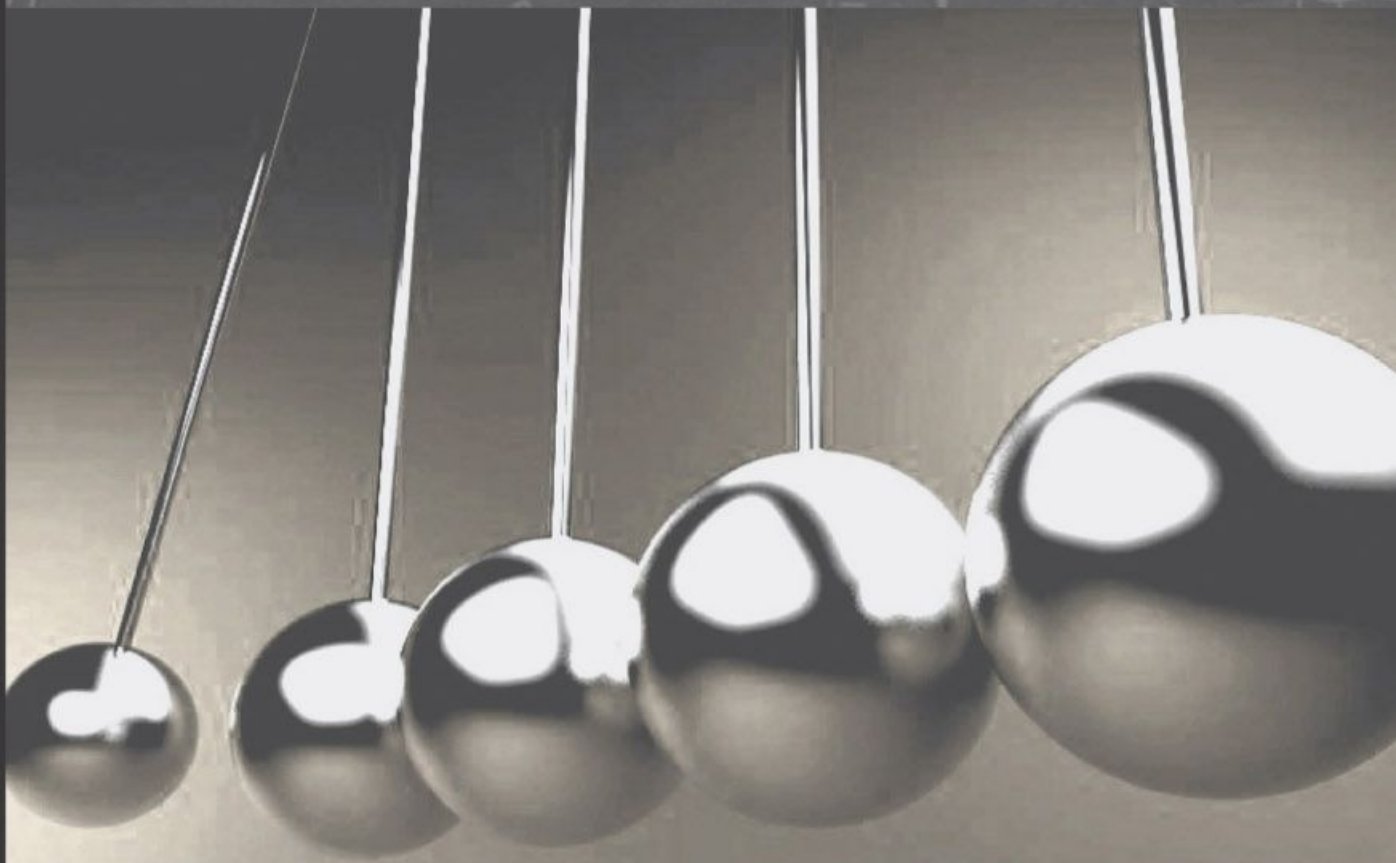


Dr. Szíki Gusztáv Áron  
Műszaki Mechanika  
Statika

Szerkesztő:  
Szíki Gusztáv Áron  
Szántó Attila



DEBRECENI EGYETEM  
MŰSZAKI KAR  
MŰSZAKI ALAPTÁRGYI TANSZÉK

Dr. Szíki Gusztáv Áron

MŰSZAKI MECHANIKA  
STATIKA



Debreceni Egyetemi Kiadó  
Debrecen University Press  
2019



## Tartalomjegyzék

1. Matematikai bevezetés – Vektoralgebra .....	4
1.1 A vektor fogalma.....	4
1.2 A vektor leírása koordinátákkal .....	4
1.3 Vektorműveletek.....	6
1.4 Számításai feladatok.....	12
2. Newton törvényei. Erőtörvények. Anyagi pont egyensúlya.....	14
2.1 Newton törvényei .....	14
2.2 Erőtörvények .....	15
2.3 Anyagi pont egyensúlya .....	21
2.4 Feladatok .....	21
3. Forgatónyomaték, erőrendszerek eredője és egyenértékűsége .....	34
3.1 Forgatónyomaték .....	34
3.2 Erőrendszer eredő ereje és eredő forgatónyomatéka .....	35
3.3 Erőrendszerek egyenértékűsége és eredője .....	36
3.4 Feladatok .....	38
4. Erőrendszerek osztályozása.....	39
4.1 Erőpár és erőcsavar.....	39
4.2 Az erőrendszerek osztályai .....	41
4.3 Feladatok .....	44
5. Síkbeli erőrendszerek, .....	45
5.1 Síkbeli erőrendszerek osztályozása.....	45
5.2 Az erő skaláris forgatónyomatéka.....	48
5.3 Síkbeli erőrendszer eredőjének szerkesztése .....	49
5.4 Feladatok .....	55
6. Homogén gravitációs erőrendszer eredője. Súlypont .....	59
6.1 Homogén gravitációs erőrendszer eredője .....	59
6.2 Súlypont .....	60
6.3 Síkidomok súlypontja.....	62
6.4 Feladatok .....	64
7. Merev test egyensúlya.....	71
7.1 Merev test egyensúlyi állapota .....	71
7.2 Egyensúlyi egyenletek merev testre.....	73
7.3 Kényszerek: támaszok és csatlakozások.....	74



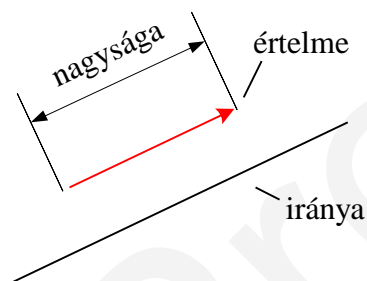
7.4	Kényszererők kiszámítása .....	76
7.5	Feladatok .....	76
8.	Kényszererők szerkesztése egyensúlyban .....	86
8.1	Metsző erőrendszer .....	86
8.2	Párhuzamos erőrendszer .....	94
9.	Valós kényszerek .....	99
9.1	Súrlódásos felület (támasz) .....	99
9.2	Gördülési ellenállás.....	106
9.3	Kötélsúrlódás.....	111
9.4	Csapsúrlódás .....	116
9.5	Ék .....	121
9.6	Horony.....	123
9.7	Csavar .....	125
10.	Igénybevétel. Tartók igénybevételi ábrái .....	126
11.	Az igénybevételi ábrák rajzolásának egyszerű szabályai .....	145
	Irodalomjegyzék .....	161



## 1. Matematikai bevezetés – Vektoralgebra

### 1.1 A vektor fogalma

A **vektor** egy irányított szakasz, amelyet nagyságával, irányával és értelmével jellemezhetünk. A szakasz hossza a vektor nagysága, iránya a vele párhuzamos egyenes, értelmét a szakasz végén található nyílhegy rögzíti.

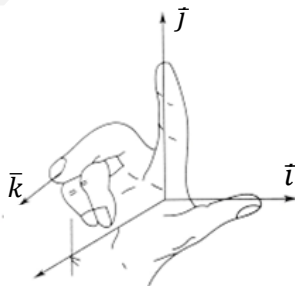


1. ábra. A vektor ábrázolása

### 1.2 A vektor leírása koordinátákkal

A vektor leírásához bevezetjük az  $\bar{i}$ ,  $\bar{j}$ ,  $\bar{k}$  **bázisvektorokat** az alábbiak szerint:

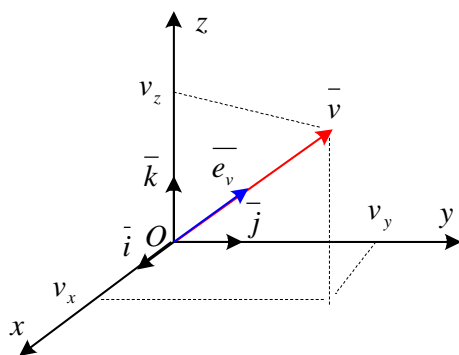
- $\bar{i}$ ,  $\bar{j}$  és  $\bar{k}$  egységvektorok:  $|\bar{i}| = |\bar{j}| = |\bar{k}| = 1$
- $\bar{i}$ ,  $\bar{j}$  és  $\bar{k}$  páronként merőlegesek egymásra
- $\bar{i}$ ,  $\bar{j}$  és  $\bar{k}$  jobbsodrású rendszert alkotnak



2. ábra. Jobbsodrású rendszer

A  $\bar{v}$  vektort fel tudjuk írni az  $\bar{i}$ ,  $\bar{j}$ ,  $\bar{k}$  bázisvektorokkal az alábbiak szerint:

$$\bar{v} = v_x \cdot \bar{i} + v_y \cdot \bar{j} + v_z \cdot \bar{k} \quad (1.1)$$



3. ábra. A vektor koordinátái

Az egyenletben (1.1)  $v_x$ ,  $v_y$  és  $v_z$  a  $\bar{v}$  vektor koordinátái. Oszlopvektoros jelöléssel:

$$\bar{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} \quad (1.2)$$

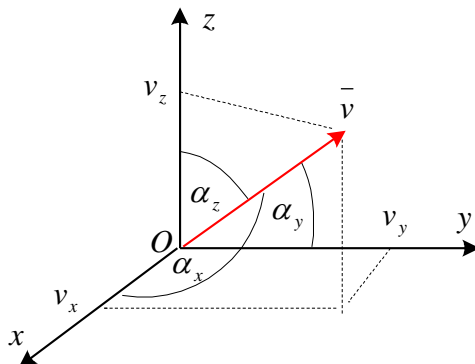
A vektor nagyságát a koordinátáiból az alábbi összefüggéssel számíthatjuk ki:

$$|\bar{v}| = v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} \quad (1.3)$$

A  $\bar{v}$  vektor irányába mutató egységvektort az alábbi összefüggés értelmezi:

$$\bar{e}_v = \frac{\bar{v}}{v}$$

Jelöljük a  $\bar{v}$  vektor és az  $x$ ,  $y$ ,  $z$  koordináta tengelyek által bezárt szögeket  $\alpha_x$ ,  $\alpha_y$  és  $\alpha_z$ -vel az ábra szerint:



4. ábra. A  $\bar{v}$  vektor koordináta tengelyekkel által bezárt szögei



$\cos \alpha_x$ ,  $\cos \alpha_y$  és  $\cos \alpha_z$  az alábbiak szerint számítható:

$$\cos \alpha_x = \frac{v_x}{v}, \cos \alpha_y = \frac{v_y}{v}, \cos \alpha_z = \frac{v_z}{v} \quad (1.4)$$

Az  $\bar{e}_v$  egységvektor kifejezhető az  $\bar{i}$ ,  $\bar{j}$ ,  $\bar{k}$  bázisvektorokkal:

$$\bar{e}_v = \frac{\bar{v}}{v} = \frac{v_x \bar{i} + v_y \bar{j} + v_z \bar{k}}{v} = \cos \alpha_x \cdot \bar{i} + \cos \alpha_y \cdot \bar{j} + \cos \alpha_z \cdot \bar{k} \quad (1.5)$$

Az (1.3) és (1.5) egyenletek alapján:

$$|\bar{e}_v| = \sqrt{\cos^2 \alpha_x + \cos^2 \alpha_y + \cos^2 \alpha_z} = 1 \quad (1.6)$$

Az (1.6) egyenletből az alábbi azonosságot kapjuk:

$$\cos^2 \alpha_x + \cos^2 \alpha_y + \cos^2 \alpha_z = 1 \quad (1.7)$$

### 1.3 Vektorműveletek

#### Vektorok összeadása:

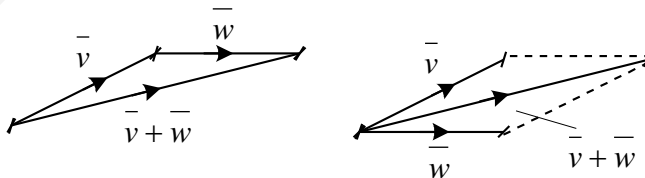
Számítással:

$$\begin{aligned} \bar{v} + \bar{w} &= (v_x \cdot \bar{i} + v_y \cdot \bar{j} + v_z \cdot \bar{k}) + (w_x \cdot \bar{i} + w_y \cdot \bar{j} + w_z \cdot \bar{k}) \\ &= (v_x + w_x) \cdot \bar{i} + (v_y + w_y) \cdot \bar{j} + (v_z + w_z) \cdot \bar{k} \end{aligned}$$

Oszlopvektoros alakban:

$$\bar{v} + \bar{w} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w_x \\ w_y \\ w_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_x + w_x \\ v_y + w_y \\ v_z + w_z \end{pmatrix} \quad (1.8)$$

Szerkesztéssel:





**Vektorok kivonása:**

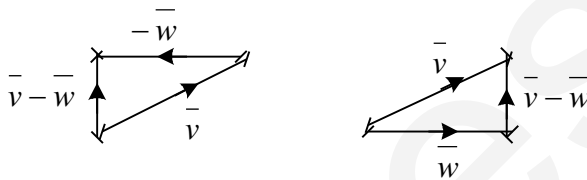
Számítással:

$$\begin{aligned} \vec{v} - \vec{w} &= (v_x \cdot \vec{i} + v_y \cdot \vec{j} + v_z \cdot \vec{k}) - (w_x \cdot \vec{i} + w_y \cdot \vec{j} + w_z \cdot \vec{k}) \\ &= (v_x - w_x) \cdot \vec{i} + (v_y - w_y) \cdot \vec{j} + (v_z - w_z) \cdot \vec{k} \end{aligned}$$

Oszlopvektoros alakban:

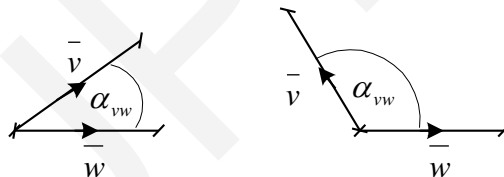
$$\vec{v} - \vec{w} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} w_x \\ w_y \\ w_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_x - w_x \\ v_y - w_y \\ v_z - w_z \end{pmatrix} \quad (1.9)$$

Szerkesztéssel:



**Vektorok által bezárt szög:**

Két vektor által bezárt szög  $0^\circ$  és  $180^\circ$  között változhat.



**Vektorok skaláris szorzása:**

A  $\vec{v}$  és  $\vec{w}$  vektorok skaláris szorzatát az (1.10) összefüggés értelmezi:

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = |\vec{v}| \cdot |\vec{w}| \cdot \cos \alpha_{vw} \quad (1.10)$$

A fenti definícióból a következőket állapíthatjuk meg:

- Ha  $0^\circ \leq \alpha_{vw} < 90^\circ$  akkor  $0 < \vec{v} \cdot \vec{w}$
- Ha  $\alpha_{vw} = 90^\circ$  akkor  $\vec{v} \cdot \vec{w} = 0$
- Ha  $90^\circ < \alpha_{vw} \leq 180^\circ$  akkor  $\vec{v} \cdot \vec{w} < 0$



**Skaláris szorzat számítása a vektor koordinátáiból:**

**1.1 tétel:**

A  $\vec{v}$  és  $\vec{w}$  vektorok skaláris szorzata a következő összefüggéssel számítható a vektorok koordinátáiból:

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = v_x \cdot w_x + v_y \cdot w_y + v_z \cdot w_z \quad (1.11)$$

**Bizonyítás:**

$$\vec{i} \cdot \vec{j} = |\vec{i}| \cdot |\vec{j}| \cdot \overbrace{\cos 90^\circ}^0 = 0 \rightarrow \vec{i} \cdot \vec{k} = \vec{j} \cdot \vec{k} = 0$$

$$\vec{i} \cdot \vec{i} = \overbrace{|\vec{i}|}^1 \cdot \overbrace{|\vec{i}|}^1 \cdot \overbrace{\cos 0^\circ}^1 = 1 \rightarrow \vec{j} \cdot \vec{j} = \vec{k} \cdot \vec{k} = 1$$

$$\begin{aligned} \vec{v} \cdot \vec{w} &= (v_x \cdot \vec{i} + v_y \cdot \vec{j} + v_z \cdot \vec{k}) \cdot (w_x \cdot \vec{i} + w_y \cdot \vec{j} + w_z \cdot \vec{k}) = \\ &= v_x \cdot w_x \cdot \overbrace{\vec{i} \cdot \vec{i}}^1 + v_x \cdot w_y \cdot \overbrace{\vec{i} \cdot \vec{j}}^0 + v_x \cdot w_z \cdot \overbrace{\vec{i} \cdot \vec{k}}^0 + v_y \cdot w_x \cdot \overbrace{\vec{j} \cdot \vec{i}}^0 + v_y \cdot w_y \cdot \overbrace{\vec{j} \cdot \vec{j}}^1 \\ &+ v_y \cdot w_z \cdot \overbrace{\vec{j} \cdot \vec{k}}^0 + v_z \cdot w_x \cdot \overbrace{\vec{k} \cdot \vec{i}}^0 + v_z \cdot w_y \cdot \overbrace{\vec{k} \cdot \vec{j}}^0 + v_z \cdot w_z \cdot \overbrace{\vec{k} \cdot \vec{k}}^1 \\ &= v_x \cdot w_x + v_y \cdot w_y + v_z \cdot w_z \end{aligned}$$

**Vektorok szögeinek kiszámítása a vektorok koordinátáiból:**

**1.2 tétel:**

A  $\vec{v}$  és  $\vec{w}$  vektorok által bezárt szög a következő összefüggéssel számítható:

$$\cos \alpha_{vw} = \frac{v_x \cdot w_x + v_y \cdot w_y + v_z \cdot w_z}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} \cdot \sqrt{w_x^2 + w_y^2 + w_z^2}}, \quad \vec{v} \neq \vec{0}, \vec{w} \neq \vec{0} \quad (1.12)$$

**Bizonyítás:**

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = |\vec{v}| \cdot |\vec{w}| \cdot \cos \alpha_{vw} \rightarrow \cos \alpha_{vw} = \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{|\vec{v}| \cdot |\vec{w}|} = \frac{v_x \cdot w_x + v_y \cdot w_y + v_z \cdot w_z}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} \cdot \sqrt{w_x^2 + w_y^2 + w_z^2}}$$

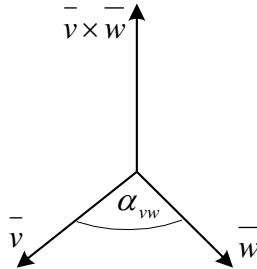
**Vektorok vektoriális (kereszt) szorzata:**

A  $\vec{v}$  és  $\vec{w}$  vektorok vektoriális szorzata a  $\vec{v} \times \vec{w}$  vektor, amelyet az alábbiak szerint értelmezünk:

- $|\vec{v} \times \vec{w}| = |\vec{v}| \cdot |\vec{w}| \cdot \sin \alpha_{vw}$



- $\vec{v} \times \vec{w}$  merőleges a  $\vec{v}$  és  $\vec{w}$  vektorok által meghatározott síkra
- $\vec{v}$ ,  $\vec{w}$  és  $\vec{v} \times \vec{w}$  jobbsodrású rendszert alkotnak



5. ábra. A  $\vec{v} \times \vec{w}$  vektor iránya és értelme

1.3 tétel:

$$\vec{v} \times \vec{w} = -\vec{w} \times \vec{v}$$

Bizonyítás:

A fenti összefüggés a vektoriális szorzat definíciójából közvetlenül adódik.

1.4 tétel:

Ha a  $\vec{v}$  vektor párhuzamos a  $\vec{w}$  vektorral, akkor  $\vec{v} \times \vec{w} = \vec{0}$ .

Bizonyítás:

Ha  $\vec{v}$  vektor párhuzamos  $\vec{w}$  vektorral, akkor  $\alpha_{vw} = 0^\circ$  vagy  $180^\circ$ .  $\rightarrow$

$$|\vec{v} \times \vec{w}| = |\vec{v}| \cdot |\vec{w}| \cdot \overbrace{\sin \alpha_{vw}}^0 = 0 \quad \rightarrow \quad \vec{v} \times \vec{w} = \vec{0}$$

**A vektoriális szorzat kiszámítása a vektorok koordinátáiból:**

1.5 tétel:

A vektoriális szorzat a vektorok koordinátáiból az alábbi összefüggéssel számítható:

$$\vec{v} \times \vec{w} = \begin{pmatrix} v_y \cdot w_z - v_z \cdot w_y \\ v_z \cdot w_x - v_x \cdot w_z \\ v_x \cdot w_y - v_y \cdot w_x \end{pmatrix} \quad (1.13)$$



*Bizonyítás:*

$$\bar{i} \times \bar{j} = \bar{k}, \quad \bar{i} \times \bar{k} = -\bar{j}, \quad \bar{j} \times \bar{k} = \bar{i}$$

$\bar{j} \times \bar{i} = -\bar{k}, \quad \bar{k} \times \bar{i} = \bar{j}, \quad \bar{k} \times \bar{j} = -\bar{i}$  (Ezek az egyenletek az 1.3 tételből következnek)

$\bar{i} \times \bar{i} = \bar{j} \times \bar{j} = \bar{k} \times \bar{k} = \bar{0}$  (Ezek az egyenletek az 1.4 tételből származnak)

$$\begin{aligned} \bar{v} \times \bar{w} &= (v_x \cdot \bar{i} + v_y \cdot \bar{j} + v_z \cdot \bar{k}) \times (w_x \cdot \bar{i} + w_y \cdot \bar{j} + w_z \cdot \bar{k}) = \\ &= v_x \cdot w_x \cdot \overbrace{\bar{i} \times \bar{i}}^{\bar{0}} + v_x \cdot w_y \cdot \overbrace{\bar{i} \times \bar{j}}^{\bar{k}} + v_x \cdot w_z \cdot \overbrace{\bar{i} \times \bar{k}}^{-\bar{j}} + v_y \cdot w_x \cdot \overbrace{\bar{j} \times \bar{i}}^{-\bar{k}} + v_y \cdot w_y \cdot \overbrace{\bar{j} \times \bar{j}}^{\bar{0}} \\ &\quad + v_y \cdot w_z \cdot \overbrace{\bar{j} \times \bar{k}}^{\bar{i}} + v_z \cdot w_x \cdot \overbrace{\bar{k} \times \bar{i}}^{\bar{j}} + v_z \cdot w_y \cdot \overbrace{\bar{k} \times \bar{j}}^{-\bar{i}} + v_z \cdot w_z \cdot \overbrace{\bar{k} \times \bar{k}}^{\bar{0}} \\ &= (v_y \cdot w_z - v_z \cdot w_y) \cdot \bar{i} + (v_z \cdot w_x - v_x \cdot w_z) \cdot \bar{j} + (v_x \cdot w_y - v_y \cdot w_x) \cdot \bar{k} \end{aligned}$$

Következtetésképp:

$$\bar{v} \times \bar{w} = \begin{pmatrix} v_y \cdot w_z - v_z \cdot w_y \\ v_z \cdot w_x - v_x \cdot w_z \\ v_x \cdot w_y - v_y \cdot w_x \end{pmatrix} \quad (1.14)$$

### **Módszer a vektori szorzat kiszámítására:**

A vektoriális szorzat az 1.12. összefüggéssel számítható. Problémát jelent, hogy a fenti összefüggés nehezen megjegyezhető. Ezért most bemutatunk egy eljárást, amely hasonló a mátrixok determinánsának kiszámításához, és amelyre lényegesen könnyebb emlékezni:

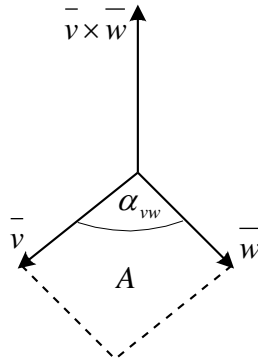
$$\begin{aligned} \bar{v} \times \bar{w} &= \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{vmatrix} = \bar{i} \cdot \begin{vmatrix} v_y & v_z \\ w_y & w_z \end{vmatrix} - \bar{j} \cdot \begin{vmatrix} v_x & v_z \\ w_x & w_z \end{vmatrix} + \bar{k} \cdot \begin{vmatrix} v_x & v_y \\ w_x & w_y \end{vmatrix} \\ &= \bar{i} \cdot (v_y \cdot w_z - v_z \cdot w_y) - \bar{j} \cdot (v_x \cdot w_z - v_z \cdot w_x) + \bar{k} \cdot (v_x \cdot w_y - v_y \cdot w_x) \\ &= \begin{pmatrix} v_y \cdot w_z - v_z \cdot w_y \\ v_z \cdot w_x - v_x \cdot w_z \\ v_x \cdot w_y - v_y \cdot w_x \end{pmatrix} \end{aligned}$$

### **A vektoriális szorzat nagyságának geometriai jelentése:**

*1.6 tétel:*

A  $\bar{v}$  és  $\bar{w}$  vektorok vektoriális szorzatának nagysága egyenlő az általuk kifeszített paralelogramma területével.

$$A = |\bar{v} \times \bar{w}|$$



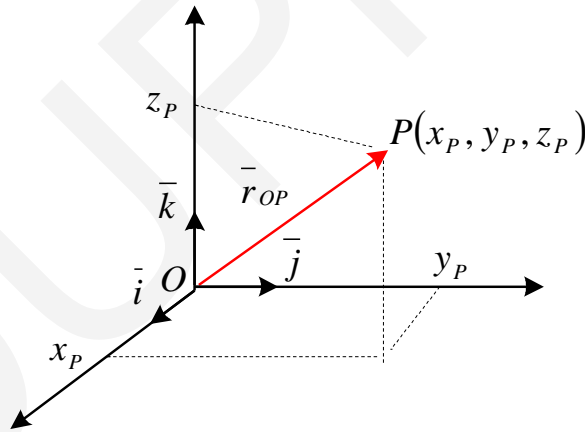
*Bizonyítás:*

A paralelogramma területét felírva:

$$A = |\vec{v}| \cdot |\vec{w}| \cdot \sin \alpha_{vw} = |\vec{v} \times \vec{w}| \quad (1.15)$$

**Helyvektor:**

A p pont  $\vec{r}_{OP}$  **helyvektora** a koordinátarendszer origójából a P pontba mutat.



6. ábra. Helyvektor

$$\vec{r}_{OP} = x_p \cdot \vec{i} + y_p \cdot \vec{j} + z_p \cdot \vec{k},$$

Oszlopvektoros alakban:

$$\vec{r}_{OP} = \begin{pmatrix} x_p \\ y_p \\ z_p \end{pmatrix} \quad (1.16)$$



### 1.4 Számítási feladatok

1. feladat:

Adott három vektor a koordinátáival:

$$\bar{a} = 2,5 \cdot \bar{i} + 4,2 \cdot \bar{j} - 3 \cdot \bar{k}$$

$$\bar{b} = -3,5 \cdot \bar{i} + 5 \cdot \bar{j} + 6 \cdot \bar{k}$$

$$\bar{c} = 3,2 \cdot \bar{i} + 2 \cdot \bar{j} - 4,8 \cdot \bar{k}$$

- Számítsuk ki a  $(\bar{a} - \bar{b}) \cdot \bar{c}$  vektort.
- Számítsuk ki a  $\bar{a} \times \bar{b}$  és  $\bar{b} \times \bar{a}$  vektorokat.
- Számítsuk ki a  $\bar{e}_1$  és  $\bar{e}_2$  egységvektorokat, amelyek merőlegesek az  $\bar{a}$  és  $\bar{b}$  vektorok síkjára.
- Számítsa ki az  $\bar{e}_1$  és  $\bar{c}$  vektorok által bezárt szöveget.

Megoldás:

a)

$$\bar{a} = \begin{pmatrix} 2,5 \\ 4,2 \\ -3 \end{pmatrix}, \bar{b} = \begin{pmatrix} -3,5 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \bar{c} = \begin{pmatrix} 3,2 \\ 2 \\ -4,8 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} (\bar{a} - \bar{b}) \cdot \bar{c} &= \left( \begin{pmatrix} 2,5 \\ 4,2 \\ -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3,5 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} 3,2 \\ 2 \\ -4,8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -0,8 \\ -9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3,2 \\ 2 \\ -4,8 \end{pmatrix} \\ &= 6 \cdot 3,2 + (-0,8) \cdot 2 + (-9) \cdot (-4,8) = 60,8 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} \bar{a} \times \bar{b} &= \begin{pmatrix} 2,5 \\ 4,2 \\ -3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -3,5 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 2,5 & 4,2 & -3 \\ -3,5 & 5 & 6 \end{vmatrix} \\ &= \bar{i} \cdot \begin{vmatrix} 4,2 & -3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} - \bar{j} \cdot \begin{vmatrix} 2,5 & -3 \\ -3,5 & 6 \end{vmatrix} + \bar{k} \cdot \begin{vmatrix} 2,5 & 4,2 \\ -3,5 & 5 \end{vmatrix} \\ &= \bar{i} \cdot (4,2 \cdot 6 - (-3 \cdot 5)) - \bar{j} \cdot (2,5 \cdot 6 - (-3 \cdot -3,5)) + \bar{k} \\ &\quad \cdot (2,5 \cdot 5 - (4,2 \cdot -3,5)) = 40,2 \cdot \bar{i} - 4,5 \cdot \bar{j} + 27,2 \cdot \bar{k} \end{aligned}$$

$$\bar{a} \times \bar{b} = \begin{pmatrix} 40,2 \\ -4,5 \\ 27,2 \end{pmatrix}$$

$$\bar{b} \times \bar{a} = -(\bar{a} \times \bar{b}) = \begin{pmatrix} -40,2 \\ 4,5 \\ -27,2 \end{pmatrix}$$

c)

$$\bar{e}_1 = \frac{\bar{a} \times \bar{b}}{|\bar{a} \times \bar{b}|} = \frac{\begin{pmatrix} 40,2 \\ -4,5 \\ 27,2 \end{pmatrix}}{\sqrt{(40,2)^2 + (-4,5)^2 + (27,2)^2}} = \frac{\begin{pmatrix} 40,2 \\ -4,5 \\ 27,2 \end{pmatrix}}{48,73} = \begin{pmatrix} 0,825 \\ -0,092 \\ 0,558 \end{pmatrix}$$



$$\bar{e}_2 = -\bar{e}_1 = \begin{pmatrix} -0.825 \\ 0.092 \\ -0.558 \end{pmatrix}$$

d)

$$\cos \alpha_{e_1c} = \frac{\bar{e}_1 \cdot \bar{c}}{|\bar{e}_1| \cdot |\bar{c}|} = \frac{0,825 \cdot 3,2 + (-0,092 \cdot 2) + (0,558 \cdot -4,8)}{1 \cdot \sqrt{(3,2)^2 + (2)^2 + (-4,8)^2}} = -0,0367$$
$$\rightarrow \alpha_{e_1c} = 92,1^\circ$$

### 2. feladat:

Két pont koordinátáival adott:

A = (-2; 4; 8), B = (4; -8; 4).

- Számítsuk ki az A és B pontok közötti távolságot.
- Számítsuk ki az  $\bar{r}_{OA}$  és  $\bar{r}_{OB}$  vektorok által bezárt szöveget.
- Számítsuk ki azt az egységvektort, amely merőleges az OAB síkra.

*Megoldás:*

Javasoljuk, hogy készítsen ábrát a megoldás előtt.

a)

$$\bar{r}_{OA} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}, \bar{r}_{OB} = \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$d_{AB} = |\bar{r}_{AB}| = |\bar{r}_{OB} - \bar{r}_{OA}| = \left| \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} 6 \\ -12 \\ -4 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{(6)^2 + (-12)^2 + (-4)^2}$$
$$= 14$$

b)

$$\cos \alpha_{AOB} = \frac{\bar{r}_{OA} \cdot \bar{r}_{OB}}{|\bar{r}_{OA}| \cdot |\bar{r}_{OB}|} = -0.089 \rightarrow \alpha_{AOB} = 95,1^\circ$$

c)

$$\bar{e}_1 = \frac{\bar{r}_{OA} \times \bar{r}_{OB}}{|\bar{r}_{OA} \times \bar{r}_{OB}|} = \begin{pmatrix} 0,894 \\ 0,447 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\bar{e}_2 = -\bar{e}_1 = \begin{pmatrix} -0,894 \\ -0,447 \\ 0 \end{pmatrix}$$

### 3. feladat:

Három pont koordinátáival adott:

A = (3; 5; 0), B = (0; -2; 3), C = (-4; 0; 2)

Számítsa ki az ABC háromszög területét.

*Megoldás:*

Javasoljuk, hogy készítsen ábrát a megoldás előtt.



$$\vec{r}_{OA} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{r}_{OB} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{r}_{OC} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{r}_{AB} = \vec{r}_{OB} - \vec{r}_{OA} = \begin{pmatrix} -3 \\ -7 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{r}_{AC} = \vec{r}_{OC} - \vec{r}_{OA} = \begin{pmatrix} -7 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$T_{\Delta} = \frac{|\vec{r}_{AB}| \cdot |\vec{r}_{AC}| \cdot \sin \alpha_{BAC}}{2} = \frac{|\vec{r}_{AB} \times \vec{r}_{AC}|}{2} = 18,59$$

## 2. Newton törvényei. Erőtörvények. Anyagi pont egyensúlya

### 2.1 Newton törvényei

**Newton törvényei** a műszaki mechanika alaptörvényei (axiómái). Newton alapfeltevése, hogy mindig található olyan vonatkoztatási rendszer, amelyben ezek a törvények érvényesek. Az ilyen vonatkoztatási rendszert **inercia rendszernek** nevezzük. A műszaki mechanikában a Földhöz rögzített vagy ahhoz képest állandó sebességgel haladó mozgást végző vonatkoztatási rendszer inercia rendszernek tekinthető. Minden más, a Földhöz képest gyorsuló vonatkoztatási rendszer nem inercia rendszer.

#### **Newton első törvénye:**

Egy anyagi pont lendülete mindaddig állandó marad, amíg mechanikai kölcsönhatásba nem kerül más testekkel. Tehát kölcsönhatás nélkül:

$$\vec{p}(t) = \vec{p} = \text{állandó} \quad (2.1)$$

Speciálisan, ha a test tömege állandó ( $m(t) = m = \text{állandó}$ ), akkor a sebessége is állandó:

$$\vec{v}(t) = \vec{v} = \text{állandó} \quad (2.2)$$

Tehát a test nyugalomban van, vagy a tömegközéppontja egyenes vonalú egyenletes mozgást végez.

#### **Newton második törvénye:**



Ha az anyagi pont mechanikai kölcsönhatásban van más testekkel, akkor lendületének idő szerinti változási gyorsasága bármely  $t$  időpillanatban megegyezik a többi test által kifejtett eredő erővel.

$$\bar{F} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{p}}{\Delta t}, \quad \bar{F} = [\text{N}] \quad (2.3)$$

Ha a test tömege állandó, akkor:

$$\bar{F} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{p}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta(m \cdot \bar{v})}{\Delta t} = m \cdot \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{v}}{\Delta t} = m \cdot \bar{a} \quad (2.4)$$

A fenti összefüggésben  $\bar{a}$  a test tömegközéppontjának gyorsulása.

### **Newton harmadik törvénye:**

Két test mechanikai kölcsönhatása során teljesül az alábbi egyenlőség:

$$\bar{F}_{12} = -\bar{F}_{21} \quad (2.5)$$

A fenti egyenletben az  $\bar{F}_{12}$  az 1-es test által a 2-esre kifejtett erő. Tehát, a két erő egyenlő nagyságú és irányú, de ellentétes értelmű (irányítású).

### **Newton negyedik törvénye:**

Több test mechanikai hatása esetén az eredő erő az alábbi összefüggéssel számítható:

$$\bar{F} = \sum_i \bar{F}_i = \bar{F}_1 + \bar{F}_2 + \dots + \bar{F}_i + \dots \quad (2.6)$$

A fenti egyenletben  $\bar{F}_i$  az az erő amelyet az  $i$ -edik test fejt ki a többi testtől függetlenül (a többi test hiányában).

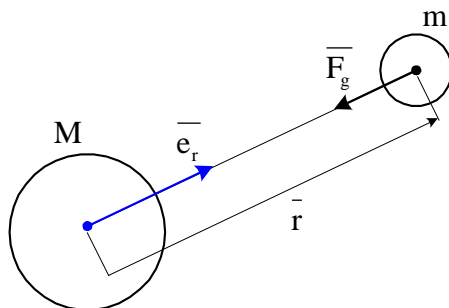
## **2.2 Erőtörvények**

Az **Erőtörvény** az erő megadva a kölcsönhatást leíró paraméterek függvényében. Az erő törvényeket kísérleti úton méréssel szokták meghatározni. A továbbiakban bemutatjuk a műszaki mechanikában lényeges erőket és a hozzájuk tartozó erő törvényeket.

### **Gravitációs erő:**

Egy  $M$  és  $m$  tömegű test között fellépő gravitációs erő nagysága az alábbi összefüggéssel számítható:

$$|\bar{F}_g| = F_g = \gamma \cdot \frac{M \cdot m}{r^2}, \quad \gamma = 6.674 \cdot 10^{-11} \left[ \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2} \right] \quad (2.7)$$



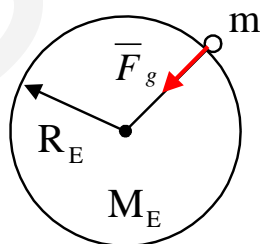
7. ábra. Gravitációs erő

A fenti egyenletben  $r$  a két test tömegközéppontja közötti távolság,  $\gamma$  pedig a gravitációs állandó ( $\gamma = 6,674 \cdot 10^{-11} \left[ \frac{N \cdot m^2}{kg^2} \right]$ ). Bevezetve az  $\bar{e}_r = \frac{\bar{r}}{r}$  radiális egységvektort a gravitációs erő a következő alakban írható:

$$\bar{F}_g = -\gamma \cdot \frac{M \cdot m}{r^2} \cdot \bar{e}_r = -\gamma \cdot \frac{M \cdot m}{r^3} \cdot \bar{r} \quad (2.8)$$

ahol  $\bar{r}$  a helyvektor, amely az  $M$  tömegű test tömegközéppontjából az  $m$  tömegű test tömegközéppontjába mutat. Ha az egyik test a Föld és a másik egy hozzá képest elhanyagolható méretű tárgy annak felszínén, akkor a 2.8 egyenlet az alábbi alakban írható:

$$\bar{F}_g = \left( -\gamma \frac{M_E}{R_E^2} \cdot \bar{e}_r \right) \cdot m = m \cdot \bar{g} \quad (2.9)$$



8. ábra. Gravitációs erő a Föld felszínén

Az egyenletben (2.9)  $M_E$  és  $R_E$  a Föld tömege és sugara,  $\bar{g}$  a gravitációs gyorsulás. Mivel a Föld nem tökéletesen gömb alakú,  $\bar{g}$  nagysága függ a földrajzi helytől. Magyarországon területén:

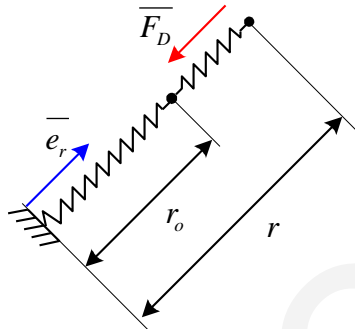
$$g = |\bar{g}| = 9,81 \left[ \frac{m}{s^2} \right]$$



### Rugóerő:

Egy **ideális rugó** által kifejtett erő nagysága a következő összefüggéssel számítható (9. ábra):

$$|\vec{F}_D| = F_D = D \cdot |r - r_0| = D \cdot \Delta r \quad (2.10)$$



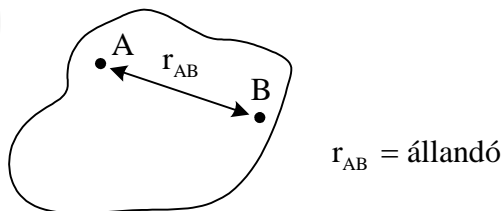
9. ábra. Rugó erő

ahol  $D$  a **rugóállandó**,  $r_0$  a rugó terheletlen hossza,  $\Delta r$  pedig a deformáció nagysága. A rugóerő iránya párhuzamos a rugó irányával, az értelme pedig ellentétel a  $(r - r_0) \cdot \vec{e}_r$  vektorral. Tehát a rugó erőtvénye a következő:

$$\vec{F}_D = -D \cdot (r - r_0) \cdot \vec{e}_r \quad (2.11)$$

### Kényszererő:

A kényszererő fogalmának értelmezéséhez szükségünk lesz a merev test és kényszer fogalmára. Egy test merev, bármely két pontjának távolsága a test bármely mechanikai terhelése esetén állandó marad.



10. ábra. Merev test

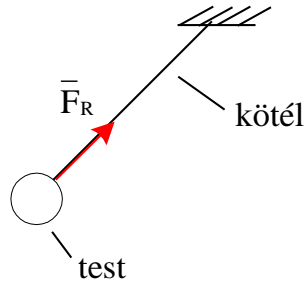
A kényszer egy olyan merev test, amely egy másik testet egy adott görbe vagy felület mentén történő mozgásra vagy tartózkodásra kényszerít. A kényszer által a testre kifejtett erőt **kényszererőnek** nevezzük. A



kényszererő nagysága általában ismeretlen, de meghatározható, ha a testre ható többi erő ismert.

A kényszerek típusai:

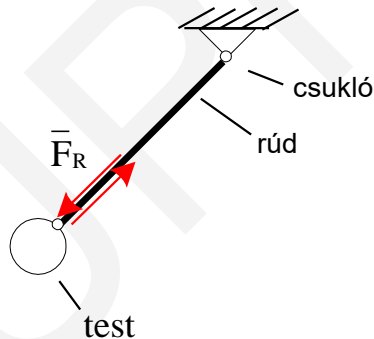
1) Nyújthatatlan kötél



11. ábra. Nyújthatatlan kötél

A kötél által kifejtett kényszererő párhuzamos a kötéllal. A kötelerő mindig húzó jellegű.

2) Merev rúd

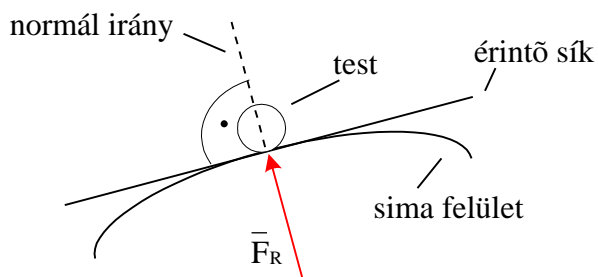


12. ábra. Merev rúd

Ha a rúd ideális csuklóhoz csatlakozik, akkor a kényszererő párhuzamos a rúddal. A rúderő egyaránt lehet húzó, vagy nyomó jellegű.

3) Sima vagy érdes merev felület:

*Sima:*

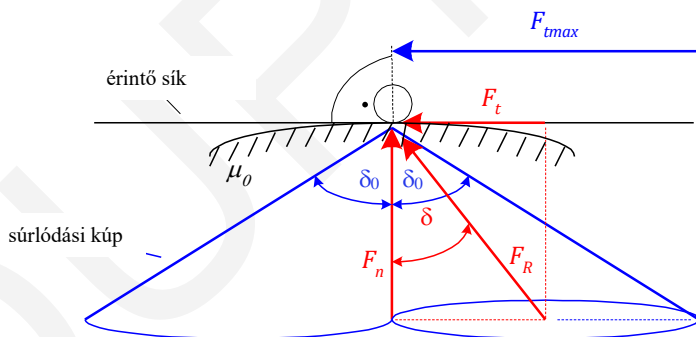


13. ábra. Sima merev felület

A **sima merev felület** által kifejtett kényszererő merőleges a felület adott pontbeli érintő síkjára, más szóval normális irányú. A felület csak nyomó jellegű erőt tud kifejteni.

*Érdes:*

Az **érdess merev felület** által kifejtett kényszererőnek van a felületre merőleges és azzal párhuzamos (az érintő síkba eső) komponense is. Ha a test nyugalomban van (14. ábra) akkor az érintő síkba eső komponensnek van egy maximális értéke, ami felett a test megcsúszik.



14. ábra. Érdess merev felület – a test nyugalomban van

Ez a fenti maximális érték egyenesen arányos a kényszererő normál irányú komponensével.

$$F_{tmax} = \mu_0 \cdot F_n \quad (2.12)$$

A fenti egyenletben  $\mu_0$  a **tapadási súrlódási tényező**. A test egyensúlyban van akkor és csak akkor, ha fennáll az alábbi egyenlőtlenség:

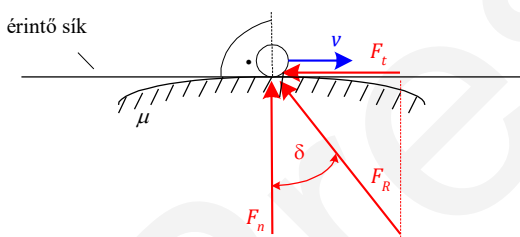
$$|F_t| \leq F_{tmax} = \mu_0 \cdot F_n \quad (2.13)$$

Bevezetjük a **súrlódási kúpot** (14. ábra), amelynek félnyílásszöge az alábbi összefüggéssel számítható:

$$\delta_0 = \mu_0 = \tan^{-1} \left( \frac{F_{tmax}}{F_n} \right) \quad (2.14)$$

Ha a test nyugalomban van, akkor a kényszererő ( $\vec{F}_R$ ) a kúpon belül vagy annak a felületén helyezkedik el.

Ha a test csúszik az érdes felületen, akkor a kényszererő érintő irányú komponense arányos a normál irányú, továbbá az érintő irányú komponens egyező irányú, de ellentétes értelmű a sebességvektorral. (15. ábra, 3.15 egyenlet).



15. ábra. Érdes merev felület – a test csúszik

$$F_t = \mu \cdot F_n \quad (2.15)$$

A fenti egyenletben  $\mu$  a **csúszási súrlódási tényező**. Az alábbi táblázat a tapadási és csúszási súrlódási tényező értékét tartalmazza különböző anyagpárok esetén száraz és nedves körülmények között.

**Súrlódási tényezők közelítő értéke különböző anyagpárok esetén [11]:**

Anyagpár		Tapadási súrlódási tényező		Csúszási súrlódási tényező	
		Száraz	Nedves	Száraz	Nedves
Alumínium	Acél	0.61	-	0.47	-
Sárgaréz	Acél	0.35-0.51	0.19	0.44	-
Beton	Gumi	1	0.3	0.6-0.85	0.45-0.75



Acél	Acél	0.74-0.8	0.16	0.42-0.62	-
Fa	Fém	0.2-0.6	0.2	-	-
Fa	Fa	0.25-0.5	0.2	-	-

A fenti táblázat alapján megállapíthatóak az alábbiak:

- A tapadási súrlódási tényező mindig nagyobb, mint a csúszási súrlódási.
- A súrlódási tényező értéke mindig nagyobb a száraz, mint nedves körülmények között.

### 2.3 Anyagi pont egyensúlya

Ha a test méretei elhanyagolhatók a mechanikai problémában szereplő egyéb méretekhez képest, akkor a testet anyagi ponttal modellezzük. Az anyagi pont egy tömeggel rendelkező kiterjedés nélküli, azaz geometriai pont. Az anyagi pont **egyensúlyban** van, akkor, és csakis akkor, ha a rá ható erők eredője egyenlő nullával (2.16 egyenlet).

$$\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i = \vec{0} \quad (2.16)$$

Newton második törvénye alapján egyensúlyi állapotban az anyagi pont gyorsulása zérus. Tehát nyugalomban van, vagy egyenes vonalú egyenletes mozgást végez. Ha az anyagi pont nyugalomban van, akkor statikus egyensúlyi állapotról beszélünk.

### 2.4 Feladatok

1. feladat (Eredő erő számítása általános térbeli erőrendszer esetén)

Egy, a koordináta-rendszer kezdőpontjába helyezett anyagi pontra az alábbi erők hatnak:

$$\vec{F}_1 = 5\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}[\text{N}]$$

$$\vec{F}_2 = 30 \cdot (0.8\vec{i} - 0.6\vec{k})[\text{N}]$$

$$|\vec{F}_3| = F_3 = 50[\text{N}] \text{ és } \vec{F}_3 \text{ keresztülmegy a } P_3(0,6,2) \text{ ponton.}$$

$$|\vec{F}_4| = F_4 = 20[\text{N}] \text{ és } \alpha_{4x} = 90^\circ, \alpha_{4y} = 45^\circ, \alpha_{4z} = 135^\circ.$$



Számítsuk ki az erőrendszer eredő erejét!

Megoldás:

$$\vec{F}_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} [\text{N}]$$

$$\vec{F}_2 = \begin{pmatrix} 24 \\ 0 \\ -18 \end{pmatrix} [\text{N}]$$

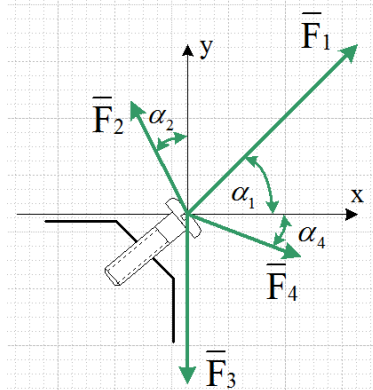
$$\vec{F}_3 = F_3 \cdot \vec{e}_3 = 50 \cdot \frac{\vec{r}_{O3}}{|\vec{r}_{O3}|} = 50 \cdot \frac{\begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}}{\sqrt{0^2 + 6^2 + 2^2}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 47.43 \\ 15.81 \end{pmatrix} [\text{N}]$$

$$\begin{aligned} \vec{F}_4 &= F_4 \cdot \vec{e}_4 = F_4 \cdot (\cos \alpha_{4x} \cdot \vec{i} + \cos \alpha_{4y} \cdot \vec{j} + \cos \alpha_{4z} \cdot \vec{k}) \\ &= 20 \cdot (\cos 90^\circ \cdot \vec{i} + \cos 45^\circ \cdot \vec{j} + \cos 135^\circ \cdot \vec{k}) \\ &= 0 \cdot \vec{i} + 14.14 \cdot \vec{j} - 14.14 \cdot \vec{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 14.14 \\ -14.14 \end{pmatrix} [\text{N}] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{F} = \sum_i \vec{F}_i &= \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4 = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 24 \\ 0 \\ -18 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 47.43 \\ 15.81 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 14.14 \\ -14.14 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 29 \\ 64.57 \\ -17.33 \end{pmatrix} [\text{N}] \end{aligned}$$

## 2. feladat (Eredő erő számítása síkbeli erőrendszer esetén)

Egy csavarfejre négy erő hat az alábbi ábra szerint:





Adatok:  $F_1 = 150[\text{N}]$ ,  $F_2 = 80[\text{N}]$ ,  $F_3 = 110[\text{N}]$ ,  $F_4 = 100[\text{N}]$ ,  $\alpha_1 = 30^\circ$ ,  $\alpha_2 = 20^\circ$ ,  $\alpha_4 = 15^\circ$ .

- Számítsuk ki az erőrendszer eredő erejét!
- Számítsuk ki az eredő erő nagyságát!
- Szerkesszük meg az eredő erőt!

Megoldás:

A feladat megoldható az általános térbeli erőrendszer esetén alkalmazott módszerrel, de síkbeli erőrendszer esetén célszerű az alábbi, egyszerű eljárást alkalmazni.

a)

$$\bar{F}_1 = F_1 \cdot \cos \alpha_1 \cdot \bar{i} + F_1 \cdot \sin \alpha_1 \cdot \bar{j} = \begin{pmatrix} F_1 \cdot \cos \alpha_1 \\ F_1 \cdot \sin \alpha_1 \end{pmatrix} [\text{N}]$$

$$\bar{F}_2 = -F_2 \cdot \sin \alpha_2 \cdot \bar{i} + F_2 \cdot \cos \alpha_2 \cdot \bar{j} = \begin{pmatrix} -F_2 \cdot \sin \alpha_2 \\ F_2 \cdot \cos \alpha_2 \end{pmatrix} [\text{N}]$$

$$\bar{F}_3 = 0 \cdot \bar{i} - F_3 \cdot \bar{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ -F_3 \end{pmatrix} [\text{N}]$$

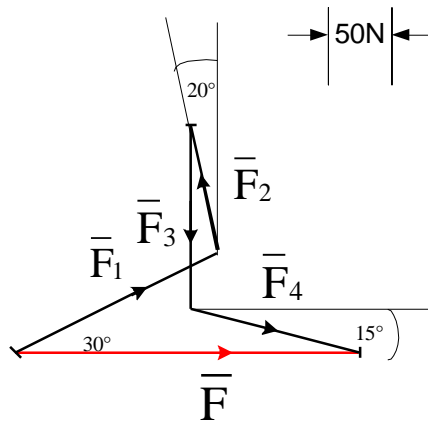
$$\bar{F}_4 = F_4 \cdot \cos \alpha_4 \cdot \bar{i} - F_4 \cdot \sin \alpha_4 \cdot \bar{j} = \begin{pmatrix} F_4 \cdot \cos \alpha_4 \\ -F_4 \cdot \sin \alpha_4 \end{pmatrix} [\text{N}]$$

$$\begin{aligned} \bar{F} &= \sum_i \bar{F}_i = \bar{F}_1 + \bar{F}_2 + \bar{F}_3 + \bar{F}_4 \\ &= \begin{pmatrix} F_1 \cdot \cos \alpha_1 \\ F_1 \cdot \sin \alpha_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -F_2 \cdot \sin \alpha_2 \\ F_2 \cdot \cos \alpha_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -F_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F_4 \cdot \cos \alpha_4 \\ -F_4 \cdot \sin \alpha_4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 200.26 \\ 14.29 \end{pmatrix} [\text{N}] \end{aligned}$$

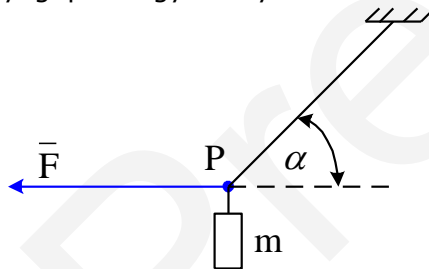
b)

$$F = |\bar{F}| = \sqrt{(200.26)^2 + (14.29)^2} = 200.78[\text{N}]$$

c) Az erők hosszát egy erőléptékhez viszonyítjuk.



3. feladat  
Az ábrán látható P anyagi pont egyensúlyban van.

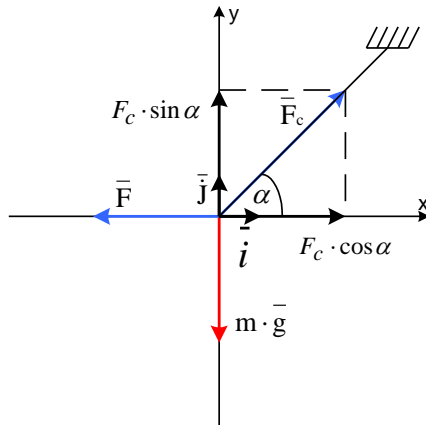


Adatok:  $F = 150[\text{N}]$ ,  $\alpha = 30^\circ$ ,  $g = 9.81 \left[\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right]$ .

- a) Számítsuk ki a kötélnél ébredő erő nagyságát és az anyagi pont tömegét!
- b) Szerkesszük meg a kötélerőt és gravitációs erőt!

Megoldás:

a)



$$\vec{F} = -F \cdot \vec{i} + 0 \cdot \vec{j} = \begin{pmatrix} -F \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -150 \\ 0 \end{pmatrix} [\text{N}]$$

$$\vec{F}_c = F_c \cdot \cos \alpha \cdot \vec{i} + F_c \cdot \sin \alpha \cdot \vec{j} = \begin{pmatrix} F_c \cdot \cos 30^\circ \\ F_c \cdot \sin 30^\circ \end{pmatrix} [\text{N}]$$

$$m \cdot \vec{g} = 0 \cdot \vec{i} - m \cdot g \cdot \vec{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ -m \cdot 9.81 \end{pmatrix} [\text{N}]$$

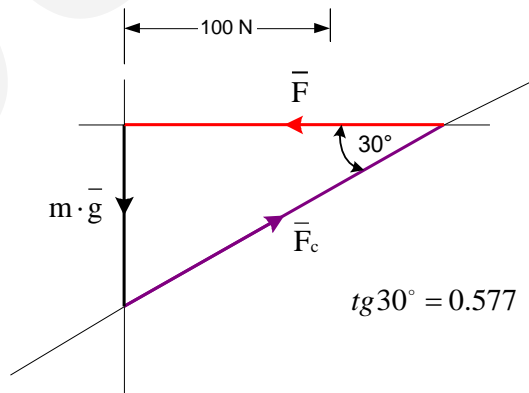
$$\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i = \begin{pmatrix} -150 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F_c \cdot \cos 30^\circ \\ F_c \cdot \sin 30^\circ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -m \cdot 9.81 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

I.  $-150 + F_c \cdot \cos 30^\circ = 0 \rightarrow F_c = 173.2 [\text{N}]$

II.  $F_c \cdot \sin 30^\circ - m \cdot 9.81 = 0 \rightarrow m = 8.83 [\text{kg}]$

b)

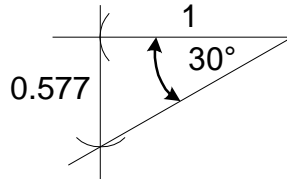
Mivel egyensúlyban az erők összege zérus, így a három erő zárt vektorháromszöget alkot.



A szerkesztés lépései:

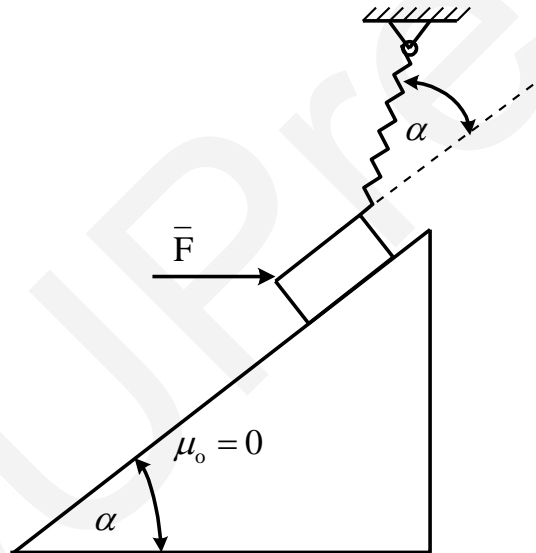


- 1) Az  $\bar{F}$  erő megrajzolása
  - 2) Az  $\alpha$  szög megszerkesztése
  - 3) Az  $\bar{F}_c$  és  $m \cdot \bar{g}$  hatásvonalának megrajzolása, és a metszéspontok megszerkesztése
  - 4) Az  $\bar{F}_c$  és  $m \cdot \bar{g}$  erők nagyságának leolvasása, összehasonlítva őket az erőléptékkal
- Az  $\alpha$  szög szerkesztése:



4. feladat

Az ábrán látható, sima felületű lejtőn elhelyezkedő  $m$  tömegű anyagi pont egyensúlyban van. A rugó  $\Delta r$  deformációja és  $D$  rugómerevsége ismert.

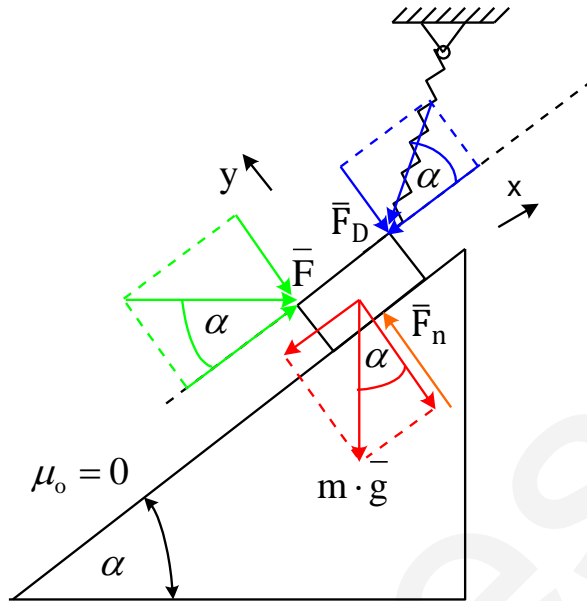


Adatok:  $m = 40[\text{kg}]$ ,  $\alpha = 30^\circ$ ,  $D = 1000 \left[ \frac{\text{N}}{\text{mm}} \right]$ ,  $\Delta r = 2[\text{mm}]$ ,  $g = 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ .

- a) Számítsuk ki az  $\bar{F}$  erő nagyságát ( $\bar{F}$  vízszintes irányú)!
- b) Számítsuk ki a lejtő által kifejtett kényszererő nagyságát ( $\bar{F}_n$ )!
- c) Szerkesszük meg az  $\bar{F}$  és  $\bar{F}_n$  erőket.

Megoldás:

- a) és b)



$$\vec{F} = F \cdot \cos \alpha \cdot \vec{i} - F \cdot \sin \alpha \cdot \vec{j} = \begin{pmatrix} F \cdot \cos 30^\circ \\ -F \cdot \sin 30^\circ \end{pmatrix} [\text{N}]$$

$$m \cdot \vec{g} = -m \cdot g \cdot \sin \alpha \cdot \vec{i} - m \cdot g \cdot \cos \alpha \cdot \vec{j} = \begin{pmatrix} -40 \cdot 9.81 \cdot \sin 30^\circ \\ -40 \cdot 9.81 \cdot \cos 30^\circ \end{pmatrix} [\text{N}]$$

$$\vec{F}_D = -F_D \cdot \cos \alpha \cdot \vec{i} - F_D \cdot \sin \alpha \cdot \vec{j} = \begin{pmatrix} -D \cdot \Delta r \cdot \cos \alpha \\ -D \cdot \Delta r \cdot \sin \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2000 \cdot \cos 30^\circ \\ -2000 \cdot \sin 30^\circ \end{pmatrix} [\text{N}]$$

$$\vec{F}_n = 0 \cdot \vec{i} + F_n \cdot \vec{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ F_n \end{pmatrix} [\text{N}]$$

$$\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i = \begin{pmatrix} F \cdot \cos 30^\circ \\ -F \cdot \sin 30^\circ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -40 \cdot 9.81 \cdot \sin 30^\circ \\ -40 \cdot 9.81 \cdot \cos 30^\circ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2000 \cdot \cos 30^\circ \\ -2000 \cdot \sin 30^\circ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ F_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

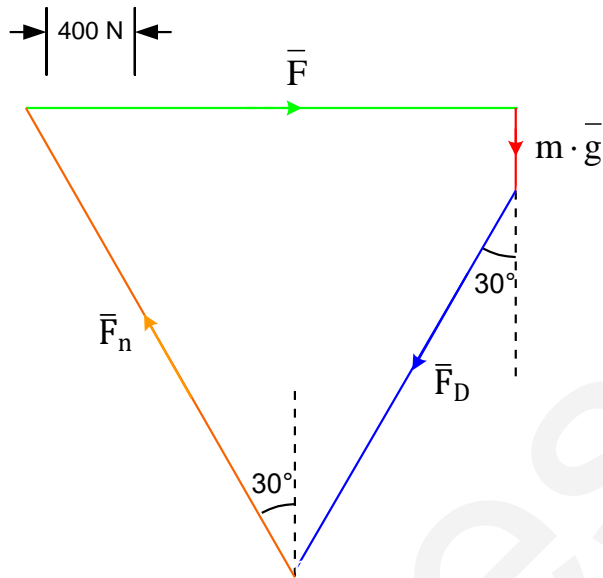
$$\text{I.} \quad F \cdot \cos 30^\circ - 40 \cdot 9.81 \cdot \sin 30^\circ - 2000 \cdot \cos 30^\circ = 0 \rightarrow F = 2227 [\text{N}]$$

$$\text{II.} \quad -F \cdot \sin 30^\circ - 40 \cdot 9.81 \cdot \cos 30^\circ - 2000 \cdot \sin 30^\circ + F_n = 0 \rightarrow F_n =$$

$$2453.3 [\text{N}]$$

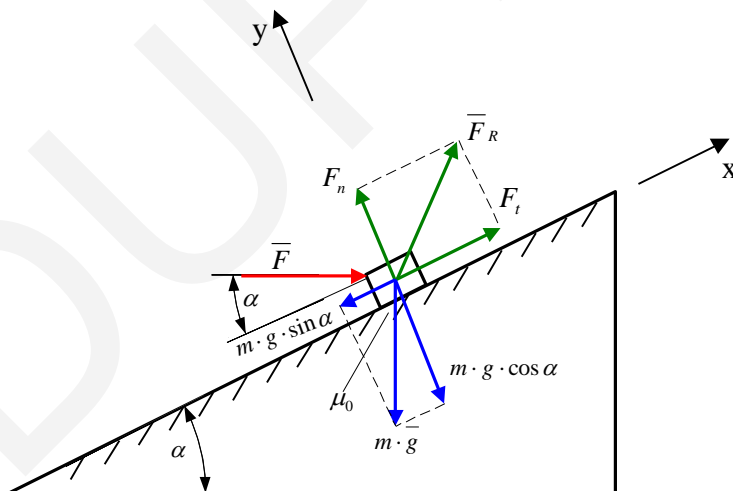


c)



5. feladat

Az ábrán látható érdes felületű lejtőn elhelyezkedő anyagi pont egyensúlyban van.



Adatok:  $\alpha = 30^\circ$ ,  $m \cdot g = 100$  [N],  $\mu_0 = 0.3$

a) Számítsuk ki, hogy az  $\vec{F}$  erő milyen minimális és maximális értékek között változhat ( $F_{\min}$  és  $F_{\max}$ ), az anyagi pont egyensúlya esetén! ( $\vec{F}$  vízszintes irányú)



- b) Számítsuk ki a kényszererő nagyságát – amelyet a lejtő kifejt az anyagi pontra – az előző minimális és maximális  $F$  értékek esetén.  
c) Szerkesszük meg az  $F_{\min}$  és  $F_{\max}$  értékeket.

Megoldás:

a)

$$\sum \vec{F} = \vec{F}_R + \vec{F} + m \cdot \vec{g} = \vec{0} = \begin{pmatrix} F_t \\ F_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F \cdot \cos \alpha \\ -F \cdot \sin \alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -m \cdot g \cdot \sin \alpha \\ -m \cdot g \cdot \cos \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{I. } F_t + F \cdot \cos \alpha - m \cdot g \cdot \sin \alpha = 0 \rightarrow F_t = m \cdot g \cdot \sin \alpha - F \cdot \cos \alpha = 50 - 0.866 \cdot F$$

$$\text{II. } F_n - F \cdot \sin \alpha - m \cdot g \cdot \cos \alpha = 0 \rightarrow F_n = m \cdot g \cdot \cos \alpha + F \cdot \sin \alpha = 86.6 + 0.5 \cdot F$$

$$|F_t| \leq \mu_0 \cdot F_n \rightarrow -\mu_0 \cdot F_n \leq F_t \leq \mu_0 \cdot F_n$$

1. eset:

$$-\mu_0 \cdot F_n \leq F_t$$

$$-0.3 \cdot (86.6 + 0.5 \cdot F) \leq 50 - 0.866 \cdot F$$

$$0.716 \cdot F \leq 76$$

$$F \leq F_{\max} = 106.14 \text{ [N]}$$

2. eset:

$$F_t \leq \mu_0 \cdot F_n$$

$$50 - 0.866 \cdot F \leq 0.3 \cdot (86.6 + 0.5 \cdot F)$$

$$24 \leq 1.016 \cdot F$$

$$23.62 \text{ [N]} = F_{\min} \leq F$$

$$23.62 \text{ [N]} \leq F \leq 106.14 \text{ [N]}$$

b)

$$F_{tmin} = 50 - 0.866 \cdot F_{min} = 50 - 0.866 \cdot 23.62 = 29.55 \text{ [N]}$$

$$F_{tmax} = 50 - 0.866 \cdot F_{max} = 50 - 0.866 \cdot 106.14 = -41.92 \text{ [N]}$$

$$F_{nmin} = 86.6 + 0.5 \cdot F_{min} = 86.6 + 0.5 \cdot 23.62 = 98.41 \text{ [N]}$$

$$F_{nmax} = 86.6 + 0.5 \cdot F_{max} = 86.6 + 0.5 \cdot 106.14 = 139.67 \text{ [N]}$$

$$F_{Rmin} = \sqrt{F_{tmin}^2 + F_{nmin}^2} = \sqrt{29.55^2 + 98.41^2} = 102.75 \text{ [N]}$$

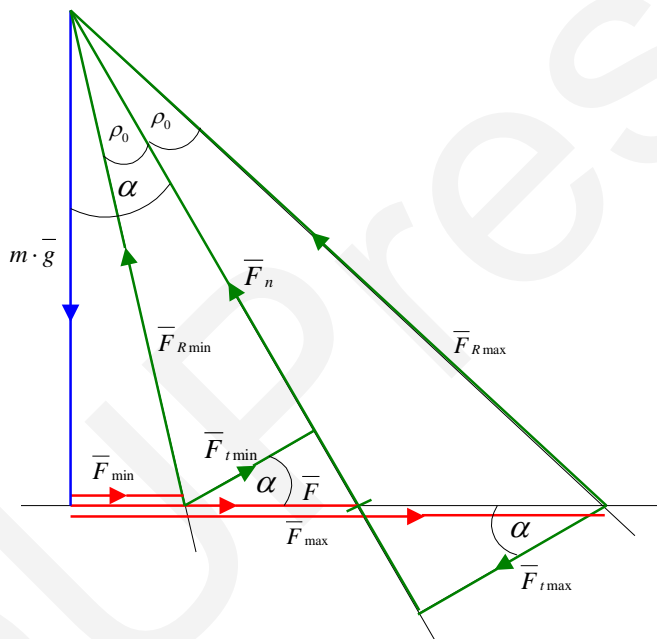
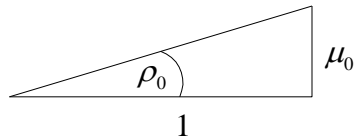
$$F_{Rmax} = \sqrt{F_{tmax}^2 + F_{nmax}^2} = \sqrt{(-41.92)^2 + 139.67^2} = 145.83 \text{ [N]}$$



c)

A  $\rho_0$  szög, valamint az  $F_{\min}$  és  $F_{\max}$  értékek szerkesztését az alábbi ábra szemlélteti:

$$\tan \rho_0 = \frac{F_{t \max}}{F_n} = \mu_0$$

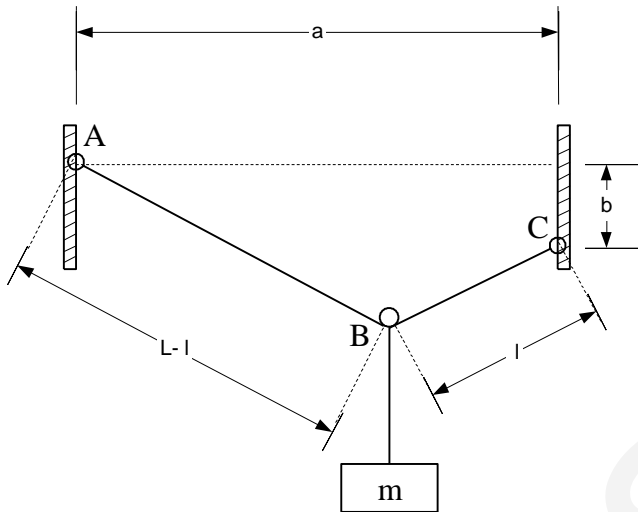


Power Point animáció formájában lépésről lépésre megtekinthető:

## 2.1 Animáció

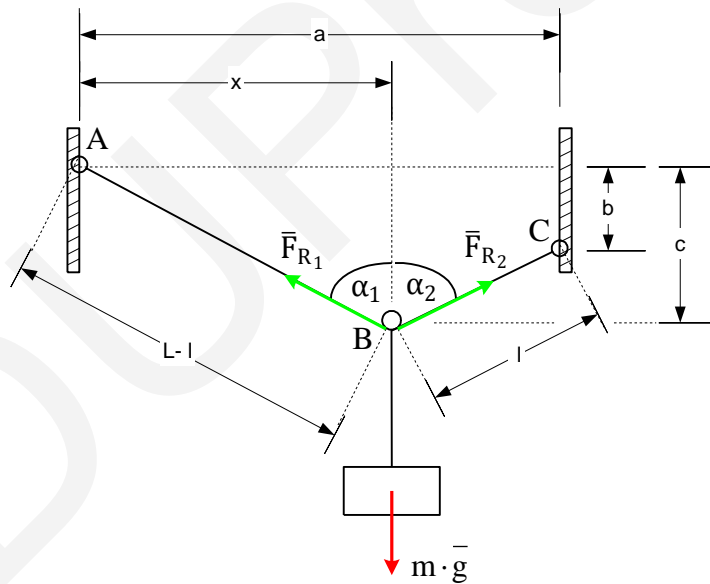
### 6. feladat

Az ábrán látható kis görgő (B) az AC kötélen egyensúlyban van. A görgőn egy  $m$  tömegű teher függ, a köté  $L$  hosszúsága, valamint a szükséges geometriai adatok ismertek.



Adatok:  $m = 100[\text{kg}]$ ,  $L = 15[\text{m}]$ ,  $a = 10[\text{m}]$ ,  $b = 3.354[\text{m}]$ .  
Számítsuk ki a kötélen ébredő erő nagyságát!

Megoldás:



Mivel AB és BC szakaszok az AC kötélnél részei:

$$|\vec{F}_{R1}| = |\vec{F}_{R2}| = F_R$$

$$\vec{F}_{R1} = -F_R \cdot \sin \alpha_1 \cdot \vec{i} + F_R \cdot \cos \alpha_1 \cdot \vec{j} = \begin{pmatrix} -F_R \cdot \sin \alpha_1 \\ F_R \cdot \cos \alpha_1 \end{pmatrix} [\text{N}]$$



$$\vec{F}_{R2} = F_R \cdot \sin \alpha_2 \cdot \vec{i} + F_R \cdot \cos \alpha_2 \cdot \vec{j} = \begin{pmatrix} F_R \cdot \sin \alpha_2 \\ F_R \cdot \cos \alpha_2 \end{pmatrix} [\text{N}]$$

$$m \cdot \vec{g} = 0 \cdot \vec{i} - m \cdot g \cdot \vec{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ -m \cdot 9.81 \end{pmatrix} [\text{N}]$$

$$\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i = \begin{pmatrix} -F_R \cdot \sin \alpha_1 \\ F_R \cdot \cos \alpha_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F_R \cdot \sin \alpha_2 \\ F_R \cdot \cos \alpha_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -m \cdot 9.81 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{I.} \quad -F_R \cdot \sin \alpha_1 + F_R \cdot \sin \alpha_2 = 0 \rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$$

$$\text{II.} \quad F_R \cdot \cos \alpha_1 + F_R \cdot \cos \alpha_2 - m \cdot 9.81 = 0 \rightarrow F_R = \frac{m \cdot 9.81}{2 \cdot \cos \alpha}$$

Érvényesek a következő geometriai egyenletek:

$$a^2 + (2c - b)^2 = L^2$$

$$\tan \alpha = \frac{x}{c} = \frac{a-x}{c-b}$$

Az első egyenletből:

$$c = \frac{\sqrt{L^2 - a^2} + b}{2} = 7.267 [\text{m}]$$

A második egyenletből:

$$\frac{x}{7.267} = \frac{10 - x}{7.267 - 3.354} \rightarrow x = 6.5 [\text{m}]$$

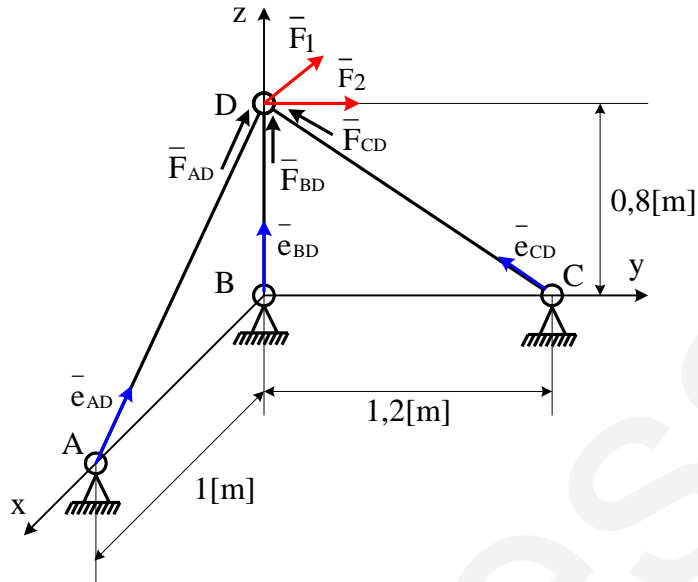
$$\tan \alpha = \frac{x}{c} = 0.894 \rightarrow \alpha = 41.81^\circ$$

A II. egyenletből:

$$F_R = \frac{100 \cdot 9.81}{2 \cdot \cos 41.81^\circ} = 658.1 [\text{N}]$$

### 7. feladat

Az alábbi ábra egy három rúdból felépülő szerkezetet szemléltet. A rudak egyik vége ideális csuklókhoz (A, B, C pontok), másik vége a D pontban lévő anyagi ponthoz csatlakozik. Az anyagi pont az  $\vec{F}_1$  és  $\vec{F}_2$ , valamint a rúderők hatása alatt egyensúlyban van.



*Adatok:*  $\vec{F}_1 = -1000 \cdot \vec{i}$ [N],  $\vec{F}_2 = 1000 \cdot \vec{j}$ [N]

Számítsuk ki a rudakban ébredő kényszererők nagyságát ( $\vec{F}_{AD}$ ,  $\vec{F}_{BD}$ ,  $\vec{F}_{CD}$ )!

*Megoldás:*

A rudak irányába eső egységvektorok:

$$\vec{e}_{AD} = \frac{\vec{r}_{AD}}{|\vec{r}_{AD}|} = \frac{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0.8 \end{pmatrix}}{\sqrt{(-1)^2 + (0)^2 + (0.8)^2}} = \begin{pmatrix} -0.781 \\ 0 \\ 0.625 \end{pmatrix}$$

$$\vec{e}_{BD} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{e}_{CD} = \frac{\vec{r}_{CD}}{|\vec{r}_{CD}|} = \frac{\begin{pmatrix} 0 \\ -1.2 \\ 0.8 \end{pmatrix}}{\sqrt{(0)^2 + (-1.2)^2 + (0.8)^2}} = \begin{pmatrix} 0 \\ -0.832 \\ 0.555 \end{pmatrix}$$

Az  $\vec{F}_{AD}$ ,  $\vec{F}_{BD}$  és  $\vec{F}_{CD}$  kényszererők az alábbi alakban írhatók:

$$\vec{F}_{AD} = F_{AD} \cdot \vec{e}_{AD} = F_{AD} \cdot \begin{pmatrix} -0.781 \\ 0 \\ 0.625 \end{pmatrix}$$

$$\vec{F}_{BD} = F_{BD} \cdot \vec{e}_{BD} = F_{BD} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$



$$\vec{F}_{CD} = F_{CD} \cdot \vec{e}_{CD} = F_{CD} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -0.832 \\ 0.555 \end{pmatrix}$$

A D anyagi pont egyensúlyban van:

$$\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i = \vec{F}_{AD} + \vec{F}_{BD} + \vec{F}_{CD} + \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = F_{AD} \cdot \begin{pmatrix} -0.781 \\ 0 \\ 0.625 \end{pmatrix} + F_{BD} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + F_{CD} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -0.832 \\ 0.555 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1000 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1000 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

I.  $-0.781 \cdot F_{AD} - 1000 = 0 \rightarrow F_{AD} = -1281[\text{N}]$

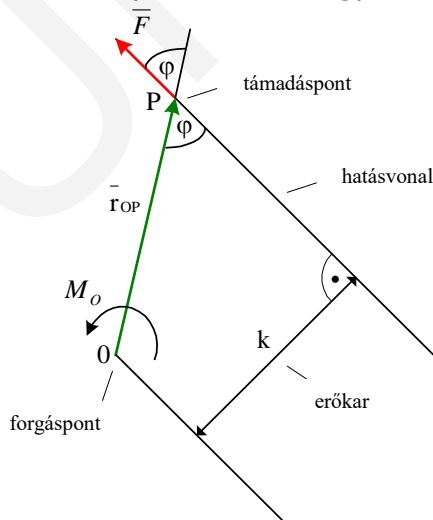
II.  $-0.832 \cdot F_{CD} + 1000 = 0 \rightarrow F_{CD} = -1202[\text{N}]$

III.  $0.625 \cdot F_{AD} + F_{BD} + 0.555 \cdot F_{CD} = 0 \rightarrow F_{BD} = 133.5[\text{N}]$

### 3. Forgatónyomaték, erőrendszerek eredője és egyenértékűsége

#### 3.1 Forgatónyomaték

A következőkben a merev testek statikájával foglalkozunk. Míg egy anyagi pont csak haladó (transzlációs) mozgást végezhet, addig egy merev test foroghat (rotációs mozgás) is. Az erőnek a forgató hatását a **nyomatékával** jellemezzük. (16. ábra, 3.1 egyenlet).



16. ábra. Az erő forgatónyomatéka

$$\vec{M}_O = \vec{r}_{OP} \times \vec{F} \quad (3.1)$$



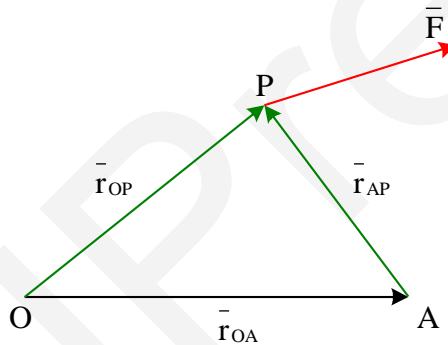
Tehát az  $\vec{F}$  erő forgatónyomatéka az 0 pontra egyenlő az  $\vec{r}_{OP}$  helyvektornak és az erőnek a vektoriális szorzatával. Tehát a nyomaték vektor mennyiség. Az  $\vec{M}_0$  nyomaték nagysága az alábbi képlettel számítható:

$$|\vec{M}_0| = |\vec{F}| \cdot \overbrace{|\vec{r}_{OP}| \cdot \sin \varphi}^k = F \cdot k \quad (3.2)$$

ahol  $F$  az  $\vec{F}$  erő nagysága és  $k$  az erőkar. Az erőkar a forgáspontnak és az  $\vec{F}$  erő **hatásvonalának** (merőleges) távolsága.

**Kapcsolat egy erő két különböző pontra (A és O) vonatkozó forgatónyomatéka között:**

A 17. ábra alapján felírhatjuk a kapcsolatot az  $\vec{F}$  erő 0 és A pontra számított nyomatékai között (3.3 egyenlet).



17. ábra. Az  $\vec{F}$  erő nyomatéka különböző pontokra

$$\vec{M}_A = \vec{r}_{AP} \times \vec{F} = (\vec{r}_{OP} - \vec{r}_{OA}) \times \vec{F} = \vec{r}_{OP} \times \vec{F} - \vec{r}_{OA} \times \vec{F} = \vec{M}_0 + \vec{r}_{AO} \times \vec{F} \quad (3.3)$$

**3.2 Erőrendszer eredő ereje és eredő forgatónyomatéka**

Az eredő erőt már korábban definiáltuk:

$$\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i = \vec{0}$$

Az erőrendszer eredő nyomatékának definíciója az 0 pontra:

$$\vec{M}_0 = \sum_i \vec{M}_{0i} = \sum_i (\vec{r}_{0i} \times \vec{F}_i) \quad (3.4)$$



ahol  $\vec{r}_{0i}$  a forgáspontból (0) az  $\vec{F}_i$  erő támadáspontjába mutató vektor.

### Kapcsolat egy erőrendszer két különböző pontra (A és O) vonatkozó eredő forgatónyomatékai között

Írjuk fel az erőrendszer eredő forgatónyomatékát az A pontra alkalmazva a 3.3 egyenletet az erőrendszer egy  $\vec{F}_i$  erejére.

$$\vec{M}_A = \sum_i \vec{M}_{Ai} = \sum_i (\vec{M}_{0i} + \vec{r}_{AO} \times \vec{F}_i) = \sum_i \vec{M}_{0i} + \sum_i (\vec{r}_{AO} \times \vec{F}_i) = \overbrace{\sum_i \vec{M}_{0i}}^{\vec{M}_O} + \vec{r}_{AO} \times \overbrace{\sum_i \vec{F}_i}^{\vec{F}} \quad (3.5)$$

Végül a 3.6 egyenletre jutunk:

$$\vec{M}_A = \vec{M}_O + \vec{r}_{AO} \times \vec{F} \quad (3.6)$$

A fenti összefüggésben  $\vec{F}$  az eredő erőt  $\vec{M}_A$  és  $\vec{M}_O$  az A és O pontokra vonatkozó eredő forgatónyomatékot jelenti.

Tehát egy erőrendszer esetén ugyanazt az összefüggést kapjuk, mint egy darab erő esetén.

### 3.3 Erőrendszerek egyenértékűsége és eredője

Két erőrendszer egyenértékű, ha eredő forgatónyomatékaik a tér bármely A pontjára egyenlőek egymással.

$$\vec{M}_A' = \vec{M}_A'' \text{ bármely A pontra} \quad (3.7)$$

A 3.7 egyenletben a ' és '' jelölés az 1-es és 2-es erőrendszerre utal.

#### 3.1 tétel:

Két erőrendszer egyenértékű, ha az eredő erejük és a tér egy adott O pontjára vonatkozó forgatónyomatékuk egyenlő.

$$\vec{F}' = \vec{F}'' \text{ és } \vec{M}_O' = \vec{M}_O'' \rightarrow \text{Az ' és '' erőrendszer egyenértékű} \quad (3.7)$$

*Bizonyítás:*

$$\vec{M}_A' = \vec{M}_O' + \vec{r}_{AO} \times \vec{F}', \quad \vec{M}_A'' = \vec{M}_O'' + \vec{r}_{AO} \times \vec{F}''$$

Ha  $\vec{M}_O' = \vec{M}_O''$  és  $\vec{F}' = \vec{F}''$  akkor a fenti egyenletből az következik, hogy  $\vec{M}_A' = \vec{M}_A''$  bármely A pontra. Ez azt jelenti, hogy az ' és '' erőrendszer egyenértékű.

#### 3.2 tétel:



Ha két erőrendszer eredő forgatónyomatéka a tér három különböző, nem egy egyenesbe eső pontjára ( $A, B, C$ ) vonatkozóan egymással egyenlő, akkor a két erőrendszer egyenértékű.

- $\bar{M}_A' = \bar{M}_A'', \bar{M}_B' = \bar{M}_B'',$
  - $\bar{M}_C' = \bar{M}_C'',$
  - $A \neq B \neq C,$
  - $A, B$  és  $C$  nem esnek egy egyenesbe
- } Az ' és '' erőrendszer egyenértékű (3.8)

*Bizonyítás:*

$$\bar{M}_B' = \bar{M}_A' + \bar{r}_{BA} \times \bar{F}', \bar{M}_B'' = \bar{M}_A'' + \bar{r}_{BA} \times \bar{F}''$$

$$\bar{M}_C' = \bar{M}_A' + \bar{r}_{CA} \times \bar{F}', \bar{M}_C'' = \bar{M}_A'' + \bar{r}_{CA} \times \bar{F}''$$

- $\bar{M}_A' = \bar{M}_A'', \bar{M}_B' = \bar{M}_B'',$   
 $\bar{M}_C' = \bar{M}_C'' \rightarrow \bar{r}_{BA} \times \bar{F}' =$   
 $\bar{r}_{BA} \times \bar{F}''$  és  $\bar{r}_{CA} \times \bar{F}' = \bar{r}_{CA} \times \bar{F}''$
  - $A \neq B \neq C$  és  $A, B$  és  $C$  nem esnek egy egyenesbe
- }  $\bar{r}_{BA} \neq \bar{0}, \bar{r}_{CA} \neq \bar{0}$  és  $\bar{r}_{BA}$  nem párhuzamosak  $\bar{r}_{CA}$  vektorral.

Bebizonyítjuk, hogy  $\bar{F}' = \bar{F}''$ :

1. eset:

Ha  $\bar{r}_{BA}$  nem párhuzamos  $\bar{F}'$ -ral, akkor az  $\bar{r}_{BA} \times \bar{F}' = \bar{r}_{BA} \times \bar{F}''$  egyenletből – figyelembe véve, hogy  $\bar{r}_{BA} \neq \bar{0}$  – következik, hogy  $\bar{F}' = \bar{F}''$ .

2. eset:

Ha  $\bar{r}_{BA}$  párhuzamos  $\bar{F}'$ -vel, akkor az  $\bar{r}_{CA}$  vektor nem lehet párhuzamos vele. (Mivel  $\bar{r}_{BA}$  nem párhuzamos  $\bar{r}_{CA}$ -ral). Következtetésképp, az  $\bar{r}_{CA} \times \bar{F}' = \bar{r}_{CA} \times \bar{F}''$  egyenletből – figyelembe véve, hogy  $\bar{r}_{CA} \neq \bar{0}$  – azt kapjuk, hogy  $\bar{F}' = \bar{F}''$ .

Így bebizonyítottuk, hogy  $\bar{F}' = \bar{F}''$ .

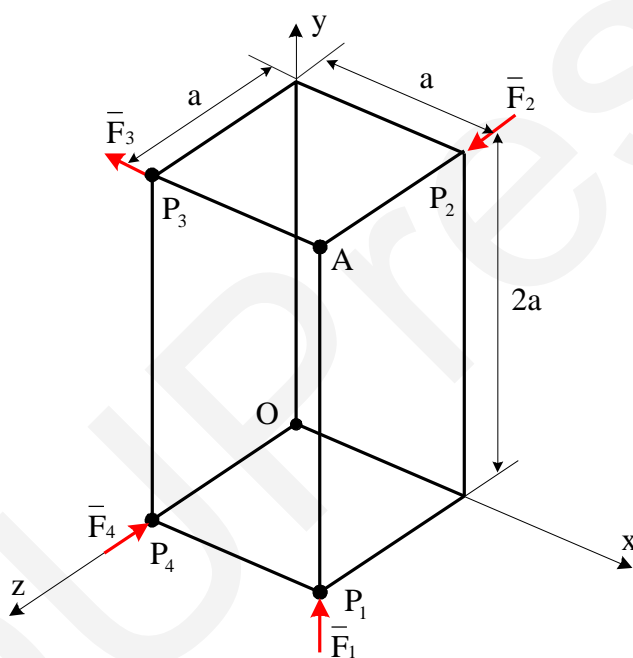


Mivel  $\bar{F}' = \bar{F}''$  és  $\bar{M}_A' = \bar{M}_A''$  a 3.1 tételből következik, hogy a két erőrendszer egyenértékű.

A 3.1 és 3.2 tételek felhasználásával le tudjuk ellenőrizni, hogy két erőrendszer egyenértékű-e vagy nem.

Egy **erőrendszer eredője** a vele egyenértékű erőrendszerek közül a legegyszerűbb.

### 3.4 Feladatok



Adatok:  $F_1 = 5[\text{N}]$ ,  $F_2 = 5[\text{N}]$ ,  $F_3 = 10[\text{N}]$ ,  $F_4 = 10[\text{N}]$ ,  $a = 2[\text{m}]$ .

- Számítsuk ki az erőrendszer eredő erejét és O pontra vonatkozó eredő forgatónyomatékát!
- Számítsuk ki az erőrendszer A pontra vonatkozó eredő forgatónyomatékát felhasználva az alábbi összefüggést:

$$\bar{M}_A = \bar{M}_O + \bar{r}_{AO} \times \bar{F}$$

- Számítsuk ki az A pontra vonatkozó eredő forgatónyomatékot a definíció alapján is!

Megoldás:



a)

$$\bar{F}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} [N]; \quad \bar{r}_{OP_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} [m]; \quad \rightarrow \quad \bar{M}_{1O} = \bar{r}_{OP_1} \times \bar{F}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix} [Nm]$$

$$\bar{F}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} [N]; \quad \bar{r}_{OP_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} [m]; \quad \rightarrow \quad \bar{M}_{2O} = \bar{r}_{OP_2} \times \bar{F}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ -10 \\ 0 \end{pmatrix} [Nm]$$

$$\bar{F}_3 = \begin{pmatrix} -10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} [N]; \quad \bar{r}_{OP_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} [m]; \quad \rightarrow \quad \bar{M}_{3O} = \bar{r}_{OP_3} \times \bar{F}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -20 \\ 40 \end{pmatrix} [Nm]$$

$$\bar{F}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -10 \end{pmatrix} [N]; \quad \bar{r}_{OP_4} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} [m]; \quad \rightarrow \quad \bar{M}_{4O} = \bar{r}_{OP_4} \times \bar{F}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} [Nm]$$

$$\bar{F} = \sum_{i=1}^4 \bar{F}_i = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ 5 \\ -5 \end{pmatrix} [N]$$

$$\bar{M}_O = \sum_{i=1}^4 \bar{M}_{Oi} = \begin{pmatrix} -10 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 20 \\ -10 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -20 \\ 40 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -30 \\ 50 \end{pmatrix} [Nm]$$

b)

$$\bar{M}_A = \bar{M}_O + \bar{r}_{AO} \times \bar{F} = \begin{pmatrix} 10 \\ -30 \\ 50 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -10 \\ 5 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40 \\ -20 \\ 0 \end{pmatrix} [Nm]$$

c)

$$\bar{M}_A = \overbrace{\bar{r}_{AP_1} \times \bar{F}_1}^{\vec{0}} + \overbrace{\bar{r}_{AP_2} \times \bar{F}_2}^{\vec{0}} + \overbrace{\bar{r}_{AP_3} \times \bar{F}_3}^{\vec{0}} + \bar{r}_{AP_4} \times \bar{F}_4 = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40 \\ -20 \\ 0 \end{pmatrix} [Nm]$$

## 4. Erőrendszerek osztályozása

### 4.1 Erőpár és erőcsavar

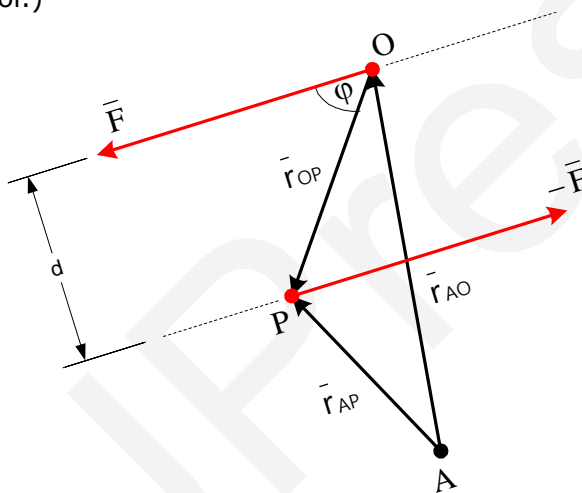
Az erőrendszerek osztályozása az eredő erejük és nyomatékuk alapján történik. Mielőtt osztályoznánk az erőrendszereket, először is definiálnunk kell az **erőpár** és **erőcsavar** fogalmát. Az erőpár két azonos nagyságú és irányú, de ellentétes értelmű erőből áll.



18. ábra. Erőpár

4.1 tétel:

Egy erőpár eredő forgatónyomatéka a tér bármely A pontjára vonatkozóan ugyanaz. (Más szavakkal: Egy erőpár nyomatéka független a forgásponttól.)



19. ábra. Erőpár

Bizonyítás:

Azt fogjuk kihasználni, hogy a 19. ábrán látható erőpár forgatónyomatéka a tér bármely A pontjára vonatkozóan ugyanaz, mint az O pontra. Az erőpár O pontra vonatkozó eredő forgatónyomatéka a következő:

$$\vec{M}_O = \vec{r}_{OO} \times \vec{F} + \vec{r}_{OP} \times (-\vec{F}) = \vec{r}_{OP} \times (-\vec{F}) \quad (4.1)$$

Az erőpár A pontra vonatkozó nyomatéka:

$$\vec{M}_A = \vec{r}_{AO} \times \vec{F} + \vec{r}_{AP} \times (-\vec{F}) = (\vec{r}_{AP} - \vec{r}_{AO}) \times (-\vec{F}) = \vec{r}_{OP} \times (-\vec{F}) \quad (4.2)$$

Tehát:



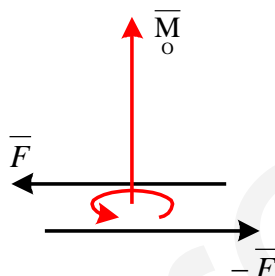
$$\bar{M}_A = \bar{M}_O, \quad \text{bármely } A \text{ pontra.} \quad (4.3)$$

Az erőpár eredő nyomatékának nagysága az alábbi összefüggéssel számítható:

$$|\bar{M}_O| = |\bar{r}_{OP} \times (-\bar{F})| = |\bar{F}| \cdot \overbrace{|\bar{r}_{OP}| \cdot \sin \varphi}^d = F \cdot d \quad (4.4)$$

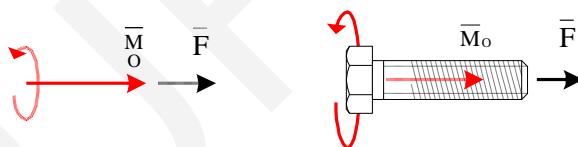
ahol  $d$  a két erő ( $\bar{F}$  és  $-\bar{F}$ ) hatásvonalának távolsága.

Könnyen belátható, hogy a nyomaték vektor mindig merőleges az erőpár síkjára (20. ábra).



20. ábra. Nyomaték

Egy erő és egy olyan erőpár, amelynek nyomatéka párhuzamos az erő hatásvonalával **erőcsavart** alkot (21. ábra).



21. ábra. Erőcsavar

A továbbiakban kimondunk és bebizonyítunk egy olyan általános tételt, amely megadja az erőrendszerek osztályozását. Jelölje az erőrendszer  $O$  pontra vonatkozó eredő erejét és forgatónyomatékát  $\bar{F}$  és  $\bar{M}_O$ .

## 4.2 Az erőrendszerek osztályai

### 4.2 tétel:

Minden erőrendszer besorolható a következő három osztály valamelyikébe:

1. Ha  $\bar{F} = \bar{0}$  akkor az erőrendszer eredője egy erőpár  $\bar{M}_O$  nyomatékkal.
2. Ha  $\bar{F} \neq \bar{0}$  és  $\bar{M}_O$  merőleges  $\bar{F}$ -re, akkor az erőrendszer eredője  $\bar{F}$  a tér egy rögzített hatásvonalán.



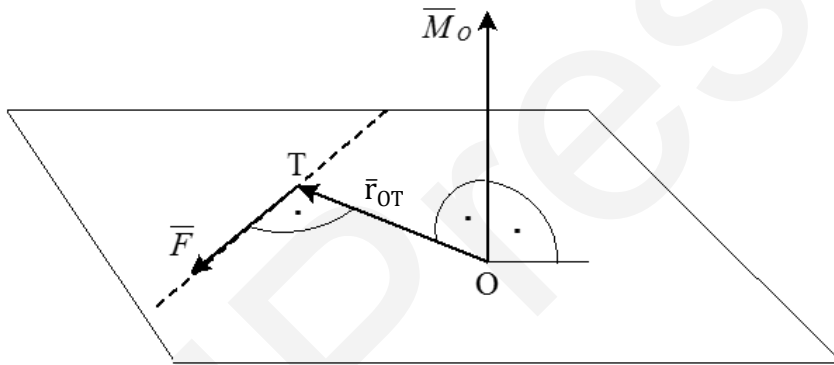
3. Ha  $\vec{F} \neq \vec{0}$  és  $\vec{M}_O$  nem merőleges  $\vec{F}$ -re, akkor az erőrendszer eredője egy erőcsavar.

*Bizonyítás:*

1. Alkalmazzuk a (3.6) összefüggést:

$$\vec{M}_A = \vec{M}_O + \vec{r}_{AO} \times \vec{F} = \vec{M}_O \rightarrow \vec{M}_A = \vec{M}_O \text{ bármely A pontra} \rightarrow \text{Az erőrendszer eredője egy erőpár } \vec{M}_O \text{ nyomatékkal.}$$

2. Rögzítsünk egy síkot, amely átmegy az O ponton, és merőleges  $\vec{M}_O$ -ra. Mivel  $\vec{F}$  merőleges  $\vec{M}_O$ -ra, megjeleníthető a fenti síkon. Jelölje T pont az O pontnak az F erő hatásvonalára eső merőleges vetületét.



22. ábra.

Mivel  $\vec{M}_O$  merőleges az  $\vec{r}_{OT}$  és  $\vec{F}$  vektorok által meghatározott síkra, így az  $\vec{F}$  eredő erő O pontra vonatkozó forgatónyomatéka az alábbi összefüggéssel számítható: (4.5 egyenlet)

$$\vec{M}_O = \vec{r}_{OT} \times \vec{F} \quad (4.5)$$

A fenti egyenletben az  $\vec{r}_{OT}$  vektor kijelöli az  $\vec{F}$  erő hatásvonalának helyét.

Fejezzük ki az  $\vec{r}_{OT}$  vektort az alábbi egyenletből:

$$\vec{F} \times \vec{M}_O = \vec{F} \times (\vec{r}_{OT} \times \vec{F}) = \vec{r}_{OT} \cdot \overbrace{(\vec{F} \cdot \vec{F})}^{F^2} - \vec{F} \cdot \overbrace{(\vec{F} \cdot \vec{r}_{OT})}^0 = \vec{r}_{OT} \cdot F^2$$

Tehát az  $\vec{r}_{OT}$  helyvektor:

$$\vec{r}_{OT} = \frac{\vec{F} \times \vec{M}_O}{F^2} \quad (4.6)$$





### 4.3 Feladatok

Határozzuk meg a 3.4. fejezetben szereplő erőrendszert helyettesítő erőcsavart.

Az erőrendszer eredő ereje és nyomatéka az O pontra:

$$\bar{F} = \begin{pmatrix} -10 \\ 5 \\ -5 \end{pmatrix} [\text{N}], \quad \bar{M}_O = \begin{pmatrix} 10 \\ -30 \\ 50 \end{pmatrix} [\text{Nm}].$$

Az  $\bar{F}$  eredő erő irányába mutató egységvektor:

$$\bar{e}_F = \frac{\bar{F}}{F} = \frac{\begin{pmatrix} -10 \\ 5 \\ -5 \end{pmatrix}}{\sqrt{(-10)^2 + (5)^2 + (-5)^2}} = \begin{pmatrix} -0.816 \\ 0.408 \\ -0.408 \end{pmatrix}$$

Az  $\bar{M}_O$  eredő nyomaték komponensei:

$$\begin{aligned} \bar{M}_{O//} &= (\bar{M}_O \cdot \bar{e}_F) \cdot \bar{e}_F = \overbrace{(10 \cdot (-0.816) + (-30) \cdot 0.408 + 50 \cdot (-0.408))}^{-40.8} \cdot \begin{pmatrix} -0.816 \\ 0.408 \\ -0.408 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 33.29 \\ -16.64 \\ 16.64 \end{pmatrix} [\text{Nm}] \end{aligned}$$

$$\bar{M}_{O\perp} = \bar{M}_O - \bar{M}_{O//} = \begin{pmatrix} 10 \\ -30 \\ 50 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 33.29 \\ -16.64 \\ 16.64 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -23.29 \\ -13.36 \\ 33.36 \end{pmatrix} [\text{Nm}]$$

Az erőcsavar hatásvonalát kijelölő vektor:

$$\bar{r}_{OT} = \frac{\bar{F} \times \bar{M}_O}{F^2} = \frac{\begin{pmatrix} -10 \\ 5 \\ -5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 10 \\ -30 \\ 50 \end{pmatrix}}{150} = \begin{pmatrix} 0.667 \\ 3 \\ 1.667 \end{pmatrix} [\text{m}]$$

A keresett erőcsavar:

$$(\bar{F}, \bar{M}_T) = (\bar{F}, \bar{M}_{O//}) = \left( \begin{pmatrix} -10 \\ 5 \\ -5 \end{pmatrix} [\text{N}], \begin{pmatrix} 33.28 \\ -16.64 \\ 16.64 \end{pmatrix} [\text{Nm}] \right)$$

Az eredő skaláris forgatónyomaték az erő hatásvonalára, mint forgástengelyre vonatkozóan:

$$M_T = M_{O//} = \bar{e}_F \cdot \bar{M}_{O//} = \begin{pmatrix} -0.816 \\ 0.408 \\ -0.408 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 33.28 \\ -16.64 \\ 16.64 \end{pmatrix} = -40.73 [\text{Nm}]$$

Így az eredő erőcsavar:

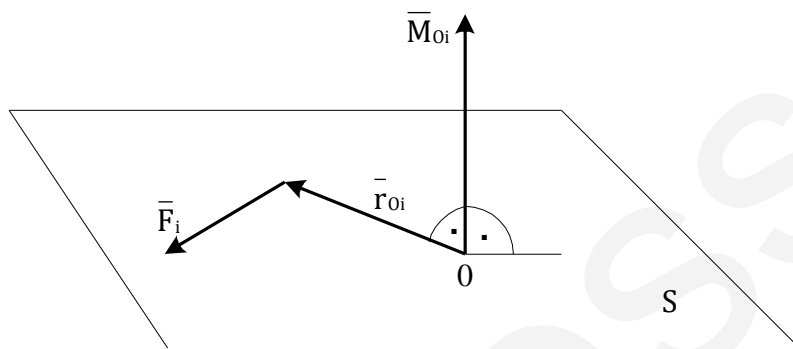
$$(\bar{F}, M_T) = \left( \begin{pmatrix} -10 \\ 5 \\ -5 \end{pmatrix} [\text{N}], -40.73 [\text{Nm}] \right)$$



## 5. Síkbeli erőrendszerek,

### 5.1 Síkbeli erőrendszerek osztályozása

Egy erőrendszer síkbeli, ha az erőrendszert alkotó összes erő ugyanabban a síkban (S) fekszik.



24. ábra.

#### 5.1 tétel:

Egy síkbeli erőrendszer eredő ereje és eredő nyomatéka merőleges egymásra.

#### Bizonyítás:

Jelölje a síkbeli erőrendszer O pontra vonatkozó eredő erejét és forgatónyomatékát  $\bar{F}$  és  $\bar{M}_O$  ( $O \in S$ ).

- |  |   |  |
|--|---|--|
| <ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>\bar{r}_{O_i}, \bar{F}_i \in S</math></li> <li>• <math>\bar{M}_{O_i} = \bar{r}_{O_i} \times \bar{F}_i</math></li> </ul> | } | $\bar{M}_{O_i}$ merőleges az S síkra $\rightarrow$<br>$\bar{M}_O = \sum_i \bar{M}_{O_i}$ szintén merőleges S-re. |
|--|---|--|

#### Következtetés:

- |  |   |                                      |
|--|---|--------------------------------------|
| <ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>\bar{F} = \sum_i \bar{F}_i \in S</math></li> <li>• <math>\bar{M}_O</math> merőleges S-re</li> </ul> | } | $\bar{M}_O$ merőleges $\bar{F}$ -re. |
|--|---|--------------------------------------|

#### 5.2 tétel:

Az összes síkbeli erőrendszer besorolható az alábbi két osztály valamelyikébe:



1. Ha  $\bar{F} = \bar{0}$  akkor az erőrendszer eredője egy erőpár  $\bar{M}_0$  nyomatékkal.
2. Ha  $\bar{F} \neq \bar{0}$  akkor az erőrendszer eredője az  $\bar{F}$  eredő erő egy rögzített hatásvonalon, amely átmegy a T ponton, amelyet az alábbi összefüggés határoz meg:

$$\bar{r}_{OT} = \frac{\bar{F} \times \bar{M}_0}{F^2} \quad (5.1)$$

*Bizonyítás:*

1. A 4.2/1 tételből közvetlenül következik.
2. Az 5.1 és 4.2/2 tételekből közvetlenül következik.

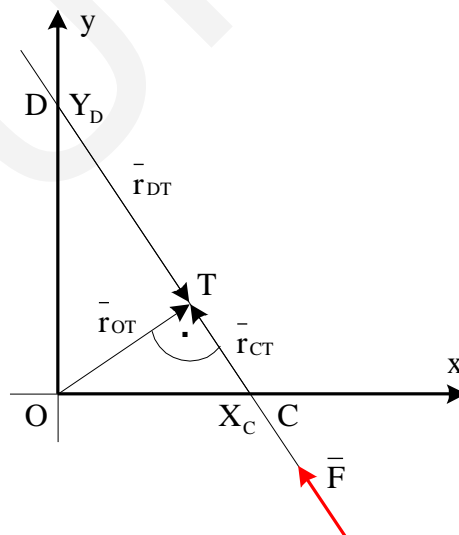
*5.3 tétel:*

Ha a síkbeli erőrendszer eredő ereje és forgatónyomatéka a következő:

$$\bar{F} = \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ 0 \end{pmatrix} \text{ és } \bar{M}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ M_0 \end{pmatrix}$$

akkor az eredő erő hatásvonalának x és y koordinátatengelyekkel alkotott metszéspontjai az alábbi összefüggésekkel számíthatók (25. ábra.):

$$x_C = \frac{M_0}{F_y} \quad y_D = -\frac{M_0}{F_x} \quad (5.2 \text{ és } 5.3)$$



25. ábra.



Bizonyítás:

$$\bar{r}_{OT} = \frac{\bar{F} \times \bar{M}_O}{F^2} = \frac{\begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ F_x & F_y & 0 \\ 0 & 0 & M_O \end{vmatrix}}{F^2} = \frac{\bar{i} \cdot F_y \cdot M_O - \bar{j} \cdot F_x \cdot M_O}{F^2} = \begin{pmatrix} \frac{F_y}{F^2} \cdot M_O \\ -\frac{F_x}{F^2} \cdot M_O \\ 0 \end{pmatrix}$$

Így az  $\bar{r}_{OT}$ ,  $\bar{r}_{CT}$  és  $\bar{r}_{DT}$  vektorok:

$$\bar{r}_{OT} = \begin{pmatrix} x_{OT} \\ y_{OT} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{F_y}{F^2} \cdot M_O \\ -\frac{F_x}{F^2} \cdot M_O \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{r}_{CT} = \begin{pmatrix} x_{OT} - x_C \\ y_{OT} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{F_y}{F^2} \cdot M_O - x_C \\ -\frac{F_x}{F^2} \cdot M_O \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\bar{r}_{DT} = \begin{pmatrix} x_{OT} \\ y_{OT} - y_D \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{F_y}{F^2} \cdot M_O \\ -\frac{F_x}{F^2} \cdot M_O - y_D \\ 0 \end{pmatrix}$$

Mivel  $\bar{r}_{OT}$  merőleges  $\bar{r}_{CT}$ -ra:

$$\bar{r}_{OT} \cdot \bar{r}_{CT} = \begin{pmatrix} \frac{F_y}{F^2} \cdot M_O \\ -\frac{F_x}{F^2} \cdot M_O \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{F_y}{F^2} \cdot M_O - x_C \\ -\frac{F_x}{F^2} \cdot M_O \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$\frac{F_y}{F^2} \cdot M_O \cdot \left( \frac{F_y}{F^2} \cdot M_O - x_C \right) + \left( -\frac{F_x}{F^2} \cdot M_O \right) \cdot \left( -\frac{F_x}{F^2} \cdot M_O \right) = 0$$

$$\frac{F_y^2}{F^4} \cdot M_O^2 + \frac{F_x^2}{F^4} \cdot M_O^2 = \frac{F_y}{F^2} \cdot M_O \cdot x_C$$

$$M_O^2 \cdot \frac{\overbrace{F_x^2 + F_y^2}^{F^2}}{F^4} = \frac{F_y}{F^2} \cdot M_O \cdot x_C$$

$$M_O = F_y \cdot x_C \rightarrow x_C = \frac{M_O}{F_y}$$

Mivel  $\bar{r}_{OT}$  és  $\bar{r}_{DT}$  szintén merőlegesek egymásra:

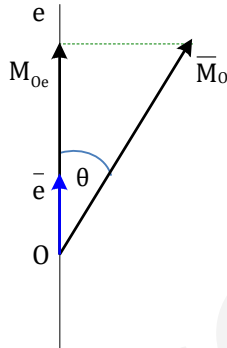
$$y_D = -\frac{M_O}{F_x}$$



## 5.2 Az erő skaláris forgatónyomatéka

A **skaláris nyomaték** egy erő egy tengely körüli forgató hatását jellemzi (26. ábra.). Ha a tengely egy  $\bar{e}$  egységvektorral adott, akkor a skaláris nyomatékot az alábbi összefüggés értelmezi:

$$M_{Oe} = \bar{M}_O \cdot \bar{e} = |\bar{M}_O| \cdot |\bar{e}| \cdot \cos \theta = |\bar{M}_O| \cdot \cos \theta \quad (5.4)$$

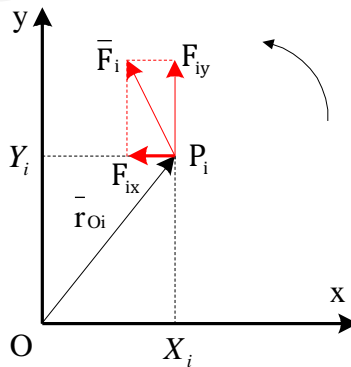


26. ábra.

ahol  $\bar{M}_O$  az erőnek az O pontra vonatkozó nyomatékvektora. Így a skaláris nyomaték a nyomatékvektor e egyenesre (tengelyre) eső merőleges vetülete ( $M_{Oe}$ , 26. ábra).

Egy az xy síkba eső erőrendszer esetén az egyes  $\bar{F}_i$  erők skaláris nyomatékát a z tengelyre szokás vonatkoztatni. Az  $\bar{F}_i$  erők skaláris nyomatéka:

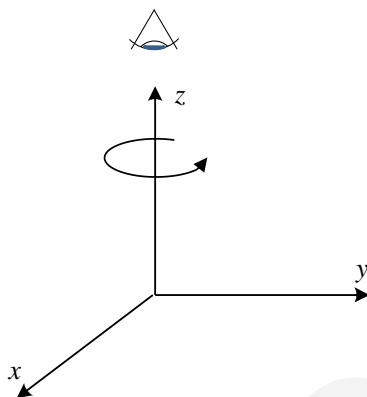
$$\begin{aligned} M_{O_i} &= \bar{M}_{O_i} \cdot \bar{k} = (\bar{r}_{O_i} \times \bar{F}_i) \cdot \bar{k} = \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} F_{x_i} \\ F_{y_i} \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ F_{y_i} \cdot x_i - F_{x_i} \cdot y_i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= F_{iy} \cdot x_i - F_{ix} \cdot y_i \end{aligned}$$



27. ábra.



Ha a pozitív forgásirányt az óramutató járásával ellentétes irányba vesszük fel (28. ábra.), akkor  $F_{iy} \cdot x_i$  az  $F_{iy}$  komponens skaláris nyomatéka, míg  $-F_{ix} \cdot y_i$  az  $F_{ix}$  komponensé.



28. ábra.

Tehát az  $\bar{F}_i$  erő skaláris nyomatéka kiszámítható az  $F_{ix}$  és  $F_{iy}$  komponensek nyomatékainak összegzésével.

### 5.3 Síkbeli erőrendszer eredőjének szerkesztése

A továbbiakban a síkbeli erőrendszer eredőjének szerkesztésére mutatunk módszert. Ahogy azt az 5.1 fejezetben bebizonyítottuk, a síkbeli erőrendszer eredője lehet:

- 1) egy erőpár  $\bar{M}_0$  nyomatékkal, ha  $\bar{F} = \bar{0}$
- 2)  $\bar{F}$  egy adott hatásvonalon – az 5.1 képlet szerint – ha  $\bar{F} \neq \bar{0}$

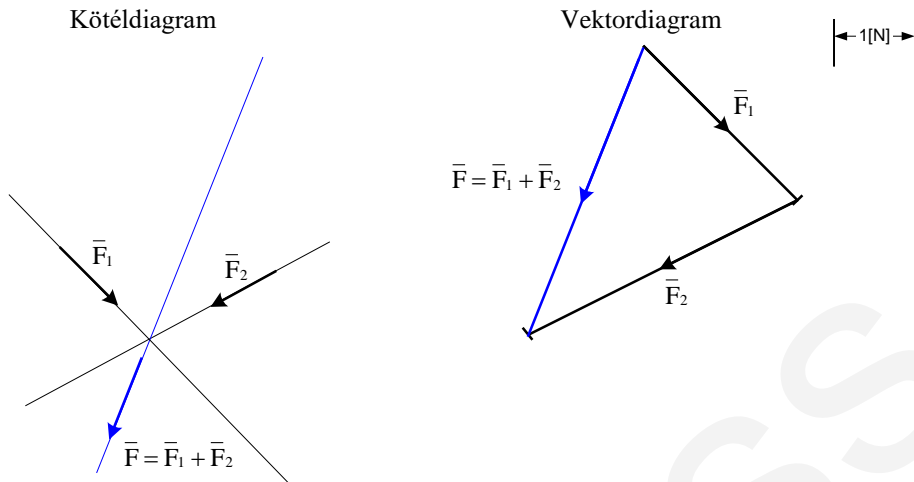
ahol  $\bar{F}$  és  $\bar{M}_0$  jelöli az erőrendszer eredő erejét és eredő nyomatékát.

Tehát a szerkesztés eredménye lehet egy erőpár vagy az  $\bar{F}$  eredő erő egy adott hatásvonalon. A szerkesztés elvi alapja az 5.3 tétel.

5.3 tétel:

Legyenek  $\bar{F}_1$  és  $\bar{F}_2$  nem zérus, síkbeli erők metsződő hatásvonallal (29. ábra.). Az  $\bar{F}_1$  és  $\bar{F}_2$  erők  $\bar{F}$  eredőjére teljesülnek az alábbiak:

1.  $\bar{F} = \bar{F}_1 + \bar{F}_2$
2.  $\bar{F}$  átmegy az  $\bar{F}_1$  és  $\bar{F}_2$  erők hatásvonalainak metszéspontján.



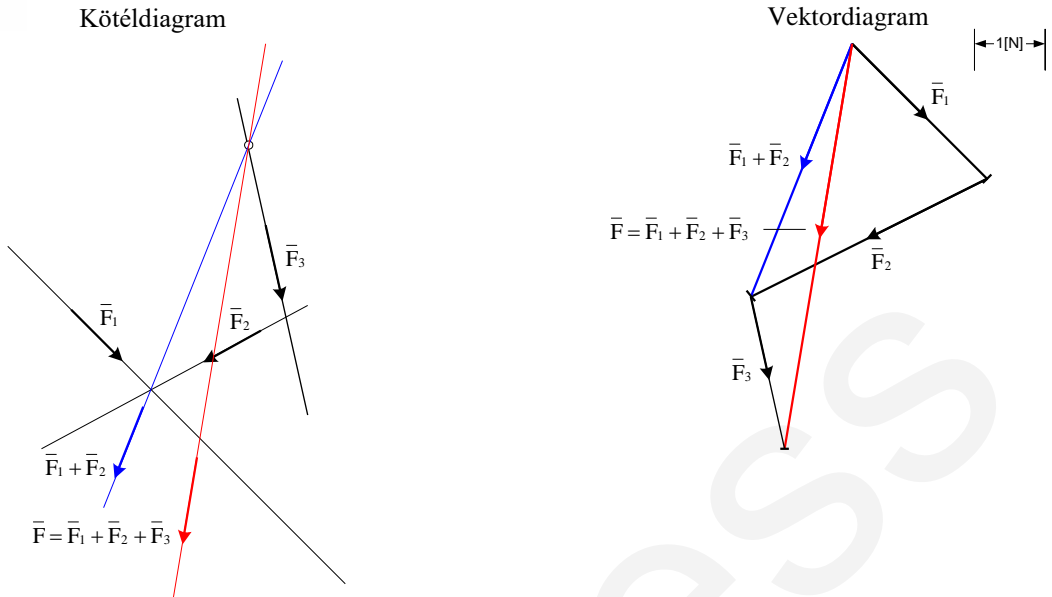
29. ábra.

*Bizonyítás:*

$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 \neq \vec{0}$ , így  $\vec{F}$  az eredő egy adott hatásvonalon (5.2 tétel). Mivel az  $\vec{F}_1$  és  $\vec{F}_2$  erők eredő nyomatéka az erők hatásvonalainak metszéspontjára vonatkozóan nulla, így az  $\vec{F}$  eredő erő hatásvonalának szintén át kell mennie a fenti metszésponton.

Ahogy a 29. ábrán látható, az  $\vec{F}$  eredő erőt, és annak hatásvonalát külön ábrán szerkesztjük. Az  $\vec{F}$  erő szerkesztésének ábráját **vektorábrának** (vektordiagram), a hatásvonalét **kötélábrának** (kötéldiagram) nevezzük. A vektorábra pontos megrajzolásához egy erőskálára (erőléptékre) van szükség. A 29. ábrán 1 [cm] távolság felel meg 1 [N] erőnek. Így az  $\vec{F}_1$  és  $\vec{F}_2$  erők nagyságai 2,7 és 3,7 cm.

Három vagy több erő esetén (30. ábra) először megszerkesztjük az  $\vec{F}_1$  és  $\vec{F}_2$  eredőjét, majd az  $\vec{F}_1 + \vec{F}_2$  és  $\vec{F}_3$  eredőjét, aztán az  $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3$  és  $\vec{F}_4$  eredőjét, stb.



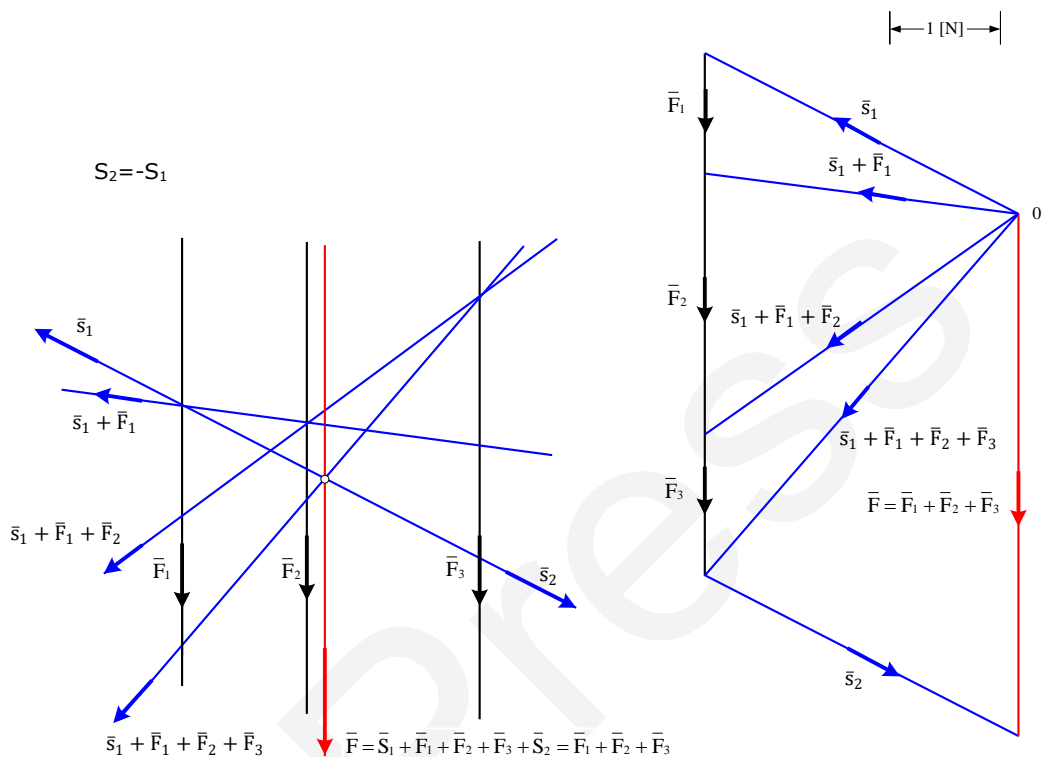
30. ábra.

Ha az összes erő hatásvonala párhuzamos egymással, akkor az előbb bemutatott eljárást „direktbe” nem tudjuk alkalmazni. Ebben az esetben az eredeti erőrendszerhez hozzá kell adnunk két fiktív erőt ( $\vec{s}_1$  és  $\vec{s}_2$ ) – melyek azonos hatásvonalúak és nagyságúak, de ellentétes értelműek (31. ábra). Könnyen belátható, hogy ezek a fiktív erők nem változtatják meg az eredeti erőrendszer eredő erejét és eredő forgatónyomatékát.



Kötéldiagram

Vektordiagram

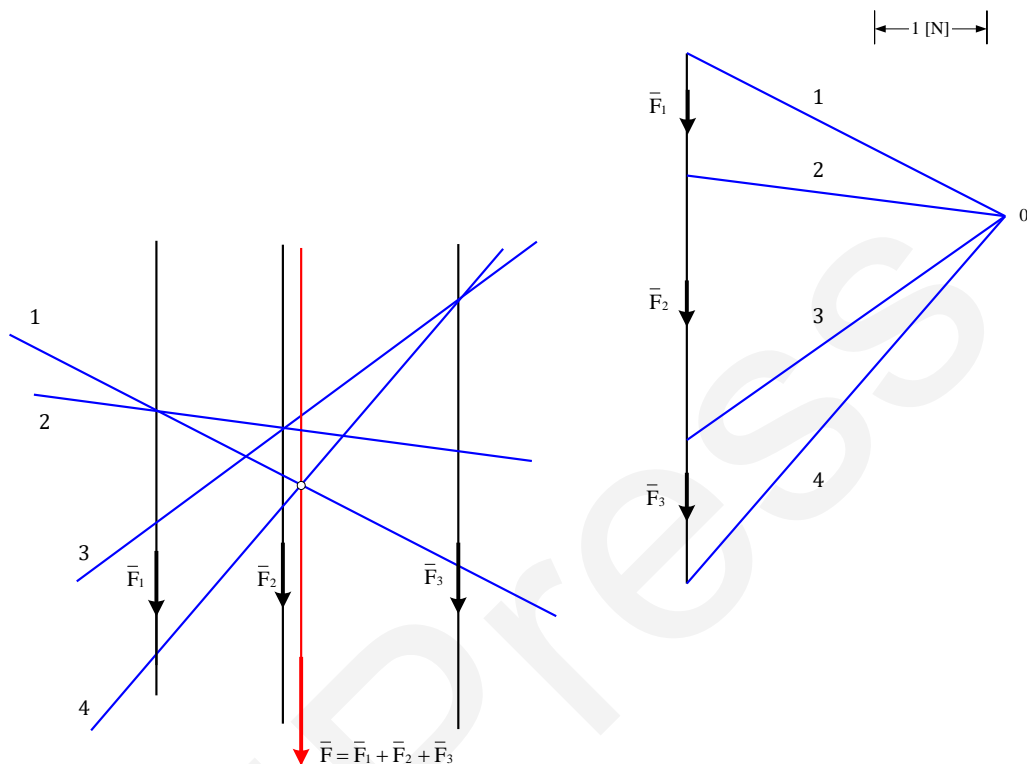


31. ábra.

A mérnöki gyakorlatban egyszerűsített jelöléseket alkalmaznak; a  $\vec{s}_1$ ,  $\vec{s}_1 + \vec{F}_1$ ,  $\vec{s}_1 + \vec{F}_1 + \vec{F}_2$ , és  $\vec{s}_1 + \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3$  jelölések helyett egyszerűen az 1,2,3 és 4 arab számokat használjuk. Továbbá, az  $\vec{s}_2$  és  $\vec{F}$  erőket nem tüntetik fel a vektorábrán. A 32. ábra a 31. ábrán látható szerkesztést mutatja egyszerűsített jelölésekkel.

Kötéldiagram

Vektordiagram



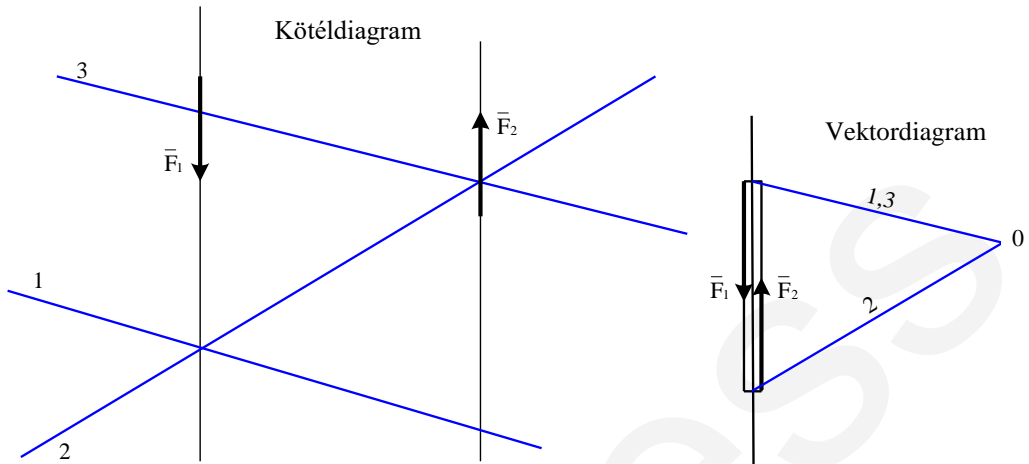
32. ábra.

A szerkesztés lépései párhuzamos erőrendszer esetén a következők:

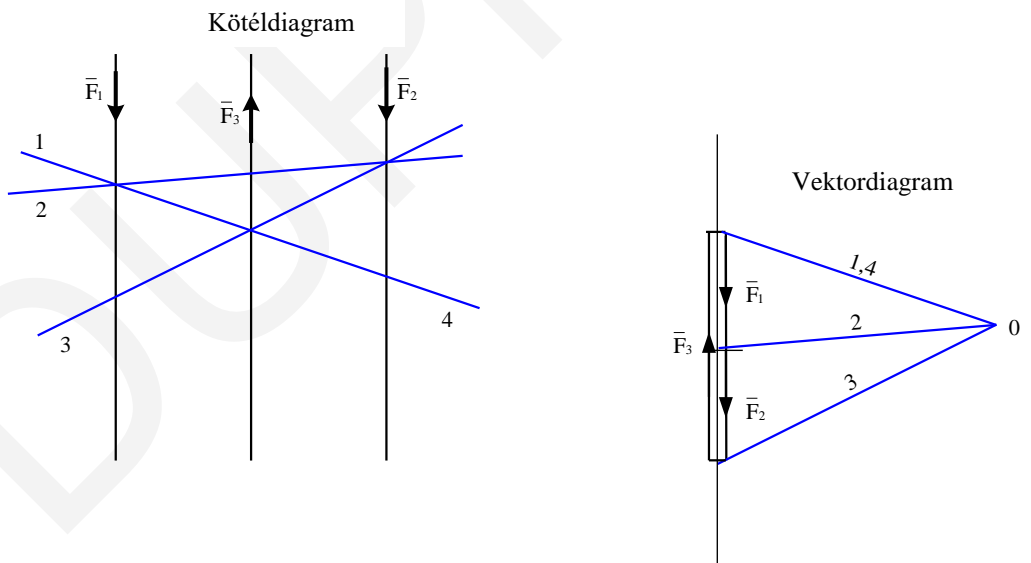
1. Rögzítsünk egy erőléptéket és rajzoljuk meg az  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3 \dots$  erőket a vektorábrán.
2. Rögzítsünk egy O pontot és rajzoljuk meg az 1,2,3,4,... jelű egyeneseket a vektorábrán. (Az O pont helye tetszőleges, a vonalak sorrendje követi az erők sorrendjét.)
3. Rajzoljuk meg az  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3 \dots$  erők hatásvonalait a kötéldiagramon.
4. Rajzoljuk meg az 1-es vonalat a kötéldiagramon. Az 1-es vonal helye tetszőleges.
5. Rajzoljuk meg a 2-es vonalat az 1-es vonal és az  $\vec{F}_1$  erő hatásvonalának metszéspontján keresztül.
6. Rajzoljuk meg a 3-as vonalat az 2-es vonal és az  $\vec{F}_2$  erő hatásvonalának metszéspontján keresztül.
7. Rajzoljuk meg a 4-es vonalat az 3-as vonal és az  $\vec{F}_3$  erő hatásvonalának metszéspontján keresztül.
8. Rajzoljuk meg az  $\vec{F}$  eredő erő hatásvonalát az 1-es és 4-es vonal metszéspontján keresztül.



Ahogy korábban említettük, ha  $\bar{F} = \bar{0}$ , akkor az eredő egy erőpár. A 33. és 34. ábrák a szerkesztés eredményét mutatják, az  $\bar{F} = \bar{0}$ ,  $\bar{M}_0 \neq \bar{0}$  és  $\bar{F} = \bar{0}$ ,  $\bar{M}_0 = \bar{0}$  esetekben. Az eredő mindkét esetben egy erőpár, az első esetben nem zérus, míg a másodikban zérus nyomatékkal.



33. ábra.



34. ábra.

A 33. ábra alapján ( $\bar{F} = \bar{0}$ ,  $\bar{M}_0 \neq \bar{0}$ ), megállapíthatjuk, hogy az 1-es és 4-es vonal a vektorábrán egybeesik, a kötélábrán pedig párhuzamosak. A 34. ábra esetében ( $\bar{F} = \bar{0}$ ,  $\bar{M}_0 = \bar{0}$ ) az 1-es és 4-es vonalak mind a vektor-, mind a kötélábrán egybeesnek. A 34. ábra alapján tett megfigyelések



egyensúlyi erőrendszerben szereplő ismeretlen erők szerkesztésénél lesznek fontosak. Most ezzel kapcsolatban megfogalmazzunk egy tételt:

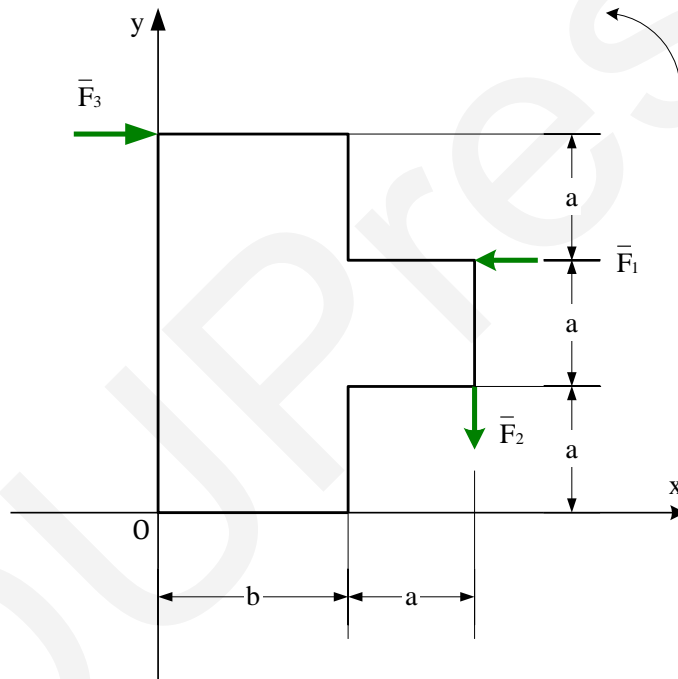
**5.4 tétel:**

Ha egy síkbeli erőrendszer eredő ereje és forgatónyomatéka egyaránt zérus, akkor az első és utolsó szerkesztővonal mind a kötél, mind a vektroábrán egybeesik.

**5.4 Feladatok**

*1. feladat:*

Az ábra egy merev lemezre ható három erőt szemléltet. A lemez méretei és az erők nagyságai adottak.



*Adatok:*  $F_1 = 4[N]$ ,  $F_2 = 5[N]$ ,  $F_3 = 10[N]$ ,  $a = 2[m]$ ,  $b = 3[m]$ .

- a) Számítsuk ki a lemezre ható síkbeli erőrendszer eredő erejét, valamint az O pontra vonatkozó eredő skaláris és vektoriális forgatónyomatékát!
- b) Számítsuk ki az eredő erő hatásvonalának x és y tengellyekkel alkotott metszéspontjait!
- c) Szerkesszük meg az erőrendszer eredőjét.



Megoldás:

a)

$$\vec{F}_1 = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} [N], \vec{F}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} [N], \vec{F}_3 = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} [N]$$

Az eredő erő:

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^3 \vec{F}_i = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} [N]$$

Az eredő skaláris forgatónyomaték az O pontra:

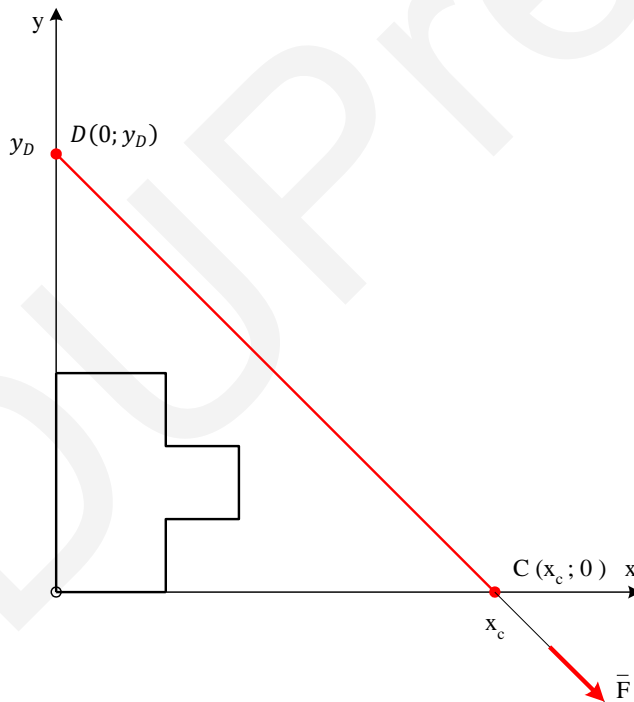
$$M_O = F_1 \cdot 2a - F_2 \cdot (a + b) - F_3 \cdot 3a = 4 \cdot 2 \cdot 2 - 5(2 + 3) - 10 \cdot 3 \cdot 2 = -69 [\text{Nm}]$$

Az eredő vektoriális forgatónyomaték az O pontra:

$$\vec{M}_O = M_O \cdot \vec{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -69 \end{pmatrix} [\text{Nm}]$$

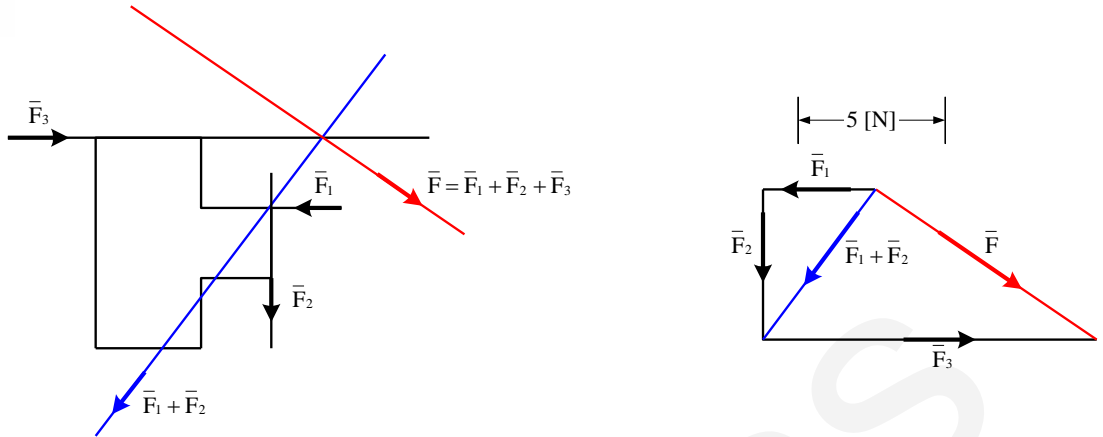
b)

$$x_c = \frac{M_O}{F_y} = \frac{-69}{-5} = 13,8 [\text{m}], \quad y_D = -\frac{M_O}{F_x} = -\frac{-69}{6} = 11,5 [\text{m}]$$



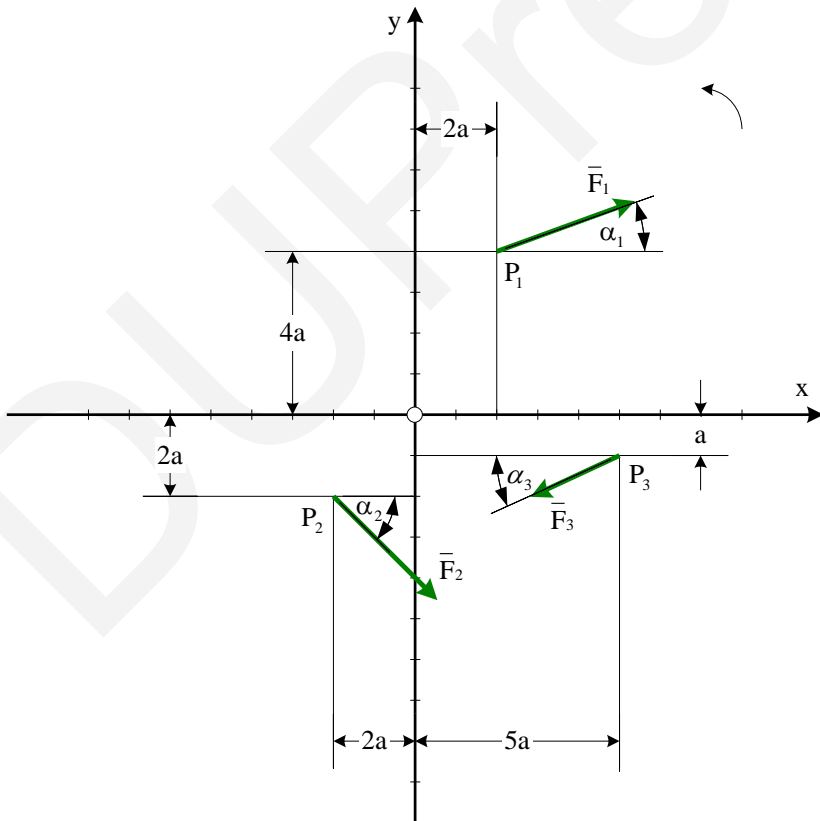
c)

Az eredő szerkesztése:



2. feladat:

Az ábrán látható három, egy síkba eső erő, valamint támadáspontjaik koordinátái ismertek.



Adatok:  $F_1 = 3\text{[N]}$ ,  $\alpha_1 = 20^\circ$ ,  $F_2 = 3\text{[N]}$ ,  $\alpha_2 = 45^\circ$ ,  $F_3 = 2\text{[N]}$ ,  $\alpha_3 = 25^\circ$ ,  $a = 0.1\text{[m]}$ .



- Számítsuk ki az erőrendszer O pontra vonatkozó eredő erejét és eredő forgatónyomatékát (skalárisan és vektoriálisan).
- Számítsuk ki az eredő erő hatásvonalának az x és y tengellyekkel alkotott metszéspontjait!
- Szerkesszük meg az erőrendszer eredőjét.

*Megoldás:*

a)

$$\vec{F}_1 = \begin{pmatrix} F_1 \cdot \cos \alpha_1 \\ F_1 \cdot \sin \alpha_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.819 \\ 1.026 \end{pmatrix} [N]$$

$$\vec{F}_2 = \begin{pmatrix} F_2 \cdot \cos \alpha_2 \\ -F_2 \cdot \sin \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.121 \\ -2.121 \end{pmatrix} [N]$$

$$\vec{F}_3 = \begin{pmatrix} -F_3 \cdot \cos \alpha_3 \\ -F_3 \cdot \sin \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1.813 \\ -0.845 \end{pmatrix} [N]$$

Eredő erő:

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^3 \vec{F}_i = \begin{pmatrix} 2.819 \\ 1.026 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2.121 \\ -2.121 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1.813 \\ -0.845 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.127 \\ -1.940 \end{pmatrix} [N]$$

Eredő skaláris nyomaték az O pontra:

$$M_O = -F_1 \cdot \cos \alpha_1 \cdot 4a + F_1 \cdot \sin \alpha_1 \cdot 2a + F_2 \cdot \cos \alpha_2 \cdot 2a + F_2 \cdot \sin \alpha_2 \cdot 2a - F_3 \cdot \cos \alpha_3 \cdot a - F_3 \cdot \sin \alpha_3 \cdot 5a = -0.678 [Nm]$$

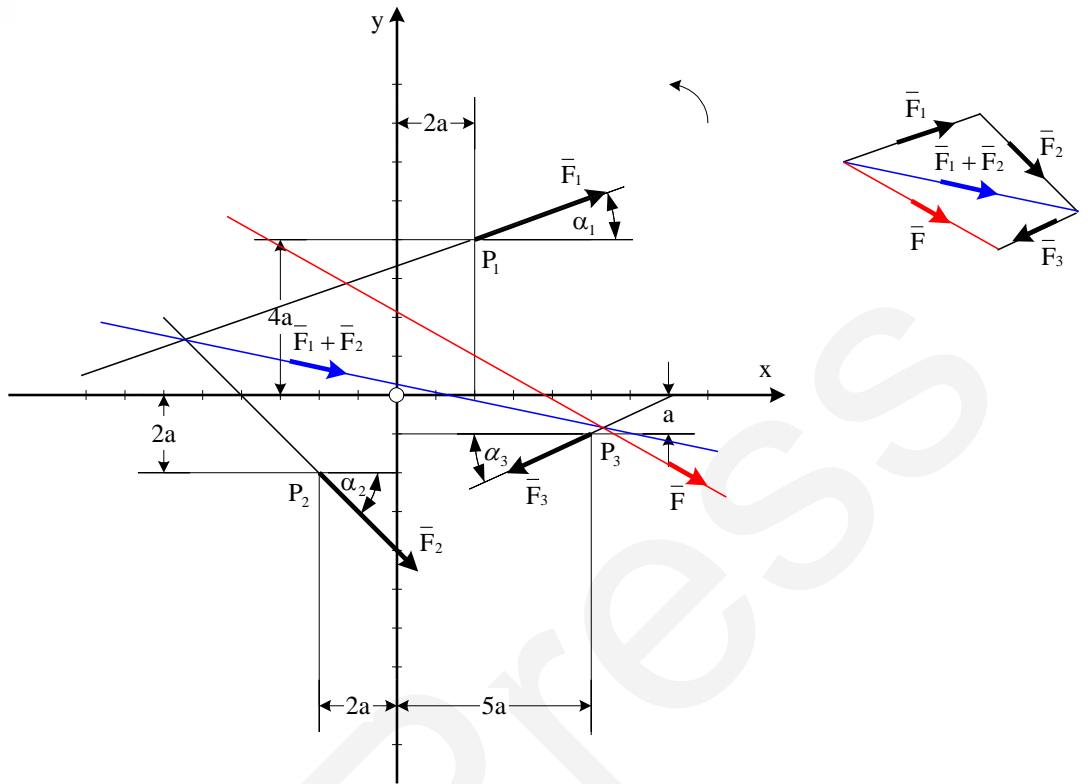
Eredő vektoriális nyomaték az O pontra:

$$\vec{M}_O = M_O \cdot \vec{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -0.678 \end{pmatrix} [Nm]$$

b)

$$x_c = \frac{M_O}{F_y} = \frac{-0.678}{-1.940} = 0.349 [m], \quad y_D = -\frac{M_O}{F_x} = -\frac{-0.678}{3.127} = 0.217 [m]$$

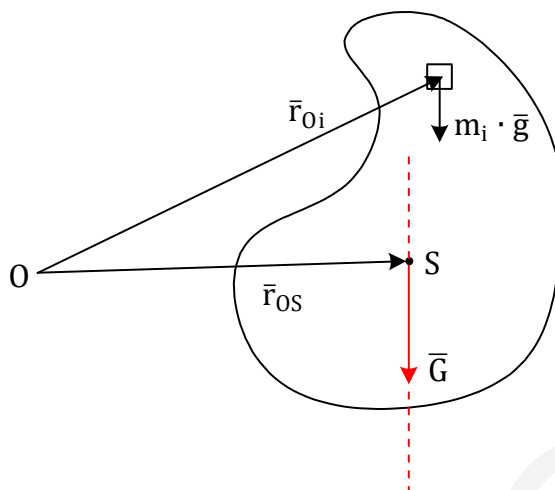
c)



## 6. Homogén gravitációs erőrendszer eredője. Súlypont

### 6.1 Homogén gravitációs erőrendszer eredője

Ebben a fejezetben a homogén gravitációs erőrendszer eredő erejére és forgatónyomatokra vonatkozó összefüggéseket származtatunk, majd megadjuk az erőrendszer eredőjét. A 35. ábrán látható testet bontsuk fel elhanyagolhatóan kicsi méretű darabokra. Az  $i$ . rész tömegét jelölje  $m_i$ . A gravitációs erőrendszer eredő erejét hagyományosan  $\vec{G}$ -vel jelöljük.



35. ábra.

A 35. ábra alapján a gravitációs erőrendszer eredő ereje és forgatónyomatéka a következő:

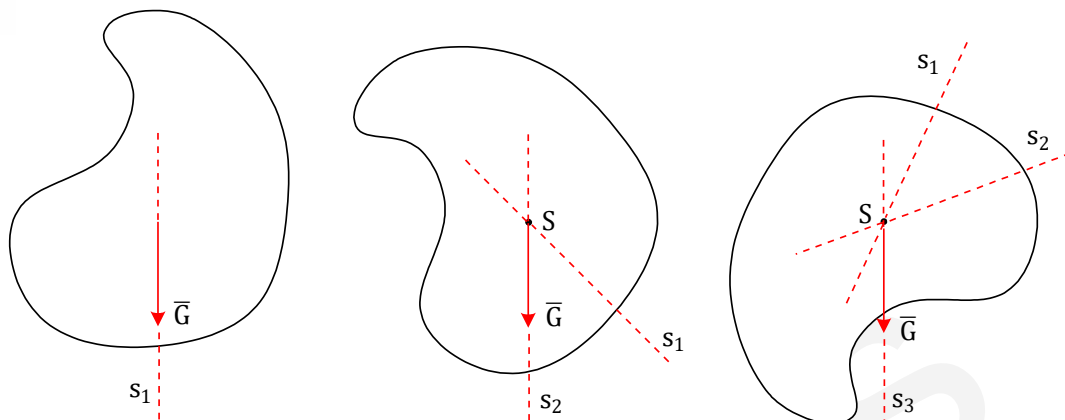
$$\bar{G} = \sum_i (m_i \cdot \bar{g}) = \overbrace{(\sum_i m_i)}^m \cdot \bar{g} = m \cdot \bar{g} \quad (6.1)$$

$$\bar{M}_O = \sum_i \bar{M}_{O_i} = \sum_i (\bar{r}_{O_i} \times m_i \cdot \bar{g}) = \sum_i (m_i \cdot \bar{r}_{O_i} \times \bar{g}) = (\sum_i m_i \cdot \bar{r}_{O_i}) \times \bar{g} \quad (6.2)$$

A fenti összefüggésekből adódóan  $\bar{M}_O$  merőleges a  $\bar{g}$  gravitációs gyorsulásra, ebből adódóan a  $\bar{G}$  eredő erőre. Mivel  $\bar{G} \neq \bar{0}$  és  $\bar{M}_O$  merőleges  $\bar{G}$ -re, a 4.2 tétel alapján az adódik, hogy az erőrendszer eredője  $\bar{G}$  lesz a tér egy rögzített hatásvonalán.

## 6.2 Súlypont

A 36. ábra egy merev testet szemléltet három különböző helyzetben. A különböző helyzetekhez különböző hatásvonalai tartoznak, melyek egy pontban metsződnek (S). Az S pontot **súlypontnak** nevezzük.



36. ábra.

A homogén gravitációs erőrendszer eredő forgatónyomatékát írjuk fel két különböző alakban írhatjuk fel az alábbiak szerint (lásd 34. ábra és 6.2 egyenlet):

$$\begin{aligned} \text{I.} \quad & \bar{M}_O = (\sum_i m_i \cdot \bar{r}_{O_i}) \times \bar{g} \\ \text{II.} \quad & \bar{M}_O = \bar{r}_{OS} \times \bar{G} = \bar{r}_{OS} \times m \cdot \bar{g} = \bar{r}_{OS} \times (\sum_i m_i) \cdot \bar{g} = (\sum_i m_i) \cdot \bar{r}_{OS} \times \bar{g} \quad (6.3) \end{aligned}$$

Egyenlővé téve a két egyenletet:

$$(\sum_i m_i) \cdot \bar{r}_{OS} \times \bar{g} = (\sum_i m_i \cdot \bar{r}_{O_i}) \times \bar{g} \quad (6.4)$$

A fenti egyenletből kifejezve az  $\bar{r}_{OS}$  vektort, megkapjuk a súlypont helyére vonatkozó összefüggést:

$$\bar{r}_{OS} = \frac{\sum_i m_i \cdot \bar{r}_{O_i}}{\sum_i m_i} \quad (6.5)$$

A tömeg felírható a sűrűség és térfogat szorzataként:

$$\bar{r}_{OS} = \frac{\sum_i \rho_i \cdot V_i \cdot \bar{r}_{O_i}}{\sum_i \rho_i \cdot V_i} \quad (6.6)$$

Ha a test tömegeloszlása homogén ( $\rho_i = \rho = \text{állandó}$ ):

$$\bar{r}_{OS} = \frac{\sum_i \rho \cdot V_i \cdot \bar{r}_{O_i}}{\sum_i \rho \cdot V_i} = \frac{\rho \cdot \sum_i V_i \cdot \bar{r}_{O_i}}{\rho \cdot \sum_i V_i} = \frac{\sum_i V_i \cdot \bar{r}_{O_i}}{\sum_i V_i} \quad (6.7)$$

Ha a test speciálisan egy  $d$  vastagságú homogén lemez (matematikailag egy síkidom):



$$\bar{r}_{OS} = \frac{\sum_i d \cdot A_i \cdot \bar{r}_{Oi}}{\sum_i d \cdot A_i} = \frac{d \cdot \sum_i A_i \cdot \bar{r}_{Oi}}{d \cdot \sum_i A_i} = \frac{\sum_i A_i \cdot \bar{r}_{Oi}}{\sum_i A_i} \quad (6.8)$$

A fenti egyenletben  $\sum_i A_i = A$  a síklemez teljes területe. Az egyenletből (6.8) az  $x_S$  és  $y_S$  koordinátái az  $\bar{r}_{OS}$  helyvektornak a következők:

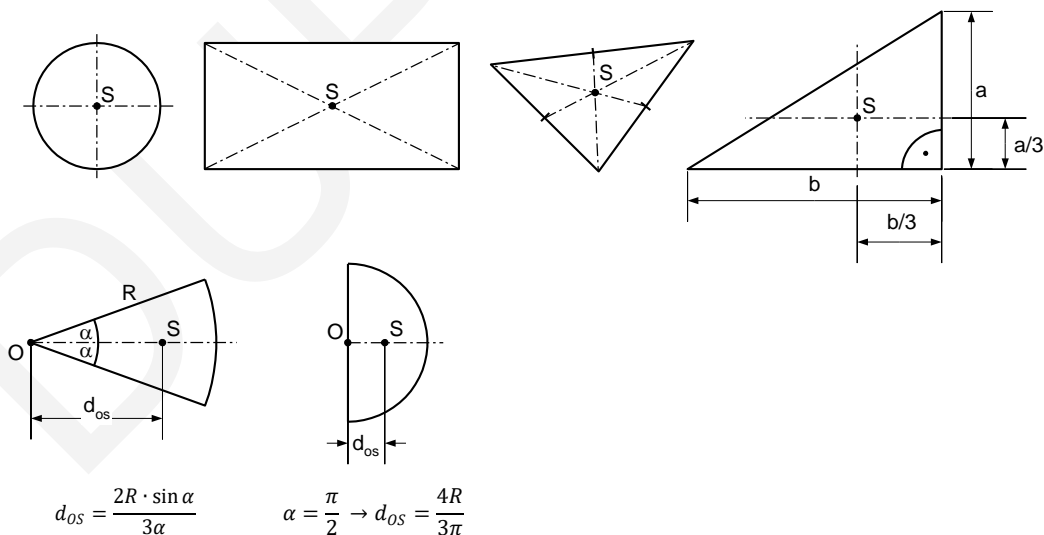
$$x_S = \frac{\sum_i A_i \cdot x_i}{\sum_i A_i} \quad (6.9), \quad y_S = \frac{\sum_i A_i \cdot y_i}{\sum_i A_i} \quad (6.10)$$

Ha a síklemezt felbontjuk kicsi elhanyagolható területű részekre, akkor a (6.11) és (6.12) képleteket írhatjuk fel:

$$x_S = \frac{\int_A x dA}{\int_A dA} \quad (6.11), \quad y_S = \frac{\int_A y dA}{\int_A dA} \quad (6.12)$$

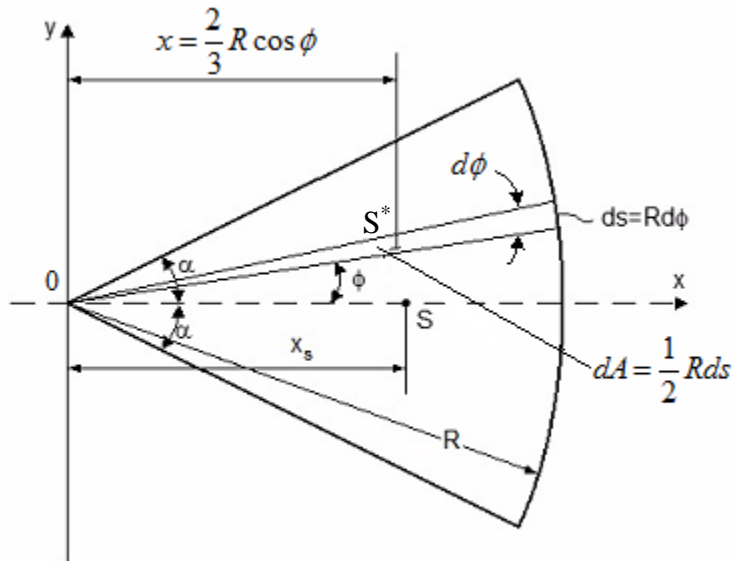
### 6.3 Síkidomok súlypontja

A 37. ábra a súlyponthelyét szemlélteti különböző síkidomok esetén. A kör, téglalap és általános háromszög esetén a súlypont helye elemi geometriából ismert, míg derékszögű háromszög, körcikk és félkör esetében integrál számítással határozható meg.



37. ábra.

Példaképp származtassuk a körcikk súlypontjára vonatkozó összefüggést! Legyen az x tengely a körcikk szimmetria tengelye a 38. ábra szerint.



38. ábra.

Egy kicsiny  $d\phi$  szöggel jellemzett körcikk területe az  $R$  sugár ismeretében számítható:

$$dA = \frac{1}{2} R ds = \frac{1}{2} R^2 d\phi \quad (6.13)$$

A koordinátarendszer origójának és a fenti kicsiny körcikk súlypontjának ( $S^*$ ) távolsága  $\frac{2}{3}R$ . (Ez abból adódik, hogy a körcikk egyenlő szárú háromszöggel közelíthető.)

Így a súlypont ( $S^*$ )  $y$  tengelytől mért távolsága a fenti kicsiny körcikk esetében:

$$x = \frac{2}{3} R \cdot \cos \phi \quad (6.14)$$

A  $2\alpha$  nagyságú középponti szöggel jellemzett  $R$  sugarú körcikk súlypontjának helye az alábbi összefüggéssel számítható (lásd 6.11 egyenlet):

$$x_S = \frac{\int_A x dA}{\int_A dA} = \frac{\int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{1}{3} R^3 \cdot \cos \phi d\phi}{\int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{1}{2} R^2 d\phi} = \frac{2}{3} R \cdot \frac{\int_{-\alpha}^{\alpha} \cos \phi d\phi}{\int_{-\alpha}^{\alpha} d\phi} = \frac{2}{3} R \cdot \frac{2 \cdot \sin \alpha}{2\alpha} = \frac{2R \cdot \sin \alpha}{3\alpha}$$

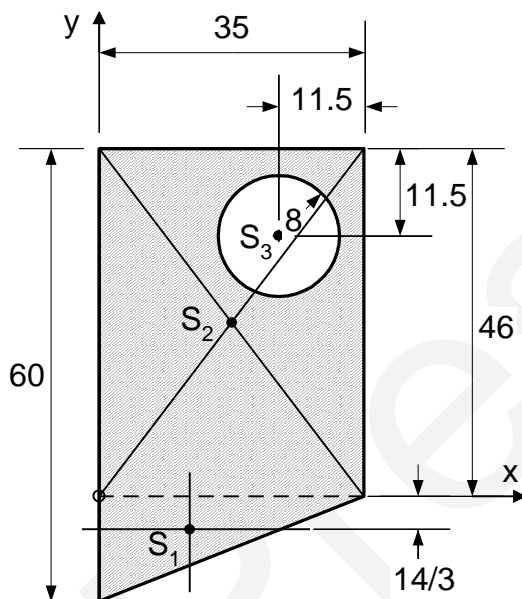
Speciálisan, ha a körcikk egy félkör ( $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ), akkor:



$$x_S = \frac{2R \cdot \sin \frac{\pi}{2}}{3 \cdot \frac{\pi}{2}} = \frac{4R}{3\pi} \quad (6.15)$$

## 6.4 Feladatok

1. feladat:



- Számítsuk ki az ábrán látható homogén vastagságú és anyagú síklemez súlypontjának koordinátáit!
- Ellenőrizzük a számítással kapott eredményt szerkesztéssel!

Megoldás:

- Bontsuk fel a lemezt három egyszerű síkidomra az ábra szerint. A derékszögű háromszög, téglalap és kör súlypontját jelölje rendre  $S_1$ ,  $S_2$  és  $S_3$ . A kör ki van vágva a lemezből, így a területe negatív. Az alábbi táblázatban megadtuk az egyes részek területét és súlypontjának koordinátáit.

i	$A_i[\text{mm}^2]$	$x_{si}[\text{mm}]$	$y_{si}[\text{mm}]$
1	245	35/3	-14/3
2	1610	35/2	23
3	-201	23.5	34.5



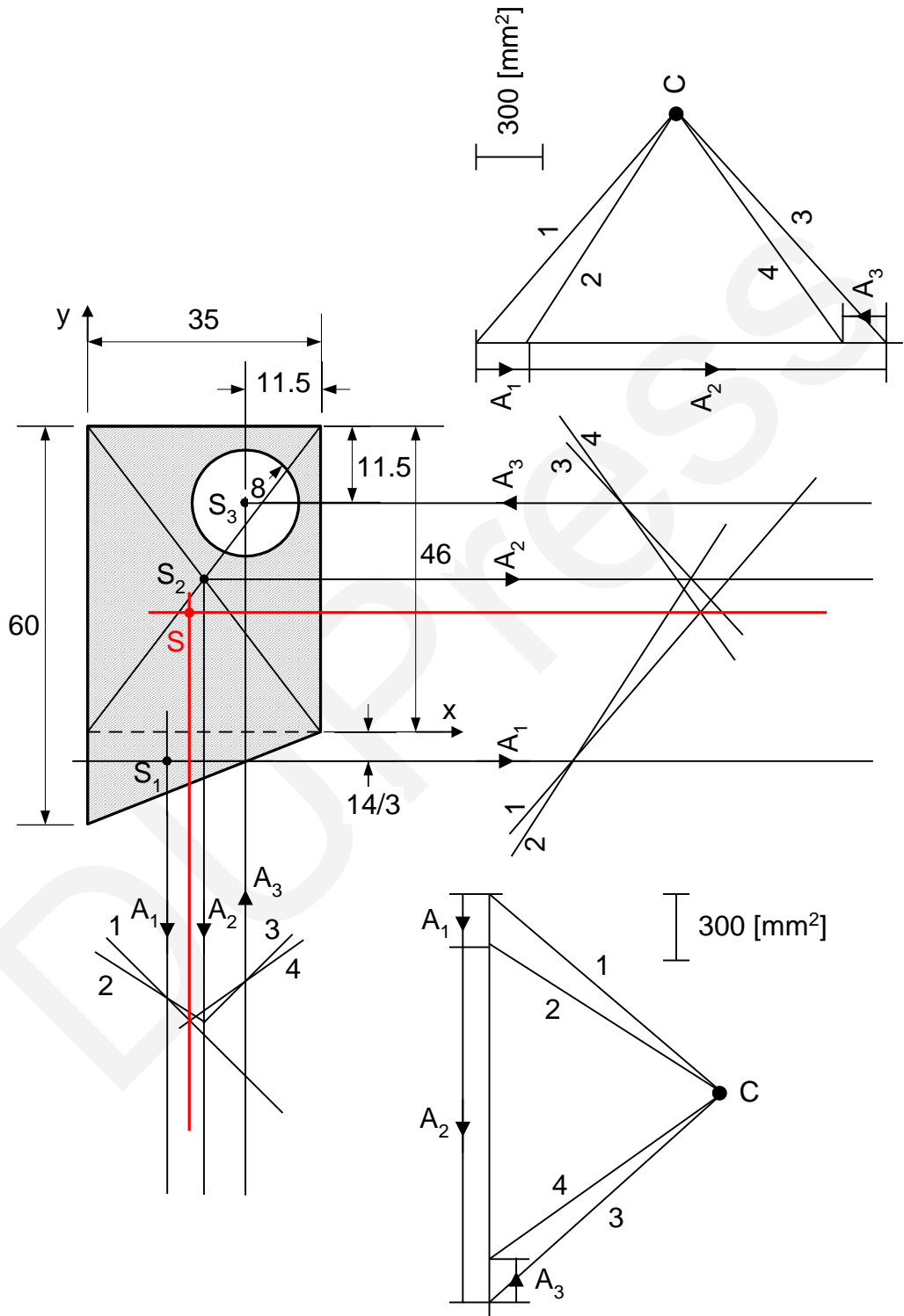
A fenti adatokból kiszámíthatóak a lemez súlypontjának  $x_s$  és  $y_s$  koordinátái:

$$x_s = \frac{\sum_{i=1}^3 x_{si} \cdot A_i}{\sum_{i=1}^3 A_i} = \frac{x_{s1} \cdot A_1 + x_{s2} \cdot A_2 + x_{s3} \cdot A_3}{A_1 + A_2 + A_3} = \frac{\frac{35}{3} \cdot 245 + \frac{35}{2} \cdot 1610 - 23.5 \cdot 201}{245 + 1610 - 201} = 16.77 [mm]$$

$$y_s = \frac{\sum_{i=1}^3 y_{si} \cdot A_i}{\sum_{i=1}^3 A_i} = \frac{\frac{-14}{3} \cdot 245 + 23 \cdot 1610 - 34.5 \cdot 201}{245 + 1610 - 201} = 17.5 [mm]$$

b)

A gravitációs erőrendszer párhuzamos erőrendszer, így alkalmazhatjuk az 5.3 fejezet 31. ábráján látható szerkesztési eljárást. A szerkesztési eljárást egyaránt el kell végezni az  $x$  és  $y$  irányokban, és az erők helyett az egyes részek  $\bar{A}_1, \bar{A}_2, \bar{A}_3$  „terület vektorait” kell használni. A következő ábrán részletesen bemutatjuk a szerkesztést.

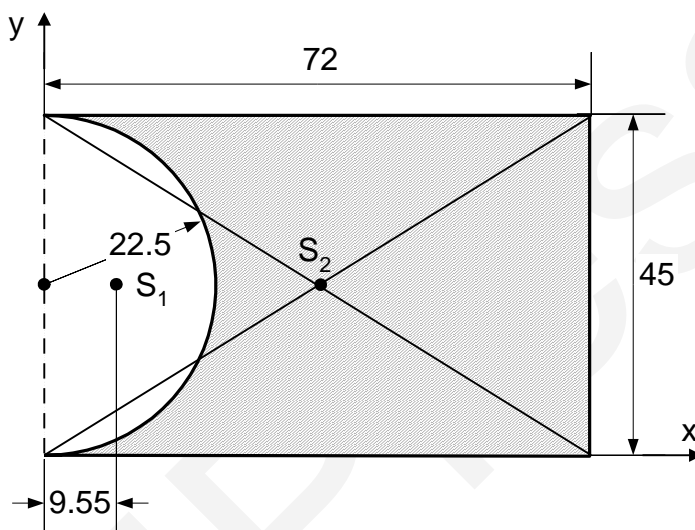




Az alábbi linkre kattintva a szerkesztés lépésről lépésre megtekinthető a Microsoft Office PowerPoint programjával készült animáció formájában:

## 6.1 Animáció

2. feladat:



- Számítsuk ki az ábrán látható homogén síklemez súlypontjának koordinátáit!
- Ellenőrizzük a számítás eredményét szerkesztéssel!

Megoldás:

a)

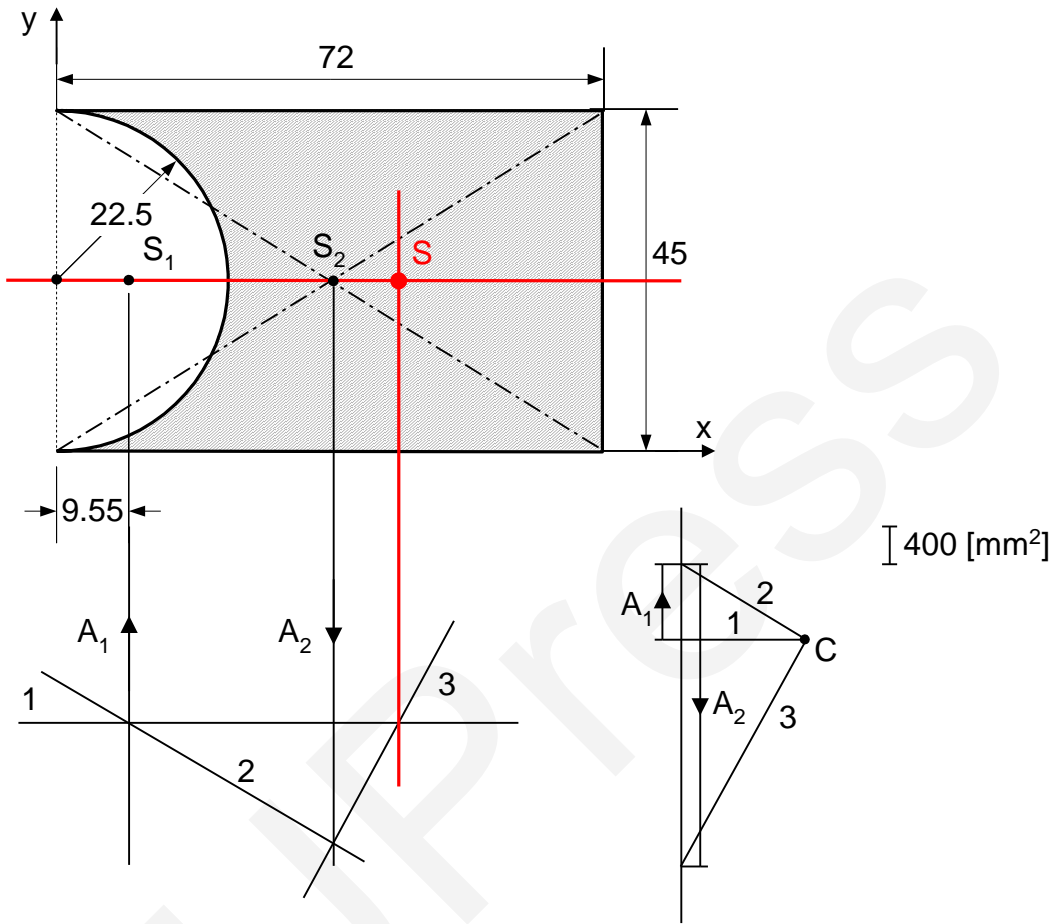
i	$A_i$ [mm <sup>2</sup> ]	$x_{si}$ [mm]	$y_{si}$ [mm]
1	-795.2	9.55	22.5
2	3240	36	22.5

$$x_s = \frac{\sum_{i=1}^2 x_{si} \cdot A_i}{\sum_{i=1}^2 A_i} = \frac{-9.55 \cdot 795.2 + 36 \cdot 3240}{-795.2 + 3240} = 44.6 \text{ [mm]}$$

$$y_s = \frac{\sum_{i=1}^2 y_{si} \cdot A_i}{\sum_{i=1}^2 A_i} = \frac{-22.5 \cdot 795.2 + 22.5 \cdot 3240}{-795.2 + 3240} = 22.5 \text{ [mm]}$$



b)

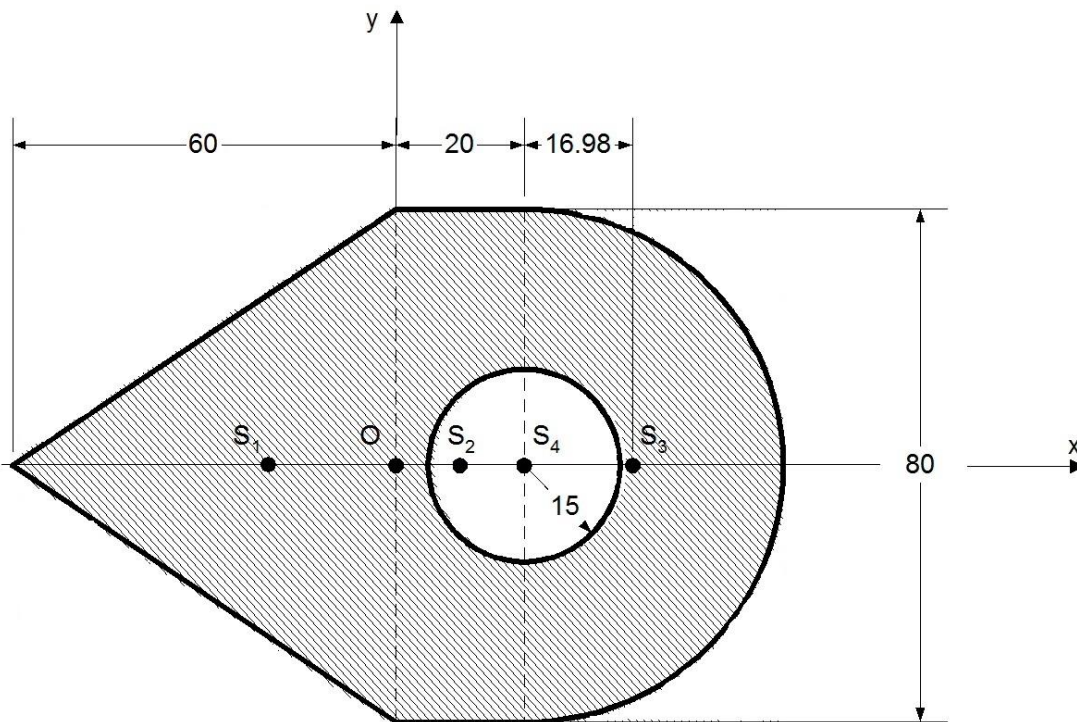


Az alábbi linkre kattintva a szerkesztés lépésről lépésre megtekinthető a Microsoft Office PowerPoint programjával készült animáció formájában:

## 6.2 Animáció



3. feladat:



- a) Számítsuk ki az ábrán látható homogén síklemez súlypontjának koordinátáit!
- b) Ellenőrizzük a számítás eredményét szerkesztéssel!

Megoldás:

a)

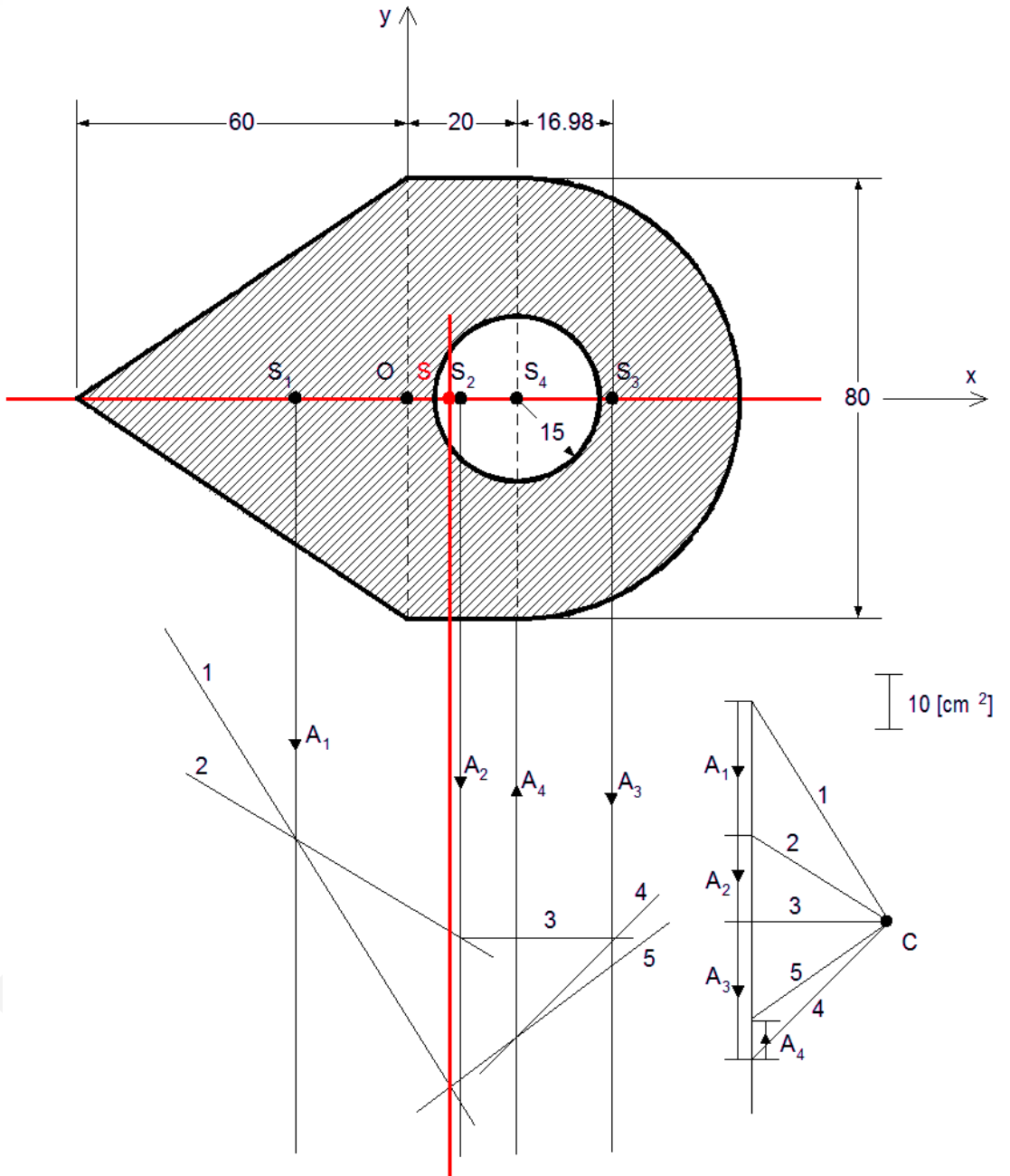
i	$A_i$ [cm <sup>2</sup> ]	$x_{si}$ [cm]	$y_{si}$ [cm]
1	24	-2	0
2	16	1	0
3	25.13	3.698	0
4	-7.069	2	0

$$x_s = \frac{\sum_{i=1}^4 x_{si} \cdot A_i}{\sum_{i=1}^4 A_i} = \frac{24 \cdot (-2) + 16 \cdot 1 + 25.13 \cdot 3.698 - 7.069 \cdot 2}{24 + 16 + 25.13 - 7.069} = 0.8059 \text{ [cm]}$$

$$y_s = 0 \text{ [cm]}$$



b)





## 7. Merev test egyensúlya

### 7.1 Merev test egyensúlyi állapota

Egyensúlyi állapot (definíció): Egy merev test egyensúlyban van, ha a rá ható erőrendszer eredő forgatónyomatéka a tér bármely A pontjára vonatkozóan zérus.

$$\vec{M}_A = \vec{0}, \text{ bármely A pontra}$$

#### 7.1 tétel:

Egy merev test egyensúlyban van, ha a rá ható erőrendszer eredő ereje és eredő forgatónyomatéka a tér egy adott O pontjára vonatkozóan egyenlő nullával.

$$\vec{F} = \vec{0} \text{ és } \vec{M}_O = \vec{0}$$

#### Bizonyítás:

A 3.6 egyenlet felhasználásával:

$$\vec{M}_A = \vec{M}_O + \vec{r}_{AO} \times \vec{F} = \vec{0}$$

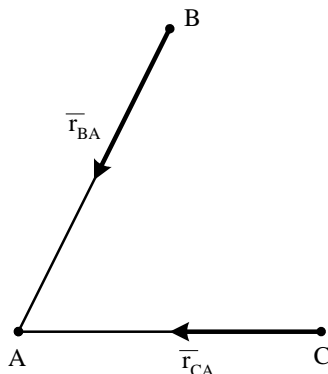
Tehát az erőrendszer eredő forgatónyomatéka a tér bármely A pontjára vonatkozóan zérus, így a test egyensúlyban van.

#### 7.2 tétel:

Ha a merev testre ható erőrendszer eredő forgatónyomatéka a tér három különböző, nem egy egyenesbe eső pontjára (A, B, C) vonatkozóan zérus, akkor a test egyensúlyban van.

#### Bizonyítás:

Tekintsük a 39. ábrát.



39. ábra.

A tétel feltételei:

- 1) A, B és C különböző pontok  $\rightarrow \vec{r}_{BA} \neq \vec{0}, \vec{r}_{CA} \neq \vec{0}$
- 2) A, B és C nem esik egy egyenesre  $\rightarrow \vec{r}_{BA} \nparallel \vec{r}_{CA}$
- 3)  $\vec{M}_A = \vec{0}, \vec{M}_B = \vec{0}, \vec{M}_C = \vec{0}$

A 3.6 egyenlet felhasználásával:

$$\vec{0} = \vec{0} \\ \vec{M}_B = \vec{M}_A + \vec{r}_{BA} \times \vec{F} \rightarrow \vec{r}_{BA} \times \vec{F} = \vec{0}$$

1. eset:

Ha  $\vec{r}_{BA} \nparallel \vec{F}$  akkor  $\vec{r}_{BA} \times \vec{F} = \vec{0}$  és  $\vec{r}_{BA} \neq \vec{0}$ , amelyből  $\vec{F} = \vec{0}$  adódik.

2. eset:

Ha  $\vec{r}_{BA} \parallel \vec{F}$  akkor  $\vec{r}_{CA} \nparallel \vec{F}$  (Ez igaz, mivel  $\vec{r}_{CA} \nparallel \vec{r}_{BA}$ .)

$$\vec{0} = \vec{0} \\ \vec{M}_C = \vec{M}_A + \vec{r}_{CA} \times \vec{F}, \text{ ebből adódóan } \vec{r}_{CA} \times \vec{F} = \vec{0}$$

Mivel  $\vec{r}_{CA} \times \vec{F} = \vec{0}$  és  $\vec{r}_{CA} \nparallel \vec{F}$ , adódik, hogy  $\vec{F} = \vec{0}$ .

Következtetésképp a tételből adódik, hogy az  $\vec{F}$  eredő erő zérus.

Alkalmazva a 7.1 tételt, a  $\vec{F} = \vec{0}$  és  $\vec{M}_A = \vec{0}$  egyenletekből adódik, hogy a merev test egyensúlyban van.



## 7.2 Egyensúlyi egyenletek merev testre

A 7.1 tétel alapján a merev test egyensúlyban van, ha:

$$\vec{F} = \vec{0}, \quad \vec{M}_O = \vec{0} \text{ a tér egy adott } O \text{ pontjára vonatkozóan.}$$

Térbeli erőrendszer esetén az  $\vec{F} = \vec{0}$  egyenletből az alábbi három skaláregyenletet kapjuk:

$$\sum_i F_{ix} = 0, \quad \sum_i F_{iy} = 0, \quad \sum_i F_{iz} = 0$$

Az  $\vec{M}_O = \vec{0}$  egyenletből adódik, hogy:

$$\sum_i M_{Oix} = 0, \quad \sum_i M_{Oiy} = 0, \quad \sum_i M_{Oiz} = 0$$

Következtetésképp, térbeli erőrendszer esetén hat egymástól független egyensúlyi egyenlet van:

$$\sum_i F_{ix} = 0, \quad \sum_i F_{iy} = 0, \quad \sum_i F_{iz} = 0, \quad \sum_i M_{Oix} = 0, \quad \sum_i M_{Oiy} = 0, \quad \sum_i M_{Oiz} = 0$$

Síkbeli erőrendszer esetén a fenti hat egyenletből három marad:

$$\sum_i F_{ix} = 0, \quad \sum_i F_{iy} = 0, \quad \sum_i M_i = \sum_i M_{iz} = 0$$

A 7.2 tétel alapján a merev test egyensúlyban van, ha:

$$\vec{M}_A = \vec{0}, \quad \vec{M}_B = \vec{0}, \quad \vec{M}_C = \vec{0}$$

Térbeli erőrendszer esetén a fenti vektor egyenletekből a következő kilenc skaláregyenletet kapjuk:

$$\sum_i M_{Aix} = 0, \quad \sum_i M_{Aiy} = 0, \quad \sum_i M_{Aiz} = 0$$

$$\sum_i M_{Bix} = 0, \quad \sum_i M_{Biy} = 0, \quad \sum_i M_{Biz} = 0$$

$$\sum_i M_{Cix} = 0, \quad \sum_i M_{Ciy} = 0, \quad \sum_i M_{Ciz} = 0$$

Belátható, hogy a fenti kilenc egyenletből csak hat független.

Síkbeli erőrendszer esetén a fenti kilenc egyenletből a következő három marad:

$$\sum_i M_{Ai} = \sum_i M_{Aiz} = 0, \quad \sum_i M_{Bi} = \sum_i M_{Biz} = 0, \quad \sum_i M_{Ci} = \sum_i M_{Ciz} = 0$$

Összefoglalva, síkbeli és térbeli erőrendszer esetén három illetve hat független egyensúly egyenlet van.

Egy mechanikai rendszer **statikailag határozott**, ha az egyensúlyi egyenletekből minden egyes ismeretlen mennyiség meghatározható.

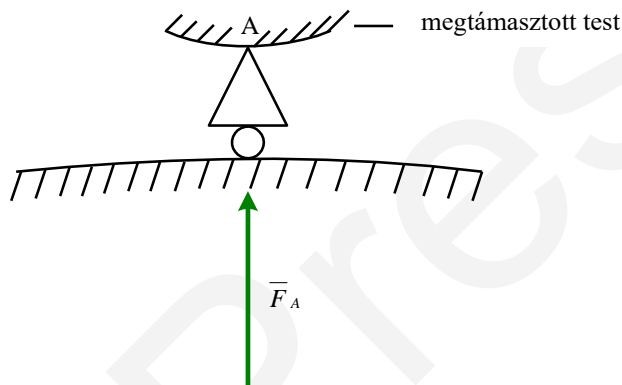


Így skíbéli és térbeli erőrendszer esetében három illetve hat ismeretlent tudunk meghatározni. Ha az ismeretlenek száma több, akkor a rendszer **statikailag határozatlan**.

### 7.3 Kényszerek: támaszok és csatlakozások

A 2.2 fejezetben definiáltuk a kényszer fogalmát és példákat bemutattuk a nyújthatatlan kötelet, merev rúdat és felületet. A következőkben további kényszereket ismertetünk, melyeket a mérnöki gyakorlatban **támaszoknak** vagy **csatlakozásoknak** nevezünk.

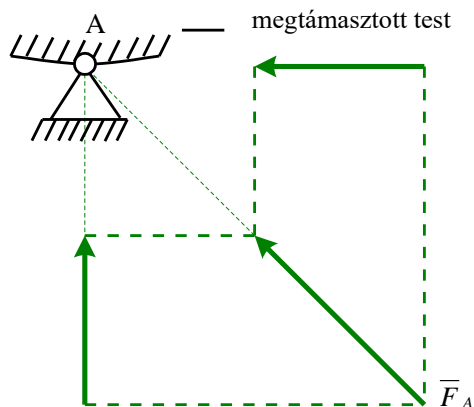
*Görgős támasz:*



40. ábra.

A görgős támasz esetében egy ideális görgő lehetővé teszi a megtámasztott test felülettel párhuzamos irányú elmozdulását, valamint a rögzítési pont (A) körüli szabad elfördülést. Ellenben megakadályozza a test felületre merőleges elmozdulását. A fentiekből adódóan a görgő 1 db skaláris ismeretlent jelent, nevezetesen a felületre merőleges támaszerő ( $F_A$ ) nagyságát.

*Csuklós támasz:*

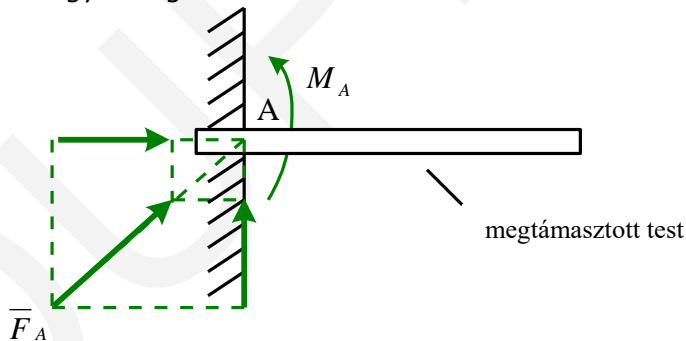


41. ábra.

A csuklós támasz a megtámasztott testet szabadon engedi elfordulni az A csatlakozási pont körül, de megakadályozza a test felülettel párhuzamos és arra merőleges elmozdulását. Így a csuklós támasz két ismeretlent jelent az  $F_A$  támaszerő felületre merőleges és azzal párhuzamos komponensei.

*Befogás:*

Az alábbi ábra egy befogott merev rudat szemléltet:



42. ábra.

A befogásnál a rúddal párhuzamos és arra merőleges erő, valamint nyomaték is ébredhet. A nyomatékot, amit a befogás (támasz) fejt ki a testre, reakció nyomatéknak nevezzük. Így befogásnál három ismeretlennel kell számolnunk, nevezetesen a kényszererő rúd irányú és arra merőleges komponensével, valamint a reakciónyomatékkal.



## 7.4 Kényszererők kiszámítása

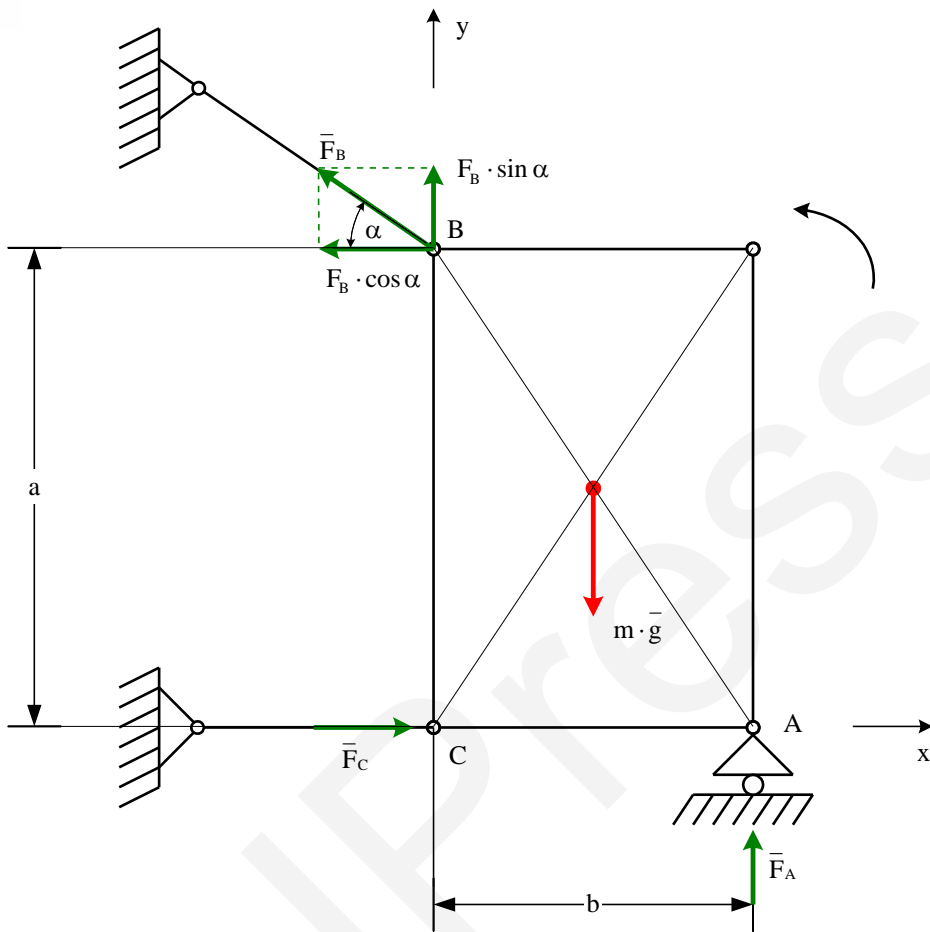
Egy mechanikai szerkezetre ható ismeretlen reakció erők és nyomatékok meghatározásánál kövessük a következő lépéseket:

- 1) Vizsgáljuk meg a kényszereket (támaszokat)
- 2) Döntsük el, hogy a szerkezet statikailag határozott-e
- 3) Írjuk fel az egyensúlyi egyenleteket (Megjegyzés: Az egyensúlyi egyenleteket célszerű az ismeretlen erők hatásvonalainak metszéspontjára felírni.)
- 4) Oldjuk meg az egyenleteket
- 5) Ellenőrizzük az eredményt

## 7.5 Feladatok

### 1. feladat:

Számítsuk ki az alábbi ábrán látható téglalap alakú merev lemezre ható  $\bar{F}_A$ ,  $\bar{F}_B$  és  $\bar{F}_C$  kényszererők nagyságát. A lemez két ideális rúd által rögzített, melyek a B és C pontokhoz kapcsolódnak egy-egy ideális csuklóval. A lemez A pontja egy görgős támaszon nyugszik.



Adatok:  $m \cdot g = 500[N]$ ,  $a = 3 [m]$ ,  $b = 2 [m]$ ,  $\alpha = 30^\circ$ .

Megoldás:

- 1) A két rúd és a görgős támasz együtt három ismeretlen jelent.
- 2) A szerkezet statikailag határozott.
- 3)

$$\sum_i \vec{F}_i = \vec{F}_A + \vec{F}_B + \vec{F}_C + m \cdot \vec{g} = \vec{0}$$
$$\begin{pmatrix} 0 \\ F_A \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -F_B \cdot \cos \alpha \\ F_B \cdot \sin \alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F_C \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -m \cdot g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$



$$\sum_i M_A = F_B \cdot \cos \alpha \cdot a - F_B \cdot \sin \alpha \cdot b + m \cdot g \cdot \frac{b}{2} = 0$$

$$\text{I. } -F_B \cdot \cos \alpha + F_C = 0$$

$$\text{II. } F_A + F_B \cdot \sin \alpha - m \cdot g = 0$$

$$\text{III. } F_B \cdot \cos \alpha \cdot a - F_B \cdot \sin \alpha \cdot b + m \cdot g \cdot \frac{b}{2} = 0$$

4)

$$\text{III. } F_B \cdot (\cos \alpha \cdot a - \sin \alpha \cdot b) = -\frac{m \cdot g \cdot b}{2}$$

$$F_B = -\frac{m \cdot g \cdot b}{2 \cdot (\cos \alpha \cdot a - \sin \alpha \cdot b)} = -312.9 \text{ [N]}$$

$$\text{II. } F_A = -F_B \cdot \sin \alpha + m \cdot g = 656.5 \text{ [N]}$$

$$\text{I. } F_C = F_B \cdot \cos \alpha = -271 \text{ [N]}$$

Így az  $\bar{F}_A$ ,  $\bar{F}_B$  és  $\bar{F}_C$  reakcióerők:

$$\bar{F}_A = \begin{pmatrix} 0 \\ 656.5 \end{pmatrix} \text{ [N]}, \quad \bar{F}_B = \begin{pmatrix} -271 \\ 156.4 \end{pmatrix} \text{ [N]}, \quad \bar{F}_C = \begin{pmatrix} -271 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ [N]}$$

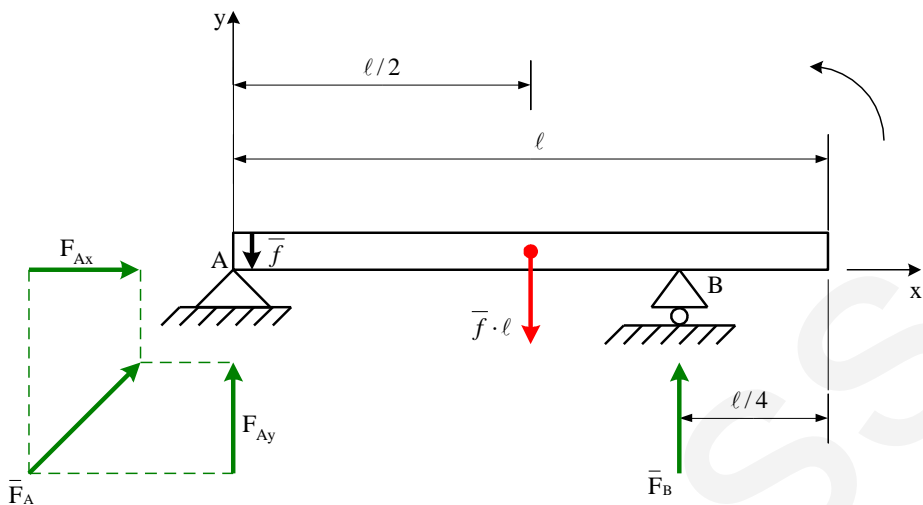
Az  $F_B$  és  $F_C$  esetében kapott negatív érték az  $\bar{F}_B$  és  $\bar{F}_C$  erők feltételezett ellentétes értelmére utal.

5) Ellenőrzés:

$$\sum_i M_B = F_A \cdot b + F_C \cdot a - m \cdot g \cdot \frac{b}{2} = 656.5 \cdot 2 + (-271) \cdot 3 - 500 \cdot 1 = 0$$

2. feladat:

Számítsuk ki az ábrán látható kéttámaszú tartóra ható  $\bar{F}_A$  és  $\bar{F}_B$  kényszererőket.



Adatok:  $f = 300 \frac{[N]}{[m]}$ ,  $l = 4 [m]$ .

Megoldás:

- 1) A görgős és csuklós támasz együtt három ismeretlent jelent.
- 2) A szerkezet statikailag határozott.
- 3)

$$\sum_i \bar{F}_i = \begin{pmatrix} F_{Ax} \\ F_{Ay} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ F_B \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -f \cdot l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\sum_i M_{Ai} = -f \cdot l \cdot \frac{l}{2} + F_B \cdot \frac{3l}{4} = 0$$

I.  $F_{Ax} = 0$

II.  $F_{Ay} + F_B - f \cdot l = 0$

III.  $-f \cdot \frac{l}{2} + \frac{3}{4} F_B = 0$

4)

III.  $-f \cdot \frac{l}{2} + \frac{3}{4} F_B = 0 \rightarrow F_B = \frac{2f \cdot l}{3} = 800 [N](\uparrow)$

II.  $F_{Ay} = -F_B + f \cdot l = 400 [N](\uparrow)$

$$\bar{F}_A = \begin{pmatrix} 0 \\ 400 \end{pmatrix} [N], \quad \bar{F}_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 800 \end{pmatrix} [N]$$

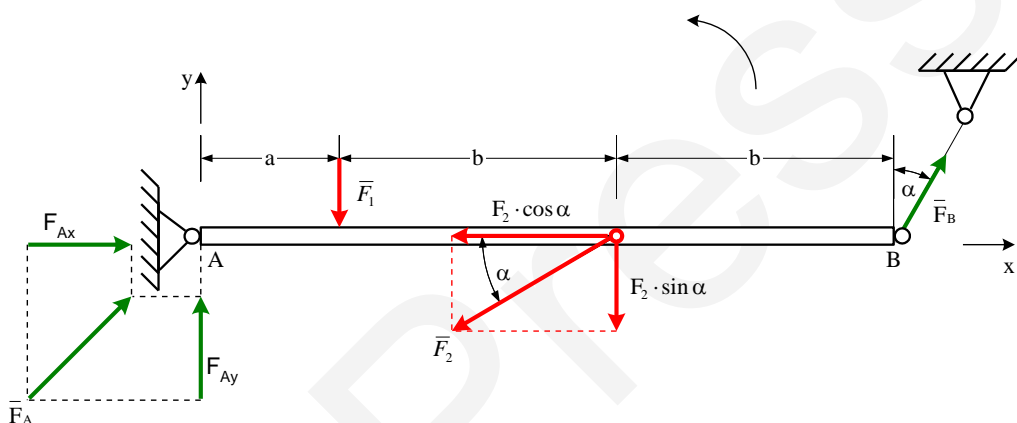


5) Ellenőrzés:

$$\sum_i M_B^i = -F_{Ay} \cdot \frac{3l}{4} + f \cdot \frac{l}{4} = -400 \cdot \frac{3 \cdot 4}{4} + 300 \cdot \frac{4}{4} = 0$$

3. feladat:

Számítsuk ki az ábrán látható vízszintes, súlytalan merev rúdra ható  $\bar{F}_A$  és  $\bar{F}_B$  reakcióerőket. A rúd az A pontban ideális csúklóhoz, a B pontban pedig egy ideális kötélhez kapcsolódik.



Adatok:  $a=1[m]$ ,  $b=2[m]$ ,  $F_1 = 5[kN]$ ,  $F_2 = 10[kN]$ ,  $\alpha = 30^\circ$ .

Megoldás:

- 1) A csúklós támasz és a kötél együtt három ismeretlent jelent.
- 2) A szerkezet statikailag határozott.
- 3)

$$\sum_i \bar{F}_i = \begin{pmatrix} F_{Ax} \\ F_{Ay} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -F_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -F_2 \cdot \cos \alpha \\ -F_2 \cdot \sin \alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F_B \cdot \sin \alpha \\ F_B \cdot \cos \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\sum_i M_A^i = -F_1 \cdot a - F_2 \cdot \sin \alpha \cdot (a + b) + F_B \cdot \cos \alpha \cdot (a + 2b) = 0$$

$$\text{I. } F_{Ax} - F_2 \cdot \cos \alpha + F_B \cdot \sin \alpha = 0$$

$$\text{II. } F_{Ay} - F_1 - F_2 \cdot \sin \alpha + F_B \cdot \cos \alpha = 0$$

$$\text{III. } -F_1 \cdot a - F_2 \cdot \sin \alpha (a + b) + F_B \cdot \cos \alpha (a + 2b) = 0$$



4)

$$\text{III. } F_B \cdot \cos \alpha \cdot (a + 2b) = F_1 \cdot a + F_2 \cdot \sin \alpha \cdot (a + b)$$

$$F_B = \frac{F_1 \cdot a + F_2 \cdot \sin \alpha (a + b)}{\cos \alpha \cdot (a + 2b)} = 4.619 \text{ [kN]}$$

$$\text{II. } F_{Ay} = F_1 + F_2 \cdot \sin \alpha - F_B \cdot \cos \alpha = 6 \text{ [kN]}$$

$$\text{I. } F_{Ax} = F_2 \cdot \cos \alpha - F_B \cdot \sin \alpha = 6.351 \text{ [kN]}$$

$$\bar{F}_A = \begin{pmatrix} 6.351 \\ 6 \end{pmatrix} \text{ [kN]}, \quad \bar{F}_B = \begin{pmatrix} 2.310 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ [kN]}$$

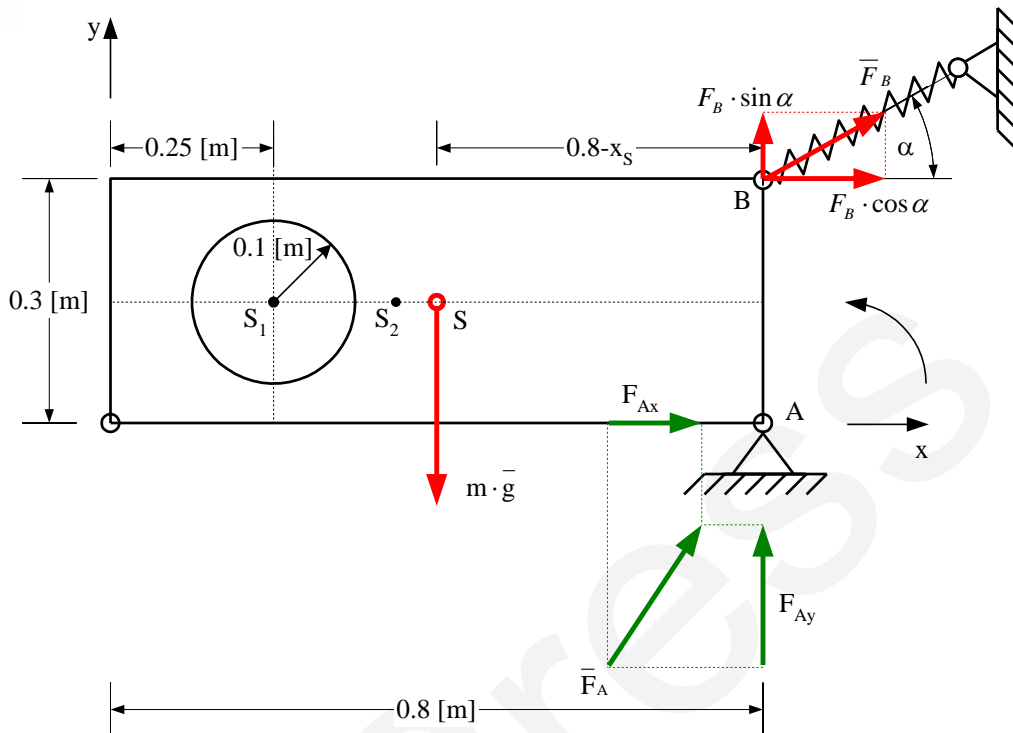
5) Ellenőrzés:

$$\begin{aligned} \sum_i M_B^i &= -F_{Ay} \cdot (a + 2b) + F_1 \cdot 2b + F_2 \cdot \sin \alpha \cdot b \\ &= -6 \cdot (1 + 4) + 5 \cdot 4 + 10 \cdot 2 \cdot \sin 30^\circ = 0 \end{aligned}$$

4. feladat:

Az ábrán látható merev lemez az A pontban egy csúklóhoz van rögzítve, a B pontban pedig egy lineáris rugóhoz kapcsolódik.

- Számítsuk ki a lemez súlypontjának  $x_s$  és  $y_s$  koordinátáit.
- Számítsuk ki az  $\bar{F}_A$  kényszer-, és  $\bar{F}_B$  rugóerőket.
- Számítsuk ki a rugó  $\Delta r$  megnyúlását.



Adatok:  $\alpha = 30^\circ$ ,  $m \cdot g = 50 \text{ [N]}$ ,  $D = 100 \left[ \frac{\text{N}}{\text{m}} \right]$ .

Megoldás:

a)

i	$A_i [\text{m}^2]$	$x_{si} [\text{m}]$	$y_{si} [\text{m}]$
1	-0.0314	0.25	0.15
2	0.24	0.4	0.15

$$x_s = \frac{\sum_i A_i x_{si}}{\sum_i A_i} = \frac{-0.0314 \cdot 0.25 + 0.24 \cdot 0.4}{-0.0314 + 0.24} = 0.4226 \text{ [m]}$$

$$y_s = \frac{\sum_i A_i y_{si}}{\sum_i A_i} = \frac{-0.0314 \cdot 0.15 + 0.24 \cdot 0.15}{-0.0314 + 0.24} = 0.15 \text{ [m]}$$



b)

1) A csuklós támasz és a rugó együtt három ismeretlent jelent.

2) A szerkezet statikailag határozott.

3)

$$\sum_i \bar{F}_i = m \cdot \bar{g} + \bar{F}_A + \bar{F}_B = \begin{pmatrix} 0 \\ -m \cdot g \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F_{Ax} \\ F_{Ay} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F_B \cdot \cos \alpha \\ F_B \cdot \sin \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\sum_i M_A = (0.8 - x_S) \cdot m \cdot g - F_B \cdot \cos \alpha \cdot 0.3 = 0$$

4)

$$\text{I. } F_{Ax} + F_B \cdot \cos 30^\circ = 0 \rightarrow F_{Ax} = -F_B \cdot \cos 30^\circ = -62.9 \text{ [N]}$$

$$\text{II. } -m \cdot g + F_{Ay} + F_B \cdot \sin 30^\circ = 0 \rightarrow F_{Ay} = m \cdot g - F_B \cdot \sin 30^\circ =$$

$$13.68 \text{ [N]}$$

$$\text{III. } 0.3774 \cdot 50 - F_B \cdot \cos 30^\circ \cdot 0.3 = 0 \rightarrow F_B = 72.63 \text{ [N]}$$

$$\bar{F}_A = \begin{pmatrix} -62.90 \\ 13.68 \end{pmatrix} \text{ [N]}, \quad \bar{F}_B = \begin{pmatrix} 62.90 \\ 36.31 \end{pmatrix} \text{ [N]}$$

5) Ellenőrzés:

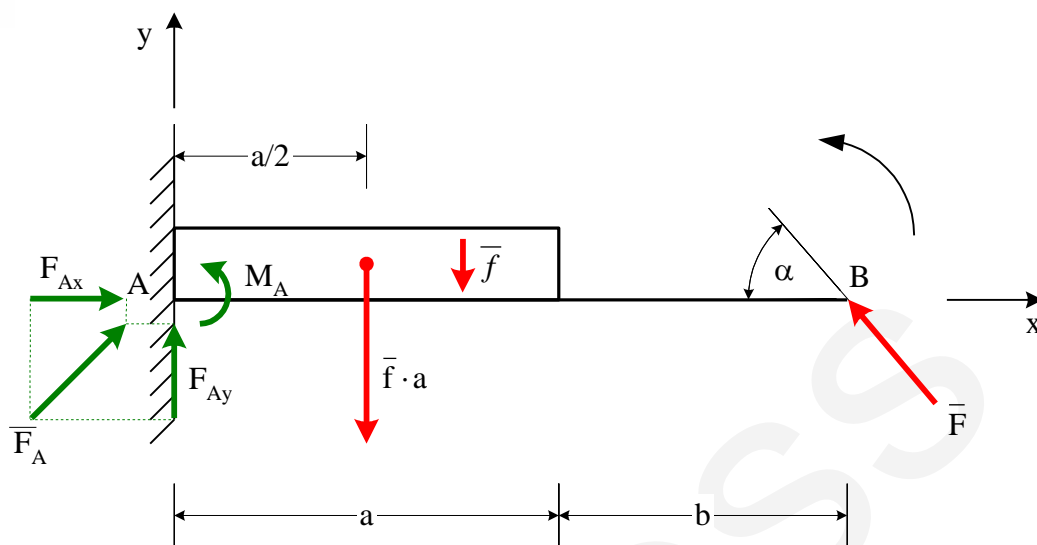
$$\sum_i M_B = F_{Ax} \cdot 0.3 + m \cdot g \cdot (0.8 - x_S) = 0$$

c)

$$F_B = D \cdot \Delta r \rightarrow \Delta r = \frac{F_B}{D} = 0.726 \text{ [m]}$$

5. feladat:

Számítsuk ki az ábrán látható befogott tartó A pontjában ébredő  $\bar{F}_A$  reakcióerőt és  $M_A$  reakció nyomatékot.



Adatok:  $F=600$  [N],  $f=200$  [N/m],  $\alpha = 50^\circ$ ,  $a=4$  [m],  $b=3$  [m].

Megoldás:

- 1) A befogás három ismeretlent jelent.
- 2) A szerkezet statikailag határozott.
- 3)

$$\sum_i \bar{F}_i = \bar{F} + \bar{f} \cdot a + \bar{F}_A = \begin{pmatrix} -F \cdot \cos \alpha \\ F \cdot \sin \alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -f \cdot a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F_{Ax} \\ F_{Ay} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{I. } -F \cdot \cos \alpha + F_{Ax} = 0$$

$$\text{II. } F \cdot \sin \alpha - f \cdot a + F_{Ay} = 0$$

$$\text{III. } \sum_i M_i = M_A - f \cdot a \cdot \frac{a}{2} + F \cdot \sin \alpha \cdot (a + b) = 0$$

4)

$$\text{I. } F_{Ax} = F \cdot \cos \alpha = 385.67 \text{ [N]}$$

$$\text{II. } F_{Ay} = f \cdot a - F \cdot \sin \alpha = 340.37 \text{ [N]}$$

$$\text{III. } M_A = f \cdot \frac{a^2}{2} - F \cdot \sin \alpha \cdot (a + b) = -1617.38 \text{ [Nm]}$$

$$\bar{F}_A = \begin{pmatrix} 385.67 \\ 340.37 \end{pmatrix} \text{ [N]}$$

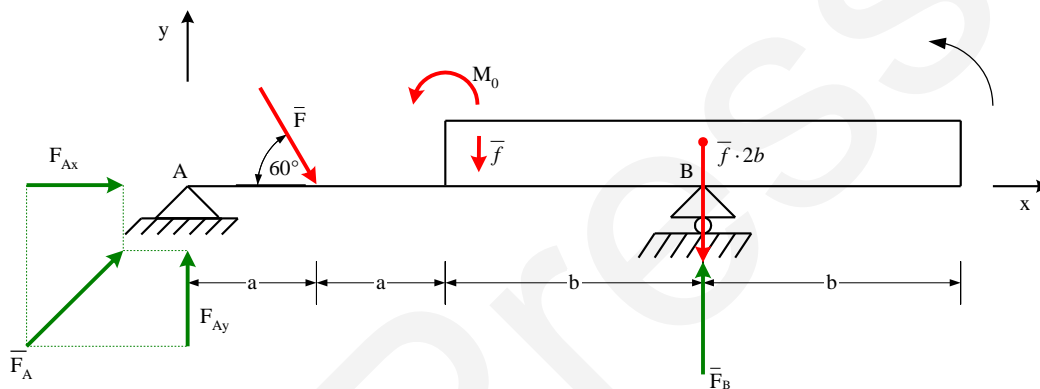
5) Ellenőrzés:



$$\begin{aligned}\sum_i M_B &= -F_{Ay} \cdot (a + b) + f \cdot a \cdot \left(b + \frac{a}{2}\right) + M_A = \\ &= -340.37 \cdot (4 + 3) + 200 \cdot 4 \cdot \left(3 + \frac{4}{2}\right) + (-1617.38) \\ &= 0\end{aligned}$$

6. feladat:

Számítsuk ki az ábrán látható kéttámaszú tartóra ható  $\bar{F}_A$  és  $\bar{F}_B$  kényszererőket.



Adatok:  $a=1$  [m],  $b=2$  [m],  $F=40$  [kN],  $f=8$  [kN/m],  $M_0=5$  [kNm]

Megoldás:

- 1) A csuklós és görgős támasz együtt három ismeretlent jelent.
- 2) A szerkezet statikailag határozott.
- 3)

$$\begin{aligned}\sum_i \bar{F}_i &= \bar{F} + F_A + \bar{f} \cdot 2b + F_B = \begin{pmatrix} F \cdot \cos 60 \\ -F \cdot \sin 60 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F_{Ax} \\ F_{Ay} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -f \cdot 2b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ F_B \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

I.  $F \cdot \cos 60^\circ + F_{Ax} = 0$

II.  $-F \cdot \sin 60^\circ + F_{Ay} - f \cdot 2b + F_B = 0$

III.  $\sum_i M_A = -F \cdot \sin 60^\circ \cdot a + F_B \cdot (2a + b) - f \cdot 2b \cdot (2a + b) + M_0 = 0$



4)

$$\text{III. } F_B = \frac{F \cdot \sin 60^\circ \cdot a + f \cdot 2b \cdot (2a+b) - M_O}{2a+b} = 39.41 \text{ [kN]}$$

$$\text{II. } F_{Ay} = F \cdot \sin 60^\circ + f \cdot 2b - F_B = 27.23 \text{ [kN]}$$

$$\text{I. } F_{Ax} = -F \cdot \cos 60^\circ = -20 \text{ [kN]}$$

$$\vec{F}_A = \begin{pmatrix} -20 \\ 27.23 \end{pmatrix} \text{ [kN]}, \quad \vec{F}_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 39.41 \end{pmatrix} \text{ [kN]}$$

5) Ellenőrzés:

$$\begin{aligned} \sum_i M_B &= -F_{Ay} \cdot (2a+b) + F \cdot \sin \alpha \cdot (a+b) + M_O + f \cdot b \cdot \frac{b}{2} - f \cdot b \cdot \frac{b}{2} = \\ &= -27.23 \cdot (2+2) + 40 \cdot \sin 60^\circ \cdot (1+2) + 5 = 0 \end{aligned}$$

## 8. Kényszererők szerkesztése egyensúlyban

A következőkben a kényszererők szerkesztésének módszerét mutatjuk be. A módszert a következő két esetben tárgyaljuk:

- Kényszererők szerkesztése szétszórt erőrendszer esetén. (Legalább két erő hatásvonalja metszi egymást.)
- Kényszererők szerkesztése párhuzamos erőrendszer esetén. (Az összes erő hatásvonalja párhuzamos egymással.)

### 8.1 Metsző erőrendszer

Először azzal az esettel foglalkozunk, amikor csak három erő hat az adott mechanikai rendszerre (lásd 43. ábra és 8.1 tétel). Ha több mint három erő van, akkor a szerkesztést visszavezetjük a három erő esetén alkalmazottra.

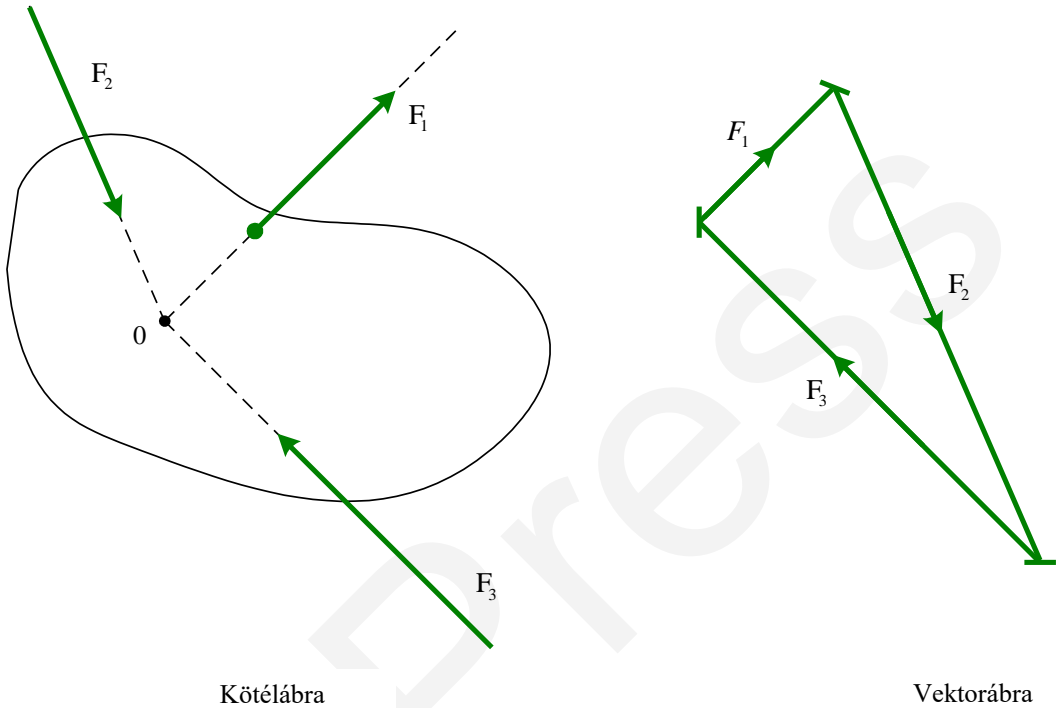
8.1 tétel:

Ha az erőrendszer három erőből áll, akkor a szerkezet akkor, és csak akkor van egyensúlyban, ha:

- 1) A három erő zárt vektorháromszöget alkot.



2) Mindhárom hatásvonalja ugyanabban a pontban (O) metsződik.



43. ábra.

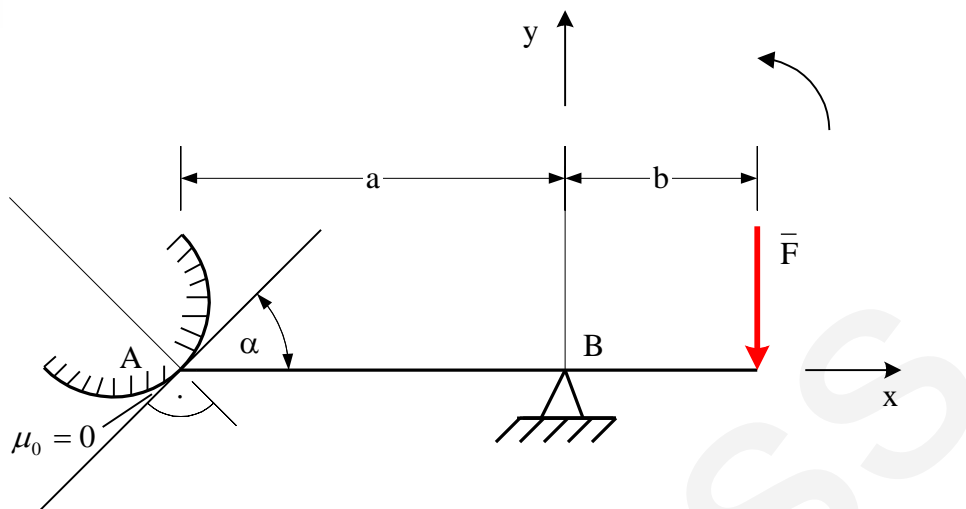
Az 1) és 2) feltételek a  $\sum_i \vec{F}_i = \vec{0}$  és  $\sum_i \vec{M}_i = \vec{0}$  egyenletek következményei.

### Feladatok

1. feladat:

Az alábbi ábrán egy egyenes vonalú tartó látható, amelynek egyik vége az A pontban egy kör keresztmetszetű sima felületen támaszkodik, B pontja pedig egy ideális csúklós támaszon nyugszik. A tartó egyensúlyban van.

Számítsuk ki és szerkesszük meg az ismeretlen  $\vec{F}_A$  és  $\vec{F}_B$  kényszererőket!



Adatok:  $F=100$  [N],  $a=2$  [m],  $b=1$  [m],  $\alpha=45^\circ$

Megoldás:

Számítás:

$$\sum_i \vec{F}_i = \vec{F}_A + \vec{F}_B + \vec{F} = \begin{pmatrix} F_A \cdot \cos \alpha \\ -F_A \cdot \sin \alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -F_{Bx} \\ F_{By} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

I.  $F_A \cdot \cos \alpha - F_{Bx} = 0 \rightarrow F_{Bx} = F_A \cdot \cos \alpha = 50$  [N]

II.  $-F_A \cdot \sin \alpha + F_{By} - F = 0 \rightarrow F_{By} = F + F_A \cdot \sin \alpha = 150$  [N]

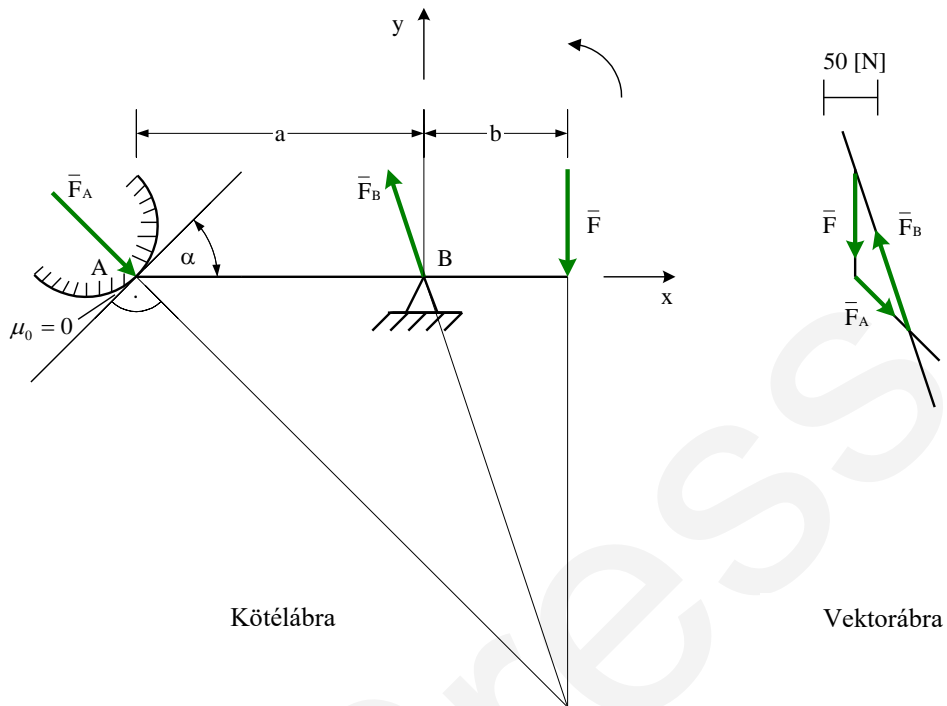
III.  $\sum_i M_i = F_A \cdot \sin \alpha \cdot a - F \cdot b = 0 \rightarrow F_A = \frac{F \cdot b}{\sin \alpha \cdot a} = 70.70$  [N]

Ellenőrzés:

$$\sum_i M_i = F_{By} \cdot a - F \cdot (a + b) = 150 \cdot 2 - 100 \cdot (2 + 1) = 0$$

Szerkesztés:

A szerkesztés menetét mutató vektor- és kötélábrát az alábbi ábra szemlélteti:



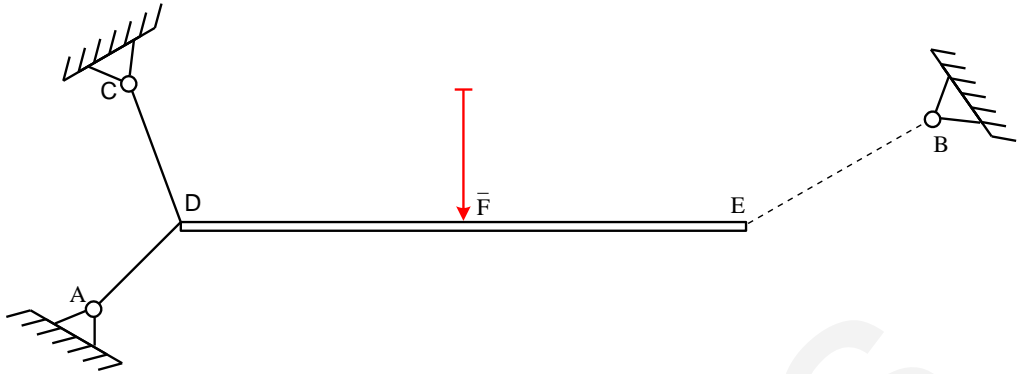
Az alábbi linkre kattintva a szerkesztés lépésről lépésre megtekinthető a Microsoft Office PowerPoint programjával készült animáció formájában:

## 8.1 Animáció

### 2. feladat:

Az ábrán látható vízszintes tartó az E pontban egy ideális kötélnél, míg a D pontban két ideális rúdhoz kapcsolódik. A rudak másik vége az A és C pontokban csuklóhoz kapcsolódik. A tartót a felezőpontjában egy függőleges irányú  $\vec{F}$  erő terheli.

Szerkesszük meg az ismeretlen  $\vec{F}_A$ ,  $\vec{F}_C$  és  $\vec{F}_E$  kényszererőket.

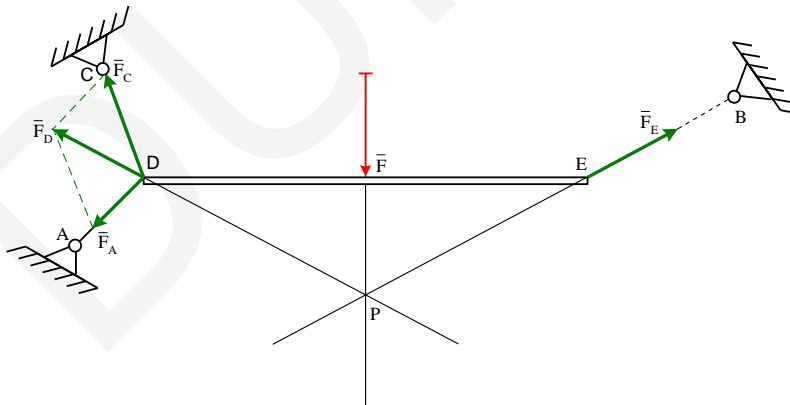


Megoldás:

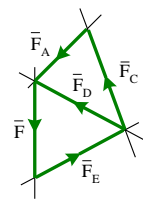
A szerkesztési eljárás visszavezethető az 1. feladatban alkalmazottra.

A szerkesztés lépései a következők (Az  $\vec{F}_A$  és  $\vec{F}_C$  eredőjét jelölje  $\vec{F}_D$ ):

- 1) Szerkesszük meg az  $\vec{F}_D$  és  $\vec{F}_E$  kényszererőket az 1. feladatban alkalmazott módszerrel.
- 2) Szerkesszük meg az  $\vec{F}_A$  és  $\vec{F}_C$  reakcióerőket.
- 3) Olvassuk le az  $\vec{F}_A$ ,  $\vec{F}_C$  és  $\vec{F}_E$  kényszererők nagyságát a vektorábráról.



Kötélábra



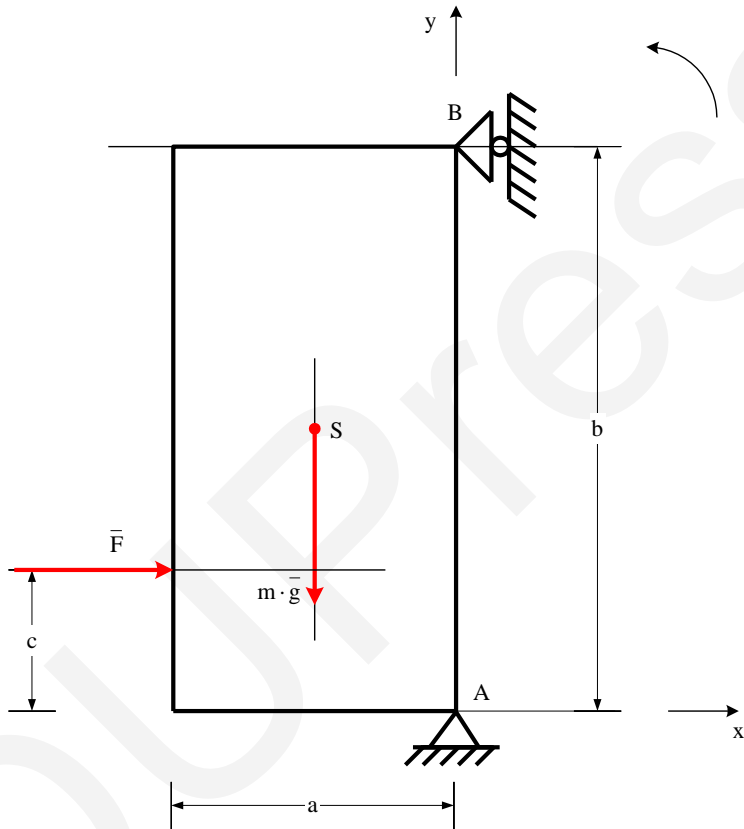
Vektorábra



3. feladat:

Az alábbi ábra egy merev lemezt szemléltet, amelyet egy görgős és csuklós támasz tart egyensúlyban.

Számítsuk ki és szerkesszük meg az ismeretlen  $\bar{F}_A$  és  $\bar{F}_B$  kényszererőket.



Adatok:  $F=100$  [N],  $m \cdot g=200$  [N],  $a=2$  [m],  $b=4$  [m],  $c=1$  [m]

Megoldás:



Számítás:

$$\sum_i \vec{F}_i = \vec{F} + m \cdot \vec{g} + \vec{F}_A + \vec{F}_B = \begin{pmatrix} F \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -m \cdot g \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -F_{Ax} \\ F_{Ay} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F_B \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{I. } F - F_{Ax} + F_B = 0 \rightarrow F_{Ax} = F + F_B = 125 \text{ [N]}$$

$$\text{II. } -m \cdot g + F_{Ay} = 0 \rightarrow F_{Ay} = m \cdot g = 200 \text{ [N]}$$

$$\text{III. } \sum_i M_i = m \cdot g \cdot \frac{a}{2} - F \cdot c - F_B \cdot b = 0$$

---

$$\text{III. } F_B = \frac{m \cdot g \cdot \frac{a}{2} - F \cdot c}{b} = 25 \text{ [N]}$$

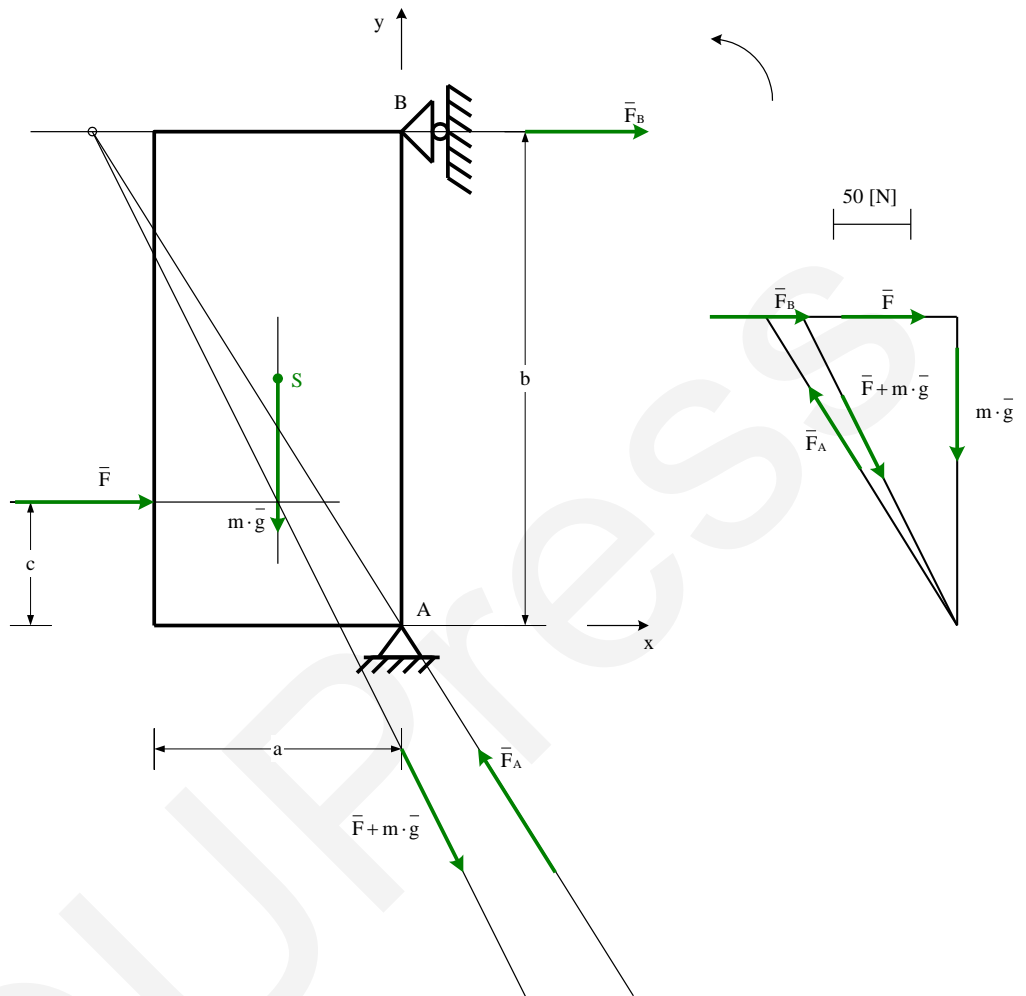
Ellenőrzés:

$$\begin{aligned} \sum_i M_i &= -F_{Ax} \cdot b + F \cdot (b - c) + m \cdot g \cdot \frac{a}{2} \\ &= -125 \cdot 4 + 100 \cdot (4 - 1) + 200 \cdot 1 = 0 \end{aligned}$$

Szerkesztés:

A szerkesztés lépései a következők:

- 1) Szerkesszük meg az  $\vec{F}$  és az  $m \cdot \vec{g}$  erők eredőjét.
- 2) Szerkesszük meg az  $\vec{F}_A$  kényszererő hatásvonalát, felhasználva, hogy az  $\vec{F} + m \cdot \vec{g}$ ,  $\vec{F}_A$  és  $\vec{F}_B$  erők hatásvonalai ugyanazon pontban metszi egymást.
- 3) Rajzoljuk meg a vektorábrát.
- 4) Olvassuk le a vektorábráról az  $\vec{F}_A$  és  $\vec{F}_B$  kényszererők nagyságát, összehasonlítva őket az erőléptékkel.



Az alábbi linkre kattintva a szerkesztés lépésről lépésre megtekinthető a Microsoft Office PowerPoint programjával készült animáció formájában:

## 8.2 Animáció



## 8.2 Párhuzamos erőrendszer

Párhuzamos erőrendszer esetén a 8.1 fejezetben bemutatott szerkesztési eljárás közvetlenül nem alkalmazható. Ehelyett alkalmazzuk a párhuzamos erőrendszerek eredőjének szerkesztésére bemutatott eljárást (5.3 fejezet) felhasználva, hogy egyensúly esetén az első és utolsó szerkesztő vonal mind a vektor, mind a kötélábrán egybeesik (5.4 tétel).

A szerkesztő egyeneseket jelölje: 1, 2, ... n-1, n.

A szerkesztés lépései a következők:

- 1) A szerkesztést az ismert erők eredőinek szerkesztésével kezdjük, alkalmazva az 5.3 fejezetben ismertetett eljárást.
- 2) Az egyes pontban ismertetett szerkesztés akkor ér véget, amikor a vektorábrán berajzoljuk azt a szerkesztővonalat, amely az utolsó ismert erő végpontjába mutat, továbbá a vele párhuzamos szerkesztővonalat a kötélábrán.
- 3) Megszerkesztjük a fenti „utolsó” szerkesztővonal és valamely ismeretlen erő hatásvonalának metszéspontját a kötélábrán.
- 4) Megszerkesztjük az első szerkesztővonal (1) és a másik ismeretlen erő hatásvonalának metszéspontját a kötélábrán.
- 5) Összekötjük a 3-as és 4-es pontban kapott két metszéspontot, így megkapjuk az n-1 számú szerkesztővonalat a kötélábrán.
- 6) Megrajzoljuk az n-1 számú szerkesztővonalat a vektorábrán és leolvassuk az ismeretlen erők nagyságát.

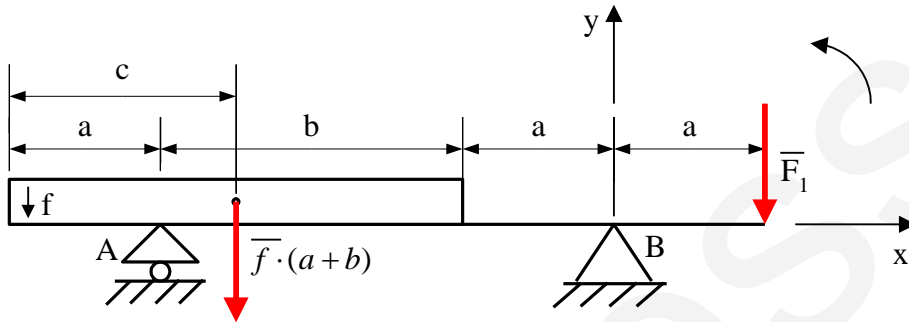
*Megjegyzés:* Az 5. lépés magyarázata az, hogy az 1 és n számú szerkesztővonalak egybeesnek mind a vektor, mind a kötélábrán (5.4 tétel).



**Feladatok**

4. feladat:

Számítsuk ki és szerkesszük meg az ábrán látható kéttámaszú tartóra ható  $\bar{F}_A$  és  $\bar{F}_B$  kényszerítőket!



Adatok:  $F_1=9$  [kN],  $f=6$  [kN/m],  $a=1$  [m],  $b=2$  [m],

Megoldás:

Számítás:

$$f \cdot (a + b) = 18 \text{ [kN]}$$

$$c = \frac{a + b}{2} = 1.5 \text{ [m]}$$

$$\sum_i \bar{F}_i = \bar{F}_A + \bar{f} \cdot (a + b) + \bar{F}_B + \bar{F}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ F_A \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -f \cdot (a + b) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F_{Bx} \\ F_{By} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -F_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

I.  $F_{Bx} = 0$

II.  $F_A - f \cdot (a + b) + F_{By} - F_1 = 0$

III.  $\sum_i M_i = -F_A \cdot (a + b) + f \cdot (a + b) \cdot (2a + b - c) - F_1 \cdot a = 0$



$$\text{III. } -F_A \cdot 3 + 18 \cdot 2.5 - 9.1 = 0 \rightarrow F_A = 12 \text{ [kN]}$$

$$\text{II. } F_{By} = F_1 + f \cdot (a + b) - F_A = 9 + 18 - 12 = 15 \text{ [kN]}$$

Ellenőrzés:

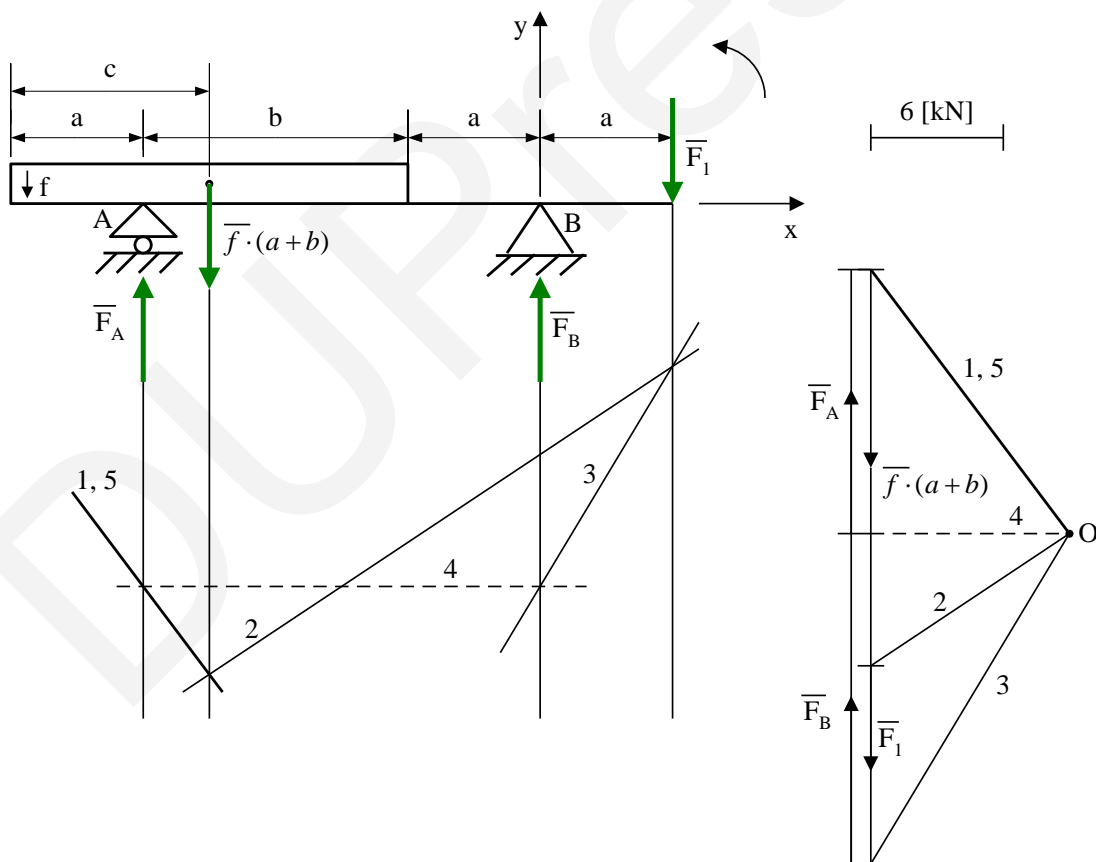
$$\sum_i M_A = -f \cdot (a + b) \cdot (c - a) + F_{By} \cdot (a + b) - F_1 \cdot (2a + b) + f$$

$$\cdot \left(a + \frac{a}{2}\right) =$$

$$= -6 \cdot (1 + 2) \cdot (1.5 - 1) + 15 \cdot (1 + 2) - 9 \cdot (2 + 2) + 6$$

$$\cdot 1.5 = 0$$

Szerkesztés:

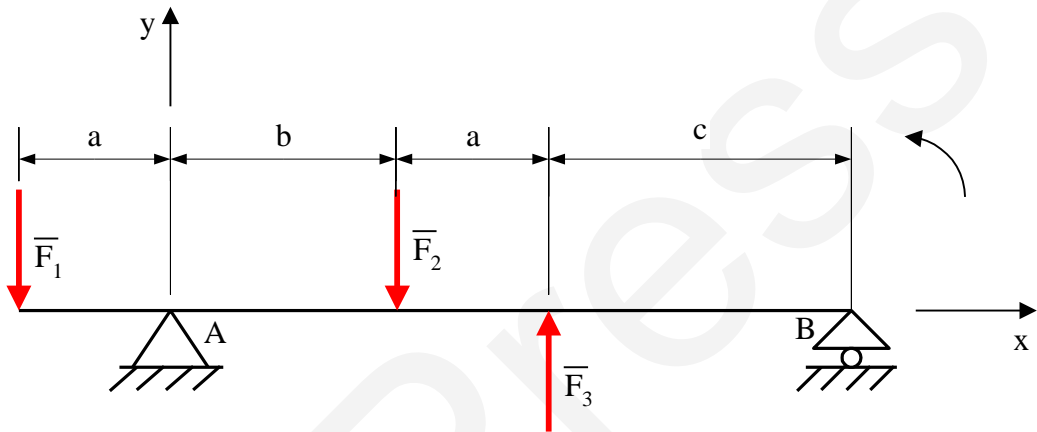




Az alábbi linkre kattintva a szerkesztés lépésről lépésre megtekinthető a Microsoft Office PowerPoint programjával készült animáció formájában:  
8.3 Animáció

5. feladat:

Számítsuk ki és szerkesszük meg az ábrán látható kéttámaszú tartóra ható  $\bar{F}_A$  és  $\bar{F}_B$  kényszererőket!



Adatok:  $a=1\text{[m]}$ ,  $b=1,5\text{[m]}$ ,  $c=2\text{[m]}$ ,  $F_1 = 20\text{ [kN]}$ ,  $F_2 = 50\text{ [kN]}$ ,  $F_3 = 30\text{ [kN]}$

Megoldás:

Számítás:

$$\sum_i \bar{F}_i = \bar{F}_1 + \bar{F}_2 + \bar{F}_3 + \bar{F}_A + \bar{F}_B = \begin{pmatrix} 0 \\ -F_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -F_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ F_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F_{Ax} \\ F_{Ay} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ F_B \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

I.  $F_{Ax} = 0$

II.  $-F_1 - F_2 + F_3 + F_{Ay} + F_B = 0$

III.  $\sum_i M_A = F_1 \cdot a - F_2 \cdot b + F_3 \cdot (a + b) + F_B \cdot (a + b + c) = 0$

---



$$\text{III. } 20 \cdot 1 - 50 \cdot 1.5 + 30 \cdot (1 + 1.5) + F_B \cdot (1 + 1.5 + 2) = 0$$

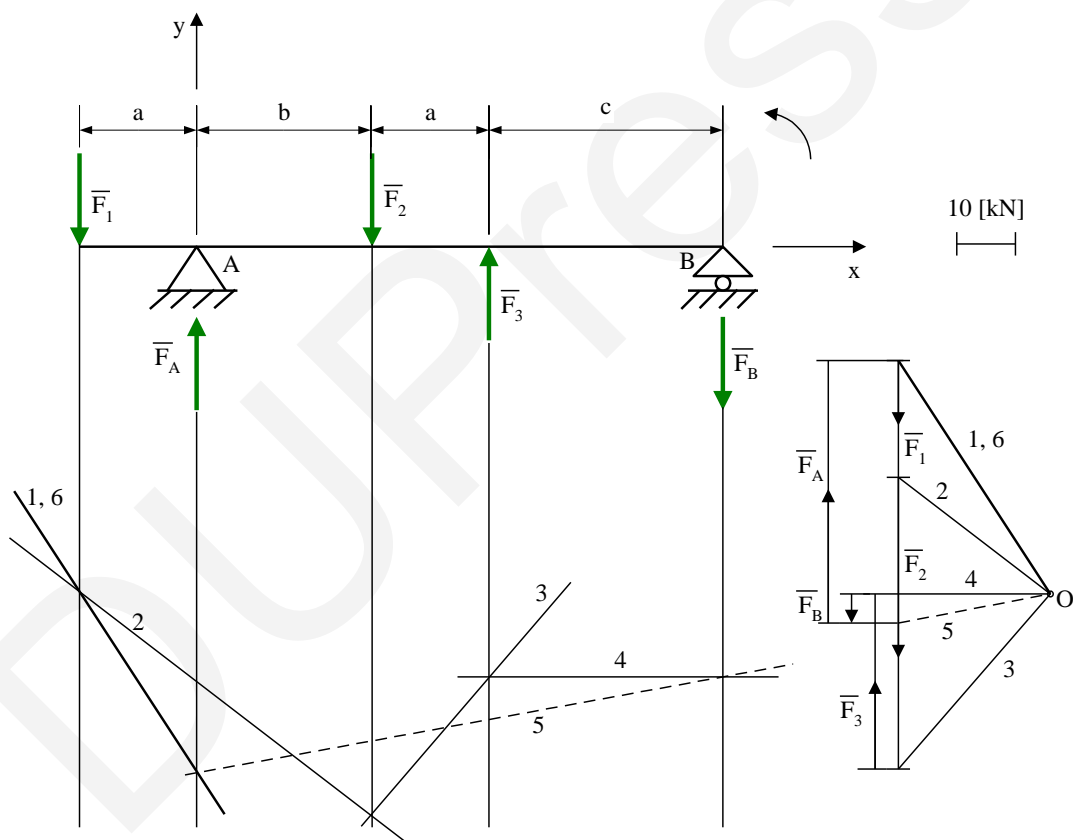
$$F_B = \frac{-20 + 75 - 75}{4.5} = -4.44 \text{ [kN]}$$

$$\text{II. } F_{Ay} = -F_B + F_1 + F_2 - F_3 = 4.44 + 20 + 50 - 30 = 44.44 \text{ [kN]}$$

Ellenőrzés:

$$\begin{aligned} \sum_i M_B &= F_1 \cdot (2a + b + c) - F_{Ay} \cdot (a + b + c) + F_2 \cdot (a + c) - F_3 \cdot c = \\ &= 20 \cdot 5.5 - 44.44 \cdot 4.5 + 50 \cdot 3 - 30 \cdot 2 = 0 \end{aligned}$$

Szerkesztés:



Az alábbi linkre kattintva a szerkesztés lépésről lépésre megtekinthető a Microsoft Office PowerPoint programjával készült animáció formájában:  
8.4 Animáció



## 9. Valós kényszerek

Eddig ideális kényszerekkel foglalkoztunk. Ebben a fejezetben kiterjesztjük vizsgálatainkat valós kényszerekre. Valós kényszerekre, mint például egy érdes (súrlódásos) felület, amelyen egy test, vagy egy kötélt csúszik, vagy egy érdes belső felületű csapágyház, amelyen egy csap elfordul. További példát jelent egy felület, amelyen egy kerék gördül abban az esetben, ha vagy a felület, vagy a kerék puha.

### 9.1 Súrlódásos felület (támasz)

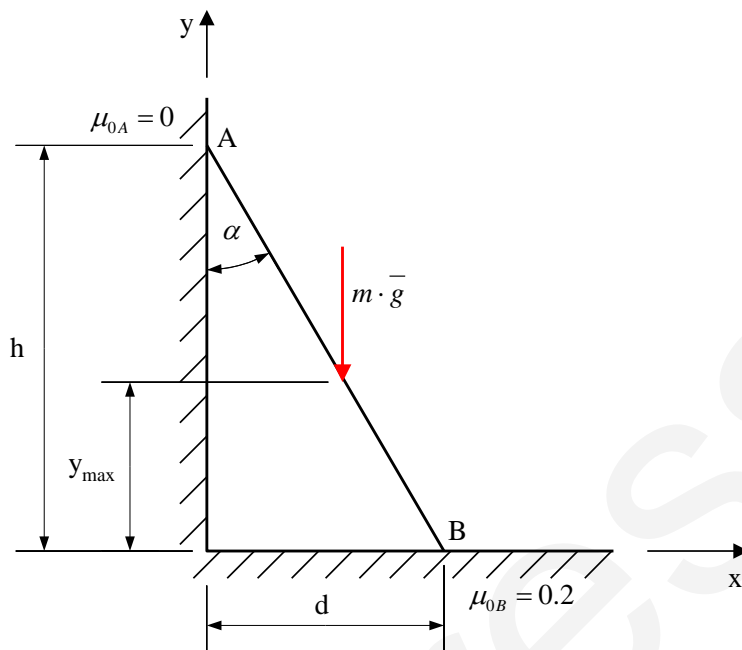
A 9.1 fejezet elméleti részét már megtárgyaltuk a 2.2 fejezetben és megoldottunk egy feladatot egy egyensúlyban lévő anyagi ponttal kapcsolatban (2.4 fejezet, 5. feladat). Ebben a fejezetben érdes felületen támaszkodó, egyensúlyban lévő merev testekre (tárcsákra) mutatunk be feladatokat.

#### Feladatok

##### 1. feladat:

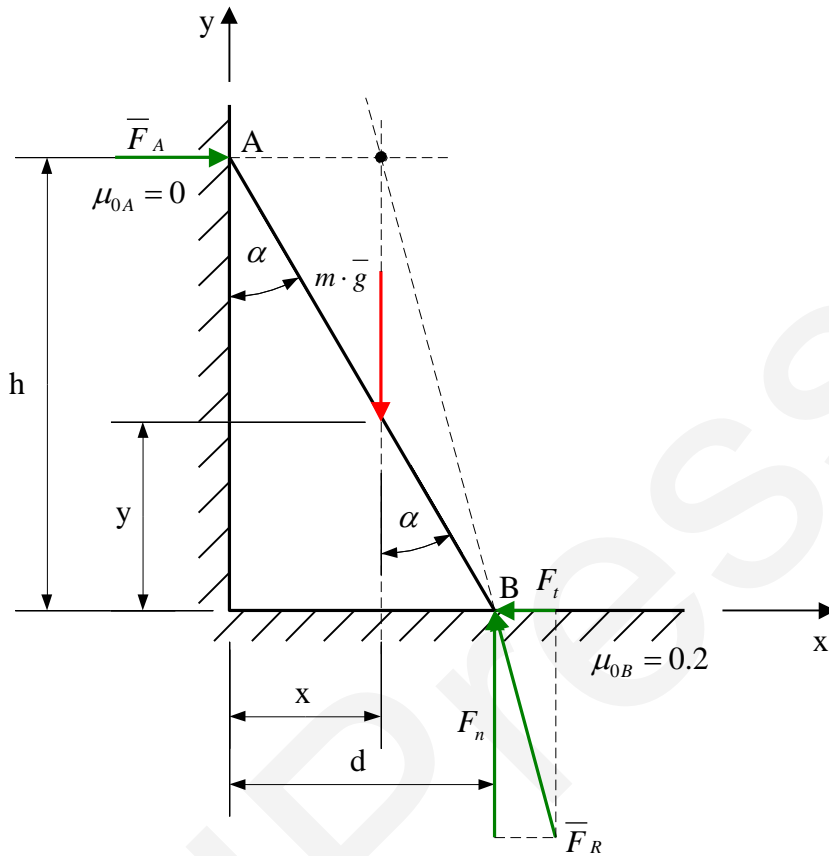
Az ábrán látható elhanyagolható tömegű létra B végpontja az érdes padlóra, míg A végpontja a tökéletesen sima falhoz támaszkodik.

Milyen magasra mászhat fel egy  $m$  tömegű ember maximálisan a létrán ( $y_{max}$ ) anélkül, hogy az megcsúszna a padlón?



Adatok:  $m \cdot g = 1000$  [N];  $d = \sqrt{3}$  [m];  $h = 3$  [m];  $\mu_{0B} = 0,2$ .

Megoldás:



Számítás:

$$\sum \vec{F} = \vec{F}_A + \vec{F}_R + m \cdot \vec{g} = \vec{0} = \begin{pmatrix} F_A \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -F_t \\ F_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -m \cdot g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{I. } F_A - F_t = 0 \rightarrow F_t = F_A$$

$$\text{II. } F_n - m \cdot g = 0 \rightarrow F_n = m \cdot g$$

$$\sum_i M_B = m \cdot g \cdot (d - x) - F_A \cdot h = 0 \rightarrow F_A = \frac{m \cdot g \cdot (d - x)}{h}$$

$$\tan \alpha = \frac{d}{h} = \frac{d - x}{y} \rightarrow d - x = y \cdot \tan \alpha$$

$$F_A = \frac{m \cdot g \cdot y \cdot \tan \alpha}{h}$$

$$|F_t| \leq \mu_{0B} \cdot F_n \rightarrow -\mu_{0B} \cdot F_n \leq F_t \leq \mu_{0B} \cdot F_n$$

1. eset:

$$F_t \leq \mu_{0B} \cdot F_n$$

$$F_A \leq \mu_{0B} \cdot m \cdot g$$



$$\frac{m \cdot g \cdot y \cdot \tan \alpha}{h} \leq \mu_{0B} \cdot m \cdot g$$

$$\frac{y \cdot \tan \alpha}{h} \leq \mu_0 \rightarrow y \leq \frac{h \cdot \mu_{0B}}{\tan \alpha} = \frac{h \cdot \mu_{0B}}{\frac{d}{h}} = \frac{h^2 \cdot \mu_{0B}}{d} = 1.039 \text{ [m]} = y_{max}$$

2. eset:

$$-\mu_{0B} \cdot F_n \leq F_t$$

$$-\mu_{0B} \cdot m \cdot g \leq F_A$$

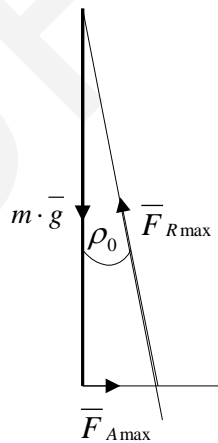
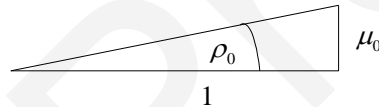
$$-\mu_{0B} \cdot m \cdot g \leq \frac{m \cdot g \cdot y \cdot \tan \alpha}{h}$$

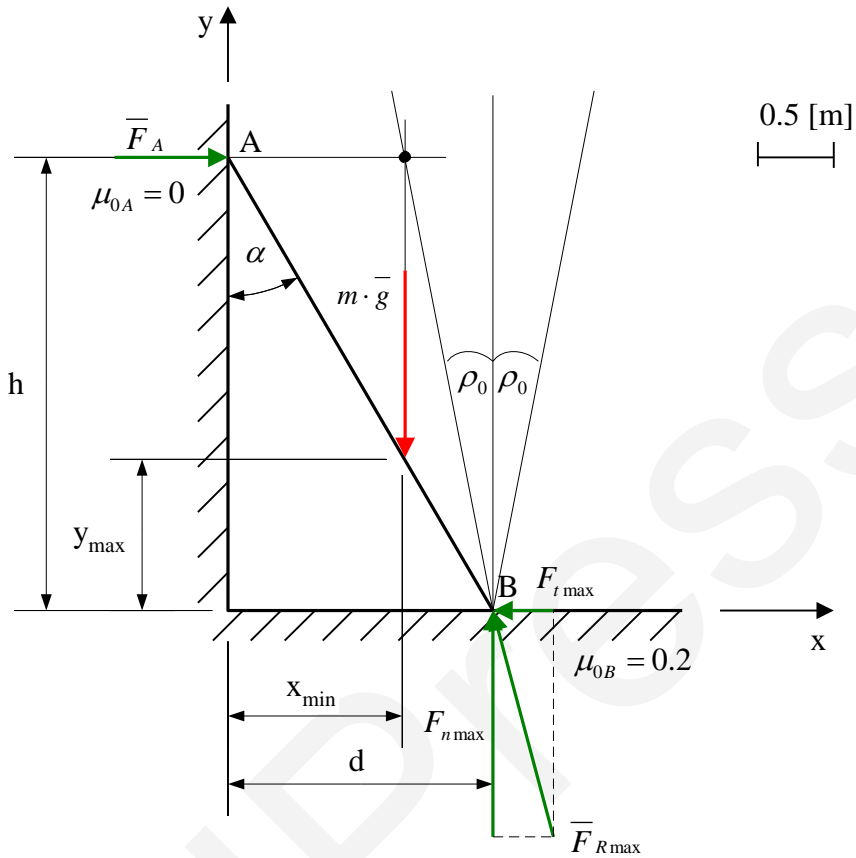
$$-\mu_{0B} \leq \frac{y \cdot \tan \alpha}{h} \rightarrow y \geq \frac{-\mu_{0B} \cdot h}{\tan \alpha} = \frac{-h^2 \cdot \mu_{0B}}{d} = -1.039 \text{ [m]} \rightarrow \text{Ez nem valós}$$

megoldás.

Tehát az ember max. 1,039 [m] magasra mászhat a létrán anélkül, hogy az megcsúszna a padlón.

Szerkesztés:





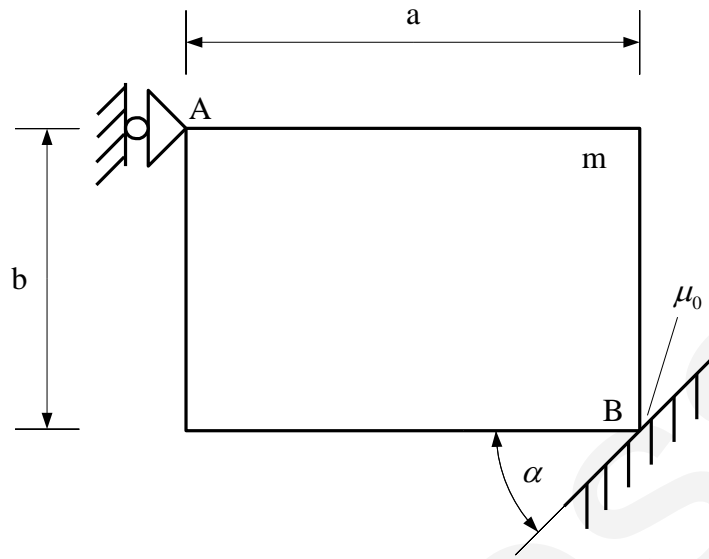
Összehasonlítva a megszerkesztett  $y_{\max}$  távolságot a léptékkel, azt kapjuk, hogy:

$$y_{\max} \approx 1 \text{ [m]}$$

## 2. feladat:

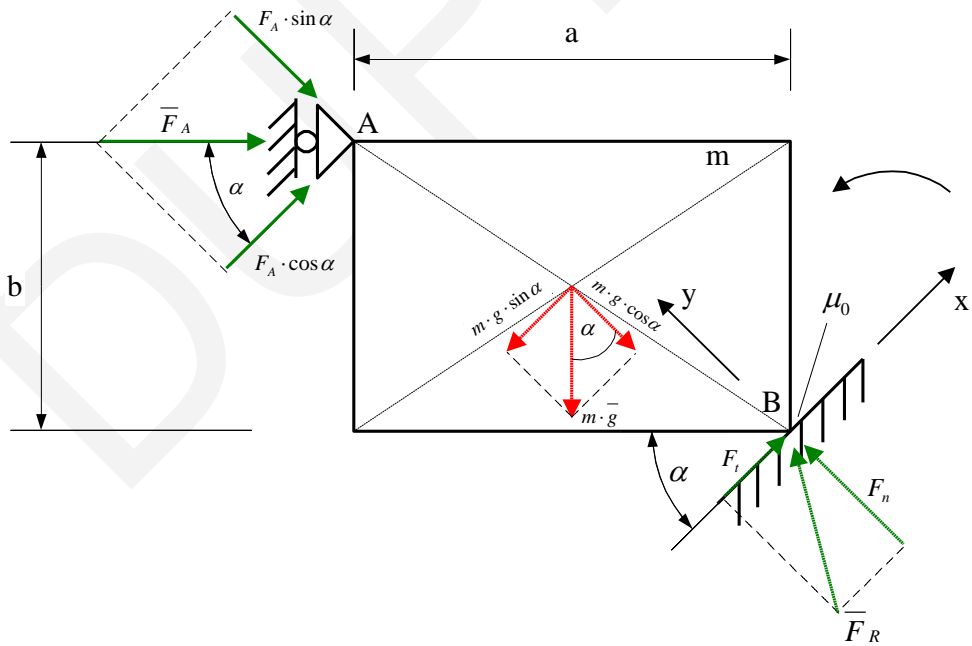
Az ábrán látható  $m$  tömegű merev lemez A pontja egy ideális görgőhöz kapcsolódik, B végpontja pedig egy érdes felületre támaszkodik.

Számítsuk ki azon minimális súrlódási tényező értékét, amely esetében a lemez egyensúlyban marad!



Adatok:  $a=60$  [mm],  $b=40$  [mm],  $m=5$  [kg],  $\alpha=45^\circ$

Megoldás:





Számítás:

$$\sum \vec{F} = \vec{F}_A + \vec{F}_R + m \cdot \vec{g} = \vec{0} = \begin{pmatrix} F_A \cdot \cos \alpha \\ -F_A \cdot \sin \alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F_t \\ F_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -m \cdot g \cdot \sin \alpha \\ -m \cdot g \cdot \cos \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{I. } F_A \cdot \cos \alpha + F_t - m \cdot g \cdot \sin \alpha = 0$$

$$\text{II. } -F_A \cdot \sin \alpha + F_n - m \cdot g \cdot \cos \alpha = 0$$

$$\sum_i M_B = -F_A \cdot b + m \cdot g \cdot \frac{a}{2} = 0 \rightarrow F_A = m \cdot g \cdot \frac{a}{2b} = 5 \cdot 9.81 \cdot \frac{60}{80} = 36.79 \text{ [N]}$$

$$\text{I. } F_A \cdot \cos \alpha + F_t - m \cdot g \cdot \sin \alpha = 0 \rightarrow F_t = 8.669 \text{ [N]}$$

$$\text{II. } -F_A \cdot \sin \alpha + F_n - m \cdot g \cdot \cos \alpha = 0 \rightarrow F_n = 60.698 \text{ [N]}$$

$$|F_t| \leq \mu_0 \cdot F_n \rightarrow -\mu_0 \cdot F_n \leq F_t \leq \mu_0 \cdot F_n$$

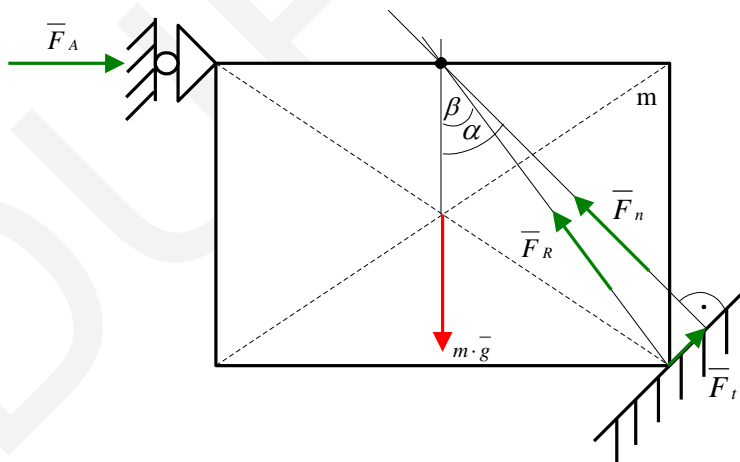
1. eset:

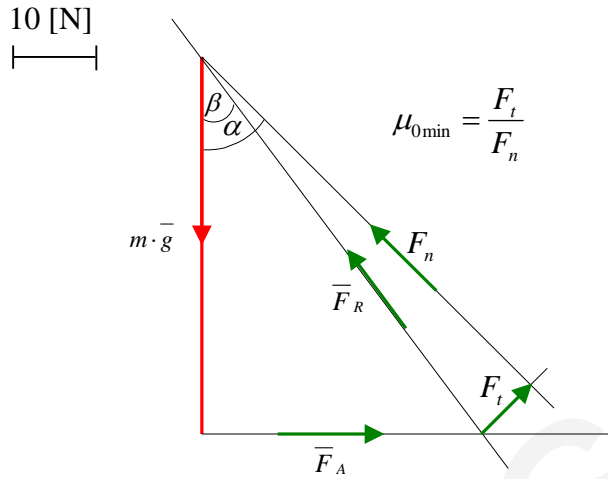
$$-\mu_0 \cdot F_n \leq F_t \rightarrow -\mu_0 \cdot 60.698 \leq 8.669 \rightarrow \mu_0 \geq -0.1428 \text{ (Ez nem ad megoldást.)}$$

2. eset:

$$F_t \leq \mu_0 \cdot F_n \rightarrow 8.669 \leq \mu_0 \cdot 60.698 \rightarrow 0.1428 \leq \mu_0 \rightarrow \mu_{0min} = 0.1428$$

Szerkesztés:





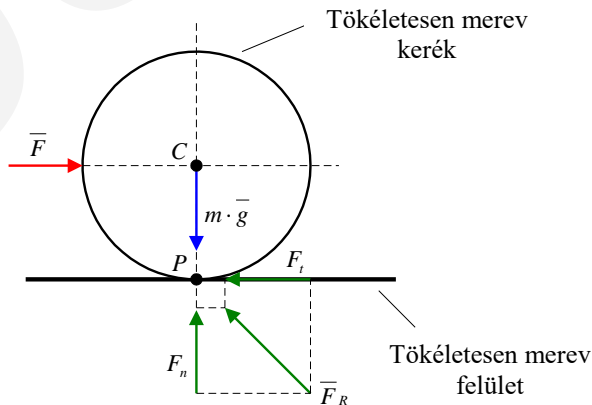
Összehasonlítva az  $F_t$  és  $F_n$  hosszát az erőléptékkel, majd a hányadosukat véve, azt kapjuk, hogy:

$$\frac{F_t}{F_n} = \mu_{0min} \approx 0.14$$

## 9.2 Gördülési ellenállás

Ahhoz, hogy megértsük a gördülési ellenállás jelenségét, összehasonlítjuk az ideális esetet - amikor a kerék és a talaj tökéletesen merev (kemény) – a valós esettel, amikor az egyikük vagy mindkettő puha.

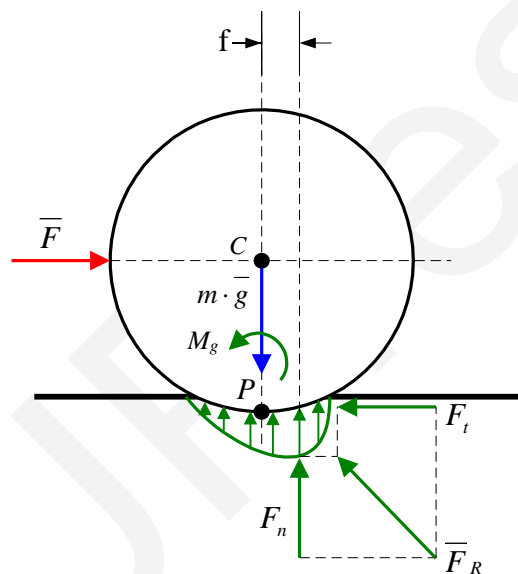
*Ideális eset:*





- A kerék és a talaj tökéletesen merev (kemény).
- A kerék a talajjal egy ideális vonal mentén érintkezik, ami átmegy a P ponton.
- A kényszererő  $F_n$  komponensének hatásvonala átmegy a P és C pontokon, így nyomatéka a P és C pontra vonatkozóan zérus.
- A kerék akkor és csak akkor van egyensúlyban, ha a vízszintes irányú  $\bar{F}$  erő nullával egyenlő.

Valós eset:



- A kerék vagy a felület puha.
- A kerék egy felület mentén érintkezik a talajjal. Jelöljük a felület mentén megoszló normál irányú erőrendszer eredő erejét  $F_n$ -el.
- Az  $F_n$  hatásvonala a P és C pontoktól  $f$  távolságban, azok „előtt” halad el.
- A kerék akkor és csak akkor nem gördül el, ha  $f \leq f_0$ , ahol  $f_0$   $f$  lehetséges maximális értéke egyensúly esetén. (Az  $f$  távolságot a gördülési ellenállás karjának nevezzük.)



- Következésképp a kerék nem gördül el akkor, és csak akkor, ha:

$$|M_g| = f \cdot F_n \leq f_0 \cdot F_n$$

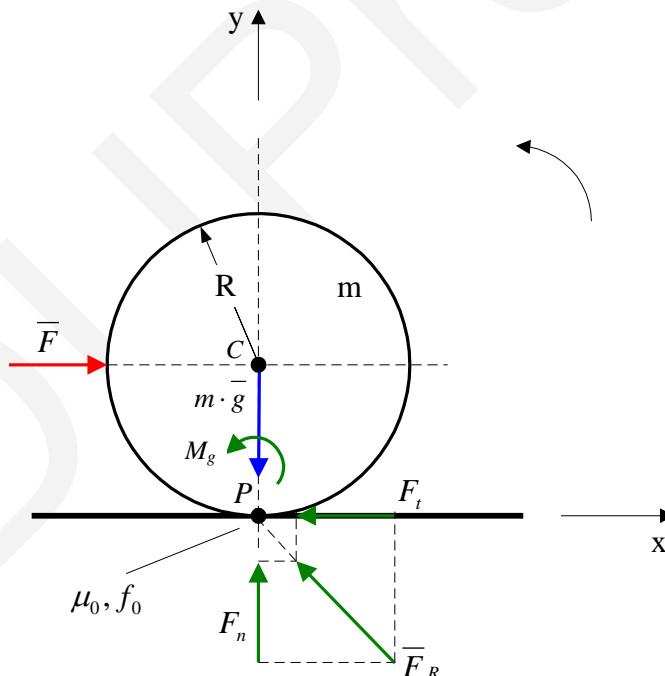
ahol  $M_g$  a gördülési ellenállási nyomaték.

(Ahogy az  $\bar{F}$  erőt növeljük, az  $f$  távolság is növekszik, amíg el nem ér egy  $f_0$  maximális értéket, amely fölött bekövetkezik a gördülés.)

### Feladatok

#### 1. feladat:

Milyen határok között változhat az ábrán látható  $\bar{F}$  erő értéke a kerék egyensúlya esetén. A tapadási súrlódási tényező ( $\mu_0$ ), valamint a gördülési ellenállás karja ( $f_0$ ) ismert.



Adatok:  $m=20$  [kg],  $R=0.5$  [m],  $g=9.81$  [ $m/s^2$ ],  $\mu_0=0.6$ ,  $f_0=0.02$  [m].



Megoldás:

Egyensúly esetén:  $F_{min} \leq F \leq F_{max}$

Egyensúlyi egyenletek:

$$\sum \vec{F} = \vec{F} + \vec{F}_R + m \cdot \vec{g} = \vec{0} = \begin{pmatrix} F \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -F_t \\ F_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -m \cdot g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

I.  $F - F_t = 0 \rightarrow F_t = F$

II.  $F_n - m \cdot g = 0 \rightarrow F_n = m \cdot g$

$$\sum_i M_i = M_g - F \cdot R = 0 \rightarrow M_g = F \cdot R$$

A kerék nem gördül el akkor, és csak akkor, ha:

$$|M_g| \leq F_n \cdot f_0$$

1. eset:

$$M_g \leq F_n \cdot f_0$$

$$F \cdot R \leq m \cdot g \cdot f_0$$

$$F \leq \frac{m \cdot g \cdot f_0}{R}$$

2. eset:

$$-F_n \cdot f_0 \leq M_g$$

$$-m \cdot g \cdot f_0 \leq F \cdot R$$

$$F \geq \frac{-m \cdot g \cdot f_0}{R}$$

$$\frac{-m \cdot g \cdot f_0}{R} \leq F \leq \frac{m \cdot g \cdot f_0}{R}$$

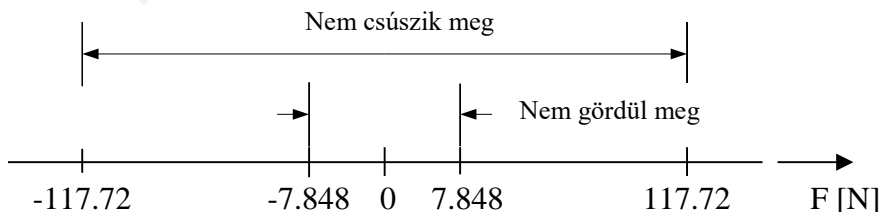
$$-7.848 [N] \leq F \leq 7.848 [N]$$

A kerék nem csúszik meg akkor, és csak akkor, ha:

$$|F_t| \leq \mu_0 \cdot F_n$$

$$-\mu_0 \cdot m \cdot g \leq F \leq \mu_0 \cdot m \cdot g$$

$$-117.72 [N] \leq F \leq 117.72 [N]$$



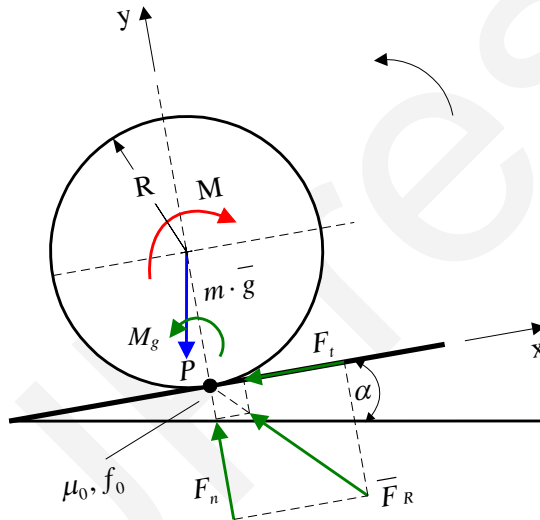


A kerék egyensúlyban van, ha egyidejűleg nem csúszik meg és nem gördül el. Tehát egyensúlyban van akkor, és csakis akkor, ha:

$$-7.848 \text{ [N]} \leq F \leq 7.848 \text{ [N]} \rightarrow F_{max} = 7.848 \text{ [N]}.$$

2. feladat:

Számítsa ki az M nyomaték azon minimális és maximális értékét, amely estén az R sugarú kerék egyensúlyban van az ábrán látható érdes lejtőn. A tapadási súrlódási tényező ( $\mu_0$ ) és a gördülési ellenállás karja ( $f_0$ ) ismert.



Adatok:  $R=200 \text{ [mm]}$ ,  $m \cdot g=5 \text{ [kN]}$ ,  $\alpha=10^\circ$ ,  $\mu_0=0.3$ ,  $f_0=1.5 \text{ [cm]}$ .

Megoldás:

$$\sum \vec{F} = \vec{F}_R + m \cdot \vec{g} = \vec{0} = \begin{pmatrix} -F_t \\ F_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -m \cdot g \cdot \sin \alpha \\ -m \cdot g \cdot \cos \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{I. } F_t = -m \cdot g \cdot \sin \alpha = -0.868 \text{ [kN]}$$

$$\text{II. } F_n = m \cdot g \cdot \cos \alpha = 4.924 \text{ [kN]}$$

$$\sum_i M_i = -M + m \cdot g \cdot \sin \alpha \cdot R + M_g = 0$$

$$M_g = M - m \cdot g \cdot \sin \alpha \cdot R = M - 0.1736 \text{ [kNm]}$$

A kerék nem gördül el, ha:

$$|M_g| \leq F_n \cdot f_0 \rightarrow -F_n \cdot f_0 \leq M_g \leq F_n \cdot f_0$$



$$-0.07386 \leq M - 0.1736 \leq 0.07386$$
$$0.09974 [kNm] \leq M \leq 0.2475 [kNm]$$

A kerék nem csúszik meg, ha:

$$|F_t| \leq \mu_0 \cdot F_n$$

$$-\mu_0 \cdot m \cdot g \cdot \cos \alpha \leq -m \cdot g \cdot \sin \alpha \leq \mu_0 \cdot m \cdot g \cdot \cos \alpha$$

$$-\mu_0 \leq -\tan \alpha \leq \mu_0 \rightarrow \mu_0 \geq \tan \alpha \geq -\mu_0$$

$$-16.7^\circ \leq \alpha \leq 16.7^\circ$$

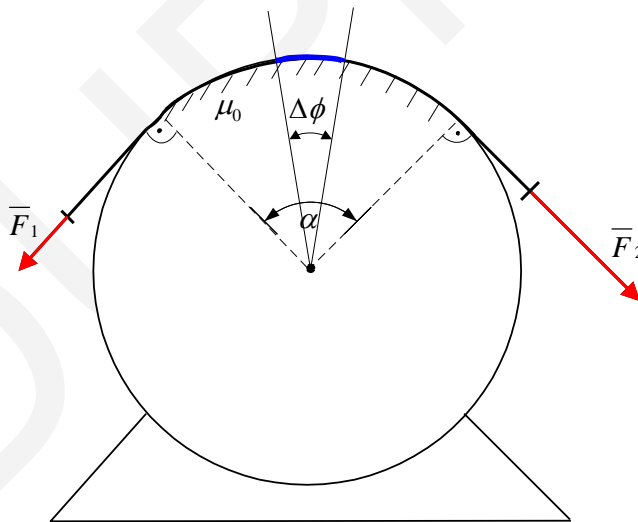
$$10^\circ \leq 16.7^\circ \rightarrow \text{A kerék nem csúszik.}$$

A kerék egyensúlyban van, ha:

$$0.09974 [Nm] \leq M \leq 0.2475 [Nm]$$

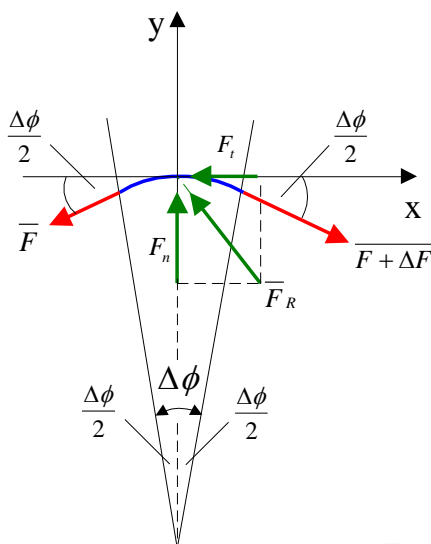
### 9.3 Kötélsúrlódás

Az alábbi ábra egy érdekes felületű hengeren felfekvő kötelet szemléltet. A henger pozíciója rögzített (nem tud elfordulni), a kötélnél  $\alpha$  középponti szögű köríven érintkezik a hengerrel. A kötélnél  $\vec{F}_1$  és  $\vec{F}_2$  erőkkel húzzuk.



46. ábra.

Vizsgáljuk meg egy végtelenül kicsiny kötélrészletet (kék ív az ábrán) egyensúlyi állapotát. A 47. ábra a fenti kötélrészletre ható erőket szemlélteti.



47. ábra.

Az egyensúly egyenletek a fenti kicsiny kötélszakaszra az alábbiak:

$$\sum \vec{F} = \vec{F} + \vec{F} + \Delta\vec{F} + \vec{F}_R = \vec{0} = \begin{pmatrix} -F \cdot \cos \frac{\Delta\varphi}{2} \\ -F \cdot \sin \frac{\Delta\varphi}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (F + \Delta F) \cdot \cos \frac{\Delta\varphi}{2} \\ -(F + \Delta F) \cdot \sin \frac{\Delta\varphi}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -F_t \\ F_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{I. } -F \cdot \cos \frac{\Delta\varphi}{2} + (F + \Delta F) \cdot \cos \frac{\Delta\varphi}{2} - F_t = 0$$

$$\text{II. } -F \cdot \sin \frac{\Delta\varphi}{2} - (F + \Delta F) \cdot \sin \frac{\Delta\varphi}{2} + F_n = 0$$

$$\text{I. } F_t = -F \cdot \cos \frac{\Delta\varphi}{2} + (F + \Delta F) \cdot \cos \frac{\Delta\varphi}{2} = \Delta F \cdot \cos \frac{\Delta\varphi}{2}$$

$$\text{II. } F_n = F \cdot \sin \frac{\Delta\varphi}{2} + (F + \Delta F) \cdot \sin \frac{\Delta\varphi}{2} = 2 \cdot F \cdot \sin \frac{\Delta\varphi}{2} + \Delta F \cdot \sin \frac{\Delta\varphi}{2}$$

$$\text{I. } dF_t = \lim_{\Delta\varphi \rightarrow 0} \left( \Delta F \cdot \cos \frac{\Delta\varphi}{2} \right) = dF \cdot 1 = dF$$

$$\text{II. } dF_n = \lim_{\Delta\varphi \rightarrow 0} \left( 2 \cdot F \cdot \sin \frac{\Delta\varphi}{2} + \Delta F \cdot \sin \frac{\Delta\varphi}{2} \right) = 2 \cdot F \cdot \sin \frac{d\varphi}{2} = 2 \cdot F \cdot \frac{d\varphi}{2} = F \cdot d\varphi$$

Megjegyzés: Ha  $\Delta\varphi \rightarrow 0$  akkor  $\sin \frac{d\varphi}{2} = \frac{d\varphi}{2}$

Ezért  $\lim_{\Delta\varphi \rightarrow 0} (\Delta F \cdot \sin \frac{\Delta\varphi}{2})$  másodrendben kis mennyiség, így elhanyagolható.

A kötélszakasz egyensúlyban van akkor, és csak akkor, ha:



$$|dF_t| \leq \mu_0 \cdot dF_n$$

$$|dF| \leq \mu_0 \cdot F \cdot d\varphi$$

$$-\mu_0 \cdot F \cdot d\varphi \leq dF \leq \mu_0 \cdot F \cdot d\varphi$$

$$-\mu_0 \cdot d\varphi \leq \frac{dF}{F} \leq \mu_0 \cdot d\varphi$$

$$-\mu_0 \cdot \int_0^\alpha d\varphi \leq \int_{F_1}^{F_2} \frac{dF}{F} \leq \mu_0 \cdot \int_0^\alpha d\varphi$$

$$-\mu_0 \cdot \alpha \leq \ln \frac{F_2}{F_1} \leq \mu_0 \cdot \alpha$$

$$e^{-\mu_0 \cdot \alpha} \leq \frac{F_2}{F_1} \leq e^{\mu_0 \cdot \alpha}$$

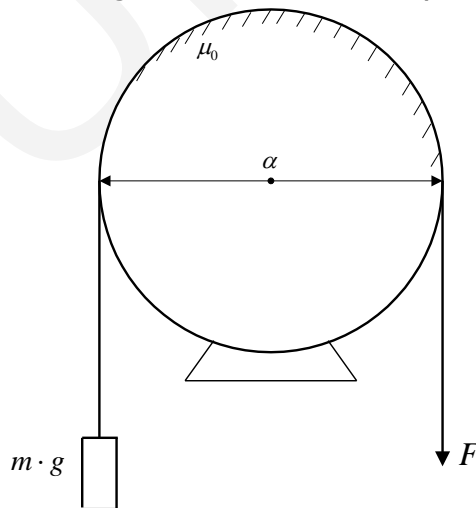
Így a kötélt egyensúlyban van akkor, és csak akkor, ha:

$$F_1 \cdot e^{-\mu_0 \cdot \alpha} \leq F_2 \leq F_1 \cdot e^{\mu_0 \cdot \alpha}$$

## Feladatok

### 1. feladat:

Számítsuk ki a minimum és maximum értékét ( $F_{min}, F_{max}$ ) ami között az  $F$  erő nagysága változhat, ha az alábbi mechanikai rendszer egyensúlyban van. (Az érdes felületű henger nem tud elfordulni.)



Adatok:  $m \cdot g = 100$  [N],  $\alpha = \pi$ ,  $\mu_0 = 0.3$



Megoldás:

A rendszer egyensúlyban van akkor, és csak akkor, ha:

$$m \cdot g \cdot e^{-\mu_0 \cdot \alpha} \leq F \leq m \cdot g \cdot e^{\mu_0 \cdot \alpha}$$

$$100 \cdot e^{-0.9425} \leq F \leq 100 \cdot e^{0.9425}$$

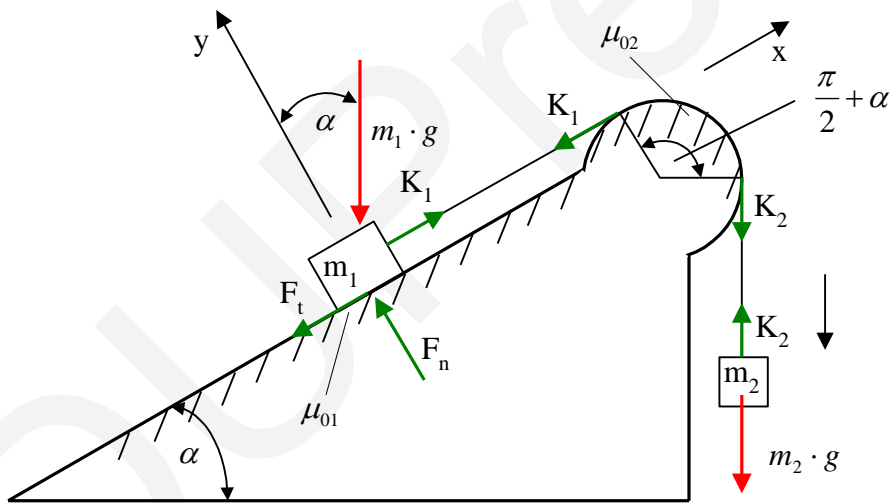
$$38.96 [N] \leq F \leq 256.64 [N]$$

$$F_{\min} = 38.96 [N]$$

$$F_{\max} = 256.64 [N]$$

2. feladat:

Számítsuk ki azon minimális és maximális értéket, amely között az  $m_2$  tömeg változhat, az ábrán látható mechanikai rendszer egyensúlyja esetén.



Adatok:  $m_1 = 10 [kg]$ ,  $\alpha = 30^\circ$ ,  $\mu_{01} = 0.2$ ,  $\mu_{02} = 0.3$

Megoldás:

A rendszer egyensúlyja esetén:

$$m_{2\min} \leq m_2 \leq m_{2\max}$$

Egyensúlyi egyenletek az  $m_1$  tömegű anyagi pontra:

$$\text{I. } \sum_i F_{ix} = K_1 - F_t - m_1 \cdot g \cdot \sin \alpha = 0 \rightarrow F_t = K_1 - m_1 \cdot g \cdot \sin \alpha$$

$$\text{II. } \sum_i F_{iy} = F_n - m_1 \cdot g \cdot \cos \alpha = 0 \rightarrow F_n = m_1 \cdot g \cdot \cos \alpha$$



$$\text{III. } |F_t| \leq \mu_{01} \cdot F_n$$

Egyensúlyi egyenletek az  $m_2$  tömegű anyagi pontra:

$$\text{IV. } \sum_i F_i = m_2 \cdot g - K_2 = 0 \rightarrow K_2 = m_2 \cdot g$$

A kötélslúrlódást az alábbi egyenlőtlenséggel vesszük figyelembe:

$$\text{V. } K_1 \cdot e^{-\mu_{02} \cdot \left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)} \leq K_2 \leq K_1 \cdot e^{\mu_{02} \cdot \left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)}$$

$$\text{Ha } F_t \leq \mu_{01} \cdot F_n$$

$$K_1 - m_1 \cdot g \cdot \sin \alpha \leq \mu_{01} \cdot m_1 \cdot g \cdot \cos \alpha$$

$$K_1 \leq m_1 \cdot g \cdot (\sin \alpha + \mu_{01} \cdot \cos \alpha)$$

$$K_1 \leq 66 [N] = K_{1max}$$

$$\text{Ha } -\mu_{01} \cdot F_n \leq F_t$$

$$-\mu_{01} \cdot m_1 \cdot g \cdot \cos \alpha \leq K_1 - m_1 \cdot g \cdot \sin \alpha$$

$$K_1 \geq m_1 \cdot g \cdot (\sin \alpha - \mu_{01} \cdot \cos \alpha)$$

$$K_1 \geq 32 [N] = K_{1min}$$

$$32 [N] \leq K_1 \leq 66 [N]$$

$$K_{1min} \cdot e^{-\mu_{02} \cdot \left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)} \leq K_2 \leq K_{1max} \cdot e^{\mu_{02} \cdot \left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)}$$

$$17 [N] \leq K_2 \leq 123.7 [N]$$

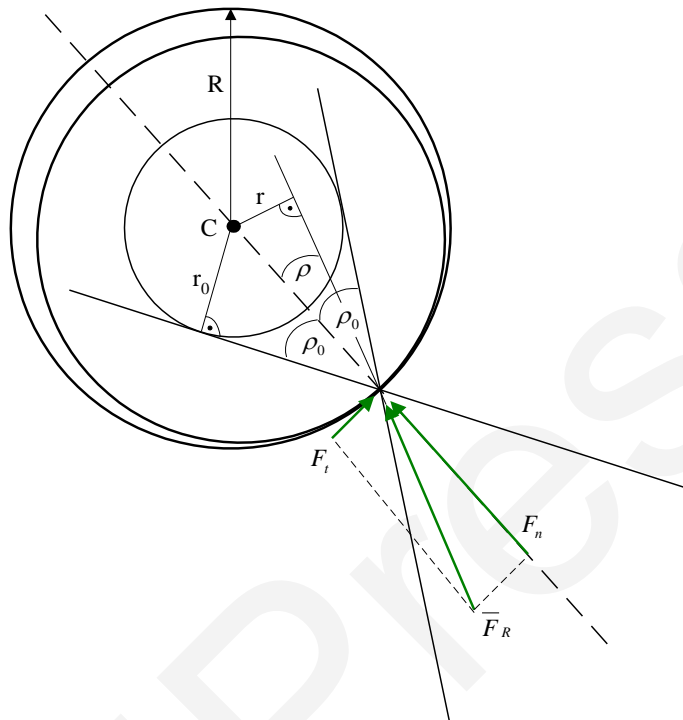
$$K_{2min} = 17 [N] \rightarrow m_{2min} = 1.73 [kg]$$

$$K_{2max} = 123.7 [N] \rightarrow m_{2max} = 12.6 [kg]$$

$$1.73 [kg] \leq m_2 \leq 12.6 [kg]$$

## 9.4 Csapsúrlódás

Az alábbi ábra egy siklócsapágó belsejét mutatja.



48. ábra.

A csapágóház és a csap között fellépő súrlódás miatt a reakcióerő – amelyet a ház a csapra fejt ki – hatásvonalára egy  $r$  távolságra tolódik a csapágó (C) középpontjától. Következésképpen, a kényszererők nyomatéka ( $M_c$ ) lesz a C középpontra. A csap egyensúlyban van akkor, és csak akkor, ha:

$$|M_c| = F_R \cdot r \leq F_R \cdot r_0 = F_R \cdot \sin \rho_0 \cdot R$$

A fenti egyenletben:

$$\sin \rho_0 = \frac{r_0}{R}, \quad \rho_0 = \arctan \mu_0 \quad F_R = \sqrt{F_n^2 + F_t^2},$$

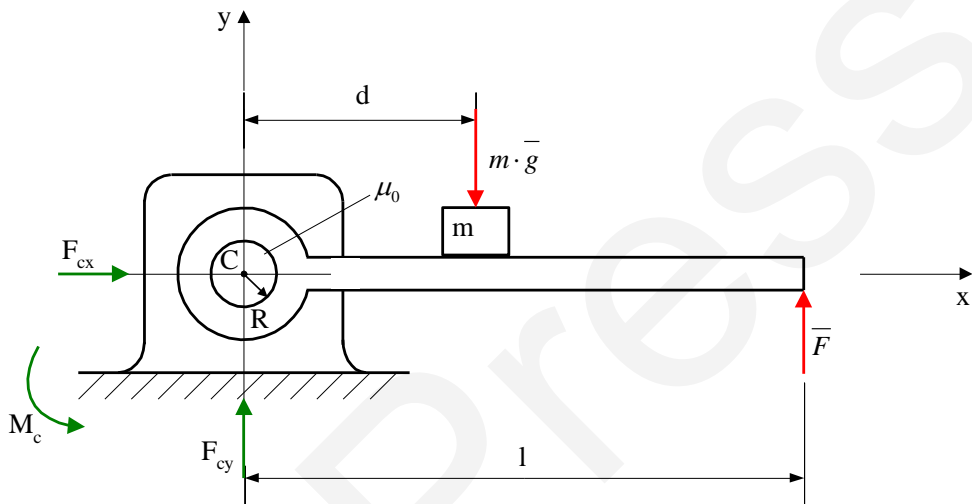
ahol  $r_0$  az  $r$  maximális értéke egyensúly esetén.



## Feladatok

### 1. feladat:

Számítsuk ki azon minimális és maximális értéket ( $F_{min}, F_{max}$ ) amelyek között az  $F$  erő nagysága változhat, az ábrán látható mechanikai rendszer egyensúlya esetén.



Adatok:  $m=50$  [kg],  $l=2$  [m],  $d=0.8$  [m],  $R=0.01$  [m],  
 $\mu_0=0.3=\tan\rho_0 \rightarrow \rho_0=16.7^\circ$

### Megoldás:

A rendszer egyensúlyban van, ha:  $F_{min} \leq F \leq F_{max}$

Egyensúlyi egyenletek:

$$\text{I. } \sum_i F_{ix} = F_{cx} = 0 \rightarrow F_{cx} = 0$$

$$\text{II. } \sum_i F_{iy} = F_{cy} - m \cdot g + F = 0$$

$$F_c = \sqrt{F_{cx}^2 + F_{cy}^2} = m \cdot g - F$$

$$\text{III. } \sum_i M_i = M_c - m \cdot g \cdot d + F \cdot l = 0 \rightarrow M_c = m \cdot g \cdot d - F \cdot l$$

$$-F_c \cdot R \cdot \sin \rho_0 \leq M_c \leq F_c \cdot R \cdot \sin \rho_0$$



1. eset:

$$\text{Ha } -F_C \cdot R \cdot \sin \rho_0 \leq M_C$$

$$-(m \cdot g - F) \cdot R \cdot \sin \rho_0 \leq m \cdot g \cdot d - F \cdot l$$

$$-m \cdot g \cdot R \cdot \sin \rho_0 + F \cdot R \cdot \sin \rho_0 \leq m \cdot g \cdot d - F \cdot l$$

$$-1.41 + 0.0029 \cdot F \leq 392.4 - 2 \cdot F$$

$$2.0029 \cdot F \leq 393.81$$

$$F \leq 196.62 \text{ [N]} = F_{max}$$

2. eset:

$$\text{Ha } M_C \leq F_C \cdot R \cdot \sin \rho_0$$

$$m \cdot g \cdot d - F \cdot l \leq (m \cdot g - F) \cdot R \cdot \sin \rho_0$$

$$m \cdot g \cdot d - F \cdot l \leq m \cdot g \cdot R \cdot \sin \rho_0 - F \cdot R \cdot \sin \rho_0$$

$$392.4 - 2 \cdot F \leq 1.41 - 0.0029 \cdot F$$

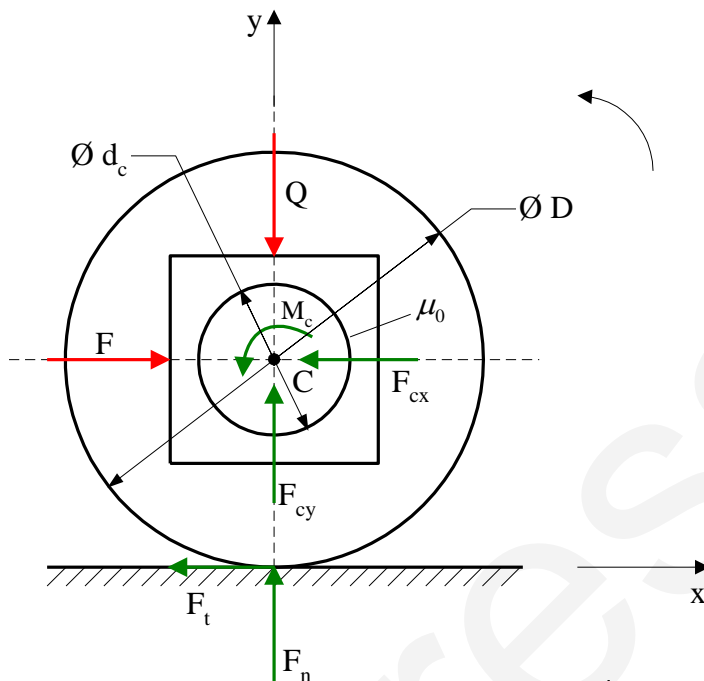
$$-1.9971 \cdot F \leq -390.99$$

$$F \geq 195.78 \text{ [N]} = F_{min}$$

$$195.78 \text{ [N]} \leq F \leq 196.62 \text{ [N]}$$

2. feladat:

Számítsuk ki a minimális és maximális értéket ( $F_{min}, F_{max}$ ) amelyek között az F erő nagysága változhat, ha az ábrán látható kerék nem gördül el. A kerék tömege és gördülési ellenállása elhanyagolható, így a kerék biztosan előbb gördül el, mint megcsúszik.



Adatok:  $D=300$  [mm],  $d_c=50$  [mm],  $Q=10$  [kN],  $\mu_0=0.1$

Megoldás:

Egyensúlyi egyenletek a kerékre:

$$\sum_i F_{ix} = F - F_t = 0 \rightarrow F_t = F$$

$$\sum_i F_{iy} = F_n - Q = 0 \rightarrow F_n = Q$$

$$\sum_i M_c = M_c - F_t \cdot \frac{D}{2} = 0 \rightarrow M_c = F_t \cdot \frac{D}{2}$$

$$\mu_0 = 0.1 = \tan \rho_0 \rightarrow \rho_0 = 5.71^\circ$$

Mivel a kerék tömege elhanyagolható:

$$F_n = F_{cy}, F_t = F_{cx}$$

$$F_c = \sqrt{F_{cx}^2 + F_{cy}^2} = \sqrt{F^2 + Q^2}$$



A kerék nem gördül el akkor, és csak akkor, ha:

$$|M_c| \leq F_c \cdot \frac{d_c}{2} \cdot \sin \rho_0$$

1. eset:

$$M_c \leq F_c \cdot \frac{d_c}{2} \cdot \sin \rho_0$$

$$F_t \cdot \frac{D}{2} \leq \sqrt{F^2 + Q^2} \cdot \frac{d_c}{2} \cdot \sin \rho_0$$

$$0.15 \cdot F \leq \sqrt{F^2 + 100} \cdot 0.0025$$

$$60 \cdot F \leq \sqrt{F^2 + 100}$$

Ha  $F > 0$

$$60 \leq \frac{\sqrt{F^2 + 100}}{F}$$

$$60 \leq \sqrt{\frac{F^2 + 100}{F^2}}$$

$$3600 \leq \frac{F^2 + 100}{F^2}$$

$$F \leq \sqrt{\frac{100}{3599}}$$

$$0 \leq F \leq 0.1667 \text{ [kN]}$$

Ha  $F < 0$ : Ezt az esetet nem szükséges megvizsgálni.

2. eset:

$$-F_c \cdot \frac{d_c}{2} \cdot \sin \rho_0 \leq M_c$$

$$-\sqrt{F^2 + Q^2} \cdot \frac{d_c}{2} \cdot \sin \rho_0 \leq F_t \cdot \frac{D}{2}$$

$$-\sqrt{F^2 + 100} \cdot 0.0025 \leq 0.15 \cdot F$$

Ha  $F < 0$

$$60 \leq \frac{-\sqrt{F^2 + 100}}{F}$$

$$60 \leq -\sqrt{\frac{F^2 + 100}{F^2}}$$



$$3600 \geq \frac{F^2 + 100}{F^2}$$

$$3600 \cdot F^2 \geq F^2 + 100$$

$$3599 \cdot F^2 \geq 100$$

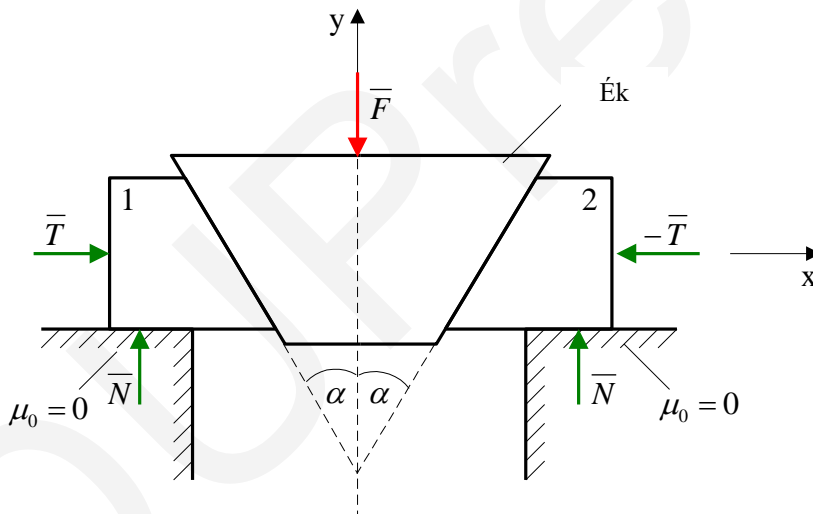
$$F^2 \geq 0.0277$$

$$-0.1667 \text{ [kN]} \leq F \leq 0$$

$$-0.1667 \text{ [kN]} \leq F \leq 0.1667 \text{ [kN]}$$

## 9.5 Ék

A 49. ábra egy elhanyagolható tömegű éket mutat. Számítsuk ki és szerkesszük meg azon minimális és maximális értéket amely között az  $F$  erő változhat, ha az ék egyensúlyban van.



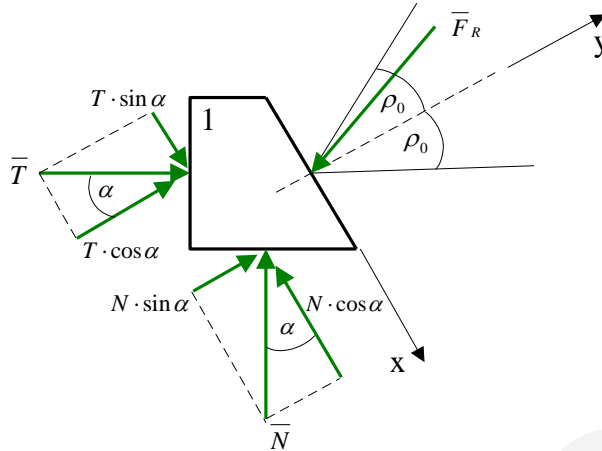
49. ábra

A mechanikai rendszer - melynek eleme az ék és az 1-es és 2-es blokk is - egyensúlyban van. Tehát:

$$\sum_i \vec{F}_i = \vec{T} - \vec{T} + \vec{F} + 2 \cdot \vec{N} = \vec{0}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -F \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \cdot N \end{pmatrix} = \vec{0} \rightarrow N = \frac{F}{2}$$

Az 1-es blokk szintén egyensúlyban van:



50. ábra.

$$\sum_i \vec{F}_i = \vec{T} + \vec{N} + \vec{F}_R = \vec{0}$$

$$\begin{pmatrix} T \cdot \sin \alpha \\ T \cdot \cos \alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -N \cdot \cos \alpha \\ N \cdot \sin \alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F_t \\ -F_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

I.  $F_t = N \cdot \cos \alpha - T \cdot \sin \alpha$

II.  $F_n = T \cdot \cos \alpha + N \cdot \sin \alpha$

Az ék egyensúlyban van akkor, és csak akkor, ha:

$$|F_t| \leq \mu_0 \cdot F_n$$

1. eset:

$$N \cdot \cos \alpha - T \cdot \sin \alpha \leq \mu_0 \cdot (T \cdot \cos \alpha + N \cdot \sin \alpha)$$

$$N \cdot \cos \alpha - T \cdot \sin \alpha \leq \mu_0 \cdot T \cdot \cos \alpha + \mu_0 \cdot N \cdot \sin \alpha$$

$$\frac{F}{2} - T \cdot \tan \alpha \leq T \cdot \tan \rho_0 + \tan \rho_0 \cdot \frac{F}{2} \cdot \tan \alpha$$

$$\frac{F}{2} - \frac{F}{2} \cdot \tan \alpha \cdot \tan \rho_0 \leq T \cdot \tan \rho_0 + T \cdot \tan \alpha$$

$$\frac{F}{2} \cdot (1 - \tan \alpha \cdot \tan \rho_0) \leq T \cdot (\tan \rho_0 + \tan \alpha)$$

$$F \leq 2 \cdot T \cdot \frac{\tan \rho_0 + \tan \alpha}{1 - \tan \alpha \cdot \tan \rho_0}$$

$$F \leq 2 \cdot T \cdot \tan(\alpha + \rho_0)$$

2. eset:

$$-\mu_0 \cdot F_n \leq F_t$$



$$-\mu_0 \cdot (T \cdot \cos \alpha + N \cdot \sin \alpha) \leq N \cdot \cos \alpha - T \cdot \sin \alpha$$

$$-\mu_0 \cdot T \cdot \cos \alpha - \mu_0 \cdot N \cdot \sin \alpha \leq N \cdot \cos \alpha - T \cdot \sin \alpha$$

$$-T \cdot \tan \rho_0 - \tan \rho_0 \cdot \frac{F}{2} \cdot \tan \alpha \leq \frac{F}{2} - T \cdot \tan \alpha$$

$$T \cdot \tan \alpha - T \cdot \tan \rho_0 \leq \frac{F}{2} + \frac{F}{2} \cdot \tan \alpha \cdot \tan \rho_0$$

$$T \cdot (\tan \alpha - \tan \rho_0) \leq \frac{F}{2} \cdot (1 + \tan \alpha \cdot \tan \rho_0)$$

$$2 \cdot T \cdot \frac{\tan \alpha - \tan \rho_0}{1 + \tan \alpha \cdot \tan \rho_0} \leq F$$

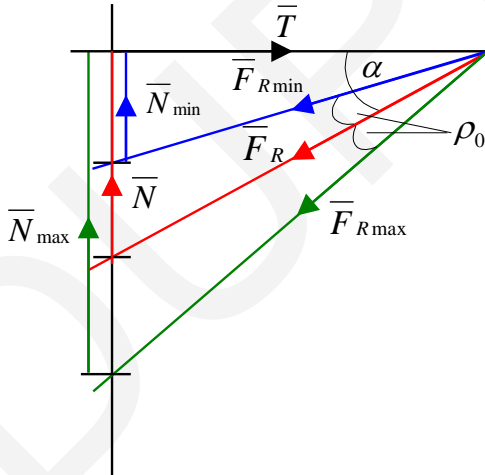
$$2 \cdot T \cdot \tan(\alpha - \rho_0) \leq F$$

Így az ék egyensúlyban van akkor, és csak akkor, ha:

$$2 \cdot T \cdot \tan(\alpha - \rho_0) \leq F \leq 2 \cdot T \cdot \tan(\alpha + \rho_0)$$

Ha  $F_{min} = 2 \cdot T \cdot \tan(\alpha - \rho_0) \leq 0 \rightarrow \alpha \leq \rho_0$  akkor az ék önzáró. Ez azt jelenti, hogy ha az  $\bar{F}$  erő nagyságát zérusra csökkentve az ék egyensúlyban marad.

Szerkesztés:



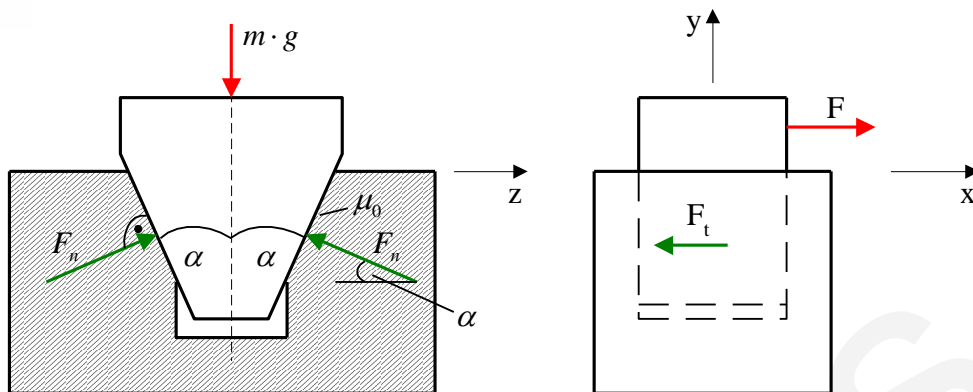
$$F_{min} = 2 \cdot N_{min}$$

$$F_{max} = 2 \cdot N_{max}$$

51. ábra.

## 9.6 Horony

Az 52. ábra egy fém blokkba mart horonyt ábrázol. A horonyban egy  $m$  tömegű ék helyezkedik el. Számítsuk ki az  $F$  erő azon maximális értékét, amely mellett az ék még egyensúlyban marad a horonyban.



52. ábra.

Egyensúlyi egyenletek az ékre:

$$\sum_i F_{ix} = F - 2 \cdot F_t = 0$$

$$\sum_i F_{iy} = -m \cdot g + 2 \cdot F_n \cdot \sin \alpha = 0$$

$$\sum_i F_{iz} = F_n \cdot \cos \alpha - F_n \cdot \cos \alpha = 0$$

Az ék egyensúlyban van akkor, és csak akkor, ha:

$$|F_t| \leq \mu_0 \cdot F_n$$

$$\text{Ha } F_t \leq \mu_0 \cdot F_n$$

$$F \leq \frac{\mu_0}{\sin \alpha} \cdot m \cdot g$$

$$\text{Ha } -\mu_0 \cdot F_n \leq F_t$$

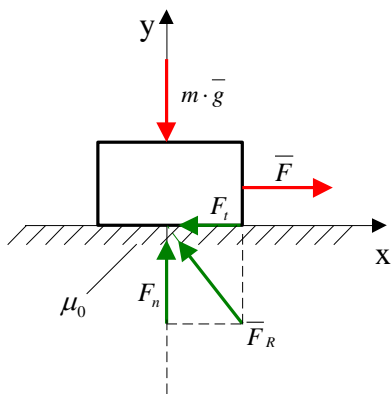
$$-\frac{\mu_0}{\sin \alpha} \cdot m \cdot g \leq F$$

$$-\frac{\mu_0}{\sin \alpha} \cdot m \cdot g \leq F \leq \frac{\mu_0}{\sin \alpha} \cdot m \cdot g$$

Bevezetjük a virtuális tapadási súrlódási tényezőt, az alábbiak szerint:

$$\mu'_0 = \frac{\mu_0}{\sin \alpha} > \mu_0$$

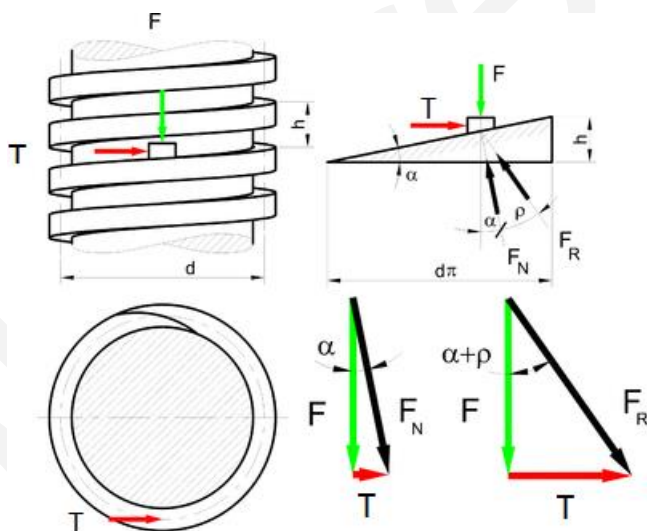
Ha  $\alpha = 90^\circ$  akkor  $\mu'_0 = \mu_0$ . Az alábbi ábra ezt a speciális esetet szemlélteti.



53. ábra.

## 9.7 Csavar

Az alábbi ábra egy lapos menetes csavart ábrázol:



54. ábra.

Az 54. ábra alapján érvényesek az alábbi egyenletek:

$$\tan \alpha = \frac{h}{d \cdot \pi}, \quad \mu = \tan \rho, \quad \tan(\alpha + \rho) = \frac{T}{F}, \quad T = F \cdot \tan(\alpha + \rho)$$

A csavar által F nagyságú erő kifejtéséhez szükséges nyomaték:

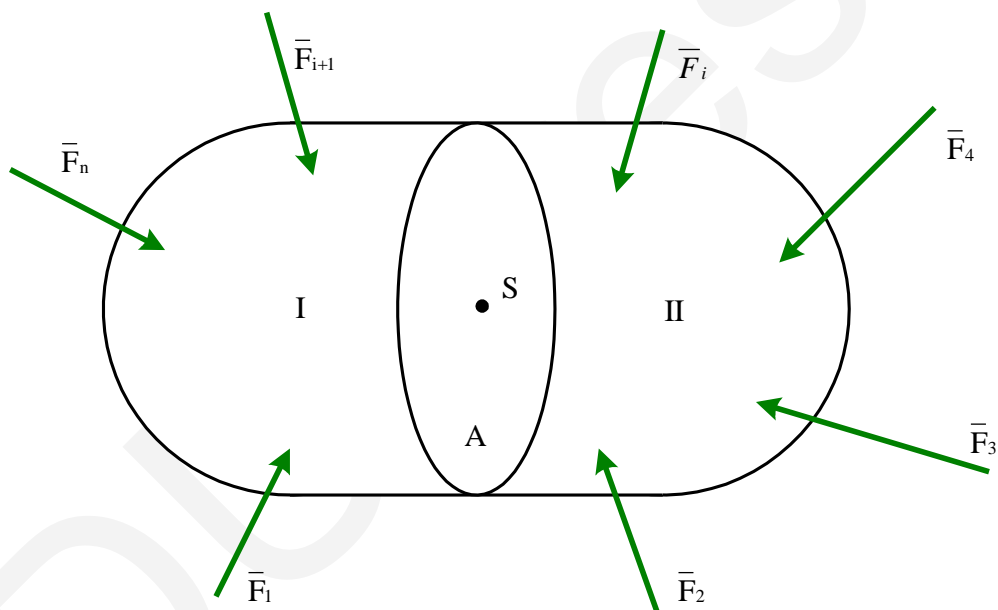
$$M_1 = \frac{d}{2} \cdot F \cdot \tan(\alpha + \rho)$$

A csavar meglazításához szükséges nyomaték:

$$M_2 = \frac{d}{2} \cdot F \cdot \tan(\alpha - \rho)$$

## 10. Igénybevétel. Tartók igénybevételi ábrái

Az előző fejezetekben azzal foglalkoztunk, hogy hogyan lehet kiszámítani az ismeretlen külső erőket és nyomatékokat egy egyensúlyban lévő mechanikai rendszer esetén. Ebben a fejezetben tovább lépünk, és a belső erők és nyomatékok kiszámításával foglalkozunk. Az 55. ábra egy merev testet mutat, amelyre az  $\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_i, \bar{F}_{i+1}, \dots, \bar{F}_n$  külső erők (terhelések) hatnak.



55. ábra.

Gondolatban vágjuk két részre a testet egy A síkkal. Az A metszősík súlypontját jelölje S.

Mivel a test egyensúlyban van:

$$\sum_{i=1}^n \bar{F}_i = \bar{F}_1 + \bar{F}_2 + \dots + \bar{F}_i + \bar{F}_{i+1} + \dots + \bar{F}_n = \vec{0} \quad (10.1)$$

$$\sum_{i=1}^n \bar{M}_i = \sum_{i=1}^n (\bar{r}_{Si} \times \bar{F}_i) = \vec{0} \quad (10.2)$$

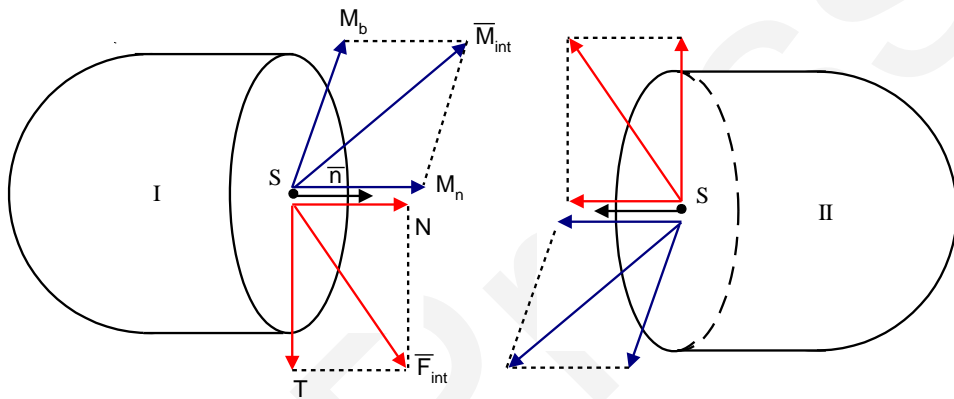


( $\vec{r}_{Si}$  azt a vektort jelöli, amely az  $S$  pontból az  $\vec{F}_i$  erő támadáspontjába mutat)

A test és minden egyes része egyensúlyban van. Az I-es rész egyensúlyát az  $\vec{F}_i, \vec{F}_{i+1} \dots \vec{F}_n$  külső erők és az  $A$  sík mentén megoszló belső erőrendszer együttesen biztosítja. A belső erőrendszer eredő erejét és  $S$  pontra vonatkozó eredő forgatónyomatékát tehát jelölje  $\vec{F}_{int}$  és  $\vec{M}_{Sint}$ .

$$\sum_i \vec{F}_i = \vec{F}_1 + \vec{F}_{i+1} + \dots + \vec{F}_n + \vec{F}_{int} = \vec{0} \quad (10.3)$$

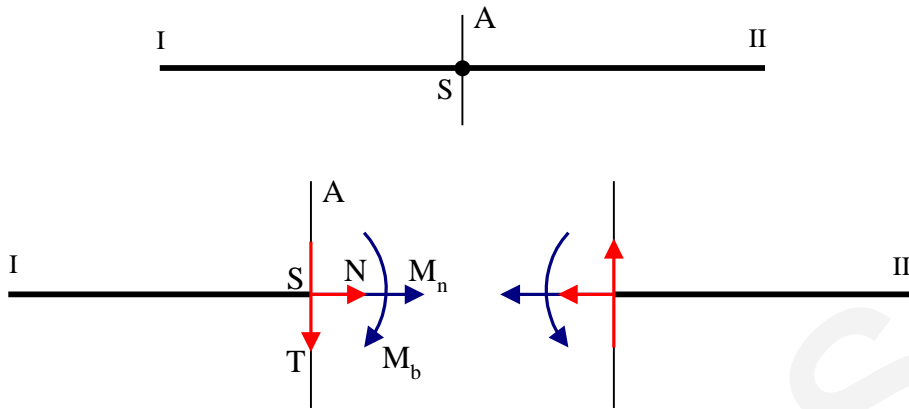
$$\sum_i \vec{M}_i = \vec{M}_1 + \vec{M}_{i+1} + \dots + \vec{M}_n + \vec{M}_{Sint} = \vec{0} \quad (10.4)$$



56. ábra.

Bontsuk fel az  $\vec{F}_{int}$  és  $\vec{M}_{Sint}$  vektorokat az  $A$  síkkal párhuzamos és a síkra merőleges komponensekre. Az  $\vec{F}_{int}$  erő  $T$  és  $N$  komponenseit nyíró és normál erőnek, míg az  $\vec{M}_{Sint}$  nyomaték  $M_b$  és  $M_n$  komponenseit hajlító és csavaró nyomatéknak nevezzük.

Speciálisan, ha a test egy ideális tartó:



57. ábra.

Ebben az esetben  $\vec{M}_b$  vektor merőleges az N és T komponensek síkjára és az I rész esetében befelé, míg a II rész esetén kifelé mutat az ábra síkjából.

Az 58. ábra a skaláris és vektoriális hajlítónyomaték közötti kapcsolatot szemlélteti jobb kezünk segítségével.



58. ábra.

Egy komponenst az alábbi táblázatban szereplő esetekben tekintünk pozitívnak:

$N > 0$			vagy
$T > 0$			vagy

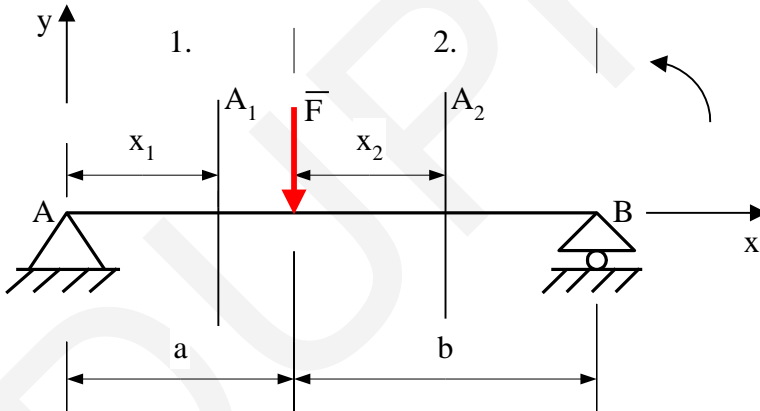


$M_n > 0$			vagy
$M_b > 0$			vagy

### Feladatok

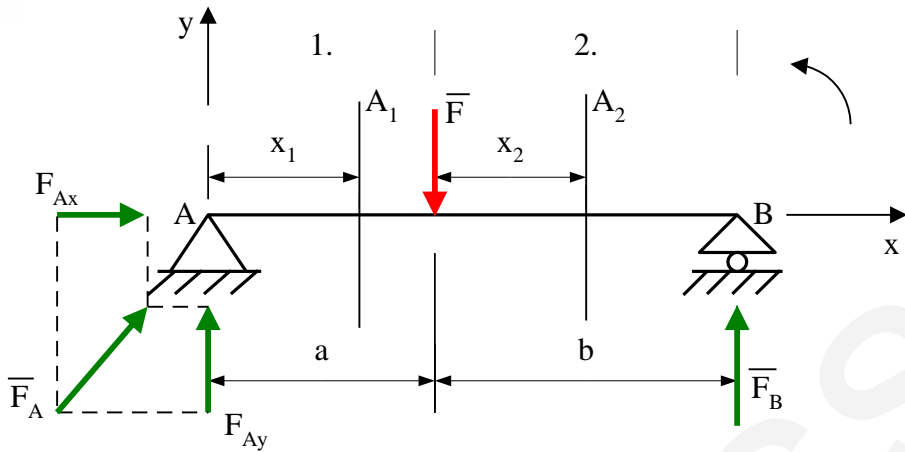
1. feladat:

- a) Számítsuk az ábrán látható kéttámaszú tartóra ható  $\bar{F}_A$  és  $\bar{F}_B$  kényszererőket!
- b) Számítsuk ki a normál erőt, nyíróerőt és hajlítónyomatékot az  $x$  koordináta függvényében!
- c) Rajzoljuk a tartó igénybevételi ábráit!



Adatok:  $F=100$  [N],  $a=3$ [m],  $b=4$  [m]

Megoldás:



a)

$$\sum_i \vec{F}_i = \vec{F} + \vec{F}_A + \vec{F}_B = \begin{pmatrix} 0 \\ -F \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F_{Ax} \\ F_{Ay} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ F_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

I.  $F_{Ax} = 0$

II.  $-F + F_{Ay} + F_B = 0 \rightarrow F_{Ay} = F - F_B = 57.14 \text{ [N]}$

III.  $\sum_i M_i = -F \cdot a + F_B \cdot (a + b) = 0 \rightarrow F_B = F \cdot \frac{a}{a+b} = 42.86 \text{ [N]}$

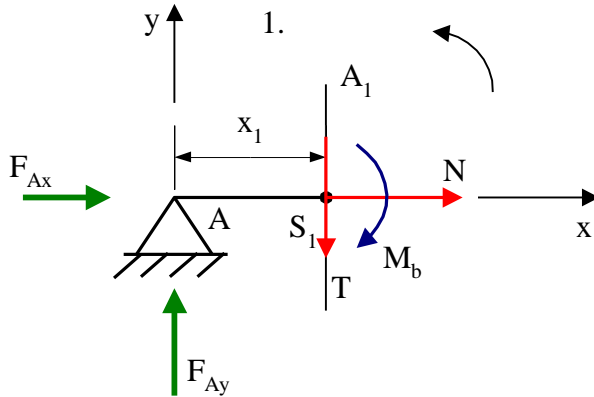
Ellenőrzés:

$$\sum_i M_B = -F_{Ay} \cdot (a + b) + F \cdot b = -57.14 \cdot (3 + 4) + 100 \cdot 4 = 0$$

b)

A koncentrált erők és nyomatékok szakaszokra osztják a tartót.

Ebben a feladatban az  $\vec{F}$  erő a tartót két szakaszra osztja (1-es és 2-es szakasz). Metszük el az 1-es és 2-es szakaszt egy  $A_1$  és  $A_2$  síkkal tetszőlegesen  $x_1$  és  $x_2$  távolságban az adott szakasz kezdőpontoktól. Jelölje  $S_1$  és  $S_2$  az  $A_1$  és  $A_2$  sík tartóval alkotott metszéspontjait. Az  $A_1$  sík az A-B tartót két részre osztja. Mindkét rész egyensúlyban van. Írjuk fel az egyensúlyi egyenleteket az A- $S_1$  szakaszra, figyelembe véve a külső valamint belső erőket és nyomatékokat.

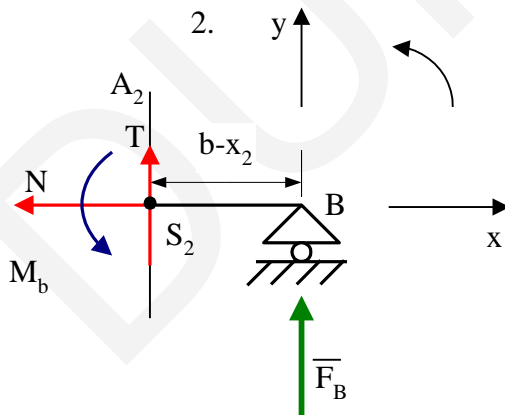


$$\sum_i F_{ix} = F_{Ax} + N = 0 \rightarrow N = -F_{Ax} = 0 \text{ [N]}$$

$$\sum_i F_{iy} = F_{Ay} - T = 0 \rightarrow T = F_{Ay} = 57.14 \text{ [N]}$$

$$\sum_i M_{S1} = -F_{Ay} \cdot x_1 - M_b = 0 \rightarrow M_b = -F_{Ay} \cdot x_1 = -57.14 \cdot x_1 \text{ [Nm]}$$

Az A<sub>2</sub> sík az A-B tartót két részre osztja. Mindkét rész egyensúlyban van. Írjuk fel az egyensúlyi egyenleteket az S<sub>2</sub>-B szakaszra.



$$\sum_i F_{ix} = -N = 0 \rightarrow N = 0 \text{ [N]}$$



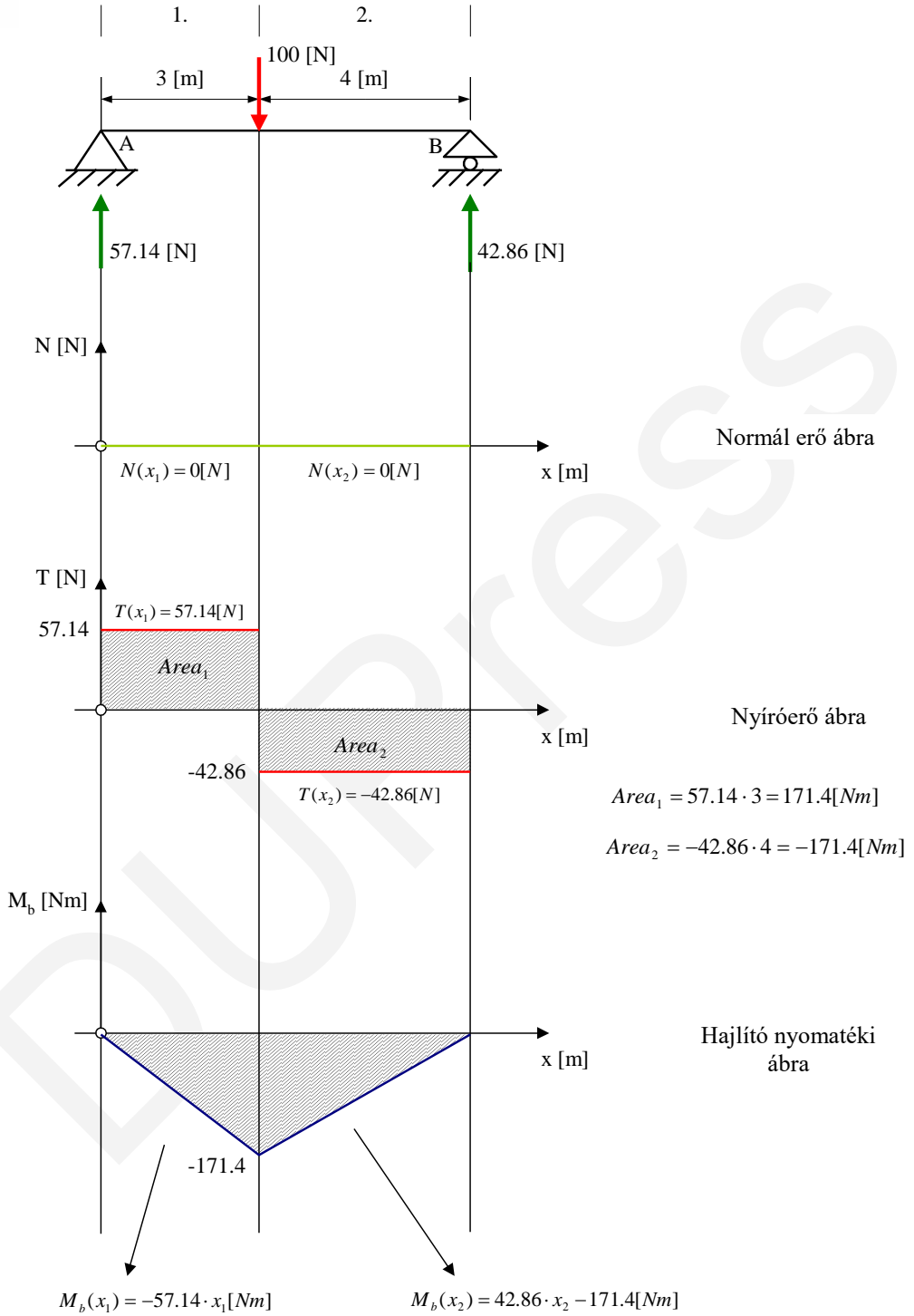
$$\sum_i F_{iy} = T + F_B = 0 \rightarrow T = -F_B = -42.86 \text{ [N]}$$

$$\sum_i M_{S_2} = M_b + F_B \cdot (b - x_2) = 0 \rightarrow M_b = -F_B \cdot (b - x_2)$$

$$= F_B \cdot x_2 - F_B \cdot b = 42,86 \cdot x_2 - 171.4 \text{ [Nm]}$$

a)

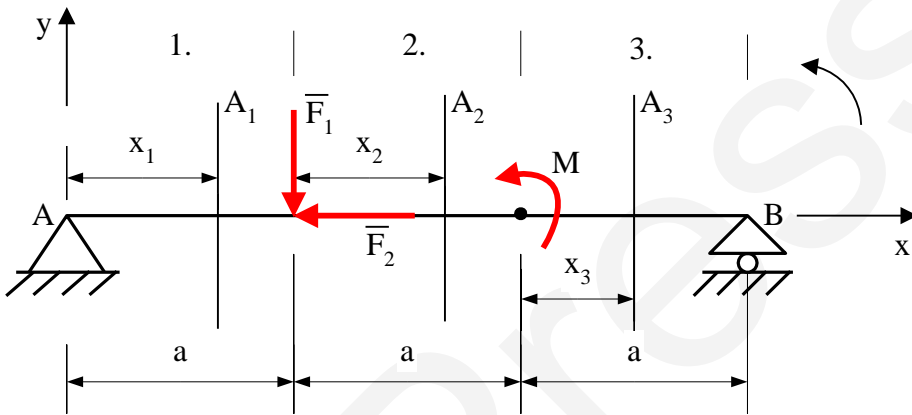
DUPRESS





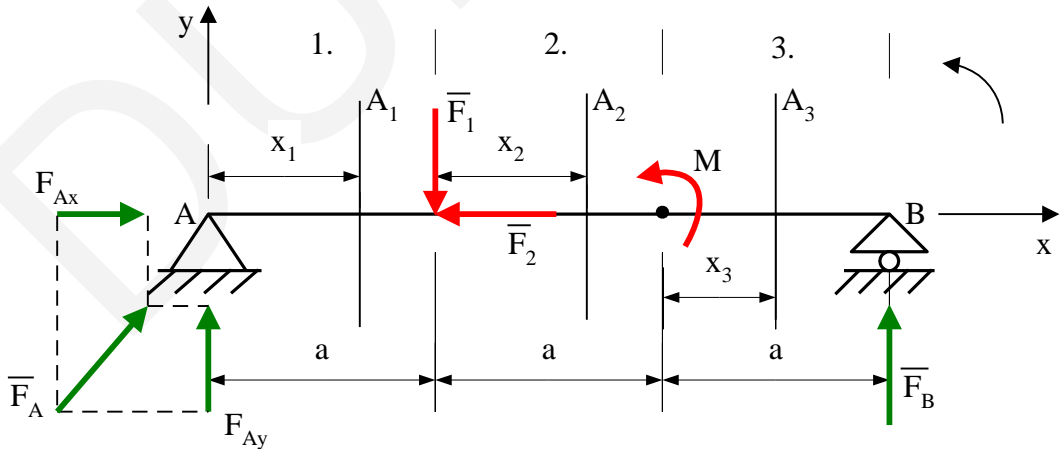
2. feladat:

- a) Számítsuk az ábrán látható kéttámaszú tartóra ható  $\bar{F}_A$  és  $\bar{F}_B$  kényszererőket!
- b) Számítsuk ki a normál erőt, nyíróerőt és hajlítónyomatékot az x koordináta függvényében!
- c) Rajzoljuk a tartó igénybevételi ábráit!



Adatok:  $F_1=100$  [N],  $F_2=100$  [N],  $M=30$  [Nm],  $a=3$ [m].

Megoldás:



a)

$$\sum_i \bar{F}_i = \bar{F}_1 + \bar{F}_2 + \bar{F}_A + \bar{F}_B = \begin{pmatrix} 0 \\ -F_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -F_2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F_{Ax} \\ F_{Ay} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ F_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$



$$\text{I. } -F_2 + F_{Ax} = 0 \rightarrow F_{Ax} = F_2 = 100 \text{ [N]}$$

$$\text{II. } -F_1 + F_{Ay} + F_B = 0 \rightarrow F_{Ay} = F_1 - F_B = 70 \text{ [N]}$$

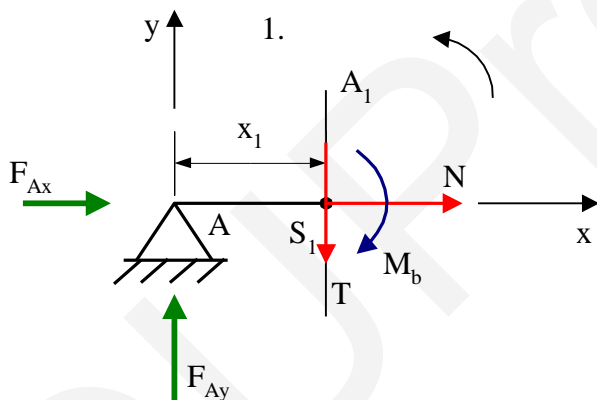
$$\text{III. } \sum_i M_i = -F_1 \cdot a + M + F_B \cdot 3a = 0 \rightarrow F_B = \frac{F_1 \cdot a - M}{3a} = 30 \text{ [N]}$$

Ellenőrzés:

$$\sum_i M_B = M + F_1 \cdot 2a - F_{Ay} \cdot 3a = 30 + 100 \cdot 6 - 70 \cdot 9 = 0$$

b)

Az  $\bar{F}_1$  és  $\bar{F}_2$  erők és az  $M$  nyomaték a tartót három szakaszra osztja. Metszük el az 1, 2 és 3 szakaszt  $A_1$ ,  $A_2$  és  $A_3$  síkokkal tetszőleges  $x_1$ ,  $x_2$  és  $x_3$  távolságra a kezdőpontoktól. Jelölje  $S_1$ ,  $S_2$  és  $S_3$  az  $A_1$ ,  $A_2$  és  $A_3$  sík tartóval alkotott metszéspontjait. Az  $A_1$  sík az A-B tartót két részre osztja. Írjuk fel a egyensúlyi egyenleteket az A- $S_1$  szakaszra, figyelembe véve a külső és belső erőket valamint nyomatékokat.

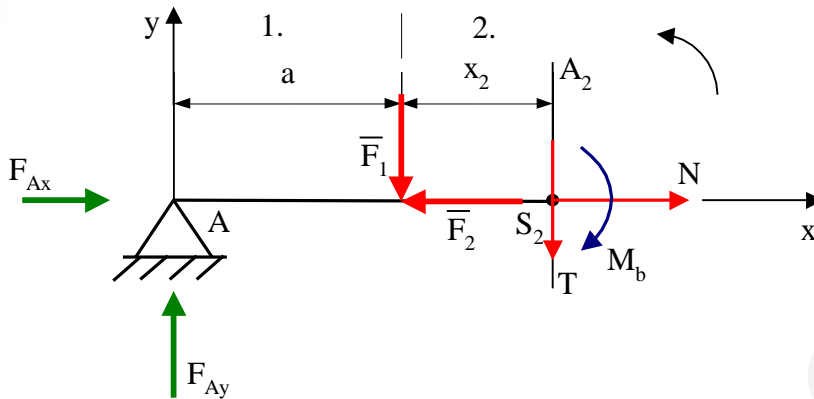


$$\sum_i F_{ix} = F_{Ax} + N = 0 \rightarrow N = -F_{Ax} = -100 \text{ [N]}$$

$$\sum_i F_{iy} = F_{Ay} - T = 0 \rightarrow T = F_{Ay} = 70 \text{ [N]}$$

$$\sum_i M_{S_1} = -F_{Ay} \cdot x_1 - M_b = 0 \rightarrow M_b = -F_{Ay} \cdot x_1 = -70 \cdot x_1 \text{ [Nm]}$$

Írjuk fel az egyensúly egyenleteket az A- $S_2$  szakaszra.



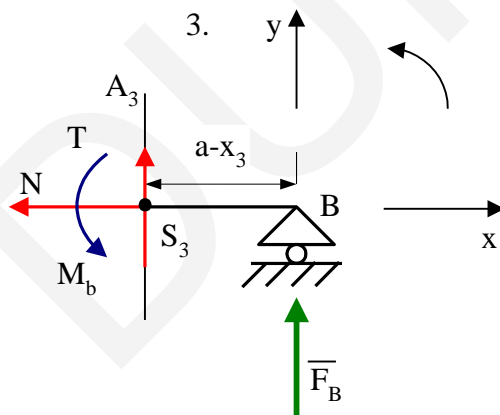
$$\sum_i F_{ix} = F_{Ax} - F_2 + N = 0 \rightarrow N = F_2 - F_{Ax} = 0 \text{ [N]}$$

$$\sum_i F_{iy} = F_{Ay} - F_1 - T = 0 \rightarrow T = F_{Ay} - F_1 = -30 \text{ [N]}$$

$$\sum_i M_i = -F_{Ay} \cdot (a + x_2) + F_1 \cdot x_2 - M_b = 0 \rightarrow$$

$$M_b = 30 \cdot x_2 - 210 \text{ [Nm]}$$

Írjuk fel az egyensúlyi egyenleteket az S<sub>3</sub>-B szakaszra.



$$\sum_i F_{ix} = -N = 0 \rightarrow N = 0 \text{ [N]}$$

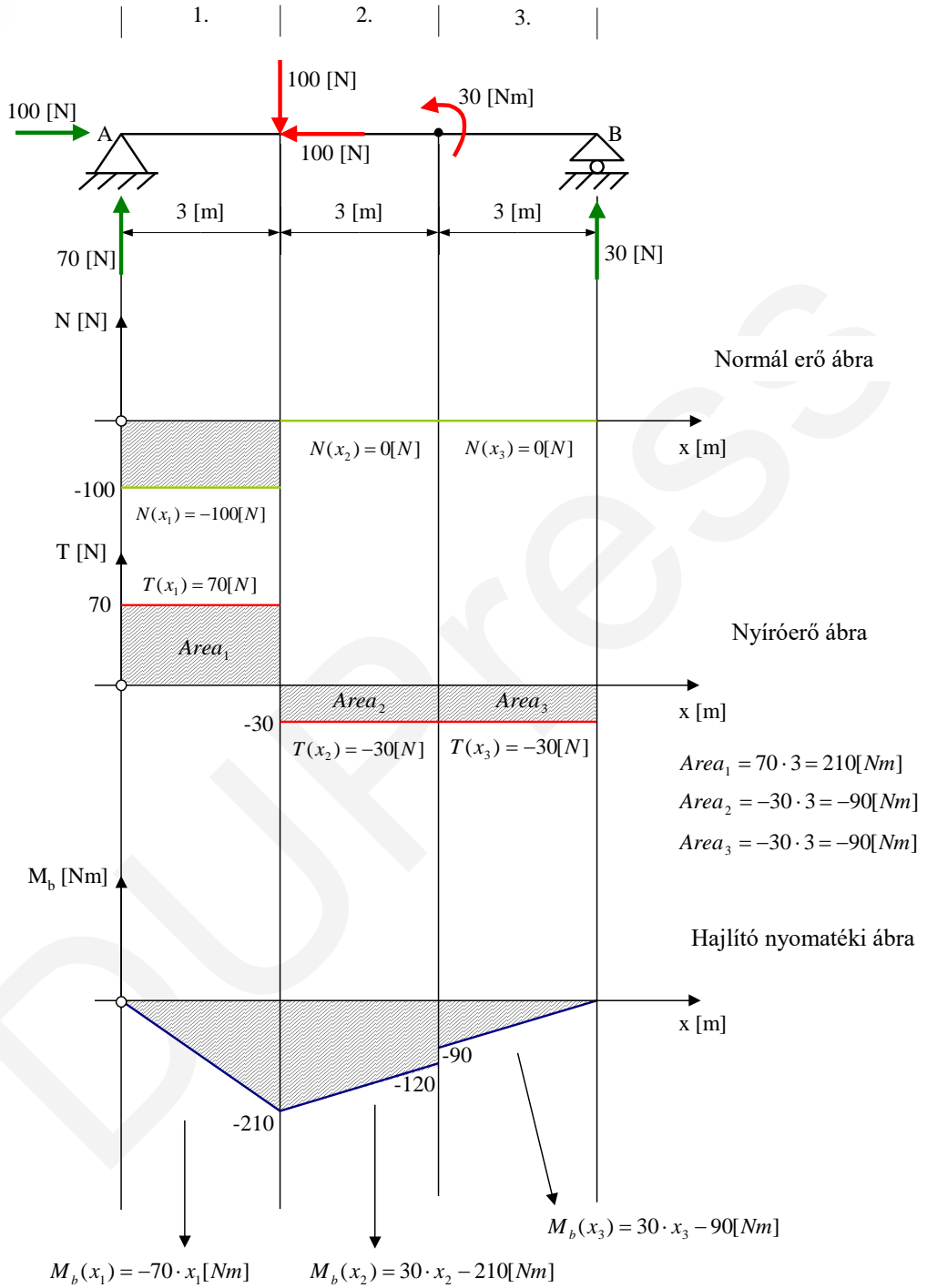


$$\sum_i F_{iy} = T + F_B = 0 \rightarrow T = -F_B = -30 \text{ [N]}$$

$$\sum_i M_{S_3} = M_b + F_B \cdot (a - x_3) = 0 \rightarrow M_b = 30 \cdot x_3 - 90 \text{ [Nm]}$$

c)

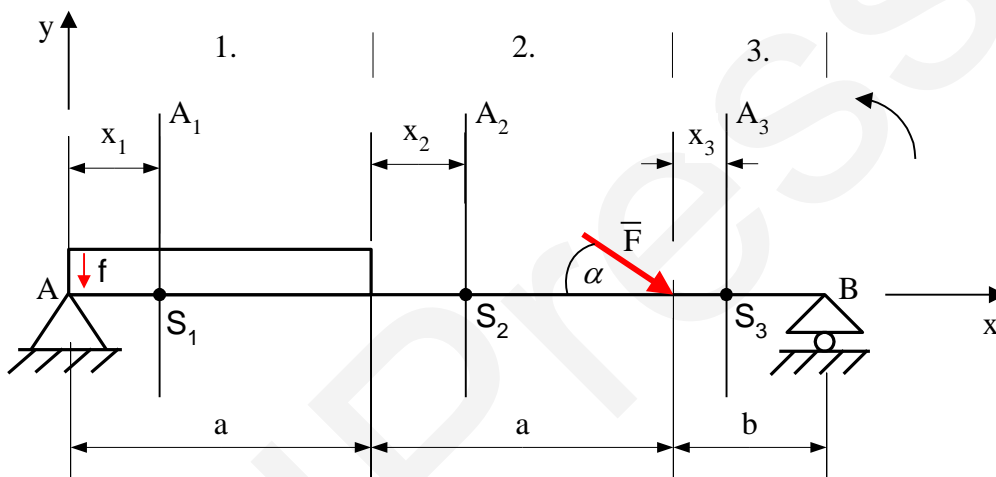
DUPress





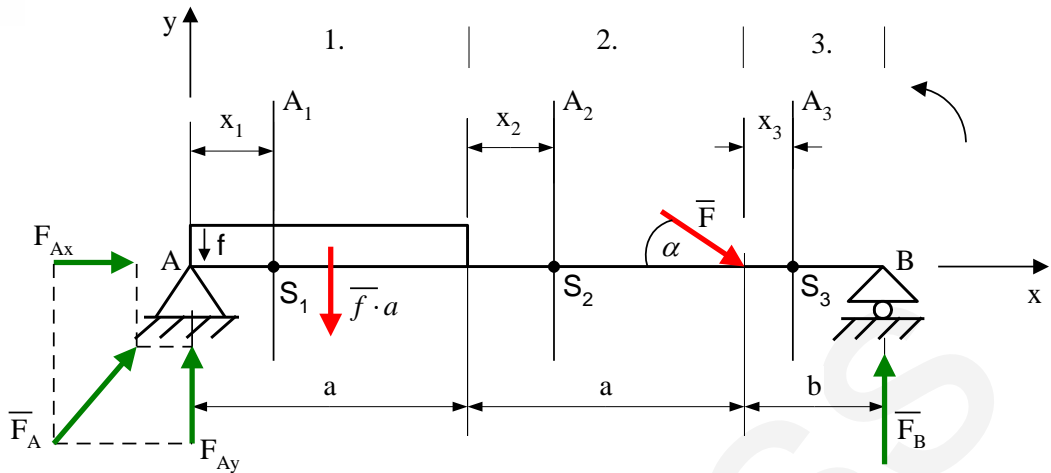
3. feladat:

- Számítsuk az ábrán látható kéttámaszú tartóra ható  $\bar{F}_A$  és  $\bar{F}_B$  kényszererőket!
- Számítsuk ki a normál erőt, nyíróerőt és hajlítónyomatékot az  $x$  koordináta függvényében!
- Rajzoljuk a tartó igénybevételi ábráit!



Adatok:  $a=2$  [m],  $b=1$  [m],  $\alpha=30^\circ$ ,  $f=5$  [kN/m],  $F=10$  [kN].

Megoldás:



a)

$$\sum_i \bar{F}_i = \bar{F}_A + \bar{f} \cdot a + \bar{F} + \bar{F}_B = \begin{pmatrix} F_{Ax} \\ F_{Ay} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -f \cdot a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F \cdot \cos \alpha \\ -F \cdot \sin \alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ F_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{I. } F_{Ax} + F \cdot \cos \alpha = 0 \rightarrow F_{Ax} = -F \cdot \cos \alpha = -8.66 \text{ [kN]}$$

$$\text{II. } F_{Ay} - f \cdot a - F \cdot \sin \alpha + F_B = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow F_{Ay} = f \cdot a + F \cdot \sin \alpha - F_B = 9 \text{ [kN]}$$

$$\text{III. } \sum_i M_A = -f \cdot a \cdot \frac{a}{2} - F \cdot \sin \alpha \cdot 2a + F_B \cdot (2a + b) = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow F_B = \frac{\frac{f \cdot a^2}{2} + F \cdot \sin \alpha \cdot 2a}{2a + b} = 6 \text{ [kN]}$$

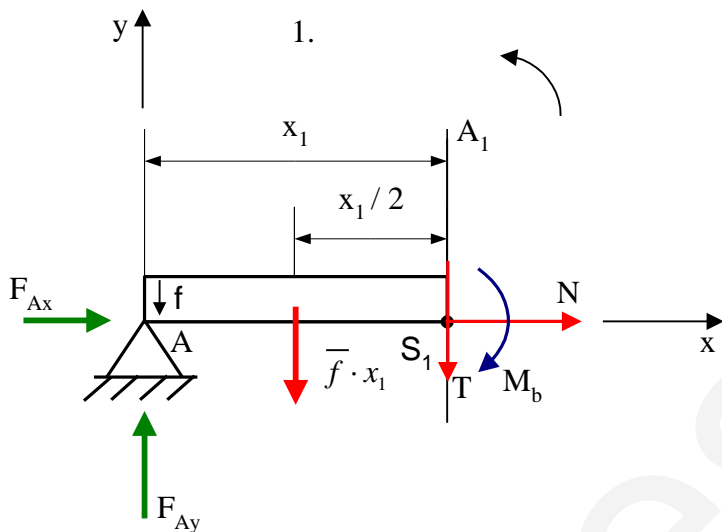
Ellenőrzés:

$$\sum_i M_B = -F_{Ay} \cdot (2a + b) + f \cdot a \cdot \left(\frac{a}{2} + a + b\right) + F \cdot \sin \alpha \cdot b =$$

$$= -9 \cdot 5 + 5 \cdot 2 \cdot 4 + 10 \cdot \sin 30^\circ \cdot 1 = 0$$



b)

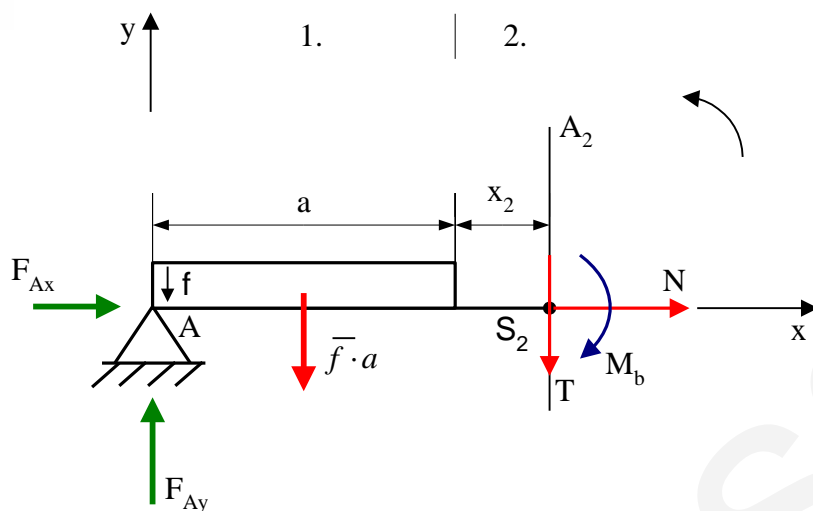


Egyensúlyi egyenletek az A-S<sub>1</sub> szakaszra:

$$\sum_i F_{ix} = F_{Ax} + N = 0 \rightarrow N = -F_{Ax} = 8.66 \text{ [kN]}$$

$$\sum_i F_{iy} = F_{Ay} - T - f \cdot x_1 = 0 \rightarrow T = F_{Ay} - f \cdot x_1 = 9 - 5 \cdot x_1 \text{ [kN]}$$

$$\begin{aligned} \sum_i M_i &= -F_{Ay} \cdot x_1 + f \cdot x_1 \cdot \frac{x_1}{2} - M_b = 0 \rightarrow M_b = f \cdot \frac{x_1^2}{2} - F_{Ay} \cdot x_1 \\ &= \frac{5}{2} \cdot x_1^2 - 9 \cdot x_1 \text{ [kNm]} \end{aligned}$$



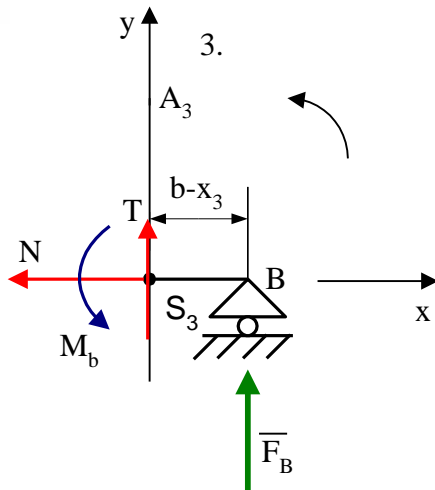
Egyensúlyi egyenletek az A-S<sub>2</sub> szakaszra:

$$\sum_i F_{ix} = F_{Ax} + N = 0 \rightarrow N = -F_{Ax} = 8.66 \text{ [kN]}$$

$$\sum_i F_{iy} = F_{Ay} - f \cdot a - T = 0 \rightarrow T = F_{Ay} - f \cdot a = -1 \text{ [kN]}$$

$$\sum_i M_{S_2} = -F_{Ay} \cdot (a + x_2) + f \cdot a \cdot \left(\frac{a}{2} + x_2\right) - M_b = 0$$

$$M_b = (f \cdot a - F_{Ay}) \cdot x_2 + f \cdot \frac{a^2}{2} - F_{Ay} \cdot a \rightarrow M_b = x_2 - 8 \text{ [kNm]}$$



Egyensúlyi egyenletek az  $S_3$ -B szakaszra:

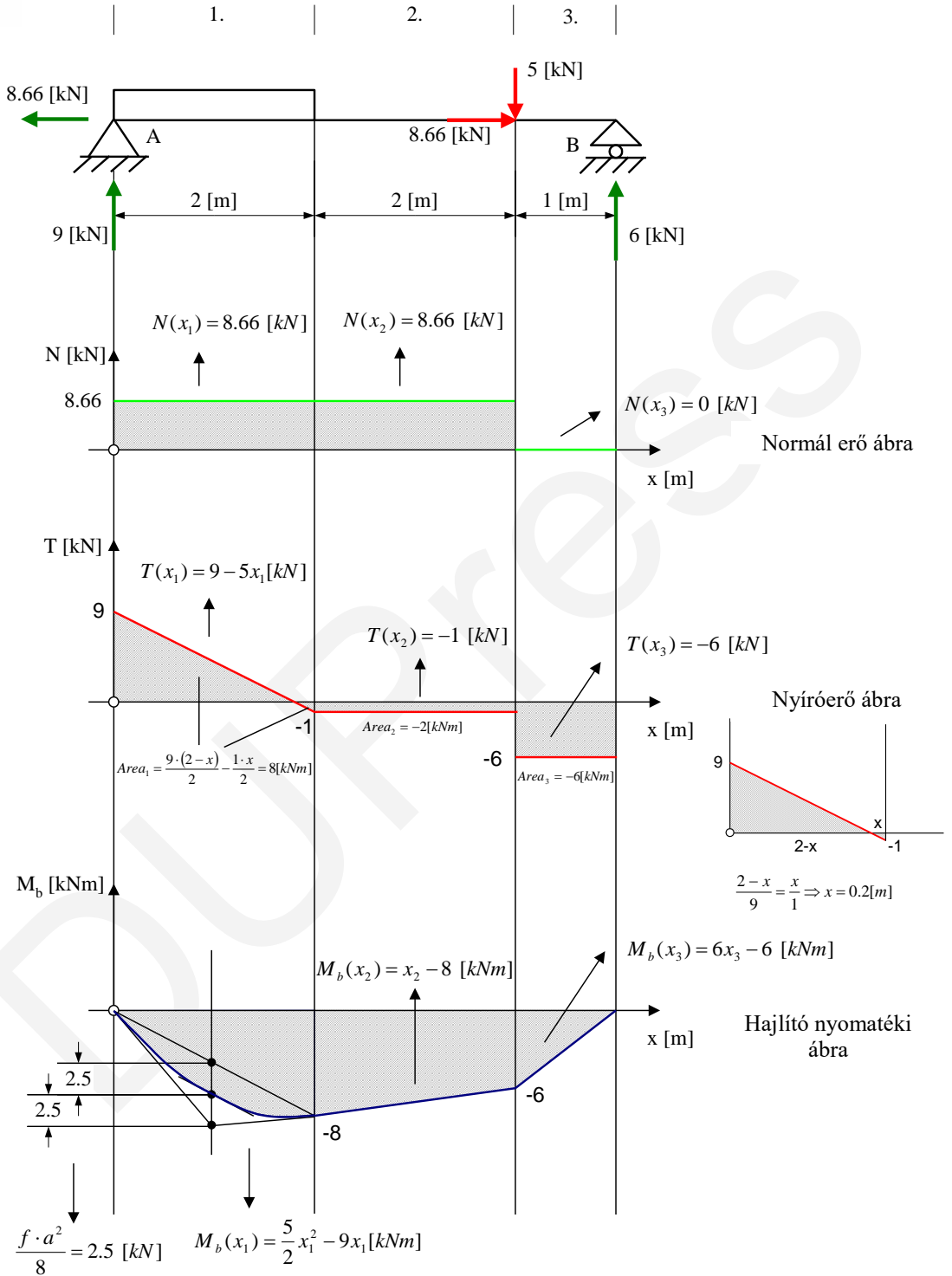
$$\sum_i F_{ix} = -N = 0 \rightarrow N = 0 \text{ [kN]}$$

$$\sum_i F_{iy} = T + F_B = 0 \rightarrow T = -F_B = -6 \text{ [kN]}$$

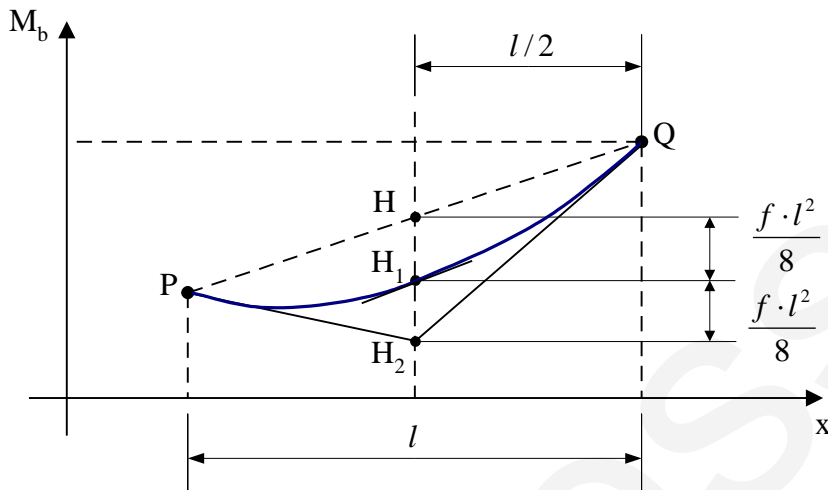
$$\sum_i M_{S_3} = M_b + F_B \cdot (b - x_3) = 0 \rightarrow M_b = F_B \cdot x_3 - F_B \cdot b \rightarrow$$

$$M_b = 6 \cdot x_3 - 6 \text{ [kNm]}$$

c)



Az alábbi ábra a parabolaív szerkesztési eljárását szemlélteti. Az ábrán  $f$  jelöli a megoszló terhelés intenzitását az adott szakaszon.



A szerkesztés lépései:

- 1) Kössük össze az ábra adott szakaszhoz tartozó kezdő és végpontjait (P és Q) szaggatott vonallal.
- 2) Húzzunk függőleges egyenest a szakasz felezőpontján (H) keresztül szintén szaggatott vonallal.
- 3) Mérjük fel a  $\frac{f \cdot l^2}{8}$  kifejezés értékét a H pontból kétszer lefelé (H<sub>1</sub> és H<sub>2</sub> pontok)
- 4) Kössük össze a P és Q pontokat a H<sub>2</sub> ponttal. A P-H<sub>2</sub> és H<sub>2</sub>-Q szakasz a parabola érintőjét adja a P és Q pontokban.
- 5) Húzzunk a P-Q szakasszal párhuzamost a H<sub>1</sub> ponton keresztül, így megkapjuk a parabola érintőjét a H<sub>1</sub> pontban.
- 6) Rajzoljuk meg a parabolaívet figyelembe véve a P, H<sub>1</sub> és Q pontokban berajzolt érintőket.

## 11. Az igénybevételi ábrák rajzolásának egyszerű szabályai

A 10. fejezetben megrajzolt igénybevételi ábrák részletes megfigyelésével kimondhatunk néhány egyszerű szabályt az ábrák rajzolásához. A következő szabályok alkalmazásával könnyen rajzolhatunk a diagramokat anélkül, hogy kiszámolnánk a normál erőt, a nyíróerőt és a hajlító nyomatékokat.

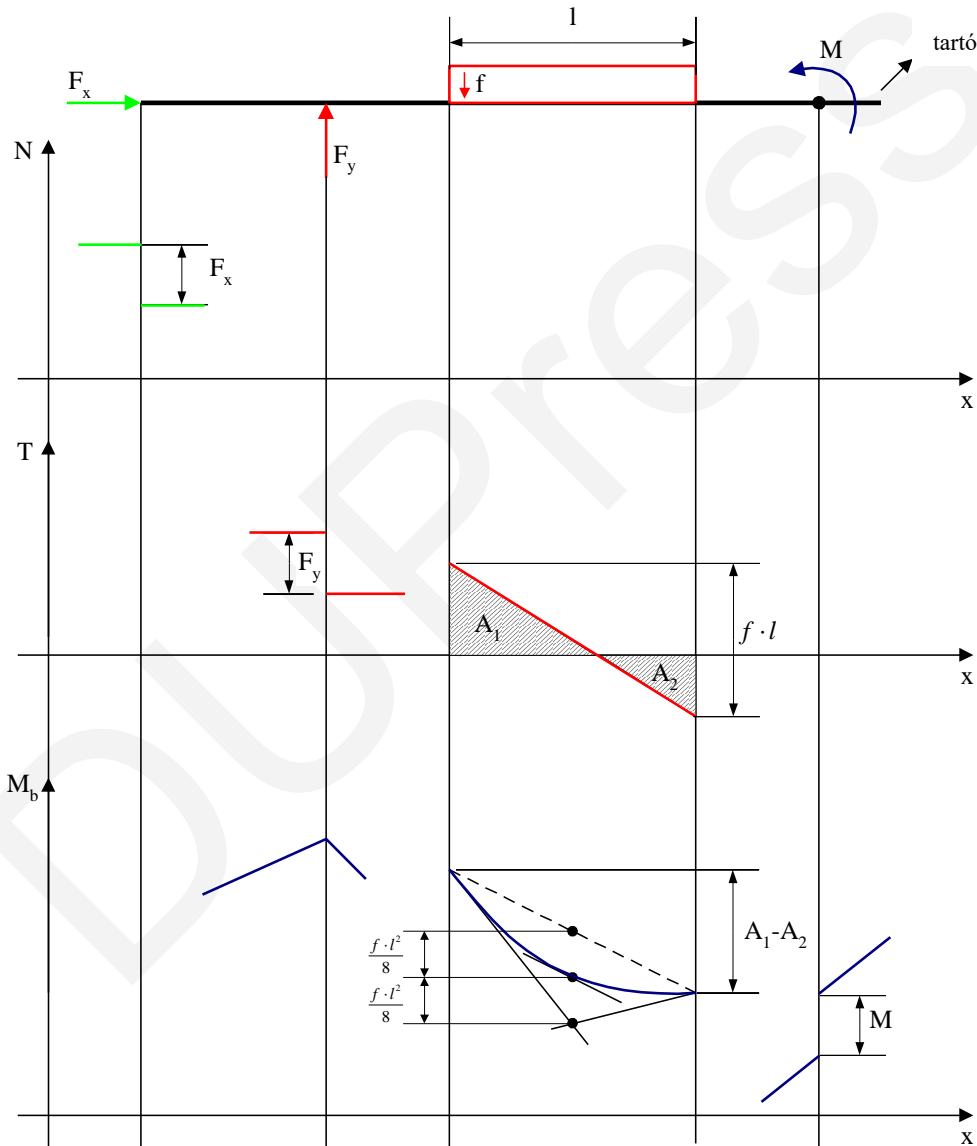


1. szabály:

Az ábrák rajzolásakor mindig zérus függvényértékből indulunk.

2. szabály:

A különböző típusú erők és nyomatékok hatását az igénybevételi ábrákra az alábbi ábra szerint vesszük figyelembe:



59. ábra.



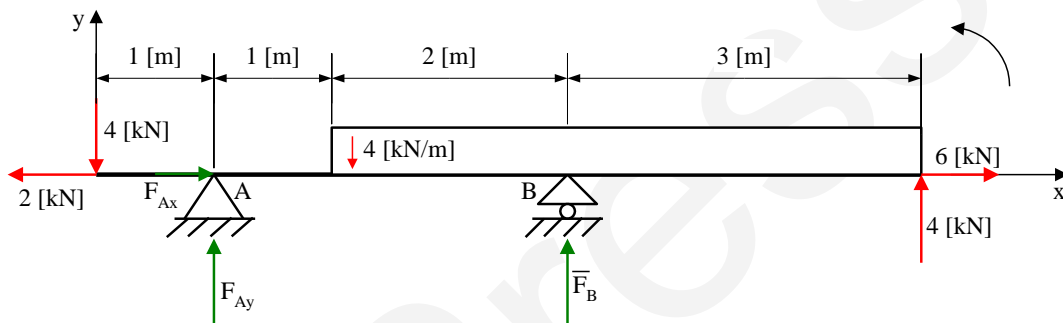
3. szabály:

A tartó végén zérus függvényértékbe kell érkeznünk.

**Feladatok**

1. feladat:

Számítsuk ki az az ábrán látható kéttámaszú tartóra ható  $\bar{F}_A$  és  $\bar{F}_B$  kényszererőket, majd rajzoljuk meg a tartó igénybevételi ábráit!



Megoldás:

Számítás:

$$\sum_i F_{ix} = -2 + F_{Ax} + 6 = 0 \rightarrow F_{Ax} = -4[kN]$$

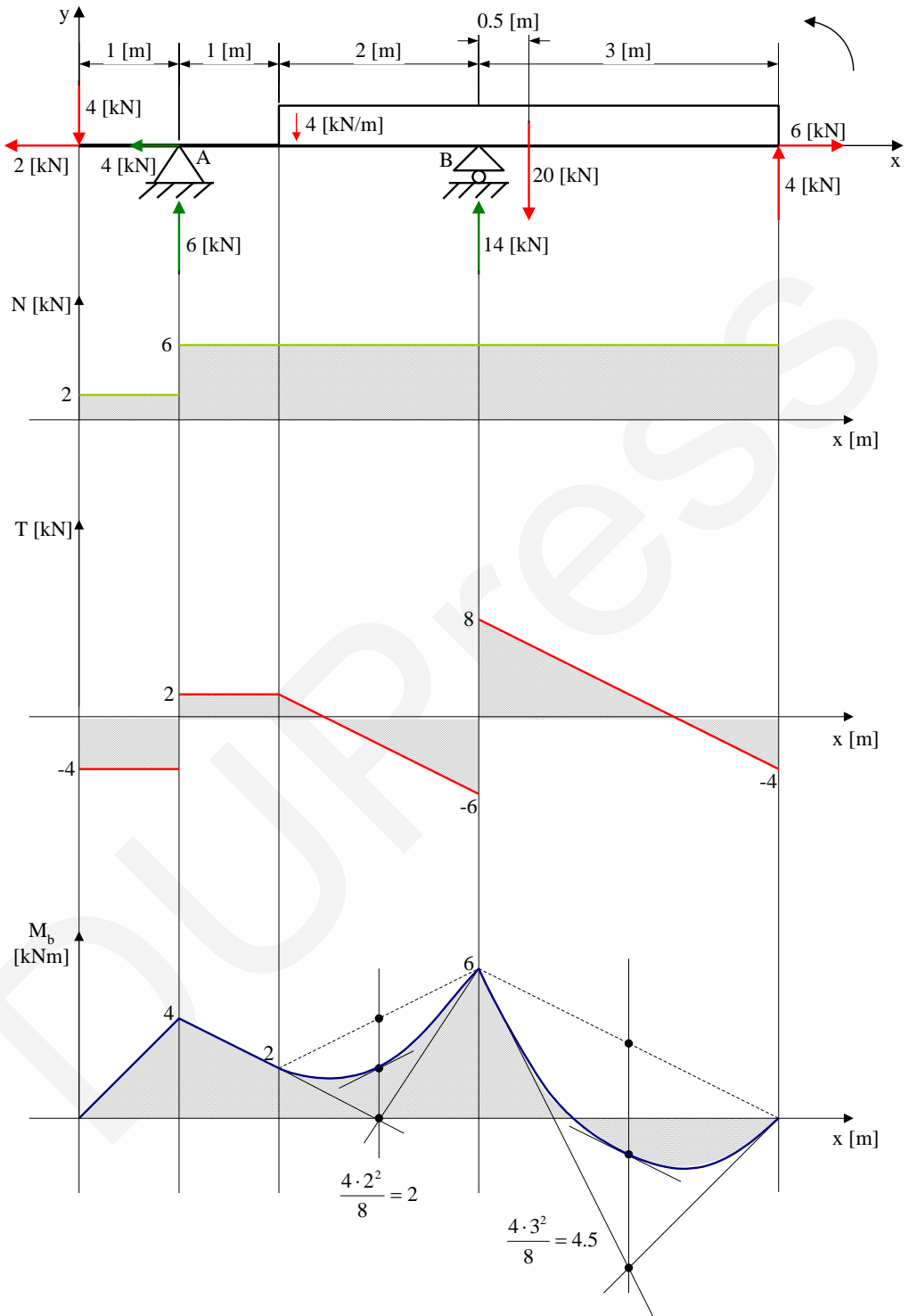
$$\sum_i F_{iy} = -4 + F_{Ay} - 4 \cdot 5 + F_B + 4 = 0 \rightarrow F_{Ay} = 6[kN]$$

$$\begin{aligned} \sum_i M_A = 4 \cdot 1 - 4 \cdot (2 + 3) \cdot (1 + 2 + 0.5) + F_B \cdot 3 + 4 \cdot (1 + 2 + 3) = \\ = 0 \rightarrow F_B = 14[kN] \end{aligned}$$

Ellenőrzés:

$$\sum_i M_B = 4 \cdot (1 + 1 + 2) - F_{Ay} \cdot (1 + 2) - 4 \cdot (2 + 3) \cdot 0.5 + 4 \cdot 3 = 0$$

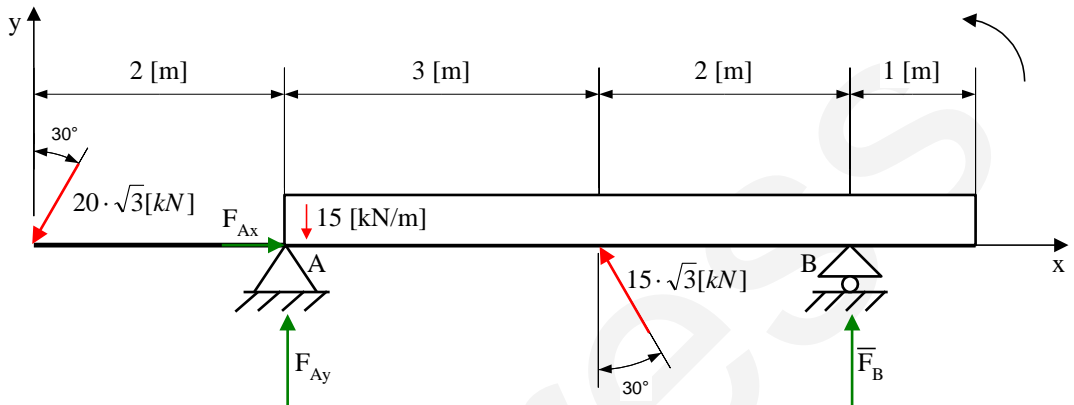
Igénybevételi ábrák:





2. feladat:

Számítsuk ki az az ábrán látható kéttámaszú tartóra ható  $\bar{F}_A$  és  $\bar{F}_B$  kényszererőket, majd rajzoljuk meg a tartó igénybevételi ábráit!



Megoldás:

Számítás:

$$\sum_i F_{ix} = -20 \cdot \sqrt{3} \cdot \sin 30^\circ + F_{Ax} - 15 \cdot \sqrt{3} \cdot \sin 30^\circ = 0 \rightarrow F_{Ax} = 30.31 [kN]$$

$$\sum_i F_{iy} = -20 \cdot \sqrt{3} \cdot \cos 30^\circ + F_{Ay} - 15 \cdot (3 + 2 + 1) + 15 \cdot \sqrt{3} \cdot \cos 30^\circ + F_{By} = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow F_{Ay} = 69 [kN]$$

$$\sum_i M_A = 20 \cdot \sqrt{3} \cdot \cos 30^\circ \cdot 2 + 15 \cdot \sqrt{3} \cdot \cos 30^\circ \cdot 3 + F_{By} \cdot 5 - 15 \cdot (3 + 2 + 1) \cdot 3 = 0 \rightarrow F_{By} = 28.5 [kN]$$

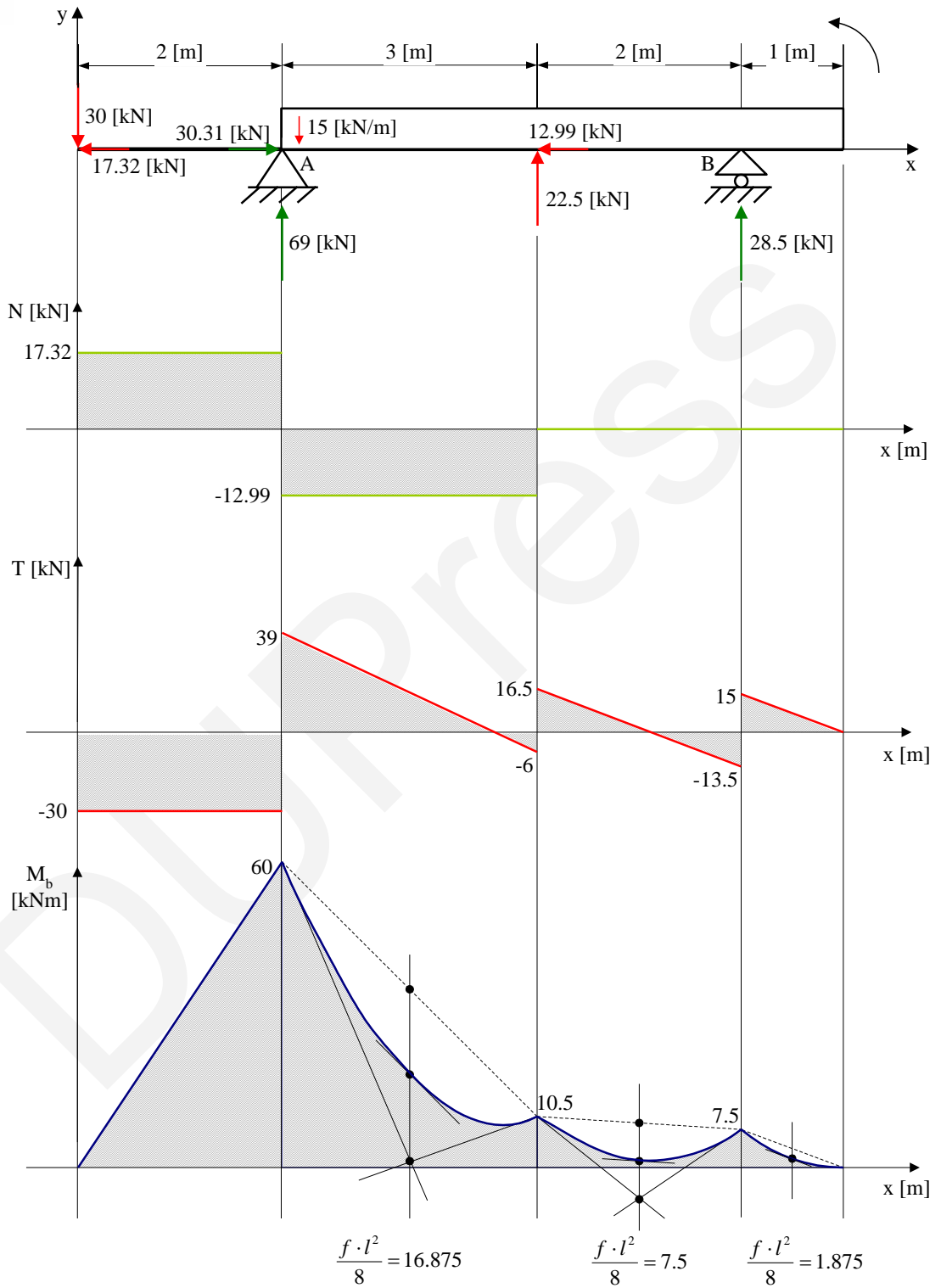


Ellenőrzés:

$$\sum_i M_B = -15 \cdot 1 \cdot 0.5 + 15 \cdot 5 \cdot 2.5 - 15 \cdot \sqrt{3} \cdot \cos 30^\circ \cdot 2 - 69 \cdot 5 + 20 \cdot \sqrt{3} \cdot \cos 30^\circ \cdot 7 = 0$$

Igénybevételi ábrák:

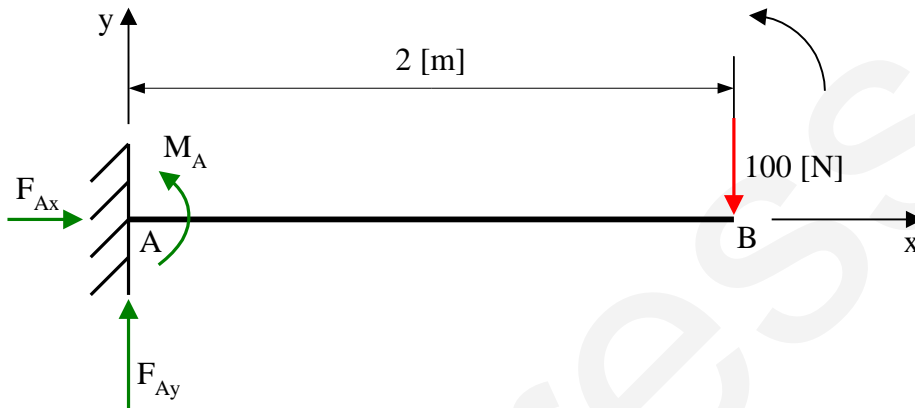
DUPress





3. feladat:

Számítsuk ki az A pontban érbedő reakcióerők és nyomatékot az ábrán látható befogott tartó esetén. Rajzoljuk meg a tartó igénybevételi ábráit.



Megoldás:

Számítás:

$$\sum_i M_i = M_A - 100 \cdot 2 = 0 \rightarrow M_A = 200 \text{ [Nm]}$$

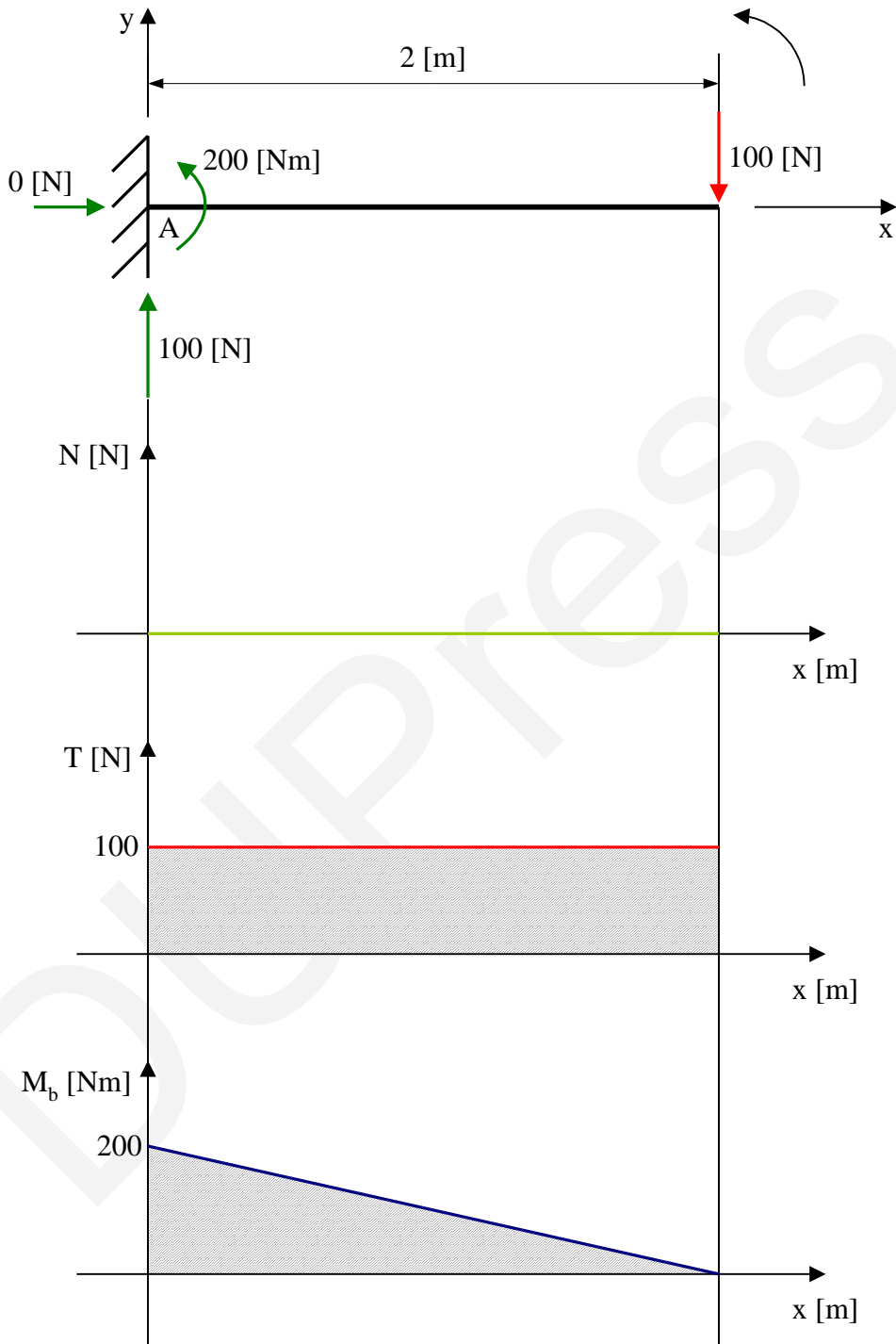
$$\sum_i F_{ix} = F_{Ax} = 0 \text{ [N]}$$

$$\sum_i F_{iy} = F_{Ay} - 100 = 0 \rightarrow F_{Ay} = 100 \text{ [N]}$$

Ellenőrzés:

$$\sum_i M_i = -100 \cdot 2 + 200 = 0$$

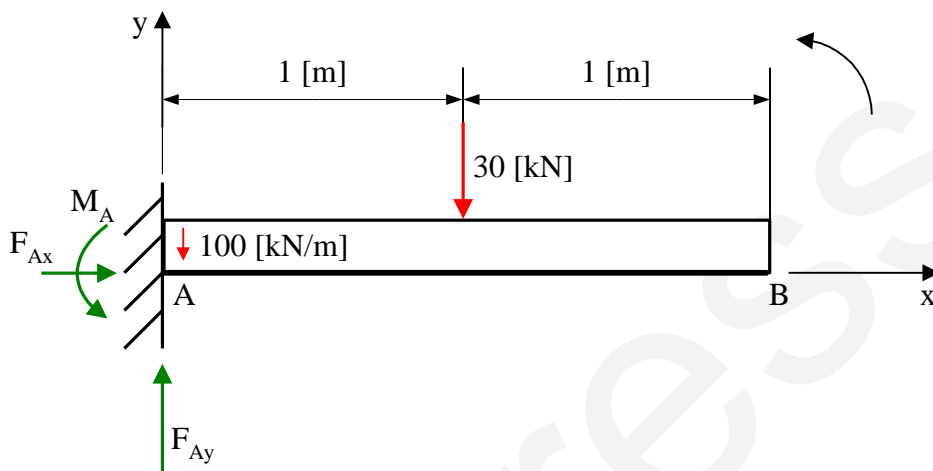
Igénybevételi ábrák:





4. feladat:

Számítsuk ki az A pontban érbedő reakcióerők és nyomatékot az ábrán látható befogott tartó esetén. Rajzoljuk meg a tartó igénybevételi ábráit.



Megoldás:

Számítás:

$$\sum_i M_i = M_A - 30 \cdot 1 - 100 \cdot (1 + 1) \cdot 1 = 0 \rightarrow M_A = 230 \text{ [kNm]}$$

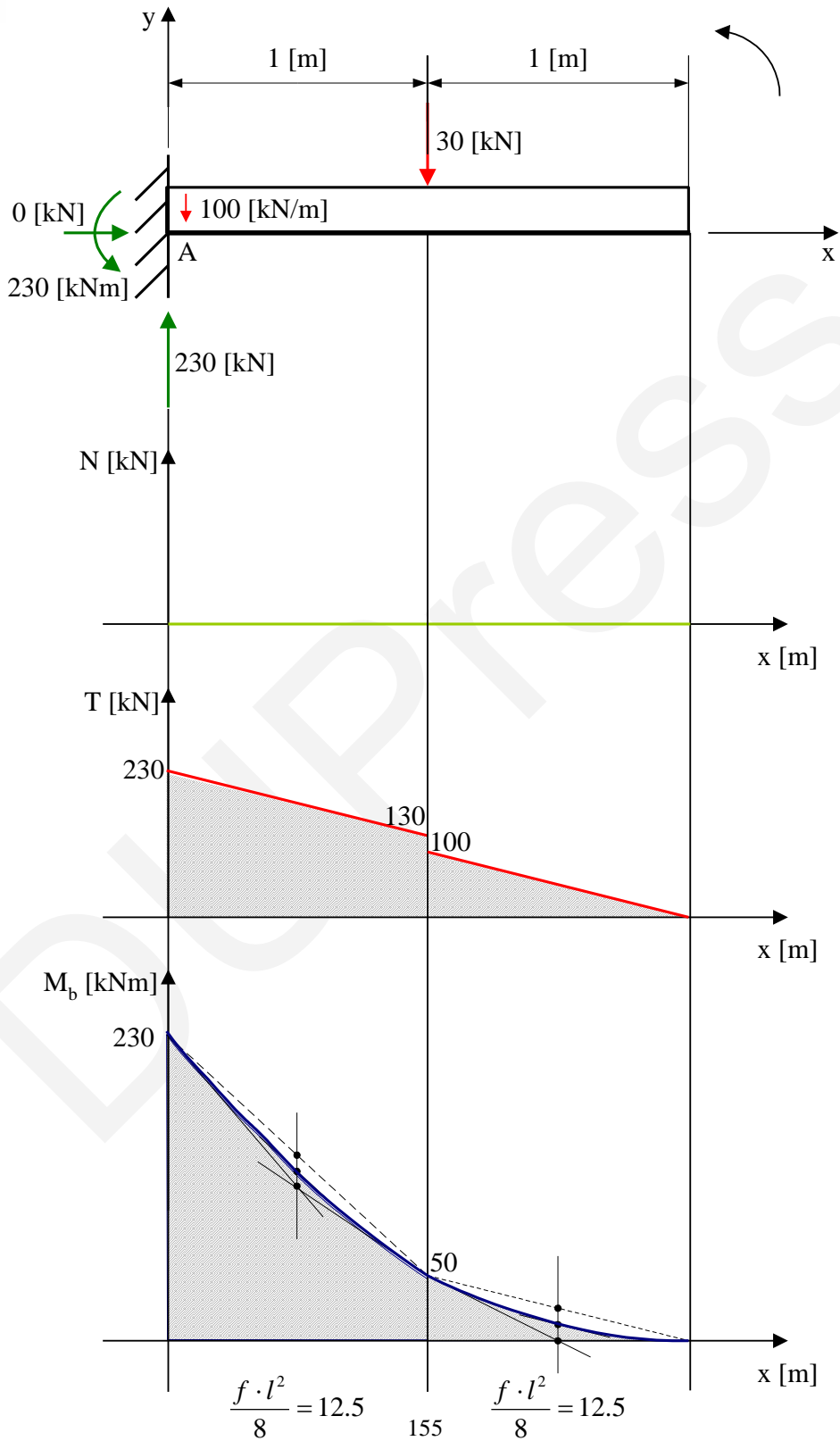
$$\sum_i F_{ix} = F_{Ax} = 0 \text{ [kN]}$$

$$\sum_i F_{iy} = F_{Ay} - 30 - 100 \cdot (1 + 1) = 0 \rightarrow F_{Ay} = 230 \text{ [kN]}$$

Ellenőrzés:

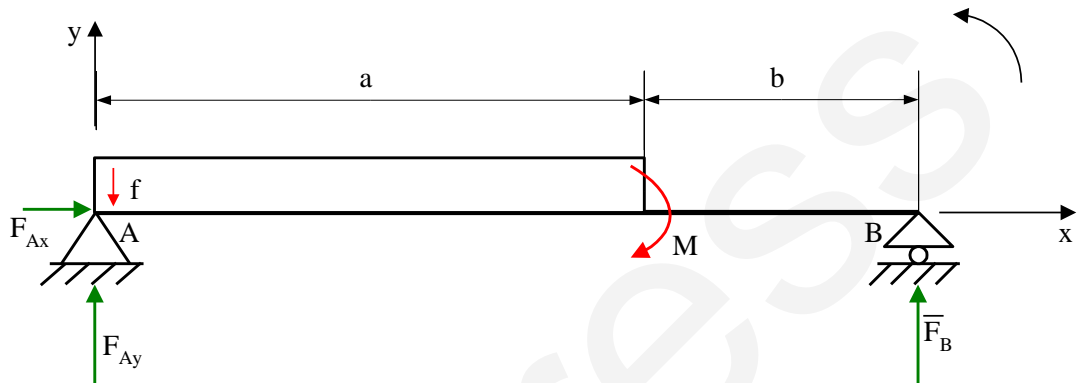
$$\sum_i M_i = 30 \cdot 1 + 100 \cdot 2 \cdot 1 - 230 \cdot 2 + 230 = 0$$

Igénybevételi ábrák:



5. feladat:

Számítsuk ki az az ábrán látható kéttámaszú tartóra ható  $\bar{F}_A$  és  $\bar{F}_B$  kényszererőket, majd rajzoljuk meg a tartó igénybevételi ábráit!



Adatok:  $f=10$  [kN/m],  $a=0.4$  [m],  $b=0.2$  [m],  $M=2$  [kNm]

Megoldás:

Számítás:

$$\sum_i M_i = -f \cdot a \cdot \frac{a}{2} - M + F_B \cdot (a + b) = 0 \rightarrow F_B = 4.666 \text{ [kN]}$$

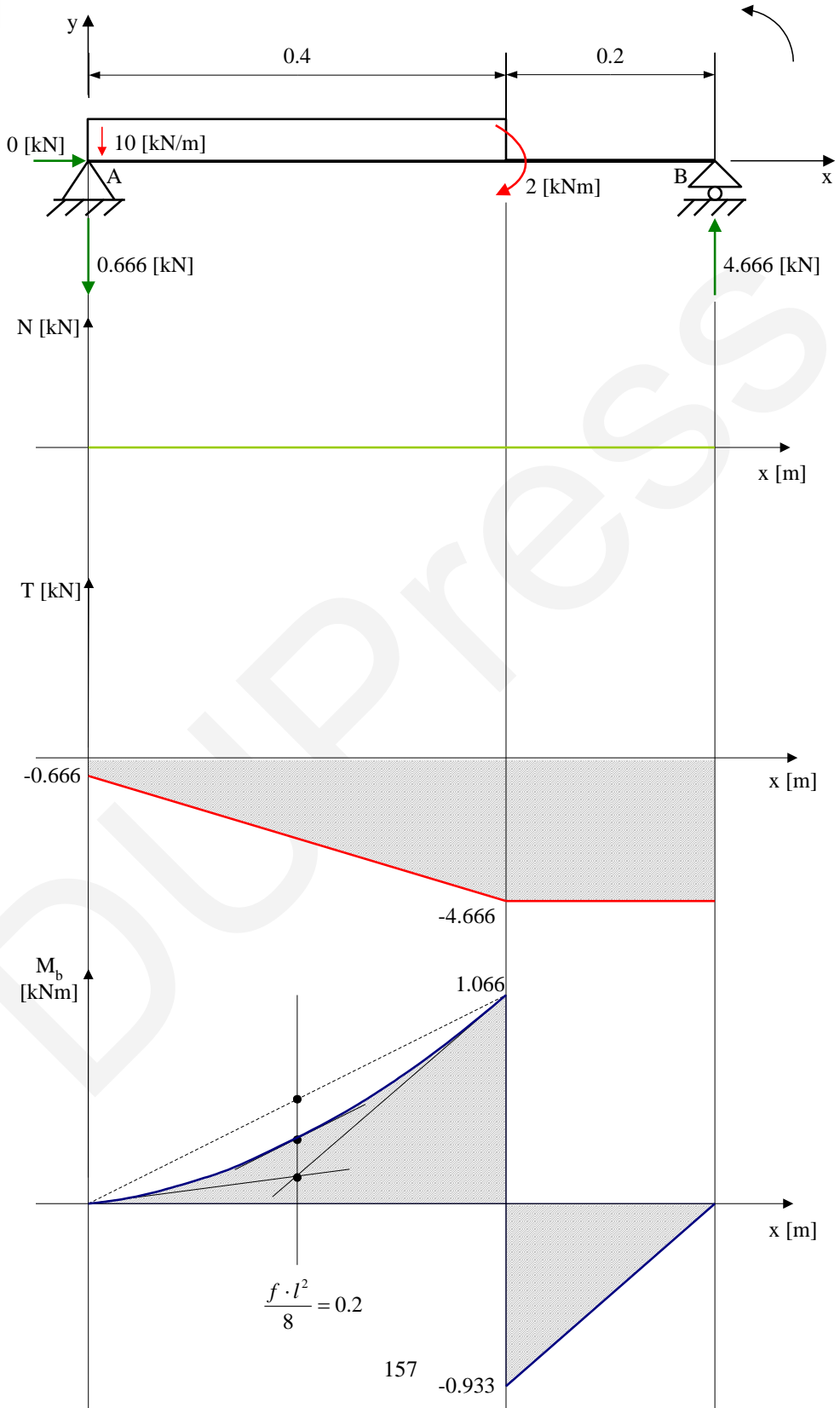
$$\sum_i F_{ix} = F_{Ax} = 0 \text{ [kN]}$$

$$\sum_i F_{iy} = F_{Ay} - f \cdot a + F_B = 0 \rightarrow F_{Ay} = -0.666 \text{ [kN]}$$

Ellenőrzés:

$$\sum_i M_i = 10 \cdot 0.4 \cdot 0.4 + 0.666 \cdot 0.6 - 2 = 0$$

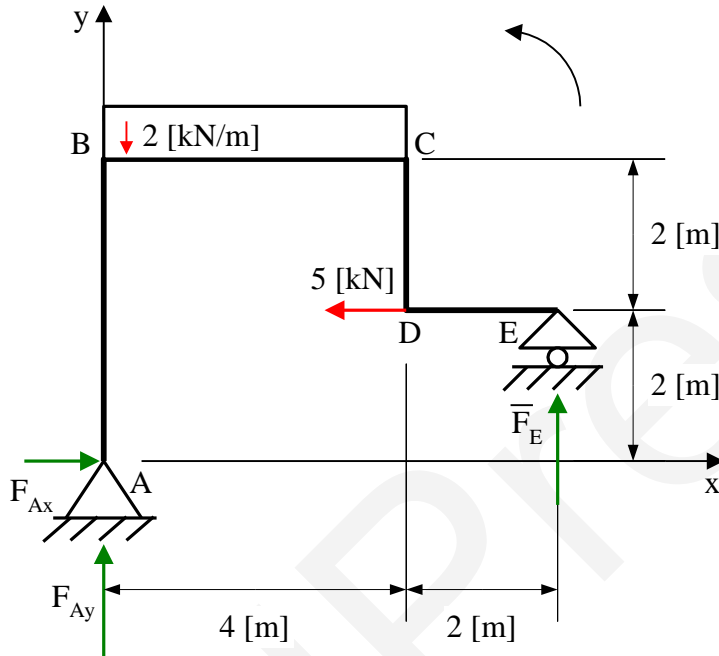
Igénybevételi ábrák:





6. feladat:

Számítsuk ki az ábrán látható törtvonalú tartóra ható  $\bar{F}_A$  és  $\bar{F}_E$  kényszererőket! Rajzoljuk meg a tartó igénybevételi ábráit!



Megoldás:

Számítás:

$$\sum_i M_i = -2 \cdot 4 \cdot 2 + 5 \cdot 2 + F_E \cdot 6 = 0 \rightarrow F_E = 1 \text{ [kN]}$$

$$\sum_i F_{ix} = F_{Ax} - 5 = 0 \rightarrow F_{Ax} = 5 \text{ [kN]}$$

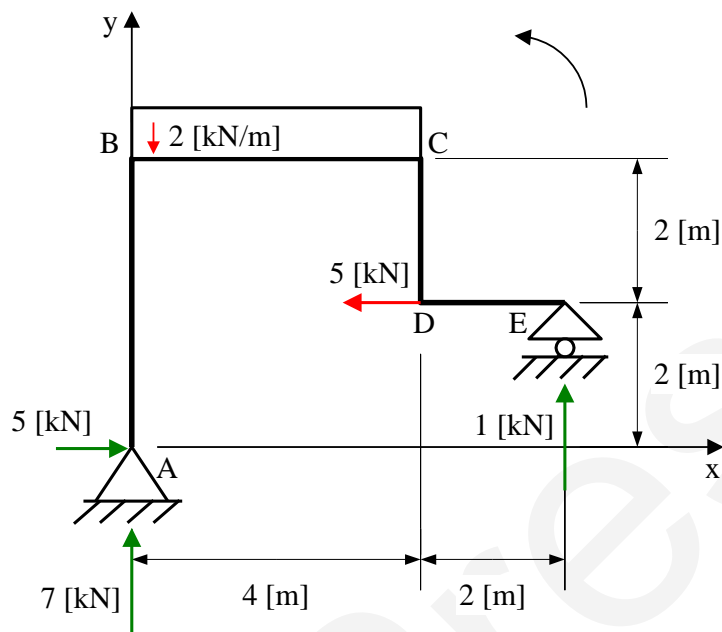
$$\sum_i F_{iy} = F_{Ay} - 2 \cdot 4 + F_E = 0 \rightarrow F_{Ay} = 7 \text{ [kN]}$$

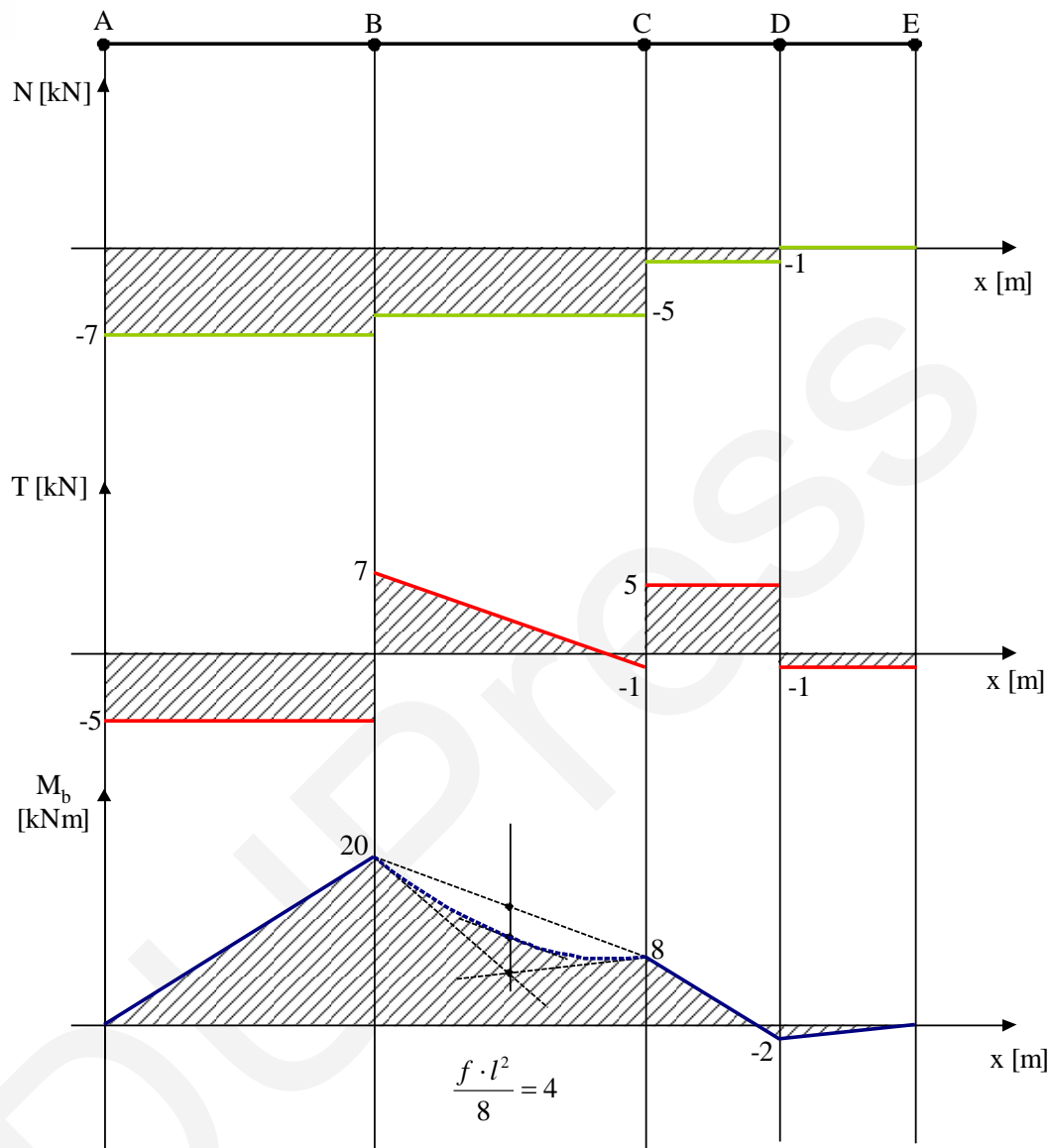
Ellenőrzés:

$$\sum_i M_i = 2 \cdot 4 \cdot 4 - 7 \cdot 6 + 5 \cdot 2 = 0$$



Igénybevételi ábrák:







## Irodalomjegyzék

- 1) M. Csizmadia Béla, Nándori Ernő (2002): Mechanika mérnököknek - Statika, Nemzeti Tankönyvkiadó 2002, ISBN-9789631928501
- 2) Kassai L., Somorjai T. (1989): Mechanika I, Tankönyvkiadó, Budapest
- 3) Dr. Szíki Gusztáv Áron, Dr. Mankovits Tamás, Hajdu Sándor, Deák Krisztián, Huri Dávid: *Műszaki mechanika példatár* (2015) Debreceni Egyetem Műszaki Kar, Debrecen (2390) ISBN: 978-963-473-909-8, TÁMOP-4.1.1.F-13/1-2013  
([http://old.eng.unideb.hu/gepesz/wpcontent/uploads/2016/03/Mu\\_szaki\\_mechanika\\_peldatar.pdf](http://old.eng.unideb.hu/gepesz/wpcontent/uploads/2016/03/Mu_szaki_mechanika_peldatar.pdf))
- 4) Russel C. Hibbeler (2006): Engineering Mechanics – Statics and Dynamics, Prentice Hall, 2006. ISBN-13 9780132215091
- 5) Lakshmana C. Rao, J. Lakshminarasimhan, Raju Sethuraman, Srinivasan M. Sivakumar (2004): Engineering Mechanics: Statics and Dynamics, PHI Learning Pvt. Ltd., ISBN 8120321898, 9788120321892
- 6) Lawrence E. Goodman, Susan Goodman, William H. Warner (2001): Statics
- 7) Courier Dover Publications, ISBN 0486420051, 9780486420059
- 8) Ferdinand P. Beer, E. Russell Johnston, Jr., (1987): University of Connecticut, Mechanics for Engineers: Statics and Dynamics
- 9) Nagy-Kondor, R. (2011). Technical Mathematics in the University of Debrecen. *Annales Mathematicae et Informaticae*, 38, 157-167.
- 10) Nagy-Kondor, R. (2005). Special characteristics of engineer students' knowledge of functions. *International Journal for Mathematics Teaching and Learning*, 10, 1-9.
- 11) Approximate coefficients of friction, In:  
[https://en.wikipedia.org/wiki/Friction#Static\\_friction](https://en.wikipedia.org/wiki/Friction#Static_friction)

Szerkesztő:  
Szántó Attila

Lektor:  
Deák Krisztián  
Debreceni Egyetem Műszaki Kar Gépészmérnöki Tanszék

© Debreceni Egyetemi Kiadó Debrecen University Press,  
beleértve az egyetemi hálózaton belüli elektronikus terjesztés jogát is

ISBN 978-963-318-780-7

Kiadta: a Debreceni Egyetemi Kiadó Debrecen University Press  
Felelős kiadó: Karácsony Gyöngyi  
Nyomdai munkálatokat  
a Debreceni Egyetem sokszorosítóüzeme végezte 2019-ben  
[www.dupress.hu](http://www.dupress.hu)