mathbf{a}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\mathbf{a})$.

Megjegyzés. Hasonlóan értelmezhetők a magasabbrendű parciális deriváltak is. Ha $i = j$, akkor *tiszta másodrendű parciális deriváltról*, ha $i \neq j$, akkor pedig *vegyes másodrendű*

parciális deriváltról beszélünk. $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ és $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ tiszta másodrendű parciális deriváltak, a $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$

és $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ pedig vegyes másodrendű parciális deriváltak.

Tétel. Az $f: D(\subseteq \mathbf{R}^n) \rightarrow \mathbf{R}$ kétszer folytonosan differenciálható n -változós valós függvény vegyes másodrendű parciális deriváltjai megegyeznek, azaz

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_{ij}}(\mathbf{x}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_{ji}}(\mathbf{x})$$

minden $i, j = 1, 2, \dots, n$ és $\mathbf{x} \in D$ esetén.

10.8. A többváltozós függvények feltétel nélküli szélsőértékének meghatározása

Tétel (szükséges feltétel). Ha az $f: (\subseteq \mathbf{R}^n) \rightarrow \mathbf{R}$ n -változós függvénynek az $\mathbf{a} \in D$ belső pontjában lokális szélsőértéke van, és itt léteznek az elsőrendű parciális deriváltak, akkor ezek mindegyike nulla, azaz

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{a}) = 0 \quad (j = 1, \dots, n).$$

A tétel alapján tehát a többváltozós függvények lehetséges szélsőértékeinek a meghatározása úgy történhet, hogy a parciális deriváltakat egyenlővé tesszük nullával, majd a kapott egyenletrendszert megoldjuk. Így a szélsőértékek a megoldások között lesznek. A valódi szélsőérték helyek megkeresésében az alábbi tétel áll rendelkezésünkre.

Tétel (elégséges feltétel). Legyen $D \subseteq \mathbf{R}^n$, $f: D \rightarrow \mathbf{R}$ n -változós függvény. Tegyük fel, hogy az f függvény az $\mathbf{a} \in D$ belső pont valamely környezetében kétszer folytonosan differenciálható. Ha az f parciális deriváltjai az $\mathbf{a}$ -ban nullák, azaz

$$\partial_j f(\mathbf{a}) = 0 \quad (j = 1, \dots, n),$$

és a másodrendű parciális deriváltakból alkotott

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1}(\mathbf{a}) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(\mathbf{a}) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(\mathbf{a}) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(\mathbf{a}) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_2}(\mathbf{a}) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n}(\mathbf{a}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(\mathbf{a}) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2}(\mathbf{a}) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_n}(\mathbf{a}) \end{pmatrix}$$

mátrixból képzett

$$D_1(\mathbf{a}) = \left| \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(\mathbf{a}) \right|$$

$$D_2(\mathbf{a}) = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(\mathbf{a}) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(\mathbf{a}) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(\mathbf{a}) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(\mathbf{a}) \end{vmatrix}$$

$$D_3(\mathbf{a}) = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(\mathbf{a}) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(\mathbf{a}) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3}(\mathbf{a}) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(\mathbf{a}) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(\mathbf{a}) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3}(\mathbf{a}) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_1}(\mathbf{a}) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_2}(\mathbf{a}) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2}(\mathbf{a}) \end{vmatrix}$$

sarokdeterminánsainak előjelére

(1) $D_k(\mathbf{a}) > 0$ ($k = 1, \dots, n$), akkor $\mathbf{a}$ -ban minimuma van

(2) $D_1(\mathbf{a}) < 0$, $D_2(\mathbf{a}) > 0$, $D_3(\mathbf{a}) < 0, \dots$, azaz az adott sorrendben váltakozó előjelűek, akkor $\mathbf{a}$ -ban maximuma van.

A szélsőértéket az $f(\mathbf{a})$ adja.

Megjegyzés. Egyéb esetekben további vizsgálatokra van szükség.

Vizsgáljuk meg, hogy kétváltozós függvény esetében hogyan alakul az elégséges feltétel.

Legyen $D \subseteq \mathbf{R}^2$, $f: D \rightarrow \mathbf{R}$ kétváltozós függvény. Tegyük fel, hogy az $\mathbf{a} \in D$ -ben az f elsőrendű parciális deriváltjai eltűnnek. Ekkor

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\mathbf{a}) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\mathbf{a}) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\mathbf{a}) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\mathbf{a}) \end{pmatrix}$$

azaz

$$D_1 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\mathbf{a})$$

$$D_2 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\mathbf{a}) \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\mathbf{a}) - \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\mathbf{a}) \right]^2.$$

Azaz a tétel alapján, ha $D_1 > 0$ és $D_2 > 0$, akkor a minimumhely, ha $D_1 < 0$ és $D_2 > 0$, akkor $\mathbf{a}$ maximumhely.

Tehát a szélsőérték létezése D_2 előjelétől függ: ha D_2 pozitív, akkor biztosan szélsőértékhely, és D_1 előjelétől függően minimum-, vagy maximumhely.

Észrevehetjük azt is, hogy ha D_2 pozitív, akkor minden esetben eldönthető, hogy minimumról, vagy maximumról van-e szó, mivel $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\mathbf{a}) \neq 0$, mert ebben az esetben D_2 negatív lenne.

Amennyiben $D_2 < 0$, úgy biztosan nem szélsőértékhely az $\mathbf{a}$ pont. Amennyiben $D_2 = 0$, akkor előfordulhat, hogy az $\mathbf{a}$ pont szélsőértékhely, de az is lehet, hogy nem az.

10.9. Feltételes szélsőérték

Az eddig tárgyalt szélsőérték-feladatokat feltétel nélküli szélsőérték-feladatoknak nevezzük. Nem támasztottunk ugyanis feltételt arra vonatkozólag, hogy az értelmezési tartomány milyen résztartományában keressük a szélsőértéket, valamint hogy a résztartomány értékei milyen megszabott feltételeknek tegyenek eleget.

Definíció. Legyen adva az m, n két természetes szám ($m \leq n \in \mathbf{N}$), illetve a

$$g_i: D (\subseteq \mathbf{R}^n) \rightarrow \mathbf{R} \quad (i = 1, 2, 3, \dots, m)$$

$$f: D (\subseteq \mathbf{R}^n) \rightarrow \mathbf{R}$$

függvények. Legyenek továbbá $H = \{\mathbf{x} \in D \mid g_i(\mathbf{x}) = 0, i = 1, 2, 3, \dots, m\}$. Azt mondjuk, hogy az $f: D (\subseteq \mathbf{R}^n) \rightarrow \mathbf{R}$ n -változós függvénynek az $\mathbf{a} \in D$ -ben a $g_i(\mathbf{x}) = 0$ feltételekre vonatkozó **lokális feltételes maximuma** van, ha az $\mathbf{a}$ -nak van olyan $G(\mathbf{a}, r)$ környezete, hogy az $\mathbf{x} \in G(\mathbf{a}, r) \cap H$ pontokban $f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{a})$.

A globális feltételes maximum értelmezése ettől annyiban tér el, hogy a gömbkörnyezettől el kell tekinteni, és minden H -beli x -re meg kell követelni a fenti egyenlőtlenséget.

Megjegyzés. Hasonló módon értelmezhető a **lokális**, illetve **globális feltételes minimum** is. Feladatunk ezúttal az, hogy úgy keressük meg az $f: D (\subseteq \mathbf{R}^n) \rightarrow \mathbf{R}$ n -változós függvény szélsőértékhelyeit, hogy a $g_i(\mathbf{x}) = 0$ ($i = 1, 2, 3, \dots, m$) formában felírt egyenleteknek is teljesülni kell.

Adott az n -változós $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ függvény. Ennek keressük a szélsőértékét azzal a megszorítással, hogy az eredeti értelmezési tartományból csak azokat a pontokat vehetjük figyelembe, amelyek kielégítik a következő feltételeket:

$$g_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0,$$

$$g_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0,$$

$$\vdots$$

$$g_m(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0.$$

A megoldás lehetőségét **Lagrange** francia matematikus teremtette meg az ún. **multiplikátor módszerrel**.

Ezzel a módszerrel először bevezetjük a $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ (nem mind 0) új változókat, amelyeket multiplikátoroknak nevezünk. Másodszor egy új függvény, az ún. **Lagrange-féle függvény** megalkotásával feltétel nélküli szélsőérték-feladatra vezetjük vissza az eredeti problémát. A Lagrange-féle függvény alakja:

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) + \lambda_1 \cdot g_1(x_1, x_2, \dots, x_n) + \\ + \lambda_2 \cdot g_2(x_1, x_2, \dots, x_n) + \dots + \lambda_m \cdot g_m(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Most már ennek az $(n+m)$ -változós függvénynek kell megkeresni a feltétel nélküli szélsőértékét. A szélsőérték létezésének szükséges feltétele:

$$\begin{array}{ccc} \frac{\partial L}{\partial x_1} = 0 & \frac{\partial L}{\partial x_2} = 0 & \dots & \frac{\partial L}{\partial x_n} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda_1} = 0 & \frac{\partial L}{\partial \lambda_2} = 0 & \dots & \frac{\partial L}{\partial \lambda_m} = 0. \end{array}$$

Tétel (szükséges feltétel, Lagrange-féle multiplikátor módszer). Tegyük fel, hogy

- (1) az $f, g_i: D (\subseteq \mathbf{R}^n) \rightarrow \mathbf{R}$ függvények folytonosan differenciálhatók,
- (2) az f függvények az $\mathbf{a} \in D$ pontban a $g_i(\mathbf{x}) = 0$ ($i = 1, 2, 3, \dots, m$) feltételekre vonatkozó lokális feltételes szélsőértéke van,
- (3) a $(\partial_1 g_i(\mathbf{a}), \dots, \partial_n(g_i(\mathbf{a})))$, $i = 1, 2, \dots, m$ vektorok lineárisan függetlenek

Ekkor vannak olyan $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbf{R}$ skalárok (az ún- Lagrange-féle multiplikátorok), hogy az

$$L(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) + \lambda_1 \cdot g_1(\mathbf{x}) + \dots + \lambda_m \cdot g_m(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^m \lambda_i \cdot g_i(\mathbf{x})$$

függvény összes parciális deriváltja eltűnik az $\mathbf{a}$ pontban, azaz

$$(\partial_j L(\mathbf{a})) = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n).$$

Általában annak eldöntése, hogy a kapott megoldások valóban lokális feltételes szélsőérték helyek-e, vagy sem, nem könnyű feladat, így ettől eltekintünk.

Megjegyzés. Azzal az esettel foglalkoztunk, amikor a feltételek egyenlőség formájában adóttak. Az egyenlőtlenség formájában megadott feltételek esetén történő célfüggvény-maximalizálással, illetve – minimalizálással, ha az f lineáris, a lineáris programozás foglalkozik.

10.10. Ellenőrző kérdések

1. Mit értünk két vektor skaláris szorzatán?
2. Definiálja az n -dimenziós Euklideszi tér fogalmát.
3. Definiálja a többváltozós függvények határértékét és folytonosságát.
4. Mikor mondjuk az f többváltozós függvényről, hogy folytonosan differenciálható?
5. Magyarázza el a parciális deriválás lényegét.
6. Definiálja a többváltozós függvények lokális és globális maximumát és minimumát.
7. Adja meg a magasabbrendű parciális derivált fogalmát.
8. Hogyan határozhatjuk meg a többváltozós függvények feltétel nélküli szélsőértékét?
9. Ismertesse a többváltozós függvények feltételes szélsőérték- számításának lépéseit.
10. Mi az a Lagrange- féle multiplikátorok módszere?

11. KOMBINATORIKA

A kombinatorika a véges halmazokkal foglalkozik. A véges halmazokkal kapcsolatban számos olyan probléma vethető fel, amely független a halmazok elemeitől. Például: hányféleképpen lehet n elemű halmazból k elemű részhalmazt kiválasztani, n tárgyat hányféleképpen lehet szétosztani k személy között stb.?

A vizsgálandó problémát két fő témakör köré csoportosíthatjuk:

- (1) egy halmaz elemeinek különböző sorrendben történő elhelyezése, illetve
- (2) egy halmaz elemeiből különböző módon való kiválasztás.

Attól függően, hogy a csoportosítás milyen szabály szerint történik, beszélhetünk:

- (1) permutációról,
- (2) variációról,
- (3) kombinációról.

11.1. Permutáció

11.1.1. Ismétlés nélküli permutáció

Definíció. Adott n különböző elem. Az elemek egy meghatározott sorrendjét az adott n elem egy *ismétlés nélküli permutációjának* (röviden: permutációnak) nevezzük. Az n elem permutációinak a számát P_n szimbólummal jelöljük. A permutációk képzését *permutálásnak* hívjuk.

Tétel. Az adott n elem ismétlés nélküli permutációinak a száma $P_n = n!$

Megjegyzés. Az $n!$ (kiejtve "n faktoriális") az első n természetes szám szorzata:

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n, \text{ és } 0! = 1.$$

Példa. Hány ötjegyű számot írhatunk fel az 1,2,3,4,5 számjegyekből?

Megoldás: $P_5 = 5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$

11.1.2. Ismétléses permutáció

Definíció. Adott n elem, melyek között r ($r \leq n$) különböző található, ezek $a_1, a_2, \dots, a_r$. Az a_1 elem k_1 -szer, az a_2 elem k_2 -szer, ..., az a_r elem k_r -szer fordul elő és $k_1 + k_2 + \dots + k_r = n$. Az adott n elem egy meghatározott sorrendjét ezen elemek egy *ismétléses permutációjának* nevezzük. A szóba jöhető ismétléses permutációk számát $P_n^{k_1, k_2, \dots, k_r} = \frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \dots \cdot k_r!}$ szimbólummal jelöljük.

Példa. Hány ötjegyű számot írhatunk fel a 4,4,4,5,5 számjegyekből?

$$\text{Megoldás: } P_5^{3,2} = \frac{5!}{3! \cdot 2!} = \frac{120}{6 \cdot 2} = 10$$

11.2. Variáció

11.2.1. Ismétlés nélküli variáció

Definíció. Adott n különböző elem. Ha az n elem közül k elemet ($0 < k \leq n$) úgy választunk ki, hogy mindegyik csak egyszer kerül sorra, és a kiválasztás sorrendje is számít, akkor az n elem egy k -adosztályú **ismétlés nélküli variációját** kapjuk. Az n elem k -adosztályú variációinak számát a V_n^k szimbólummal jelöljük.

Tétel. Az n különböző elem k -ad osztályú ismétlés nélküli variációinak száma

$$V_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1).$$

Megjegyzés. Ha $n = k$, akkor $V_n^k = V_n^n = \frac{n!}{0!} = n! = P_n$.

Példa. Hányféleképpen rendelhetünk 3 gömbös fagyaltot, ha 8 ízből választhatunk és egy ízből csak egyet gömböt rendelünk, valamint az ízek sorrendjére tekintettel vagyunk.

Megoldás: $v_8^3 = \frac{8!}{(8-3)!} = \frac{8!}{5!} = 8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$

11.2.2. Ismétléses variáció

Definíció. Adott n különböző elem. Ha az n elem közül k elemet úgy választunk ki, hogy egy elem többször is sorra kerülhet, és a kiválasztás sorrendje is számít, akkor az n elem egy k -adosztályú **ismétléses variációját** kapjuk. Az n elem k -adosztályú variációinak számát a $V_n^{k,i}$ szimbólummal jelöljük.

Tétel. Az n különböző elem k -ad osztályú ismétléses variációinak száma

$$V_n^{k,i} = n^k.$$

Példa. Hányféleképpen rendelhetünk 3 gömbös fagyaltot, ha 8 ízből választhatunk és egy ízből több gömböt is rendelhetünk, valamint az ízek sorrendje is számít.

Megoldás: $v_8^{3,i} = 8^3 = 8 \cdot 8 \cdot 8 = 512$

11.3. Kombináció

11.3.1. Ismétlés nélküli kombináció

Definíció. Adott n különböző elem. Ha az n elem közül k elemet ($0 < k \leq n$) úgy választunk ki, hogy mindegyik csak egyszer kerül sorra, és a kiválasztás sorrendje nem számít, akkor az n elem egy k -adosztályú **ismétlés nélküli kombinációját** kapjuk. Az n elem k -adosztályú ismétlés nélküli kombinációinak számát a C_n^k szimbólummal jelöljük.

Tétel. Az n különböző elem k -ad osztályú kombinációinak száma

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{k!}.$$

Megjegyzés. A fenti kifejezést szokás az $\binom{n}{k}$ szimbólummal is jelölni (ezt „n alatt a k”-nak olvassuk). Az $\binom{n}{k}$ szimbólumot binomiális együtthatónak nevezzük. A C_n^k a következő alakban is felírható: $C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Példa. Egy gyerek 8 különböző ízűből választhat egy háromgombócos fagyalt vásárlásához. Hányféle lehetősége van a választásra, ha az adagolás sorrendjére nem vagyunk tekintettel?

$$\text{Megoldás: } C_8^3 = \frac{8!}{3!(8-3)!} = \frac{8!}{3!5!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{6} = 56$$

11.3.2. Ismétléses kombináció

Definíció. Adott n különböző elem. Ha az n elem közül k elemet úgy választunk ki, hogy egy elem többször is sorra kerülhet, és a kiválasztás sorrendje nem számít, akkor az n elem egy k-adosztályú **ismétléses kombinációját** kapjuk. Az n elem k-adosztályú ismétléses kombinációinak számát a $C_n^{k,i}$ szimbólummal jelöljük.

Tétel. Az n különböző elem k-ad osztályú variációinak száma

$$C_n^{k,i} = \binom{n+k-1}{k}.$$

Példa. Egy áruházba 5 láda eper érkezik, melyek I., II. ill. III. osztályúak lehetnek. Hányféle minőség szerinti osztályozás lehetséges, ha nem számít, hogy melyik ládát milyen sorrendben minősítjük?

$$\text{Megoldás: } C_3^{5,i} = \binom{3+5-1}{5} = \binom{7}{5} = \frac{7!}{5!(7-5)!} = \frac{7!}{5!2!} = \frac{7 \cdot 6}{2!} = 21$$

11.4. Binomiális tétel

A kombinatorika eszközeivel egyszerű módszert nyerhetünk egy kéttagú kifejezés (binom) n-edik hatványának polinommal történő alakítására. Ezt mutatja be az ún. **binomiális tétel**.

Tétel. Tetszőleges kéttagú kifejezés bármely nemnegatív egész kitevőjű hatványa polinommal alakítható a következő formában:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} \cdot a^n + \binom{n}{1} \cdot a^{n-1}b + \binom{n}{2} \cdot a^{(n-2)} \cdot b^2 + \dots + \binom{n}{n-1} \cdot a \cdot a^{b-1} + \binom{n}{n} \cdot b^n,$$

ahol $n \in \mathbf{N}$ és $a, b \in \mathbf{R}$

Megjegyzés. A binomiális tételt $n = 1, 2, 3$ -ra alkalmazva az algebrából már jól ismert azonosságokhoz jutunk:

$$(1) \ n = 1 \text{ esetén } (a+b)^1 = \binom{1}{0} \cdot a^1b^0 + \binom{1}{1} \cdot a^0b^1 = a+b,$$

$$(2) \ n = 2 \text{ esetén } (a + b)^2 = \binom{2}{0} \cdot a^2 b^0 + \binom{2}{1} \cdot a^1 b^1 + \binom{2}{2} \cdot a^0 b^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$

$$(3) \ n = 3 \text{ esetén } (a + b)^3 = \binom{3}{0} \cdot a^3 b^0 + \binom{3}{1} \cdot a^2 b^1 + \binom{3}{2} \cdot a^1 b^2 + \binom{3}{3} \cdot a^0 b^3 = \\ = a^3 + 3a^2 b + 3ab^2 + b^3.$$

Megjegyzés. Egyszerű számolással ellenőrizhető, hogy

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1.$$

11.5. Binomiális együtthatók néhány tulajdonsága

A binomiális együtthatókat ($n = 0, 1, 2, \dots$ értékekre) az ún. **Pascal-féle háromszögben** helyezhetjük el (55. ábra).

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & \binom{0}{0} & & \\ n=0 & & & & & & \\ & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & \\ n=1 & & & & & & \\ & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} \\ n=2 & & & & & & \\ & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & \binom{3}{3} \\ n=3 & & & & & & \\ & \binom{4}{0} & \binom{4}{1} & \binom{4}{2} & \binom{4}{3} & \binom{4}{4} \\ n=4 & & & & & & \end{array}$$

55. ábra: A Pascal-féle háromszög

Forrás: Bíró és Vincze (2000)

Az „n” értékének megfelelően beszélhetünk nulladik, első, második stb. sorról. A szimbólumok helyébe azok konkrét értékét beírva a Pascal-háromszög a következő (56. ábra):

$$\begin{array}{cccccccccccc} & & & & & 1 & & & & & & \\ & & & & & & 1 & & 1 & & & \\ & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\ & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\ & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\ & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\ 1 & & 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 \\ & 1 & & 7 & & 21 & & 35 & & 35 & & 21 & & 7 & & 1 \end{array}$$

56. ábra: A konkrét értékekkel felírt Pascal-féle háromszög

Forrás: Bíró és Vincze (2000)

Tétel. Bármely $k, n \in \mathbf{N}$, $0 \leq k \leq n$ esetén fennáll a(z)

$$(1) \text{ szimmetria-tulajdonság: } \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

(2) összegtulajdonság: $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$ (minden elem a felette lévő két elem összegével egyenlő),

(3) $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n$ egyenlőség.

11.6. Ellenőrző kérdések

1. Hány különböző sorrendje lehet n elemnek?
2. Adja meg az ismétléses és az ismétlés nélküli permutáció képletét.
3. Hogyan számoljuk ki az $n!$ (n faktoriális) számot?
4. Mit értünk n elem k -adosztályú ismétléses és ismétlés nélküli variációján?
5. Írja fel az n elem k -adosztályú ismétléses és ismétlés nélküli variációjának a képletét.
6. Mit nevezünk n elem k -adosztályú ismétlés nélküli kombinációjának?
7. Mennyi n elem k -adosztályú ismétléses kombinációjának száma?
8. Írja fel a binomiális tételt.
9. Sorolja fel a binomiális együtthatókra vonatkozó tulajdonságokat.
10. Hogyan számoljuk ki az $\binom{n}{k}$ binomiális együtthatót?
11. Rajzolja fel a Pascal-féle háromszöget.
12. Döntse el, az alábbi állítások közül melyik igaz, melyik hamis!
 - a) Amikor n elem k -adosztályú ismétléses kombinációjáról beszélünk, $k > n$ is lehet.
 - b) Az n elem k -adosztályú ismétléses kombinációinak száma több, mint a k -adosztályú ismétléses variációk száma.
 - c) A lottóhúzások számát ismétlés nélküli kombinációval lehet meghatározni.
 - d) Ha egy kombinációban két elemet felcserélünk, egy másik kombinációt kapunk.
 - e) Ha egy ismétléses variációban két különböző elemet felcserélünk, egy másik ismétléses variációt kapunk.
 - f) Az n elem k -adosztályú ismétlés nélküli kombinációinak száma megegyezik az $(n-k)$ -adosztályú ismétlés nélküli kombinációinak a számával. ($k \neq n-k$).
 - g) Az n elem k -adosztályú ismétlés nélküli variációinak a száma megegyezik az $(n-k)$ -adosztályú ismétlés nélküli variációinak a számával. ($k \neq n-k$).
 - h) Az n elem k -adosztályú ismétléses kombinációinak a száma megegyezik $n-k+1$ elem k -adosztályú ismétlés nélküli kombinációinak a számával.
 - i) Az n elem k -adosztályú ismétlés nélküli kombinációinak a száma megegyezik az olyan n elemű ismétléses permutációk számával, ahol k illetve $n-k$ elem azonos.
 - j) A totószelvény kitöltésekor egy ismétlés nélküli variációt adunk meg.

12. VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁS

12.1. Az esemény matematikai fogalma, eseménytér

Környezetünkben sok olyan jelenséget figyelhetünk meg, amelyek azonos (vagy majdnem azonos) körülmények között megismétlődnek, de amelyek kimenetelét, eredményét nem tudjuk előre meghatározni. Ez a bizonytalanság a jelenséget befolyásoló ismert körülményeken kívül még szerepet játszó (ismeretlen) ún. véletlen okoknak tulajdonítható. Például, ha egy dobókockát feldobunk, akkor nem tudjuk előre megmondani, melyik oldalára fog esni, azt viszont tudjuk, hogy hat lehetőségünk van (az 1, a 2, a 3, a 4, az 5, vagy a 6 pont lesz felül. Hasonlóan, ha egy munkás egy gépen 100 munkadarabot készít, akkor minőségellenőrzés előtt csak annyit tudunk, hogy kétféle munkadarab készült (megfelelő, vagy selejtes).

A valószínűségi számítás olyan **véletlen tömegjelenségekkel** foglalkozik, amelyek nagyjából azonos körülmények között elvileg akárhányszor megismételhetők (Cseke, 1982). Azon körülmények halmazát, amelyek között a vizsgált jelenség lefolyik, **kísérletnek**, a kísérlet azon kimeneteleit, amelyek csak egyféleképpen következhetnek be, **elemi eseményeknek** nevezzük. Az összes elemi esemény halmaza az **eseménytér**, amelyet Ω -val jelölünk. Az, hogy éppen melyik elemi esemény következik be, a véletlenül múlik.

Definíció. Az elemi események halmazait **eseményeknek** nevezzük. Azt az eseményt, amely mindig bekövetkezik, biztos eseménynek, azt az eseményt, amelyik sohasem következik be, lehetetlen eseménynek nevezzük. Az eseményeket nagybetűkkel jelöljük: A, B, C,....

Megjegyzés. Az események és az eseménytér kapcsolatban vannak egymással oly módon, hogy az események az eseménytér részhalmazai. A **biztos eseményt** jelölhetjük Ω -val, a **lehetetlen esemény** jele pedig $\emptyset$.

12.2. Műveletek eseményekkel

Definíció. Az A **esemény ellentettje** az $\bar{A}$ esemény, amely pontosan akkor következik be, ha A nem következik be.

Megjegyzés. Nyilvánvaló, hogy $\overline{\bar{A}} = A$.

Definíció. Az $A_1, A_2, \dots, A_n$ **események összege** az $A_1 + A_2 + \dots + A_n$ esemény, amely pontosan akkor következik be, ha legalább az egyik esemény bekövetkezik.

Definíció. Az $A_1, A_2, \dots, A_n$ **események szorzata** az $A_1 \cdot A_2 \cdot \dots \cdot A_n$ esemény, amely pontosan akkor következik be, ha az $A_1, A_2, \dots, A_n$ események mindegyike bekövetkezik.

Megjegyzés. Az események szorzata végtelen sok eseményre is kiterjeszthető.

Definíció. Az A **esemény maga után vonja a B eseményt**, ha A bekövetkezése esetén a B is bekövetkezik. Jele: $A \subset B$.

Megjegyzés. Két esemény megegyezik, ha mindkettő bekövetkezése maga után vonja a másikat.

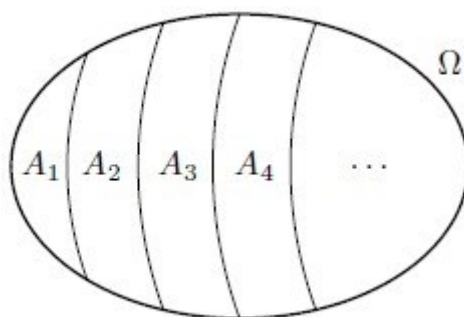
Definíció. Az A és B **esemény különbségén** az $A - B$ eseményt értjük, amely akkor következik be, ha az A bekövetkezik, de B nem.

Definíció. Az A és B esemény **kizárja egymást**, ha egyszerre nem következhetnek be, azaz szorzatuk a lehetetlen esemény ($A \cdot B = \emptyset$).

Megjegyzés. Az események közötti műveletek megfeleltethetők a halmazelméleti műveleteknek, hiszen az események az eseménytér részhalmazai, így az események összege a halmazok uniójának, az események szorzata a halmazok metszetének felel meg. Az ellentett esemény a komplementer halmaznak, az események különbsége a halmazok különbségének megfelelő művelet. Míg a kizáró események a diszjunkt halmazoknak feleltethetők meg.

Definíció. Az $A_1, A_2, \dots$ események **teljes eseményrendszer** alkotnak (57. ábra), ha

- (1) egyik sem lehetetlen esemény, azaz $A_i \neq \emptyset$ minden $i = 1, 2, \dots$ esetén,
- (2) páronként kizárják egymást, azaz $A_i \cdot A_j = \emptyset$, ha $i \neq j$.
- (3) összegük a biztos esemény, azaz $A_1 + A_2 + \dots = \Omega$.



57. ábra: A teljes eseményrendszer szemléltetése

Forrás: Bíró és Vincze (2000)

A matematikai elmélet kiépítése céljából be kell vezetnünk az **eseményalgebra** fogalmát. Jelöljük az adott kísérlethez tartozó események összességét $\mathcal{A}$ -val. Vizsgáljuk a kísérlet végrehajtása során megfigyelhető események összességét. Ettől a halmaztól joggal várhatjuk el azt, hogy a biztos eseményt tartalmazza. Végül pedig azt, hogy ha tartalmaz néhány eseményt, akkor az összegüket is tartalmazza.

Definíció. Az $\mathcal{A}$ -t **eseményalgebrának** nevezzük, melynek tulajdonságai:

- (1) $\Omega \in \mathcal{A}$,
- (2) Ha $A \in \mathcal{A}$, akkor $\bar{A} \in \mathcal{A}$,
- (3) Ha $A_n \in \mathcal{A}$ $n = 1, 2, \dots$ -re, akkor $\sum_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$.

Megjegyzés. Az események közötti műveletek tulajdonságai megfelelnek a halmazok közötti műveletek tulajdonságainak:

- (1) $A + B = B + A$,
- (2) $(A + B) + C = A + (B + C)$,
- (3) $A + A = A$,
- (4) $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$,
- (5) $A + \emptyset = A$,
- (6) $A + \Omega = \Omega$,

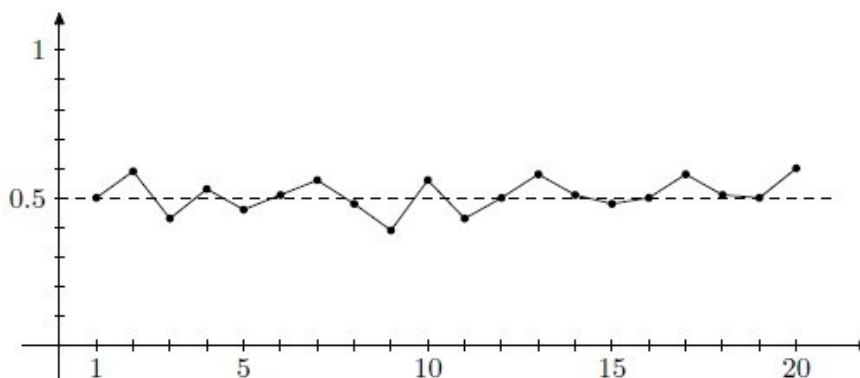
- (7) $A + \bar{A} = \Omega$,
 (8) $A \cdot B = B \cdot A$,
 (9) $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$,
 (10) $A \cdot A = A$,
 (11) $A \cdot \Omega = A$,
 (12) $A \cdot \emptyset = \emptyset$,
 (13) $A \cdot \bar{A} = \emptyset$,

12.3. A valószínűség matematikai fogalma

Az előző részben tárgyalt kérdések a valószínűségszámítás megalapozását segítették elő. A valószínűségelmélet tárgya a **véletlen tömegjelenségek** törvényszerűségeinek vizsgálata. Véletlenben keresni törvényszerűségeket? Igen, ezek nem ellentétes fogalmak. Például törvényszerű, hogy ősszel lehullnak a fa levelei. Az, hogy egy megfigyelt levél mikor válik le az ágtól, nagyon sok mindentől függ. Tudjuk, hogy biokémiai reakciók zajlanak le a levélben és a szárbán, szellő fúj stb. Ezek együttes eredményeinek tekinthető az adott levél lehullása. Tehát jól meghatározott oka van, de ezek az okok egymást „kereszteznek”, ezért az ilyen jelenségeket a filozófia véletlennek mondja. A levelek a tél beálltára lehullnak. Ez a törvényszerűség nagyszámú véletlenül át érvényesül. A filozófiában ezt a tényt úgy fejezik ki, hogy a véletlen a törvényszerűség megjelenési formája.

Amikor a TV időjárás jelentésében bemondják, hogy az eső valószínűsége 50%, akkor egyaránt számíthatunk esőre, vagy arra, hogy nem fog esni. Lehet e a bizonytalanságot, vagy a bizonyosságot számszerűen mérni? Igen. Megvizsgáljuk a jelenség lefolyását, az esemény be nem következésének, illetve bekövetkezésének gyakoriságát igen nagyszámú megfigyelés esetén. Ahhoz, hogy a véletlen tömegjelenségekben rejlő törvényszerűségeket jobban megismerjük, és azokból következtetéseket vonhassunk le, szükségünk van az események **valószínűségének** a fogalmára. Tegyük fel, hogy egy A eseménnyel kapcsolatos kísérletet n-szer elvégezzünk, és ebből az A esemény k-szor következett be. Ekkor a „k” számot az A esemény **gyakoriságának** nevezzük.

Egy feldobott pénzérme a dobás adottságának megfelelően pörög, majd leesik valamely oldalára. Miután a kimenetelét előre megmondani nem lehet, ezért ez egy véletlen tömegjelenség. Dobjunk fel 80-szor egy pénzérmét és számoljuk meg, hogy hányszor lett fej! Húsz ilyen kísérlet eredményeit tartalmazza az 58. ábra és a 2. táblázat:



58. ábra: A fej dobások relatív gyakoriságának alakulása a 20 kísérlet során

Forrás: Bíró és Vincze (2000)

2. táblázat: A fej dobások relatív gyakoriságának alakulása

<i>Kísérlet</i>	<i>Dobások száma (n)</i>	<i>Fej dobások száma (k)</i>	<i>Relatív gyakoriság</i> $\left(\frac{k}{n}\right)$
1	80	40	0,50
2	80	47	0,59
3	80	34	0,43
4	80	42	0,53
5	80	37	0,46
6	80	41	0,51
7	80	45	0,56
8	80	38	0,48
9	80	31	0,39
10	80	45	0,56
11	80	34	0,43
12	80	40	0,50
13	80	46	0,58
14	80	41	0,51
15	80	38	0,48
16	80	40	0,50
17	80	46	0,58
18	80	41	0,51
19	80	40	0,50
20	80	48	0,60

Forrás: Bíró és Vincze (2000)

Az 58. ábra alapján látható, hogy a fejek számának alakulása az egyes kísérletekben erősen ingadozik, így a relatív gyakoriság is változik. Az is látható, hogy a relatív gyakoriság 0,5 körül ingadozik. Számoljuk össze, hogy a 80, 160, 240, 320, 400, 480, 560 dobásszám mellett egy-egy kísérletet elvégezve hányszor kapunk fej dobást, és összesítsük az eredményeinket. Egy lehetséges változat a 3. táblázatban látható.

3. táblázat: A fej dobások relatív gyakoriságának alakulása változó dobásszám mellett

<i>Kísérlet</i>	<i>Dobások száma (n)</i>	<i>Fej dobások száma (k)</i>	<i>Relatív gyakoriság</i> $\left(\frac{k}{n}\right)$
1	80	40	0,500
2	160	87	0,544
3	240	121	0,504
4	320	163	0,509
5	400	200	0,500
6	480	241	0,502
7	560	280	0,511

Forrás: Bíró és Vincze (2000)

A $\left(\frac{k}{n}\right)$ relatív gyakoriság értéke pontosabban ingadozik 0,5 körül. Megfigyelhető, hogy sok kísérlet esetén a relatív gyakoriság általában különböző, de ennek ellenére stabilitást mutat abban az értelemben, hogy eléggé nagy „n” esetén egy meghatározott számérték körül ingadozik. Ez a szám az **A esemény valószínűsége**.

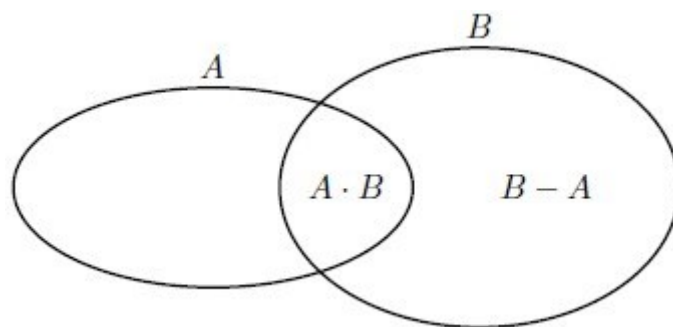
Mi azonban nem ezt az utat követjük a valószínűség tárgyalásakor. A relatív gyakoriság tulajdonságaiból néhány ésszerű következmény kiróható a valószínűségre. Ezen következményeket **alaptulajdonságnak (axiómának)** szokták elfogadni. Az így kiépíthető elméletben az ingadozásról, stabilitásról szóló állítás tételként kimondható.

Definíció. A $P: \mathcal{A} \rightarrow \mathbf{R}$ függvényt **valószínűségnek** nevezzük, ha

- (1) $0 \leq P(A) \leq 1$ minden $A \in \mathcal{A}$ esetén,
- (2) $P(\Omega) = 1$,
- (3) ha $A_1, A_2, \dots$ véges, vagy megszámlálhatóan végtelen számú esemény, amelyek páronként kizárják egymást, akkor $\sum_n P(A_n) = P\left(\sum_n A_n\right)$.

Tétel. A valószínűség további tulajdonságai:

- (1) ha $A \subseteq B$, akkor $P(A) \leq P(B)$,
- (2) $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$,
- (3) $P(\emptyset) = 0$,
- (4) $P(B - A) = P(B) - P(A \cdot B)$ (59. ábra)



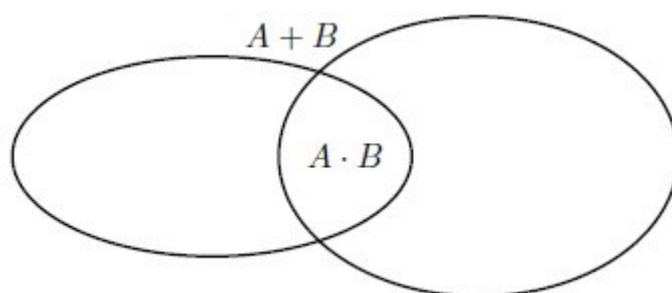
59. ábra: A különbség esemény valószínűségére vonatkozó tétel szemléltetése

Forrás: Bíró és Vincze (2000)

(5) ha az $A_1, A_2, \dots, A_n$ teljes eseményrendszert alkot, akkor

$$P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n) = 1,$$

(6) A valószínűség összegzési képlete: $P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B)$ (60. ábra).



60. ábra: A valószínűség összegzésére vonatkozó tétel szemléltetése

Forrás: Bíró és Vincze (2000)

Megjegyzés. Ha valamely A eseménynek az elemi események $\{E_1, E_2, \dots, E_n\}$ halmaza felel meg, akkor $P(A) = P(E_1) + P(E_2) + \dots + P(E_n)$.

12.4. A valószínűség kiszámításának módjai

12.4.1. A klasszikus valószínűség

Ha az Ω eseménytér véges sok (n) elemi eseményből áll, és az elemi események valószínűsége azonos $\left(\frac{1}{n}\right)$, akkor egy tetszőleges $A \in \mathcal{A}$ esemény valószínűségét a $\frac{k}{n}$ képlet adja, ahol k az A előállításában szereplő elemi események száma. Tehát az A esemény valószínűsége egyenlő az A-ra nézve kedvező esetek számának (k) és az összes esetek számának (n) hányadosával, azaz

$$P(A) = \frac{k}{n}.$$

Megjegyzés. A kedvező esetek és az összes esetek számának meghatározásához általában kombinatorikai módszereket használunk.

12.4.2. Visszatevéses mintavétel

Ebben a feladatban a klasszikus kiszámítási mód használható. Tegyük fel, hogy egy urnában N darab teljesen egyforma golyó van, amelyből „a” db fehér, „b” darab piros, $a + b = N$. Vegyünk ki találmra egy golyót az urnából. Jelölje A azt az eseményt, hogy fehér golyót

húzunk. Nyilván az A esemény valószínűsége $\frac{a}{N}$, az ellentett esemény (piros golyót húzunk)

valószínűsége $\frac{b}{N}$. Jelöljük p-vel az A esemény valószínűségét, azaz $\frac{a}{N} = p$, ekkor $\frac{b}{N} = 1 - p$.

Mi annak a valószínűsége, hogy n kísérletből – ha minden húzás után visszatesszük a golyót – éppen k-szor következik be az A esemény?

Feladatunk az, hogy meghatározzuk az összes esetek számát és a számunkra kedvező esetek számát. Az összes esetek számát az N elem n-ed osztályú ismétléses variációinak száma adja, hiszen az első húzáskor N lehetőségünk van, és mivel minden húzás után visszatesszük a golyót, így mind az n húzás esetén N lehetőségünk van. Tehát az összes esetek száma N^n . A kedvező esetek számának meghatározásához elsőként határozzuk meg valamely adott sorrendű k fehér és n – k piros golyót tartalmazó n elemű minták számát. Majd ezt a számot kell szoroznunk a „k” fehér golyónak az n elemű mintában való elhelyezkedési módjainak a számával.

A „k” fehér golyó kihúzására a^k , az n – k piros golyó kihúzására b^{n-k} lehetőségünk van. Az n elemű mintában a k fehér golyó elhelyezkedésének a száma az n elem k-ad osztályú ismétlés nélküli kombinációjával egyezik meg, azaz $\binom{n}{k}$ -val egyenlő. Így a keresett valószínűség (Fazekas, 1992):

$$P = \frac{\binom{n}{k} \cdot a^k \cdot b^{n-k}}{N^n} = \frac{\binom{n}{k} \cdot a^k \cdot b^{n-k}}{N^k \cdot N^{n-k}} = \binom{n}{k} \cdot \left(\frac{a}{N}\right)^k \cdot \left(\frac{b}{N}\right)^{n-k} = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}.$$

12.4.3. A visszatevés nélküli mintavétel

Klasszikus kiszámítási mód segítségével megoldható feladat. Ha az előző problémát módosítjuk oly módon, hogy a kihúzott golyókat nem tesszük vissza, akkor a gondolatmenet a következőképpen változik.

Először is meg kell jegyeznünk, hogy ebben az esetben $0 \leq k \leq a$ és $0 \leq n - k \leq b$, továbbá $n \leq N$, azaz $\max(0, n - b) \leq k \leq \min(a, n)$. Az összes esetek száma annyi, ahányféleképpen ki tudunk választani N elemből n elemet. Ez nem más, mint N elem n-ed osztályú ismétlés nélküli kombinációinak száma, azaz $\binom{N}{n}$.

A kedvező esetek azok az „n” elemű minták, amelyekben „k” fehér és n – k piros golyó van. Az „a” darab fehér golyóból $\binom{a}{k}$ -féleképpen választhatjuk ki a „k” darab fehér golyót, a „b” darab piros golyóból pedig $\binom{b}{n-k} = \binom{N-a}{n-k}$ -féleképpen választhatjuk ki az n – k darab piros golyót. Így a kedvező esetek száma $\binom{a}{k} \cdot \binom{N-a}{n-k}$. Azaz a keresett valószínűség (Fazekas, 1992):

$$P = \frac{\binom{a}{k} \cdot \binom{N-a}{n-k}}{\binom{N}{n}}.$$

12.4.4. A valószínűség geometriai kiszámítása

A geometriai kiszámítási mód analógiát mutat a klasszikus kiszámítási móddal, elméletileg az ún. mértékelméleten alapul. A valószínűség geometriai módszerekkel történő meghatározása azon alapul, hogy az adott kísérlet lehetséges kimeneteleinek halmazát az egyenes, a sík, vagy a tér részhalmazaként ábrázoljuk. A kísérlettel kapcsolatos A esemény valószínűségét úgy határozzuk meg, hogy kiszámoljuk azt, hogy a teljes hosszából, területből, vagy térfogatból (T_Ω) milyen arányú rész tartozik az A-nak megfelelő hosszhoz, területhez, illetve térfogathoz (T_A). Így az A esemény valószínűségét a $\frac{T_A}{T_\Omega}$ hányados adja meg.

12.5. A feltételes valószínűség

A gyakorlati életben sokszor vetődik fel az a probléma, hogy valamely kísérlet, megfigyelés esetén egy esemény bekövetkezése befolyásolja-e és ha igen, akkor milyen mértékben egy másik esemény bekövetkezését. Tegyük fel, hogy az A és B valamely eseményalgebra eseménye. Ha az eseményalgebrát létrehozó kísérletet n -szer megismételjük, tegyük fel, hogy a B esemény n_B -szer következik be. Így a B esemény relatív gyakorisága $\frac{n_B}{n}$. Vizsgáljuk meg azt az esetet, amikor a B bekövetkezik, az A szempontjából is és jelöljük n_{AB} -vel azoknak az eseteknek a számát, amelyekben az A esemény is bekövetkezik. Mivel A esemény bekövetkezését a B esemény bekövetkezéséhez függően vizsgáltuk, így az $\frac{n_{AB}}{n_B}$ hányados az A esemény B-re vonatkozó relatív gyakorisága. Ha a kifejezés számlálóját és nevezőjét is „ n ”-nel osztjuk, akkor az $\frac{n_{AB}}{n}$ a $P(AB)$ körül ingadozik, az $\frac{n_B}{n}$ pedig a $P(B)$ körül ingadozik. Így adódik a feltételes valószínűség definíciója.

Definíció. Az A esemény B-re vonatkozó *feltételes valószínűsége* a

$$P(A | B) = \frac{P(A \cdot B)}{P(B)},$$

feltéve, hogy $P(B) \neq 0$.

Megjegyzés. B esemény A-ra vonatkozó feltételes valószínűségének képlete

$$P(B | A) = \frac{P(B \cdot A)}{P(A)},$$

A két képletből $P(AB)$ -t kifejezve a következő egyenlőségeket kapjuk:

$$P(AB) = P(B) \cdot P(A|B)$$

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B|A)$$

Feltéve, hogy $P(A) \neq 0$ és $P(B) \neq 0$. Mindkét egyenlőség az A és B események együttes bekövetkezésének valószínűségét adja, ezt **a valószínűség szorzási szabályának** nevezzük.

Megjegyzés. Igazolható, hogy a szorzási szabály több esemény együttes bekövetkezésének valószínűségére is alkalmazható, pl. három eseményre:

$$P(ABC) = P((AB) \cdot C) = P(AB) \cdot P(C|AB) = P(A) \cdot P(B|A) \cdot P(C|AB),$$

feltéve, hogy $P(AB) \neq 0$, n eseményre is igazolható, hogy:

$$P(A_1 \cdot A_2 \cdot \dots \cdot A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2 | A_1) \cdot P(A_3 | A_1 \cdot A_2) \cdot \dots \cdot P(A_n | A_1 \cdot \dots \cdot A_{n-1}),$$

Feltéve, hogy $P(A_1 \cdot \dots \cdot A_{n-1}) \neq 0$.

12.6. Események függetlensége

Előfordulnak olyan esetek, amikor a feltétel nélküli és a feltételes valószínűség megegyezik egymással, azaz

$$P(A|B) = P(A).$$

Ilyenkor azt mondjuk, hogy az A esemény bekövetkezése független a B esemény bekövetkezésétől, így a szorzási szabály a következő alakban írható fel:

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B).$$

Definíció. Az A és B események függetlenek, ha

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B).$$

Megjegyzés. Az A és B események függetlenek, ha az egymás bekövetkezésének valószínűségét nem befolyásolják.

Tétel. Ha A és B függetlenek, akkor A és $\bar{B}$ is függetlenek.

Megjegyzés. Azt mondjuk, hogy az $A_1, A_2, \dots, A_n$ események függetlenek, ha minden „k” és $1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_k \leq n$ esetén $P(A_{i_1} \cdot A_{i_2} \cdot \dots \cdot A_{i_k}) = P(A_{i_1}) \cdot P(A_{i_2}) \cdot \dots \cdot P(A_{i_k})$.

12.7. Teljes valószínűség tétele, Bayes tétel

A feltételes valószínűségekkel kapcsolatban gyakorlati szempontból igen fontos a teljes valószínűség tétele. Tegyük fel, hogy az $\mathcal{A}$ eseményalgebra egy tetszőleges eseménye A esemény, a B_i ($i = 1, \dots, n$) pedig egy teljes eseményrendszer. Ha ismerjük a $P(B_i)$ valószínűségeket és az A esemény B_i -re vonatkozó feltételes valószínűségeit, akkor az A esemény valószínűsége meghatározható.

A teljes valószínűség tétele. Legyen $B_1, \dots, B_n$ teljes eseményrendszer, $P(B_1) > 0, P(B_2) > 0, \dots, P(B_n) > 0$ és A tetszőleges esemény. Ekkor

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(A | B_i) \cdot P(B_i).$$

Bayes-tétel. Legyen $B_1, \dots, B_n$ teljes eseményrendszer, $P(B_1) > 0, P(B_2) > 0, \dots, P(B_n) > 0$ és A tetszőleges esemény, melyre $P(A) > 0$, ekkor

$$P(B_j | A) = \frac{P(A | B_j) \cdot P(B_j)}{\sum_{i=1}^n P(A | B_i) \cdot P(B_i)}.$$

12.8. Ellenőrző kérdések

1. Mi az esemény fogalma?
2. Mondjon biztos, ill. lehetetlen eseményekre példát.
3. Mit értünk ellentett eseményen?
4. Mit értünk események összegén?
5. Mit értünk események szorzatán?
6. Mikor mondjuk, hogy az A esemény maga után vonja a B eseményt?
7. Mely események zárják ki egymást?
 - a) „Két szabályos kockával dobva az összeg páros”
 - b) „A két dobott érték közül legalább az egyik páros”
 - c) „Az egyik legalább osztható hárommal”
 - d) „A dobott értékek szorzata páratlan”
 - e) „A két dobott érték közül az egyik négyszerese a másiknak”
8. Mit értünk események különbségén?
9. Tekintsük azt a véletlen kísérletet, hogy kihúzzunk egy kártyalapot a 32 lapos magyar kártyacsomagból. Az alábbiak közül melyik esemény?
 - a) „A kihúzott lap színe makk”
 - b) „Nagy értékű a kihúzott kártya”
 - c) „Nem király a kihúzott lap”
 - d) „Szép figurájú a kihúzott lap”
 - e) „A kihúzott lap a treff kettes”
 - f) „A kihúzott lap nem a treff kettes”
10. Mik a valószínűség axiómái?
11. Mit értünk klasszikus valószínűség alatt? Írja fel a képletét.
12. Definiálja a visszatevéses és a visszatevés nélküli mintavétel fogalmát, adja meg a képleteiket.
13. Mit értünk feltételes valószínűség alatt?
14. Mikor mondjuk, hogy az A és B események függetlenek egymástól?
15. Mondjon példát független eseményekre.
16. Definiálja a teljes eseményrendszer fogalmát.
17. Mikor alkalmazható a teljes valószínűség tétele?
18. Mit mond ki Bayes-tétele?
19. Döntse el az alábbi állítások közül melyik igaz, melyik hamis!
 - a) Bármely két esemény közül az egyik maga után vonja a másik bekövetkezését.

- b) Két esemény szorzata olyan esemény, amely a két komponens esemény mindegyikét maga után vonja.
- c) Az események szorzata felcserélhető (kommutatív).
- d) Az események összeadása átváltójelezhető (asszociatív).
- e) Egy esemény az ellentettjével teljes eseményrendszert alkot.
- f) Egy esemény és az ellentettje nem egymást kizáró események.
- g) Az események összege akkor következik be, ha a komponens események valamelyike bekövetkezik.
- h) Az események szorzata akkor következik be, ha a komponens események valamelyike bekövetkezik.
- i) Az események valószínűsége lehet akár 100%-os is.
- j) Az események valószínűsége a véletlen kísérlet minden egyes végrehajtásakor más és más.
- k) Az ellentett esemény valószínűsége mindig nagyobb mint az esemény valószínűsége.
- l) Az ellentett esemény valószínűségének és az esemény valószínűségének összege mindig 1.
- m) Az események szorzatának a valószínűsége nem lehet nagyobb bármely komponens esemény valószínűségénél.
- n) Az események összegének a valószínűsége nem lehet nagyobb bármely komponens esemény valószínűségénél.
- o) A független események kizárják egymást.
- p) A független események nem zárják ki egymást.
- q) Két olyan független esemény, melyek közül egyik sem lehetetlen vagy biztos esemény, nem zárhatják egymást ki.
- r) Független események szorzatának valószínűsége egyenlő az események valószínűségeinek szorzatával.
- s) Független események szorzatának valószínűsége egyenlő az események valószínűségeinek összegével.
- t) Egymást kizáró események szorzata a lehetetlen esemény.
- u) Ha két esemény szorzatának valószínűsége nulla, akkor a két esemény kizárja egymást.
- v) Egymást kizáró események összegének valószínűsége a komponens események valószínűségeinek összege.
- w) A lehetetlen és a biztos események minden eseménytől függetlenek.
- x) Egy esemény nem lehet független a komplementerétől.

13. VALÓSZÍNŰSÉGI VÁLTOZÓK

Egy gyümölcs ideális átmérője a feldolgozás szempontjából 8 cm lenne. Két kísérleti fajtából megmérnek 1000 – 1000 példányt. Jelölje x_i ($i = 1, \dots, 1000$) az i -edik mérés eredményét az egyik fajtából és y_i ($i = 1, \dots, 1000$) az i -edik mérés eredményét a másik fajtából. Például az $x_1 = 7,2$ és $x_2 = 8,3; \dots; x_{1000} = 6,3$ és $y_1 = 8,4$ és $y_2 = 7,1; \dots; y_{1000} = 9,2$. Ezen számok összehasonlítása igen nehézkesnek tűnik. A megoldást a valószínűségi változók elmélete adja. Ennek a keretében ugyanis csak két – két szám (a várható érték és a szórás) összehasonlítására van szükség. A korábbi fejezetekben annak a valószínűségét vizsgáltuk, hogy egy adott esemény bekövetkezett-e vagy sem. A kísérletek többségében a kapott elemi, vagy összetett esemény esetén egy számértéket kaptunk eredményül. Egy eseményhez tartozó kimenetek mindegyikéhez pontosan egy számot rendelünk, ezt úgy is felfoghatjuk, hogy az adott eseményhez tartozó kimenetek halmazán egy függvényt értelmezünk, amelynek az értékei valós számok.

Definíció. Az elemi események halmazán értelmezett valós értékű függvényt valószínűségi változónak nevezzük. Jele: $\xi, \eta, \zeta, \dots$.

A precíz matematikai tárgyalás érdekében a továbbiakban feltesszük, hogy minden $x \in \mathbf{R}$ esetén (ω egy elemi eseményt jelöl) a $\{\xi < x\} = \{\omega \mid \xi(\omega) < x\}$ halmaz eseményt alkot.

A valószínűségi változók lehetnek diszkrét, vagy nem diszkrét attól függően, hogy milyen értéket vesznek fel. A **diszkrét valószínűségi változó** értékkészlete véges, vagy megszámlálhatóan végtelen halmaz. A **nem diszkrét valószínűségi változó** tetszőleges értéket felvehet.

Megjegyzés. Egy valószínűségi változó akkor van teljesen meghatározva, ha minden elemi esemény esetén ismerjük az értékét, viszont sok kérdés megválaszolásához elegendő annyit tudnunk a valószínűségi változóról, hogy lehetséges értékeit mekkora valószínűséggel veszi fel.

Megjegyzés. Legyen ξ diszkrét valószínűségi változó, értékei $x_1, x_2, x_3, \dots$. Jelölje A_i a $\{\xi = x_i\}$ eseményt. Ekkor $A_1, A_2, A_3, \dots$ teljes eseményrendszert alkot.

Definíció. A ξ diszkrét valószínűségi változó esetén a $p_i = P(\xi = x_i)$ valószínűségek sorozatát a ξ valószínűségi változó **valószínűségeloszlásának** nevezzük.

Megjegyzés. Ha a valószínűségi változó nem diszkrét, akkor egy meghatározott értéket általában 0 valószínűséggel vesz fel. Például a búzaszálak magasságát vizsgálva nem lehetetlen, hogy az 12 cm legyen, de a valószínűsége 0. Viszont az, hogy a búzaszál magassága kisebb, mint 12 cm, már pozitív valószínűségű. Ezért a nem diszkrét valószínűségi változó esetén annak a valószínűségét célszerű vizsgálni, hogy a ξ valószínűségi változó mekkora valószínűséggel vesz fel x -nél kisebb értéket ($P(\xi < x)$).

13.1. Az eloszlásfüggvény tulajdonságai

Definíció. Az $F(x) = P(\xi < x)$ ($x \in \mathbf{R}$) függvényt a ξ valószínűségi változó **eloszlásfüggvényének** nevezzük.

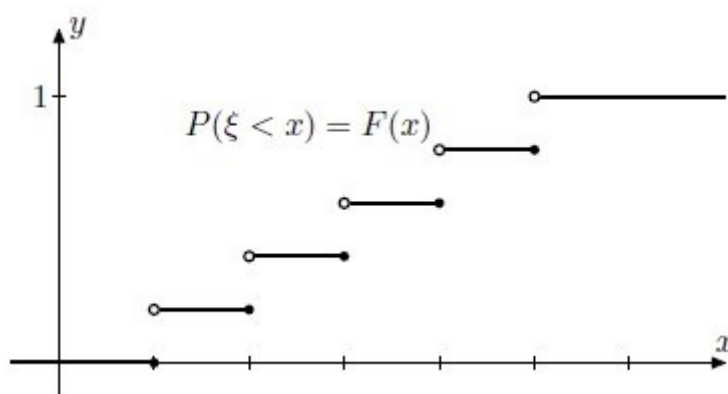
Tétel. Az $F: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ függvény valamely valószínűségi változó eloszlásfüggvénye pontosan akkor, ha

- (1) monoton növekvő,
- (2) balról folytonos, azaz az F x_0 -beli határértéke megegyezik $F(x_0)$ -al,
- (3) $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$ és $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1$

Megjegyzés. A ξ diszkrét valószínűségi változó eloszlásfüggvénye:

$$F(x) = P(\xi < x) = \sum_{x_i < x} P(\xi = x_i) = \sum_{x_i < x} p_i$$

Ebben az esetben F egy lépcsős függvény, amely minden x_i pontban p_i -t ugrik (61. ábra).



61. ábra: A diszkrét valószínűségi változó eloszlásfüggvénye

Forrás: Bíró és Vincze (2000)

Megjegyzés. Nem diszkrét valószínűségi változó esetén az előzőkhöz hasonló előállítás nem lehetséges. Azonban sok olyan eset van, amikor a valószínűségi változó eloszlásfüggvénye integrál (jele: $\int$) alakban áll elő. Az integrálással könyvünkben részletesebben nem foglalkozunk. Az ilyen tulajdonságú valószínűségi változókat **abszolút folytonos valószínűségi változónak** nevezzük.

13.2. A sűrűségfüggvény és tulajdonságai

Definíció. Ha a ξ valószínűségi változó eloszlásfüggvénye olyan, hogy előállítható

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$$

alakban, akkor az f függvényt a ξ **valószínűségi változó sűrűségfüggvényének** nevezzük.

Megjegyzés. Az integrálás $\left(\int f(x) dx\right)$ geometriailag az $f(x)$ függvény görbéje alatti területét jelenti. Amennyiben az $[a, b]$ intervallumon integrálható f függvényre teljesül, hogy $f(x) \geq 0$ minden $x \in [a, b]$ esetén, akkor az $\int_a^b f(x) dx$ az $f(x)$ függvény görbéjének az $[a, b]$ intervallumhoz tartozó íve alatti területet jelenti. Ügyelni kell azonban arra, hogy ha $f(x) \leq 0$, akkor az x tengely alatti területrészt ellentett előjellel kapjuk meg. Az integrál kiszámítására ténylegesen nem kerül sor, mivel csak a nevezetes folytonos valószínűségi változókat tárgyaljuk, amelyeknek az eloszlás- és sűrűségfüggvényének a képlete ismert.

Megjegyzés. Abszolút folytonos esetben F folytonos függvény. Így diszkrét valószínűségi változó nem lehet abszolút folytonos. Az abszolút folytonos esetben $F(x)$ „néhány” ponttól eltekintve differenciálható, és $F'(x) = f(x)$.

Tétel. Az $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ függvény egy valószínűségi változó sűrűségfüggvénye pontosan akkor, ha

(1) f nemnegatív függvény,

(2) f integrálható függvény, és $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt = 1$

Megjegyzés. $P(a < \xi < b) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(t)dt$

Definíció. Legyen ξ olyan diszkrét valószínűségi változó, melynek értékei: $x_1, x_2, x_3, \dots$. Legyen $p_i = P(\xi = x_i)$, ekkor ha a $\sum_i x_i \cdot p_i$ véges, akkor a ξ valószínűségi változó **várható értéke**:

$$E(\xi) = \sum_i x_i \cdot p_i$$

Megjegyzés. A várható értéket szokás M -mel jelölni.

Definíció. Ha ξ olyan abszolút folytonos valószínűségi változó, amelynek f a sűrűségfüggvénye, és $\int_{-\infty}^{\infty} |x| \cdot f(x)dx$ véges, akkor a ξ várhatóértéke:

$$E(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)dx$$

Megjegyzés. A várható érték nem mindig létezik.

Tétel. Legyen ξ olyan diszkrét valószínűségi változó. Ha $\sum_i |g(x_i)| \cdot p_i < \infty$, akkor létezik $g(\xi)$ várható értéke és

$$E(g(\xi)) = \sum_i g(x_i) \cdot p_i.$$

Tétel. Legyen ξ egy folytonos valószínűségi változó, aminek f a sűrűségfüggvénye. Ha $\int_{-\infty}^{+\infty} |g(x)| \cdot f(x)dx < \infty$, akkor létezik a $g(\xi)$ várhatóértéke, és

$$E(g(\xi)) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) \cdot f(x)dx$$

Tétel. Ha a ξ és η valószínűségi változóknak véges a várhatóértékük, akkor a, b, c konstansok esetén a $(c \cdot \xi)$ és az $(a \cdot \xi + b)$ valószínűségi változóknak is létezik a várható értékük, és

$$E(c \cdot \xi) = c \cdot E(\xi)$$

$$E(a \cdot \xi + b) = a \cdot E(\xi) + b$$

Megjegyzés. Vizsgáljuk meg az $\eta = \xi - E(\xi)$ valószínűségi változó várható értékét. $E(\xi - E(\xi)) = E(\xi) - E(\xi) = 0$, azaz a ξ valószínűségi változó várható értékétől való eltérése olyan valószínűségi változó, aminek a várható értéke nulla. Így a várható érték körüli ingadozás mérésére $E(\xi - E(\xi))$ nem használható.

Megjegyzés. A valószínűségi változók fontos jellemzője a várható értéktől való átlagos eltérés. Ha például egy adott földterületen búzát vetünk el, akkor nemcsak a csapadék átlagát (várható értékét) célszerű tudnunk, hanem azt is, hogy ez milyen ingadozást mutat. Azaz mennyire szélsőséges, hiszen ha a csapadék egyenletesebb, akkor a kockázat is kisebb, mert biztosabban jelezhető előre a csapadék várható mennyisége.

Definíció. A várható értéktől való eltérés négyzetének a várható értékét *szórásnégyzetnek* nevezzük.

$$D^2(\xi) = E(\xi - E(\xi))^2.$$

Azt mondjuk, hogy a ξ valószínűségi változónak létezik a szórásnégyzete, ha $D^2(\xi) < \infty$.

A szórásnégyzet négyzetgyökét *szórásnak* hívjuk:

$$D(\xi) = \sqrt{D^2(\xi)}.$$

Megjegyzés.

$$\begin{aligned} D^2(\xi) &= E(\xi - E(\xi))^2 = E(\xi^2 - 2\xi E(\xi) + (E(\xi))^2) = \\ &= E(\xi^2) - E(2\xi E(\xi)) + (E(\xi))^2 = E(\xi^2) - 2E(\xi)E(\xi) + (E(\xi))^2 = E(\xi^2) - (E(\xi))^2 \end{aligned}$$

Megjegyzés. Folytonos valószínűségi változó esetén:

$$D^2(\xi) = E(\xi - E(\xi))^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - E(\xi))^2 \cdot f(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot f(x) dx - \left(\int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x) dx \right)^2.$$

Tétel. Legyen ξ valószínűségi változó, $a, b \in \mathbf{R}$, ekkor $D^2(a \cdot \xi + b) = a^2 \cdot D^2(\xi)$.

Definíció. A ξ és η *valószínűségi változók függetlenek*, ha minden $x, y \in \mathbf{R}$ esetén a $\{\xi < x\}$ és az $\{\eta < y\}$ események függetlenek, azaz

$$P(\xi < x, \eta < y) = P(\xi < x) \cdot P(\eta < y) = F(x) \cdot G(y),$$

ahol F és G a ξ és η valószínűségi változók eloszlásfüggvényei.

Megjegyzés. Független valószínűségi változók esetén a várható értékre és a szórásnégyzetre a következők igazak:

$$E(\xi \cdot \eta) = E(\xi) \cdot E(\eta)$$

$$D^2(\xi + \eta) = D^2(\xi) + D^2(\eta).$$

13.3. Nevezetes diszkrét eloszlások

13.3.1. A binomiális eloszlás

Emlékezzünk vissza a visszatévéses mintavétel feladatára! Egy urnában N golyó van, ebből „a” fehér és „b” piros. Az urnából n -szer húzunk visszatévessel. Mekkora annak a valószínűsége, hogy az „n” kihúzott golyó között pontosan „k” darab fehér van? Jelölje a ξ valószínűségi változó azt, hogy hány fehér golyót húztunk. Ekkor a ξ valószínűségi változó lehetséges értékei: $0, 1, 2, \dots, n$, és a már meghatározott valószínűségi eloszlás:

$$P(\xi = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k} \quad k = 0, 1, 2, \dots, n,$$

ahol $p = \frac{a}{N}$, $q = 1 - p$. Ez a képlet tetszőleges $p \in]0, 1[$ esetén diszkrét eloszlást határoz meg.

Belátható, hogy a binomiális eloszlás várhatóértéke és szórása:

$$E(\xi) = n \cdot p, \text{ illetve } D(\xi) = \sqrt{n \cdot p \cdot q}.$$

13.3.2. A geometriai eloszlás

Egy kísérletet egymás után többször megismétlünk, ahol az egyes ismétlések egymástól függetlenek. Jelölje ξ valószínűségi változó azt, hogy hányadik kísérletre következik be az A esemény. Legyen $P(A) = p$, ekkor $P(\bar{A}) = 1 - p$. Mivel az egymás utáni ismétlések egymástól függetlenek, így annak a valószínűsége, hogy az A éppen a k -adik kísérletre következik be:

$$P(\xi = k) = (1 - p)^{k-1} \cdot p, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

A geometriai eloszlás egyetlen paramétere a p . A geometriai eloszlás várható értéke:

$$E(\xi) = \frac{1}{p}, \text{ szórása: } D(\xi) = \sqrt{\frac{q}{p^2}}.$$

13.3.3. A Poisson-eloszlás

A ξ valószínűségi változó Poisson-eloszlású, ha a $k = 0, 1, 2, 3, \dots$ értékeket

$$P(\xi = k) = \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda}$$

valószínűséggel vesz föl.

A Poisson-eloszlás egyetlen paramétere a $\lambda > 0$ konstans. A Poisson-eloszlás várható értéke:

$$E(\xi) = \lambda, \text{ szórása: } D(\xi) = \sqrt{\lambda}.$$

13.4. Nevezetes abszolút folytonos eloszlások

13.4.1. Az egyenletes eloszlás

A ξ valószínűségi változó egyenletes eloszlású, ha sűrűségfüggvénye:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{ha } a \leq x \leq b \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases},$$

az eloszlásfüggvénye:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{ha } a \leq x \leq b \\ 1 & \text{ha } x > b \end{cases},$$

Az egyenletes eloszlás várható értéke: $E(\xi) = \frac{a+b}{2}$, szórása: $D(\xi) = \sqrt{\frac{(b-a)^2}{12}}$.

13.4.2. Az exponenciális eloszlás

A ξ valószínűségi változó $\lambda > 0$ paraméterű exponenciális eloszlású, ha a sűrűségfüggvénye:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x < 0 \\ \lambda \cdot e^{-\lambda x} & \text{ha } x \geq 0 \end{cases},$$

az eloszlásfüggvénye:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & \text{ha } x \geq 0 \end{cases},$$

Az exponenciális eloszlás várható értéke: $E(\xi) = \frac{1}{\lambda}$, szórása: $D(\xi) = \sqrt{\frac{1}{\lambda^2}}$.

Megjegyzés. Az exponenciális eloszlást a gyakorlatban elég sokszor használjuk, amikor a ξ valószínűségi változó valamely A esemény bekövetkeztéig eltelt időtartamot jelöl és az esemény bekövetkezésének esélye adott x hosszúságú időintervallumon független annak kezdetétől. Például annak a valószínűsége, hogy egy radioaktív atom elbomlik-e egy órán belül – független attól, hogy ezt az egyórás időintervallumot mikor kezdjük el mérni, ha addig még nem bomlott le – exponenciális eloszlást követ.

13.4.3. A normális eloszlás

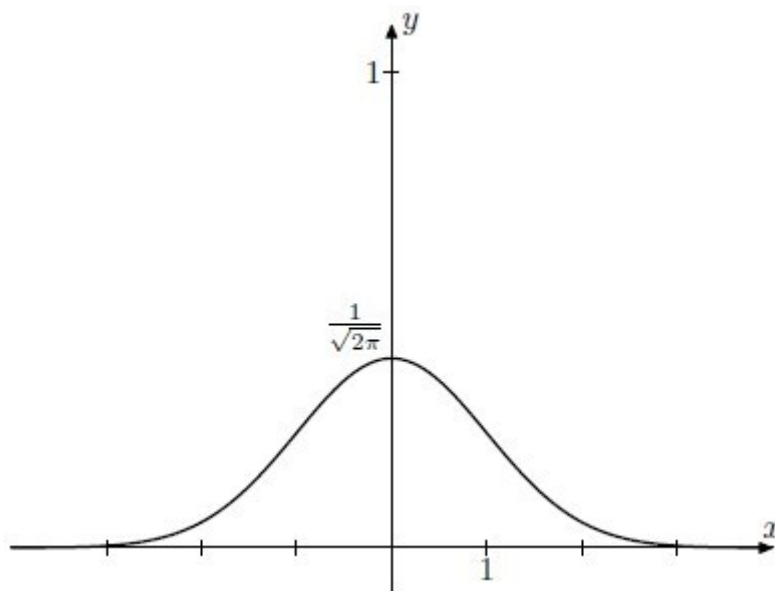
A valószínűségszámításban és a matematikai statisztikában az egyik leggyakoribb és legnagyobb jelentőségű eloszlás a normális eloszlás, alapvetően azért, mert a véletlen folyamatok nagy része ezzel az eloszlással írható le, illetve közelíthető. A ξ valószínűségi változó normális eloszlású, ha sűrűségfüggvénye (Prékopa, 1962):

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad x \in \mathbf{R}$$

ahol μ tetszőleges valós szám, σ pedig tetszőleges pozitív valós szám. Azt, hogy a ξ valószínűségi változó μ és σ paraméterű normális eloszlású $\xi \sim N(\mu, \sigma^2)$ - tel jelöljük.

Ha $\xi \sim N(0,1)$, akkor a ξ valószínűségi változó **standard normális eloszlású**.

Megjegyzés. A normális eloszlás sűrűségfüggvényét **Gauss-görbének**, vagy harang görbének nevezzük.



62. ábra: A standard normális eloszlás sűrűségfüggvénye

Forrás: Bíró és Vincze (2000)

Tétel. Ha a ξ valószínűségi változó standard normális eloszlású, akkor az $\eta = \sigma \cdot \xi + \mu$ valószínűségi változó normális eloszlású, és $\eta \sim N(\mu, \sigma^2)$. Megfordítva, ha az $\eta \sim N(\mu, \sigma^2)$, akkor a $\xi = \frac{\eta - \mu}{\sigma}$ standard normális eloszlású.

A standard normális eloszlás sűrűségfüggvénye (62. ábra) a következő alakú:

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{\frac{-(x)^2}{2}},$$

eloszlásfüggvénye:

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \varphi(t) dt.$$

Ez az integrál elemi úton nem számolható ki, így az értékeit táblázatba foglalták. Helyettesítéssel kapható a $\xi \sim N(\mu, \sigma^2)$ valószínűségi változó eloszlásfüggvénye:

$$F(x) = \Phi\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right).$$

A $\xi \sim N(\mu, \sigma^2)$ normális eloszlású valószínűségi változó várható értéke: $E(\xi) = \mu$, szórása: $D(\xi) = \sigma$.

Megjegyzés.

- (1) Ha a mintabeli adatok csak diszkrét értékek (pl. egész számok) lehetnek, akkor a diszkrét eloszlások között, ha pedig tetszőleges értéket vehetnek fel egy adott intervallumon belül, akkor a folytonos eloszlások között keresünk alkalmassat.
- (2) A mérési hibák általában normális eloszlást követnek. Normális, vagy normálisához közeli eloszlást követnek általában a növényi és állati egyedek nagyságát (hosszúság, tömeg, stb.) kifejező adatok, továbbá a termelési adatok (tejtermelés, átlagtermés, stb.).
- (3) Ha a megfigyelt adatok diszkrét számok és ezek csak korlátozott számértéket vehetnek fel (pl. 0-tól n-ig terjedő egész számok), az eloszlás legtöbbször binomiális, vagy hipergeometrikus.
- (4) Poisson-eloszlást követ a részecskék egyenesmenti, területi, illetve térfogati eloszlása, ha azt vizsgáljuk, hogy adott hosszúságú, területű, illetve térfogatú részekre milyen gyakorisággal esnek a részecskék. Ilyenek például a peték, a permetlé cseppjeinek, az oldatban lévő részecskék számának (mikromolekulák, baktériumok, vírusok) térfogati eloszlása.

13.5. A nagy számok törvénye

A korábbiakban látható volt, hogy a várható érték körüli ingadozás egyik fontos mérőszáma a szórás. Most egy olyan összefüggéssel fogunk megismerkedni, amelynek gyakorlati jelentősége abban van, hogy segítségével csupán a szórás birtokában az ingadozás valószínűségére becslés adható.

Tétel (Markov-egyenlőtlenség). Legyen $\xi \geq 0$ valószínűségi változó, λ pozitív valós szám. Ekkor

$$P(\xi \geq \lambda) \leq \frac{E(\xi)}{\lambda}.$$

Tétel (Csebisev-egyenlőtlenség). Ha az η olyan valószínűségi változó, amelynek véges a szórása, akkor $\sigma > 0$ esetén:

$$P(|\eta - E(\eta)| \geq \sigma) \leq \frac{D^2(\xi)}{\sigma^2}.$$

Megjegyzés. Ha egy valószínűségi változó eloszlását nem ismerjük, de a várhatóértékét és a szórását igen, akkor a Csebisev-egyenlőtlenség segítségével felső korlátot tudunk megadni a várható érték körüli szimmetrikus intervallumba esés valószínűségére.

Definíció. Azt mondjuk, hogy a $\xi_1, \xi_2, \dots$ valószínűségi változó sorozat sztochasztikusan konvergál a ξ valószínűségi változóhoz, ha minden $\varepsilon > 0$ esetén

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|\xi_n - \xi| \geq \varepsilon) = 0$$

Tétel. Legyenek $\xi_1, \xi_2, \dots$ páronként független, azonos eloszlású valószínűségi változók. Tegyük fel, hogy $E(\xi_i^2) < \infty$. Ekkor

$$\frac{\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n}{n}$$

sztochasztikusan konvergál a közös várhatóértékhez.

Ezt a tételt a nagy számok gyenge törvényének nevezzük. Ennek segítségével bizonyítható, hogy egy esemény relatív gyakorisága konvergál a valószínűségéhez.

13.6. Ellenőrző kérdések

1. Definiálja a valószínűségi változó fogalmát.
2. Mit ért diszkrét valószínűségi változó alatt?
3. Mit ért eloszlásfüggvény alatt?
4. Milyen tulajdonságok jellemzik egyértelműen az eloszlásfüggvényt?
5. Definiálja a binomiális eloszlást!
6. Mit ért a valószínűségi változó sűrűségfüggvénye alatt?
7. Mikor mondjuk, hogy két valószínűségi változó független?
8. Soroljon fel diszkrét eloszlásokat.
9. Adja meg a binomiális eloszlás képletét, várható értékét és szórását.
10. Adja meg a geometriai eloszlás képletét, várható értékét és szórását.
11. Adja meg a Poisson-eloszlás képletét, várható értékét és szórását.
12. Soroljon fel nevezetes abszolút folytonos eloszlásokat.
13. Mi az egyenletes eloszlású valószínűségi változó sűrűség- és eloszlásfüggvénye? Adja meg várható értékének és szórásának képletét.
14. Mi az exponenciális eloszlású valószínűségi változó sűrűség- és eloszlásfüggvénye? Adja meg várható értékének és szórásának képletét.
15. Mi a normális eloszlású valószínűségi változó sűrűség- és eloszlásfüggvénye? Adja meg várható értékének és szórásának képletét.
16. Rajzolja fel a standard normális eloszlás sűrűségfüggvényét.
17. Fogalmazza meg a Markov- és Csebisev egyenlőtlenséget.
18. Mi az a nagy számok törvénye?

14. Statisztikai alapfogalmak

Az információtechnológia fejlődésével az információk és különösen az adatok egyre inkább elérhetőbbé váltak a mindennapi emberek számára, és mennyiségük egyre inkább megnövekedett. Ezt a megnövekedett adatmennyiséget tudni kell kezelni, feldolgozni, elemezni és belőlük a megfelelő következtetéseket levonni. Különösen igaz ez a gazdasági élet számos területén, ahol a döntéseket számszerű információkkal kell alátámasztani, bemutatni. A statisztikai információ (adat) előállítása, feldolgozása, szerepe a gazdaságban, társadalomban egyre inkább növekszik, ezért elengedhetetlen követelmény, hogy a gazdasági életbe kilépni szándékozó hallgató fel legyen vértézve a legkülönbözőbb statisztika-módszertani ismeretekkel. Ennek a fejezetnek az a célja, hogy a hallgató megismerje az alapvető statisztikai fogalmakat és értse a köztük lévő összefüggéseket, valamint képes legyen alapvető elemzések elkészítésére.

14.1. A statisztika fogalma

Definíció. A statisztika olyan *gyakorlati számbavételi tevékenység*, amely tömegjelenségek (pl.: munkanélküliség, foglalkoztatottság, népesség) számbavételére, adatok összegyűjtésére és rendszerezésére, valamint azok elemzésére, összefüggések feltárására, következtetések levonására, döntések előkészítésére, tudományos eredmények alátámasztására szolgál. Szokás a statisztikát azonosítani magával a *tudományos módszertannal*, valamint az *összegyűjtött adathalmazzal*. A statisztikai adatok gyűjtése, feldolgozása, közlése mögött egy egységes intézményi háttér áll, amelyet *statisztikai információs rendszernek* neveznek.

A statisztika módszertani szempontból megközelítve egy olyan ismeretrendszer, amely elméleti problémákat vet fel és magába foglalja az ezek megoldására irányuló módszereket is, valamint az általános elvek egy-egy területen történő alkalmazását. A statisztika céljai közé tartozik egyrészt a tájékoztatás, valamint egységes adatbázisok kialakítása a kutatás és a termelésirányítás, valamint a vállalatmenedzsment számára. A statisztikán, mint módszertanon belül megkülönböztetünk *leíró statisztikát*, amely magába foglalja az adatok csoportosítását, gyűjtését ábrázolását, valamint *matematikai (kutató) statisztikát*, amely a tömegjelenségek egyedeinek szűkebb csoportját vizsgálja, majd ez alapján ad a sokaság egészére vonatkozó következtetéseket.

Ezekon kívül létezik még gazdaságstatisztika (gazdasági jelenségek feltárásával foglalkozik: infláció, GDP), ágazati statisztika (mezőgazdasági, ipari termelés adatai elemzése), funkcionális statisztika (munkaerő alakulása és beruházások vizsgálata), valamint demográfiai statisztika (népesség jellemzőinek vizsgálata nem, kor, családi állapot szerint).

A statisztikai tevékenységet a gyakorlatban egy statisztikai információs rendszer felügyeli és működteti. A főbb információigénylők a kormányzat, országos vezető testületek, üzleti döntéshozók, tudományos kutatók, valamint a közvélemény. Az üzleti döntéshozók igényeit általában maguk a gazdasági szervek elégítik ki, vagy erre szakosodott közvélemény-, piackutató cégek végeznek külön statisztikai tevékenységet (pl. Szonda Ipsos, Monitor, Gallup, Gki, GfK, Ecostat, Szinapszis). Az információk szolgáltatása a kormányzat és a tudományos kutatás számára jellemzően egy erre specializálódott hivatalos statisztikai szolgálat feladata. Ez egy olyan makroszintű információs rendszer, amely a társadalmat, a gazdaságot, a természeti viszonyokat jellemző statisztikai adatok, mutatószámok folyamatos biztosítását és bemutatását tűzte ki fő céljául. Fő feladata a makroszintű társadalom- és gazdaságpolitikai döntésekhez szükséges statisztikai adatok folyamatos szolgáltatása,

valamint módszertani szabványok kidolgozása. A magyar hivatalos statisztikai szolgálat centralizált, többszatszornás és az alábbi részekből tevődik össze:

- Központi Statisztikai Hivatal (KSH), amely 1867. óta működik
- Minisztériumok
- Országos hatáskörű szervek (pl.: MNB, PSZÁF, Legfőbb Ügyészség)

14.2. Alapfogalmak

Definíció. *Statisztikai sokaság* a vizsgálat tárgyát képező tömegjelenséget alkotó egységek halmaza. A sokaságot meghatározó egységeket *a sokaság egyedeinek* hívjuk. Az egyedek lehetnek *valóságos egységek* abban az értelemben, hogy a valóságban ténylegesen létező személyeket, tárgyakat, állatokat *veszünk számba*, vagy lehetnek *nem valóságosak*, olyan értelemben, hogy egy eseményt, vagy folyamatot, vagy teljesítményt, termelést *figyelünk meg*. A nem valóságos egységek vizsgálatát, megfigyelését mindig egy időtartam alatt végezzük (pl. egy havi sörtermelés), a valóságos egységek számbavétele pedig egy adott időpontban következik be.

14.3. A statisztikai sokaság típusai

Definíció. *Álló, vagy állapot sokaságról* (stock) akkor beszélünk, ha valóságos egységekből álló sokaságot veszünk számba egy adott időpontban, azaz jellemezzük a sokaság egységeinek pillanatnyi állapotát.

Mozgó sokaságnak (flow) azt a sokaságot nevezzük, amelynek az egységei nem valóságosak, tehát folyamatok, amelyeket csak egy adott időtartam alatt tudunk megfigyelni. *Fősokaságot* úgy képezhetünk, hogy az egyedekre jellemző sok megkülönböztető tulajdonságból kiemelünk egyet, és e szerint azonos egyedek veszünk a sokaságba. A fősokaságon belül egy újabb tulajdonság mentén újracsoportosítva a sokaságot több *részsokaságot* kapunk. *Teljes sokaságról* akkor beszélünk, amikor a vizsgált sokaság minden egységét számba vesszük. Amennyiben a teljes sokaság egységeinek csak egy részét kérdezzük meg szisztematikusan előre adott, közös tulajdonságok alapján, akkor *mintasokaságot* kapunk.

A sokaság egységeit egyrészt *statisztikai alapadattal* jellemezhetjük, amely lehet a *sokaság elemszáma*, vagy az egységekkel kapcsolatos egyéb *számszerű jellemző*, amelyet *mérés eredményeképpen* kaptunk. Másrészt a sokaság jellemezhető *mutatószámokkal* is, amelyeket statisztikai adatokkal végzett matematikai számítás eredményeképpen kapunk. A sokaságot *jól körülhatároltnak* hívjuk, ha minden elemről egyértelműen el tudjuk dönteni, hogy része e a sokaságnak. Ehhez szükséges, hogy az egységekre jellemző időbeli, térbeli, mennyiségi, minőségi jellemzők adva legyenek.

14.4. Ismérvek

A sokaság koncepciójához szorosan illeszkedő másik fogalom az ismerv. A következőkben a legfontosabb ismérvtípusokat fogjuk áttekinteni, hiszen ezek alapján alkotunk majd különböző statisztikai sorokat. A statisztikai sorok fogalma révén pedig eljutunk a statisztikai táblák fogalmához is.

Definíció. A statisztikai sokaság egységeinek jól körülhatárolásához szükséges tulajdonságokat, jellemzőket, szempontokat *ismérveknek* nevezzük. Az ismérveken belül az előforduló kategóriák neveit, vagy az egyes értékeket *ismérvváltozatoknak* nevezzük. Az

ismérveknek három fő csoportját különítjük el aszerint, hogy milyen szempont szerint mutatják be az egyedeket.

- (1) **Tárgyi ismérvek:** két formáját különböztetjük meg, a minőségi és a mennyiségi ismérveket. A minőségi ismérvek a vizsgált egységek számszerűen kifejezhetetlen jellemzői, a mennyiségi ismérvek a számszerűen mérhető jellemzőket jelentik. Egész számok esetén diszkrét ismérvekről, valós számok esetén pedig folytonos ismérvekről beszélünk.
- (2) **Térbeli ismérvek:** a sokaság egységeit területi elhelyezkedés szerint mutatják be, változatai földrajzi egységek.
- (3) **Időbeli ismérvek:** a sokaság egységeit időbeli alakulás alapján határozzák meg, lehet adott időpontban, vagy időtartam alatt elkülöníteni az egyedeket.

14.5. Statisztikai sorok

Az adatokat általában nem rendszertelenül közöljük, hanem bizonyos rendező elvek szerint csoportosított formában adjuk közre annak érdekében, hogy a vizsgálat tárgyát képező sokaság szerkezetét megfigyelhessük.

Definíció. *Statisztikai sorokat* akkor kapunk, ha meghatározott ismérvek szerint kiválasztunk két vagy több logikailag összetartozó statisztikai adatot, és azokat egymás mellé, illetve alá rendezzük. A statisztikai sorok leggyakrabban csoportosítás útján jönnek létre, de képezhetők összehasonlítás révén is. Előállíthatók statisztikai alapadatokból, vagy származtatott adatokból.

Aszerint, hogy milyen ismérv szerint rendeztük az adatokat sorokba, beszélhetünk valódi sorokról, azaz *mennyiségi, vagy minőségi, területi, idősróról*, illetve a különböző ismérvek szerint összerendezett adatok nem valódi *leírósor*t alkotnak.

Definíció. A sokaság egyedeinek minőségi ismérv szerinti megoszlásával *minőségi sorokat* kapunk, az ismérvváltozatok fogalmilag vannak meghatározva. Amikor a sokaság elemei mennyiségi ismérv szerint vannak csoportosítva, akkor *mennyiségi sorokat* kapunk, az ismérvváltozatokat számszerűen fejezzük ki. Egész értékek esetén diszkrét a sor, való értékek esetén folytonos sorról beszélünk.

Mind diszkrét, mind folytonos esetben előfordulhatnak nagyszámú ismérvértékek, ekkor az összes lehetséges ismérv értékeket nem tüntetjük fel, hanem leggyakrabban egyenlő, vagy egyenlőtlen *osztályközökre (csoportközökre)* bontjuk azokat, vagyis *információt tömörítünk*. Ennek a menete úgy történik, hogy először az összes adatot nagyság szerinti sorrendbe rakjuk, majd képezzük a legkisebb és legnagyobb adat különbségét, amely az adatok terjedelmét adja. A terjedelmet felosszuk „k” db egyenlő osztályközre azért, hogy az osztályközökben a gyakoriságok egyenletes eloszlásúak legyenek, és hogy az osztály közepe releváns legyen. Az osztályközök számát, vagyis a „k”-t az elemszám (N) függvényében az alábbi hüvelykujj szabállyal kaphatjuk meg: $2^k > N$, ahol „k” legkisebb olyan értékét kell venni, amelyre már éppen teljesül az egyenlőtlenség. A terjedelem és az osztályközök számának hányadosa megadja egy *osztályköznek a hosszát*.

14.5.1. Mennyiségi sorok

A mennyiségi sorok a leggyakrabban használt statisztikai sorok közé tartoznak, két változatuk létezik, a gyakorisági- és értékösszeg sorok. Kevés ismérvváltozat esetén mennyiségi sorokban az értéket tüntetjük fel, egyébként pedig osztályközöket képezünk az értékek alapján.

Definíció. A *gyakorisági sor* azt mutatja meg, hogy mennyi a mennyiségi ismérvértékek (egyes csoportközeibe tartozó egységek) száma, gyakorisága. A gyakoriságot a statisztikában az angol *frequency* szóból f_i -vel jelöljük, ahol i értéke a sorrendbe rendezett ismérvértékek rangsorszáma.

Definíció. Az *értékösszeg sor* megmutatja, hogy mekkora a mennyiségi ismérvértékek (egyes osztályközeibe tartozó egységek) által képviselt értékek összege. Osztályközös gyakorisági sor esetén az értékek összegét úgy becsüljük, hogy az osztály közepét szorozzuk az osztályba tartozó egyedek számával.

14.5.2. Egyéb sorok

Definíció. *Területi sornak* azt a statisztikai sort nevezzük, amely a statisztikai sokaság egységeit annak területi jellemzői szerint mutatja be.

Definíció. *Idősorok* esetén a sokaság alakulását vizsgáljuk az idő függvényében. Az időbeli változást több időpontban történő mérés, vagy időtartamok alatt történő megfigyelések adják. Az időbeliség kezelésétől függően az alábbi két típus különböztetjük meg az idősorok esetén:

- (1) **Állapot idősor:** Állapot (stock) sokaság adatait tartalmazza az egyes időpontokban.
- (2) **Tartam idősor:** Mozgó (flow) sokaság adatait tartalmazza időtartamokban.

Megjegyzés. Jelenség, folyamatok, események adatait csak tartam idősorba rendezhetjük, tárgyak, személyek, valóságos egyedek megfigyeléseit pedig időpontokban figyeljük meg.

Definíció. Az ugyanazon gazdasági, társadalmi vagy politikai, területi egység különböző jellegű, sokoldalú, különböző ismérvek szerinti felsorolásszerű jellemzésére szolgálnak az ún. *leíró sorok*.

14.5.3. A statisztikai sorok jellegzetességei

A keletkezés módja szerint a statisztikai sorok kétféleképpen jöhetnek létre, aszerint, hogy hogyan és milyen célból rendezzük az adatokat sorokba. Ez alapján beszélhetünk *csoportosításról*, illetve csoportosító sorokról, illetve *összehasonlításról*, azaz összehasonlító sorokról. A statisztikai sorok általában csoportosítás útján jönnek létre, de nem minden esetben. A csoportosítás célja az, hogy az összes ismérvértéket felsoroljuk, illetve amennyiben osztályközöket alakítottunk ki, az összes csoportot (részsokaságot) megadjuk. A csoportosító sorok adatai összegezhetőek. Az összehasonlítás abban tér el a csoportosítástól, hogy nem adjuk meg az összes értéket, illetve csoportot, hanem csak egyes részsokaságokat választunk ki azok adatainak összevetése céljából. Ekkor az egyes részsokaságok adatai összeadásának nincsen értelme.

Csoportosítás útján jönnek létre az alábbi sorok:

- (1) Minőségi sor
- (2) Gyakorisági sor
- (3) Értékösszeg sor

Sorok, amelyek létrejöhetnek csoportosítás, vagy összehasonlítás céljából is:

- (1) Területi sor
- (2) Tartam idősor

Kizárólag összehasonlítás céljából hozzuk létre az alábbi sorokat:

- (1) Állapot idősor
- (2) Leíró sor

Megjegyzés. Területi, minőségi sorok esetén az ismérvváltozatok sorrendje lényegtelen, míg mennyiségi és idősorok sorok esetén lényeges.

14.6. Statisztikai táblák

A statisztikai sorok fogalmának megértése után eljutunk egy összetettebb statisztikai fogalomhoz, a táblákhoz. Ezek ismerete azért elengedhetetlen, mert a gyakorlatban általában ezeket használják az információk megjelenítésére, közlésére.

Definíció. Két, vagy több egymás mellé, vagy alá írt statisztikai sor **statisztikai táblát** alkot. A tábla egyrészt egy magyarázó mezőből áll, amely megnevezéseket tartalmaz utalva ezzel a táblát létrehozó ismérvek típusára, valamint a sokaság egységeire, másrészt egy táblamezőből áll, amely a konkrét adatokat (alap, vagy mutatószám) tartalmazza.

A statisztikai táblákat rendeltetés, illetve a munkamenet státusza szerint az alábbi típusokba sorolhatjuk:

- (1) Gyűjtő tábla: az alapadatokat foglalja magába.
- (2) Feldolgozási tábla: az adatokkal végzett műveleteket is tartalmazza a tábla.
- (3) közlési tábla: csak a közlésre szánt eredményeket mutatja be a tábla.

A csoportosítás szerepe szerint az alábbi táblatípusokat különböztetjük meg:

- (1) **Egyszerű statisztikai tábla:** csoportosítást (összegzést) egyáltalán nem tartalmaz
- (2) **Csoportosító tábla:** egy ismerv szerinti csoportosítást (összegzést) tartalmaz.
- (3) **Kombinációs tábla:** két vagy több ismerv szerint csoportosítást (összegzést) tartalmaznak

Megjegyzés. Leíró és összehasonlító sorokból egyszerű tábla képezhető. Csoportosító és kombinációs táblákat csoportosító sorokból kapunk.

14.7. Formai és tartalmi követelmények

A statisztikai tábláknak nagyon komoly tartalmi és formai követelményeknek kell megfelelniük. Számos esetben egy beszámoló, vagy dolgozat minősége, minősítése múlhat a közlés mikéntjén. A következőkben bemutatásra kerülő szempontok azt a célt szolgálják elsősorban, hogy elkészített táblázat első rátekintésre is átlátható, egyértelmű legyen.

Elengedhetetlen, hogy a táblának legyen **címe**, amelyet általában a tábla fölött szokás megadni. A **magyarázó és táblamezők** megfelelő módon **legyenek kitöltve**, valamint minden

mezőt ki kell tölteni. Fontos, hogy fel legyenek tüntetve a **mértékegységek** vagy a magyarázó mezőkben, vagy a táblázat címében, de elhelyezhetjük a mértékegységet a tábla jobb alsó sarkában is. A **forrás megjelölése** minden esetben indokolt, ezt általában a bal alsó sarokban szokás feltüntetni akkor is, ha a közölt adatok saját számításaink eredményei. A tartalmi követelmények a mezők kitöltésére vonatkoznak. Ezzel kapcsolatban az alábbi jelöléseket szokás alkalmazni (ahol létezik az adat, ott felső indexben megadni):

- (1) Nem létezik adat: N.A., vagy „-„ jel használata
- (2) Az adat nem hozzáférhető: „...”
- (3) Az adatot becsültük „+”
- (4) Az adat elhanyagolható értékű: „0,0”

4. táblázat: Néhány leltári elem száma és összértéke

Leltári elem	Gyakoriság (db)	Összérték (eFt)
Könyvek (X ₁)	2 (f ₁)	5 (Y ₁)
Magazinok (X ₂)	10 (f ₂)	4 (Y ₂)
Jegyzetfüzetek (X ₃)	30 (f ₃)	6 (Y ₃)
Papírtömbök (X ₄)	20 (f ₄)	2 (Y ₄)
Tollak (X ₅)	40 (f ₅)	1 (Y ₅)
Ceruza (X ₆)	30 (f ₆)	3 (Y ₆)
Kiemelő (X ₇)	20 (f ₇)	6 (Y ₇)
Olló (X ₈)	5 (f ₈)	3 (Y ₈)
Összesen	$\sum f_i$	$\sum Y_i$

Forrás: Saját szerkesztés

5. táblázat: A leltári összértékének alakulása 2001-2008 között

Leltári év	Érték (eFt)
2001 (X_0)	200 (y_0)
2002 (X_1)	100 (y_1)
2003 (X_2)	300 (y_2)
2004 (X_3)	200 (y_3)
2005 (X_4)	400 (y_4)
2006 (X_5)	300 (y_5)
2007 (X_6)	200 (y_6)
2008 (X_7)	500 (y_7)
Összesen	ΣY_i

Forrás: Saját szerkesztés

A 4. és 5. táblázat nem csak a táblák formai és tartalmi követelményeit szemlélteti, hanem megadja a használatos statisztikai jelöléseket is a táblában. A leltári elem minőségi ismerv, ezért minőségi sorokat rendeztük össze egy táblába. A minőségi ismerv változatait az X jelöli, az i -edik változatot az X_i -vel jelöljük. Az f_i jelöli az i -edik ismervváltozat gyakoriságát, Y_i pedig az i -edik ismervváltozathoz tartozó adatot jelöli. Idősor esetén az első évet szokás 0-val indexelni, általában ezt szokták a bázisévnek megadni (5. táblázat).

14.8. Statisztikai viszonyszámok

A statisztikai munka során nagyszámú alapadatot gyűjtünk és rendezünk össze. Ezekből rendszerint származtatott adatokat (mutatószámokat) képezünk. A statisztikai elemzések legegyszerűbb, legáltalánosabban használt eszköze a viszonyszámok képzése.

Definíció. Két statisztikai adat arányát kifejező számokat **viszonyszámoknak** nevezzük. Formájukat tekintve mindig hányadosok (törtek), a tört számlálójában a viszonyított adat (**tárgy**) áll, míg a nevezőjében a viszonyítási alap (**bázis**) található.

Megjegyzés. a viszonyszámok képzésekor a viszonyított adat, mind a viszonyítási alap meghatározásakor körültekintően kell eljárni, mert bizonyos adatokat egymással elosztva nem kapunk értelmezhető eredményt (viszonyszámot).

Viszonyszámok megadása az alábbi képlettel történik Az 5. táblázat jelöléseit követve:

$$V = \frac{Y_i}{Y_b},$$

ahol Y_i a viszonyított adat (tárgyadat), Y_b a viszonyítás alapja (bázisadat).

Megjegyzés. A viszonyszám mértékegysége a bázis és a tárgyadat mértékegységétől függ.

Definíció. Amikor két azonos mértékegységű adatot osztunk, akkor **egynemű viszonyszámokat** kapunk, ellenkező esetben **különnemű viszonyszámokról** beszélünk. A különmemű viszonyszámokat **intenzitási viszonyszámoknak** nevezzük.

Egynemű viszonyszámok csoportosítása:

- (1) megoszlási viszonyszám
- (2) összehasonlító viszonyszám
- (3) teljesítmény viszonyszám

Az intenzitási viszonyszámok mértékegységgel rendelkező mutatók, amelyek leggyakrabban két különböző statisztikai sor adatából képezhetők, de leíró sorok jellemzésére is használhatók. Megjelenési formájuk lehet **együtthatós** (azaz tizedes tört forma: 0,5933), vagy **százalékos** forma (59,33%). Az együtthatós formát általában 4 tizedes jegyig szokás megadni.

14.8.1. Egynemű viszonyszámok

Az egynemű adatokat százalékos formában jelöljük és mivel azonos mértékegységű adatokat hasonlítunk össze, ezért az eredmény egy mértékegység nélküli tiszta szám lesz. A korábbiakban különbséget tettünk csoportosító és összehasonlító sorok között. Az egynemű viszonyszámokat is tovább csoportosíthatjuk aszerint, hogy csoportosító sorok vizsgálatára használjuk őket, vagy összehasonlító sorok jellemzésére.

14.8.1.1. Megoszlási viszonyszámok

A csoportosító sorok (ezek a minőségi és mennyiségi sorok, valamint esetenként a területi és tartam idősorok) vizsgálata tipikusan megoszlási viszonyszámokkal történik.

Definíció. **Megoszlási viszonyszám** a statisztikai sokaság részeinek a sor egészéhez való arányát fejezi ki. A vizsgált sokaság összetételének, belső szerkezetének feltárását segíti elő. Az 5. táblázat jelöléseit alkalmazva a képlet az i-edik adat megoszlási viszonyszámára a következő:

$$V_{m(i)} = \frac{y_i}{\sum_{i=1}^n y_i}, \text{ illetve } V_{m(i)} = \frac{f_i}{\sum_{i=1}^n f_i} \text{ (relatív gyakoriság), ahol a számlálóban a}$$

részsokaság adata áll, a nevezőben pedig az összsokaság adata.

Megjegyzés: Az $y_1 + y_2 + \dots + y_n$ „n” db adat összege helyett a továbbiakban bevezetjük a $\sum_{i=1}^n y_i$ rövidítést (kiejtve: „szumma”). A megoszlási viszonyszámot általában százalékos formában adjuk meg.

Amennyiben a sor minden tagjának, azaz a sokaság minden összetevőjének meghatározzuk az egészhez viszonyított arányát (százalékos formában), akkor az így kapott viszonyszámoknak az összege 100%. Amikor megoszlási viszonyszámokat gyakoriságokból számoljuk, akkor szokásos a relatív gyakoriság elnevezés használata is.

Minőségi, mennyiségi, területi és idősorokból egyaránt számítható megoszlási viszonyszám (ha azok összegezhetők, pl. világ össznépesége és az egyes országoké).

14.8.1.2. Összehasonlító viszonyyszámok idősorokra

Az egynemű viszonyyszámokon belül nagyon fontos szerepet töltenek be az összehasonlító viszonyyszámok. Összehasonlítási viszonyyszámnak az a fő előnye, hogy bármelyik valódi sorból számítható, és a viszonyítási alap a sor bármelyik tagja lehet. Ezek közül is részletesen foglalkozunk azzal az esettel, amikor idősorok adatait hasonlítjuk össze, hiszen a gyakorlatban a leggyakrabban ilyen statisztikai sorokkal találkozunk.

Definíció. *Dinamikus viszonyyszámokat* kapunk, ha két különböző idősor (időpont, időszak)

adatainak egymáshoz való arányát képezzük az alábbi képlet szerint az 5. táblázat jelöléseivel:

$$V_{d(i)} = \frac{y_i}{y_0}, \text{ ahol } y_i \text{ a tárgyidőszak (viszonyított) adata,}$$

y_0 a bázisadat (viszonyítási alap)

Megjegyzés. Az eredményt általában %-os formában fejezzük ki, a bázisadat rendszerint az első adat.

A dinamikus viszonyyszámoknak két formája létezik a szerint, hogy mit választunk meg bázisadatnak:

(1) Bázisviszonyyszám

(2) Láncviszonyyszám

Definíció. *Állandó bázisú viszonyyszámról* (bázis viszonyyszám) akkor beszélünk, ha a sor valamennyi adatát egy közös alappal osztjuk el (vagyis a bázis állandó). A bázisviszonyyszám megmutatja, hogy milyen *mértékű* volt a jelenség változása a bázisévhez képest- fontos a bázis adat helyes megválasztása. Az i -edik időszak bázisviszonyyszáma a következő módon határozható meg:

$$V_{b(i)} = \frac{y_i}{y_0}$$

Definíció. *Változó bázisú viszonyyszámnak* (lánc viszonyyszám) azt a viszonyyszámot hívjuk, amelyet úgy kaptunk, hogy az idősor valamely időszak, időponti adatát a közvetlenül megelőző időszak, időpont adatával osztottuk el. A láncviszonyyszám megmutatja a *változás ütemét*:

$$V_{l(i)} = \frac{y_i}{y_{i-1}}, \text{ ahol } y_{i-1} \text{ a megelőző időszak, időpont adata.}$$

Amennyiben a lánc viszonyyszámokat valamely gazdasági jelenség vizsgálatára alkalmazzuk, úgy a 6. táblázat szerinti négy alapesetet különíthetjük el az idősorokban. Természetesen egy idősor esetén a négy alapeset nem mindig tisztán kivehetően jelentkezik, esetleg több eset keveréke fordul elő az idősorban. A növekedés, illetve csökkenés időszaka is lehet hosszabb, vagy rövidebb.

6. táblázat: A láncviszonyszámok alakulásának 4 lehetséges alapesete az idősorokban

Év	1. eset	2. eset	3. eset	4. eset
2001	0,7623	1,3221	1,0732	0,9743
2002	0,8423	1,2743	1,1843	0,9443
2003	0,8912	1,2134	1,2134	0,8912
2004	0,9443	1,1843	1,2743	0,8423
2005	0,9743	1,0732	1,3221	0,7623
Jelenség	Lassuló ütemű csökkenés	Lassuló ütemű növekedés	Gyorsuló ütemű növekedés	Gyorsuló ütemű csökkenés

Forrás: Saját szerkesztés

Megjegyzés. Általánosan megfogalmazható, hogy ha a láncviszonyszám értéke együtthatós formában 1 feletti, akkor növekedés van az előző évhez képest, 1 alatti érték mutat csökkenést az előző évhez képest. Szokás az viszonzyszámokat százalékosan megadni, és ezután a viszonzyszámokból 100-at kivonni. Ekkor megkapjuk az előző évhez (vagy a bázisévhez) történő változást százalékban előjelesen.

Ugyanazon idősor adataira számított bázis és láncviszonyszámok közvetlenül egymásból kölcsönösen meghatározhatók. Bázis viszonzyszámokból adott időszakai láncviszonyszámot úgy számíthatunk, hogy megkeressük láncviszonyszámmal az azonos időszakhoz tartozó bázisviszonyszámot és osztjuk az előző időszakai bázisviszonyszámmal:

$$V_{l(i)} = \frac{V_{b(i)}}{V_{b(i-1)}}, \text{ ahol } V_{b(i-1)} \text{ az } i-1\text{-edik évre felírt bázisviszonyszám.}$$

Láncviszonyszámokból bázisviszonyszámot úgy számíthatunk adott tárgyidőszakra, hogy a tárgyidőszakig számított láncviszonyszámokat összeszorozzuk az alábbiak szerint:

$$V_{b(i)} = V_{l(1)} * V_{l(2)} * \dots * V_{l(i)}$$

Megjegyzés. Amennyiben az induló adat a bázis, ez a 100%, és a többi adatot ehhez viszonyítjuk. A láncviszonyszámokból eggyel kevesebbet tudunk mindig számítani, mint bázisviszonyszámokból, hiszen az első adat esetén nincs megelőző időszakai adat.

14.8.1.3. Egyéb összehasonlító viszonzyszámok

Az **egyéb összehasonlító viszonzyszámokat** ugyan úgy kell számítani, mint a dinamikus viszonzyszámokat, csak nem idősor alapján képezzük őket, hanem területi, minőségi, mennyiségi sorokból. A bázis megválasztására nagy figyelmet kell fordítani. A vállalkozások minden esetben kitűznek egy elérendő célt maguk elé, ezeket tervezet formájában fogalmazzák meg. Szükséges minden esetben nyomon követni, hogy a terv milyen változást irányoz elő a bázisul választott adathoz képest, és hogyan éri el a kitűzött célt, illetve mennyire valósult meg a tervezet. Ennek a mérésére szolgálnak a tervfeladat és teljesítmény viszonzyszámok.

Definíció. A *tervfeladat viszonyszámok* azt fejezik ki, hogy valamely tervezett feladat hányszorosa a bázisadatnak, amely lehet az előző évek bármelyik adata. Az i-edik részsokaság esetén a mutató az alábbiak szerint számolható ki:

$$V_{tf(i)} = \frac{\sum_{i=1}^n y_i^{TERV}}{\sum_{i=1}^n y_b},$$

ahol y_b a bázisadatot jelöli, „n” az adatok száma, b értéke pedig 1 és „n” között vehet fel bármilyen értéket

Definíció. A *teljesítmény viszonyszámok* valamely feladat teljesítésének mértékét fejezik ki, vagyis hogy a teljesítmény hányszorosa az elérendő feladatnak. Az i-edik részsokaságra a mutató a következő módon számolható:

$$V_{t(i)} = \frac{\sum_{i=1}^n y_i^{TÉNY}}{\sum_{i=1}^n y_i^{TERV}}$$

Definíció. *Koordinációs viszonyszámokról* akkor beszélünk, amikor a viszonyított két adat ugyanazon sokaságnak két kizárólagos összetevő része, azaz két részsokaság adatát arányítjuk egymáshoz és nem az összes sokaság adatához.

14.8.2. Különnemű adatok viszonyítása

Definíció. Különböző típusú statisztikai sorok, vagy egy leíró sor adatainak összehasonlításakor keletkeznek az *intenzitási viszonyszámok*, amelyeknek a kifejezési formája mindig együtthatós, azaz tizedes tört formájú. Ezen viszonyszámok mértékegységgel rendelkeznek. Képzésük az alábbi képlet szerint történik:

$$V_i = \frac{y_i^{(1)}}{y_i^{(2)}},$$

ahol $y_i^{(1)}$ és $y_i^{(2)}$ az egyik, illetve másik idősor i-edik részsokaságának adata.

Az intenzitási viszonyszám megmutatja, hogy az egyik jelenség milyen gyakran, milyen sűrűn fordul elő a másikhoz képest. Azzal az adattal osztunk, melynek egységére vonatkoztatjuk a másik adat mennyiségét.

A viszonyszám tartalma szerint a következő mutatók léteznek:

- (1) sűrűség mutatók (népsűrűség)
- (2) átlag jellegű mutatók (1 ha-ra jutó átlagtermés)
- (3) arányszámok (születési és halálozási arányszámok)

Definíció. *Egyenes intenzitási viszonyzámnak* azt a viszonyszámot nevezzük, amelynek számlálóját növelve, azaz a mutató értékének a növekedése a vizsgált jelenség jobb

színvonalát, hatékonyságát mutatja, azaz egyenes arányosan mozog a mutató a vizsgált jelenséggel.

Definíció. *Fordított intenzitási viszony számnak* azt a viszony számot nevezzük, amelynek számlálóját növelve, azaz a mutató értékének a növekedése a vizsgált jelenség jobb színvonalát, hatékonyságát mutatja, azaz egyenes arányosan mozog a mutató a vizsgált jelenséggel.

Megjegyzés. Természetesen (t/ha) egyenes mutató, minél többet termelnek egy hektáron, annál jobb a termelés színvonala, viszont a népsűrűség (fő/km²) fordított mutató, mivel minél több ember lakik egy négyzetkilométeren, annál rosszabb a helyzet az adott területen a népsűrűség tekintetében.

A viszony számok típusait foglalja össze a 63. ábra:



63. ábra: A viszony számok főbb csoportjai

Forrás: Balázsiné és mtsai (2003)

14.9. Középértékek

A **középértékek** az információ sűrítésének legerősebb eszközei, a statisztikai sorban szereplő adatok tömörítésére szolgálnak, céljuk a statisztikai sokaságot egy számmal jellemezni. Abban az esetben, ha az adatok homogének, vagyis nagyjából egyetlen szám köré csoportosulnak, akkor a középérték megbízható, ellenkező esetben nem. Ezért szükséges vizsgálni a középértékek mellett minden esetben az adatok szóródását a középérték körül, ez szintén egyetlen számmal kifejezhető mutatót jelent. A középértékeknek az alábbi főbb kritériumokat kell teljesíteni (lehetőség szerint egyszerre):

- (1) Egyértelműség: azt illetően, hogy milyen számolássorozat, képlett adja meg az értékét
- (2) Könnyen értelmezhetőség: végeredményül egy számot kapjunk
- (3) Érvényesség: a legkisebb és legnagyobb adat közé essen a középérték
- (4) Jellemzőség: lehetőleg a legközelebb legyen minden adathoz
- (5) Érzékenység: ne legyen érzékeny a néhány távol eső adatra, értéke ne változzon nagyban

A középértékeknek két fő csoportját különböztetjük meg:

- (1) Számított középértékek
- (2) Helyzeti középértékek

14.9.1. Számított középértékek

Számított középértékeket mindig egyetlen matematikai számítás (képlet) eredményeként kapjuk meg, és értéküket az adatok sorrendje sohasem befolyásolja. Rendelkezhetnek egyszerű, illetve súlyozott formával aszerint, hogy az adatok, amelyekből számoljuk a középértékeket önmagukban, vagy gyakorisággal ellátva vannak megadva.

Öt főbb számított középértéket különböztetünk meg: számtani, mértani, kronologikus, harmonikus, négyzetes.

14.9.1.1. Számtani átlag

A számtani átlag az észlelési adatok olyan középértéke, melyet az adatok helyébe helyettesítve azok összege állandó marad. Az egyszerű és súlyozott számtani átlagot egyenes intenzitási viszonyszámok átlagolására használjuk.

Definíció. Az **egyszerű számtani átlag** a statisztikai sokaság adatai összegének és az adatok számának hányadosa. Akkor alkalmazzuk, ha az adatok gyakorisága egy, vagy azonos, kiszámítása a következőképpen történik:

$$\bar{X}_{sz} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n},$$

ahol x_i a mennyiségi ismerv egyes változatait jelenti, i az adat sorszámát, n pedig az összes adat számát.

Definíció. **Súlyozott számtani átlagot** akkor kapunk, amikor az észlelési adatok előfordulásukkal (gyakoriságukkal) súlyozott összegének és a gyakoriságok összegének hányadosát vesszük. Az alábbi módon számoljuk ki az átlagot:

$$\bar{X}_{sz}^{(s)} = \frac{\sum_{i=1}^m f_i x_i}{\sum_{i=1}^m f_i}, \text{ ahol } f_i \text{ az } i\text{-edik adat } (x_i) \text{ előfordulásainak száma,}$$

$$\text{„}m\text{” a különböző ismervváltozatok } (x_i) \text{ száma, } \sum_{i=1}^m f_i = n.$$

Az átlag értékét kizárólag az átlagolandó értékek, valamint azok előfordulásainak nagysága befolyásolja.

A súlyozott számtani átlag főbb sajátosságai a következők:

- (1) Érzékeny a kiugró értékekre
- (2) Az átlagtól vett eltérések előjeles összege 0-at ad
- (3) Négyzetes minimum tulajdonság: az észlelési adatok átlagtól vett eltéréseinek négyzetösszege a legkisebb lesz
- (4) Értéke nem változik, ha a súlyokat egyenlő arányban változtatjuk (osztjuk, vagy szorozzuk), de változik, ha az átlagolandó értékeket változtatjuk

Amikor osztályközös gyakorisági sorból szeretnénk súlyozott számtani átlagot számolni, akkor nem konkrét értékek gyakoriságai vannak megadva, hanem egy-egy osztályköz előfordulási gyakoriságai. Ekkor az átlagolandó értékek maguk az osztályok közepei, ezek az értékek az osztályköz átlagát becsülik. Az 4. táblázat jelöléseire támaszkodva az átlag az alábbi módon adható meg:

$$\overline{X}_{SZ}^{(s)} = \frac{\sum_{i=1}^m f_i u_i}{\sum_{i=1}^m f_i}, \text{ ahol } f_i \text{ az } i\text{-edik adat } (x_i) \text{ előfordulásainak száma, } u_i \text{ az } i\text{-edik osztály}$$

közepe, „m” a különböző ismérvváltozatok (x_i) száma, $\sum_{i=1}^m f_i = n$.

Megjegyzés. A fenti képlet egyenlő és nem egyenlő hosszú osztályközök esetén is használható.

14.9.1.2. Mértani (Geometriai) átlag

A mértani átlag az észlelési adatok olyan középértéke, melyet az adatok helyébe helyettesítve azok szorzata állandó marad. A mértani átlagot rendszerint láncviszonyszámok (a változás ütemei) esetén használjuk, és átlagos változási ütemet fejez ki.

Definíció. Egyszerű mértani (geometriai) átlagot akkor kapunk, amikor az észlelési adatok szorzatát n -edik gyök alá vonjuk és „ n ” az adatok számát jelöli. Az alábbi módon számoljuk ki az egyszerű mértani átlagot:

$$\overline{X}_M = \sqrt[n]{x_1 \cdot \dots \cdot x_n}$$

Definíció. Súlyozott mértani átlagot akkor kapunk, amikor az észlelési adatok előfordulásukkal (gyakoriságukkal) súlyozott szorzatát annyiadik gyök alá vonjuk, amennyi a gyakoriságok összege (azaz n -edik gyök alá). Az alábbi módon számoljuk ki a mértani átlagot:

$$\overline{X}_M^{(s)} = \sqrt[\sum f]{x_1^{f_1} \cdot x_2^{f_2} \cdot \dots \cdot x_m^{f_m}}, \text{ ahol „m” a különböző ismérvváltozatok száma.}$$

Nagyságát a két szélsőérték dönti el, csak állandóan emelkedő vagy csökkenő idősorból célszerű kiszámítani. Amennyiben láncviszonyszámokból számítjuk a mértani átlagot a képletek a következők szerint módosulnak:

(1) Egyszerű esetben

$$\overline{X}_M = \sqrt[n-1]{V_{b(n)}} = \sqrt[n-1]{\frac{y_n}{y_0}}$$

(2) Súlyozott esetben

$$\overline{X}_M^{(s)} = \sqrt[\sum f]{V_{l(1)}^{f_1} \cdot V_{l(2)}^{f_2} \cdot \dots \cdot V_{l(m)}^{f_m}}$$

Megjegyzés. A lánc- és bázisviszonyszámok együttthatós formáját helyettesítjük a képletekbe, nem pedig a százalékos formát, és az eredmény is együttthatós formában (tizedes tört) adódik. Egynél magasabb érték esetén a változás átlagos üteme növekvő, egynél kisebb érték esetén csökkenő volt. Szokás a mértani átlagot idősor esetén százalékra átszámolni és 100-at kivonni az értékből. Ilyenkor az átlagos változási ütemet kapjuk százalékosan előjelesen.

14.9.1.3. Egyéb átlagok

Egyéb átlagok közé tartozik a harmonikus, kronologikus és a négyzetes átlag, amelynek a szóródás számításakor még további jelentősége lesz. A kronológikus átlagot állapot idősor adatainak átlagolásra használjuk, ahol az adatok egyenlő időközben állnak rendelkezésünkre. Az egyszerű és súlyozott harmonikus átlagot **fordított intenzitási viszonzszámok** átlagolására használható.

Definíció. Az „n” különböző időpontban megfigyelt adat átlagolására alkalmazott átlagot **kronologikus átlagnak** nevezzük. Kiszámítása úgy történik, hogy az első és utolsó adatot felezzük, majd a többi adattal összeadjuk, és osztjuk az időszakok számával, ami az időpontok számánál eggyel kevesebb:

$$\bar{X}_{KR} = \frac{\frac{x_1}{2} + x_2 + \dots + x_{n-1} + \frac{x_n}{2}}{n-1}$$

Definíció. Az átlagolandó értékek reciprok értékei átlagának reciprokaként keletkező átlag a **harmonikus átlag**, amelyet fordított arányosságot tükröző mennyiségek átlagolására használjuk.

$$\bar{X}_H = \frac{\frac{1}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n}}}{n} = \frac{\frac{1}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i}}}{n} = \frac{n}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i}}$$

Az átlagolandó értékeket a harmonikus átlaggal helyettesítve az adatok reciprokának összege állandó.

Definíció. Az átlagolandó értékek reciprok értékeinek súlyozott számtani átlagának reciprokaként keletkező átlag a **súlyozott harmonikus átlag**. Amennyiben viszonzszámot átlagolunk, akkor alkalmazunk harmonikus átlagot, ha súlyként a viszonzszám nevezője van megadva.

$$\bar{X}_H^{(s)} = \frac{\frac{1}{f_1 \frac{1}{x_1} + f_2 \frac{1}{x_2} + \dots + f_m \frac{1}{x_m}}}{f_1 + f_2 + \dots + f_m} = \frac{\sum_{i=1}^m f_i}{\sum_{i=1}^m f_i \frac{1}{x_i}}$$

Megjegyzés. Amennyiben viszonzszámot átlagolunk, és súlyként a nevező van megadva, akkor a súlyozott számtani átlagot kell alkalmazni az átlagoláshoz.

Definíció. Az **egyszerű négyzetes átlag** a statisztikai sokaság négyzetre emelt adatai egyszerű számtani átlagának a gyöke. Akkor alkalmazzuk, ha az adatok gyakorisága egy, vagy azonos. A **súlyozott négyzetes átlag** a négyzetre emelt adatok súlyozott számtani átlagának a gyöke.

Az átlag kiszámítása a következőképpen történik:

$$(1) \text{ Egyszerű eset: } \bar{X}_N = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i)^2}{n}}$$

$$(2) \text{ Súlyozott eset: } X_N^{(s)} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^m f_i (x_i)^2}{\sum_{i=1}^m f_i}}$$

Megjegyzés. A négyzetes átlag a kiugró értékre érzékeny, az átlagolandó értékek helyébe helyettesítve azok négyzetösszege változatlan marad.

Az átlagok közötti nagyságrendi összefüggés a következő:

$$\bar{X}_H < \bar{X}_M < \bar{X}_{SZ} < \bar{X}_N$$

14.9.2. Helyzeti középértékek

A helyzetüknél fogva jellemzik a statisztikai sort, így az észlelési adatokból nem matematikai összefüggés során nyerjük őket. Ahhoz, hogy meghatározhassuk őket, az adatokat valamilyen szempont szerint először sorba kell rendezni. A helyzeti középértékek érzékenyek a kiugró értékre és az adatok sorrendjére.

14.9.2.1. Medián

Definíció. a nagyság szerint rendezett statisztikai sor középső elemét a **nyers mediánnak** nevezzük. A medián páratlan számú adat esetén a sorba rendezett adatok közül a középső elem, míg páros adatszám esetén a két középső elem egyszerű számtani átlaga, jele: M_e . A nyers medián kiszámítására az alábbi képletet használjuk.

$$M_e = \frac{n+1}{2}$$

Megjegyzés. Páratlan „n” esetén azonnal adódik a medián, ha „n” páros, akkor törtérték jön ki. A két egész érték, ami közé ez a tört esik, mutatja meg, hogy melyik az a két középső elem, amelyet átlagolni kell.

A medián kiszámítása osztályközös gyakorisági sor esetén is lehetséges, de sokkal bonyolultabb, mivel a tényleges adatok nem állnak rendelkezésre, csak az, hogy az adott osztályközbe hány adat található. Ekkor az alábbi számítást alkalmazzuk:

$$M_e = me_{x_0} + \frac{\frac{n+1}{2} - \sum_{i=1}^{me-1} f_i}{f_{me}} \cdot h,$$

ahol „h” jelenti az osztályköz hosszát, me_{x_0} a nyers móduszt tartalmazó osztályköz alsó határát, f_{me} a mediánt tartalmazó osztályközhöz tartozó adatgyakoriságok, az „me” jelöli a mediánt tartalmazó osztályköz sorszámát, a $\sum_{i=1}^{me-1} f_i$ pedig a mediánt tartalmazó osztályközig adja meg a gyakoriságok összegét.

14.9.2.2. Módusz

Definíció. a nagyság szerint rendezett statisztikai sor leggyakoribb értékét **nyers módusznak** nevezzük, jele: M_o .

A módusz kiszámítása osztályközös gyakorisági sor esetén a következő módon történik

$$M_o = mo_{xo} + \frac{f_{mo} - f_{mo-1}}{(f_{mo} - f_{mo-1}) + (f_{mo} - f_{mo+1})} \cdot h,$$

ahol „h” jelenti az osztályköz hosszát, mo_{xo} a nyers móduszt tartalmazó (modális) osztályköz alsó határát, f_{mo} a móduszt tartalmazó osztályközhez tartozó adatgyakoriságokat, az „mo” jelöli a móduszt tartalmazó osztályköz sorszámát, f_{mo-1} , illetve f_{mo+1} a móduszt tartalmazó osztályközt megelőző, illetve követő osztályközök adatgyakoriságait.

14.9.2.3. Kvartilisek

A nagyság szerint rendezett sokaságot négy részre osztjuk, és megkeressük az osztópontokat, amelyeket kvartiliseknek nevezünk.

Definíció. Az **alsó kvartilis** az az érték, amelynél a sokaság 25%-a kisebb értéket vesz fel, a **felső kvartilis** pedig az az érték, amelynél az elemek 75%-a nagyobb értékkel rendelkezik.

Az alábbi képletek szerint az elemszám függvényében (Hunyadi és Vita, 1991):

(1) Alsó kvartilis (Q1) esetén a nyers érték: $\frac{n+1}{4}$

osztályközök esetén: $q1_{xo} + \frac{\frac{n+1}{4} - \sum_{i=1}^{q1-1} f_i}{f_{q1}} \cdot h$

(2) Felső kvartilis (Q3) esetén a nyers érték: $3 \cdot \frac{n+1}{4}$

osztályközök esetén: $q3_{xo} + \frac{3 \cdot \frac{n+1}{4} - \sum_{i=1}^{q3-1} f_i}{f_{q3}} \cdot h$

A fenti képletekben „n” az elemek száma, $q1_{xo}$ ($q3_{xo}$) a nyers alsó (felső) kvartilist tartalmazó osztályköz alsó határa, a $q1$ ($q3$) a nyers alsó (felső) kvartilist tartalmazó osztályköz sorszám, az f_{q1} (f_{q3}) a nyers alsó (felső) kvartilist tartalmazó osztályközhez tartozó adatgyakoriságok, „h” az osztályköz hossza.

Megjegyzés. Páratlan elemszám esetén egész nyers értékek adódnak a kvartilisekre, azaz annak az konkrét adatnak a sorszáma adódik, amely a kvartilist adja. Viszont amikor páros számú adatot osztunk négy részre, akkor 25 századra végződő tört értékek jönnek ki (egy negyeddel többet kapunk az egésznél). Ekkor a kvartilis értékét közelítéssel és arányítással keressük meg. Például 9,25 esetén az alsó kvartilist úgy határozzuk meg, hogy a 9. és 10. adat értékének a különbségét negyedeljük, és hozzáadjuk a 9. adathoz. Így az alsó kvartilis a 9. adathoz lesz és arányos módon közelebb.

14.10. Szóródás és mutatói

Az előzőekben láthattuk, hogy a középérték egy számmal jellemzi a statisztikai sokaságot. Az átlag alkalmassága, megbízhatósága a sor általános jellemzésére mindig attól függ, hogy a vizsgált statisztikai sor egyes adatai hogyan helyezkednek el az átlag körül, vagyis milyen az adatok átlag körüli eloszlása. Ezen jelenség vizsgálatára szolgál a szóródás.

Definíció. A statisztikai sor értékeinek valamely középértéktől való eltéréseit, illetőleg az eltérések átlagát *szóródásnak* nevezzük. Leggyakrabban a számtani átlaghoz képest állapítjuk meg, de bármely más átlaghoz is képezhető szóródás. Értéke minél kisebb, annál jellemzőbb, megbízhatóbb az átlag.

Az alábbi **szóródási mutatókat** különböztetjük meg a gyakorlatban (Hunyadi és Vita, 1991):

- (1) Középeltérés
- (2) Abszolút átlageltérés
- (3) Variancia (szórásnégyzet)
- (4) Négyzetes átlageltérés
- (5) Terjedelem, kvartilis terjedelem

14.10.1. Terjedelem

A *terjedelmet* a nagyság szerint sorba rendezett adatok legnagyobb és legkisebb elemének különbségével kapjuk meg. Nagysága megmutatja, hogy az adatok milyen hosszú értéktartományban mozognak. Amikor a kvartilis terjedelmet számoljuk ki, akkor az adatok értékének terjedelmét csak az alsó (Q_1) és felső (Q_3) kvartilisek között számoljuk ki.

14.10.2. Középeltérés

A mediántól számított abszolút eltérések számtani átlaga, vagyis az előjeleket nem vesszük figyelembe. Kiszámítására az alábbi képlet alkalmazható:

$$K_e = \frac{\sum_{i=1}^n |x_i - M_e|}{n}$$

14.10.3. Abszolút átlageltérés

A statisztikai sor értékeinek a számtani átlagtól abszolút értékben vett eltéréseinek egyszerű (vagy súlyozott) számtani átlaga. Az egyszerű (vagy súlyozott) számtani átlag megbízhatóságának elemzésére használatos mutató, amely eredményül egy mértékegységgel bíró hányadost ad. Alkalmazása a gyakorlatban kevésbé elterjedt.

$$(1) \text{ Egyszerű eset: } \delta = \frac{\sum_{i=1}^n |x_i - \bar{X}|}{n}$$

$$(2) \text{ Súlyozott eset: } \delta = \frac{\sum_{i=1}^m f_i |x_i - \bar{X}|}{\sum_{i=1}^m f_i}$$

14.10.4. Variancia (szórásnégyzet)

A **variancia** az egyik legalapvetőbb szóródást mérő mutató, különösképpen akkor alkalmazzuk, amikor a szórást okozó tényezőket, ismérveket vizsgáljuk. Az feltételezett befolyásoló tényezők, ismérvek szerint csoportokat képezünk, és az egyes csoportokban illetve az egész sokaságban is meghatározzuk a varianciát.

Definíció. Az adatoknak azok számtani átlagától vett eltérései négyzetének az egyszerű (vagy súlyozott) átlagát a *szórás négyzetének*, illetve *varianciának* nevezzük. Kiszámítása az adatok jellegétől függően az alábbiak szerint történik:

$$(1) \text{ Egyszerű eset: } \sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{X})^2}{n}$$

$$(2) \text{ Súlyozott eset: } \sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^m f_i (x_i - \bar{X})^2}{\sum_{i=1}^m f_i}$$

14.10.5. Négyzetes átlageltérés (szórás)

A négyzetes átlag egyik gyakorlati alkalmazása a szórás mutatója. A négyzetes átlag képletében az x_i adatok helyett azok számtani átlagától vett eltéréseit helyettesítjük, így jutunk a szóráshoz, amely egy mértékegységgel rendelkező hányados lesz.

Definíció. A szórásnégyzetből, varianciából számított négyzetgyök értékét nevezzük *szórásnak*.

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{X})^2}{n}} \qquad \sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^m f_i (x_i - \bar{X})^2}{\sum_{i=1}^m f_i}}$$

Definíció. képezhetjük a szóródás és az átlagnak a hányadosát, amelyet a gyakorlatban *szóródási együtthatónak*, vagy *relatív szórásnak* hívunk.

A relatív szórás megmutatja, hogy az átlagnak hány százalékát teszi ki a szóródás, és alkalmas különböző jelenségek átlagának és szórásának összehasonlítására. 30%-ot meghaladó érték esetén szélsőséges változékonyságról beszélünk az adatokban, ekkor megkérdőjelezhető az átlag megbízhatósága. 10%- alatti érték esetén a sokaság adatai homogénnek tekinthetők, az átlag ekkor a legmegbízhatóbb a sokaság jellemzésére. A 10-20, illetve 20-30% közötti relatív szórás közepesen, illetve erősen változékonny jelenséget mutat.

14.11. Statisztikai indexek

Az **index** egy latin eredetű szó, amely egyszerűen mutatót jelent. A statisztikai indexszám komplexebb tartalmú és kifejezőbb, mint egy viszonszám. Míg a viszonszámok azt mutatják meg, hogy egy jelenség hogyan változik időben vagy térben, addig a **statisztikai indexek** alkalmasak annak kifejezésére is, hogy több, különböző fajta jelenség együttesen hogyan változik.

Definíció. Az **indexszámok** olyan összetett (komplex) viszonszámok, amelyek mindig több, egymással kapcsolatban levő, de különmemű, közvetlenül nem összesíthető mennyiség (jelenség) együttes, átlagos - leggyakrabban időbeli - változását fejezi ki.

Csak az összetett indexek tekinthetők tényleges indexeknek. Az egyes résztényezők változását kifejező dinamikus, vagy egyéb összehasonlító viszonszámok az egyedi indexek, de ezek is csak az összetett indexszámítás keretén belül nevezhetők indexeknek.

A statisztikai értelemben vett indexek tehát átlag jellegű, komplex viszonszámok. Az indexeknek két nagy csoportja van:

(1) Abszolút számokból számított indexek

- Értékinde
- Árindex
- Volumenindex

(2) Viszonszámokból számított indexek

- Változó állományú index
- Változatlan állományú index
- Összetételindex

14.11.1. Abszolút számokból számított indexek

A termelés természetes mértékegységében történő számbavétele tájékoztatást nyújt arról, hogy az egyes termékek mennyisége külön-külön hogyan változott, de legtöbbször nem ad választ arra, hogy egészében, vagy a termékek bizonyos körénél együttesen, hogyan alakult a termelés. Ennek leggyakrabban az lehet az oka, hogy a termékek különbözősége miatt az azokra vonatkozó adatok közvetlenül nem összesíthetők.

Az indexeknél azonban több jelenség többféle termék együttes változását kell megállapítanunk (pl. ha a növénytermesztés és az állattenyésztés különböző fajta termékeinek együttes alakulását akarjuk vizsgálni, olyan mértékegységet kell keresni, amellyel az egymástól eltérő minőségű és értékű termékek közösen kifejezhetők).

Ez a közös nevező általában az egyes termékek pénzben kifejezett értéke, vagyis ára, melynek segítségével a különböző termékek egymással, vagy az előző időszakok adataival összehasonlíthatókká válnak. A továbbiakban a mennyiséget q -val jelölöm a quantum szó alapján, az árat pedig p -vel a prix szó alapján.

14.11.1.1. Értékindex

Az értékváltozásokban a mennyiség és az árváltozás együttesen jut kifejezésre. A termelési értéket itt szélesebben értelmezzük és értékindexszel mérjük nemcsak a termelt, hanem az eladott, értékesített, felvásárolt, vagy fogyasztott mennyiségek értékének alakulását is.

Definíció. A különböző fajta, de valamilyen szempontból összetartozó termékek, vagy termékcsoportok termelési értékének együttes átlagos, rendszerint időbeli alakulását kifejező összetett dinamikus viszonyszámot *értékindexnek* nevezzük:

$$I_E = \frac{\sum_{i=1}^r q_i^{(1)} p_i^{(1)}}{\sum_{i=1}^r q_i^{(0)} p_i^{(0)}}$$

Megjegyzés. az értékindex mindig az érvényben lévő, folyóáron számítva fejezi ki a termelés értékének változását. Mivel az értékindex a termékek mennyiségének és a termékek egységárának változását együttesen fejezi ki, ez a sajátossága lehetővé teszi, hogy belőle kiindulva az árindexet és a volumenindexet is meghatározzuk.

14.11.1.2. Ár- és volumenindex

Definíció. Az *árindex* a termékek bizonyos csoportja árainak együttes átlagos időbeli változását, az árszínvonal egészének alakulását fejezi ki:

$$I_A^{(0)} = \frac{\sum_{i=1}^r q_i^{(0)} p_i^{(1)}}{\sum_{i=1}^r q_i^{(0)} p_i^{(0)}} \quad \text{vagy} \quad I_A^{(1)} = \frac{\sum_{i=1}^r q_i^{(1)} p_i^{(1)}}{\sum_{i=1}^r q_i^{(1)} p_i^{(0)}}$$

Definíció. A *volumenindex* a termékek meghatározott csoportjára vonatkozóan, azok termelt, vagy eladott mennyiségeinek együttes átlagos időbeli változását fejezi ki:

$$I_V^{(0)} = \frac{\sum_{i=1}^r q_i^{(1)} p_i^{(0)}}{\sum_{i=1}^r q_i^{(0)} p_i^{(0)}} \quad \text{vagy} \quad I_V^{(1)} = \frac{\sum_{i=1}^r q_i^{(1)} p_i^{(1)}}{\sum_{i=1}^r q_i^{(0)} p_i^{(1)}}$$

Megjegyzés: két időszak helyett időszakok egész sorát is összehasonlíthatjuk, ilyenkor indexsorokat kapunk. Számíthatunk érték-, ár-, volumen indexsorokat. Mindhárom lehet bázis, illetve lánc indexsor aszerint, hogy hogyan választjuk ki a két időszakot. Egymás után következő időszakok esetén lánc indexsort kapunk, amikor az első időszakot rögzítjük, akkor bázis indexsort kapunk. Állandó súlyú indexsor esetén a súlyokat az indexsor minden tagjánál változatlanul vesszük, míg változó súlyú indexsorban az indexsor egyes tagjainak meghatározása során más-más időszak súlyait alkalmazzuk. A gyakorlatban az állandó súlyú indexsorok alkalmazása terjedt el.

Főbb alkalmazási területek:

(1) Üzemi szint

volumen index a legelterjedtebb

(2) Népgazdasági szint

$$\text{reálbér index} = \frac{\text{munkabér index}}{\text{fogyasztói árindex}}$$

A reálbér index a fogyasztás volumenindexeként tekinthető, amely azt fejezi ki, hogy a keresetért, mennyivel lehet több vagy kevesebb fogyasztási cikket vásárolni egy adott időszakban valamely bázisidőszakhoz képest.

Üzemi szinten az érték indexnek több év összehasonlításában nincs nagy jelentősége az árváltozások miatt, az árindexet nem üzemi szinten kell vizsgálni.

14.11.2. Viszonyyszámokból számított indexek

Több viszonyszám, vagy átlag együttes változását fejezik ki. Három fő típusa létezik:

(1) Főátlag index,

(2) Részátlag index,

(3) Összetétel index.

A részátlag- és az összetétel index számítása az ún. standardizálás módszerén alapszik.

Definíció. A *standardizálás* azt jelenti, hogy az általános színvonal mutatókban csak az egyik befolyásoló tényező hatását tekintjük. Standardizálás alkalmazására heterogén ill. különböző összetételű sokaságok átlagos színvonalának időbeli vagy térbeli összehasonlításakor van szükség.

A heterogén sokaság egészére vonatkozó átlagos színvonal alakulását két tényező befolyásolja.

- a rész sokaságok átlagos színvonalának változása ill. különbözősége,
- a rész sokaságok nagyságának ill. súlyainak az aránya.

A standardizálás a gyakorlatban úgy történik, hogy a heterogén sokaság egészére vonatkozó átlagos színvonal változását ill. különbözőségét kifejező mutatókat összetett viszonyszám formájában, a sokaságot alkotó részcsoportok átlagos színvonalát kifejező részviszonyszámok súlyozott átlagaként számítjuk ki vagy, hogy a részviszonyszámok eredeti súlyai helyett változatlan (standard) súlyokat feltételezünk.

14.11.2.1. Főátlag index

A *főátlag indexet* akkor alkalmazzuk őket, amikor két csoport, vagy részsokaság azonos típusú adataiból akarunk viszonyszámokat képezni, és ezeket a viszonyszámokat akarjuk összehasonlítani a két csoportban (részsokaságban).

Definíció. A heterogén és a változó összetételű sokaság tényleges átlagszínvonalának mutatóit két időszakra kiszámítjuk és a két mutatószámból dinamikus viszonyszámot számítunk az alábbiak szerint:

$$I_{F\ddot{O}} = \frac{\frac{\sum_{i=1}^r f_i^{(1)} \overline{x_i^{(1)}}}{\sum_{i=1}^r f_i^{(1)}}}{\frac{\sum_{i=1}^r f_i^{(0)} \overline{x_i^{(0)}}}{\sum_{i=1}^r f_i^{(0)}}}$$

Ahol $f_i^{(1)}$: az egyes csoportok átlagszínvonal mutatóinak súlyai a tárgyidőszakban

$\overline{x_i^{(1)}}$: az egyes csoportok átlagszínvonal mutatói a tárgyidőszakban

$f_i^{(0)}$: az egyes csoportok átlagszínvonal mutatóinak súlyai a bázisidőszakban

$\overline{x_i^{(0)}}$: az egyes csoportok átlagszínvonal mutatói a bázisidőszakban

r : a csoportok száma

i : az adott csoport sorszámát

Értékét befolyásolja:

- (1) A csoport vagy részsokaságok színvonalának változása.
- (2) A csoportok összetételének változása, ill. az összetétel eltolódása a nagyobb vagy kisebb színvonalú csoportok felé.
- (3) Kiszámítása súlyozott számtani átlaggal történik.

14.11.2.2. Részátlag-, Összetétel index

A **részátlag index** esetén standardizálással kiküszöböljük az összetétel változásnak hatását.

Definíció: A sokaság egyes csoportjaiban mutatkozó színvonalváltozások átlagos mértékét fejezi ki. Az index a két időszakra standard összetétellel számított átlagos színvonalmutatókból képzett dinamikus viszonyszám.

A súlyarányok állandóságát megszabhatjuk a tárgyidőszak alapján:

$$I_{R\ddot{E}SZ}^{(1)} = \frac{\frac{\sum_{i=1}^r f_i^{(1)} \overline{x_i^{(1)}}}{\sum_{i=1}^r f_i^{(1)}}}{\frac{\sum_{i=1}^r f_i^{(1)} \overline{x_i^{(0)}}}{\sum_{i=1}^r f_i^{(1)}}}$$

a bázis időszak alapján:

$$I_{\text{RÉSZ}}^{(0)} = \frac{\frac{\sum_{i=1}^r f_i^{(0)} \overline{x_i^{(1)}}}{\sum_{i=1}^r f_i^{(0)}}}{\frac{\sum_{i=1}^r f_i^{(0)} \overline{x_i^{(0)}}}{\sum_{i=1}^r f_i^{(0)}}}$$

Az összetétel index számításakor a részsokaságok színvonal mutatóit vesszük változatlanak mindkét időszakban.

Definíció: Az *összetétel index* azt fejezi ki, hogy a vizsgált heterogén sokaság összetételében történt változás határa milyen mértékű volt a sokaság egészének átlagszínvonalára.

Általában a részsokaságok bázisidőszaki mutatóit vesszük változatlanak:

$$I_{\text{ÖSSZ}}^{(0)} = \frac{\frac{\sum_{i=1}^r f_i^{(1)} \overline{x_i^{(0)}}}{\sum_{i=1}^r f_i^{(1)}}}{\frac{\sum_{i=1}^r f_i^{(0)} \overline{x_i^{(0)}}}{\sum_{i=1}^r f_i^{(0)}}}$$

A tárgyidőszak alapján is számolhatunk:

$$I_{\text{ÖSSZ}}^{(1)} = \frac{\frac{\sum_{i=1}^r f_i^{(1)} \overline{x_i^{(1)}}}{\sum_{i=1}^r f_i^{(1)}}}{\frac{\sum_{i=1}^r f_i^{(0)} \overline{x_i^{(1)}}}{\sum_{i=1}^r f_i^{(0)}}}$$

Az összetétel megváltozása a magasabb színvonalú csoport vagy csoportok javára történt abban az esetben, ha a változó állományú index nagyobb, mint a változatlan állományú és az összetételindex értéke a 100%-ot meghaladja.

A három index között átszámítási összefüggés létezik. Ha a részátlag index számításakor a tárgyidőszak súlyait, és az összetétel index esetén pedig a bázisidőszak részsínvonal mutatóit vesszük változatlanak, akkor a főátlag indexek megkaphatjuk a részátlag és az összetétel index szorzataként, azaz $I_{\text{ÖSSZ}}^{(0)} * I_{\text{RÉSZ}}^{(1)} = I_{\text{FŐ}}$

Főbb alkalmazási területeik:

- (1) újabb agro- és zootechnikai eljárások alkalmazása
- (2) munkatermelékenység vizsgálata
- (3) önköltség, munkabér számítása
- (4) térbeli összehasonlítások

14.12. Ellenőrző kérdések

1. Mivel foglalkozik a statisztika?
2. Adja meg a statisztikai sokaság fogalmát.
3. Ismertesse a statisztikai sokaság típusait.
4. Mivel jellemezhetjük egy sokaság egységeit?
5. Mit nevezünk ismérvnek?
6. Adj meg a tárgyi ismérvek, a térbeli ismérvek és az időbeli ismérvek jellemzőit.
7. Mit nevezünk statisztikai sornak?
8. Definiálja a mennyiségi és minőségi sor fogalmát.
9. Mi a gyakorisági és értékösszeg sor?
10. Soroljon fel egyéb sorokat, adja meg jellemzőiket.
11. Ismertesse a statisztikai sorok jellegzetességeit.
12. Mi az a statisztikai tábla és hogyan lehet csoportosítani azokat?
13. Milyen tartalmi és formai követelményeknek kell megfelelnie a statisztikai tábláknak?
14. Definiálja a statisztikai viszonyszám fogalmát.
15. Milyen viszonyszámokat ismer?
16. Hogyan csoportosíthatók az egyenemű viszonyszámok?
17. Definiálja a megoszlási viszonyszám fogalmát.
18. Mit ért összehasonlító viszony számon?
19. Mi az a dinamikus viszony szám?
20. Adja meg az állandó és változó bázisú viszony szám fogalmát.
21. Definiálja a tervfeladat, a teljesítmény és a koordinációs viszony számok fogalmát.
22. Igaz-e, hogy az intenzitási viszony számok azonos típusú statisztikai sorok, vagy egy leíró sor adatainak összehasonlításakor keletkezik?
23. Soroljon fel mutatókat a viszony számok tartalma szerint.
24. Igaz-e, hogy az egyenes intenzitású viszony számok azok, melyek számlálóját növelve a vizsgált jelenség jobb színvonalát, hatékonyságát mutatja.
25. Definiálja a fordított intenzitású viszony szám fogalmát.
26. Mit értünk középérték alatt?
27. Milyen főbb kritériumoknak kell megfelelniük a középértékeknek?
28. Milyen fő csoportját különböztetjük meg a középértékeknek?
29. Sorolja fel a számított középértékeket.
30. Definiálja a számtani átlag fogalmát. valamint az egyszerű ill. súlyozott számtani átlagot.
31. Definiálja a mértani átlag fogalmát, valamint az egyszerű ill. súlyozott mértani átlagot.

32. Mit értünk kronologikus átlagon?
33. Mikor számolunk harmonikus átlaggal?
34. Adja meg az egyszerű és a súlyozott négyzetes átlag fogalmát.
35. Sorolja fel milyen helyzeti középértékeket ismer.
36. Mit értünk medián alatt?
37. Igaz-e, hogy a módusz a nagyság szerint rendezett statisztikai sor leggyakoribb értéke?
38. Mi az alsó ill., felső kvartilis?
39. Mit értünk szóródás alatt?
40. Milyen szóródási mutatókat különböztetünk meg a gyakorlatban?
41. Definiálja a terjedelem, középeltérés, abszolút átlageltérés fogalmát.
42. Mi a variancia?
43. Mi a szórás és hogyan határozzuk meg?
44. Soroljon fel statisztikai indexeket.
45. Definiálja az értékindex, az ár- és volumenindex fogalmát.
46. Milyen alkalmazási területei ismertek a gyakorlatban az állandó súlyú indexsoroknak?
47. Melyek azok a viszonyszámok, amik több viszonyszám, vagy átlag együttes változását fejezik ki?
48. Mit jelent a standardizálás?
49. Mikor alkalmazzuk a főátlag indexet?
50. Mit értünk részátlag és összetétel index alatt? Milyen alkalmazási területeit ismeri?

Tárgymutató

A,Á

abszolút átlageltérés, 149

altér, 87

generált $\sim$, 87

átlag

egyszerű mértani $\sim$, 145

egyszerű négyzetes $\sim$, 146

egyszerű számtani $\sim$, 144

harmonikus $\sim$, 146

kronológikus $\sim$, 146

súlyozott harmonikus $\sim$, 146

súlyozott mértani $\sim$, 145

súlyozott négyzetes $\sim$, 147

súlyozott számtani $\sim$, 144

axióma, 114

B

Bayes-tétel, 119

bázis, 86

$\sim$ ra vonatkozó koordináták, 86

természetes $\sim$, 86

bázistranszformáció, 91

egyenletrendszer megoldása, 93

elemi $\sim$, 91

belső pont, 60, 96

binomiális együtthatók, 106

binomiális tétel, 106

C

Cramer-szabály, 83

Cs

Csebisev-egyenlőtlenség, 129

D

deriválási szabályok, 62, 97

elemi függvények, 63

derivált, 61

magasabbrendű, 64

parciális, 96

parciális másodrendű, 99

Descartes szorzat, 19

determináns

$\sim$ függvény, 73

algebrai al $\sim$, 75

iszámítása, 75

kiszámítása, 74

sarok $\sim$, 100

tulajdonsága, 75

differenciahányados, 59

geometriai szemléltetése, 60

differenciálhányados, 59, 61

geometriai szemléltetése, 61

E,É

elaszticitás, 66

eloszlás

Poisson- $\sim$, 125

eloszlás

binomiális $\sim$, 125

egyenletes $\sim$, 126

exponenciális $\sim$, 126

geometriai $\sim$, 125

Nevezetes abszolút folytonos, 126

nevezetes diszkrét $\sim$, 125

normális $\sim$, 126

standard normális, 127

eloszlás-függvény, 121

eltolás, 41

esemény, 109

$\sim$ algebra, 111

$\sim$ tér, 109

biztos $\sim$, 109

elemi $\sim$, 109

ellentett $\sim$, 109

függetlenség, 118

különbség, 110

lehetetlen $\sim$, 109

összeg, 109

szorzat, 109

teljes $\sim$ rendszer, 111

valószínűsége, 114

euklideszi tér, 85

euklideszi norma, 95

euklideszi tér, 95

F

Falk-módszer, 73

folytonosan differenciálható, 97

főátló, 70

függvény, 20

abszolút érték $\sim$, 39

abszolút és lokális szélsőértékheye, 26

algebrai $\sim$, 27

cosinus $\sim$, 36

cotangens $\sim$, 38

differenciálhatósága, 61

egészrész $\sim$, 40

egyváltozós valós, 23

előjel $\sim$, 39

exponenciális $\sim$, 32, 34

folytonossága, 57, 96

határértéke, 56, 96

hatvány $\sim$, 29

inflexiós pontja, 26

inverze, 21

Irracionális $\sim$, 32

konstans $\sim$, 28

konvexitása, 26

korlátossága, 25

kölcsönösen egyértelmű, 21

leszűkítése, 21
 lineáris ~, 28
 logaritmus ~, 34
 logaritmus~, 33
 másodfokú ~, 28
 monotonitása, 25
 négyzetgyök~, 32
 osztályozása, 27
 páros és páratlan, 27
 periódusa, 27
 racionális egész ~, 27
 racionális tört~, 30
 ráfordítás és hozam ~, 67
 sinus ~, 35
 szakadása, 57
 tangens ~, 37
 többváltozós ~, 94
 törtrész ~, 40
 transzcendens ~, 32
 transzformáció, 40
 trigonometrikus ~, 34
 zérushelye, 24

G

Gauss-elimináció, 78, 79, 80, 81
Gauss-görbe, 127
generátorrendszer, 86

Gy

gyakoriság, 112

H

halmaz, 9
 alap~, 10
 alulról korlátos ~, 14
 diszjunkt ~, 11
 egyenlő, 9, 10
 eleme, 9
 felülről korlátos ~, 14
 hatvány~, 10
 intervallum, 15
 komplementere, 11
 korlátossága, 14
 különbség, 11
 maximuma, 14
 megadása, 9
 megszámlálható, 21
 megszámlálhatóan végtelen, 21
 metszet, 11
 minimuma, 14
 rész~, 9
 számossága, 21
 triviális rész~, 9
 unió, 10
 üres ~, 9
 véges, 21
 végtelen, 21
határérték
 a végtelenben, 57

jobb oldali ~, 56
hibakorlát, 48
Horner-elrendezés, 24
hozadékszámítás, 53

I,Í

idősor
 állapot ~, 134
 tartam ~, 134
index
 ár~, 153
 érték~, 153
 főátlag ~, 154
 összetétel ~, 156
 részátlag ~, 155
 volumen~, 153
indexszámok, 152
ismérvek, 132
 időbeli ~, 133
 tárgyi ~, 133
 térbeli ~, 133
ismétlődő beruházások, 53

J

járadék
 ~számítás, 52
 ~tagok, 52
jövőérték, 52

K

kamat, 51
 ~láb, 51
 ~os kamatszámítás, 51
 ~tényező, 51
kifejtési tétel, 75
kísérlet, 109
kombináció
 ismétlés nélküli ~, 105
 ismétléses ~, 105
kölcsöntörlesztés, 52
középtérés, 149
középtértékek, 143
 helyzeti ~, 147
 számított ~, 144
Kronecker-Capelli, 88
küszöbindex, 48
kvartilis
 alsó ~, 148
 felső ~, 148

L

L'Hospital-szabály, 64
Lagrange multiplikátor módszer, 102
lineáris egyenletrendszer, 78
 együtthatómátrix, 88
 ellentmondásos, 78
 homogén, 78, 83
 inhomogén, 78

irreguláris, 78
mátrixos alak, 88
megoldható, 78
reguláris, 78
trapéz alakú, 80
triviális megoldás, 83

lineáris kombináció, 72, 85

M

Markov-egyenlőtlenség, 129

mátrix, 69

diagonál~, 70
egység~, 70
háromszög~, 71
inverze, 76, 93
kvadrátikus ~, 70
oszlop~, 71
összeadás, 71
rangja, 93
sor~, 71
szorzása mátrixszal, 72
szorzása skalárral, 72
transzponáltja, 70
zérus~, 71

medián, 147

mellékátló, 70

mintavétel

visszatevés nélküli ~, 116
visszatevése ~, 115

módusz, 148

N

nagy számok törvénye, 129

Ny

nyújtás, 41, 42

O,Ó

oszlopindex, 69

osztályköz, 133

P

Pascal-féle háromszög, 106

permutáció

ismétlés nélküli ~, 104
ismétléses ~, 104

polinom, 24

gyöktényező alakja, 25

pontos alsó korlát, 14, 47

pontos felső korlát, 14, 47

R

reláció, 20

értékkészlete, 20
értelmezési tartománya, 20
inverze, 20

összetett, 20

relatív gyakoriság, 112

rendőr elv, 49

S

Sarrus-szabály, 75

sík, 19

skaláris szorzat, 94

sokaság, 132

álló~, 132
fő~, 132
mozgó ~, 132
rész~, 132
teljes ~, 132

sor, 133

~ gyakorisági, 134
értékösszeg ~, 134
idő~, 134
leíró ~, 134
mennyiségi ~, 133
területi ~, 134

sorindex, 69

sorozat

divergens, 48
hányados, 46
konvergenciája, 47
korlátosság, 46
különbség, 46
megadása, 45
mértani ~, 51
minimuma, maximuma, 47
monotonitása, 46
nevezetes határértékek, 50
null~, 48
összeg, 46
rész, 49
skalárszorosa, 46
számtani ~, 51
szemléltetése, 45
szorzat, 46
torlódási pontja, 50
valós szám~, 45
véges ~, 45

standardizálás, 154

statisztika, 131

statisztikai

~ indexek, 152
~ sokaság, 132
~ sor, 133
~ tábla, 136

sűrűségfüggvény, 122

standard normális, 127

Sz

szakadás

elsőfajú ~, 57
másodfajú ~, 57

számegyenes, 46

számok

egész ~, 12

irracionális $\sim$, 13
racionális $\sim$, 13
természetes $\sim$, 12
valós $\sim$, 13

szélsőérték

elégletes feltétel, 99
feltétel nélküli, 99
feltételes $\sim$, 101
globális maximum, 98
globális minimum, 99
helyi maximum, 98
helyi minimum, 98
számítása, 98
szükséges feltétel, 99

szórás, 124, 150

relatív $\sim$, 150

szórásnégyzet, 124

szóródás, 149

szóródási mutatók, 149

sztochasztikus konvergencia, 129

T

tábla

csoportosító $\sim$, 136
egyszerű $\sim$, 136
kombinációs $\sim$, 136

teljes függvényvizsgálat, 65

tér, 19

terjedelem, 149

torlódási pont, 96

tükrözés, 42, 43

V

valószínűség, 112, 114

$\sim$ eloszlás, 121

feltételes $\sim$, 117
geometriai $\sim$, 117
klasszikus $\sim$, 115
szorzási szabálya, 118
teljes $\sim$ tétel, 118
tulajdonságai, 114

valószínűségi változó

diszkrét, 121
függetlenség, 124

várható érték, 123

variáció

ismétlés nélküli $\sim$, 104
ismétléses $\sim$, 105

variancia, 150

vektorrendszer

kompatibilis, 88, 92
lineárisan független, 85, 92
lineárisan függő, 85
rangja, 87

vektortér, 85

n-dimenziós, 86

véletlen tömegjelenség, 109, 112

Venn-diagram, 10

viszonyszámok, 138

bázis $\sim$, 140
dinamikus $\sim$, 140
egyéb összehasonlító $\sim$, 141
egynemű $\sim$, 139
fordított intenzitási $\sim$, 146
intenzitási $\sim$, 139, 142
koordinációs $\sim$, 142
különnemű $\sim$, 139
lánc $\sim$, 140
megoszlási $\sim$, 139
teljesítmény $\sim$, 142
tervfeladat $\sim$, 142

IRODALOMJEGYZÉK

- Balázsine Farkas K. – Erdélyi Zs. – Kardos Z. – Vargáné Dugonics R. (2003): Általános statisztika, SZÁMALK, Budapest.
- Banach S. (1967): Differenciál- és integrálszámítás. Tankönyvkiadó, Budapest.
- Bíró F. – Vincze Sz. (2000): Bevezetés az alkalmazott matematikába. Debreceni Egyetem, Debrecen.
- Bronstejn I. N. – Szemengyajev K. A. (1987): Matematikai zsebkönyv. Műszaki Könyvkiadó, Budapest.
- Császár Á. (1983): Valós analízis I-II. Tankönyvkiadó, Budapest.
- Cseke V. (1982): Valószínűségszámítás és gyakorlati alkalmazásai. Dacia Könyvkiadó, Kolozsvár-Napoca.
- Csernyák L. (1998): Analízis. Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest.
- Denkinger G. (1997): Analízis. Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest.
- Denkinger G. – Gyurkó L. (1987): Analízis - Gyakorlatok. Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest.
- Fazekas I. (1992): Bevezetés a valószínűségszámításba. Debreceni Egyetem, Debrecen.
- Hunyadi L. – Vita L. (1991): Statisztika I. AULA kiadó, Budapest.
- Prékopa A. (1962): Valószínűségelmélet. Műszaki Könyvkiadó, Budapest.
- Rimán J. (1992): Matematikai analízis feladatgyűjtemény I-II. Tankönyvkiadó, Budapest.
- Rudin W. (1978): A matematika analízis alapjai. Műszaki Könyvkiadó, Budapest.
- Szendrei J. (1996): Algebra és számelmélet. Tankönyvkiadó, Budapest.
- Szerényi T. (1988): Analízis. Tankönyvkiadó, Budapest.
- Tóth Z. – Horváth I. (1991): Gazdasági matematika. GATE Mezőgazdasági Főiskolai Kar, Gyöngyös.