



SZÉCHENYI 2020

HAJTÁSLÁNC OPTIMALIZÁCIÓ

Készítette:

Dr. Tiba Zsolt

ábrák: Budai Zoltán

Készült: Debreceni Egyetem Műszaki Kar, Debrecen

Terjedelem: 128 oldal (4,5 ív)

Kézirat lezárva: 2015. augusztus 15.

A tananyag elkészítését a Munkaerő-piaci igényeknek megfelelő, gyakorlatorientált képzések, szolgáltatások a Debreceni Egyetemen Élelmiszeripar, Gépészet, Informatika, Turisztika és Vendéglátás területen (Munkaalapú tudás a Debreceni Egyetem oktatásában) TÁMOP-4.1.1.F-13/1-2013-0004 számú projekt támogatta. A projekt az Európai Unió támogatásával, az Európai Szociális Alap társfinanszírozásával valósult meg.

Lektor:

Dr. Juhász György

ISBN: 978-963-473-904-3

SZÉCHENYI 2020



MAGYARORSZÁG
KORMÁNYA

Európai Unió
Európai Szociális
Alap



BEFEKTETÉS A JÖVŐBE



TARTALOMJEGYZÉK

1.	A hajtáslánc feladata és a vele szemben támasztott követelmények.....	9
1.1.	A hajtáslánc elemeinek élettartama, méretezése.....	10
1.1.1.	A terhelési modell.....	11
1.1.2.	Kifáradási elméletek.....	14
1.2.	Ellenőrzés egyszerű lüktető igénybevételre.....	15
1.3.	Ellenőrzés összetett lüktető igénybevételre.....	16
2.	Forgó tengelyek csapágyazása.....	17
2.1.	Forgó tengelyek csapágyazási szempontjai.....	18
2.1.1.	Csapágyazási helyek megoldásai.....	19
2.1.1.1.	Radiális megtámasztás.....	20
2.1.1.2.	Radiális és mindkét irányú axiális megtámasztás.....	21
2.1.1.3.	Radiális és egyirányú axiális megtámasztás.....	21
2.1.1.4.	Egyirányú axiális megtámasztás.....	21
2.1.1.5.	Kétirányú axiális megtámasztás.....	22
2.1.1.6.	Nagy szögmerevségű megtámasztás.....	22
2.2.	Forgó tengelyek csapágyazási megoldásai.....	23
2.2.1.	Vezető csapágyazás.....	23
2.2.2.	Oldalról támasztott csapágyazás.....	24
2.3.	Csapágygyűrűk illesztése, illesztési szempontok.....	24
2.3.1.	Csapágygyűrűk átmérő túrése.....	25
2.3.2.	Csapágygyűrűk illesztési szempontjai.....	25
2.3.2.1.	Csapágyhézag.....	25
2.3.2.2.	Gyűrűvándorlás.....	27
2.3.2.3.	Axiális eltolhatóság.....	29
2.3.2.4.	Szerelhetőség.....	29
2.4.	Csapágy kiválasztás.....	29
3.	A hajtáslánc igénybevétele, tervezése.....	30
3.1.	A motor által leadott teljesítmény.....	30
3.2.	Haladó, ill. forgó mozgást végző elemek hatása.....	32
3.3.	Külső terhelések.....	32
3.3.1.	Radiálisan tehermentesített hajtás.....	32
3.3.2.	A forgó tengelyek terhelése.....	33
3.3.3.	Színhajtásból származó terhelések.....	33
3.3.4.	Lánchajtásból származó terhelések.....	36
3.3.5.	Fogaskerék hajtásból származó terhelések.....	39
3.3.6.	Szögkiegyenlítő tengelykapcsolók.....	39



3.3.6.1.	Kardáncsuklók, kardánhajtások működési jellemzői	41
3.3.6.2.	Homokinetikus kardánhajtás kialakítása	43
3.3.6.3.	Kardáncsuklók járulékos terhelése	46
3.3.6.4.	Kardántengely kiegyensúlyozatlanságából adódó gerjesztő hatások	48
3.4.	Tengelyméretezés	49
4.	Gördülőcsapágyak merevségének meghatározása	51
4.1.	Terheléseloszlás és alakváltozás az egysorú gördülőcsapágyakban	52
4.2.	Gyűrűscsapágyak rugalmas deformációjának közelítő számítása	56
4.2.1.	Az egysorú golyóscsapágy rugalmas deformációjának közelítő számítása	56
4.2.2.	Kétsorú gyűrűscsapágyak rugalmas deformációjának közelítő számítása	56
4.2.3.	Példa gördülőcsapágy rugómerevségének meghatározására	57
5.	A csapágyak által keltett gerjesztő frekvenciák	58
6.	A hajtáslánc összeállítása	59
6.1.	Motor jelleggörbék	60
6.1.1.	Egyenáramú villamos motor jelleggörbéi	60
6.1.1.1.	Egyenáramú – mellékáramú motor	60
6.1.1.2.	Egyenáramú – főáramú motor	61
6.1.1.3.	Egyenáramú - vegyes kapcsolású motor	61
6.1.2.	Rövidrezárt forgórészű, aszinkron motor	62
6.1.3.	Belsőégésű motorok jelleggörbéje	63
6.2.	Munkagépek jelleggörbéi	65
6.3.	Közlőművek	66
6.3.1.	A közlőmű megválasztás szempontjai	66
6.3.2.	A közlőmű megválasztás esetei	67
6.3.3.	Közlőművek áttétel-hatásfok viszonyai	69
6.3.3.1.	Erőzáró hajtások	69
6.3.3.2.	Alakzáró hajtások	70
6.3.4.	Példák speciális közlőművekre	71
6.3.4.1.	CVT röpsúlyos tengelykapcsolóval	71
6.3.4.2.	Kapcsolókörmös sebességváltó	72
6.3.4.3.	Hidrodinamikus tengelykapcsoló	73
6.4.	Csuklós mechanizmusok	76
7.	Dinamikai modellezés	79
7.1.	Torziós lengések mozgásegyenlete	81
7.1.1.	Elemi láncszerű modell mozgásegyenlete	82
7.1.2.	Általános elrendezésű hajtáslánc transzformálása	84
7.1.2.1.	Az áttételes rendszer transzformálása elemi láncszerű modellé	85
7.1.2.2.	Az elágazásos rendszer transzformálása áttételes modellé	86



7.1.3.	Példák mozgásegyenlet felírására	86
7.1.3.1.	Példa áttételes rendszer mozgásegyenletének felírására	87
7.1.3.2.	Példa szalaghajtás mozgásegyenletének felírására	89
7.1.3.3.	Példa elágazásos rendszer mozgásegyenletének felírására	90
7.1.4.	A torziós rezgőrendszer sajátfrekvenciáinak meghatározása	91
7.1.5.	Kardáncsuklót tartalmazó láncszerű hajtáslánc mozgásegyenlete.....	93
7.2.	Modell a hajtáslánc hajlító lengés sajátfrekvenciáinak meghatározására	96
7.2.1.	Illesztési feltételek rúdra erősített tárcsa rugalmas megtámasztása esetén	100
7.2.2.	Illesztési feltételek gerjesztő erő és nyomaték esetén	101
7.2.3.	Illesztési feltétel gömbcsukló esetén	102
7.2.4.	Példák a hajlító dinamikai modell alkalmazására	103
7.2.4.1.	Egyetlen rúdelem gerjesztés mentes esete	103
7.2.4.2.	Egyetlen rúdelem gerjesztéses esete.....	104
7.2.4.3.	Két kardáncsuklós hajtáslánc.....	105
7.2.4.4.	Általános hajtáslánc esete.....	107
8.	Számítógépes szimulációs program	108
8.1.	A szimulációs program működése	108
9.	A próbabadi mérés kialakítása, követelmények	115
9.1.	A vizsgálati paraméterek és faktorok meghatározása.....	117
9.2.	A mérések végrehajtásának és kiértékelésének módszere.....	118
9.2.1.	Torziós lengések vizsgálata	119
9.2.2.	Hajlító lengések vizsgálata	121
9.2.3.	A mérési eredményekből levonható következtetések	124
9.2.3.1.	A torziós lengések vizsgálati eredményei	124
9.2.3.2.	A hajlító lengések vizsgálati eredményei	124
FELHASZNÁLT SZAKIRODALOM		125



ALKALMAZOTT JELÖLÉSEK JEGYZÉKE

a	[mm]	tengelytáv
A	[m^2]	felület, terület
c	[mmN^{-1}]	rugóállandó
d, D	[mm]	átmérő
e	[mm]	excentricitás
E	[Nmm^{-2}]	rugalmassági modulus
E	[mm]	szíjbenyomódás
f	[mm]	elmozdulás
f	[N]	szíj feszességet ellenőrző erő
F_g	[N]	gerjesztő erő
g	[ms^{-2}]	gravitációs gyorsulás
G	[Nmm^{-2}]	csúsztató rugalmassági modulus
I	[cm^4]	másodrendű nyomaték
I_p	[cm^4]	poláris másodrendű nyomaték
J	[kgm^2]	tehetetlenségi nyomaték
K	[cm^3]	keresztmetszeti tényező
K_p	[cm^3]	poláris keresztmetszeti tényező
l	[mm]	hosszúság
L	[mm]	szíj feszítáv
m	[kg]	tömeg
M	[Nm]	nyomaték
n	[s^{-1}]	fordulatszám
p	[Nm^{-2}]	nyomás
P	[kW]	teljesítmény
R_{eH}	[Nmm^{-2}]	alsó folyáshatár
R_m	[Nmm^{-2}]	szakítószilárdság
s	[Nmm^{-1}]	rugómerevség
S		Krülov függvény
S_a	[N]	statikus tengelyterhelés
t	[s]	idő
T		Krülov függvény
T	[N]	statikus feszítőerő
U		Krülov függvény
v	[ms^{-1}]	sebesség
V	[m^3]	térfogat
V		Krülov függvény
α	[$rads^{-1}$]	a rezgés körfrekvenciája
γ	[$rad(Nm)^{-1}$]	torziós rugóállandó
μ		súrlódási tényező



ρ	[kgm^{-3}]	sűrűség
σ	[Nmm^{-2}]	feszültség (normál)
τ	[Nmm^{-2}]	feszültség (tangenciális)
φ	[<i>fok</i>]	elcsavarodási szög
ω	[$rads^{-1}$]	üzemi körfrekvencia

TÁBLÁZATOK JEGYZÉKE

2.1 táblázat: Csaptúrás ajánlott értékei (tömör acél tengely)	28
2.2 táblázat: Lyuktúrás ajánlott értékei (öntöttvas és acél csapágyház)	28
3.1 táblázat: A szíjhajtás c_2 üzemtényező értéke	33
8.1 táblázat: A csapágymereség program blokkdiagramja	111
8.2 táblázat: A torziós program blokkdiagramja	112
8.3 táblázat: A hajlító program blokkdiagramja	113

ÁBRÁK JEGYZÉKE

1.1 ábra: Hajtáslánc felépítése	10
1.2 ábra: A terhelési modell	11
1.3 ábra: Smith diagram.....	14
1.4 ábra: Kifáradási diagramok.....	15
2.1 ábra: Járatos csapágytípusok lehetséges hatásvonalai	20
2.2 ábra: Radiális hatásvonalú csapágy megtámasztás	20
2.3 ábra: Vezető csapágy megtámasztás	21
2.4 ábra: Oldalról támasztott csapágy megtámasztás.....	21
2.5 ábra: Egysorú axiális tárcsás csapágy megtámasztása	22
2.6 ábra: Kétsorú tárcsás csapágy megtámasztása	22
2.7 ábra: O elrendezésű vezetőcsapágy megtámasztás	22
2.8 ábra: X elrendezésű vezetőcsapágy megtámasztás.....	23
2.9 ábra: Vezető csapágyazási megoldások.....	24
2.10 ábra: Oldalról támasztott csapágyazási megoldások.....	24
2.11 ábra: A csapágygyűrűk tőrése.....	25
2.12 ábra: A csapágyhézag értelmezése	26
2.13 ábra: A csapágyhézag hatása az élettartamra	26
2.14 ábra: Csapágy gyártási hézag jele	27
2.15 ábra: Csapágygyűrűk terhelés irányának értelmezése	27
2.16 ábra: Gördülőcsapágyak Wöhler görbéje	29
3.1 ábra: Szíjágerek és a tengelyfeszítő erő	34
3.2 ábra: A szíjhajtás befedése.....	35
3.3 ábra: A szíjbenyomódás előírt mértéke	36
3.4 ábra: Poligon hatás a fogszám függvényében.....	37
3.5 ábra: A lánckerék kapcsolódási képessége a fogszám függvényében.....	38
3.6 ábra: Féltengely homokinetikus golyócsuklókkal	40
3.7 ábra: Dupla kardáncsukló központosítás nélkül	40
3.8 ábra: Dupla kardáncsukló központosító gömbbel	41
3.9 ábra: Dupla kardáncsukló központosító tárcsával.....	41
3.10 ábra: A kardáncsukló működési jellemzője: szögelfordulás különbség	42



3.11 ábra: A négycsuklós homokinetikus hajtáselrendezések	45
3.12 ábra: Z elrendezésű kardánhajtás.....	46
3.13 ábra: Z és W elrendezésű kardánhajtás.....	46
3.14 ábra: Kardáncsuklós tengelyhajtás	47
3.15. ábra: A kardáncsukló erőhatásai.....	47
3.16. ábra: A kardántengely kiegyensúlyozatlanságából adódó gerjesztő hatások	48
4.1 ábra: A geometriai méretek értelmezése a gördülőcsapágyakban	53
4.2 ábra: A belső csapágygyűrű radiális irányú elmozdulásának összetevői	54
4.3 ábra: A csapágy terhelési zónája	54
4.4 ábra: A csapágy rugókarakterisztikája	55
4.5 ábra: A beálló golyóscsapágy geometriai méretei	57
5.1 ábra: Egysorú hengergörgős csapágy	58
6.1 ábra: A hajtáslánc blokkdiagramja.....	60
6.2 ábra: Egyenáramú, mellékáramú motor jelleggörbéje	60
6.3 ábra: Egyenáramú, főáramkörű motor jelleggörbéje	61
6.4 ábra: Egyenáramú, vegyes kapcsolású motor jelleggörbéje	61
6.5 ábra: Rövidrezárt forgórészű aszinkron motor jelleggörbéje.....	62
6.6 ábra: Belsőégésű motorok jelleggörbéje.....	63
6.7 ábra: Turbó feltöltős belsőégésű motor jelleggörbéje	64
6.8 ábra: Négyütemű belsőégésű motor nyomatékgörbéje	65
6.9 ábra: Jellemző munkagép jelleggörbék.....	65
6.10 ábra: Jellemző hajtógép jelleggörbék	66
6.11 ábra: Az üzemi pont értelmezése, a stabilitás feltétele	67
6.12 ábra: Jelleggörbék üzemi pontja közlőmű nélkül.....	68
6.13 ábra: Jelleggörbék üzemi pont nélkül	68
6.14 ábra: Jelleggörbék üzemi pontja elégtelen indító nyomaték esetén	69
6.15 ábra: CTV váltó röpsúlyos tengelykapcsolóval	72
6.16 ábra: Honda CBF 1000 motorkerékpár kapcsolókörmös sebességváltója.....	73
6.17 ábra: Hidrodinamikus tengelykapcsoló	74
6.18 ábra: Hidrodinamikus tengelykapcsoló hatásfok jelleggörbe	74
6.19 ábra: Hidrodinamikus tengelykapcsoló kapcsoló nyomaték.....	75
6.20 ábra: Hidrodinamikus tengelykapcsoló kapcsolási folyamat	75
6.21 ábra: Háromcsuklós mechanizmus.....	77
6.22 ábra: Ötcsuklós mechanizmus.....	77
6.23 ábra: Trapéz lengőkaros független kerékfelfüggesztés.....	78
6.24 ábra: McPherson független kerékfelfüggesztés	78
7.1 ábra: Általános kardánhajtás elrendezés vázlata	82
7.2 ábra: Három szabadságfokú torziós rezgőrendszer	83
7.3 ábra: Falhoz kötött, kétszabadságfokú torziós rezgőrendszer	84
7.4 ábra: Különböző szabadságfokú rendszerek	86
7.5 ábra: Áttételes rendszer.....	87
7.6 ábra: Szalaghajtás	89
7.7 ábra: Elágazásos rendszer.....	90
7.8 ábra: Sajátfrekvenciák meghatározása maradék módszerrel	92
7.9 ábra: Kardánhajtás torziós rugómodellje	93
7.10 ábra: Torziós sajátfrekvenciák grafikus ábrázolása.....	96
7.11 ábra: A tengely dz hosszúságú rúdeleme	97
7.12 ábra: Szakaszhatar általános esetben	100
7.13 ábra: Rúd rugalmas megtámasztása	100
7.14 ábra: Rúdelem	103
7.15 ábra: Két kardáncsuklós hajtáslánc.....	105
9.1 ábra: A próbapad kialakítása	116
9.2 ábra: Csapágybak konstrukciós kialakítása	116



9.3 ábra: A torziós vizsgálatok hajtáselrendezése	119
9.4 ábra: A tehetetlenségi nyomaték hatása a torziós sajátfrekvenciákra	119
9.5 ábra: A csuklósögek hatása (csuklósög: 0°) a torziós sajátfrekvenciákra	120
9.6 ábra: A csuklósögek hatása (csuklósög: 15°) a torziós sajátfrekvenciákra.....	120
9.7 ábra: A csuklósögek hatása (csuklósög: 30°) a torziós sajátfrekvenciákra.....	120
9.8 ábra: Különbözö csuklósögekhez tartozó torziós sajátfrekvenciák határértékei.....	121
9.9 ábra: A tengely torziós rugóállandójának hatása a torziós sajátfrekvenciákra	121
9.10 ábra: Hajlító vizsgálatok hajtáselrendezése.....	122
9.11 ábra: Az ágyazási merevség hatása a hajlító sajátfrekvenciákra	122
9.12 ábra: A hajlító sajátfrekvenciák mérési eredménye eltérö gyorsítással.....	122
9.13 ábra: A kardántengely hosszméretének hatása a hajlító sajátfrekvenciákra.....	123
9.14 ábra: A kardántengely hosszméretének hatása a hajlító sajátfrekvenciákra.....	123
9.15 ábra: A csapágyterhelés hatása a csapágymerevségre	124



Dr. habil. Tiba Zsolt PhD, a műszaki tudományok doktora, főiskolai tanár.

1989-ben szerzett gépészmérnöki oklevelet a Miskolci Egyetemen géptervező szakon. 1989-től oktat a Debreceni Egyetem Műszaki Karán. PhD kutatásait a Walterscheid GmbH. kísérleti üzemében végezte Lohmarban (Németország) kardánhajtások dinamikai vizsgálata, modellezése témában. A gépészmérnöki alapszak szakfelelőse.

A magyar és az angol nyelvű Gépészmérnöki BSc képzésben (Mechanical Engineering BSc) tárgyfelelőse és előadója a Technical Drawing, Machine Elements, Drivetrain Optimization, Automotive Constructions c. tárgyaknak.

Bevezetés

A hajtásláncok tervezése egy rendkívül komplex mérnöki tevékenység. A feladatot az határozza meg, hogy milyen technológiai folyamatot és milyen gyorsan kell elvégezni. Speciális feladat esetén már magát a munkagépet is meg kell tervezni, ha viszont úgymond rutin feladatról van szó, akkor a munkagépet egy termékpalettából választhatjuk ki. A következő lépés a szükséges hajtó motor kiválasztása figyelembe véve a munkagép paramétereit. A motorok - akár villany, akár belsőégésű - tervezése olyan speciális ismereteket, gyártási technológiát és műszaki háttérrel igényel, hogy ezeket minden esetben kiválasztjuk. Ezt követően kell a motor és a munkagép összekapcsolását a későbbiekben ismertetett szempontok alapján megtervezni és elemeit méretezni. Ez a folyamat egy sor egymásra épülő lépésből áll, amelyhez szükséges ismeretanyagot több tantárgy keretein belül sajátíthatjuk el: statika, szilárdságtan, dinamika, gépelemek, gépszerkezettan, stb.

A hajtásláncok optimalizációja téma tárgyalásánál ezeket az ismereteket ismertnek tételezzük, adott esetben pusztán hivatkozunk a háttérösszefüggésekre.

A jegyzet másodlagos célja egy optimálisan működő hajtáslánc tervezésén túl, egy olyan egységes műszaki szemlélet kialakulása, mellyel a hallgató képes összefűzni az egyes szaktárgyak ismeretanyagát.



1. A hajtáslánc feladata és a vele szemben támasztott követelmények

A hajtásláncok biztosítják a meghajtó motor és a munkagép közötti mechanikai kapcsolatot, melyeknek sok egyéb feltételt is ki kell elégíteniük. Az egyes feltételeket biztosító műszaki megoldásoknak kedvezőtlen hatásaik is lehetnek, melyeket további technikai megoldásokkal tudunk elfogadható szinten tartani. Az alkalmazott műszaki megoldások következményei tehát egymással összefüggnek és hatásuk van a hajtásláncot ért terhelések alakulására, ezen keresztül az élettartamra.

A tervezés elsődleges szempontja, hogy a hajtáslánc adott élettartamig meghibásodás nélkül működjön. Mivel a hajtáslánc hajtáselemekből épül fel, ezek egy elemének meghibásodása a hajtáslánc meghibásodását is jelenti. A hajtáselemek különböző üzemjellemzőkkel működnek, melyek hatással vannak az egész hajtásláncre. Gondoljunk egy olyan forgó elemre, melynek a forgástengelye nem halad át a súlypontján, vagy egy kardáncsuklóra, mely szögsebesség ingadozással továbbítja a hajtást. A fent leírtakból következik, hogy az adott feladatra tervezett hajtáslánc nem feltétlenül kell, hogy tudjon, ill. képes nyugodt, csendes, egyenletes üzemviszony mellett működni. Ehhez hozzá adódik még a hajtó, ill. a hajtott gép működési jellemzője, melyek alapvetően meghatározzák a hajtásláncon átmenő teljesítményből származtatható csavaró nyomaték időbeni változását valamint ennek járulékos hatásait. Tervezésnél, méretezésnél ezeket a hatásokat, melyek a terhelések időbeli lefolyásának változásában nyilvánulnak meg, figyelembe kell venni. Mondhatjuk azt is, hogy erre kell méretezni. Ebből következik, hogy a hajtásláncot helyesen terveztük meg, ha teljesíteni tudja a méretezéskor célul kitűzött élettartamot. Ha tervezésnél valamilyen hatást nem vettünk figyelembe, melynek következménye, hogy egy nyugodt üzemviszonyt feltételező hajtás összeállítása után egyenlőtlenül jár, ott olyan erőhatások ébrednek, melyekre a méretezésnél nem voltunk tekintettel. Így szükségszerű, hogy a hajtáslánc, ill. elemei a tervezett üzemidő előtt tönkremenjenek.

A tervezés szilárdsági méretezés fázisában tehát ismernünk kell a hajtáselemek működési jellemzőit és az ebből adódó terheléseket. Tisztában kell lennünk, különösen a forgó alkatrészek gyártásánál, megmunkálásánál alkalmazott mérettűrések és az alkatrész



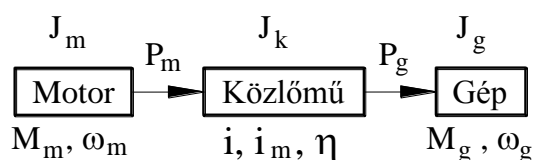
működési jellemzői közötti kapcsolattal. Jó példa erre a gyártási pontatlanság következtében kialakuló excentricitás.

A hajtásláncunk tehát az időben változó nyomatékszolgáltatás és igény, valamint a hajtáselemek működési jellemzői miatt folyamatos gerjesztő hatásoknak vannak kitéve. Ha a gerjesztő hatások frekvenciája megegyezik vagy közel megegyezik a hajtáslánc valamely sajátfrekvenciájával, rezonancia alakulhat ki. Ebben az állapotban a hajtásláncot érő terhelések jóval meghaladják a méretezésnél alapul vett értékeket, így annak élettartama jelentősen lecsökken. Bár vannak gépek, melyeket erre az üzemállapotra terveztek (vibrátorok, rázóasztalok), ezek méretezését az adott üzemállapotra jellemző terhelésekkel végezték el. Ettől eltekintve, általános esetben méretezésnél feltételezzük, hogy üzem közben nem lép fel rezonancia. A rezonancia elkerüléséhez ismernünk kell a hajtáslánc sajátfrekvenciáit, melyeket a tervezés fázisában dinamikai modellezéssel, számítással határozhatunk meg. Jelen jegyzet leírja az alkalmazott dinamikai modellezés lépéseit és bemutatja a ráépülő számítógépes szimulációs programot.

Az előbbiekből következik, hogy a hajtásláncok optimalizációja alatt azt értjük, hogy a megvalósított hajtáslánc és annak elemei pontosan úgy fognak működni, ahogy azt megterveztük, élettartama legalább az előírt és természetesen a komplett hajtás képes végezni azt a technológiai feladatot, amire terveztük.

Ahhoz természetesen, hogy egy jól megtervezett hajtáslánc az előírt élettartamig jól működjön, szükséges, hogy szakszerűen legyen szerelve és karban legyen tartva. A szakszerűtlen szereléssel olyan járulékos terhelések léphetnek fel, ill. maradó deformációk jöhetnek létre, melyek a hajtásláncot már a szerelési fázisban tönkretelhetik. A hajtáslánc részét képező, nem megfelelően karbantartott gépcsoport egyre növekvő teljesítményt vesz fel, mely növekvő terhelés formájában jelentkezik a hajtáslánc elemein. Mivel a méretezés nem erre a terhelésszintre történt, a hajtáslánc élettartama csökkenni fog valamelyik elemének meghibásodása révén. A kopásból bekövetkező nagyobb teljesítményigényre jó példa egy analóg kvarc karóra, mely a mechanikus szerkezet folyamatos kopása miatt egyre gyakrabban szorul elemcserére a folyamatosan növekvő áramfelvétele miatt.

1.1. A hajtáslánc elemeinek élettartama, méretezése



1.1 ábra: Hajtáslánc felépítése

Az 1.1 ábrán szemléltetett hajtáslánc tervezés, méretezés módszerét arra az esetre ismertetjük, amikor az adott technológiai folyamatot végző munkagépet gyártmánykatalógusból választjuk ki. Ebben az esetben a gyártó cég rendelkezésünkre bocsátja annak főbb paramétereit, melyek szükségesek a motor kiválasztásához, ill. a hajtáslánc méretezéséhez. Ha a munkagépet is mi tervezzük, ezek a tényleges adatok csak a munkagép megépítése után, mérések útján lennének meghatározhatóak.

A munkagép legfontosabb paramétere a P_n névleges teljesítménye, mely alapján a hajtómotor kiválasztható. Az előző pontban viszont már tisztáztuk, hogy a hajtásláncot érő időben változó terhelések alapvetően a hajtó és hajtott gép működési jellemzőitől, ill. az elvégzett technológiai folyamattól függenek. Az időben változó terhelés fárasztó igénybevételt okoz, tehát az alkatrészeket kifáradás ellen kell méretezni, melyhez a terhelési amplitúdókat meg kell határozni. A P_n -ből csupán a névleges terhelést tudjuk kiszámítani, mely az időben változó terhelés középértéke. A következőkben azt nézzük meg, hogy általános esetben a terhelési amplitúdót, amelyből majd a feszültség amplitúdót számítjuk, hogyan határozható meg.

Leggyakrabban a következő hatásokra kell tekintettel lenni:

- egyenlőtlen nyomatékszolgáltatás, ill. igény (hajtó és hajtott gép üzemjellemzője);
- a hajtáslánc elemeinek dinamikai hatásai;
- a végzett technológiai folyamat jellege, ez határozza meg a nyomaték igényt;
- gyakori indítás, ... stb.

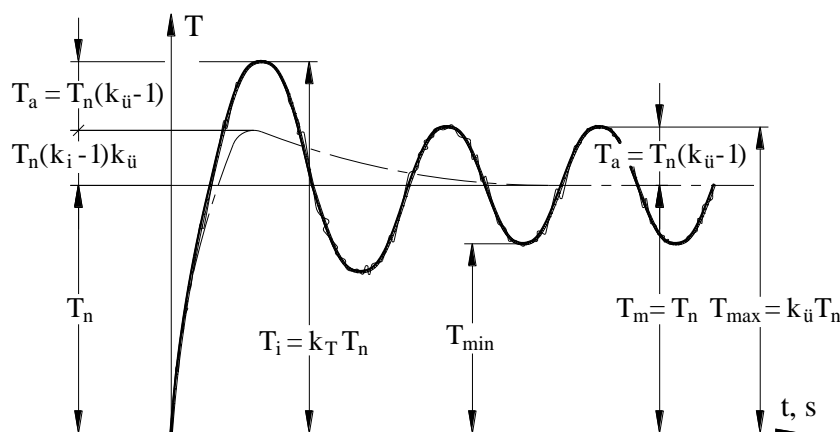
A felsorolt üzemviszonyok gerjesztő hatást fejtenek ki egy rugalmas, lengésre hajlamos rendszerre. A méretezés pontosságának előfeltétele, hogy az időben változó terhelést kellő pontossággal ismerjük.

A terhelések meghatározásának módszerei:

- Méréssel: a legpontosabb, mely csak kész szerkezeten végezhető el;
- Tapasztalatból: hasonló paraméterekkel rendelkező gépen mért mérések eredményéből;
- Terhelési modelltől: névleges teljesítményből kiinduló, mérési eredményen alapuló terhelési modell felépítésével;
- Számítással: dinamikai modellezéssel.

Amennyiben a hajtásláncot nem rezonancia közeli üzemállapotra tervezzük, a terhelés időbeli változása jó közelítéssel meghatározható a mérési eredményeken alapuló terhelési modell alapján.

1.1.1. A terhelési modell



1.2 ábra: A terhelési modell

Forrás: [1]



A terhelési modell felépítésének célja (lásd 1.2 ábra), hogy a meghajtó motor névleges teljesítményéből és fordulatszámából kiindulva meg tudjuk becsülni a hajtáslánc elemeire üzem közben ható terheléseket. A névleges teljesítményből a hajtáslánc adott részén, az áttételek, ill. az egyes hajtáselemek hatásfokának ismeretében egy időben állandó csavaró nyomatékot tudunk számolni, mely csak a statikus előmérétezt teszi lehetővé. Tapasztalatból viszont tudjuk, hogy a hajtáslánc elemei időben változó terheléseknek vannak kitéve, melyek kifáradáshoz vezethetnek. A kifáradás ellen történő ellenőrzéshez szükséges az adott alkatrész vizsgált keresztmetszetében ébredő egyenértékű feszültség közép és amplitúdó értékének ismerete.

A terhelési modell felépítéséhez a névleges terhelés mellett tehát szükség van a k_{ii} üzemtényező és a k_i indítási tényező ismeretére, melyek segítségével megbecsülhetjük az indításkor és üzem közben fellépő terhelés maximális értékét. Feltételezve, hogy a hajtó motor a névleges teljesítményszinten működik, az időben változó terhelés középértéke a névleges terhelés. A k_{ii} és k_i tényezők értéke a hajtó és hajtott gép működési jellemzőjétől függ, tehát a hajtáslánccal végzett technológiai folyamatot veszi figyelembe. Értéküket különböző gépcsoportok esetén mérésrel határozták meg, majd műszaki irányelvekbe foglalták. Később látni fogjuk, hogy különböző hajtások (pl. szíjhajtás, lánchajtás) tervezésénél a maximális átvindó teljesítmény értékét szintén a névleges teljesítményből származtatják egy alkalmasan választott tényező figyelembevételével, mely gyakorlatilag a k_{ii} tényezőnek felel meg. A k_{ii} értékét a szíjhajtás fejezetben részletezzük.

Az 1.2 ábrán látható, hogy a hajtáslánc indítása és fékezése bár jelentős terheléscúccsal jár, kifáradást nem okoz, ha kevesebbszer fordul elő 10^4 ciklusszámnál. Ez esetben ez a terheléscsúcs bár kifáradást nem, de az alkatrész maradó deformációját okozhatja, ezért erre kell ellenőrizni.

$$T_i = k_T T_n \quad (1.1)$$

ahol: k_T – túlterhelési tényező

$$k_T = k_i k_{ii}$$

Az állandósult üzemi állapotban az időben változó terhelés a terhelés változás ciklusszáma miatt (lásd később) kifáradáshoz vezethet, ezért erre ellenőrizni kell. A terhelés amplitúdó az 1.2 ábra alapján egyszerűen felírható:

$$T_a = (k_{ii} - 1) T_n \quad (1.2)$$

Az állandósult üzemi állapotban az időben változó terhelés:

$$T_{(t)} = T_n + T_a \sin \omega t \quad (1.3)$$

ahol: ω – a gerjesztő hatások körfrekvenciája

Az alkatrészek hosszirányú méreteinek felvételével (mely a tervezés során többször módosulhat) és a terhelések ismeretében az igénybevételi ábrák megrajzolhatóak és kiszámíthatóak az egyes keresztmetszetekben ébredő közép és amplitúdó feszültségek: σ_m és σ_a . Méretezésekor a legfontosabb követelmény, hogy az alkatrész meghatározott ideig tönkremenetel nélkül működjön.



A szerkezet üzembiztos, ha a biztonsági tényező:

$$n = \frac{H_{(t)}}{T_{(t)}} \geq 1 \quad (1.4)$$

ahol: $H_{(t)}$ terhelési határ

$T_{(t)}$ terhelés

Kifáradásra történő méretezéskor olyan módszert kell alkalmazni, mely figyelembe veszi az anyagra és a szerkezetre jellemző terhelési határ (jelen esetben a kifáradási határ) változását a terhelés időbeli lefolyásának függvényében (lásd Goodman ill. Smith diagram).

Ha a méretezendő alkatrész (élettartama) terhelési ciklusszáma:

- $N = 10^4 - 10^7$ közé tervezett, előírt túlélési valószínűséggel, akkor meghatározható az adott élettartamhoz tartozó kifáradási határfeszültség a Wöhler görbe alapján. Ez a gördülőcsapágyak kiválasztásának és például a repülőgépek egyes elemeinek méretezésének alapja.
- $N > 10^7$, akkor kifáradás ellen kell méretezni. A kifáradásra történő méretezéshez szükséges kifáradási határfeszültség amplitúdó értékét, R_{Da} -t példaként az 1.3 ábrán ismertetett Smith diagram segítségével határozzuk meg.

A kifáradás elleni biztonsági tényező:

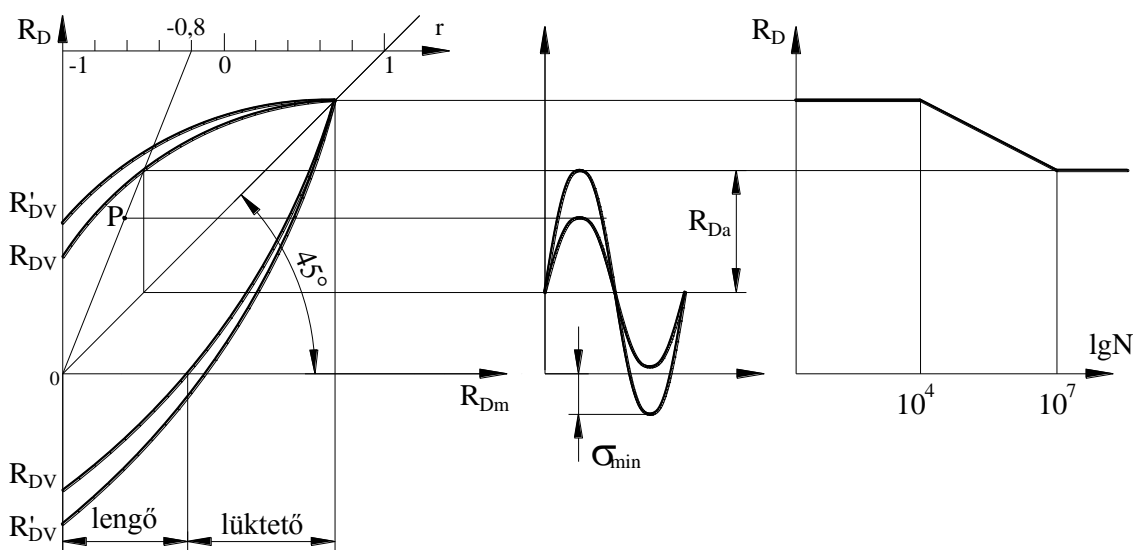
$$n_f = \frac{k_1 k_2}{\beta} R_{Da} \frac{1}{\sigma_a} \quad (1.5)$$

ahol: β horonytényező (kifáradási határt csökkentő tényező)

k_1 felületminőségi tényező

k_2 mérettényező

Az adott alapanyagra és igénybevételre kísérleti úton meghatározott Smith diagram közvetlenül csak próbatestekre érvényes, ezért az alkatrészek geometriai kialakítását a β horonytényező, az alkatrész méretét és felületi minőségét a k_2 méret, illetve k_1 felületminőségi tényező megválasztásával vesszük figyelembe. Ezek a kísérleti úton meghatározott tényezők egy csökkentett területű, az adott alkatrész kialakítására jellemző biztonsági diagramot eredményeznek. A biztonsági tényező meghatározásánál a bizonytalanságot a terhelés időbeni lefolyás ismeretének bizonytalansága okozza. A biztonsági tényező értéke geometriailag kifejezi, hogy a vizsgált keresztmetszetben az adott terhelésnél ébredő feszültségállapotnak megfelelő P pont mely úton fog a biztonsági területből a határgörbére kerülni.



1.3 ábra: Smith diagram

Általában a $\frac{\sigma_a}{\sigma_m} = \text{állandó}$ feszültségváltozási modellt alkalmazzuk a kifáradási feszültség amplitúdó meghatározásához.

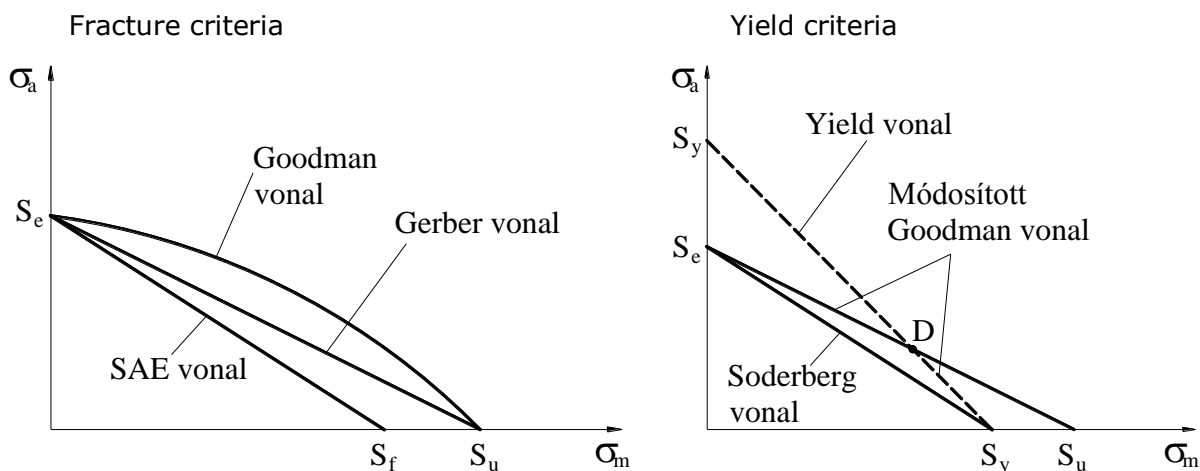
A Smith diagramban tehát grafikusán ábrázoljuk az adott keresztmetszetben ébredő feszültség közép és amplitúdó értékét és a biztonsági tényező értékét az egyes szakaszok arányából határozzuk meg. Hátránya, hogy bár grafikusán egyszerűen alkalmazható, a szakaszok pontos kiszámításához fel kell írni a Smith diagram felső görbeágának egyenletét, mely alapja a biztonsági tényezőt számító számítógépes program kifejlesztésének.

1.1.2. Kifáradási elméletek

Az alkatrészek kifáradásának jellegét az anyaguk mechanikai tulajdonsága határozza meg. A rideg és nagy szilárdságú acélok kifáradáskor ridegen törnek, ezért a rideg törés vizsgálat lesz az ellenőrzésük alapja (fracture criteria).

A lágy acélok esetében helyi folyások alakulnak ki a kifáradás előtt (yield criteria). Az 1.4 ábrán bemutatott módszerek közül tetszőleges acélokhöz előmérétezkor általában a módosított Goodman elméletet alkalmazzuk.

A különböző tönkremeneteli formán alapuló egyenes vonalakkal határolt biztonsági diagramok matematikai egyenlete egyszerűen felírható, így a biztonsági tényező értéke nem csak grafikusán, de számítás útján is meghatározható, ez utóbbi pedig egyszerűen programozható.



1.4 ábra: Kifáradási diagramok
Forrás: [2]

A fenti ábrán bemutatott elméletek közül a módosított Goodman eljárást ismertetjük, mely alkalmazásával hasonló eredményre jutunk, mint a Smith diagram esetében $\frac{\sigma_a}{\sigma_m} = \text{állandó}$ feltételezés mellett. Az 1.4 ábrán alkalmazott anyagjellemzők megfeleltetése: $S_y = R_{eH}$, $S_e = R_{Dv}$, $S_u = R_m$.

1.2. Ellenőrzés egyszerű lüktető igénybevételre

A módosított Goodman elméletet a Goodman és a Yield vonalak szemléltetik, melyek a D pontban metszik egymást. Ha az adott keresztmetszetben ébredő feszültségeket ábrázoló pontot és az origót összekötő egyenes a D ponttól balra halad, akkor a Goodman elmélet szerint, ha pedig jobbra halad, akkor a Yield elmélet szerint méretezünk. Az origót és a D pontot összekötő egyenes iránytangense:

$$d = \frac{R_{Dv}(R_m - R_{eH})}{R_m(R_{eH} - R_{Dv})} \quad (1.6)$$

Az ellenőrzéshez használt Goodman vonal egyenlete, ha $(\frac{\sigma_a}{\sigma_m} \geq d)$:

$$\frac{\sigma_a}{R_{Dv}} + \frac{\sigma_m}{R_m} = 1 \quad (1.7)$$

Az ellenőrzéshez használt Yield vonal egyenlete, ha $(\frac{\sigma_a}{\sigma_m} \leq d)$:

$$\frac{\sigma_a}{R_{eH}} + \frac{\sigma_m}{R_{eH}} = 1 \quad (1.8)$$

Az alkatrész kialakításának hatásait (szerkezetjellemzők) a kifáradási feszültségre kísérleti úton meghatározott tényezőkkel vesszük figyelembe [2].



$$R'_{Dv} = C_f C_r C_s C_t \left(\frac{1}{K_f} \right) R_{Dv} \quad (1.9)$$

ahol: R'_{Dv} a szerkezet tiszta lengő igénybevételhez tartozó kifáradási feszültség

C_f felület minőségi tényező

C_r a szerkezetre vonatkozó megbízhatósági tényező

C_s mérettényező

C_t hőmérséklet tényező

K_f kifáradási feszültség gyűjtő hely tényező

A továbbiakban a $\frac{\sigma_a}{\sigma_m} \geq d$ esettel foglalkozunk, tehát a Goodman elmélet alkalmazását ismertetjük. Az 1.7 összefüggésbe vezessük be a biztonsági tényező értékét a R_{Dv}/n és R_m/n értékek behelyettesítésével:

$$\frac{1}{n} = \frac{\sigma_a}{R'_{Dv}} + \frac{\sigma_m}{R_m} \quad (1.10)$$

$$\frac{R_m}{n} = \sigma_m + \frac{R_m}{R'_{Dv}} \sigma_a \quad (1.11)$$

A kifáradás elleni biztonsági tényező egyszerű igénybevétel esetén:

$$n = \frac{R_m}{\sigma_m + \frac{R_m}{R'_{Dv}} \sigma_a} \quad (1.12)$$

1.3. Ellenőrzés összetett lüktető igénybevételre

$$\frac{1}{n} = \frac{\sigma_{ea}}{R'_{Dv}} + \frac{\sigma_{em}}{R_m} \quad (1.13)$$

Alkalmazva a maximális torzulási energia elméletet (HMH modell), az egyenértékű feszültségek:

$$\sigma_{ea} = \left(\sigma_{xa}^2 + 3\tau_{xya}^2 \right)^{1/2} \quad \text{egyenértékű amplitúdó feszültség}$$

$$\sigma_{em} = \left(\sigma_{xm}^2 + 3\tau_{xym}^2 \right)^{1/2} \quad \text{egyenértékű közép feszültség}$$

A biztonsági tényező összetett igénybevétel esetén:

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{R'_{Dv}} \left(\sigma_{xa}^2 + 3\tau_{xya}^2 \right)^{1/2} + \frac{1}{R_m} \left(\sigma_{xm}^2 + 3\tau_{xym}^2 \right)^{1/2} \quad (1.14)$$

A biztonsági tényező javasolt értéke képlékeny anyagok esetén:



- $n = 1,25 - 1,5$ ha az anyag szilárdsági jellemzői, a terhelések és az üzemjellemzők nagy pontossággal ismertek.
- $n = 1,5 - 2$ ismert szilárdsági tulajdonságú anyagokra, és megfelelő pontossággal meghatározható terhelésekre és üzemviszonyokra.
- $n = 2 - 2,5$ általánosan használt anyagokra, és megfelelő pontossággal meghatározható terhelésekre és üzemviszonyokra.
- $n = 2,5 - 4$ nem szavatolt minőségű anyagokra, de a terhelések és az üzemjellemzők megfelelő pontossággal meghatározhatóak.
- $n = 3 - 4$ jól ismert szilárdsági tulajdonságú anyagokra, de tisztázatlan üzemviszonyokra és terhelésekre.

Rideg anyagok esetén a kifáradás elleni biztonsági tényező értéke kb. kétszerese legyen a fenti értékeknek [2].

2. Forgó tengelyek csapágyazása

Forgó tengelyek csapágyazását az üzemviszonyoktól és az alkalmazási területtől függően sikló, vagy gördülő csapágyakkal valósíthatjuk meg. A siklócsapágyakat általában vagy a kis terhelésű alárendelt helyeken, vagy olyan helyeken alkalmazzuk, ahol a gördülőcsapágyak már nem képesek működni az extrém üzemviszonyok, ill. a magas fordulatszám miatt. Tekintsük át nagy vonalakban a siklócsapágyakat a kialakult kenési állapotuk alapján.

- száraz kenési állapotú siklócsapágyak: olyan helyeken kell alkalmazni, ahol a kenőanyag jelenléte nem megengedett, vagy a magas üzemi hőmérséklet miatt a kenés nem megoldható. A lehetőségekhez képest elfogadható súrlódási viszonyokat a csapágybélés anyagának helyes megválasztásával biztosíthatjuk. Alkalmazási terület: élelmiszeripar, vegyipar, gyógyszeripar, ill. kohászati és egyéb magas üzemi hőmérsékletű helyek.
- vegyes kenési állapotú siklócsapágyak: a csap és a csapágy felfekvő felület érdesség csúcsai még érintkeznek egymással, de a terhelés felvételében a közöttük lévő kenőanyag is részt vesz. A vegyes kenési állapot időszakos kenéssel vagy olajjal átítatott porózus szerkezetű csapágyanyag alkalmazásával fenntartható. Alkalmazási terület: kis igénybevételű, kis fordulatszámú, általában alárendelt helyek.
- folyadékkenési állapotú siklócsapágyak: a legkisebb csapágyazási ellenállást a siklócsapágyakkal valósíthatjuk meg a tiszta folyadéksúrlódási kenési állapotot



biztosító hidrodinamikus és hidrosztatikus csapágyazással. A folyadék kenési állapot a hidrosztatikus csapágyak esetében egy hidraulika rendszerrel létrehozott olajnyomással biztosítható, míg hidrodinamikus csapágyak esetében a megfelelő szerkezeti kialakítás mellett is egy úgynevezett határfordulatszám elérése szükséges. A tiszta folyadék kenési állapotban a csapágy élettartama végtelen nagy, ugyanis nincs fémes érintkezés, ennek megfelelően kopás. Alkalmazási terület: magas fordulatszámon működő turbinatengelyek, belsőégésű motorok főtengely siklócsapágjai, stb.

A siklócsapágyak rendszerint nem igényelnek különleges gyártási technológiát és megmunkáló gépeket, ezért alárendelt helyen alkalmazva egy relatív olcsó megoldás. Javítása, cseréje utólagos megmunkálással történik, tehát tisztán szereléssel általában nem megoldható.

A teljesítményátvivő forgó tengelyek ágyazása, eltekintve az igen nagy fordulatszámon működő turbinatengelyektől, rendszerint gördülőcsapágyakkal történik. Ennek előnye, hogy bár a csapágy élettartama korlátozott (a kiválasztás a csapágy Wöhler görbe alapján élettartamra történik), egyszerűen cserélhető, és a speciális tengelytámasztási követelmények a megfelelő csapágytípus alkalmazásával megoldhatóak.

2.1. Forgó tengelyek csapágyazási szempontjai

A tengelyek csapágyazásának tervezésénél biztosítani kell a tengely legalább két helyen történő radiális és mindkét axiális irányú megtámasztását. Példaként megemlítjük a négyhengeres belsőégésű motorok főtengely csapágyazását, mely radiálisan vagy három, vagy öt nyugvócsapággal, míg axiálisan egy nyugvócsapágnál van mindkét irányban sikló támasztócsapágyakkal megtámasztva.

Ha a két axiális irányú megtámasztást egy csapággal oldjuk meg, akkor az a csapágy lesz a vezető, míg a másik az úszó vagy más néven dilatációs csapágy. Ezt a megoldást általában átmérőjéhez képest hosszú tengelyek csapágyazásához tervezzük. A dilatációs csapágnak vagy a külső gyűrűje csúszik a házban, vagy a belső gyűrűje a tengelyen, ill. az axiális elmozdulás a csapágszerkezeten belül jön létre. A dilatációs csapágy csak radiális támasztóerő felvételére képes.

Ha a két axiális irányú megtámasztást két külön csapággal oldjuk meg, akkor oldalról támasztott csapágyazásról beszélünk. A két csapágmegtámasztás között kellő axiális hézagot kell tervezni és szereléskor beállítani a hőmérsékletváltozás okozta dilatáció biztosítására.

A csapágyak axiális terhelése általában csak a külső terhelésből adódik, de vannak olyan csapágy típusok, mint például a kúpgörgős csapágy, melynek radiális terhelése a futópálya kúpszöge miatt axiális támasztóerőt fejt ki, melyet a párban beépített másik csapágy fog megtámasztani. Speciális kialakítású csapágyak esetén ezt a hatást a gyártó cég katalógusában ellenőrizni kell.

A tengelyek csapágyazási megoldására tehát számos megoldás létezik, és az adott megoldást is többfajta csapágytípussal lehet megvalósítani. A különböző megoldások közül az optimális megoldásokat az ágyazás merevségi, ill. rugalmassági, valamint a tengely futáspontossági előírásainak figyelembevételével kell megtervezni. A gördülőcsapágyak árai típustól és mérettől függően jelentősen eltérnek egymástól. Ezért ha különleges



feltételeknek nem kell megfelelni, akkor ezt a szempontot is vegyük figyelembe (leggyakrabban alkalmazott csapágytípus az egysorú mélyhornyú golyóscsapágy).

2.1.1. Csapágyazási helyek megoldásai

A csapágyazások tervezéséhez ismernünk kell a járatos csapágytípusok jellemzőit, a szög és radiális merevségi tulajdonságait. Ezek ismeretét feltételezzük. A csapágyakat a hatásvonaluk szerint csoportosítjuk, ez dönti el az általa megvalósítható támasztási lehetőségeket. A hatásvonal az a vonal, amely mentén a csapágy egyik gyűrűje a másikra, vagy egyik tárcsája a másikra a terhelést átadja, ezáltal jut a terhelés a tengelyről a csapágyházra. A csapágy hatásszöge a hatásvonal és a csapágy forgástengelyére merőleges sík által bezárt szög.

Hatásvonaluk alapján a csapágyakat a következő csoportokba sorolhatjuk:

1. A forgástengelyre merőleges hatásvonalú csapágyak: $\alpha = 0^\circ$

Ide sorolhatóak pl. a tű-és hengergörgős csapágyak támasztótárcsák nélkül.

2. Változó hatásszögű csapágyak: $\alpha = \alpha_{(F_a)}$

A tényleges hatásszög a radiális és axiális csapágyterhelés arányától függ.

Ide sorolhatóak pl. a mélyhornyú golyóscsapágyak és a beálló golyós, ill. hordógörgős csapágyak.

3. Ferde hatásvonalú csapágyak: $0 \leq \alpha \leq 90^\circ$

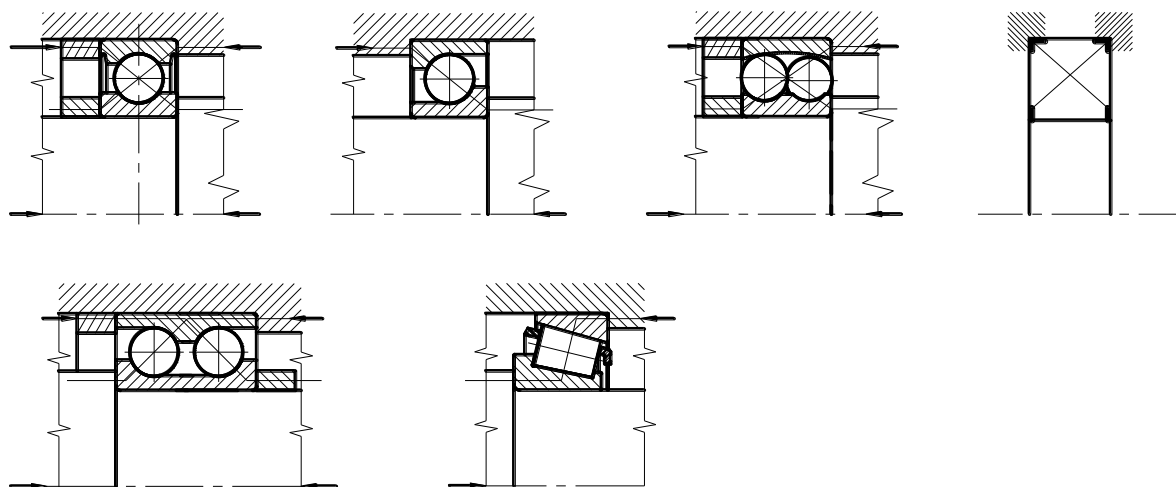
A gördülópálya adott szögben helyezkedik el a forgástengelyhez viszonyítva.

Ide sorolhatóak pl. a ferde hatásvonalú golyós és a kúpgörgős csapágyak.

4. A forgástengellyel párhuzamos hatásvonalú csapágyak: $\alpha = 90^\circ$

Ide sorolhatóak az axiális tárcsás támasztócsapágyak.

Az ágyazások csapágyazási helyei különböző feladatot kell, hogy ellássanak. Az egyes feladatokat különböző csapágytípusokkal oldhatjuk meg, a csapágygyűrűk megfelelő megtámasztásával. Ha egy tengelycsapágyazást szétszerelünk, ügyeljünk arra, hogy minden távtartó, gyűrű, tárcsa, hézagoló lemez, stb. helyét és helyzetét pontosan jegyezzük fel az összeszereléshez. A nem megfelelő módon összeszerelt csapágyazás vagy a csapágy idő előtti tönkremenetelét, vagy a tengelyre szerelt alkatrészek (pl. fogaskerék-hajtás) működésképtelenségét okozza. Célszerű a kiszertelt alkatrészekkel a tengely csapágyazásról vázlatot készíteni, annak működését megérteni és a szerelést nem csupán mechanikusan elvégezni.



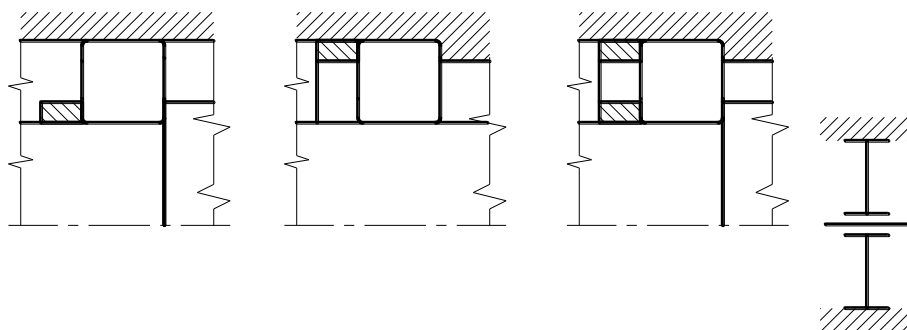
2.1 ábra: Járatos csapágytípusok lehetséges hatásvonalai

A 2.1 ábra a radiális és axiális erők felvételre alkalmas csapágytípusok csapágygyűrű megtámasztás lehetőségeit szemlélteti a hozzátartozó hatásvonal ábrával.

2.1.1.1. Radiális megtámasztás

Az ágyazási helyek egy részét úgy tervezzük, hogy csak radiális erőket tudjon felvenni. Ezt megoldhatjuk úgy is, hogy az alkalmazott csapágytípus csak radiális erő felvételére alkalmas (pl. hengergörgős csapágy), vagy pl. a változó hatásszögű csapágy csapágygyűrűit támasztjuk meg úgy, hogy csak radiális erőt tudjon felvenni (lásd 2.2 ábra). Négy, gyakran alkalmazott csapágytípus gyűrűmegtámasztására mutatunk példát, mellyel az ún. úszó csapágy szerepét tudják betölteni.

1. mélyhornyú golyóscsapágyak
2. beálló golyós és görgős csapágyak
3. hengergörgős csapágyak támasztótárcsa nélkül
4. túgörgős csapágyak



1-2 csapágyak

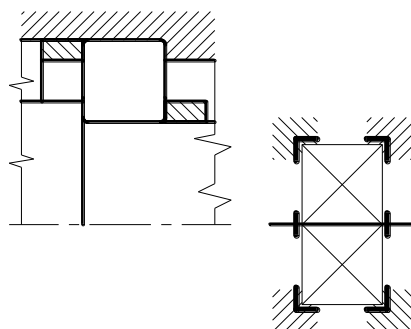
3-4 csapágyak

2.2 ábra: Radiális hatásvonalú csapágymegtámasztás

2.1.1.2. Radiális és mindkét irányú axiális megtámasztás

A kétirányú axiális megtámasztási igény miatt a csapágy mindkét gyűrűjét meg kell támasztani axiálisan (lásd 2.3 ábra). Erre alkalmas csapágytípusok (vezető csapágy):

1. mélyhornyú golyóscsapágyak
2. beálló golyós és görgős csapágyak
3. kétsorú ferdehatásvonalú golyóscsapágy
4. hengergörgős csapágy támasztótárcsával

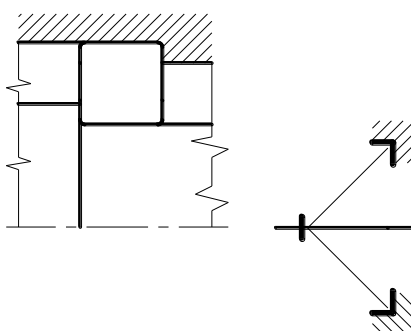


2.3 ábra: Vezető csapágy megtámasztás

2.1.1.3. Radiális és egyirányú axiális megtámasztás

Erre alkalmas csapágytípusok a megfelelő gyűrűmegtámasztással (lásd 2.4 ábra):

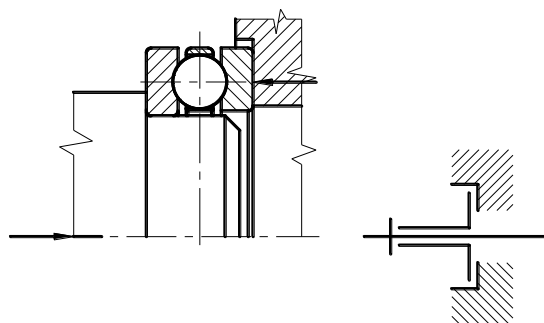
1. mélyhornyú golyóscsapágyak
2. beálló golyós és görgős csapágyak
3. egysorú ferdehatásvonalú golyóscsapágy
4. kúpgörgős csapágy



2.4 ábra: Oldalról támasztott csapágy megtámasztás

2.1.1.4. Egyirányú axiális megtámasztás

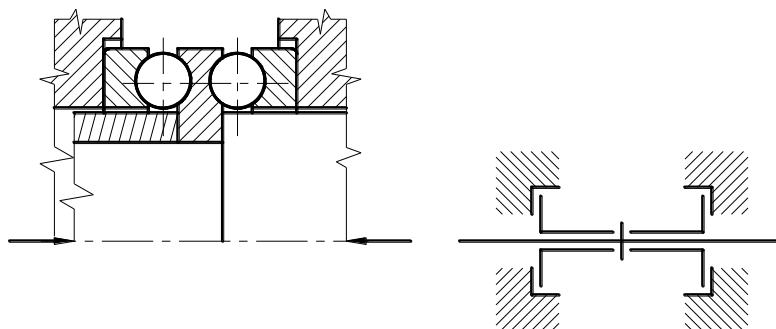
Tisztán axiális megtámasztásra csak az axiális tárcsás csapágyak képesek. A csapágyfészek tervezésénél ügyelni kell arra, hogy a tárcsát nem szabad illeszteni a fészekben, mert ezzel az esetleges radiális erőket is átadná a csapágyháznak (lásd 2.5 ábra). A tengellyel együtt forgó tárcsát természetesen illeszteni kell a tengelyen.



2.5 ábra: Egysorú axiális tárcsás csapágy megtámasztása

2.1.1.5. Kétirányú axiális megtámasztás

A középső tárcsát a tengelyen mindkét irányban meg kell támasztani és illeszteni kell, a két külső tárcsa belső átmérője nagyobb a tengelycsap átmérőjétől és a külső átmérőjüket itt sem szabad illeszteni a fészekben (lásd 2.6 ábra).

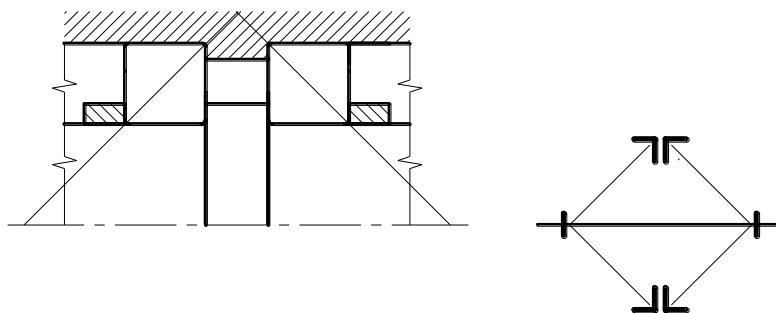


2.6 ábra: Kétsorú tárcsás csapágy megtámasztása

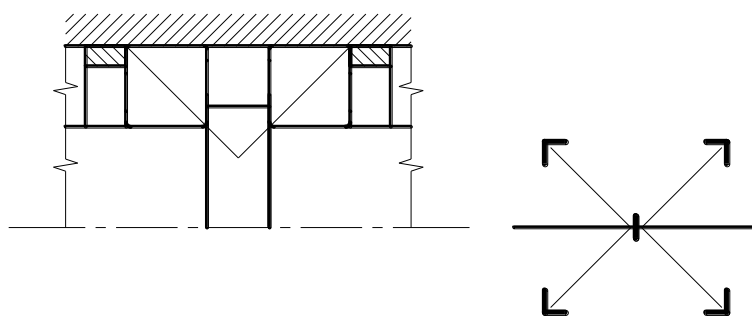
2.1.1.6. Nagy szögmerevségű megtámasztás

A nagy szögmerevségű vezetőcsapágy megtámasztásra alkalmas csapágyak (2.7 és 2.8 ábra):

1. egysorú ferdehatásvonalú golyócsapágyak párban alkalmazva
2. kúpörgős csapágyak párban alkalmazva



2.7 ábra: O elrendezésű vezetőcsapágy megtámasztás



2.8 ábra: X elrendezésű vezetőcsapágy megtámasztás

Az „O” és „X” elrendezés elnevezés a csapágyak hatásvonalának helyzetére utal. A két elrendezés közül az „O” elrendezés a nagyobb szögmerevségű a nagyobb támasztási távolság miatt.

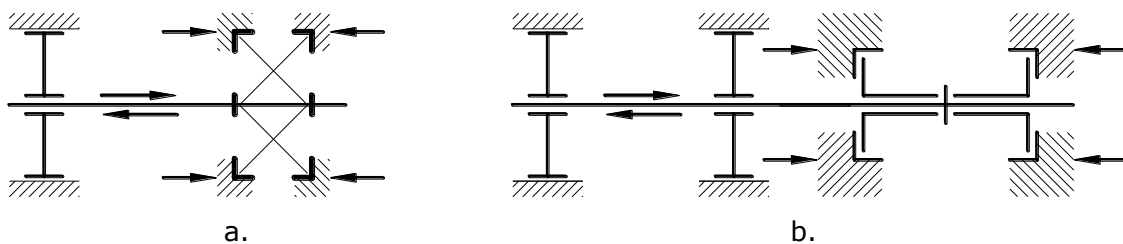
2.2. Forgó tengelyek csapágyazási megoldásai

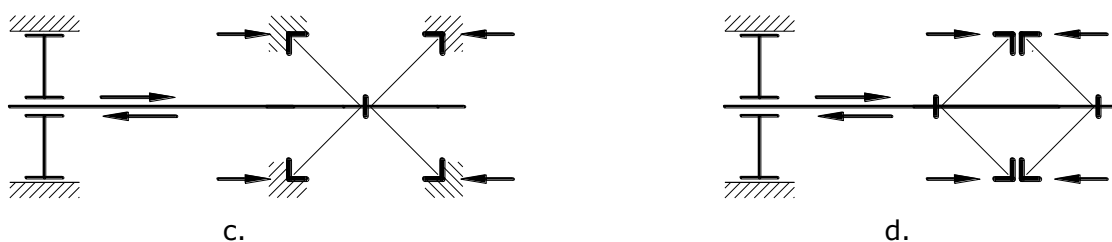
A tengely csapágyazását a fent ismertetett csapágyazási helyek célszerű alkalmazásával biztosítjuk. A tervezésnél a következő szempontokat kell figyelembe venni [3]:

- a tengelyt legalább két helyen kell radiális irányban megtámasztani
- a tengelyt mindkét axiális irányban meg kell támasztani, amit vagy egyazon csapágyazási helyen valósítunk meg, vagy két különbözőn

2.2.1. Vezető csapágyazás

Vezető csapágyazást hosszú tengelyek csapágyazásánál kell alkalmazni, ahol a tengely hő dilatációjának mértéke nagyobb, mint a csapágyak üzemi hézaga, ami a tengely befeszüléséhez vezetne. A szükséges dilatációs mozgást az ún. úszó csapágy axiális eltolhatóságával biztosítjuk. A vezető csapágyazási hely megoldható egy csapággal (2.9 a. ábra), vagy nagy szögmerevségű csapágyazással (O és X elrendezés) (c és d ábra), valamint megoszthatjuk a radiális és axiális megtámasztási feladatot tisztán radiális és tisztán axiális megtámasztásra alkalmas csapágyak alkalmazásával (b ábra). A lehetséges megoldások közül a tengely merevségi, egyéb konstrukciós, valamint a csapágyerők nagyságrendi értéke alapján dönthetünk. A lehetséges megoldásokat a csapágyazási helyek hatásvonal ábrájával szemléltetjük. Az egyes csapágyazási helyhez ezt követően tudunk csapágytípust választani a megfelelő csapágygyűrű megtámasztási követelmények figyelembevételével.



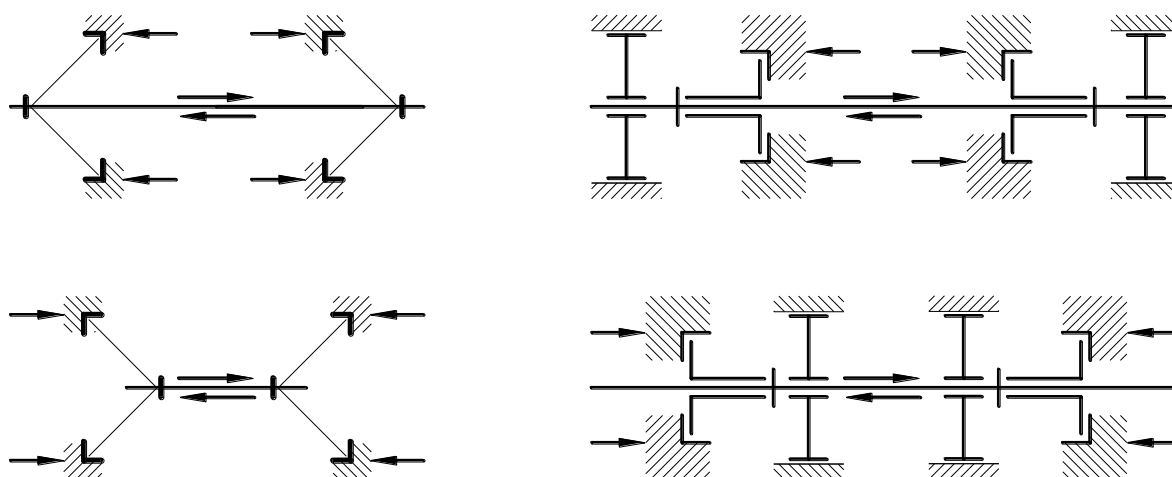


2.9 ábra: Vezető csapágyazási megoldások

2.2.2. Oldalról támasztott csapágyazás

Ez a megoldás rövidebb tengelyek esetében alkalmazható, amikor a tengely hőmérsékletváltozás okozta hosszirányú méretváltozása kisebb, mint a csapágyak axiális üzemi hézaga (2.10 ábra).

- Ha üzemszerűen nem, vagy csak kismértékű axiális terhelés hat, alkalmazhatunk egysorú mélyhornyú golyóscsapágyakat, vagy beálló golyós vagy görgős csapágyakat. A tengely axiális játékát konstrukciótól függően vagy a csapágyak külső vagy a belső gyűrűjének megtámasztásánál hézagolással állítjuk be.
- Nagyobb axiális terhelés esetén két darab ferdehatásvonalú golyóscsapágyat, vagy kúpgörgős csapágyat alkalmazhatunk akár O, akár X elrendezésben. A tengely axiális játéka, ténylegesen a szereléskor beállított csapágyhézag. A csapágyhézag állítását nagyobb és hozzáférhető helyen hézagmérővel végzik, kisebb méretek esetében mérőórával. Alárendelt helyen kellő pontossággal beállítható a csapágyhézag a tengely anyja kismértékű visszalazításával a menetemelkedés ismeretében.
- A jelentős axiális erők felvételére alkalmazhatunk külön tárcsás csapágyakat.



2.10 ábra: Oldalról támasztott csapágyazási megoldások

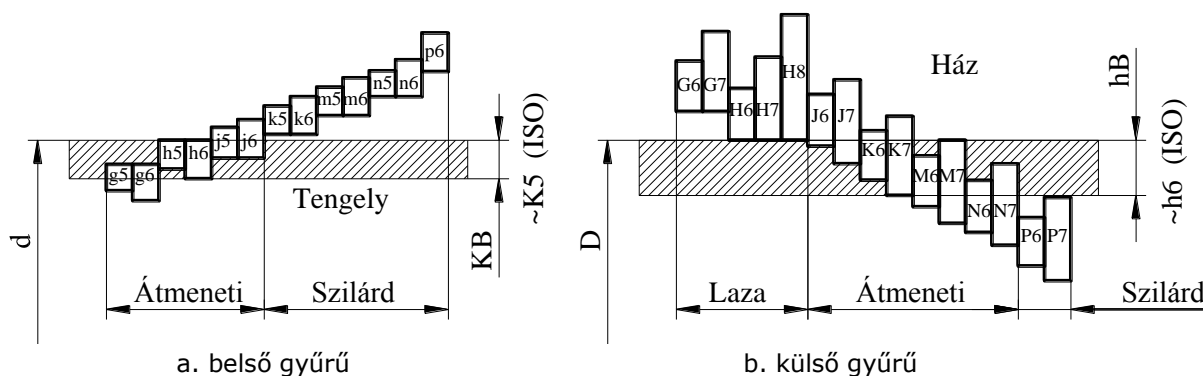
2.3. Csapágygyűrűk illesztése, illesztési szempontok

Mint láthattuk, a különböző csapágytípusokkal a megfelelő csapágygyűrű megtámasztásokkal különböző támasztási feladatokat tudunk megvalósítani. Például egy mélyhornyú golyóscsapágy mindkét gyűrűjének axiális irányú megtámasztásával mint

vezetőcsapágy működhet, viszont működhet dilatációs csapágyként, ha pl. a külső gyűrűjét egyik oldalról sem támasztjuk meg. Ennek viszont az a feltétele, hogy a külső gyűrű el tudjon csúszni a csapágyházban, amit a megfelelő illesztéssel tudunk biztosítani. Az illesztés viszont befolyásolja a csapágy üzemi hézagát, ami közvetlen hatással van a csapágy futáspontosságára, valamint a csapágy élettartamára. Mivel a csapágygyűrűk illesztési előírása meglehetősen komplex feladat, ezért az azt befolyásoló tényezőket részleteiben tárgyaljuk.

2.3.1. Csapágygyűrűk átmérő tűrése

A csapágygyűrűk átmérőjének tűrésére külön nemzetközi szabványt dolgoztak ki, mely eltér az ISO rendszertől [3]. Az illesztéshez a tengely átmérőjét, ill. a csapágyház átmérőjét az ISO rendszerben kell előírunk, hiszen a megmunkálási tűréseket ebben értelmezzük.



2.11. ábra: A csapágygyűrűk tűrése

A 2.11. a. ábra a belső csapágygyűrű furatának KB tűrését szemlélteti, mely a névleges mérethez viszonyított helyzetét tekintve körülbelül a K5 ISO lyuktűrésnek felel meg, míg a külső gyűrű külső átmérőjének hB tűrése körülbelül a $h5-h6$ ISO tűrésnek felel meg (2.11 b. ábra). A megfelelő illesztéshez a tengely, ill. a csapágyházak tűrések a 2.11 ábra alapján írhatóak elő.

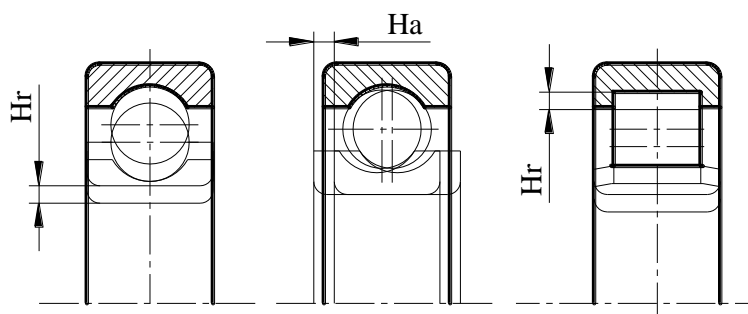
2.3.2. Csapágygyűrűk illesztési szempontjai

Szempontok az illesztések előírásához

1. csapágyház
2. gyűrűvándorlás
3. axiális eltolhatóság
4. szerelhetőség

2.3.2.1. Csapágyház

Csapágytípustól függően különböző csapágyházakat definiálhatunk. Irányuk szerint lehetnek radiális és axiális ház (2.12 ábra). A csapágyház a csapágygyűrűk eltolhatósága egymáshoz viszonyítva egyik határhelyzetéből a másikba radiális, ill. axiális irányba.



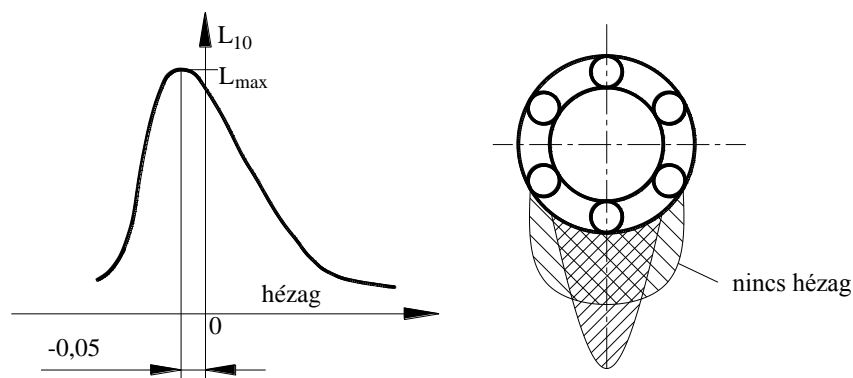
2.12 ábra: A csapágyhézag értelmezése

A nem szétszedhető csapágyak esetében a következő hézagokat definiálhatjuk:

- gyártási hézag
- szerelési hézag
- üzemi hézag

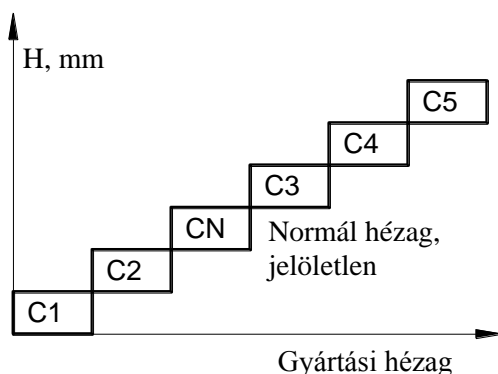
A szétszedhető csapágyak szerelési és üzemi hézaggal rendelkeznek, a gyártási hézagot pedig típustól függően csak részben értelmezhetünk. Például egy hengergörgős csapágy esetében csak radiális irányú gyártási hézag értelmezhető, kúpgörgős csapágy esetében pedig sem radiális, sem axiális.

Az adott gyártási hézaggal rendelkező csapágy hézaga beszerelést követően a gyűrűk illesztése miatt lecsökken és szerelési hézaggá alakul, mely működés közben az üzemi hőmérséklet növekedése miatt tovább csökken, míg beáll az üzemi hézag. Ennek értéke az optimális csapágy élettartam érdekében nullának, vagy negatívnak, azaz kismértékben előfeszítettnek kell lennie.



2.13 ábra: A csapágyhézag hatása az élettartamra

Az optimális üzemi hézag tehát figyelembe véve a csapágyillesztési előírásokat valamint az üzemi körülményeket, különböző gyártási hézagból kiindulva érhető csak el.



2.14 ábra: Csapágy gyártási hézag jele

A normál gyártási hézagú csapágyakat külön nem jelölik, az ettől eltérőket $C_1 - C_5$ betűjellel jelölik a csapágygyűrű homloklapfelületén, lásd 2.14 ábra.

Példaként említjük a normál gyártási hézagtól eltérő hézagú csapágy alkalmazására a kétütemű belsőégésű motorok egysorú mélyhornyú főtengely csapágyait, melyek a nagy üzemi hőmérséklet miatt általában C_3 -as hézagúak. A csapágyak a magas üzemi hőmérsékleten érik el az optimális csapágyhézagot.

A csapágygyűrűk fedéssel történő illesztésével a csapágyhézag minden esetben csökken. Figyelembe kell venni azt is, hogy különböző anyagú és falvastagságú csapágyfészekben történt azonos illesztés eltérő csapágyhézag csökkenést okoz, és eltérő mértékű kötőnyomást eredményez a külső gyűrű és a ház között.

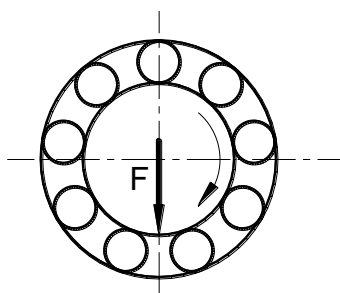
A csapágygyűrűk előírt illesztésével a csapágy megfelelő működését biztosítjuk az adott csapágyazási helyen (gyűrűvándorlási, axiális eltolhatósági és szerelhetőségi szempontok), mellyel a csapágy üzemi hézagának közel 0-nak kell lennie.

2.3.2.2. Gyűrűvándorlás

Egy gördülőcsapággal megvalósított csapágyazási helyen csak a két csapágygyűrű, vagy tárcsák között lehet relatív elfordulás. Tehát sem a belső gyűrű nem fordulhat el a tengelyen, sem a külsőgyűrű a házban még akkor sem, ha a terhelés a gyűrűket erre kényszerítené.

A csapágyterhelés iránya szerint lehet:

- állandó irányú terhelés (lásd 2.15 ábra), mely:
 - körbeforgó terhelést fejt ki a forgó belső gyűrűre: szilárdan kell illeszteni
 - egy pont terhelést okoz a rögzített külső gyűrűre: tetszőlegesen illeszthető



2.15 ábra: Csapágygyűrűk terhelés irányának értelmezése



- a terhelés iránya véletlenszerű: mindkét gyűrűt szilárdan kell illeszteni

Tengely és csapágyfészek ajánlott tűrés értékei a terhelés iránya és nagysága alapján [3]:

2.1 táblázat: Csaptűrés ajánlott értékei (tömör acél tengely)

Csaptűrés ajánlott értékei (tömör acél tengely)		
Körbeforgó, vagy határozatlan irányú belsőgyűrű terhelés	Kis terhelések, de a belső gyűrűnek eltolhatónak kell lennie a tengelyen	j6
	Közepes és nagy terhelések	k5, k6
	Nagyon nagy terhelések és dinamikus igénybevétel	n6
Állandó irányú belsőgyűrű terhelés	A belső gyűrűnek a tengelyen eltolhatónak kell lenni	g6
	A belső gyűrű eltolhatósága a tengelyen nem követelmény	h6

2.2 táblázat: Lyuktűrés ajánlott értékei (öntöttvas és acél csapágyház)

Lyuktűrés ajánlott értékei (öntöttvas és acél csapágyház)			
Körbeforgó irányú külsőgyűrű terhelés	Nagy terhelés, dinamikus igénybevétel, vékonyfalú csapágyház	P7	nem eltolható gyűrű
	Közepes és nagy terhelések, a külső gyűrűnek eltolhatónak kell lennie a házban	N7	nem eltolható gyűrű
	Kis terhelések	M7	nem eltolható gyűrű
Határozatlan irányú külsőgyűrű terhelés	Nagy, ütésszerű terhelés	M7	nem eltolható gyűrű
	Közepes és nagy terhelés, axiális eltolhatóság nem követelmény	K7	nem eltolható gyűrű
Határozatlan irányú külsőgyűrű terhelés	Kis és közepes terhelés, axiális eltolhatóság követelmény	J7	eltolható gyűrű
Állandó irányú külsőgyűrű terhelés	Kis és közepes terhelés	H8	eltolható gyűrű
	Hővezetés a tengelyen keresztül	G7	eltolható gyűrű



2.3.2.3. Axiális eltolhatóság

Úszó csapágyak meghatározott gyűrűjét az axiális eltolhatóság érdekében megfelelően kell illeszteni. Ez a gyűrű csak egy pont terhelésű lehet.

2.3.2.4. Szerelhetőség

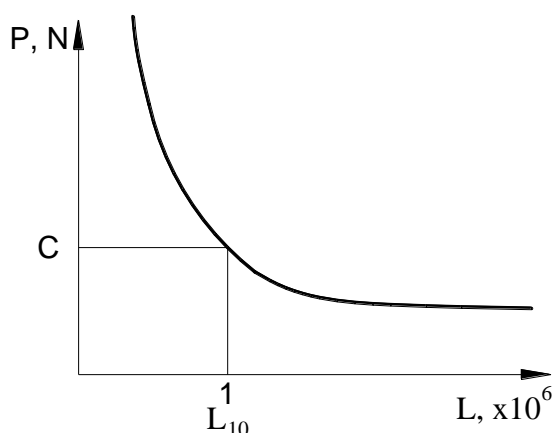
Tervezéskor a szerelhetőséget is szem előtt kell tartani. Egy hajtóműház vagy generátor ház széthúzásakor nem mindegy, hogy a csapágy a tengelyen, vagy a házban marad, ha a további szerelhetősége a csapágnak nincs megoldva. Ha a külsőgyűrűt kell nagyobb fedéssel illeszteni, ami miatt szereléskor a csapágy a házban marad, tervezzünk kitoló menetes furatokat a külsőgyűrű méretének megfelelő osztó kör átmérőn.

2.4. Csapágykiválasztás

A gördülőcsapágyak kiválasztásának alapja a mértékadó, tönkremenetelét okozó igénybevétel. A gördülőcsapágyak futópályái lüktető igénybevételnek vannak kitéve a gördülőelemek legördülése miatt, ami a futófelület kifáradásához, kipattogzásához vezet.

A gördülőcsapágyak kiválasztása 90%-os túlélési valószínűséggel, adott élettartamra történik a csapágy Wöhler görbe alapján. Egy szakszerűen üzemeltetett csapágy tehát csak a futópályák kifáradása miatt mehet tönkre. Az ettől eltérő tönkremenetel oka általában a szakszerűtlen szerelés, a nem a tervezett üzemviszonyok melletti működés, melynek a következménye a túlterhelés, melegedés és az elégtelen kenési állapot.

A csapágykiválasztás alapja tehát a Wöhler görbe. Mivel a csapágyak üzemórában kifejezett élettartamát az adott gép alkalmazási területe alapján írjuk elő, az ehhez tartozó csapágy egyenértékű terhelés értéke is az előírt élettartamtól függ. A csapágykiválasztás megkönnyítése érdekében a különböző típusú és méretű csapágyak hasonló Wöhler görbéit egy összetartozó értékpárral azonosítják, ezek a C dinamikus alapterhebírási és az $L_{10}=1$, a csapágy élettartama millió fordulatokban kifejezve. A csapágy élettartama tehát 1 millió fordulat a C egyenértékű terhelés mellett (lásd 2.16. ábra).



$$L_{10} = \left(\frac{C}{P}\right)^p \quad p=3 \text{ golyós csapágyakra}$$

$$p = \frac{10}{3} \text{ görgős csapágyakra}$$

2.16 ábra: Gördülőcsapágyak Wöhler görbéje

A csapágyak kiválasztásánál a következő élettartamot tervezzük a gép alkalmazási területétől függően:



L_h [óra]	4.000 – 8.000	szakaszos üzemű
	14.000 – 20.000	napi nyolc órában üzemelő
	50.000 – 60.000	folyamatos, napi 24 órában üzemelő gép

A csapágy élettartama tehát:

$$L = L_h [h] n \left[\frac{1}{min} \right] 60 \left[\frac{min}{h} \right] \frac{1}{10^6} \quad (2.1)$$

A csapágy dinamikus alapterherbírása:

$$C = \sqrt[3]{LP} \quad \text{golyós csapágyakra} \quad (2.2)$$

$$C = \sqrt[10]{LP} \quad \text{görgős csapágyakra} \quad (2.3)$$

ahol: P a csapágy egyenértékű terhelése

A P egyenértékű terhelés meghatározásának módját a csapágyra ható erőkől különböző csapágytípusokra a csapágykatalógusok tartalmazzák.

3. A hajtáslánc igénybevétele, tervezése

A hajtásláncot ért terheléseket a csapágyazásokon keresztül visszük át a csapágyházra reakcióerő formájában, melyet a statika tanulmányaink alapján határozhatunk meg. A számításokhoz természetesen meg kell határozni a külső terheléseket, melynek helyességén múlik, hogy a mechanikai modell leírja-e a valós szerkezetet. A méretezésnek ez a kulcspontja, hiszen tisztában kell lenni a gépcsoport működésével. A hibásan, vagy hiányosan felvett terhelésekkel végzett méretezés következményei pedig csak a próbaüzemkor fognak kiderülni a tervezettől eltérő élettartam, ill. a tényleges működési paraméterek formájában.

A továbbiakban egyszerű példákon keresztül mutatjuk be a fellépő terheléseket a különböző hajtások esetén.

3.1. A motor által leadott teljesítmény

A motorok által leadott teljesítményt az energia egyensúlyi egyenlet alapján tisztázhatjuk. Gyakorlatilag az összes örökmozgó „elmélet” (csupán elmélet, hiszen még egy sem valósult



meg), ezen az egyenleten bukik meg, miszerint energiát nem lehet létrehozni vagy eltüntetni, csupán egyik formából a másikba alakítható át. Bár tágabb értelemben veszteségek nincsenek, a műszaki terminológiában értelmezett mechanikai veszteség helyes kifejezés, ugyanis azt jelenti, hogy a rendelkezésre álló energia mekkora része nem alakul át mechanikai munkává. A nem precíz műszaki terminológia használata gyakran vezet félreértésekhez, pl. jelen esetben, ha a mechanikai veszteség helyett a veszteség kifejezést használjuk.

A hajtáslánccal átvitt teljesítmény meghatározásakor először azt kell tisztázni, hogy a motor megadott teljesítménye a mechanikai teljesítménye, vagy a motor által biztosított összes energiaformára vonatkozik. A motor által szolgáltatott mechanikai munka a felhasznált energiához viszonyítva (fosszilis energia, villamos energia... stb.), a motor mechanikai hatásfokával jellemezhető, mely Otto motor esetében 30-35, Dízel motor esetében 40-45 %, míg villamos motor 60-80%.

Ez azt jelenti, hogy egy Otto motor a tüzelőanyag elégetéséből kb. 1/3 részt hasznosít mechanikai munka formában, 1/3 részt hő formájában kijuttat a környezetbe a kipufogógázzal, és a maradék 1/3 részt a működő motor, ill. a hűtőrendszer sugározza a környezetbe szintén hő formájában. Megjegyezzük, hogy belsőégésű és villamos motorok esetében általában a mechanikai teljesítményt adják meg a gépkönyvben, hiszen ez az adat szükséges az alkalmazáshoz.

Villamos motorok esetében a teljes villamos teljesítményt is meg kell adni, ugyanis a villamos hálózatra kötésnél ismerni kell a motor áramfelvételét. Egy LG típusú porszívón például a következő adatok olvashatóak: motor névleges teljesítménye 1600W, szívóteljesítménye 340W. A rendelkezésre álló szívóteljesítmény már nem csak a villanymotor hatásfokának, hanem magának, a villanymotorral hajtott, porszívó gép hatásfokának a függvénye. A két teljesítmény érték közötti különbség hőáramként sugárzódik a környezetbe és melegít fel rövid idő alatt például egy lakószoba méretű zárt helyiség légterét.

A motor által leadott mechanikai teljesítmény nagyságával kapcsolatban még egy fontos dolgot tisztázni kell:

A motor pontosan akkora mechanikai teljesítményt ad le, amennyit a munkagép a hajtásláncon keresztül levesz róla. Ez a mechanikai teljesítmény (mely a névleges teljesítménynek akár többszöröse is lehet) levétel természetesen csak addig növelhető, amíg a motor azt képes leadni. Ha tehát egy villanymotort lekapcsolunk a hajtáslánccal és működtetjük, a motor pillanatnyi villamos teljesítménye (ezt az áramfelvételtől számíthatjuk ki) a mechanikai veszteségeiből (csapágysúrlódás) és a motor melegedéséből keletkező hőáramot fogja fedezni. Azt is mondhatjuk, hogy a motor villamos teljesítménye teljes egészében a környezet fűtésére fordítódik.

A motorok által biztosított összetartozó $M - n$ értékpár a motor típusától és terhelési szinttől függően változik. Méretezésnél a motor tengelyén levehető nyomatékból, mint névleges nyomatékból kell kiindulni, mely alapja a terhelési modell felépítésének. A különböző fordulatszámokhoz tartozó motornyomaték értékeket a motor jelleggörbék tartalmazzák, melyek a motor jelleggörbék fejezetben kerülnek tárgyalásra.



3.2. Haladó, ill. forgó mozgást végző elemek hatása

A teljesítményt továbbító hajtáslánc elemei változó sebességgel, ill. szögsebességgel haladhatnak, foroghatnak. A változó sebesség következménye a gyorsuló-lassuló tömegű, ill. tehetetlenségi nyomatékú elemek $F_d = ma$, ill. $M_d = J\varepsilon$ járulékos terhelései, melyek a hajtáslánc szakaszok dinamikus igénybevételét okozzák. Ebből következik, hogy ha egy nagy tehetetlenségi nyomatékkal rendelkező nagy fordulatszámú hajtásláncot nagyon rövid idő alatt fékezzük le, az $M_d = J\varepsilon$ járulékos nyomaték értéke meghaladhatja a hajtáslánc adott szakaszát üzemszerűen terhelő csavaró nyomatékot, és töréshez vezethet. Hasonló probléma lép fel a hajtáslánc gyors indításakor, mely esetben mint majd látni fogjuk, fordulatszám kapcsolású tengelykapcsoló beépítésével csökkenthető a járulékos erőhatás.

3.3. Külső terhelések

A munkagép által végzett technológiai folyamattól függően mozgó tömegek ütközésekor átadódó energiával is számolnunk kell. Ez a becsapódási pont rugalmasságától függően eltérő erőhatást eredményezhet. Egy egyszerű esetből kiindulva tételezzük fel egy m tömegű elem becsapódását egy adott alkatrészre, melynek igénybevételét meg kell határozni. A dinamikus erőhatás itt is a következő összefüggéssel határozható meg: $F_d = ma$, a nehézséget viszont a mozgó tömeg lassulásának a meghatározása jelenti.

Természetesen léteznek már nagyon nagy sebességű kamerák, melyek akár egy kilőtt pisztoly töltényt is képesek nyomon követni, így annak gyorsulás-lassulás értékét meghatározni, de ezek nem feltétlenül állnak rendelkezésre.

A mérés technikában már rutinszerűen alkalmazott lassulásmérőt is alkalmazhatunk, melyet a becsapódó tömegbe építünk be és közvetlenül mérhetjük a lassulás értékét. A lassulásmérő a mérőrendszernek csupán az érzékelő része, tehát az egész mérőrendszerrel rendelkezünk kell: adatgyűjtő, mérőerősítő, kiértékelő szoftver.

Amennyiben ez sem áll rendelkezésre, akkor a vizsgált alkatrész rugómodelljéből indulhatunk ki. Statikus méréssel meghatározzuk az alkatrész rugódiagramját abból az irányból terhelve, amelyből a becsapódás érkezik. Ha becsapódás során mérni tudjuk a létrejött lehajlást, ill. deformációt (általában maradó deformáció formájában), a rugódiagram ismeretében meg tudjuk határozni a hozzá tartozó F_d dinamikus erő értékét. A következőkben néhány, gyakran előforduló műszaki megoldást elemzünk a terhelések tisztázása érdekében.

3.3.1. Radiálisan tehermentesített hajtás

Vegyük az oszlopos fűrőgépet példaként, mellyel merőlegesen fúrunk egy munkadarabot és feltételezzük, hogy a fűrő vágó élei szimmetrikusak, valamint a munkadarab anyaga homogén. A forgácsoló erők radiális irányban kiegyenlítik egymást, így radiális terhelés nem éri sem a fűrő szerszámot, sem a villanymotor tengelyét. A tengely igénybevétele a motor által leadott csavarónyomatékból származik, tehát egyszerű csavaró igénybevételre kell méretezni. A tengely csapágyazást ideális esetben, radiális irányban csak az önsúly terheli, függőleges tengelyhelyzet esetén pedig még az sem.



3.3.2. A forgó tengelyek terhelése

A hajtáslánc elemek időben változó terhelésnek vannak kitéve az egyenlőtlen nyomatékszolgáltatás és nyomatékigény miatt. A terhelés időbeli lefolyását a terhelési modell felépítésével modelleztük a k_{ii} és k_T tényezők felvételével. Mivel az időben változó terhelést a névleges teljesítményből számított középértékre szuperponáltuk, a terhelés lüktető. Forgó tengelyek esetében azonban a keresztmetszetek elfordulnak, így a középfeszültség értéke nulla lesz, míg a feszültség amplitúdó $\sigma_a = k_{ii} \sigma_n$, tehát az igénybevétel lengő lesz.

3.3.3. Szíjhajtásból származó terhelések

A szíjhajtás az erőzáró hajtások csoportjába tartozik. A teljesítmény átvitel a hajtószíjjal, adott tárcsaátmérőn működtetett kerületi erővel történik. A kerületi erő azonban nem csak a csavaró nyomatékot biztosítja, hanem adott irányú radiális terhelést is okoz. A szíjhajtásból származó radiális terhelést a szíjhajtás befejezéséhez szükséges tengelyfeszítő erővel vesszük figyelembe a tengely igénybevételi ábráinak rajzolásakor (lásd 3.1 ábra).

Szíjhajtás tervezése is a névleges teljesítményből indul ki, melyből egy k_{ii} üzemtényező felvételével számíthatjuk ki az átviendő teljesítményt, mely alapján a szíjprofil és a szíj darabszám kiválasztás elvégezhető. Ebben a fejezet részben az Optibelt katalógus jelölésrendszerét alkalmazzuk, ugyanis a tervezés ezen fázisában ezt alkalmazhatjuk [4].

$$P_B = P c_2 \quad (3.1)$$

ahol: P [kW] névleges teljesítmény
 P_B [kW] tervezési (maximális) teljesítmény
 c_2 üzemtényező

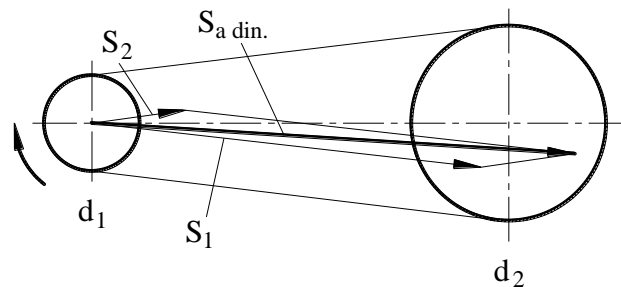
A c_2 üzemtényező értékét különböző hajtó és hajtott gép esetén a 3.1 táblázat tartalmazza (ezt az üzemtényezőt alkalmazzuk a terhelési modell felépítéséhez is).

3.1 táblázat: A szíjhajtás c_2 üzemtényező értéke

	Hajtó motor	
Hajtott gép típus	Egyfázisú villanymotor indítófázissal, háromfázisú kalickás villanymotor (normál indítónyomatékú), egyenáramú motor, belsőégésű motor és turbina $n > 600 \frac{1}{min}$	Egyfázisú villanymotor nagy indítónyomatékkal, háromfázisú kalickás villanymotor (nagy indítónyomatékú), egyenáramú motor, belsőégésű motor és turbina $n \leq 600 \frac{1}{min}$
	c_2	c_2
Könnyű üzemű Centrifugál szivattyúk, kompresszorok,	1,1	1,3

ventilátorok		
Közepes üzemű Lemezvágók, présgépek, vibrátorok, szerszámgépek,	1,1	1,4
Nehéz üzemű Dugattyús kompresszorok, présgépek, markolók, kovácsgépek,	1,2	1,6
Nagyon nehéz üzemű Darálók, kőtörők, mángorlók, faipari gépek	1,3	1,8

Két szíjtárcsás hajtás esetén a szíjág erőkből adódóan, a hajtó és a hajtott tengelyek, valamint a csapágyazások azonos nagyságú, de ellentétes irányú terhelésnek vannak kitéve.



3.1 ábra: Szíjágerek és a tengelyfeszítő erő

Pontos számításhoz meghatározható az S_1 feszes, ill. az S_2 laza szíjágerek, melyből az $S_{a\,dyn}$ tengelyterhelő erő számítható:

$$S_1 \approx \frac{1,02P_B}{c_1v} \quad (3.2)$$

$$S_2 \approx \frac{(1,02 - c_1)P_B}{c_1v} \quad (3.3)$$

$$S_{a\,dyn} \approx \sqrt{S_1^2 + S_2^2 - 2S_1S_2 \cos \beta} \quad (3.4)$$

ahol: c_1 átfogási szögtől függő tényező (katalógusból)

β a kis ékszíjtárcsa átfogási szöge (számítható)

v szíjsebesség

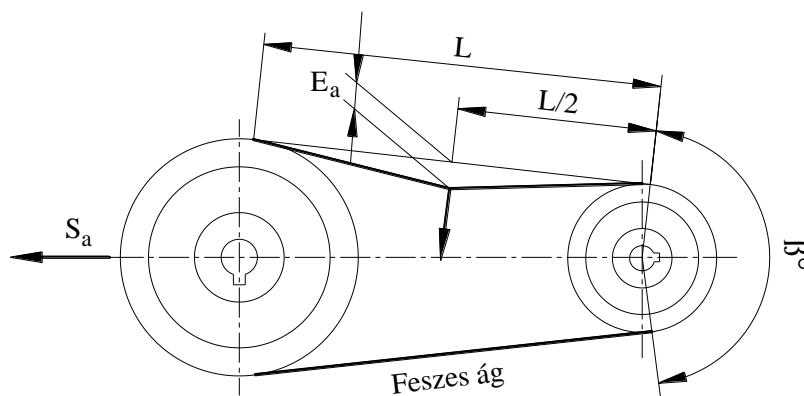
Egyszerűsített számításokhoz a tengelyfeszítő erőt a közös tengelyvonalon vesszük fel és a következő összefüggéssel számítjuk:

$$F_{a\ dyn} = \frac{K - c_1}{c_1} \frac{c_2 P}{v} \quad (3.5)$$

ahol: K tényező
 $K = 3,0$ normál ékszíjra
 $K = 2,04$ keskeny ékszíjra

Az $F_{a\ dyn}$ számított értéke kb. $F_{a\ dyn} = (2,3 \dots 2,5) F_{ker}$, ahol F_{ker} a szíjhajtás kerületi ereje.

Az $F_{a\ dyn}$ tengelyfeszítő erővel elvégzett tengelyméretezés csak akkor megfelelő, ha a szíjat nem feszítik túl. A szíjfeszesség helyes, ha a szíjágat közepén előírt erővel terhelve adott mértékű benyomódást szenved. A következőkben ismertetett ellenőrzési eljárás SPZ, SPA, SPB, SPC, A/13, B/17, C/22, 25, D/32 profilú szíjak esetén alkalmazható.



3.2 ábra: A szíjhajtás befeszítése

- $E = 100$ mm fesztávolsághoz tartozó szíjbenyomódás (mm)
- $E_a =$ szíjbenyomódás az adott fesztávra (mm)
- $f =$ a szíjbenyomáshoz alkalmazott terhelés (N)
- $L =$ szíj fesztáv (mm)
- $S_a =$ minimális statikus tengelyterhelés (N)
- $T_0 =$ minimális statikus feszítőerő szíjanként (N)
- $T =$ minimális feszítőerő szíjanként (N)

A statikus szíjfeszítés a következő összefüggéssel számítható:

$$T_0 = \frac{F_{a\ dyn}}{2z} + kv^2 \quad (3.6)$$

$$T \approx \frac{1}{2} \frac{(K - c_1)}{c_1} \frac{P_B}{zv} + kv^2 \quad (3.7)$$

ahol: k [kg/m] a szíj folyóméter tömege
 z szíjak száma

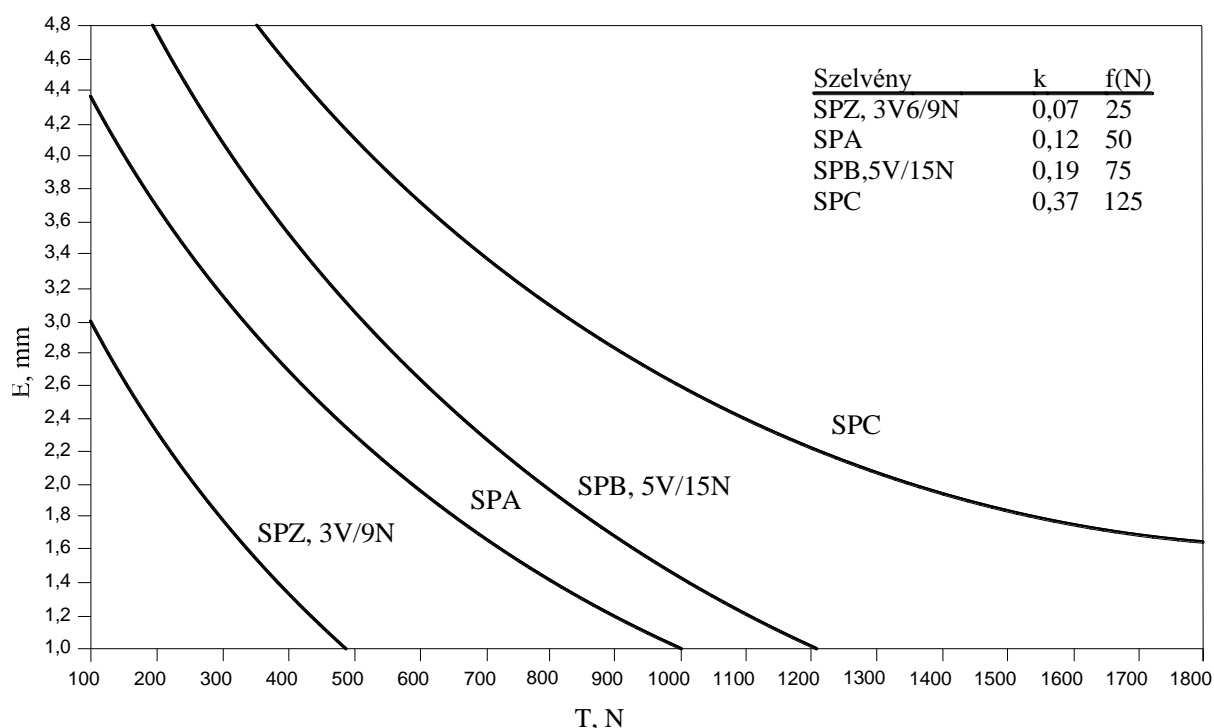


E értéke, a 100 mm fesztávolsághoz tartozó szíjbenyomódás a következő szíj feszítés/szíjbehajlás grafikonból határozható meg. E_a , az adott fesztávhoz tartozó szíjbenyomódás:

$$E_a \approx \frac{EL}{100} \quad [\text{mm}] \quad (3.8)$$

$$L = a_{nom} \sin \frac{\beta}{2} \quad (3.9)$$

A szíj feszesség beállításához addig kell a tengelytávolságot módosítani, amíg az „f” szíjterheléshez az előírt E_a szíjbenyomódás nem mérhető.



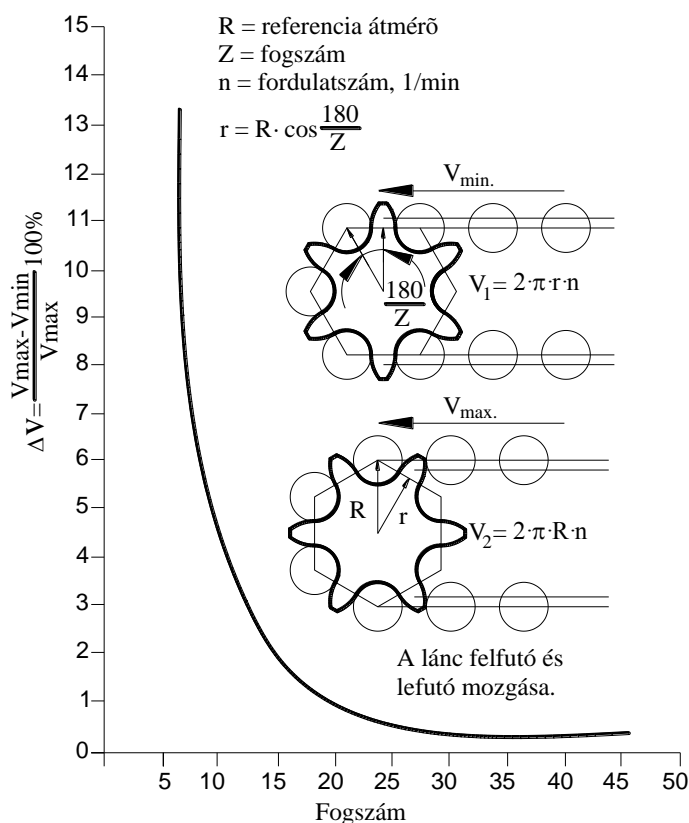
3.3 ábra: A szíjbenyomódás előírt mértéke

Forrás: [5]

3.3.4. Lánc hajtásból származó terhelések

A lánc hajtással átvihető teljesítmény, ill. kerületi erő a szíjhajtással ellentétben nem függ a befeszítéstől. Ebből következik, hogy a lánc hajtás befeszítés nélkül is működőképes és gyakran így használjuk. Lánc feszítést általában a lánc lengések csökkentésére, a hajtó hajtott tengelyek pozicionálására (belsőégésű motorok vezérműve) alkalmazunk, ill. kis fogmagasságú lánc hajtás esetében a fogátugrás elkerülése érdekében. A fentiekből következik, hogy a lánc hajtásból adódó névleges tengelyterhelést (természetesen az önsúlyt mértékétől függően figyelembe kell venni) a feszes láncágban ható kerületi erőből számítjuk, melyet az átviendő csavaró nyomatékból határozzuk meg. Miután a kerületi erőt önmagával párhuzamosan betoltuk a lánc kerék középpontjába, felbontjuk a tengely támasztóerőinek számítására rögzített síkoknak megfelelő komponenseire. Görgős hajtólánccok alkalmazása esetén számolnunk kell a poligonhatással, melynek mértékét a

kisebik lánckerék fogszáma határozza meg, ezért ennek fogszámát körültekintően kell meghatározni. Egy adott nagyságú áttétel biztosításához ugyanis a nagyobbik lánckerék fogszáma olyan nagyra adódhat, mely csak egy kismértékű lánckopást engedne meg, ami a lánccsal gyakori cseréjéhez vezet. A lánccsal kopását a lánccsal nyúlásával szokták jellemezni %-os értékben. Valójában a lánccsal nem nyúlik meg, csupán a hossza változik azáltal, hogy minden második lánccsalzemosztás, nem feltétlenül egyenletes mértékben, de megnő. A kopás ugyanis a belső tag hüvelye és a külső tag csapja között alakul ki, míg az osztás a belső és a külső tagok hüvelyei, ill. csapjai között változatlan. A lánccsal kopás következtében a csapok keresztmetszete addig csökken, amíg a változó terhelés hatására (fesz-laza lánccsal) fáradt törést nem szenved. A tapasztalatok szerint amíg a lánccsalnyúlás mértéke nem éri el az 1,5%-ot, nem kell a lánccsalcsapok fáradt törésével számolni. Általános esetben a megengedett lánccsalnyúlás 3% lehet, amennyiben a lánccsalszakadás következménye csupán egy egyszerű üzemihiba.



3.4 ábra: Poligon hatás a fogszám függvényében

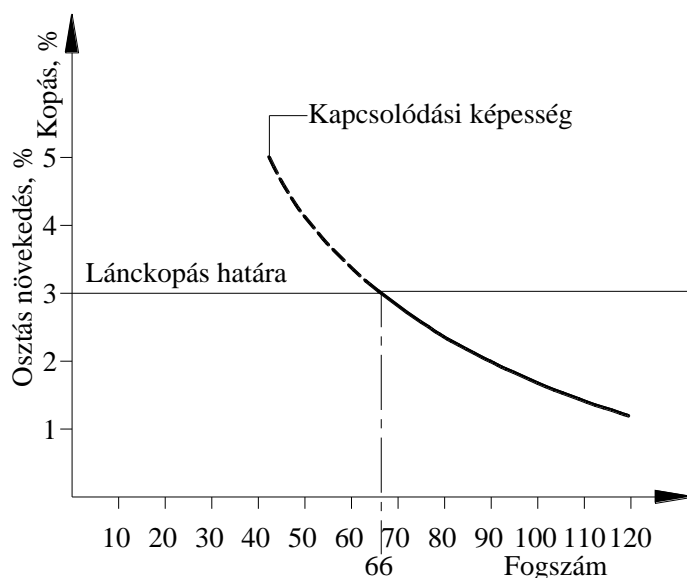
Forrás: [6]

A 3.4 ábra a kisebbik lánccsalkerék fogszámának hatását mutatja a poligonhatásra, melynek következménye a változó lánccsalsebesség. Ennek dinamikus hatásainak elkerülése érdekében a lánccsalkerék fogszámát a következőképpen választjuk:

9 -10 fog: kerülni kell. Mechanizmusok mozgatására alkalmas, ahol nem követelmény az egyenletes járás. A lánccsalsebesség kisebb, mint 1 m/s.



- 11-12 fog: maximum 2m/s lánc sebességre. Kis terhelésre és ott alkalmazzuk, ahol nem követelmény az egyenletes járás.
- 13-14 fog: maximum 3m/s lánc sebességre, feltéve hogy a lánc terhelése alacsony és ahol nem követelmény az egyenletes járás.
- 15-17 fog: maximum 6m/s láncsebességre, feltéve hogy nem követelmény az egyenletes járás.
- 18-21 fog: maximum 10m/s láncsebességre, megfelelő nyugodt működést biztosít.
- 22-25 fog: maximum 15m/s láncsebességre, kielégítő nyugodt működést biztosít.
- 26-40 fog: 30 m/s láncsebességig. Nagy terhelésű, nagy sebességű hajtó lánckeréknek alkalmas fogszám. A poligonhatás elhanyagolható. A legszigorúbb vibráció és zajmentes feltételeknek is megfelel.
- 45-120 fog: a legalkalmasabb fogszám a hajtott lánckerekek esetén. A legszigorúbb vibráció és zajmentes feltételeknek is megfelel. Azonban a fogak csökkent kapcsolódási képessége miatt a megengedhető kopásból adódó lánccnyúlás is csökken, néhány példa erre:
- | | |
|---------|------|
| Z = 70 | 2,8% |
| Z = 80 | 2,3% |
| Z = 90 | 2,0% |
| Z = 100 | 1,7% |
| Z = 120 | 1,2% |
- 125-200 fog: kerülni kell. Jelentősen nem javítanak a működési viszonyokon a 45-120 fogszámhoz képest, viszont a megengedhető kopásból adódó lánccnyúlás jelentősen lecsökken (lásd 3.5 ábra).



3.5 ábra: A lánckerék kapcsolódási képessége a fogszám függvényében

Forrás: [7]

A lánchajtás tervezése is a névleges teljesítményből indul ki, melyből az átviendő teljesítményt egy k_{ii} üzemtényező felvételével számíthatjuk, ami alapja a lánccsúszás meghatározásának. Ebben a fejezet részben a Fenner Roller Chain Technical manual jelölésrendszerét alkalmazzuk, ugyanis a tervezés ezen fázisában ezt alkalmazhatjuk.



$$P_B = YP \quad (3.10)$$

ahol: P [kW] névleges teljesítmény
 P_B [kW] tervezési (maximális) teljesítmény
 Y üzemtényező

A Y üzemtényező értéke különböző hajtó és hajtott gép esetén (ezt az üzemtényezőt alkalmazzuk a terhelési modell felépítéséhez is) hasonlóképpen alakul, mint ahogy azt a szíjhajtásánál ismertettük, feltéve, hogy betartottuk a lánckerekek fogszámára vonatkozó ajánlásokat [8].

3.3.5. Fogaskerékajtásból származó terhelések

Fogaskerékajtással teljesítményt viszünk át egyik tengelyről a másikra. Az adott fordulatszámra átvitt csavaró nyomatékot a fogprofilok érintkezési pontjában ébredő fogerő tangenciális (kerületi) irányú komponense biztosítja. Valójában a fogerőt a szükséges kerületi erőből számítjuk ki a fog geometriai méreteinek ismeretében, amit az átvitt csavaró nyomatékból határozhatunk meg.

A fogaskerékajtásnak megfelelően a fogerő az érintkezési pontban felbontható tangenciális (ebből számítottuk ki a fogerőt), radiális és axiális irányú komponensekre. Megjegyezzük, hogy axiális erő nem ébred az egyenes fogazatú hengeres fogaskerékajtásnál, míg a ferdefogazatúnál ébred. A radiális irányú komponens hatásvonala átmegy a fogaskerék forgástengelyén, így ez a komponens már alkalmas a tengely igénybevételeinek számítására. A tangenciális irányú erőkomponenst betolhatjuk önmagával párhuzamosan a tengelyvonalba az általa kifejtett csavaró nyomaték figyelembevételével. Az axiális irányú erőkomponens, mely a tengely axiális irányú terhelését eredményezi és a csapágyazás támasztja meg, egy koncentrált hajlító nyomaték felvételével tolható be a tengelyvonalba, melynek értéke $M_{hj} = F_{ax} r$, ahol r a fogerő támadáspontjának távolsága a tengelyvonalától.

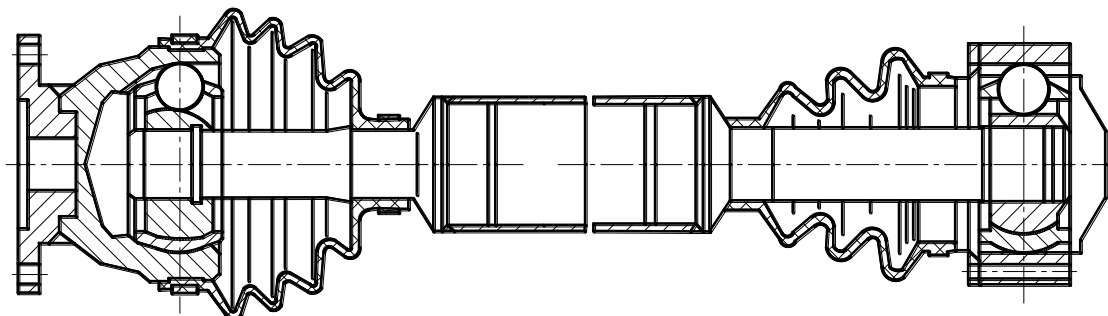
A tengelymetszéspontba betolt erőkomponensek és koncentrált nyomaték ezt követően felbontható olyan $x-z$, $y-z$ irányú komponensekre, melyben a támasztóerőket számítjuk.

3.3.6. Szögkiegyenlítő tengelykapcsolók

A szögkiegyenlítő tengelykapcsolókat üzemjellemzőik szerint is csoportosíthatjuk. Ebből a szempontból három csoportba sorolhatóak: nem homokinetikus, kvázi homokinetikus és homokinetikus [9]. Mi a nem homokinetikus csoporttal fogunk részletesen foglalkozni, és ezen belül is a kardáncsuklóval, ill. a kardánhajtással. A másik két csoportra csak egy-egy példával utalunk.

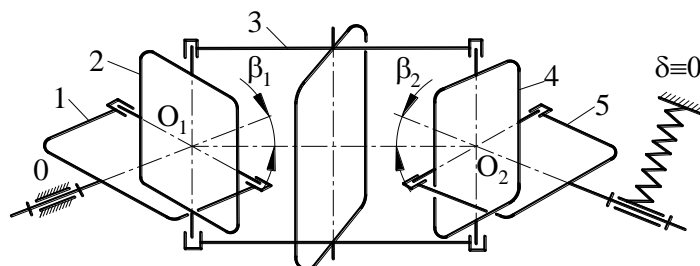
A homokinetikus csuklóstengely leghétköznapibb példája a 3.6 ábrán szemléltetett, Zappa csukló alapján kifejlesztett golyós csukló, mely mára már egyeduralmúvá vált a független futómű felfüggesztésű járművek féltengely csuklójaként. A homokinetikus működés azt jelenti, hogy a csuklóval összekötött két tengely szögsebessége mindig azonos, függetlenül a tengelyek által bezárt szögtől. Ez azáltal valósul meg, hogy a kosárszerkezetben helyet foglaló 6 golyó mindig egy síkban, a külső harang és a belső agy szögfelező síkjába áll be, melyet a golyópályák geometriája biztosít. Mivel nincs szögsebesség ingadozás a hajtó és a hajtott tengelyek között, működés közben nem lép fel járulékos terhelés. A gépkocsi

féltengely belső része, amely a differenciálműhöz csatlakozik, többféle kialakítású lehet. Általában szintén egy 6 golyós homokinetikus csuklót alkalmaznak, melynek az axiális kiegyenlítést is lehetővé kell tennie, ezért a golyópályák csavarvonal szerűen kialakítottak. Kisebb teljesítményű gépkocsikban a féltengely benyúlik a differenciálműbe, és vagy egy dipode vagy egy tripode csuklón keresztül kapcsolódik. Ez a két csukló azonban már nem homokinetikus, ezért nem alkalmazzák magasabb teljesítmény kategóriákban.

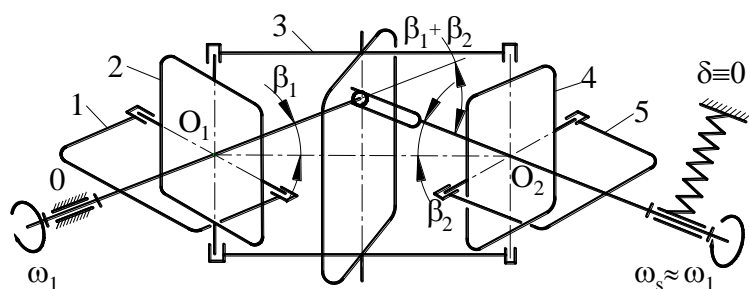


3.6 ábra: Féltengely homokinetikus golyócsuklókkal
Forrás: [10]

A kvázi homokinetikus csuklóstengelyekre a dupla kardáncsuklót tartalmazó csuklót mutatjuk be a 3.8 ábrán, melyet a kétütemű Wartburg és a Barkas gépkocsikban, valamint traktorok féltengely csuklójaként alkalmaztak. Jellemzője, hogy csak két szöghelyzetben homokinetikus, amikor a szögkitérés 0° , és még egy szöghelyzetben, mely a gépkocsi egyenes menetében átlagos terhelés mellett kialakuló szöghelyzetnek felel meg. Működésének alapja, hogy két kardáncsukló képes egymás működési hibáit kiegyenlíteni, ha a megfelelő feltételek mellett működtetjük. Ezt a feltételt a dupla kardáncsuklós csukló a központosító gömb segítségével két szöghelyzetben biztosítja. Kis fordulatszámú mezőgazdasági gépek traktorról történő áthajtásához két központosító gömböt és egy központosító tárcsát alkalmaznak, mely már homokinetikus működésű, de csak alacsony fordulatszámon használható az excentricitással működő kiegyenlítő tárcsán fellépő centrifugális erő miatt (lásd 3.9 ábra).

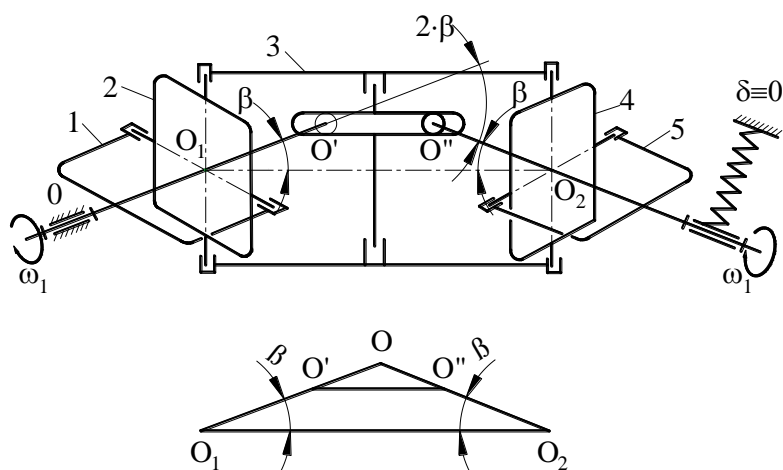


3.7 ábra: Dupla kardáncsukló központosítás nélkül
Forrás: [9]



3.8 ábra: Dupla kardáncsukló központosító gömbbel

Forrás: [9]



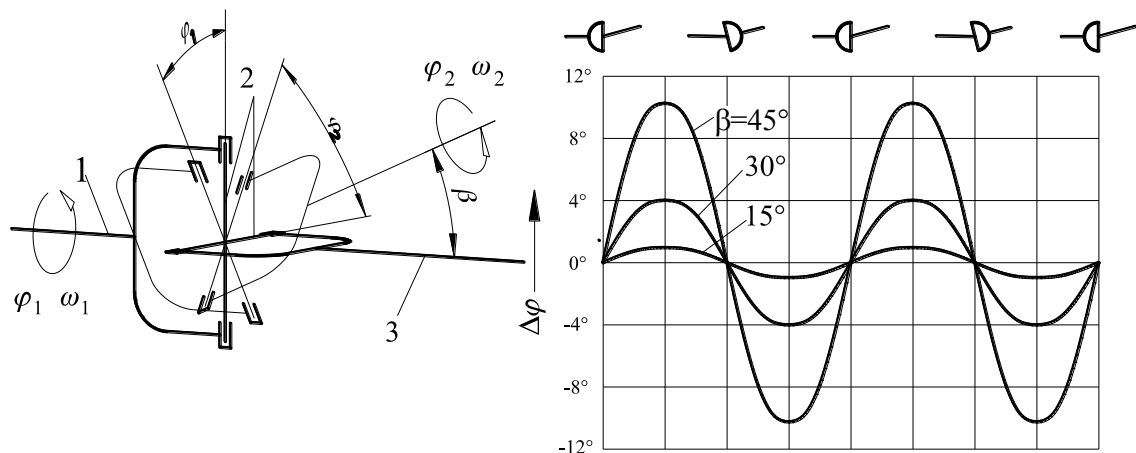
3.9 ábra: Dupla kardáncsukló központosító tárcsával

Forrás: [9]

A kardáncsuklók, annak ellenére, hogy a hajtást szögsebesség ingadozással viszik át, széles körben alkalmazzák teljesítmény átvitelre. Ennek oka, hogy megfelelő feltételek biztosításával a két csukló kiegyenlíti egymás szögsebesség ingadozását, így a hajtó és a hajtott tengelyek szögsebessége azonos lesz. Alkalmazására egy hétköznapi példa az orrmotoros, hátsókerék hajtású gépkocsik, teherautók kardánhajtása, amely síkbeli elrendezésű és két csuklót tartalmaz (Z elrendezés, lásd később). Látni fogjuk, hogy bár a megvalósított hajtás egyenletes, jelentős járulékos terhelések ébrednek a tengely szögelfordulása függvényében, mely rezgést, vibrációt okoz, és mint gerjesztő hatást figyelembe kell venni a dinamikai számításoknál.

3.3.6.1. Kardáncsuklók, kardánhajtások működési jellemzői

A kardáncsuklókkal tehát megvalósítható szögsebesség ingadozásmentes hajtás megfelelő hajtáselrendezési feltételek biztosítása esetén.



3.10 ábra: A kardáncsukló működési jellemzője: szögelfordulás különbség

A továbbiakban a tetszőleges csuklószámmal megvalósítható homokinetikus térbeli kardánhajtás összeállításának feltételeit elemezzük és az ébredő járulékos terheléseket határozzuk meg. A 3.10 ábra a kardáncsuklóval összekötött két tengely szögelfordulás különbségét szemlélteti a tengelyszög függvényében.

A kardáncsuklót tartalmazó hajtás elemzéséhez, majd a dinamikai modellezéséhez ismerni kell az általa hajtott tengely szögsebesség, ill. szöggyorsulás függvényét. A számítások egyszerűsítése érdekében feltételezzük, hogy a behajtó csukló hajtó tengelye állandó szögsebességgel forog: $\omega_{11} = \text{áll}$.

(a jelölés első indexe a csukló számát, míg a második indexe a csuklón belüli villa számát jelenti)

A kardáncsuklóval összekötött hajtó és hajtott tengely szögelfordulása között az összefüggés a következő:

$$\operatorname{tg} \varphi_{11} = \frac{1}{\cos \beta_1} \operatorname{tg} \varphi_{12} \quad (3.11)$$

$$\varphi_{12} = \operatorname{arctg} \left(\frac{1}{\cos \beta_1} \operatorname{tg} \varphi_{11} \right), \text{ ahol: } \beta_1 \text{ a tengelyek által bezárt szög}$$

$$\varphi_{12} = \operatorname{arctg} (\lambda_1 \operatorname{tg} \varphi_{11}), \text{ ahol } \lambda_1 = \frac{1}{\cos \beta_1} \quad (3.12)$$

A szögelfordulások különbsége [10]:

$$\psi = \varphi_{12} - \varphi_{11} = (\lambda_1 \operatorname{tg} \varphi_{11}) - \varphi_{11} = \Psi(\varphi_{11}; \lambda_1) \quad (3.13)$$

A ψ függvény Fourier-sorba fejtésével, és σ_1 bevezetésével a következő egyenletet kapjuk:

$$\psi = \varphi_{12} - \varphi_{11} = \sigma_1 \sin 2\varphi_{11} + \frac{1}{2} \sigma_1^2 \sin 4\varphi_{11} + \frac{1}{3} \sigma_1^3 \sin 6\varphi_{11} + \dots + \frac{1}{n} \sigma_1^n \sin 2n\varphi_{11} \quad (3.14)$$

$$\text{ahol: } \sigma_1 = \frac{\lambda_1 - 1}{\lambda_1 + 1}$$



Ha a ψ -t a sorbafejtés első tagjával vesszük figyelembe, akkor a hiba 0,1 % -nál kisebb lesz:

$$\Psi = \varphi_{12} - \varphi_{11} \cong \sigma_1 \sin 2\varphi_{11} \quad (3.15)$$

$$\text{ahol } \sigma_1 = \frac{\beta_1^2}{4}$$

Az említett közelítések $\beta = 30^\circ$ -os szögkitérésig kellő pontosságot adnak. A hajtott tengely szögsebessége és szöggyorsulása ezek után deriválással meghatározható. Ha feltételezzük, hogy $\omega_{11} = \text{áll}$, a hajtott tengely mozgásjellemzői:

$$\varphi_{12} = \sigma_1 \sin 2\varphi_{11} + \varphi_{11} \quad (3.16)$$

$$\omega_{(t)} = \omega_{11}(1 + 2\sigma_1 \cos 2\varphi_{11}) \quad (3.17)$$

$$\varepsilon_{(t)} = -4\sigma_1 \omega_{11}^2 \sin 2\varphi_{11} \quad (3.18)$$

3.3.6.2. Homokinetikus kardánhajtás kialakítása

Mint már említettük, a gépjárműveknél alkalmazott Z elrendezésű két kardáncsuklós síkbeli hajtás egy speciális megoldás két, egymással párhuzamos, de változó tengelytávolságú tengelyek közötti teljesítmény átvitelre. Gyakran előforduló feladat, hogy két rögzített helyzetű tengely között kell teljesítményt tört vonalban átvinni (pl. mezőgazdasági betakarító gépek), ahol a hajtás már térbeli elrendezésű. A térbeli, általános feladatok megoldásához szükséges a homokinetikus hajtás feltételeinek általános megfogalmazása, melyből a kétcsuklós síkbeli eset is levezethető.

A feltételek megfogalmazásához a következő fogalmakat definiáljuk [11]:

A csukló alapsíkja: a csukló által összekötött két tengely által alkotott sík szögkitérés esetén.

A hajtás alaphelyzete: a hajtásláncnak azon elfordulási helyzete, amikor a hajtáslánc első csuklója az alapsíkjában fekszik.

ψ_{i+1} az i-edik csukló fázisszöge, az i-edik csukló 1-es villája, és az i-edik csukló alapsíkja által bezárt szög, ha az első csukló 1-es villája az alapsíkjában fekszik (értelmezés szerint ez a sorba kapcsolt kardántengelyek alaphelyzete).

φ_{i+1} az i-edik csukló szöghelyzete, az i-edik csukló 1-es villája, és az i-edik csukló alapsíkja által bezárt szög a hajtáslánc egy tetszőleges elfordulási helyzetében.

Hajtáselrendezési esetek:

a. Egy kardáncsuklós hajtás

$$\varphi_{12} = \arctg \left(\frac{1}{\cos \beta_1} \operatorname{tg} \varphi_{11} \right) = \arctg [\lambda_1 \operatorname{tg} \varphi_{11}], \text{ ahol } \lambda_1 = \frac{1}{\cos \beta_1} \quad (3.19)$$

A fenti egyenletből látható, hogy $\varphi_{12} = \varphi_{11}$ feltétel csak $\beta_1 = 0^\circ$ szögkitérés nélküli esetben teljesül, tehát egy kardáncsuklóval nem lehet homokinetikus hajtást megvalósítani.

- b. Több kardáncsuklós hajtás, valamennyi csukló fázisszöge 0°

$$\psi_{i+1} = 0, \quad i = 1 \dots n$$

$$\varphi_{n2} = \arctg[\lambda \operatorname{tg} \varphi_{11}], \quad \text{ahol: } \lambda = \frac{1}{\cos \beta_1} \frac{1}{\cos \beta_2} \dots \frac{1}{\cos \beta_n} \quad (3.20)$$

A λ összefüggésből látható, hogy a hajtás csak abban az esetben lehet szögsebesség ingadozás mentes ($\lambda = 1$), ha $\beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_n = 0^\circ$.

Megállapítható, hogy azonos fázisszögű csuklókkal nem lehet homokinetikus hajtást megvalósítani.

- c. Több kardáncsuklós hajtás, valamennyi kardáncsukló fázisszöge 0° vagy 90°

$$\psi_{i1} = 0^\circ, \quad \text{vagy } 90^\circ$$

$$\varphi_{n2} = \arctg[\lambda' \operatorname{tg} \varphi_{11}], \quad \text{ahol } \lambda' = (\cos \beta_1)^{-1} (\cos \beta_2)^{\pm 1} \dots (\cos \beta_n)^{\pm 1} \quad (3.21)$$

A fenti összefüggésből látható, hogy ha legalább egy csukló fázisszöge különbözik a többitől, akkor létezik megfelelő szögkitéréssel szerelt hajtáselrendezés, mely esetén $\lambda' = 1$ feltétel teljesül, így homokinetikus hajtás megvalósítható.

- d. Több kardáncsuklós hajtás, legalább egy kardáncsukló fázisszöge nem 0° vagy 90°
A $\lambda' = 1$ feltétel nem teljesül, így homokinetikus hajtás nem valósítható meg.

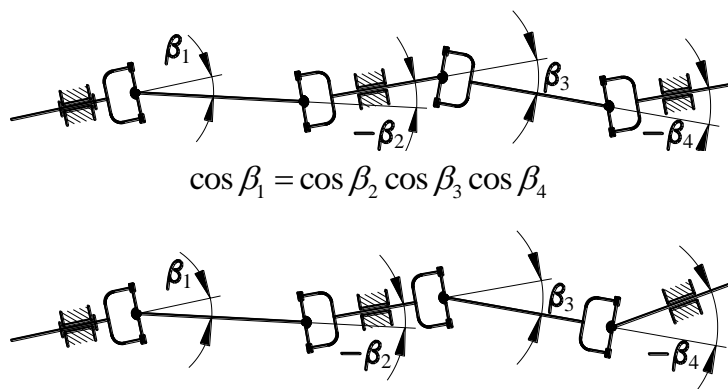
A homokinetikus hajtás feltétele tehát a következő:

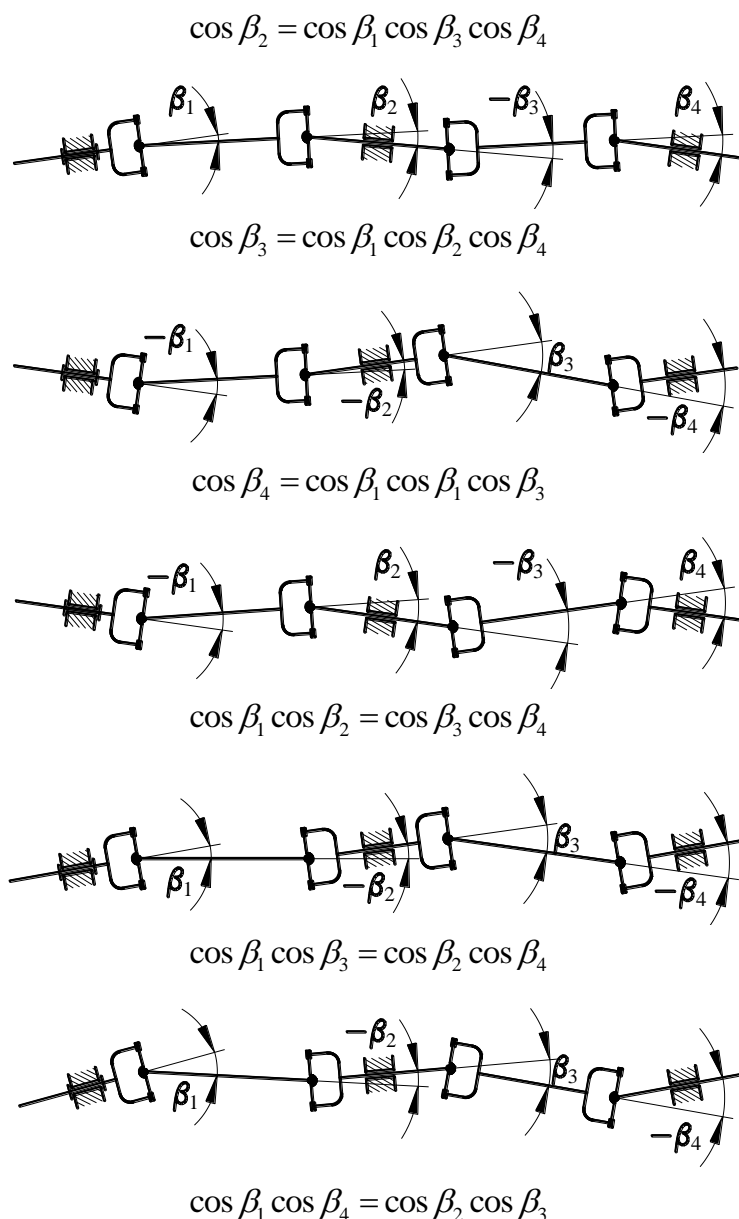
- a csuklók fázisszöge csak 0° vagy 90° lehet, de legalább egynek különböznie kell a többitől
- a csuklók szögkitérését (β_i) úgy kell megválasztani, hogy $\lambda' = 1$ legyen

Az n számú csuklót tartalmazó hajtás esetén összesen: $2^{n-1} - 1$ számú hajtásvariációt lehet összeállítani, függetlenül attól, hogy a tengelyek egy síkban fekszenek, vagy általános térbeli elrendezésűek.

A 3.11 ábra egy 4 csuklós, egy síkban fekvő hajtás összes variációját szemlélteti.

A hajtásvariációk száma: $2^{4-1} - 1 = 7$. A β_i szögek előjelét az β_1 -hez viszonyítva határozzuk meg.



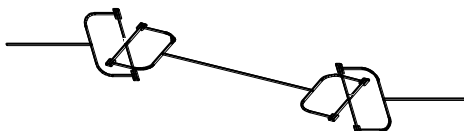


3.11 ábra: A négycsuklós homokinetikus hajtáselrendezések
 Forrás: [11]

Ezek után elemezzük a két kardáncsuklós síkbeli hajtást Z és W elrendezésben.

Az összeállítható variációk száma: $2^{n-1} - 1 = 2^{2-1} - 1 = 1$, tehát csak egyféleképpen lehet összeszerelni. Általános megfogalmazásban ez azt jelenti, hogy ha az 1-es csukló hajtó villája (1-es villa) az 1-es csukló által alkotott síkban fekszik, akkor a 2-es csukló 1-es villájának merőlegesen kell állnia a 2-es csukló által alkotott síkra. Síkbeli esetre alkalmazva ez azt jelenti, hogy a középső kardántengelyen lévő villák azonos szöghelyzetben állnak. Ezt a tengelyt gyakran készítik teleszkópos kivitelben bordás tengelykötéssel az axiális irányú elmozdulások biztosítása érdekében. Szabványos bordáskötés alkalmazása esetén a kardántengely a bordaszámtól függően több pozícióban is összeszerelhető (VAZ-2101 típusú személygépkocsi kardántengelye), ezért összeszerelésnél ügyelni kell a villák azonos

helyzetére (lásd 3.12 ábra). A $\lambda' = \frac{1}{\cos \beta_1} \cos \beta_2 = 1$ feltétel csak akkor teljesül, ha $\beta_1 = \beta_2$ vagy $\beta_1 = -\beta_2$, mely feltételeket a Z, vagy a W elrendezéssel biztosíthatjuk (lásd 3.13 ábra).



3.12 ábra: Z elrendezésű kardánhajtás

3.3.6.3. Kardáncsuklók járulékos terhelése

Mivel a kardáncsukló csak átvinni tud teljesítményt, módosítani nem, ezért ha a kardáncsukló mechanikai veszteségétől eltekintünk (súrlódás a kardánkereszt és a villák között a tűgörgős csapágyakban) a következő egyensúlyi egyenlet írható fel:

$$M_{11}\omega_{11} = M_{12}\omega_{12} \quad (3.22)$$

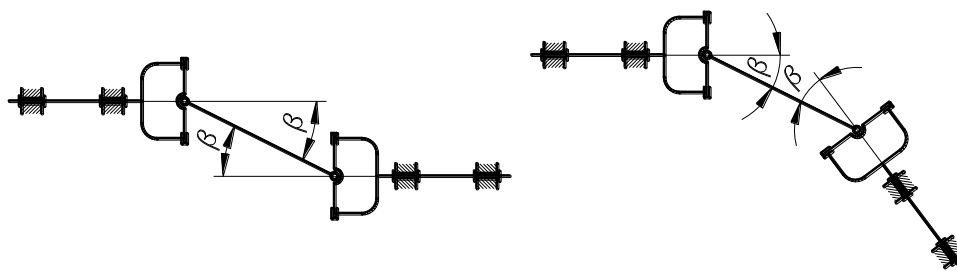
$$M_{12} = M_{11} \frac{\omega_{11}}{\omega_{12}} \quad (3.23)$$

Látható, hogy M_{11} =konstans hajtónyomatékhöz a változó ω_{12} érték miatt a szögsebesség ingadozás függvényében változó M_{12} nyomaték tartozik. Jelentősebb problémát okozhat a változó szögsebességű forgómozgás, mely a tehetetlen forgó tömegek miatt járulékos terhelést eredményez:

$M_d = J\varepsilon$, ahol J a változó szögsebességgel forgó hajtásrész tehetetlenségi nyomatéka.

Amennyiben kétcsuklós síkbeli hajtást valósítunk meg Z vagy W elrendezésben, a helyzet kedvezőbb, mert bár most is fellép a járulékos nyomaték: $M_d = J_{\text{kard.tengely}}\varepsilon$, itt a $J_{\text{kard.tengely}}$ a két csukló közötti tengely tehetetlenségi nyomatéka.

Ennek a tehetetlenségi nyomatéknak a nagysága befolyásolja azt, hogy egy helyesen összeépített kétcsuklós hajtás szögkitérés mellett mennyire jár egyenetlenül üzem közben (szögkitérés mentes esetben nincs szögsebesség ingadozás egy csukló esetén sem). Az üzem közben fellépő rezgések, vibrációk oka, a fellépő járulékos erők a csuklók villáin.



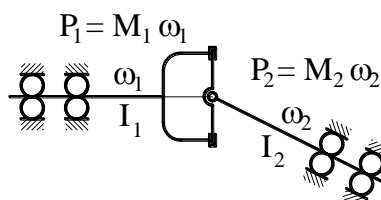
3.13 ábra: Z és W elrendezésű kardánhajtás

A kardáncsukló hatásfokát legpontosabban méréssel lehet meghatározni. Laboratóriumi körülmények között a tűgörgős csapágy súrlódásából adódó hőáramot mérik, melyet az átvitt teljesítményhez viszonyítanak. A következő tapasztalati összefüggés $\beta = 15^\circ$ szögkitérésig ad jó közelítést a kardáncsukló hatásfokára [12]:

$$\eta = 100(1 - 0,003\beta) [\%] \quad (3.24)$$

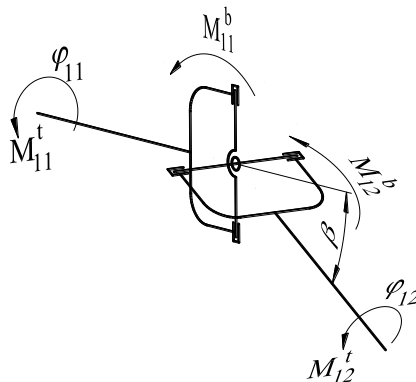
ahol: β [rad]

Vizsgáljuk meg a 3.14 ábrán látható hajtást, melyet a motor, ill. a gép oldalról csak csavaró nyomaték terhel. Szögkitérés mentes esetben nem ébred támasztóerő a tengely csapágyazásokon, mert ebben az esetben ez egy radiálisan tehermentesített hajtás.



3.14 ábra: Kardáncsuklós tengelyhajtás

Szögkitéréses esetben a villákon járulékos erők ébrednek [13], melyek a szögelfordulás függvényében változó járulékos nyomatékot eredményeznek (lásd 3.15 ábra).



3.15. ábra: A kardáncsukló erőhatásai

$$\frac{M_{11}^h}{M_{11}^t} = \operatorname{tg} \beta \sin \varphi_{11} \quad (3.25)$$

$$\frac{M_{12}^h}{M_{11}^t} = \operatorname{tg} \beta \cos \varphi_{11} \sqrt{1 - \sin^2 \beta \cos^2 \varphi_{11}} \quad (3.26)$$

$$\frac{M_{12}^t}{M_{11}^t} = \frac{1 - \sin^2 \beta \cos^2 \varphi_{11}}{\cos \beta} \quad (3.27)$$

ahol: M_{11}^t : a csukló hajtó csavaró nyomatéka (a „t” felső index-el jelölve)

M_{12}^t : a csuklóval hajtott tengely csavaró nyomatéka

M_{11}^h : a hajtó villát terhelő járulékos hajlító nyomaték (a „h” felső index-el jelölve)

M_{12}^h : a hajtott villát terhelő járulékos hajlító nyomaték

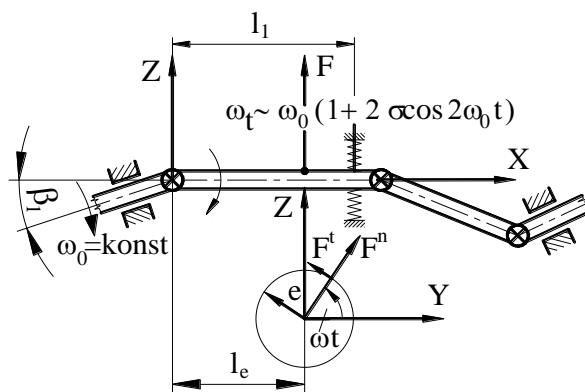
A fenti összefüggésekből látható, hogy szögkitérés mentes esetben ($\beta = 0^\circ$) a villákon nem ébred járulékos hajlító nyomaték és a csuklóval összekötött két tengely csavarónyomatéka egyenlő.

Általános esetben a járulékos terhelések ismeretében a támasztóerők számíthatóak és a tengelyméretezés elvégezhető. Fontos megjegyezni, hogy az igénybevétel tiszta lengő, és a tengelyt kifáradásra kell ellenőrizni. Katalógusból kiválasztott kardáncsuklókat természetesen a fent leírt igénybevételekre méretezték. Gyakran előfordul, hogy egy jól megtervezett és jól működő kardánhajtás csuklószögeit módosítják, átszerelik, melynek elemei a megnövekedett igénybevétel hatására eltörnek (amennyiben a csuklószögek növekednek). Éppen ezért gondos ellenőrző számítások nélkül csuklószög növeléssel járó kardánhajtás átszerelést nem szabad végezni.

3.3.6.4. Kardántengely kiegyensúlyozatlanságából adódó gerjesztő hatások

A tengelyek és egyéb szerkezeti elemek csak a mechanikai modell szerint merev testek. Valójában rugalmasak, terhelés hatására rugalmas deformációt szenvednek. A dinamikai vizsgálatoknál a rugalmas deformáció, a gyártási pontatlanságok és az üzemi játékok hatását is figyelembe kell venni [10].

Elemezzük egy általános kardántengely hajtáslánc egyik közbenső tengelyének, mint egy kiegyensúlyozatlan tengelynek a dinamikai hatásait, mely $\omega(t)$ periodikusan változó szögsebességgel forog (lásd 3.16 ábra).



3.16. ábra: A kardántengely kiegyensúlyozatlanságából adódó gerjesztő hatások

A fellépő gerjesztő erő:

$$F = F_c + F_t$$

ahol: F_c - centrifugális erő

F_t - tömegtehetetlenségből adódó erő

Forgó elemek kiegyensúlyozatlanságából adódó centrifugális és tömegerő radiális irányú, mely a forgás miatt folyamatosan változik. Hatása részben az abszolút értékétől függ,



részben a forgás frekvenciájától. A vizsgálatokat függőleges irányban végezzük el, mert a hajtáselemek súlyerői is ebbe az irányba hatnak.

$$F_z = F_c \sin \omega_{(t)} t + F_t \cos \omega_{(t)} t \quad (3.28)$$

$$\text{ahol: } F_c = \Delta m (e + y) \omega_{(t)}^2 \quad (3.29)$$

$$F_t = \Delta m (e + y) \varepsilon_{(t)}$$

ahol Δm : a kiegyensúlyozatlan tömeg,

$$F_z = \Delta m (e + y) \omega_{(t)}^2 \sin \omega_{(t)} t + \Delta m (e + y) \varepsilon_{(t)} \cos \omega_{(t)} t \quad (3.30)$$

behelyettesítve az:

$$\omega_{(t)} = \omega_0 (1 + 2\sigma_1 \cos 2(\omega_0 t)) \quad (3.31)$$

$$\varepsilon_{(t)} = -4\sigma_1 \omega_0^2 \sin 2(\omega_0 t) \quad (3.32)$$

$$F_z = A \cos(\omega_0 t) + B \cos 2(\omega_0 t) + C \cos 3(\omega_0 t) \quad (3.33)$$

ahol A, B, C konstansok

A fenti egyenletből látható, hogy a hajtásláncot gerjesztő frekvenciák: $\omega_0, 2\omega_0, 3\omega_0$.

Megjegyezzük, hogy hosszú, saját súlyuknál fogva behajló forgó tengelyek úgy viselkednek, mint a kiegyensúlyozatlan tengelyek, ezért úgy kell a tengelyprofil, ill. méreteit megválasztani, hogy a behajlás határértéken belül legyen.

3.4. Tengelyméretezés

A következőkben a tengelyméretezés lépéseit foglaljuk össze címszavakban.

Előméretezés:

1. Terhelési modell felépítése az üzemtényező felvétel a névleges teljesítményből.
2. A tengely feladatától függően a tengelyterhelések tisztázása (szíjhajtás, lánchajtás, fogaskerék-hajtás, járulékos terhelések, stb.)
3. A tengely feladatától függően a tengelyszakaszok hosszirányú méreteinek felvétele.
4. Igénybevételi ábrák rajzolása, csapágyazások támasztóerőinek számítása.
5. Veszélyes keresztmetszetek meghatározása és a keresztmetszetet terhelő hajlító nyomaték eredő értékének kiszámítása (a csavaró nyomaték értéke ismert, ugyanis ebből származtatjuk a tengelyterheléseket).
6. Anyagválasztás, melynek anyagjellemzőiből és megengedett feszültségéből a tengely keresztmetszeti méretei meghatározhatóak.
7. A tengely szerkesztése, nyomatékkötések, szabad és támasztó tengelyvállak, csapágyazások, stb. tervezése, kidolgozása.
8. A tengely rögzített méreteivel a számítások ellenőrzése, ha szükséges, a méretek módosítása, majd újraszerkesztés. Az ellenőrzési folyamatot addig végezzük, amíg a tengely méreteit véglegesíteni nem tudjuk.

Tengely ellenőrzése:

1. Kifáradásra
2. Maradó deformációra



3. Megengedett rugalmas deformációra
4. Kritikus fordulatszámra

Levezetés nélkül néhány, nagyon gyakran alkalmazott összefüggést közlünk a tengelyátmérő meghatározására statikus (előméretezés) és időben változó (kifáradásra történő ellenőrzés) esetre.

Statikus eset, összetett igénybevételre:

$$d_{\min} = \sqrt[3]{\frac{\sqrt{M_h^2 + \frac{3}{4} M_{cs}^2}}{0,1\sigma_{\text{meg}}}} \quad (3.34)$$

ahol: $\sigma_{\text{meg}} = \frac{R_{eH}}{n}$, $n = 2,5 - 3$

Időben változó eset:

Alkalmazva a módosított Goodman modellt a maximális torzulási energia elmélettel [14]:

$$\frac{R_{eH}}{n} = \frac{32}{\pi d^3} \left[K_{sb} \left(M_{h_m} + \frac{R_{eH}}{R'_{Dv}} M_{h_a} \right)^2 + \frac{3}{4} K_{st} \left(M_{cs_m} + \frac{R_{eH}}{R'_{Dv}} M_{cs_a} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (3.35)$$

ahol: K_{sb} és K_{st} hajlító, ill. torziós dinamikus tényező

K_{sb} és K_{st} értéke nyugodt üzemre: 1
kis dinamikus terhelésre: 1,5
nagy dinamikus terhelésre: 2,0

A K_{sb} és K_{st} tényezőkkel a terhelési modell k_{ii} üzemtényezőjével kifejezett üzemviszonyon túli dinamikus hatásokat vesszük figyelembe.

Forgó tengely esetén ($M_{h_m} = 0$) a szükséges tengelyátmérő:

$$d^3 = \frac{32n}{\pi R_{eH}} \left[K_{sb} \left(\frac{R_{eH}}{R'_{Dv}} M_{h_a} \right)^2 + \frac{3}{4} K_{st} \left(M_{cs_m} + \frac{R_{eH}}{R'_{Dv}} M_{cs_a} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (3.36)$$



4. Gördülőcsapágyak merevségének meghatározása

A csapágyazási hely kialakítására több konstrukciós megoldást alkalmazhatunk a tengely feladata és szerkezeti kialakításától függően. Ha több, egymáshoz képest előírt tengelytávú tengely csapágyazását kell megoldani (fogaskerék-hajtás), akkor közös csapágyházat kell tervezni, mely ez esetben egy hajtóműház.

További lehetőségek a csapágyház kialakításánál a speciális követelményeknek megfelelően:

- közös csapágyház tervezése, mellyel biztosított a csapágyfészkek egytengelyűsége, így csapágytípus választáskor az egytengelyűségi feltétel teljesül,
- különálló csapágyházak tervezése, vagy kiválasztása csapágygyárak termékkatalógusából. Mivel a csapágyházak kívánt pontosságú egytengelyűsége szereléssel nem biztosítható, csak beálló csapágyakat alkalmazhatunk,
- különálló, gumiágyban felfüggesztett csapágyház tervezése, alkalmazása (kardántengelyek felfüggesztése az alváz vagy padlólemezeiről).

A csapágyazási hely radiális (és szög) merevsége hatással van a hajtáslánc lengési, rezgési viszonyaira, és majd látni fogjuk, a sajátfrekvenciák alakulására. Megjegyezzük, hogy gyakorlati szóhasználatban csapágy merevség alatt általában szög merevséget értünk, dinamikai számításoknál viszont a csapágy radiális merevsége a mértékadó.

A csapágyazási hely radiális irányú rugó merevsége részben a gördülőcsapágy, részben a csapágyház, ill. a felfüggesztés merevségétől függ, melyek sorbakapcsolt rugókkal modellezhetőek. Ha tehát a tengelyt egy nagy merevségű csapágyházban csapágyazzuk, akkor gördülőcsapágy merevsége, ha viszont egy nagy rugalmasságú gumiágyban, akkor a gumiágy merevsége a meghatározó.

A hajtásláncok kardántengelyeinek csapágyazása, mint ahogy általában az átmérőjükhöz képest hosszú tengelyek ágyazása beálló vagy mélyhornyú golyóscsapággal történik. Ez azzal magyarázható, hogy geometriai méretüknél fogva rugalmas tengelyek csapágyazásának biztosítani kell a tengelyek rugalmas lehajlásából adódó szögdeformációt. A továbbiakban ennek a két csapágytípusnak határozzuk meg a radiális rugó merevségét. A gördülőcsapágy merevségi - rugalmassági tulajdonságai az érintkezési alakváltozás leírására szolgáló Hertz elméleten alapuló, Sjövall nevéhez kötődő gördülőcsapágy merevségi modellből határozható meg [15]. Az érintkezési feszültségek és alakváltozások meghatározásánál a következő egyszerűsítéseket végezték:

- az érintkező testek anyaga tökéletesen rugalmas, követi a Hook törvényt,
- az érintkező testek anyaga homogén és izotrop,
- az érintkező felületek nagysága a testek méreteihez képest kicsik,
- a terhelés merőleges a geometriai felületek közös érintkező síkjára,
- a testek között súrlódás nem ébred



4.1. Terheléseloszlás és alakváltozás az egysorú gördülőcsapágyakban

A gördülőcsapágyak terhelését az egyik gördülópályáról a másikra a gördülőelemek adják át, miközben a gördülópálya - gördülőelem érintkezésénél Hertz-féle alakváltozás jön létre. A csapágy rugalmas alakváltozása a külső gyűrű - gördülőelem, valamint a belső gyűrű - gördülőelem deformációjának összegéből tevődik össze:

$$\delta = \delta_k + \delta_b \quad (4.1)$$

A terhelés és deformáció közötti összefüggés általános megfogalmazása:

$$Q = K_n \delta^n \quad \text{ahol: } n = 3/2 \text{ pontérintkezésű csapágyakra} \quad (4.2)$$

$$K_n = \left[\frac{1}{\left(\frac{1}{K_b}\right)^{\frac{1}{n}} + \left(\frac{1}{K_k}\right)^{\frac{1}{n}}} \right]^n \quad (4.3)$$

ahol: K_b és K_k a belső, ill. külsőgyűrűre vonatkoztatott érintkezési állandó, mely pontszerű érintkezés esetén a [15] jelöléseit alkalmazva:

$$K_b = 2,14 \cdot 10^4 \frac{1}{\sqrt{\sum \rho_b \delta_b^3}} \text{ daN/mm}^{1,5} \quad (4.4)$$

$$K_k = 2,14 \cdot 10^4 \frac{1}{\sqrt{\sum \rho_k \delta_b^3}} \text{ daN/mm}^{1,5} \quad (4.5)$$

ahol: $\sum \rho_b$ és $\sum \rho_k$ a főgörbületek összege a külső és belső gyűrűre

$$\sum \rho_b = \frac{1}{d_g} \left[4 + \frac{2\gamma}{1-\gamma} - \frac{1}{f_b} \right] \quad \sum \rho_k = \frac{1}{d_g} \left[4 - \frac{2\gamma}{1-\gamma} - \frac{1}{f_k} \right]$$

ahol: $\gamma = \frac{d_g \cos \alpha}{d_m}$ a csapágy középátmérő száma,

α a csapágy hatásszöge,

d_g a gördülőelem átmérője,

d_m a csapágy középátmérője

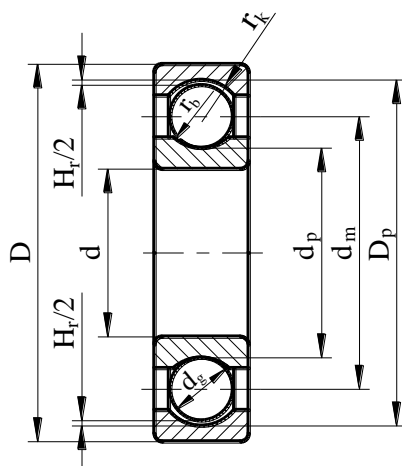
$$f_k = \frac{r_k}{d_g} \quad f_b = \frac{r_b}{d_g}$$

Az f_k és f_b a külső és belső gördülópálya, valamint a gördülőelemek között értelmezhető gördülópálya és gördülőelem simulás.

Mereven alátámasztott, radiálisan terhelt csapágy belső gyűrűjének radiális irányú elmozdulása a radiális hézag feléből és a maximális rugalmas alakváltozásból tevődik össze.

$$u = \delta_{max} + \frac{H_r}{2} \quad \text{ahol: } \delta_{max} \text{ a maximális deformáció} \quad (4.6)$$

H_r a csapágy radiális hézaga
 u radiális irányú elmozdulás



4.1 ábra: A geometriai méretek értelmezése a gördülőcsapágyakban

Egy tetszőleges ψ szög alatt elhelyezkedő gördülőelem esetén a radiális irányú rugalmas alakváltozás (4.2 ábra): $\delta_\psi = u \cos \psi - \frac{H_r}{2}$ (4.7)

Bevezetve az ε terhelés-eloszlási tényezőt:

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{H_r}{2u} \right), \text{ melyet felhasználva írható:} \quad (4.8)$$

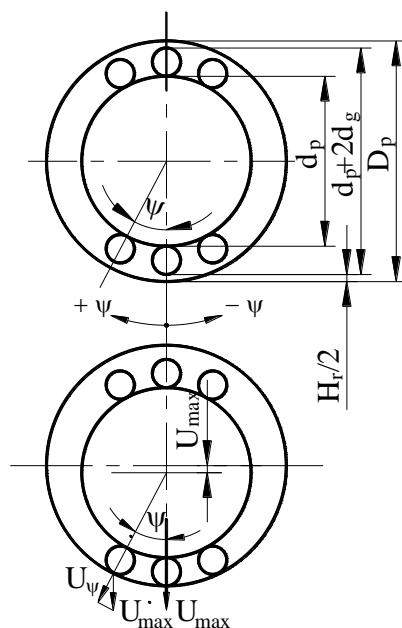
$$\delta_\psi = \delta_{max} \left[1 - \frac{1}{2\varepsilon} (1 - \cos \psi) \right] \quad (4.9)$$

Az ε terhelés-eloszlási tényező a terhelt zóna nagyságát jellemzi, nagysága függ a terhelés és a radiális hézag nagyságától. Az $\varepsilon < 1$ esetén a terhelt zóna jellemzésére a 4.3 ábrán berajzolt ψ_e fél körülfordulási szög is alkalmas. A ψ_e értéke a $\delta_\psi = 0$ feltétel alapján:

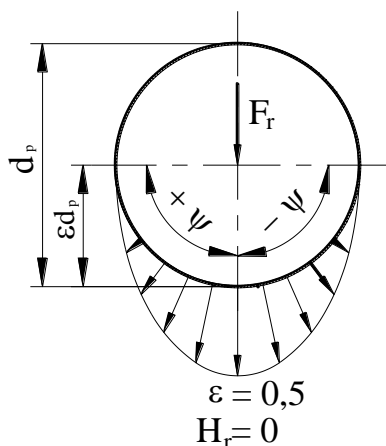
$$\psi_e = \arccos(1 - 2\varepsilon) \quad (4.10)$$

A tetszőleges szöghelyzetben lévő gördülőelem terhelése:

$$Q_\psi = Q_{max} \left[1 - \frac{1}{2\varepsilon} (1 - \cos \psi) \right]^n \quad \text{ahol: } Q_{max} \text{ a maximális gördülőelem terhelés} \quad (4.11)$$



4.2 ábra: A belső csapágygyűrű radiális irányú elmozdulásának összetevői



4.3 ábra: A csapágy terhelési zónája

A csapágy statikus egyensúlyának feltétele, hogy a gördülőelem terhelések függőleges irányú összege legyen egyenlő a külső radiális terheléssel.

$$F_r = \sum_{\psi=1}^{\psi=\pm\psi_e} Q_{\psi} \cos \psi, \text{ azaz } F_r = Q_{\max} \sum_{\psi=1}^{\psi=\pm\psi_e} \left[1 - \frac{1}{2\varepsilon} (1 - \cos \psi) \right]^n \cos \psi \quad (4.12)$$

Sjövall a gördülőelemeken fellépő koncentrált terhelések helyett a terhelt zónában folytonosan változó terhelést tételezett fel, mely alapján:

$$F_r = Z Q_{\max} J_r \quad (4.13)$$

ahol: Z az egy sorban lévő gördülőelemek száma,
 J_r radiális Sjövall integrál, melynek értéke:

$$J_r = \frac{1}{2\Pi} \int_{-\psi_e}^{+\psi_e} \left[1 - \frac{1}{2\varepsilon} (1 - \cos \psi) \right]^n \cos \psi d\psi \quad (4.14)$$

A maximális gördülőelem - terhelés az előbbiek alapján:

$$Q_{max} = K_n \left(u - \frac{H_r}{2} \right)^n \quad (4.15)$$

A radiális Sjövall integrálok értékeit az ε terhelés eloszlási tényező függvényében táblázatban adják meg, melyet a számítógépes programba is beépítettük. A radiális terhelés és a terhelés eloszlási tényező közötti összefüggést a következő egyenlet írja le:

$$F_r = ZK_n \left(H_r \frac{\varepsilon}{1-2\varepsilon} \right)^n J_r \quad (4.16)$$

A fenti egyenletet kielégítő összetartozó J_r és ε értékpárt interpolálással határozzuk meg.

J_r és ε ismeretében kiszámítható a csapágy belső gyűrűjének radiális irányú elmozdulása a csapágy geometriai tengelyétől számítva.

A számítás menete:

1. Az összetartozó $\varepsilon - J_r$ értékpár meghatározása [15]
2. A belső gyűrű radiális irányú elmozdulásának meghatározása

$$u = \frac{H_r}{2(1-2\varepsilon)} \quad \varepsilon \neq 0,5 \quad (4.17)$$

$$u = \frac{F_r}{ZK_n J_r} \quad \varepsilon = 0,5 \quad (4.18)$$

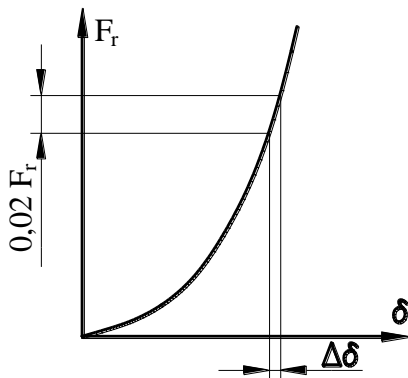
3. Az u ismeretében a csapágy rugalmas deformáció számítása

$$\delta = u - \frac{H_r}{2} \quad (4.19)$$

4. A csapágymerevség meghatározása

$$s = \frac{dF_r}{d\delta} \cong \frac{\Delta F_r}{\Delta\delta} \quad (4.20)$$

A δ számítását megismételve 2% - al növelt, ill. csökkentett terhelés mellett, meghatározzuk az adott terheléshez tartozó csapágy radiális merevségét (3.5. ábra):



4.4 ábra: A csapágy rugókarakterisztikája

A Sjövall csapágymerevségi modellel alkalmazásához mint láthattuk, ismerni kell a különböző csapágytípusok érintkezési állandóit az adott csapágyméretekre. Az ehhez



szükséges adatok, mint pl. a csapágygyűrűk geometriai kialakítása és méretei, csak a csapágygyártó cégeknek áll rendelkezésre, melyek nem publikusak.

4.2. Gyűrűscsapágyak rugalmas deformációjának közelítő számítása

A mérnöki gyakorlatban műszaki jelenségek leírására gyakran alkalmazunk olyan mérési eredményeken alapuló közelítő eljárásokat, melyek számítása vagy rendkívül bonyolult lenne (esetleg nincs is rá számítási modell), vagy olyan sok bizonytalanságot tartalmazna, mely pontossága és megbízhatósága elmaradna egy kész szerkezeten végzett mérés eredményétől.

Most a csapágy radiális irányú rugalmas deformáció meghatározására alkalmazunk közelítő számítási módszert. A csapágy rugalmas deformáció és terhelés közötti függvénykapcsolatot mérésrel határozzák meg, melyre matematikai függvényt illesztnek. Ennek bemenő adatai a csapágy fő geometriai méretei és terhelése. Ennek megfelelően ezek a képletek nem vezethetők le, ezért a benne foglalt fizikai mennyiségeket az előírt mértékegységben kell behelyettesíteni (ezeket a kreált képleteket gyakran hívják tapasztalati összefüggéseknek).

4.2.1. Az egysorú golyóscsapágy rugalmas deformációjának közelítő számítása

A csapágy rugalmas deformációja:

$$\delta = \frac{0,002}{\cos \alpha} \sqrt[3]{\frac{Q_{össz}^2}{d_g}} \quad (4.21)$$

$$Q_{össz} = Q_r + Q_{ax} \quad (4.22)$$

$$Q_r = 5 \frac{F_r}{Z \cos \alpha} \quad Q_{ax} = 5 \frac{F_{ax}}{Z \sin \alpha} \quad (4.23), (4.24)$$

ahol: F_r és F_{ax} a csapágy radiális és axiális terhelése
 α a tényleges hatásszög
 $\alpha = 0^\circ$ mélyhornyú golyóscsapágy tisztán radiális terhelés esetén
 $\alpha = 20^\circ - 25^\circ$ mélyhornyú csapágy, ha axiális terhelés is hat
 $\alpha = 40^\circ$ ferdehatásvonalú csapágy esetén
 z az egy sorban lévő gördülőelemek száma
 d_g gördülőelem átmérő

4.2.2. Kétsorú gyűrűscsapágyak rugalmas deformációjának közelítő számítása

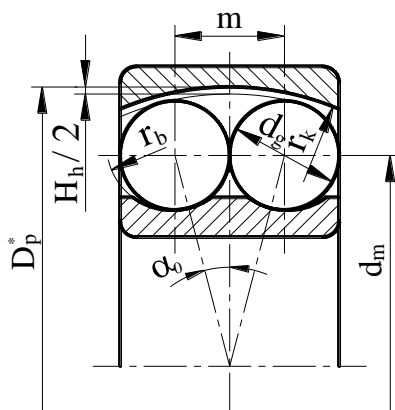
A csapágy rugalmas deformációja:

$$\delta_r = \frac{0,0032}{\cos \alpha} \sqrt[3]{\frac{Q^2}{d_g}} \quad (4.25)$$

A gördülőelem terhelése:

$$Q = \frac{5F_r}{iZ \cos \alpha} \quad (4.26)$$

A beálló golyóscsapágó névleges hatásszöge a geometriai méretek alapján határozható meg:



4.5 ábra: A beálló golyóscsapágó geometriai méretei

$$\alpha_0 = \arcsin \left(\frac{m}{2r_k - d_g - H_h/2} \right) \quad (4.27)$$

A csapágymeresség meghatározásához a δ számítását megismételjük 2% -al növelt, ill. csökkentett terhelés mellett, így az adott terhelési szinthez tartozó radiális meresség:

$$s = \frac{dF_r}{d\delta} \cong \frac{\Delta F_r}{\Delta \delta} \quad (4.28)$$

4.2.3. Példa gördülőcsapágó rugómerevségének meghatározására

Meghatározandó a 6208 jelű mélyhornyú golyóscsapágó maximális gördülőelem terhelése és a belsőgyűrű radiális irányú rugalmas elmozdulása a közelítő összefüggések segítségével.

$$F_r = 400 \text{ daN}, F_{ax} = 0, \alpha = 0^\circ$$

$$d_g = 11,906 \text{ mm}$$

$$Z = 9$$

$$Q_{\text{össz}} = Q_r = 5 \frac{F_r}{Z \cos \alpha} = 5 \frac{400}{9} = 222,222 \text{ daN}$$

$$\delta = \frac{0,002}{\cos \alpha} \sqrt[3]{\frac{Q_{\text{össz}}^2}{d_g}} = \frac{0,002}{\cos 0^\circ} \sqrt[3]{\frac{222,222^2}{11,906}} = 0,03213 \text{ mm}$$

2%-al növelt terhelés mellett:

$$Q_{\text{össz}} = 226,666 \text{ daN}$$

$$\delta = 0,03256 \text{ mm}$$

2%-al csökkentett terhelés mellett:

$$Q_{\text{össz}} = 217,777 \text{ daN}$$

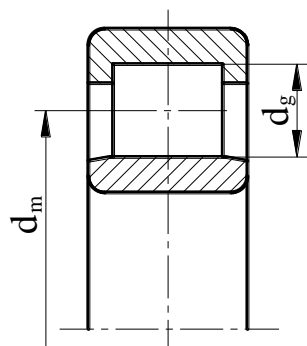
$$\delta = 0,03170 \text{ mm}$$

A csapágy merevsége az adott terhelési szinten:

$$s = \frac{\Delta F_r}{\Delta \delta} = \frac{16}{0,00086} = 18604 \frac{daN}{mm} \approx 186 \frac{kN}{mm}$$

5. A csapágyak által keltett gerjesztő frekvenciák

A hajtáslánc csapágyainak véges gördülőelem száma, a gördülőelemek alakhibái és a csapágyak eltérő megtámasztási módja különböző gerjesztő frekvenciákat eredményeznek. A csapágyhézag közvetett módon hatással van a hajtáslánc sajátfrekvenciáira. Ez azzal magyarázható, hogy növekvő rezgési amplitúdók és sebességek esetén a csapágyerők és így a csapágy rugómerevsége is növekszik, ez pedig mint majd látni fogjuk, közvetlen hatással van a sajátfrekvenciák alakulására.



5.1 ábra: Egysorú hengergörgős csapágy

A forgó csapágyrészek gerjesztő hatást gyakorolnak a hajtásláncre. Feltételezve hogy a gördülőelemek geometriailag hibátlanok, a csapágyelemek szögsebessége, ill. gerjesztő frekvenciája [15]:

$$\omega_g = \frac{\frac{d_m}{d_g} - \frac{d_g}{d_m \cos^2 \alpha_0}}{2} \omega \qquad \omega_g = \frac{1 - \frac{d_g}{d_m \cos \beta}}{2} \omega \qquad (5.1), (5.2)$$

$$\omega_{bgpalya} = (\omega - \omega_k) z \qquad \omega_{kgpalya} = \omega_k z \qquad (5.3), (5.4)$$



ahol:	ω	a tengely szögsebessége
	ω_g	a gördülőelemek szögsebessége
	ω_k	a csapágykosár szögsebessége
	$\omega_{bgpalya}$	a belső golyópálya görgőzési frekvenciája
	$\omega_{kgpalya}$	a külső golyópálya görgőzési frekvenciája
	z	gördülőelemek száma
	α_0	a csapágy hatásszöge

A fenti összefüggések álló külső gyűrűre érvényesek. A belső golyópályát érő $\omega_{bgpalya}$ gerjesztő frekvencia tehát különbözik az ω üzemi frekvenciától, ebből az következik, hogy nem csak a hajtáslánc α_i sajátfrekvenciái lesznek gerjesztés szempontjából veszélyesek és elkerülendők, hanem $\alpha_i = \omega_{bgpalya}$, $\alpha_i = \omega_{kgpalya}$ frekvenciáknak megfelelő ω üzemi frekvenciák is. A gördülőcsapágyak kenőanyaga rugó és csillapító szerepet is betölt, ezáltal hatása van a sajátfrekvenciák alakulására. A csapágy megfelelő kenési állapota ennek megfelelően nem csak az élettartamra, hanem a rezgőrendszerre is hatást gyakorol.

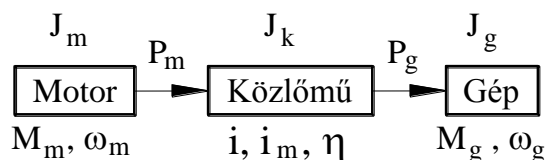
6. A hajtáslánc összeállítása

A mérnöki gyakorlatban nem minden alkalommal kell a hajtáslánc minden elemét megtervezni, ugyanis vannak az adott területre szakosodott gyártó cégek. Jó példa erre akár a belsőégésű, akár a villanymotorok fejlesztése, gyártása. Hasonló a helyzet a munkagépek és a közlőművek esetében (hajtóművek, szivattyúk, ventilátorok, darálók, ...), bár a célgépek tervezése már mindennapi feladatnak számít.

A következőkben abból indulunk ki, hogy a motor és a munkagép a megfelelő teljesítmény tartományban rendelkezésre állnak. A hajtásláncot ezek megfelelő egymáshoz rendelésével választjuk ki és építjük fel úgy, hogy az illesztéshez szükséges közlőművet és egyéb hajtáselemeket megtervezzük, vagy magát a közlőművet is kiválasztjuk.

A hajtáslánc optimalizáció a hajtáslánc elemeinek megtervezésével, kiválasztásával és összeállításával foglalkozik úgy, hogy annak élettartama, üzemviszonya a tervezői célkitűzéseknek feleljen meg. Általános esetben az így összeállított hajtáslánc jó hatásfokkal, rezgésmentesen kell hogy működjön [16].

A 6.1 ábra egy általános hajtáslánc felépítését mutatja, melynek fő egységei:



6.1 ábra: A hajtáslánc blokkdiagramja

- motor: mechanikai energiát szolgáltat jó hatásfokkal adott mozgásforma mellett, amely lehet haladó (v) vagy forgó (n, ω) mozgás.
- munkagép: energiaigénnyel lép fel, miközben technológiai folyamatot végez adott mozgásforma mellett.
- közlőmű: azonos mozgásformára és azonos sebességre hozza a motort és a munkagépet (ha eltérőek).

A motor és a munkagép kiválasztásához és illesztéséhez ismerni kell a mechanikai paramétereiket, valamint a statikus jelleggörbéjüket.

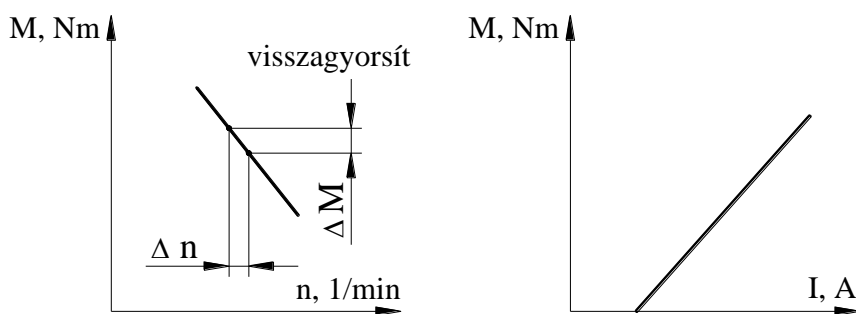
A következőkben sorra vesszük és elemezzük néhány, gyakran alkalmazott motortípus és munkagép jelleggörbét.

6.1. Motor jelleggörbék

A motorok jelleggörbéjét motor fékpadi méréssel határozzák meg, mely a motorfordulatszám függvényében ábrázolja a motor fő tengelyéről levett nyomatékot (M - n jelleggörbe). A teljesítmény – fordulatszám jelleggörbét (P - n jelleggörbe) már számítás útján kapjuk a $P = M\omega$ összefüggés alapján.

6.1.1. Egyenáramú villamos motor jelleggörbéi

6.1.1.1. Egyenáramú – mellékáramú motor

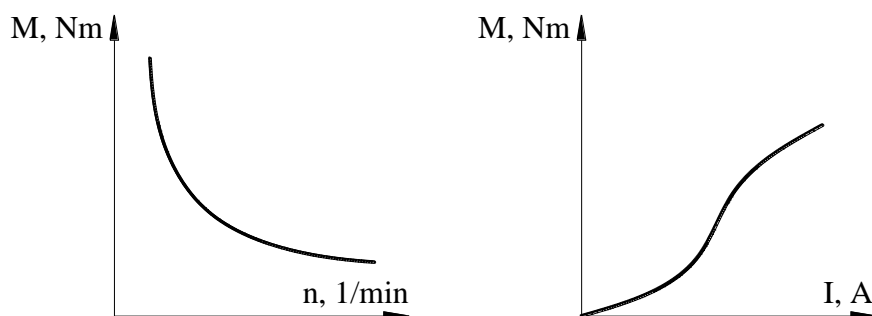


6.2 ábra: Egyenáramú, mellékáramú motor jelleggörbéje

Forrás: [16]

Jellemzője, hogy fordulatszám-tartó, és ott alkalmazzák, ahol közel állandó fordulatszámú hajtásra van szükség. A motor fordulatszám-tartó jellemzője abból adódik, hogy ha egy normál üzemállapotban megnövekszik a motor terhelése, annak fordulatszáma lecsökken, melyhez egy nagyobb hajtónyomaték tartozik. A ΔM nyomaték visszagyorsítja a hajtásláncot az üzemi fordulatszámra, ha motor túlterhelése megszűnik.

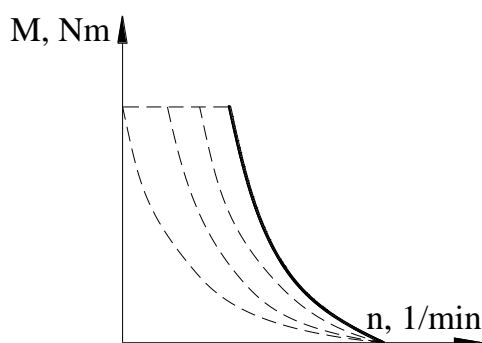
6.1.1.2. Egyenáramú – főáramú motor



6.3 ábra: Egyenáramú, főáramkörű motor jelleggörbéje
Forrás: [16]

Jellemzője, hogy teljesítménytartó, és indításnál a megfutas veszélye fennáll. Olyan helyen alkalmazzák, ahol a terhelés alatti indítás követelmény (daru emelőmű motor, trolibuszok, villamosok, stb.)

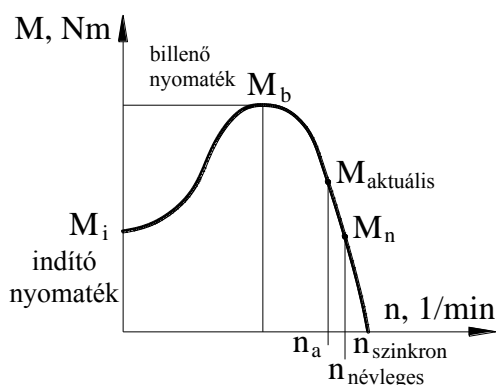
6.1.1.3. Egyenáramú - vegyes kapcsolású motor



6.4 ábra: Egyenáramú, vegyes kapcsolású motor jelleggörbéje

A motor jelleggörbéje a belső villamos kapcsolásokkal módosítható.

6.1.2. Rövidrezárt forgórészű, aszinkron motor



6.5 ábra: Rövidrezárt forgórészű aszinkron motor jelleggörbéje

Forrás: [16]

A motor nem képes szinkron fordulatszámon működni, mert ezen a fordulatszámon nincs a forgó mágneses mező és a forgórész tekercsei között erővonalmetszés.

Az összetartozó szinkron és aszinkron fordulatszámok [1/min]:

3000 – 2880; 1500 – 1440; 1000 – 960; 750 – 720

A villamos motorok jellemző nyomaték és fordulatszám arányai a motorgyártótól függően a járatos értékek a következők:

$$\frac{M_i}{M_n} = 1,2 - 1,8; \quad \frac{M_b}{M_n} = 1,75 - 2,5; \quad \frac{n_n}{n_{sz}} = 0,94 - 0,96$$

ahol: M_n névleges nyomaték

M_i indító nyomaték

M_b billenő nyomaték

n_n névleges fordulatszám

n_{sz} szinkron fordulatszám

Az összetartozó $M_n - n_n$ pont határozza meg a motor munkapontját $P_m = P_{munkapont}$, tehát a névleges mechanikai teljesítményt: $P_n = M_n 2\pi n_n$.

A motor tervezés alapja, hogy a motor a névleges nyomatékon (névleges fordulatszámon) jó hatásokkal előírt élettartamig működjön. Ahogy azt már említettük, a motor akkora nyomatékot, ill. mechanikai teljesítményt ad le, amekkorát leveszünk róla. Ennek határa a motor mechanikai paramétereiből adódik, lásd a jelleggörbét. Látható, hogy elvileg a motor a névleges nyomatékának akár 2,5-szeresével is üzemeltethető, ill. a névleges teljesítményének többszöröse is levehető, viszont ebben az esetben a tényleges élettartama töredéke lesz a névleges élettartamának. A villamos motorok nyomaték-felvett áramerősség jelleggörbéjének ismerete lehetőséget biztosít arra, hogy egy egyszerű áramfelvétel méréssel következtetni tudjunk a motor terhelésére, a leadott teljesítményre. A M-n jelleggörbe alapján szintén meghatározható a motorról levett nyomaték, ill. mechanikai teljesítmény, ha kellő pontossággal meg tudjuk mérni a motor üzemi fordulatszámát.

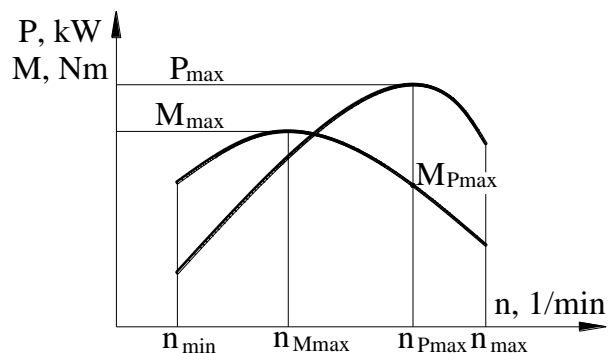
Tekintettel arra, hogy a jelleggörbe a névleges nyomaték környezetében egyenessel helyettesíthető, hasonló háromszögekből a következő arányok írhatók fel:

$$\frac{M_{ii}}{n_{sz} - n_{ii}} = \frac{M_n}{n_{sz} - n_n}, \text{ melyből } M_{ii} = M_n \frac{n_{sz} - n_{ii}}{n_{sz} - n_n} \quad (6.1)$$

A dinamikai számításokhoz ismerni kell a motor forgórészének tehetetlenségi nyomatékát. A motorkatalógusok általában nem a tehetetlenségi nyomatékot, hanem a lendítőnyomatékot, GD^2 -t adják meg, melyből a tehetetlenségi nyomaték számítható:

$$J_m = \frac{GD^2}{4} [kgm^2] \quad (6.2)$$

6.1.3. Belsőégésű motorok jelleggörbéje



6.6 ábra: Belsőégésű motorok jelleggörbéje

Definíció szerint a motor névleges nyomatéka a névleges és egyben a maximális teljesítményhez tartozó érték, melyet a motor, a névleges és egyben a maximális fordulatszámon ad le. A szívó Otto és Diesel motorok (turbó, ill. kompresszor feltöltő nélkül) nyomaték jelleggörbéi különböznek egymástól, mely különbség a jellemző nyomaték értékek arányával adható meg:

$$\text{Otto motorok: } \frac{M_{max}}{M_n} = 1,2 - 1,4$$

$$\text{Dízel motorok: } \frac{M_{max}}{M_n} = 1,05 - 1,15$$

A mai korszerű motorok jelleggörbéi részben a változó szelepvezérlés, részben a számítógépes vezérlés miatt a pillanatnyi üzemviszonyoknak megfelelően változik.

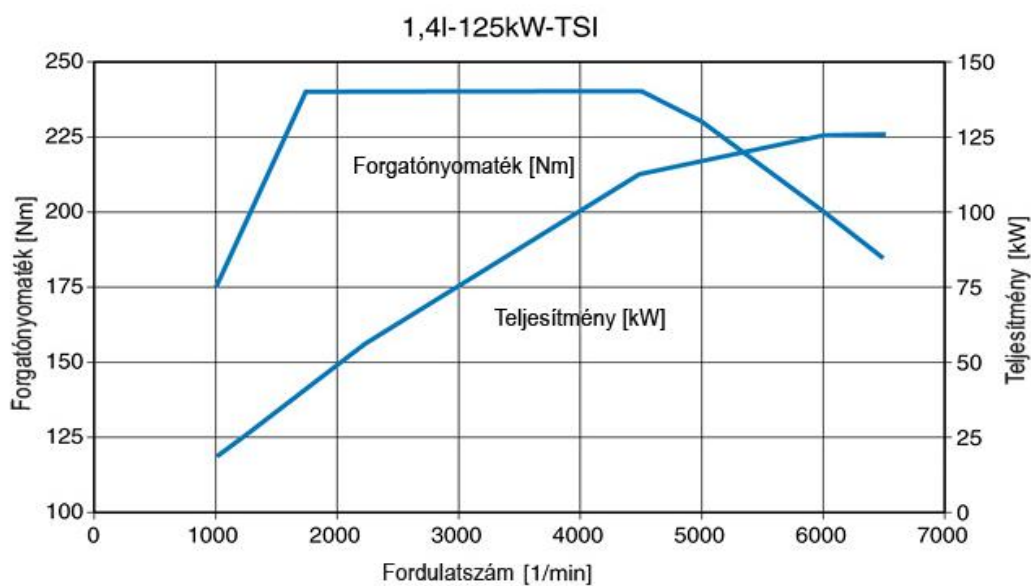
A motorteljesítmény növelés egyik módja azonos lökettérfogat mellett a forgattyús mechanizmus r/l viszonyának célszerű módosítása. Ennek egyik következménye a rövidebb lökethossz, mellyel a motor n_{max} értéke növekszik.

A motorról levehető nyomaték értéke csökken, viszont a fordulatszám tartomány, arányát tekintve, ettől nagyobb mértékig kiszélesedik, ezáltal a motor maximális teljesítménye nő. Mivel a motor alapjárat fordulatszáma közel azonos, a kisebb nyomatéki értékek az alacsonyabb fordulatszám tartományban kisebb teljesítményt eredményeznek.

Két közel azonos maximális teljesítményű, 1400 ill. 1600 cm^3 lökettérfogatú motorral szerelt gépkocsi menetdinamikai szempontból csak akkor lenne egyenértékű egymással, ha a kisebb lökettérfogatú, de nagyobb motorfordulatszám tartományú motor több fokozatszámú nyomatékváltóval lenne szerelve, ezáltal több lehetőség lenne egy adott járműsebességhez magasabb motorfordulatszám tartományt rendelni. Ezeket az általában alacsonyabb árkategóriához tartozó gépkocsikat alap kivételben nem szerelik magasabb fokozatszámú nyomatékváltóval a magasabb ára miatt.

A nagyobb lökettérfogatú motor esetében nagyobb nyomaték áll rendelkezésre egy szűkebb fordulatszám tartományban, így kisebb járműsebesség mellett az alacsonyabb motorfordulatszám tartományban nagyobb teljesítmény vehető le a motorról, mely városi közlekedésben komfortosabb vezetést biztosít.

A motorteljesítmény növelés másik módja a turbó, ill. kompresszoros feltöltők alkalmazása. A nyomaték jelleggörbe kb. 1500-2000 $1/min$ fordulatszámnál eléri maximumát és vízszintes, melyet a motorvezérlő elektronika biztosít, egészen a turbónyomás leszabályozásáig.

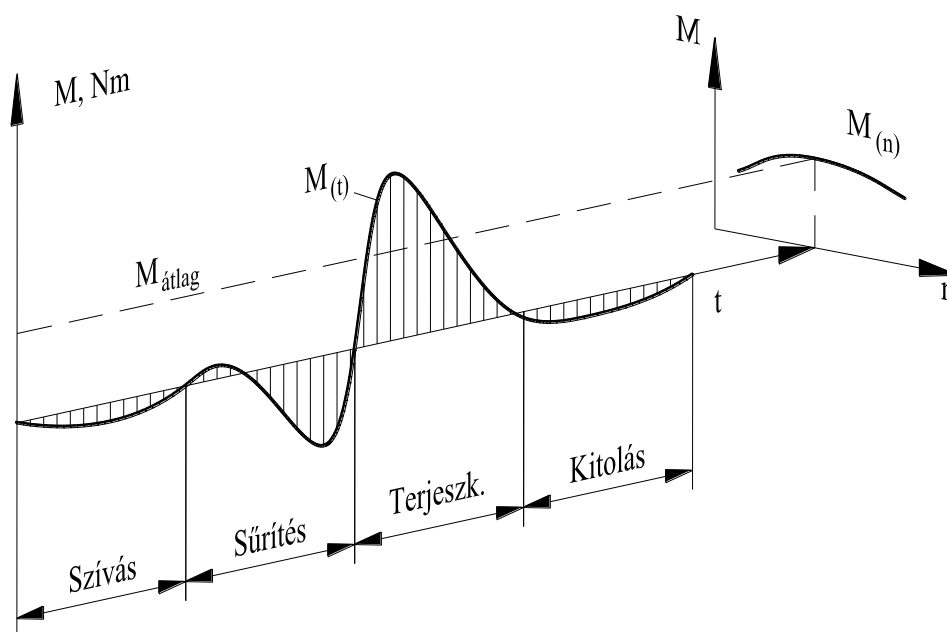


6.7 ábra: Turbó feltöltős belsőégésű motor jelleggörbéje

Forrás: [17]

A Diesel autó menetdinamikája miatt közkedvelt. Azt tudnunk kell, hogy ma már nagyon kevés típusnál hoznak forgalomba Diesel autót turbófeltöltő nélkül. Tehát a közkedvelt menetdinamika nem feltétlenül a diesel motornak tudható be, hanem a turbófeltöltő által biztosított karakterisztikának.

A négyütemű belsőégésű motorok minden negyedik üteme szolgáltat mechanikai munkát, ez alatt a főtengely két fordulatot végez (lásd 6.8 ábra).

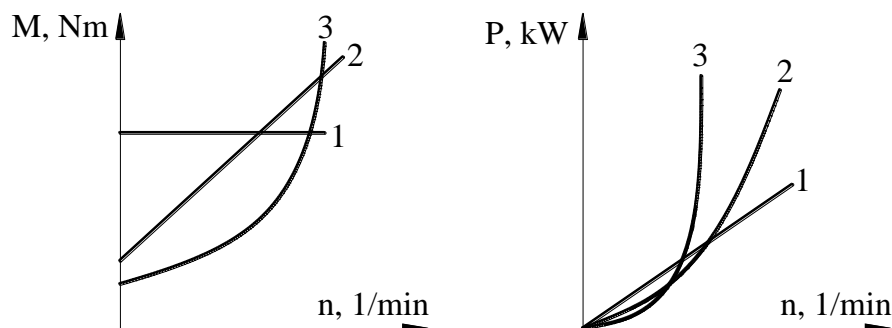


6.8 ábra: Négyütemű belsőégésű motor nyomatékgörbéje
 Forrás: [16]

Ebből következik, hogy még a többhengeres motorok is egyenlőtlenül járnak, melynek hatását a hajtáslánc tervezésénél, alkalmasan választott üzemtényezővel vesszük figyelembe. Erre láthatunk példát a szíj ill. a lánchajtások tervezésénél a c_2 , ill. az Y üzemtényezők megválasztásakor.

6.2. Munkagépek jelleggörbéi

A munkagépek jelleggörbéje a végzett technológiai folyamattól függően gyakorlatilag bármilyen lehet. Itt csupán három nagyon jellegzetes jelleggörbét ismertetünk, melyek alakja attól függ, hogy a munkagép végez e deformációs munkát, vagy közegellenállást kell legyőznie.



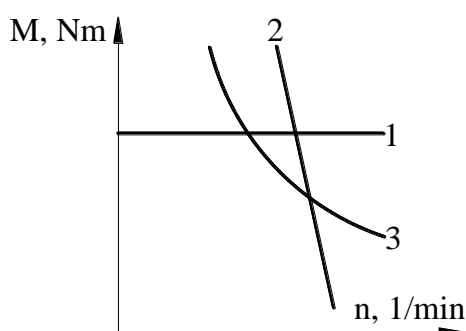
6.9 ábra: Jellemző munkagép jelleggörbék

1. $M = \text{áll}$ fordulatszámtól független $P = f(n)$ Emelőgépek, Szállítószalagok, Dugattyús szivattyúk állandó



- | | | | | |
|----|-----------------|--------------------------------------------------|-----------------|--------------------------------------|
| 2. | $M = f_{(n)}$ | lineáris
(deformációs munkát végez) | $P = f_{(n^2)}$ | emelőmagasság mellett
Sajtológép |
| 3. | $M = f_{(n^2)}$ | progresszív
(közegellenállást kell leküzdeni) | $P = f_{(n^3)}$ | Ventilátorok, Centrifugál szivattyúk |

A hajtógépek jelleggörbéit, melyek főbb típusait már tárgyaltuk a 6.10 ábrán, egy diagramban ábrázoltuk.



6.10 ábra: Jellemző hajtógép jelleggörbék

- | | | |
|----|--------------------------------|---------------------------------------------------|
| 1. | Nyomatéktartó jelleggörbe | Dugattyús gőzgép,
Súllyal terhelt óramű |
| 2. | Fordulatszám-tartó jelleggörbe | Egyenáramú mellékáramkörű motor
Aszinkronmotor |
| 3. | Teljesítmény-tartó jelleggörbe | Egyenáramú főáramkörű motor |

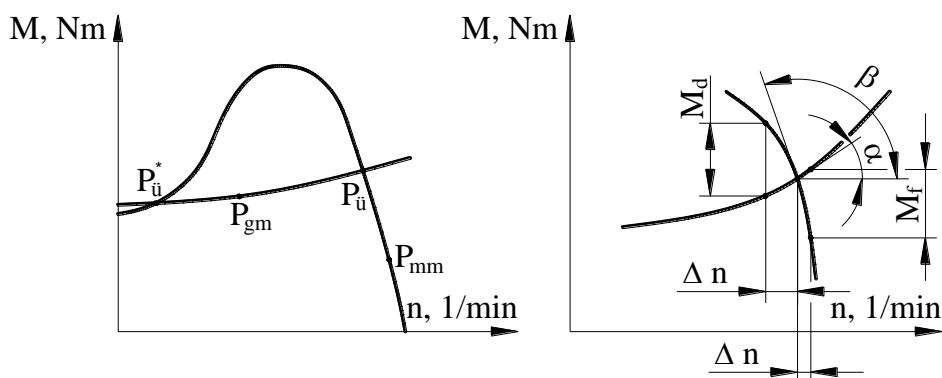
6.3. Közlőművek

A közlőművek feladata a motor és a munkagép összekapcsolása mechanikusan, hajtástechnikai szempontból helyesen. Azonos teljesítményszintű motor és a munkagép még nem feltétlenül kapcsolható össze közvetlenül. Az esetek többségében ezek különböző fordulatszámokon (sebességen) működnek és nyomatékszolgáltatásuk, ill. igényük eltér. A közlőmű feladata tehát a mozgás sebességek és nyomaték szintek összehozása azonos mozgásformák mellett, valamint ezen túlmenően a mozgásformák összekapcsolása, ha azok nem voltak megegyezők. Ezt a feladatot az erő, ill. az alakzáró hajtások automatikusan elvégzik, ugyanis ezek a teljesítményt nem módosítják, csak átviszik. A mozgásformák összekapcsolására jó példa a szakáll, ill. hajnyírókban alkalmazott mechanizmus, mely a motor forgómozgását kapcsolja össze a mozgó vágókés ívben történő elmozdulásával.

6.3.1. A közlőmű megválasztás szempontjai

A hajtó és munkagépet úgy tervezték, hogy a munkapontjukon (P_m) üzemeltetve jó hatásfokkal előírt élettartamig tudjanak működni.

A hajtó és munkagépek üzemi pontja a jelleggörbék metszéspontja: (P_{ii}). Az üzemi pont akkor megfelelő, ha a motor jelleggörbe stabil részén van, ill. egybe, vagy közel egybeesik a motor és a munkagép munkapontjával. A közlőmű alkalmas megválasztásával ezt kell biztosítanunk.



6.11 ábra: Az üzemi pont értelmezése, a stabilitás feltétele

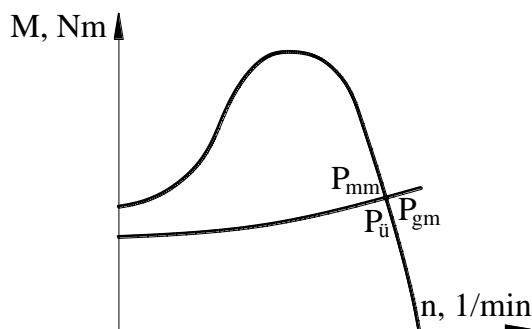
Forrás: [16]

A 6.11 ábrán a jelleggörbék két metszéspontja látható, melyből a P_{ii}^* egy instabil üzemi pont. Ez onnan látható, hogy ha a hajtáslánc fordulatszáma valamilyen oknál fogva megnő, egyre nagyobb motornyomaték áll rendelkezésre, mely a hajtásláncot folyamatosan gyorsítja mindaddig, amíg el nem éri a motor maximális fordulatszámához tartozó fordulatszámot, vagy egy másik üzemi pontot. Az ábrán látható P_{ii} pont a motor jelleggörbe stabil szakaszán van, ezért ez már lehet stabil üzemi pont. A stabilitás feltétele, hogy az üzemi pontban a motor, ill. a munkagép jelleggörbéjéhez húzott érintő és a vízszintes sík által bezárt szögre a következő feltételek teljesüljenek: $\beta > 90^\circ$, ill. $\alpha < 90^\circ$.

6.3.2. A közlőmű megválasztás esetei

Közlőművet minden esetben alkalmazni kell eltérő motor és a munkagép mozgásforma esetén. A következő példákban feltételezzük, hogy a motor és a munkagép mozgásformája megegyezik.

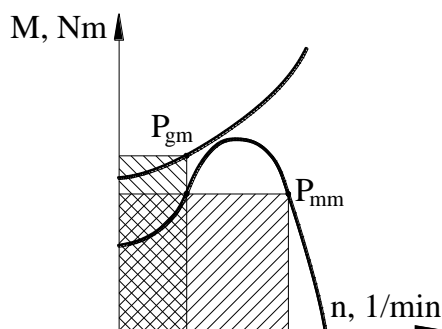
1. A motor és a munkagép jelleggörbéi metszik egymást, és a P_{ii} pont egybeesik, vagy közel egybeesik a P_m munkapontokkal. Indításnál kellő indítónyomaték áll rendelkezésre és nincs a hajtáslánc fordulatszámának gyorsítási értékével kapcsolatban korlátozás.



6.12 ábra: Jelleggörbék üzemi pontja közlómű nélkül

Közlóműként olyan tengelykapcsolót alkalmazhatunk, amely a karakterisztikákat nem befolyásolja (pl.: rugalmas, oldható, stb.). A tengelykapcsoló kiválasztás alapja a hajtás egytengelyűségi előírásai, valamint az összekötendő tengelyek merevségi jellemzői.

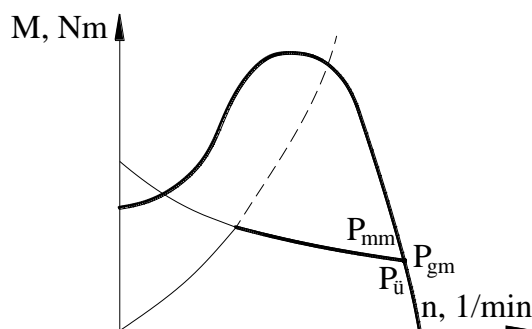
2. A motor és a munkagép munkapontjai nagyon távol vannak az üzemi ponttól, adott esetben még metszéspontjuk (üzemi pontjuk) sincs.



6.13 ábra: Jelleggörbék üzemi pont nélkül

Ha az összetartozó M-n pontokhoz tartozó sraffozott téglalapok területe megegyezik, ez azt jelenti, hogy a motor és a munkagép azonos teljesítményűek, így közlóműként bármilyen alak, ill. erőzáró hajtás alkalmazható (szíjhajtás, lánchajtás, fogaskerekes hajtómű, stb.), mely a mozgások sebességét azonos értékre hozza. A közlómű beépítésénél esetleg alkalmazott tengelykapcsolók kiválasztásánál az előző pontban ismertetett szempontokat kell figyelembe venni.

3. Az üzemi pont és a munkapontok egybeesnek, de a motor által biztosított indítónyomaték kicsi, ill. a hajtáslánc gyorsításának értéke korlátozott.



6.14 ábra: Jelleggörbék üzemi pontja elégtelen indító nyomaték esetén

Közlőműként fordulatszám kapcsolású tengelykapcsoló alkalmazható, mely a kapcsolási fázisban fokozatosan adja át a motor nyomatékát a hajtásláncre, miközben a motor fordulatszáma és ezzel együtt a rendelkezésre álló motornyomaték is nő. A főbb fordulatszám kapcsolású tengelykapcsolók a következők:

- röpsúlyos
- hidrodinamikus
- indukciós
- mágnesporos

Működési jellemzőikben alapvető különbség, hogy a slip vagy csak a kapcsolási fázisban jelentkezik (pl.: röpsúlyos tk.), vagy az egész működési tartományában (pl.: hidrodinamikus tk.), mely slip nélkül nem működhet. Ez utóbbi csoportba tartozó tengelykapcsolók a torziós nyomatékcúcsokat is letörik, ezáltal torziós lengéscsillapítóként a torziós lengéseket is befolyásolják.

4. Az előző három eset tetszőleges kombinációja.

Meghibásodott hajtáslánccok tönkrement különleges közlőművét gyakran megpróbálják kiváltani egyszerűbb, olcsóbb műszaki megoldásokkal (pl.: fordulatszám kapcsolású, vagy rugalmas tengelykapcsolók helyettesítése tokos tengelykapcsolóval). A kiválasztás következménye általában az, hogy nem a helyettesítő tengelykapcsoló megy tönkre, hanem a hajtáslánc egyéb elemei, részei hibásodnak meg a fellépő járulékos terhelések következtében. Ennek magyarázata, hogy tervezéskor a méretezés alapja nem ez a megnövekedett terhelés volt.

6.3.3. Közlőművek áttétel-hatásfok viszonyai

A közlőművek mechanikai veszteséggel működnek. A mechanikai munkává át nem alakult mechanikai energiának (jelen esetben hőenergia) más-más megjelenési formája van alak és erőzáró hajtások működésében.

6.3.3.1. Erőzáró hajtások

A hatásfok a hasznosított és a befektetett teljesítmény aránya.

$$\eta = \frac{P_g}{P_m} = \frac{M_g \omega_g}{M_m \omega_m} \quad (6.3)$$



$$P_v = P_m - P_g = P_m (1 - \eta) \quad (6.4)$$

veszteség teljesítmény, mely hőáram formában jelentkezik

Vezessük be a kinematikai és a nyomaték áttételt, majd fejezzük ki a hatásfokot:

$$i_\omega = \frac{n_m}{n_g} \quad \text{kinematikai áttétel} \quad (6.5)$$

$$i_M = \frac{M_g}{M_m} \quad \text{nyomaték áttétel} \quad (6.6)$$

$$\eta = \frac{i_M}{i_\omega} \quad (6.7)$$

A nyomatékmódosítás állandósult üzemállapotban állandó. A motor akkora teljesítményt ad le, amekkorát az erőzáró hajtás levesz róla, plusz a hőáram formában jelentkező teljesítményt. A kinematikai áttétel tehát függ a hatásfoktól, de a hatásfok függ a terheléstől, így a kinematikai áttétel terhelésfüggő.

Veszteségmentes esetben: $\eta = 1$ és $n_g = n_{g_0}$, melyből következik, hogy:

$$\eta = 1 = i_M \frac{n_{g_0}}{n_m} \Rightarrow i_M = \frac{n_m}{n_{g_0}}$$

Veszteséges esetben, feltételezve, hogy a nyomatékátvitel állandósult:

$$\eta = i_M \frac{n_g}{n_m} = \frac{n_m}{n_{g_0}} \frac{n_g}{n_m} = \frac{n_g}{n_{g_0}} \Rightarrow n_g = n_{g_0} \eta$$

Bevezetve a Δn_g -t, a slip, mint a fordulatszám csökkenés fajlagos értéke kifejezhető:

$$\Delta n_g = n_{g_0} - n_g = n_{g_0} (1 - \eta) \quad (6.8)$$

$$s = \frac{\Delta n_g}{n_{g_0}} = \frac{n_{g_0} - n_g}{n_{g_0}} = (1 - \eta)$$

(6.9)

6.3.3.2. Alakzáró hajtások

A fordulatszámok aránya, tehát a kinematikai áttétel az alakzáró kapcsolat miatt állandó. A hőáram formában jelentkező mechanikai veszteség a hajtásláncre jutó nyomaték csökkenését okozza, tehát a nyomatékmódosítás függ a hatásfoktól.

Veszteségmentes esetben: $\eta = 1$ és $M_g = M_{g_0}$

$$\text{Veszteséges esetben:} \quad M_g = \eta M_{g_0} \quad (6.10)$$

$$\Delta M_g = M_{g_0} - M_g = M_{g_0} (1 - \eta) \quad (6.11)$$

A közlőművek a kinematikai áttételtől függően lehetnek:

$$i > 1 \Rightarrow n_m > n_g \text{ reduktorok;} \quad i < 1 \Rightarrow n_m < n_g \text{ multiplikátorok}$$



A következőkben néhány speciális közlőművet mutatunk be, ill. elemzünk.

6.3.4. Példák speciális közlőművekre

A teljesség igénye nélkül néhány példán keresztül olyan közlőmű alkalmazásokat mutatunk be, melyek kiemelik a speciális tulajdonságaikat.

6.3.4.1. CVT röpsúlyos tengelykapcsolóval

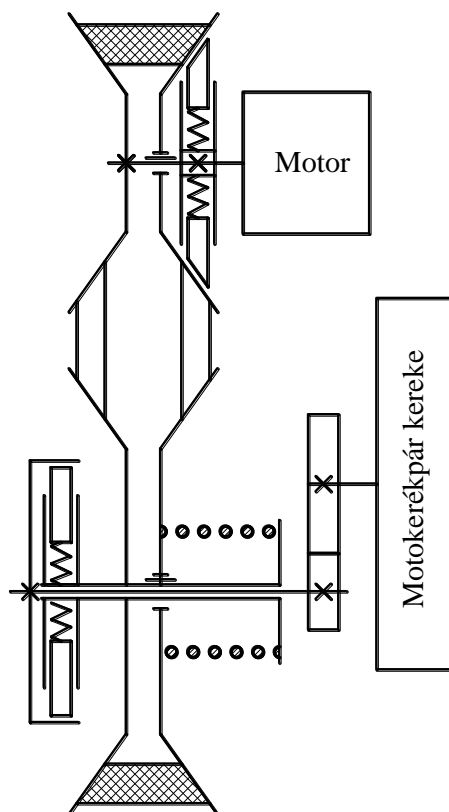
(Continous Variable Transmission)

Főbb részei: CVT (fokozatmentes váltómű) és egy röpsúlyos tengelykapcsoló.

A 6.15 ábrán bemutatott konstrukció alkalmazási területe: két, ill. négyütemű robogók hajtáslánca.

A hajtáslánc két röpsúlyos szerkezettel rendelkezik. A CVT működési elve az állandó tengelytávolságú, de fokozatmentesen változtatható pillanatnyi áttételű ékszíjhajtáson alapul. A két ékszíjtárcsa szerkezetileg osztott kivitelű, ahol a két ékszíjtárcsa fél egymáshoz viszonyított távolsága változtatható, ezáltal az ékszíz az adott távolsághoz tartozó átmérőn fog működni és kerületi erőt átvinni. A megfelelő működés feltétele, hogy a tárcsafelek axiális irányú pozicionálása összhangban legyen egymással. A hajtó szíjtárcsa axiális irányba mozgó tárcsafelének elmozdulását a röpsúlyos görgők biztosítják, melyek a motorfordulatszámával arányos centrifugális erővel kényszerítik a rögzített tárcsafél irányába, ezáltal változtatva a szíjtárcsa működő kör átmérőjét. Mivel a szíjhajtás tengelytávolsága, ill. a szíj hossz nem változik, a hajtott tárcsa elmozduló tárcsafelének pillanatnyi helyzetének összhangban kell lennie a hajtó tárcsa működő átmérőjével. Ezt legegyszerűbben egy rugóerő feszítésű, axiális irányban automatikusan beálló tárcsaféllal biztosíthatjuk. Minél kisebb a rugó merevsége, annál kevésbé változik a szíjhajtás előfeszítése az áttétel változás során.

A CVT váltót egy másik röpsúlyos szerkezeten, egy tengelykapcsolón keresztül visz át a teljesítményt a hajtott kerékre. A röpsúlyos pofák a CVT hajtott szíjtárcsájának fordulatszámával forognak és a fellépő centrifugális erő feszíti őket egy dobhoz, mely nyomtatékkötésen keresztül csatlakozik a kihajtó tengelyhez. Ez a tengely egy fogaskerék áttételen keresztül hajtja meg a motorkerékpár hátsó kerekét.



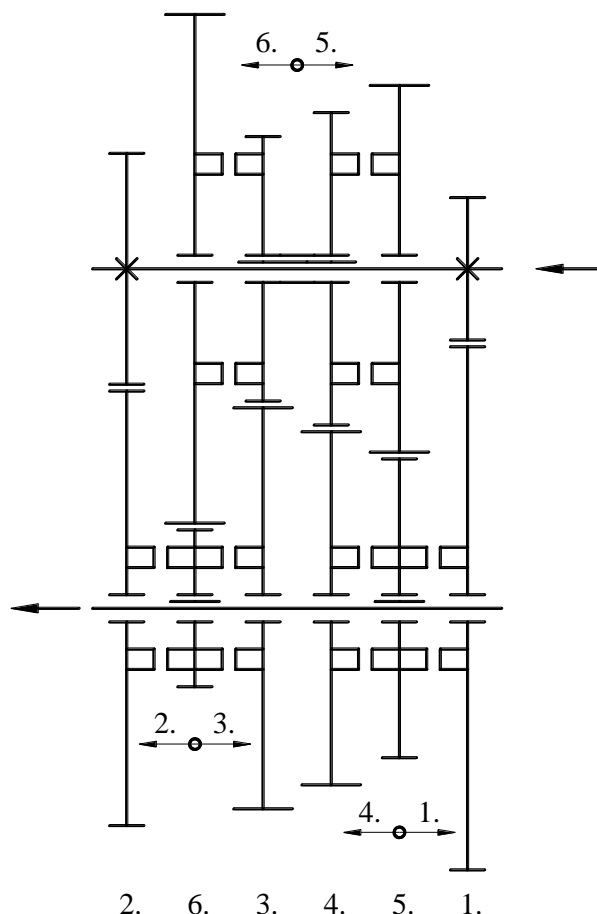
6.15 ábra: CTV váltó röpsúlyos tengelykapcsolóval

6.3.4.2. Kapcsolókörmös sebességváltó

A 6.16 ábrán látható sebességváltó hatfokozatú, a mai korszerű motorkerékpárok nem szinkronizált sebességváltóműve. Egy mai, 100-200 LE teljesítményű sportmotorban ennek a nem szinkronizált váltóműnek a létjogosultságát a kompaktsága, kis tömege és rendkívül rövid váltási ideje indokolja. A mérete egy azonos teljesítményű hatfokozatú szinkronizált váltóműnek csupán harmada - negyede, így tömege is töredéke. Hátránya, hogy a gyors és csattogásmentes váltáshoz nagy rutin szükséges, ellenkező esetben a fogaskerekek kapcsoló körmei nagy igénybevételt szenvednek. A DSG váltók megjelenése előtt kapcsolókörmös nyomatékúváltóműveket alkalmaztak a nagyteljesítményű sportkocsikban is, például a Ferraiokban, melynek kezeléséhez külön tanfolyamot kellett elvégezni.

A kapcsolókörmös váltóművel rendelkező személygépkocsikban a recsegés mentes váltáshoz kétszer kellett „kuplungolni”. Először, amikor az egyik fokozatból üresbe, majd amikor üresből a magasabb sebességi fokozatba kapcsolunk. Bár ez is nagy rutint igényelt, a vezetők rá tudtak érezni egy olyan motor fordulatszámra, melynél a „dupla kuplungolással” az összekapcsolandó tengely és fogaskerék azonos fordulatszámra került, így a körmös kapcsoló recsegés nélkül tudott kapcsolódni. A fenti motorkerékpár váltó abban különbözik a gépkocsikban alkalmazott váltótól, hogy a kompaktság érdekében a körmös kapcsoló maga is egy csúszó fogaskerék, mely egy másik körmös kapcsolóval kapcsolt fokozat egyik fogaskereke. Emiatt a fogaskerekek csak egyenes fogazásúak lehetnek. Motorkerékpár váltók esetében azért nem lehet „dupla kuplungolással” váltani, mert a kisméretű fogaskerekeknek kicsi a tehetetlenségi nyomatéka, emiatt váltáskor a nagy közegellenállás

olajfürdőben a fordulatszáma hamar leesik. Ezért kell a váltást olyan gyorsan elvégezni, hogy a kapcsolandó fogaskerék fordulatszáma csak a kívánt mértékig csökkenjen le.

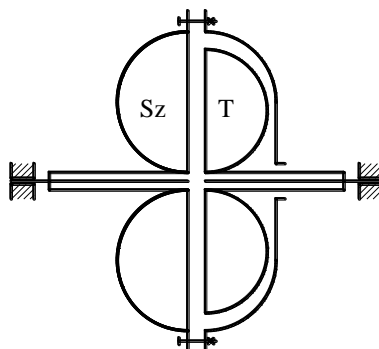


6.16 ábra: Honda CBF 1000 motorkerékpár kapcsolókörmös sebességváltója

6.3.4.3. Hidrodinamikus tengelykapcsoló

Főbb részei: a motor által hajtott szivattyúkerék, és turbinakerék (vezetőkerék nem tartalmaz, ezért tengelykapcsoló és nem nyomatékváltó).

A szivattyú és a turbinakerék egy zárt hidraulikai rendszert képez, mely kb. 2/3 részig van feltöltve megfelelő viszkozitású olajjal. A forgó szivattyúkerék lapátolásán az olaj radiális irányba áramlik, majd átjutva a turbina kerékbe impulzust fejt ki a turbina lapátokra, mely a hajtónyomatékot biztosítja. Impulzusátadás a szivattyú és a turbinakerék között csak fordulatszám különbség, tehát slip esetén lehetséges, ezért szinkron fordulatszámon nem működhet. A 3-4% üzemi slip következménye, hogy mechanikai szempontból ez a veszteség teljesítmény hőáram formában jut a környezetbe. Ennek mértéke akkora, hogy pl. a járművek hidrodinamikus nyomatékváltóművét el kell látni olajhűtővel, és tüzelőanyag többletfogyasztását eredményezi.



6.17 ábra: Hidrodinamikus tengelykapcsoló

A tengelykapcsoló nyomatéki egyenlete:

$$M_1 = M_2 + M_s \quad (6.12)$$

ahol: M_1 a szivattyúkerék nyomatéka

M_2 a turbinakerék nyomatéka

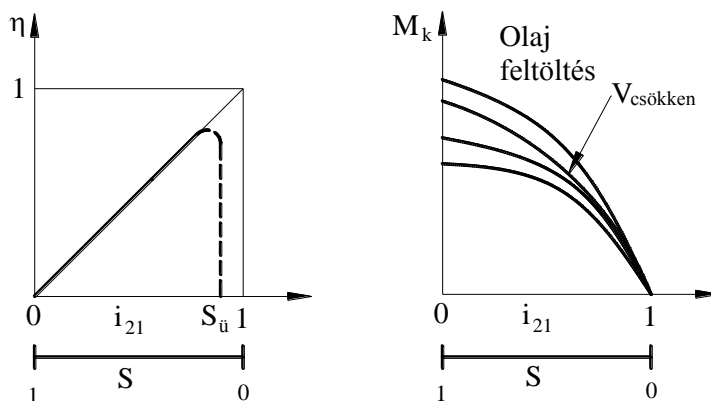
M_s az olajtöltet súrlódó nyomatéka

Az egyenlet szerint a szivattyúkerék mindig akkora nyomatékot ad le, amekkorát a hajtáslánc a turbinakeréken keresztül levesz, plusz a tengelykapcsoló belső súrlódása: $M_1 \approx M_2$.

A tengelykapcsoló hatásfok - slip - áttétel viszonyai:

$$\eta = \frac{P_t}{P_{sz}} = \frac{M_2 \omega_2}{M_1 \omega_1} = \frac{n_2}{n_1} = i_{21} = 1 - s \quad (6.13)$$

$$s = \frac{n_1 - n_2}{n_1} = 1 - \frac{n_2}{n_1} = 1 - i_{21} \quad (6.14)$$



6.18 ábra: Hidrodinamikus tengelykapcsoló hatásfok jelleggörbe

Forrás: [16]

A tengelykapcsolóval átvihető nyomaték és teljesítmény közelítő meghatározására a laboratóriumi mérési eredményekre illesztett, úgynevezett tapasztalati összefüggés

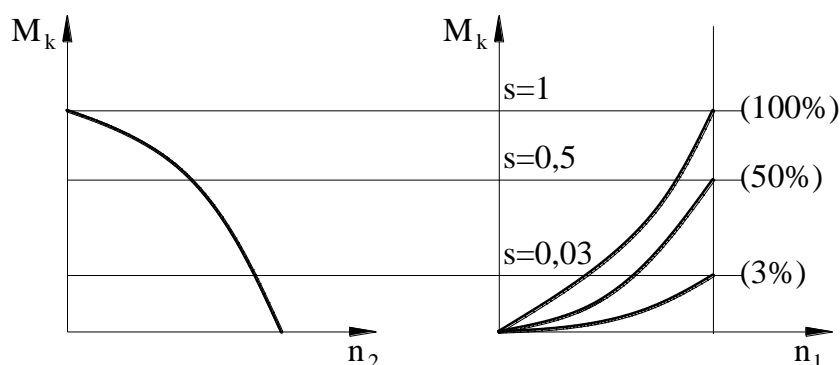
alkalmazható, mely nem egy levezetés eredménye, ezért az adatokat az előírt mértékegységben kell behelyettesíteni.

$$M_k = k_M n_1^2 D^5 \quad [\text{Nm}] \quad (6.15)$$

$$P_k = k_P n_1^3 D^5 \quad [\text{W}] \quad (6.16)$$

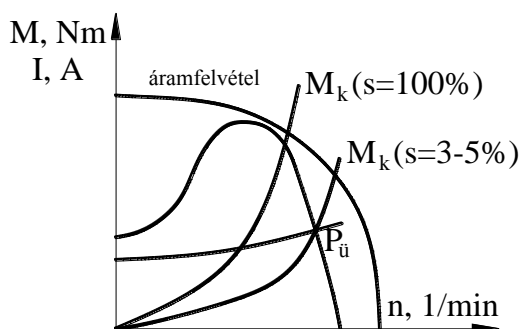
ahol: D^5 [m] a körgyűrű szelvény közepes átmérője
 k_M, k_P nyomaték, ill. teljesítménytényező

A 6.18 ábra az M_k kapcsolónyomaték értékét mutatja az n_1, n_2 függvényében.



6.19 ábra: Hidrodinamikus tengelykapcsoló kapcsoló nyomaték
 Forrás: [16]

A 6.19 ábra a hidrodinamikus tengelykapcsolóval szerelt motor és munkagép üzemi pontját szemlélteti.



6.20 ábra: Hidrodinamikus tengelykapcsoló kapcsolási folyamat
 Forrás: [16]

Kiválasztási szempontok:

- a tengelykapcsoló nagyobb nyomaték átvitelére legyen képes, mint a motor által leadott maximális nyomaték,
- $s=100\%$ -hoz tartozó jelleggörbe a motor karakterisztikáját a billenő ponttól jobbra metsse.



6.4. Csuklós mechanizmusok

A közlóművek egyik feladata, hogy azonos mozgásformára hozza a motort és a munkagépet, ill. a munkagépen belül az adott technológiai folyamat elvégzéséhez megfelelő alkatrész mozgásokat tegyen lehetővé. Ezt általában csuklós mechanizmussal oldjuk meg, melynek pontjai terhelés hatására előre leírt pályán mozognak, és megfelelő erőrendszer hatására nyugalomban vannak. Bár ebben a rövid fejezetben nincs mód arra, hogy a csuklós mechanizmus, a Mechanizmusok tárgy keretein belül elsajátított, elmozdulás, sebesség, gyorsulás függvényeit meghatározzuk, két egyszerű példát gépelemes megközelítéssel fogunk elemezni.

Mint ismert, egy rendszer szabadságfok száma azon skalár adatok számával azonos, mely helyzetének egyértelmű meghatározásához szükséges.

Anyagi pont esetében ez síkban 2 (x, y) térben 3 (x, y, z),

anyagi test esetén síkban 3 (x, y, φ_z) térben 6 ($x, y, z, \varphi_x, \varphi_y, \varphi_z$)

skalár mennyiséggel írható le.

A csuklós mechanizmus különböző típusú kényszereken keresztül kapcsolódik a környezethez (külső kényszer), melyek a kényszererők számától függően adott irányú elmozdulást, ezáltal szabadságfokot engednek meg a mechanizmusnak. Az alkalmazott kényszerek és a csuklós mechanizmus csuklójának szerkezeti kialakítása határozza meg, hogy a mechanizmus síkbeli vagy térbeli mozgásokat végezhet. A mi általunk elemzett konkrét mechanizmusok síkban fognak elmozdulni, ezért ezzel az esettel foglalkozunk részletesebben.

A csuklós szerkezet szabadságfoka (s) és a kényszerekkel (külső és belső kényszer) lekötött szabadságfokok (n_k) száma alapján a szerkezet lehet:

- statikailag határozott: $s = n_k$ (külső erők hatására nyugalomban van)
- statikailag határozatlan: $n_k > s$ (nyugalomban van, de statikailag túlhatározott)
- mozgékony (labilis) $s > n_k$ (terhelés hatására előírt irányú mozgást végez)


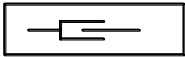




A mechanizmusok (mozgékony szerkezet) szabadságfokának meghatározásához, tervezéséhez ismerni kell a beépített külső és belső kényszerek által lekötött szabadságfokok számát (ismeretlen erőkomponensek + nyomatékok) ezért ezek jellemző típusait sorra vesszük.

A rudakból felépülő mechanizmusok rúdjai síkbeli esetben egyenként 3 egyenletet biztosítanak, így a mechanizmus szabadságfokának a száma: rudak száma \times 3, mínusz a külső és belső kényszerek által lekötött szabadságfokok száma.

Belső kényszerek

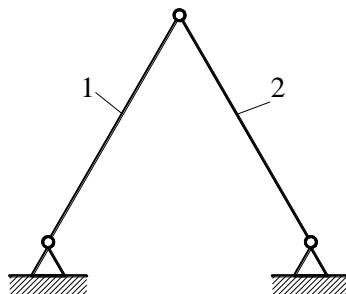
A csuklós mechanizmus rúdjai akár gömbcsuklóval, akár csapos csuklóval kapcsolódnak egymáshoz, síkbeli esetben 2 egyenletet (ismeretlen) biztosítanak. Ha több rúd is kapcsolódik ugyanahhoz a csuklóponthoz, akkor a csuklók száma = rudak száma - 1.

Külső kényszerek

	síkban	térben
- görgő 	1 (n)	1 (n)
- csapos vezeték 	2 (x, M_k)	5 ($x, y, M_{h_x}, M_{h_y}, M_{h_z}$)
- gömbcsukló 	2 (x, y)	3 (x, y, z)
- csapos csukló 	2 (x, y)	3 (x, y, M_h)
- befogás 	3 (x, y, M_h)	6 ($x, y, z, M_{h_x}, M_{h_y}, M_{h_z}$)
- egy rudas megtámasztás 	1 (n)	1 (n)

Elemezzük a három és öt csuklós statikailag határozott szerkezeteket:

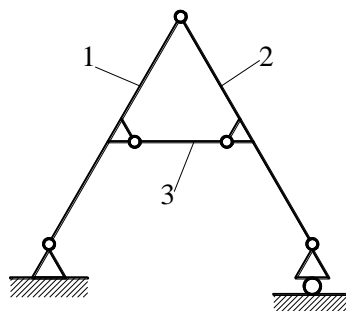
Háromcsuklós szerkezet



6.21 ábra: Háromcsuklós mechanizmus

$$E = 2 \times 3 = 6, \quad I = 2 + 2 + 2 = 6, \quad s = 0$$

Ötcsuklós szerkezet



6.22 ábra: Ötcsuklós mechanizmus

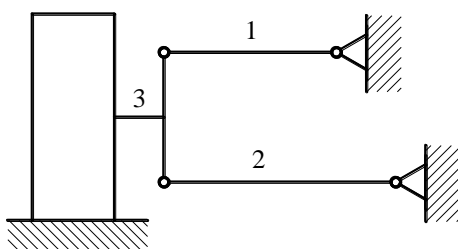
$$E = 3 \times 3 = 9, \quad I = 2 + 2 + 2 + 2 + 1 = 9, \quad s = 0$$

Vizsgáljuk meg egy gépjármű futómű felfüggesztés (mechanizmus) alkatrészei milyen kényszerekkel kapcsolódnak egymáshoz.

- lengőkar: szilent blokkal (csapos csukló) kapcsolódik a karosszériához, ezért síkbeli mechanizmusnak számít, tehát a bekötési pont 2 szabadságfokot köt le ($I = 2$).
- alsó-felső talpas csukló: a lengőkart és a tengelycsontot csuklósan (gömbcsukló) köti össze, mely síkbeli mechanizmus esetén a bekötési pont 2 szabadságfokot köt le ($I = 2$) és lehetővé teszi a kormányzott kerék esetén a tengelycsont elfordulását a talpas csuklók által meghatározott tengely körül.
- rúdfej: a kormányművet és a tengelycsont irányítókarját köti össze csuklósan (gömbcsukló).
- toronycsapágó: a McPherson felfüggesztést köti be a rugótoronyba gumiágyon keresztül (gömbcsukló), mely lehetővé teszi a kormányzott kerekek elfordulását. Síkbeli mechanizmus esetén a bekötési pont 2 szabadságfokot köt le ($I = 2$).
- a McPherson felfüggesztés lengéscsillapítója (csapos vezető): Síkbeli mechanizmus esetén 2 szabadságfokot köt le ($I = 2$).

Elemezzük a következő független kerékfelfüggesztéseket:

Trapéz lengőkaros független kerékfelfüggesztés

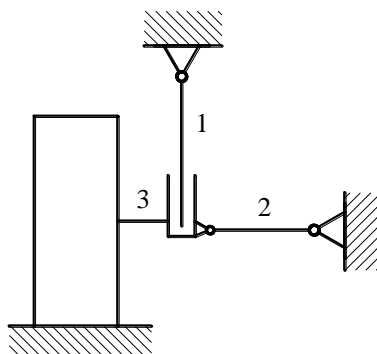


6.23 ábra: Trapéz lengőkaros független kerékfelfüggesztés

$$E = 3 \times 3 = 9, \quad I = 2 + 2 + 2 + 2 = 8, \quad s = 1$$

A lengőkar kerékcsont kapcsolat nem kormányzott hátsó futómű esetén silentblokk (csapos csukló), kormányzott kerék esetén talpas csukló (gömbcsukló), melyet egyes típusoknál függő csapszeggel és silentblokkos lengőkar kapcsolattal váltanak ki.

McPherson független kerékfelfüggesztés



6.24 ábra: McPherson független kerékfelfüggesztés



$$E = 3 \times 3 = 9, \quad I = 2 + 2 + 2 + 2 = 8, \quad s = 1$$

A lengőkar és kerékagy összekötésére kormányzott kereke esetén talpas csuklót (gömbcsukló) alkalmazunk.

Az elemzett felfüggesztések tehát egy szabadságfokúak, melyek nyugalmi helyzetét a mechanizmusra ható külső erők biztosítják (talaj-gumiabroncs támasztóerő; rugó-lengőkar támasztóerő).

7. Dinamikai modellezés

Tervezői szándéktól függően egy hajtásláncot vagy rezonancia mentes fordulatszám tartományban kívánjuk üzemeltetni, vagy éppen ellenkezőleg, rezonancia közeli tartományban. Bármelyik eset is fordul elő, ismernünk kell a hajtáslánc saját frekvenciáit, melyeket vagy el kell kerülnünk, vagy addig hangoljuk a hajtásláncot, míg a sajátfrekvenciák és a gerjesztő frekvenciák egymás közelébe esnek.

A hajtáslánc dinamikai modellezése a mozgásegyenleten alapul, mely a rendszer energia egyensúlyi egyenletéből írható fel.

A hajtáslánc mozgásegyenletei

A hajtáselemekből felépített hajtásláncok különböző irányú rezgőmozgást végezhetnek. Ezek lehetnek torziós, hajlító és longitudinális rezgések. Mivel a gyakorlatban a hajtásláncot ért gerjesztések nem okoznak longitudinális rezonanciát, ennek vizsgálatától eltekintünk. A torziós rezgések leírására a koncentrált paraméterű rugómodellt, míg a hajlító rezgések leírására a kontinuum modellt alkalmazzuk.

A koncentrált paraméterű rugómodell a mozgásegyenlet felírására

A hajtáslánc elemei terhelés hatására (mellyel a rendszer energiaszintje növekszik) kisebb, nagyobb rugalmas deformációt szenvednek. Rugalmas deformációval potenciális energia tárolódik az alakrészekben, mely az anyag, ill. a szerkezet belső csillapításának mértékétől függően kirugózáskor ismét mozgási energiává alakul. A deformált elem kirugózása nem egy ütemben megy végbe, hanem annak tehetetlensége miatt, újabb be és kirugózást végez mind addig, amíg a rugalmas deformáció formájában tárolt energiát ki nem vonjuk a rendszerből. Anyag és szerkezet csillapítás, valamint légellenállás nélkül tehát a rezgő rendszer a saját frekvenciájával és állandó amplitúdóval rezegne. A csillapítások miatt a



rezgés amplitúdója folyamatosan csökken, mindaddig, míg az elemben tárolt energia teljes mértékben hővé nem alakul (ill. a levegő részecskék mozgási energiájává).

Ha a rezgő rendszert a saját frekvencia ütemében éri az erőhatás (gerjesztés), egyre növekvő amplitúdóval fog rezegni és egyre nagyobb potenciális energia tárolódik az adott elemben deformációs munka formájában mindaddig, amíg ez akkora igénybevételt okoz, mely az alkatrész törését eredményezheti. A rezgőrendszer energiaegyenletének felírásához a hajtásláncot rugókkal és haladó, ill. forgó mozgást végző tömegekkel modellezzük.

Az „n” szabadságfokú mechanikai rendszer térbeli helyzete n darab egymástól független és csak az időtől függő paraméterrel határozható meg [18]. Ezek a q_1, q_2, \dots, q_n általános koordináták. Az általános koordináták nem feltétlenül egyeznek meg a rendszer tömegeinek helyzetét meghatározó geometriai koordinátákkal. A geometriai koordináták azonban nem függhetnek az általános koordináták időszerinti deriváltjától:

$$x_i = \dot{x}_i(q_1, q_2, \dots, q_n) \quad (7.1)$$

A rendszer mozgási energiája

Ha a rendszer tömegei haladó és forgó mozgást végeznek és a súlypontjukon átmenő x, y, z tengely tehetetlenségi főtengely, akkor az i-edik elem mozgási energiája:

$$E_i = \frac{1}{2} m_i (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2) + \frac{1}{2} (Q_{i1} \dot{\phi}_{ix}^2 + Q_{i2} \dot{\phi}_{iy}^2 + Q_{i3} \dot{\phi}_{iz}^2) \quad (7.2)$$

ahol m_i a tömeg, Q_{i1}, Q_{i2}, Q_{i3} a három tehetetlenségi nyomaték nagysága.

Ennek megfelelően az „n” tömegeből álló rendszer mozgási energiája:

$$E = \sum_{i=1}^n E_i = E(q_1, q_2, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_3) \quad (7.3)$$

A rendszer potenciális energiája

A rezgőrendszer potenciális energiája akkor változik, ha elemei a gravitációs erő ellenében elmozdulnak, ill. ha elemeiben potenciális energiát tárolunk rugalmas deformációs munka formájában. Mivel az elmozdulások az általános koordináták függvényei, a rendszer potenciális energiájának pillanatnyi értéke:

$$U = \sum U_i = U(q_1, q_2, \dots, q_n) \quad (7.4)$$

A gerjesztések által végzett munka

A rendszer egyes tömegeire külső terhelések (erők, nyomatékok) hatnak, melyek munkát végeznek. Ennek értéke, az erő és az erő irányába eső elmozdulás, ill. nyomaték és a szögelfordulás szorzata. (A reakcióerők nem végeznek munkát, mert támadáspontjuk nem mozdul el.)

A külső erők, nyomatékok (gerjesztések) által végzett munka összege $t = 0$ időtől számítva: „L”.

A csillapítások által végzett munka

A rendszerbe épített csillapítók és az alkatrészek között ébredő súrlódás energiát vonnak el a rendszerből.

A csillapítások által végzett munka összege $t = 0$ időtől számítva: „W”.



A rendszer energiája t időpillanatban, ha $t = 0$ pillanatban az energiája: E_0 és U_0 :

$$E + U = E_0 + U_0 - W + L, \text{ melynek idő szerinti deriváltja:} \quad (7.5)$$

$$\frac{dE}{dt} + \frac{dU}{dt} + \frac{dW}{dt} = \frac{dL}{dt}, \text{ ahol} \quad (7.6)$$

$$\frac{dU}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial U}{\partial q_i} \dot{q}_i \quad (7.7)$$

$$\frac{dW}{dt} = \sum_{i=1}^n P_i \dot{q}_i, \text{ ahol } P_i : \text{csillapító erő} \quad (7.8)$$

$$P_i = \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_i}, \text{ ahol } D: \text{disszipáció függvény}$$

$$\frac{dW}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i \quad (7.9)$$

$$\frac{dL}{dt} = \sum_{i=1}^n Q_i \dot{q}_i, \text{ ahol } Q_i : \text{általános erőkomponens} \quad (7.10)$$

$$\frac{dE}{dt} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial E}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i \right) - \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial E}{\partial q_i} \dot{q}_i \right) \quad (7.11)$$

Mint látható, az energiaegyenlet minden tagja függ az elmozdulás sebességétől, így ha $\dot{q}_i \neq 0$ akkor visszahelyettesítés után kapjuk a Lagrange-féle másodfajú mozgásegyenlet általános alakját:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial E}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial E}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_i} = Q_i \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (7.12)$$

Gerjesztés és csillapítás mentes esetben a másodfajú mozgásegyenlet ($Q_i = 0$ és $D = 0$):

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial E}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial E}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i} = 0 \quad (7.13)$$

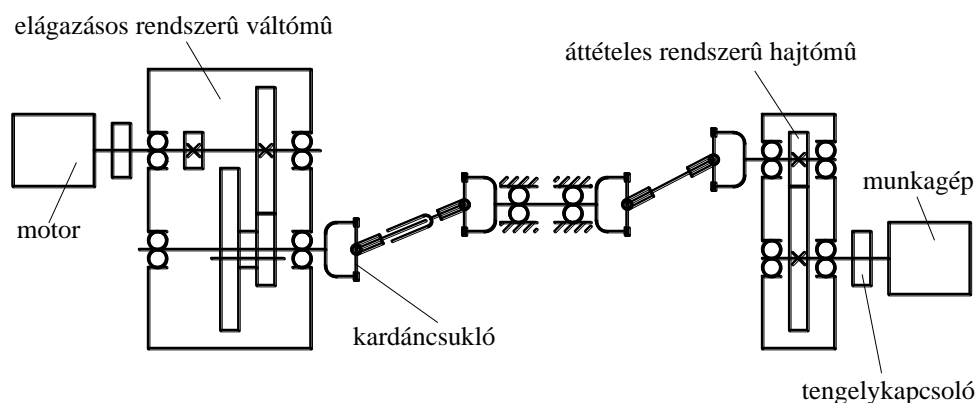
7.1. Torziós lengések mozgásegyenlete

Egy általános hajtáselrendezésű csuklóstengely-hajtás a következő egységekből épül fel (7.1 ábra):

- hajtógép
- hajtóművek
- tengelykapcsolók
- megfelelő módon ágyazott csuklóstengelyek
- munkagép

Az általános hajtáselrendezés alatt azt értjük, hogy a hajtáslánc nem csak láncszerűen kialakított hajtásrészt tartalmaz, mint pl. a 7.1 ábrán a kardántengely, hanem áttételes, ill. elágazásos rendszerű részeket, hajtóműveket is. Áttételes rendszer esetén az egymással kapcsolatban lévő elemek merev kapcsolata miatt (pl.: kapcsolódó fogaskerekek) ezek

mozgásának leírására egy általános koordináta szükséges. Elágazásos rendszer esetén a hajtáslánc teljesítményfolyama elágazik. Ez történhet úgy is, hogy nem minden ágban van teljesítmény átvitel, ennek ellenére az ágak hatással vannak egymásra az alkatrészek tehetetlensége és a rendszer rugalmassága miatt.



7.1 ábra: Általános kardánhajtás elrendezés vázlata

A hajtáslánc ágyazása alatt nem csak a tengelyek csapágyazását értjük, hanem a hajtóművek, a munkagép, ill. a hajtó motor rögzítési módját pl. az alapzathoz, mely adott merevséggel jellemezhető. Az ágyazások merevségének meghatározásakor elemeznünk kell az ágyazási elemek kapcsolatát (soros, párhuzamos).

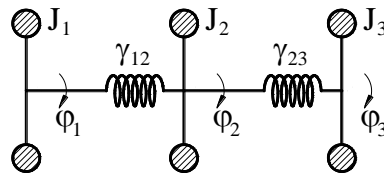
Például mobil járművek belsőégésű motorjai motortartó bakokon keresztül kapcsolódnak a kocsiszekrényhez, ill. az alvázhhoz. A kocsiszekrény viszont rugókon keresztül kapcsolódik a futóműhöz, az pedig gumiabroncsokon keresztül érintkezik a talajjal. Ezért kell az egész rendszer felépítésével, működésével tisztában lenni.

Az általános rendszerű hajtáslánc torziós mozgásegyenlet felírásának módját az egyes hajtáslánc részek mozgásegyenletének elemzésén keresztül ismertetjük.

A koncentrált paraméterű rugómodell tömeg és tehetetlenségi nyomaték nélküli rugókból és tömeggel és tehetetlenségi nyomatékkal rendelkező tárcsákból épül fel. Modellezésnél a hajtáslánc összes elemének ismernünk kell a geometriai és mechanikai paramétereit valamint üzemjellemzőit. A tengelyek hajlító, ill. torziós rugómerevségét (rugóállandóját) vagy méréssel, vagy számítással határozzuk meg a jellemző paramétereikből. A tengelyekre szerelt, adott tehetetlenségi nyomatékkal rendelkező elemeket (tárcsák, fogaskerekek, tengelykapcsolók, ..., stb.) tárcsákkal modellezzük, melyek tehetetlenségi nyomatékába be kell számítani a tengelyek tehetetlenségi nyomatékát, ill. ajánlások alapján azok meghatározott részét. A szögkiegyenlítő tengelykapcsolók (pl. kardáncsukló) üzemjellemzőit, amennyiben szögsebesség ingadozással viszik át a hajtást, átviteli függvénnyel vesszük figyelembe, mely kifejezi a csuklóval összekötött tengelyek szögelfordulás, szögsebesség, ill. szöggyorsulás viszonyát.

7.1.1. Elemi láncszerű modell mozgásegyenlete

A mozgásegyenlet jellemzőit egy három szabadságfokú torziós rezgőrendszer mozgásegyenletének felírásából határozzuk meg és általánosítjuk.



7.2 ábra: Három szabadságfokú torziós rezgőrendszer

A q_1, q_2, q_3 általános koordinátáknak a tárcsák szögelfordulását választottuk.

A rendszer mozgásegyenletét a Lagrange másodfajú mozgásegyenletből vezetjük le [19]:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial E}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial E}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i} = 0$$

A tárcsák mozgási energiája:

$$E = \frac{1}{2} J_1 \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} J_2 \dot{q}_2^2 + \frac{1}{2} J_3 \dot{q}_3^2 \quad (7.14)$$

A rugókban tárolt potenciális energia:

$$U = \frac{(q_1 - q_2)^2}{2\gamma_{12}} + \frac{(q_2 - q_3)^2}{2\gamma_{23}} \quad (7.15)$$

A torziós rezgéseket leíró egyenletrendszer:

$$J_1 \ddot{q}_1 + \frac{q_1 - q_2}{\gamma_{12}} = 0 \quad (7.16)$$

$$J_2 \ddot{q}_2 + \frac{q_2 - q_1}{\gamma_{12}} + \frac{q_2 - q_3}{\gamma_{23}} = 0 \quad (7.17)$$

$$J_3 \ddot{q}_3 + \frac{q_3 - q_2}{\gamma_{23}} = 0 \quad (7.18)$$

A mozgásegyenlet mátrixos alakja:

$$\underline{\underline{m}} \ddot{\underline{q}} + \underline{\underline{c}} \underline{q} = \underline{0} \quad (7.19)$$

ahol: $\underline{\underline{m}}$ tömegmátrix

$\underline{\underline{c}}$ rugómátrix

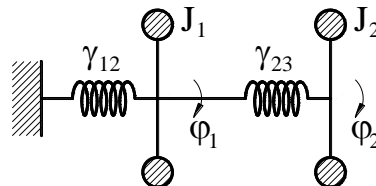
$$\underline{\underline{m}} = \begin{bmatrix} J_1 & 0 & 0 \\ 0 & J_2 & 0 \\ 0 & 0 & J_3 \end{bmatrix} \quad \underline{\underline{c}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\gamma_{12}} & -\frac{1}{\gamma_{12}} & 0 \\ -\frac{1}{\gamma_{12}} & \frac{1}{\gamma_{12}} + \frac{1}{\gamma_{23}} & -\frac{1}{\gamma_{23}} \\ 0 & -\frac{1}{\gamma_{23}} & \frac{1}{\gamma_{23}} \end{bmatrix} \quad \underline{q} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} \quad \underline{\underline{\ddot{q}}} = \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \\ \ddot{q}_3 \end{bmatrix}$$

A mátrixok felépítéséből kiolvasható az elemi láncszerű modell általános jellemzői:

- a tömegmátrix diagonális (csak a főátlóban tartalmaz 0-tól különböző elemeket)

- a rugómátrix tridiagonális (csak a főátlóban és az alatta, ill. a felette lévő átlóvonalban tartalmaz 0-tól különböző elemeket) és soronként a sorelemek összege 0.

Falhoz kötött elemi láncszerű rendszer



7.3 ábra: Falhoz kötött, kétszabadságfokú torziós rezgőrendszer

Az energia egyenletek:

$$E = \frac{1}{2} J_1 \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} J_2 \dot{q}_2^2 \quad (7.20)$$

$$U = \frac{q_1^2}{2\gamma_{12}} + \frac{(q_1 - q_2)^2}{\gamma_{23}} = 0 \quad (7.21)$$

A mozgásegyenlet rendszer:

$$J_1 \ddot{q}_1 + \frac{q_1}{\gamma_{12}} + \frac{q_1 - q_2}{\gamma_{23}} = 0 \quad (7.22)$$

$$J_2 \ddot{q}_2 + \frac{q_2 - q_1}{\gamma_{23}} = 0 \quad (7.23)$$

A mozgásegyenlet mátrixos alakja:

$$\underline{\underline{m}} \ddot{\underline{q}} + \underline{\underline{c}} \underline{q} = \underline{0}$$

$$\underline{\underline{m}} = \begin{bmatrix} J_1 & 0 \\ 0 & J_2 \end{bmatrix} \quad \underline{\underline{c}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\gamma_{12}} + \frac{1}{\gamma_{23}} & -\frac{1}{\gamma_{23}} \\ -\frac{1}{\gamma_{23}} & \frac{1}{\gamma_{23}} \end{bmatrix}$$

A rugómátrixból kiolvasható, hogy a falhoz kötés helyét jelző sorban a sorelemek összege nem 0. Mivel a modell elemi láncszerű, a tömegmátrix továbbra is diagonális és a rugómátrix is tridiagonális.

7.1.2. Általános elrendezésű hajtáslánc transzformálása

A mozgásegyenlet felírásának elsődleges célja, a hajtáslánc sajátfrekvenciáinak meghatározása. A mozgásegyenlet megoldhatóság vizsgálatából levezethető frekvencia egyenletből számíthatók ki a rezgő rendszer sajátfrekvenciái. Az általános elrendezésű hajtáslánc mozgásegyenletéből ugyan meghatározhatóak a sajátfrekvenciák, de ehhez egyedi megoldások szükségesek.

Igazolható, hogy egy általános elrendezésű hajtáslánc sajátfrekvenciái és annak elemi láncszerű modelljének sajátfrekvenciái megegyeznek. Az elemi láncszerű modell



sajátfrekvenciái azonos számítási eljárással mindig meghatározhatóak, ezért célszerű az általános elrendezésű hajtásláncot elemei láncszerűvé transzformálni, és annak meghatározni a sajátfrekvenciáit.

A transzformálás célja tehát, hogy egységes alakra hozzuk a mozgásegyenleteket (láncszerű modell), így a további számítások formalizálhatóak és számítógépen programozhatóvá válnak.

Az elágazásos rendszerű, két lépésben transzformálható elemi láncszerű modellé:

1. elágazásos rendszer transzformálása áttételessé
2. áttételes rendszer transzformálása elemi láncszerűvé

7.1.2.1. Az áttételes rendszer transzformálása elemi láncszerű modellé

Az áttételes rendszer mozgásegyenlete:

$$\underline{\underline{M}} \ddot{\underline{p}} + \underline{\underline{C}} \dot{\underline{p}} = \underline{\underline{0}} \quad (7.24)$$

ahol: $\underline{\underline{M}}$ diagonális tömegmátrix

$\underline{\underline{C}}$ tridiagonális rugómátrix, a sorelemek összege legalább két sorban nem 0

\underline{p} az áttételes rendszer általános koordinátája

Ez a mátrixegyenlet az $\underline{\underline{S}}$ transzformáló mátrix alkalmazásával átalakítható [19]:

$$\underline{\underline{s}} = \underline{\underline{S}}^* \underline{\underline{M}} \underline{\underline{S}} \quad \underline{\underline{c}} = \underline{\underline{S}}^* \underline{\underline{C}} \underline{\underline{S}} \quad \underline{\underline{q}} = \underline{\underline{S}} \underline{\underline{p}} \quad (7.25), (7.26), (7.27)$$

Az eredményül kapott mátrixegyenlet: $\underline{\underline{m}} \ddot{\underline{\underline{q}}} + \underline{\underline{c}} \dot{\underline{\underline{q}}} = \underline{\underline{0}}$ már a láncszerű rendszerre érvényes.

A számítás menetét egy 3 szabadságfokú rendszeren mutatjuk be (lásd 7.1.1 pont).

Az $\underline{\underline{S}}$ mátrix elemei abból a feltételből határozhatók meg, hogy a $\underline{\underline{c}} = \underline{\underline{S}}^* \underline{\underline{C}} \underline{\underline{S}}$ mátrix soreleminak összege 0 kell, hogy legyen.

$$\underline{\underline{c}} = \begin{bmatrix} S_1 & S_2 & S_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ 0 & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{bmatrix}$$

Az $\underline{\underline{S}}$ mátrix S_1 elemét tetszőlegesen felvehetjük. Célszerűségi okokból $S_1 := 1$.

A mátrixszorzással felírható $\underline{\underline{c}}$ mátrix első sor elemeinek összege:

$$S_1 C_{11} S_1 + S_1 C_{12} S_2 = 0, \text{ melyből } S_2 = \frac{C_{11}}{C_{12}}$$

a második sor elemeinek összege:

$$S_2 C_{21} S_1 + S_2 C_{22} S_2 + S_2 C_{23} S_3 = 0, \text{ melyből } S_3 \text{ kifejezhető.}$$

A számítás analógiáját könnyű felismerni. Minden további sor kifejtésével csupán egy újabb S ismeretlen elem jelenik meg, mely könnyen kifejezhető, ezáltal tetszőleges szabadságfokú rendszerrel meghatározható a transzformációs mátrix.

7.1.2.2. Az elágazásos rendszer transzformálása áttételes modellé

Az elágazásos rendszer mozgásegyenlete

$$\underline{\underline{N}} \ddot{\underline{\underline{r}}} + \underline{\underline{Q}} \underline{\underline{r}} = \underline{\underline{0}} \quad (7.28)$$

ahol: $\underline{\underline{N}}$ tömegmátrix

$\underline{\underline{Q}}$ nem tridiagonális rugómátrix

$\underline{\underline{r}}$ az elágazásos rendszer általános koordinátája

Az elágazásos rendszerre érvényes mátrixegyenlet a $\underline{\underline{T}}$ -transzformáló mátrix alkalmazásával alakítható át [19]:

$$\underline{\underline{M}} = \underline{\underline{T}}^* \underline{\underline{N}} \underline{\underline{T}} \quad \underline{\underline{C}} = \underline{\underline{T}}^* \underline{\underline{Q}} \underline{\underline{T}} \quad \underline{\underline{p}} = \underline{\underline{T}} \underline{\underline{r}} \quad (7.29), (7.30), (7.31)$$

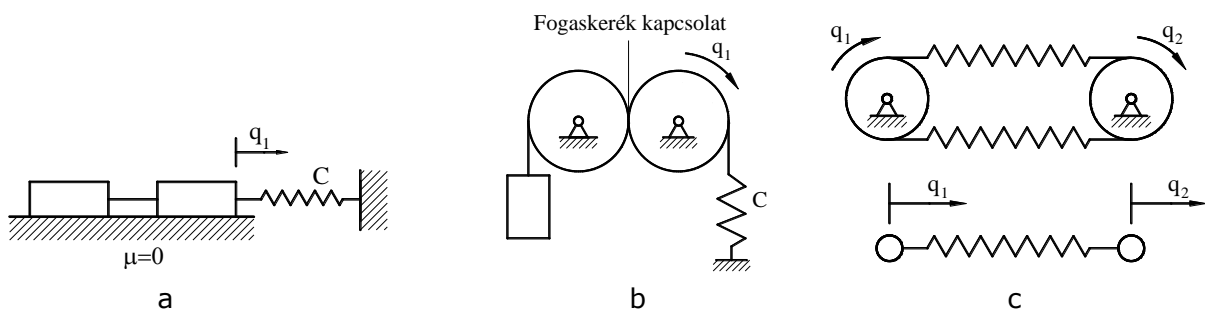
A $\underline{\underline{T}}$ mátrixot abból a feltételből határozzuk meg, hogy a rugómátrixnak tridiagonálisnak kell lennie. Az eredményül kapott mátrixegyenlet: $\underline{\underline{M}} \ddot{\underline{\underline{p}}} + \underline{\underline{C}} \underline{\underline{p}} = \underline{\underline{0}}$ már áttételes rendszer, mely az $\underline{\underline{S}}$ mátrixszal transzformálható tovább láncszerű modellé.

A $\underline{\underline{T}}$ mátrix elemeinek meghatározása rendkívül bonyolult és egyedi megoldásokat igényel, ezért ennek tárgyalásától eltekintünk.

Amennyiben nem a motor és a hajtómű dinamikai vizsgálata a cél, a hajtáslánc egyszerűsített modellezésénél motor és a hajtómű adott tömegű és tehetetlenségi nyomatékú tárcsával helyettesíthető.

7.1.3. Példák mozgásegyenlet felírására

Egy hajtáslánc mozgásegyenletének levezetésekor először azt kell tisztázni, hogy a rezgőmozgás hány, egymástól független paraméterrel írható le, tehát hány szabadságfokú a rendszer.



7.4 ábra: Különböző szabadságfokú rendszerek

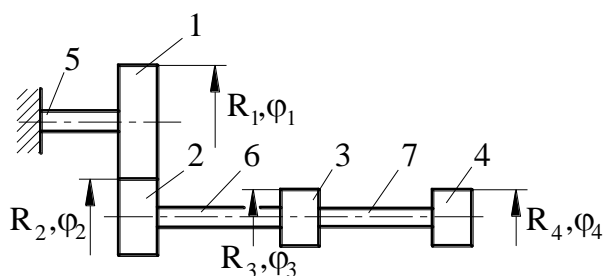
A 7.4.a ábrán két, mereven összekapcsolt test, egy rugón keresztül van a falhoz kötve. Bár a két test adott esetben két külön alkatrészt jelképez, a merev kapcsolat miatt egy testnek kell tekintenünk, így egy szabadságfokú a rezgőrendszer.

A 7.4.b ábrán két, egymással kapcsolatban lévő tárcsa (fogaskerékpár, dörzskerékpár) látható, melyek között merev alak, ill. erőzáró kapcsolat van. A két tárcsa szöghelyzete

egymással összefügg. Mivel itt ténylegesen két tárcsáról van szó, az egyszabadságfokú rendszer áttételes rendszerű.

A 7.4.c ábrán látható két tárcsa rugalmas vonóelemeken keresztül kapcsolódik egymással (szíjhajtás, lánchajtás). A tárcsák helyzetének leírására két általános koordináta szükséges, ezért a rendszer két szabadságfokú.

7.1.3.1. Példa áttételes rendszer mozgásegyenletének felírására



7.5 ábra: Áttételes rendszer

Az előbbieknél megfelelően a 7.5 ábrán egy három szabadságfokú áttételes rezgőrendszer látható. A rudakat (tengelyeket) tömeg és tehetetlenségi nyomaték nélküli, adott torziós rugóállandójú rugókkal modellezzük, ezért ezek tehetetlenségi nyomatékát a szomszédos tárcsák tehetetlenségi nyomatékánál vesszük figyelembe. Válasszuk az 1-es, 3-as és a 4-es tárcsa szögelfordulását általános koordinátának.

$$p_1 = \varphi_1, \quad p_2 = \varphi_3, \quad p_3 = \varphi_4$$

A fogaskerék áttételnek köszönhetően:

$$R_1 \varphi_1 = R_2 \varphi_2$$

A tengelyek torziós rugóállandója:

$$c_5 = \frac{l_5}{I_{p_5} G}, \quad c_6 = \frac{l_6}{I_{p_6} G}, \quad c_7 = \frac{l_7}{I_{p_7} G}$$

A rezgő rendszer mozgási és potenciális energiája:

$$E = \frac{1}{2} J_1 \dot{p}_1^2 + \frac{1}{2} J_2 \left(\frac{R_1}{R_2} \dot{p}_1 \right)^2 + \frac{1}{2} J_3 \dot{p}_2^2 + \frac{1}{2} J_4 \dot{p}_3^2$$

$$U = \frac{p_1^2}{2c_5} + \frac{\left(p_2 - \frac{R_1}{R_2} p_1 \right)^2}{2c_6} + \frac{(p_3 - p_2)^2}{2c_7}$$

A mozgásegyenlet a Lagrange energia egyensúlyi egyenlet alapján $\left(\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E}{\partial \dot{p}} \right) + \frac{\partial U}{\partial p} = 0 \right)$:

$$\left(J_1 + \left(\frac{R_1}{R_2} \right)^2 J_2 \right) \ddot{p}_1 + \frac{p_1}{c_5} + \frac{\left(\frac{R_1}{R_2} \right)^2 p_1}{c_6} - \frac{R_1}{R_2} \frac{p_2}{c_6} = 0$$



$$J_3 \ddot{p}_2 + \frac{p_2}{c_6} - \frac{R_1}{R_2} \frac{p_1}{c_6} + \frac{p_2}{c_7} - \frac{p_3}{c_7} = 0$$

$$J_4 \ddot{p}_3 + \frac{p_3}{c_7} - \frac{p_2}{c_7} = 0$$

A mozgásegyenlet mátrixos alakja:

$$\underline{\underline{M}} \underline{\underline{\ddot{p}}} + \underline{\underline{C}} \underline{\underline{p}} = \underline{\underline{0}}, \text{ ahol}$$

$$\underline{\underline{M}} = \begin{bmatrix} J_1 + \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2 J_2 & 0 & 0 \\ 0 & J_3 & 0 \\ 0 & 0 & J_4 \end{bmatrix} \quad \underline{\underline{C}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{c_5} + \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2 \frac{1}{c_6} & -\frac{R_1}{R_2} \frac{1}{c_6} & 0 \\ -\frac{R_1}{R_2} \frac{1}{c_6} & \frac{1}{c_6} + \frac{1}{c_7} & -\frac{1}{c_7} \\ 0 & -\frac{1}{c_7} & \frac{1}{c_7} \end{bmatrix}$$

A levezetett áttételes rendszer mozgásegyenletének $\underline{\underline{M}}$ tömegmátrixa, mint látható diagonális, $\underline{\underline{C}}$ rugómátrixa pedig tridiagonális, ugyan úgy, mint egy elemi láncszerű rendszer esetén, viszont a tömegmátrix két sorában a so-relemek összege nem 0.

A mozgásegyenlet ezt követően az $\underline{\underline{S}}$ mátrixszal transzformálható elemi láncszerű modellé.

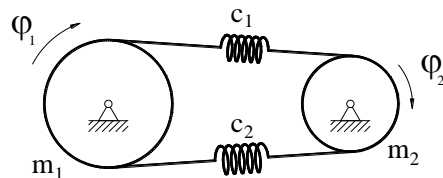
A $\underline{\underline{S}}$ transzformáló mátrix elemei a levezetés mellőzésével:

$$S_1 := 1$$

$$S_2 = -\frac{C_{11}}{C_{12}} = \frac{\frac{1}{c_5} + \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2 \frac{1}{c_6}}{\frac{R_1}{R_2} \frac{1}{c_6}}$$

$$S_3 = \frac{-C_{21} - S_2 C_{22}}{C_{23}} = \frac{\frac{R_1}{R_2} \frac{1}{c_6} - \frac{1}{c_5} + \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2 \frac{1}{c_6} \left(\frac{1}{c_6} + \frac{1}{c_7}\right)}{-\frac{1}{c_7}}$$

7.1.3.2. Példa szalaghajtás mozgásegyenletének felírására



7.6 ábra: Szalaghajtás

A ábrán látható szíjhajtást (lánchajtást) modellező rendszer az előbbiek alapján tehát két szabadságfokú. A szíjágakat eltérő rugóállandójú rugókkal modelleztük.

A két szíjágat jelképező rugók eredő rugóállandója:

$$\left(\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} \right) = \frac{1}{c_{12}}$$

A rezgő rendszer mozgási és potenciális energiája:

$$E = \frac{1}{4} m_1 R_1^2 \dot{p}_1^2 + \frac{1}{4} m_2 R_2^2 \dot{p}_2^2$$

$$U = \frac{1}{2c_1} (R_1 p_1 - R_2 p_2)^2 + \frac{1}{2c_2} (R_1 p_1 - R_2 p_2)^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} \right) (R_1 p_1 - R_2 p_2)^2$$

A mozgásegyenlet a Lagrange energia egyensúlyi egyenlet alapján ($\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E}{\partial \dot{p}} \right) + \frac{\partial U}{\partial p} = 0$):

$$\frac{1}{2} m_1 R_1^2 \ddot{p}_1 + \frac{1}{c_{12}} (R_1 p_1 - R_2 p_2) R_1 = 0$$

$$\frac{1}{2} m_2 R_2^2 \ddot{p}_2 + \frac{1}{c_{12}} (R_2 p_2 - R_1 p_1) R_2 = 0$$

A mozgásegyenlet mátrixos alakja:

$$\underline{\underline{M}} \ddot{\underline{p}} + \underline{\underline{C}} \underline{p} = \underline{\underline{0}}$$

$$\underline{\underline{M}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} m_1 R_1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} m_2 R_2 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{C}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{c_{12}} R_1 & -\frac{1}{c_{12}} R_2 \\ -\frac{1}{c_{12}} R_1 & \frac{1}{c_{12}} R_2 \end{bmatrix}$$

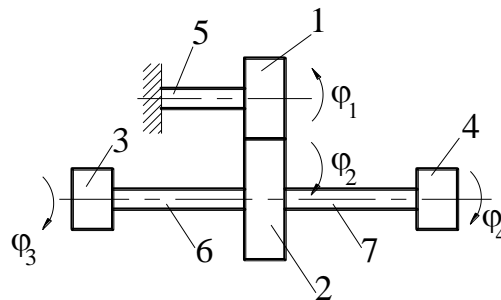
A levezetett mozgásegyenlet $\underline{\underline{M}}$ tömegmátrixa, mint látható diagonális, $\underline{\underline{C}}$ rugómátrixa pedig tridiagonális. Mivel a rugómátrix sor elemeinek összege két sorban nem 0, ezért a rezgőrendszer nem elemi láncszerű. A mozgásegyenlet ezt követően az $\underline{\underline{S}}$ mátrixszal transzformálható elemi láncszerű modellé.

A $\underline{\underline{S}}$ transzformáló mátrix elemei a levezetés mellőzésével:

$$S_1 := 1$$

$$S_2 = -\frac{C_{11}}{C_{12}} = \frac{\frac{1}{c_{12}} R_1}{\frac{1}{c_{12}} R_2}$$

7.1.3.3. Példa elágazásos rendszer mozgásegyenletének felírására



7.7 ábra: Elágazásos rendszer

A 7.7 ábrán látható elágazásos rendszer az elágazási pontban lévő fogaskerék kapcsolat miatt három szabadságfokú.

A fogaskerék áttételnek köszönhetően:

$$R_1 \varphi_1 = R_2 \varphi_2$$

A tengelyek torziós rugóállandója:

$$c_5 = \frac{l_5}{I_{p_5} G} \quad c_6 = \frac{l_6}{I_{p_6} G} \quad c_7 = \frac{l_7}{I_{p_7} G}$$

Az általános koordináták:

$$\varphi_1 \equiv r_1 \quad \varphi_3 \equiv r_2 \quad \varphi_4 \equiv r_3$$

A rezgő rendszer mozgási és potenciális energiája:

$$E = \frac{1}{2} J_1 \left(\frac{R_2}{R_1} \right)^2 \dot{r}_1^2 + \frac{1}{2} J_2 \dot{r}_1^2 + \frac{1}{2} J_3 \dot{r}_2^2 + \frac{1}{2} J_4 \dot{r}_3^2$$

$$U = \left(\frac{R_2}{R_1} \right)^2 \frac{1}{2c_5} r_1^2 + \frac{1}{2c_6} (r_1 - r_2)^2 + \frac{1}{2c_7} (r_1 - r_3)^2$$

A mozgásegyenlet a Lagrange energia egyensúlyi egyenlet alapján $\left(\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E}{\partial \dot{p}} \right) + \frac{\partial U}{\partial p} = 0 \right)$:

$$\left(J_1 \left(\frac{R_2}{R_1} \right)^2 + J_2 \right) \ddot{r}_1 + \left(\frac{R_2}{R_1} \right)^2 \frac{1}{c_5} r_1 + \frac{1}{c_6} r_1 - \frac{1}{c_6} r_2 + \frac{1}{c_7} r_1 - \frac{1}{c_7} r_3 = 0 \quad (3.34)$$

$$J_3 \ddot{r}_2 + \frac{1}{c_6} r_2 - \frac{1}{c_6} r_1 = 0$$



$$J_4 \ddot{r}_3 + \frac{1}{c_7} r_3 - \frac{1}{c_7} r_1 = 0$$

A mozgásegyenlet mátrixos alakja:

$$\underline{\underline{N}} \ddot{\underline{r}} + \underline{\underline{Q}} \underline{r} = \underline{\underline{0}}$$

$$\underline{\underline{M}} = \begin{bmatrix} J_1 \left(\frac{R_2}{R_1} \right)^2 + J_2 & 0 & 0 \\ 0 & J_3 & 0 \\ 0 & 0 & J_4 \end{bmatrix} \quad \underline{\underline{C}} = \begin{bmatrix} \left(\frac{R_2}{R_1} \right)^2 \frac{1}{c_5} + \frac{1}{c_6} + \frac{1}{c_7} & -\frac{1}{c_6} & -\frac{1}{c_7} \\ -\frac{1}{c_6} & \frac{1}{c_6} & 0 \\ -\frac{1}{c_7} & 0 & \frac{1}{c_7} \end{bmatrix}$$

A levezetett mozgásegyenletének $\underline{\underline{M}}$ tömegmátrixa, mint látható diagonális, de a $\underline{\underline{C}}$ rugómátrixa már nem tridiagonális. Az elágazásos rendszer ebből a feltételből kiindulva transzformálható áttételes rendszerre, majd az áttételes rendszer elemi láncszerűvé. A transzformálást bonyolultsága miatt nem vezetjük le.

7.1.4. A torziós rezgőrendszer sajátfrekvenciáinak meghatározása

Az rezgőrendszer mozgásegyenlete elemi láncszerűvé transzformálás után:

$$\underline{\underline{m}} \ddot{\underline{q}} + \underline{\underline{c}} \underline{q} = \underline{\underline{0}}$$

A homogén egyenlet általános megoldását célszerű olyan függvényalakban keresni, melynek idő szerinti második deriváltja csak konstansban tér el az alapfüggvénytől. Ezáltal a mozgásegyenlet megoldása egyszerűbbé válik. Az egyszerűbb írásmód kedvéért célszerű komplex változós exponenciális függvényként felírni a megoldást.

$$\underline{\underline{q}} = \underline{\underline{y}} e^{i\alpha t} \quad (7.32)$$

ahol i : képzetes egység, és $i^2 = -1$

$$\underline{\underline{\ddot{q}}} = -\alpha^2 \underline{\underline{q}} = -\alpha^2 \underline{\underline{y}} e^{i\alpha t} \quad (7.33)$$

A $\underline{\underline{q}}$ és $\underline{\underline{\ddot{q}}}$ függvényeket visszahelyettesítve a mozgásegyenletbe, a következő egyenlethez jutunk:

$$\left(-\alpha^2 \underline{\underline{m}} + \underline{\underline{c}} \right) \underline{\underline{y}} = 0 \quad (7.34)$$

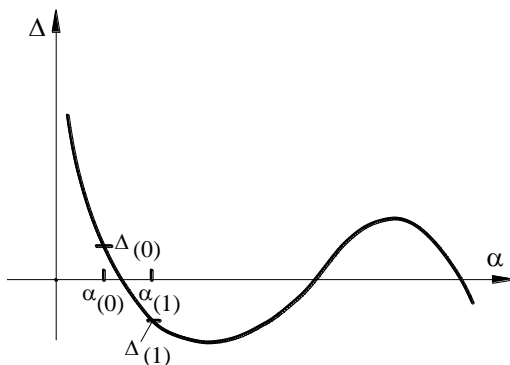
mely $\underline{\underline{y}}$ -ra nézve egy homogén lineáris egyenletrendszer, melynek triviálistól különböző megoldása csak akkor van, ha teljesül a következő egyenlet:

$$\det\left(-\alpha^2 \underline{\underline{m}} + \underline{\underline{c}}\right) = 0 \quad (7.35)$$

A fenti determináns kifejtésével kapjuk a frekvenciaegyenletet. Több szabadságfokú rendszer esetében (öt, vagy attól több) a frekvencia egyenlet gyökeinek számításához már nem állnak rendelkezésre megoldó képletek, ezért az α sajátfrekvenciákat nem közvetlenül számítjuk ki, hanem az úgynevezett maradék módszerrel határozzuk meg. Ennek lényege,



hogy az α értékét 0-tól kezdve, alkalmasan kis lépésközönként növelve helyettesítjük be a determinánsba, melynek értékét egy számítógépes programmal számítjuk ki. A kiszámított értékek előjel változása jelzi, ha két behelyettesített érték között a determinánsnak zérus helye van, melyhez tartozó frekvencia sajátfrekvencia [19].



7.8 ábra: Sajátfrekvenciák meghatározása maradék módszerrel

Határozzuk meg a 3 szabadságfokú torziós rezgőrendszer frekvenciaegyenletét szolgáltatató determinánst, a már levezetett mozgásegyenletből kiindulva, melynek $\underline{\underline{m}}$ és $\underline{\underline{c}}$ mátrixa (lásd 7.2 ábra):

$$\underline{\underline{m}} = \begin{bmatrix} J_1 & 0 & 0 \\ 0 & J_2 & 0 \\ 0 & 0 & J \end{bmatrix} \quad \underline{\underline{c}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\gamma_{12}} & -\frac{1}{\gamma_{12}} & 0 \\ -\frac{1}{\gamma_{12}} & \frac{1}{\gamma_{12}} + \frac{1}{\gamma_{23}} & -\frac{1}{\gamma_{23}} \\ 0 & -\frac{1}{\gamma_{23}} & \frac{1}{\gamma_{23}} \end{bmatrix}$$

Képezve a $\det(-\alpha^2 \underline{\underline{m}} + \underline{\underline{c}}) = 0$:

$$\begin{vmatrix} -\alpha^2 J_1 + \frac{1}{\gamma_{12}} & -\frac{1}{\gamma_{12}} & 0 \\ -\frac{1}{\gamma_{12}} & -\alpha^2 J_2 + \frac{1}{\gamma_{12}} + \frac{1}{\gamma_{23}} & -\frac{1}{\gamma_{23}} \\ 0 & -\frac{1}{\gamma_{23}} & -\alpha^2 J_3 + \frac{1}{\gamma_{23}} \end{vmatrix} = 0$$

A sajátfrekvenciák a determináns kifejtésével kiszámíthatóak, vagy a maradék módszerrel meghatározhatóak.

Amennyiben egy egyszabadságfokú, falhoz kötött rezgőrendszer sajátfrekvenciáit keressük (lásd 7.3 ábra), a fenti determináns a következő alakú fajú, melyből a sajátfrekvencia számításához a jól ismert összefüggéshez jutunk:

$$-\alpha^2 J_1 + \frac{1}{\gamma_{12}} = 0, \quad \alpha = \sqrt{\frac{1}{J_1 \gamma_{12}}}$$

7.1.5. Kardáncsuklót tartalmazó láncszerű hajtáslánc mozgásegyenlete

A hajtásláncba beépített kardáncsuklók szögkitérés esetén változó szögsebességgel viszik át a hajtást. A tengelyek, melyeket torziós rugókkal modellezünk, még egyenletes üzemi terhelés mellett is a szögelfordulás függvényében változó nagyságú deformációt szenvednek, ezáltal a rugóban tárolt energia is a szögelfordulás függvényében változik.

A kardáncsuklóval hajtott tengely mozgásjellemezői a hajtó tengely szögelfordulás és szögsebesség függvényében:

$$\varphi_{12} = \varphi_{11} + \delta_1 \sin 2\varphi_{11} \quad (7.36)$$

$$\omega_{12} = \omega_{11} (1 + 2\delta_1 \cos 2\varphi_{11}) \quad (7.37)$$

$$\varepsilon_{12} = -4\omega_{11}^2 \delta_1 \sin 2\varphi_{11} \quad (7.38)$$

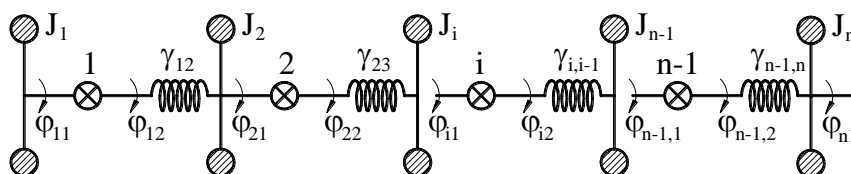
Az i -edik csukló átviteli tényezője:

$$\frac{\partial \varphi_{i2}}{\partial \varphi_{i1}} = 1 + 2\delta_i \cos 2\varphi_{i1} \quad (7.39)$$

$$\text{ahol: } \delta_i \cong \frac{\beta_i^2}{4} \quad (7.40)$$

φ_i az i -edik csukló szögelfordulása

β_i az i -edik csuklóval összekötött két tengely közötti szögkitérés



7.9 ábra: Kardánhajtás torziós rugómodellje

A már láncszerűvé transzformált modell mozgásegyenlete:

$$\begin{aligned} J_1 \ddot{\varphi}_{11} - \frac{1}{c_{12}} (\varphi_{21} - \varphi_{12}) \frac{\partial \varphi_{12}}{\partial \varphi_{11}} &= 0 \\ J_2 \ddot{\varphi}_{12} + \frac{1}{c_{12}} (\varphi_{21} - \varphi_{12}) - \frac{1}{c_{23}} (\varphi_{31} - \varphi_{22}) \frac{\partial \varphi_{22}}{\partial \varphi_{21}} &= 0 \\ \cdot & \\ \cdot & \\ J_n \ddot{\varphi}_{n1} + \frac{1}{c_{n-1,n}} (\varphi_{n,1} - \varphi_{n-1,2}) &= 0 \end{aligned} \quad (7.41)$$

Az egyenletrendszerben szereplő $(\varphi_{i+1,1} - \varphi_{i2})$ tagok, melyek a rugók deformációját fejezik ki, felírhatóak a kardáncsukló által összekötött tengelyek szögelfordulás különbségével.

$$\varphi_{i+1,1} - \varphi_{i2} = \varphi_{i+1,1} - \varphi_{i1} + \varphi_{i1} - \varphi_{i2}$$

Vezessük be a $\varphi_{i+1,1} - \varphi_{i1} = X_i$ ($i = 1, 2, \dots, n-1$) függvényt, mellyel a rugók deformációja:



$$\varphi_{i+1,1} - \varphi_{i2} = X_i - \delta_i \sin 2\varphi_{i1}$$

A kardáncsuklók átviteli függvényei és a rugó deformációk behelyettesítése, és a lehetséges összevonások elvégzése után az egyenletrendszer a következő alakra hozható:

$$\underline{\ddot{X}} + \underline{A}\underline{X} + \underline{B}\underline{X}\cos 2\varphi + \underline{C}\sin 2\varphi + \underline{D}\sin 2\varphi\cos 2\varphi = 0 \quad (7.42)$$

Az egyenletrendszer A, B, C, D együtthatóinak mátrixát levezetés nélkül ismertetjük [20].

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\gamma_{12}} \left(\frac{1}{J_1} + \frac{1}{J_2} \right) & -\frac{1}{\gamma_{23}J_2} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -\frac{1}{\gamma_{12}J_2} & \frac{1}{\gamma_{23}} \left(\frac{1}{J_2} + \frac{1}{J_3} \right) & -\frac{1}{\gamma_{34}J_3} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\gamma_{23}J_3} & \frac{1}{\gamma_{34}} \left(\frac{1}{J_3} + \frac{1}{J_4} \right) & -\frac{1}{\gamma_{45}J_4} & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & -\frac{1}{\gamma_{n-2,n-1}J_{n-1}} & \frac{1}{\gamma_{n-1,n}} \left(\frac{1}{J_{n-1}} + \frac{1}{J_n} \right) \end{bmatrix}$$

$$\underline{B} = \begin{bmatrix} \frac{2\delta_1}{\gamma_{12}J_1} & -\frac{2\delta_2}{\gamma_{23}J_2} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2\delta_2}{\gamma_{23}J_2} & -\frac{2\delta_3}{\gamma_{34}J_3} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2\delta_3}{\gamma_{34}J_3} & -\frac{2\delta_4}{\gamma_{45}J_4} & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2\delta_{n-1}}{\gamma_{n-1,n}J_{n-1}} \end{bmatrix}$$



$$\underline{\underline{C}} = \begin{bmatrix} -\frac{\delta_1}{\gamma_{12}} \left(\frac{1}{J_1} + \frac{1}{J_2} \right) & \frac{\delta_2}{\gamma_{23} J_2} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \frac{\delta_1}{\gamma_{12} J_2} & -\frac{\delta_2}{\gamma_{23}} \left(\frac{1}{J_2} + \frac{1}{J_3} \right) & \frac{\delta_3}{\gamma_{34} J_3} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\delta_2}{\gamma_{23} J_3} & -\frac{\delta_3}{\gamma_{34}} \left(\frac{1}{J_3} + \frac{1}{J_4} \right) & \frac{\delta_4}{\gamma_{45} J_4} & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\delta_{n-2}}{\gamma_{n-2,n-1} J_{n-1}} - \frac{\delta_{n-1}}{\gamma_{n-1,n}} \left(\frac{1}{J_{n-1}} + \frac{1}{J_n} \right) \end{bmatrix}$$

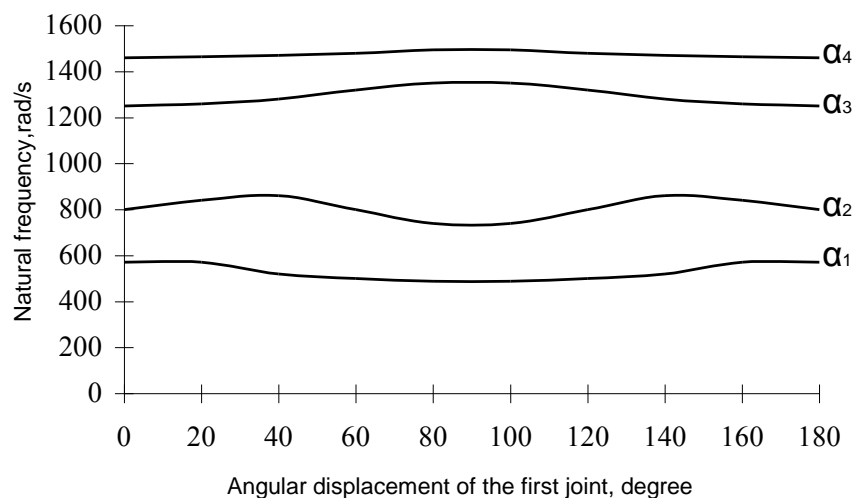
$$\underline{\underline{D}} = \begin{bmatrix} -\frac{2\delta_1^2}{\gamma_{12} J_1} & \frac{2\delta_2^2}{\gamma_{23} J_2} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2\delta_2^2}{\gamma_{23} J_2} & \frac{2\delta_3^2}{\gamma_{34} J_3} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2\delta_3^2}{\gamma_{34} J_3} & \frac{2\delta_4^2}{\gamma_{45} J_4} & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{2\delta_{n-1}^2}{\gamma_{n-1,n} J_{n-1}} \end{bmatrix}$$

A mozgásegyenlet megoldását $\underline{\underline{X}} = \underline{\underline{y}}e^{i\omega t}$ alakban keresve, a következő peremfeltételeket alkalmazzuk: $\varphi_{22} = \varphi_{11} + 90^\circ$

$$\varphi_{32} = \varphi_{21} + 90^\circ = \varphi_{11} + 180^\circ$$

$$\varphi_{n2} = \varphi_{11} + (n-1)90^\circ$$

A sajátfrekvenciákat az $\underline{\underline{X}}$ és $\underline{\underline{\ddot{X}}}$ függvények visszahelyettesítése után az egyenletrendszer homogén részének együtthatóiból képzett determináns zérushelyeiből határozhatjuk meg. A frekvenciaegyenlet periodikusan változó együtthatókat tartalmaz, mely nem csak a hajtáslánc paraméteresen gerjesztett rezgését okozza, hanem a kiszámított sajátfrekvenciák változását a szögelfordulás függvényében.



7.10 ábra: Torziós sajátfrekvenciák grafikus ábrázolása
 Forrás: [20]

A 7.10 ábra szövegének fordítása:

Natural frequency: sajátfrekvencia

Angular displacement of the first joint: az első csukló szögelfordulása

Igazolható, hogy a paraméteres gerjesztés miatt a kiszámított sajátfrekvencia sávokon kívül még kialakulhatnak rezonancia frekvenciák, melyeket a differenciálegyenlet stabilitás vizsgálatával határozhatjuk meg. A differenciálegyenletek stabilitás vizsgálatára több grafikus (pl. Incze - Strutt diagram) és számító eljárást (pl. Hill és Mathieu) dolgoztak ki, melyek tárgyalása messze esik e jegyzetben megfogalmazott célkitűzésektől, ezért ettől eltekintünk.

A kidolgozott számítógépes szimulációs programmal lehetőség van az elemi láncszerűvé transzformált koncentrált paraméterű rugómodell torziós sajátfrekvenciáinak számítására és az eredmények grafikus ábrázolására a tengely szögelfordulása függvényében. Ha a hajtásláncba épített csuklók szögkitérése $\beta_i = 0^\circ$, akkor az $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ sajátfrekvenciák már nem függvények, hanem konstans értékek.

7.2. Modell a hajtáslánc hajlító lengés sajátfrekvenciáinak meghatározására

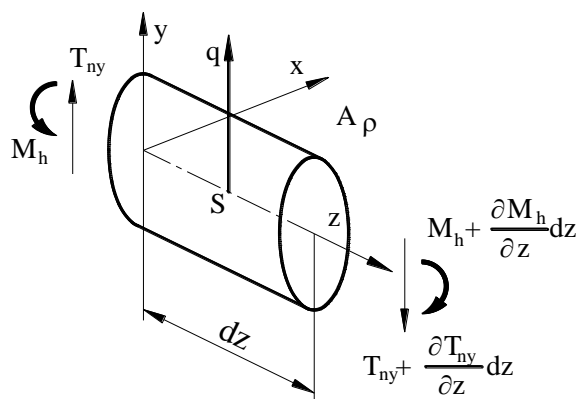
A hajtáslánc hajlító rezgéseinek vizsgálatára alkalmazható a rudak kontinuum rezgéseit leíró modell, ha a tengelyek szögsebessége nem nagy, és a tengelyre erősített tárcsák tehetetlenségi nyomatéka viszonylag kicsi. Ellenkező esetben a forgó tömegek elfordulásakor a pörgettyűhatás nyomatéka a rezgés jellegét megváltoztatja.

A hajlító rezgések modellezéskor a további egyszerűsítéseket és feltételeket tesszük:

- a forgó tengelyek keresztmetszeteinek fő másodrendű nyomatékai egyezzenek meg minden elfordulási szöghelyzetben, ezáltal nem kell paraméteresen gerjesztett hajlító rezgésekkel számolni. Ennek a feltételnek a kör és körgyűrű keresztmetszetű tengelyek felelnek meg.

- a hajlító rezgéseknek nincs kitüntetett iránya, ezért bármilyen irányú rezgési amplitúdót vizsgálhatunk. Vizsgálatunk célja elsősorban a rezgés frekvenciák és amplitúdók meghatározása, ezért célszerűségi okokból általános koordinátának a keresztmetszetek súlypontjának y (függőleges) irányú $q_{(z,t)}$ elmozdulását választjuk.
- feltételezzük továbbá, hogy rezgés közben a keresztmetszetek síkok maradnak és csak az x tengellyel párhuzamos tengely körül fordulnak el.
- a forgó tengely kiegyensúlyozatlan tömegéből adódó erőhatásnak csak az y irányú komponensét vesszük figyelembe. Ennek megfelelően az ágyazásoknál is csak y irányú terheléssel és y irányú rugómerevséggel számolunk.

Állandó keresztmetszetű rúdszakasz mozgásegyenlete állandó együtthatójú lineáris, negyedrendű parciális differenciálegyenlettel írható le. A vizsgálat során általános koordinátának a keresztmetszetek súlypontjának y irányú $q_{(z,t)}$ elmozdulását választjuk és feltételezzük, hogy rezgés közben a keresztmetszetek síkok maradnak, és csak az x tengellyel párhuzamos tengely körül fordulnak el [19].



7.11 ábra: A tengely dz hosszúságú rúdeleme

A rúdszakaszra felírható az impulzustétel a 7.11 ábra alapján:

$$dm\ddot{q} = -\frac{\partial T_{ny}}{\partial z} dz \quad (7.43)$$

$$\text{ahol: } dm = \rho Adz \quad (7.44)$$

Kis rezgések esetén:

$$M_h = -IE \frac{\partial^2 q}{\partial z^2}, \quad T_{ny} = -\frac{\partial M_h}{\partial z} \quad (7.45), (7.46)$$

A fenti mennyiségeket az impulzustételbe visszahelyettesítve, megkapjuk az állandó keresztmetszetű rúdszakasz mozgásegyenletét:

$$A\rho \frac{\partial^2 q}{\partial t^2} + IE \frac{\partial^4 q}{\partial z^4} = 0 \quad (7.47)$$

A mozgásegyenlet megoldását a következő alakban keressük:

$$q = v_z \cos(\alpha t + \varepsilon) \quad (7.48)$$



$$-\alpha^2 A \rho \cos(\alpha t + \varepsilon) + IE v^{IV} \cos(\alpha t + \varepsilon) = 0 \quad (7.49)$$

Bevezetve a $k^4 = \alpha^2 \frac{A \rho}{IE}$ kifejezést, a rezgéseket leíró differenciálegyenlet: (7.50)

$$v_{(z)}^{IV} - k^4 v_{(z)} = 0 \quad (7.51)$$

A differenciálegyenletet alapfüggvényének célszerű a Krülov függvényeket választani.

Az általános megoldást a következő alakban keressük, ahol $S_{(kz)}$, $T_{(kz)}$, $U_{(kz)}$, V_{kz} a Krülov függvények, D_1 , D_2 , D_3 , D_4 pedig együtthatók:

$$v_{(z)} = D_1 S_{(kz)} + D_2 T_{(kz)} + D_3 U_{(kz)} + D_4 V_{(kz)} \quad (7.52)$$

$$\text{ahol: } S_{(kz)} = \frac{1}{2}(chkz + \cos kz) \quad T_{(kz)} = \frac{1}{2}(shkz + \sin kz) \quad (7.53), (7.54)$$

$$U_{(kz)} = \frac{1}{2}(chkz - \cos kz) \quad V_{(kz)} = \frac{1}{2}(shkz - \sin kz) \quad (7.55), (7.56)$$

A Krülov függvények jellemzői, hogy deriváltjai egy konstans szorzóban különböznek egy másik Krülov függvénytől, és $z = 0$ helyen a $S_{(kz)}$ Krülov függvény értéke 1, a többi értéke pedig 0.

$f_{(kz)}$	$f_{(0)}$	$k^{-1} f'$	$k^{-2} f''$	$k^{-3} f'''$
S	1	V	U	T
T	0	S	V	U
U	0	T	S	V
V	0	U	T	S

A D_1 , D_2 , D_3 , D_4 együtthatók peremfeltételekből határozhatóak meg.

$$v_{(0)} = v_0 = D_1 \quad (7.57)$$

$$v'_{(0)} = \phi_0 = k D_2 \Rightarrow D_2 = \frac{\phi_0}{k} \quad (7.58)$$

$$v''_{(0)} = -\frac{M_0}{IE} = k^2 D_3 \Rightarrow D_3 = -\frac{M_0}{k^2 IE} \quad (7.59)$$

$$v'''_{(0)} = \frac{\bar{T}_0}{IE} = k^3 D_4 \Rightarrow D_4 = \frac{\bar{T}_0}{k^3 IE} \quad (7.60)$$

ahol: $v_{(z)}$

$$\phi_{(z)} = v'_{(z)}$$

$$M_{(z)} = -IE v''_{(z)}$$

$$\bar{Z}_{(z)} = IE v'''_{(z)}$$

a keresztmetszet elmozdulása

a keresztmetszet szögelfordulása az x tengely körül

a keresztmetszetet ért hajlító nyomaték

a keresztmetszetre ható nyíróerő amplitúdója



A rúdszakasz keresztmetszeteinek mozgásjellemezőit a fenti négy fizikai mennyiség írja le, melyet az egyszerűbb kezelhetőség és áttekinthetőség érdekében állapotvektorba rendezünk:

$$\underline{\underline{\eta}}_i = \begin{bmatrix} v_i \\ \phi_i \\ M_i \\ \bar{T}_i \\ 1 \end{bmatrix} \quad (7.61)$$

Az állapotvektor utolsó sorába írt 1-es értéknek számítástechnikai okai vannak, ugyanis majd látni fogjuk, hogy ezáltal egy mátrixhoz történő összeadást szorzás formában is elvégezhethetjük, melyet programozni is egyszerűbb.

A rúd keresztmetszetének mozgásjellemező felírhatóak a $v_{(z)}$ elmozdulás függvényből.

$$v_{(z)} = v_0 S_{(kz)} \frac{\phi_0}{k} T_{(kz)} - \frac{M_0}{k^2 IE} U_{(kz)} + \frac{\bar{T}_0}{k^3 IE} V_{(kz)} \quad (7.62)$$

$$\phi_{(z)} = v'_{(z)} = v_0 k V_{(kz)} + \phi_0 S_{(kz)} - \frac{M_0}{k IE} T_{(kz)} + \frac{\bar{T}_0}{k^2 IE} U_{(kz)} \quad (7.63)$$

$$M_{(z)} = -IE v''_{(z)} = -v_0 IE k^2 U_{(kz)} - \phi_0 k IE V_{(kz)} + M_0 S_{(kz)} - \frac{\bar{T}_0}{k} T_{(kz)} \quad (7.64)$$

$$\bar{T}_{(z)} = IE v'''_{(z)} = v_0 IE k^3 T_{(kz)} + \phi_0 IE k^2 U_{(kz)} - M_0 k V_{(kz)} + \bar{T}_0 S_{(kz)} \quad (7.65)$$

Az azonos keresztmetszetű rúdszakasz két tetszőleges keresztmetszetének mozgásjellemezői a fenti egyenletrendszerből határozhatóak meg, melynek mátrixos alakja a következő:

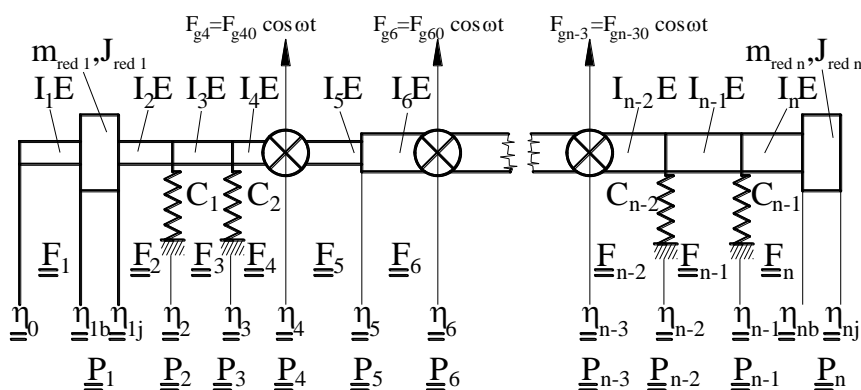
$$\underline{\underline{\eta}}_1 = \underline{\underline{F}} \underline{\underline{\eta}}_0 \quad (7.66)$$

ahol: $\underline{\underline{F}}$ szakaszmátrix, vagy átviteli mátrix

$$\underline{\underline{F}} = \begin{bmatrix} S_{(kz)} & \frac{1}{k} T_{(kz)} & -\frac{1}{k^2 IE} U_{(kz)} & \frac{1}{k^3 IE} V_{(kz)} & 0 \\ k V_{(kz)} & S_{(kz)} & -\frac{1}{k IE} T_{(kz)} & \frac{1}{k^2 IE} U_{(kz)} & 0 \\ -k^2 IE U_{(kz)} & -k IE V_{(kz)} & S_{(kz)} & -\frac{1}{k} T_{(kz)} & 0 \\ k^3 IE T_{(kz)} & k^2 IE U_{(kz)} & -k V_{(kz)} & S_{(kz)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (7.67)$$

Ha a rúd keresztmetszete változik, rugalmasan alátámasztjuk, vagy külső erők, nyomatékok hatnak rá, akkor a szakaszhatárokon az egyes szakaszokra érvényes mechanikai összefüggéseket illeszteni kell. Az illesztési feltételekből (a szakaszhatárra felírt két geometriai feltétel, az impulzustétel és a perdülettétel) meghatározhatóak a szakaszhatár állapotjellemezői. A szakaszhatár két oldalán értelmezhető állapotvektorok között a kapcsolatot a $\underline{\underline{P}}$ illesztő mátrix fejezi ki az illesztés mechanikai összefüggéseivel.

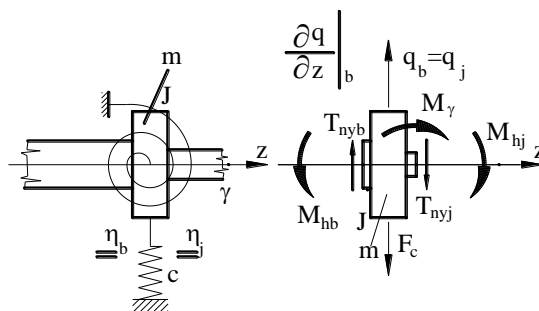
A 7.12 ábrán egy csuklós, többszörösen megtámasztott tengely modellje látható, ahol minden olyan helyen szakaszhatárt jelöltünk, ahol alkatrészt (tengelykapcsoló) szereltünk rá; rugalmasan alátámasztottuk (felfüggesztettük); csuklót szereltünk be; változik a keresztmetszete; gerjesztő erők, ill. gerjesztő nyomatékok hatnak. A következőkben ezeket a mechanikai hatásokat írjuk le és az ezt kifejező illesztő mátrixokat.



7.12 ábra: Szakaszhatár általános esetben

7.2.1. Illesztési feltételek rúdra erősített tárcsa rugalmas megtámasztása esetén

Feltételezzük, hogy a rúd a rászertelt tárcsával α frekvenciájú rezgést végez.



7.13 ábra: Rúd rugalmas megtámasztása

Geometriai feltétel a 7.13 ábra alapján: a rúd az illesztés helyén nem törik el.

$$v_j = v_b \text{ és } \phi_j = \phi_b \quad (7.68), (7.69)$$

A z tengelyre felírt perdülettétel:

$$J \frac{\partial^3 q}{\partial z \partial t^2} = M_{hb} - M_{hj} - M_\gamma \quad (7.70)$$

$$\text{ahol: } M_\gamma = \frac{\phi_b}{\gamma} \cos(\alpha t + \varepsilon) \quad (7.71)$$

A megoldást $q = v \cos(\alpha t + \varepsilon)$ alakban keresve és figyelembe véve, hogy $v' = \phi$, írható:



$$\frac{\partial^3 q}{\partial z \partial t^2} = -\alpha^2 \phi_b \cos(\alpha t + \varepsilon) \quad (7.72)$$

A szakaszhatár két oldalán a hajlító nyomatékok közötti összefüggés:

$$M_{hj} = M_{hb} + \left(J\alpha^2 - \frac{1}{\gamma} \right) \phi_b \quad (7.73)$$

A rúdszakaszra felírt impulzustétel:

$$m\ddot{q}_b = T_{nyb} - T_{nyj} - F_c \quad (7.74)$$

$$\text{ahol: } \ddot{q}_b = -\alpha^2 v_b \cos(\alpha t + \varepsilon) \quad (7.75)$$

$$F_c = R_c \cos(\alpha t + \varepsilon) = \frac{v_b}{c} \cos(\alpha t + \varepsilon) \quad (7.76)$$

A szakaszhatár két oldalán a nyíróerők közötti összefüggés:

$$\bar{T}_{nyj} = \bar{T}_{nyb} + \left(m\alpha^2 - \frac{1}{c} \right) v_b \quad (7.77)$$

Az előbbi feltételeket kielégítő $\underline{\underline{P}}$ illesztő mátrix:

$$\underline{\underline{P}}_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & J\alpha^2 - \frac{1}{\gamma} & 1 & 0 & 0 \\ m\alpha^2 - \frac{1}{c} & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (7.78)$$

ahol: m, J : a tengelyre szerelt tárcsa tömege, ill. tehetetlenségi nyomatéka

c, γ : az ágyazások radiális és torziós rugóállandója

Megjegyezzük, hogy a csapágyakat modellező rugók merevsége terhelésfüggő, ezért annak értékét modellezéskor több lépésben módosítani fogjuk a tényleges terhelésnek megfelelően.

7.2.2. Illesztési feltételek gerjesztő erő és nyomaték esetén

Geometriai feltétel: a rúd az illesztés helyén nem törik el.

$$v_j = v_b \text{ és } \phi_j = \phi_b \quad (7.79), (7.80)$$

A z tengelyre felírt perdülettétel:

$$M_{hj} = M_{hb} + M_g \text{ és } M_g = N_i \cos(\alpha t + \varepsilon) \quad (7.81), (7.82)$$



A rúdszakaszra felírt impulzustétel:

$$T_{nyj} = T_{nyb} + T_g \text{ és } T_g = R_i \cos(\alpha t + \varepsilon) \quad (7.83),$$

(7.84)

A rúdszakasz jobb oldalán a nyíróerő, ill. a nyomaték amplitúdó:

$$\bar{T}_{nyj} = \bar{T}_{nyb} + R_i \quad (7.85)$$

$$\bar{M}_{nyj} = \bar{M}_{nyb} + N_i \quad (7.86)$$

Az állapotvektor az illesztés helyén:

$$\underline{\underline{\eta}}_{ij} = \underline{\underline{E}} \underline{\underline{\eta}}_{ib} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} N_i + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} R_i = \underline{\underline{P}} \underline{\underline{\eta}}_i \quad (7.87)$$

A $\underline{\underline{P}}$ illesztő mátrix célszerű felírása esetén a fenti összeadási művelet mátrixszorzás formában is elvégezhető. Gerjesztő nyomaték és erő esetén az illesztő mátrix:

$$\underline{\underline{P}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & N_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 & R_i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (7.88)$$

7.2.3. Illesztési feltétel gömbcsukló estén

Geometriai feltétel:

$$v_j = v_b \text{ és } \phi_j = \phi_b + \Delta\beta_i \quad (7.89), (7.90)$$

A gömbcsukló működését kifejező feltétel:

$$M_j = M_b = 0 \quad (7.91)$$

Az impulzustétel:

$$T_j = T_b \quad (7.92)$$

A gömbcsuklók (golyócsuklók, kardáncsuklók, ..., stb.) nem képesek hajlító nyomatékot átadni. A tengely terhelés hatására deformációt szenved, lehajlik. A $\Delta\beta_i$ a szögdeformáció különbséget fejezi ki a csukló beépítési helyén a csuklót nem tartalmazó tengely szögdeformációjához képest [20].

A kardáncsukló illesztő mátrixa, figyelembe véve a csukló tömegét, tehetetlenségi nyomatékát és a kardáncsuklón üzem közben periódikusan fellépő járulékos erőhatásokat:



$$\underline{\underline{P}}_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \Delta\beta_i \\ 0 & J\alpha^2 & 1 & 0 & 0 \\ m\alpha^2 & 0 & 0 & 1 & R_i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (7.93)$$

A mátrixban szereplő $\Delta\beta_i$ nem ismert, ezért ezt a számítások során meg kell határozni.

Az illesztő mátrix általános esetben:

$$\underline{\underline{P}}_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \Delta\beta_i \\ 0 & J_i\alpha^2 - \frac{1}{\gamma} & 1 & 0 & N_i \\ m_i\alpha^2 - \frac{1}{c} & 0 & 0 & 1 & R_i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (7.94)$$

Az illesztő mátrix pusztán keresztmetszet változás esetén egység mátrix lesz.

A számításokhoz a modell valamennyi szakaszára és szakaszhatárára meghatározzuk az $\underline{\underline{F}}$ és $\underline{\underline{P}}$ mátrixokat, melyek elemei tartalmazzák az α sajátfrekvenciát.

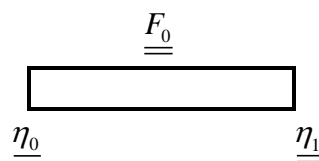
A kontinuum modell első és utolsó keresztmetszetének mechanikai jellemzőit az állapotvektorok tartalmazzák, melyek között a mátrixegyenlet teremt kapcsolatot.

$$\underline{\underline{\eta}}_n = \underline{\underline{F}}_n \underline{\underline{P}}_{n-1} \dots \underline{\underline{P}}_1 \underline{\underline{F}}_1 \underline{\underline{\eta}}_0 \quad (7.95)$$

Egy általános, kardáncsuklókat tartalmazó hajtáslánc tetszőleges keresztmetszetében meghatározhatóak a mechanikai paraméterek (elmozdulás, elhajlás szöge, nyomaték, nyíróerő) és a hajtáslánc saját frekvenciái. A számítás menete bonyolult és nehezen áttekinthető, ezért ezt, a jobb követhetőség érdekében a legegyszerűbb esetből kiindulva mutatjuk be.

7.2.4. Példák a hajlító dinamikai modell alkalmazására

7.2.4.1. Egyetlen rúdelem gerjesztés mentes esete



7.14 ábra: Rúdelem

Egyetlen rúdelemnek hajtástechnikai szempontból nincs jelentősége, hiszen a rúdelem nincs megtámasztva csapágyazással és nem hatnak rá külső terhelések (lásd 7.14 ábra). Ennek megfelelően mindkét rúdvége szabad. Peremfeltételek szabad rúdvég esetén:



$M = 0$ és $T = 0$ (a hajlító nyomaték és a nyíróerő az igénybevételi ábrán 0-ba fut be).

A peremfeltételeknek megfelelően a rúdszakasz első és utolsó keresztmetszetének állapotvektora a következőképpen írható:

$$\underline{\underline{\eta_0}} = \begin{bmatrix} v_0 \\ \phi_0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \underline{\underline{\eta_1}} = \begin{bmatrix} v_1 \\ \phi_1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (7.96), (7.97)$$

A két állapotvektor között a mechanikai kapcsolatot kifejező mátrixegyenlet:

$$\underline{\underline{\eta_1}} = \underline{\underline{F_1}} \underline{\underline{\eta_0}}, \text{ azaz}$$

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ \phi_1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{(kz)} & \frac{1}{k} T_{(kz)} & -\frac{1}{k^2 IE} U_{(kz)} & \frac{1}{k^3 IE} V_{(kz)} & 0 \\ kV_{(kz)} & S_{(kz)} & -\frac{1}{kIE} T_{(kz)} & \frac{1}{k^2 IE} U_{(kz)} & 0 \\ -k^2 IE U_{(kz)} & -kIE V_{(kz)} & S_{(kz)} & -\frac{1}{k} T_{(kz)} & 0 \\ k^3 IET_{(kz)} & k^2 IEU_{(kz)} & -kV_{(kz)} & S_{(kz)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_0 \\ \phi_0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (7.98)$$

Az $\underline{\underline{\eta_0}}$ állapotvektorban az ismeretlen: v_0, ϕ_0

az $\underline{\underline{\eta_1}}$ állapotvektorban a peremfeltételek miatt: $M_1 = 0, T_1 = 0$

A peremfeltételek tehát két egyenletet biztosítanak az egyenletrendszerben szereplő két ismeretlen meghatározásához, így az egyenletrendszer megoldható.

A mátrixszorzás 3. és 4. sorának kifejtésével jutunk a következő egyenletekhez:

$$-k^2 IE U_{(kz)} v_0 - kIE V_{(kz)} \phi_0 = 0 \quad (7.99)$$

$$k^3 IET_{(kz)} v_0 + k^2 IEU_{(kz)} \phi_0 = 0 \quad (7.100)$$

A két ismeretlent tartalmazó homogén lineáris egyenletrendszernek akkor van triviálistól eltérő megoldása, ha a v_0 és ϕ_0 együtthatóiból képzett determináns értéke 0. Mivel az $\underline{\underline{F}}$ mátrix elemei az α frekvencia függvényei, a determináns nulla értékéhez tartozó α frekvenciák lesznek a rendszer hajlító sajátfrekvenciái.

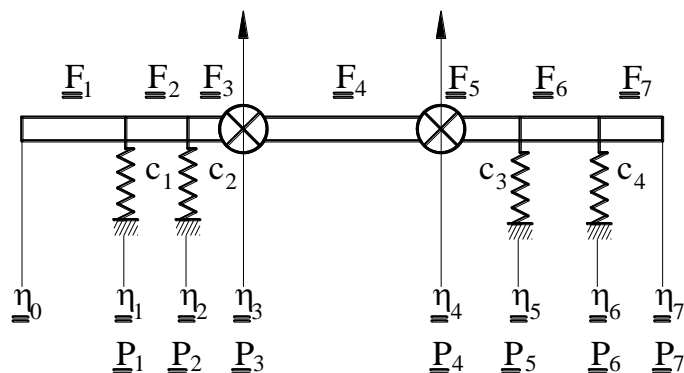
Gerjesztés mentes esetben a homogén egyenletrendszer miatt v_0, ϕ_0 , és v_1, ϕ_1 értéke csak egymás paramétereként oldhatóak meg. A sajátfrekvenciák értékét a már ismert "maradék" módszerrel határozhatjuk meg.

7.2.4.2. Egyetlen rúdelem gerjesztéses esete

Az egyenletrendszer a gerjesztés miatt inhomogén lesz. Az ismeretlenek és egyenletek száma megegyezik a gerjesztés mentes esettel.

A sajátfrekvenciákat itt is az egyenletrendszer homogén részéből képzett determináns zérushelye adja. A ν_0 , ϕ_0 , és ν_1 , ϕ_1 konkrét értékei számíthatóak.

7.2.4.3. Két kardáncsuklós hajtáslánc



7.15 ábra: Két kardáncsuklós hajtáslánc

A 7.15 ábra egy kétsuklós, többszörösen csapágyazott hajtásláncot szemléltet. A csapágyakat rugókkal modelleztük, a gerjesztő erőket pedig a kardáncsuklóknál vettük fel. Látható, hogy minden olyan helyen, ahol a hajtáslánc eltér egy sima rúdszakasztól, szakaszhatárt jelöltünk. A peremfeltételek biztosítása érdekében az első és az utolsó szakaszhatárnak szabad tengelyvégnek kell lennie. Ha ezekben a pontokban alátámasztás lenne, vagy gerjesztés hatna, akkor a peremfeltételek teljesülése érdekében a hajtásláncot meg kell toldanunk egy rövid, akár csupán néhány mikrométeres szakasszal. Ezáltal biztosítjuk mechanikai szempontból a szabad tengelyvéget. Az első és utolsó szakaszhatár közötti kapcsolat:

$$\underline{\eta_7} = \underline{F_7} \underline{P_6} \underline{F_6} \underline{P_5} \underline{F_5} \underline{P_4} \underline{F_4} \underline{P_3} \underline{F_3} \underline{P_2} \underline{F_2} \underline{P_1} \underline{F_1} \underline{\eta_0} \quad (7.101)$$

Az általános hajtáslánc alap ismeretlenei és egyenletei megegyeznek az egyetlen rúdelem esettel, kiegészítve a kardáncsuklók működési jellemzőit leíró egyenletekkel. Minden egyes kardáncsukló egy-egy újabb ismeretlent, $\Delta\beta_i$ -t ad, és a peremfeltételekből következően, mely szerint a csuklók nem képesek hajlító nyomatékot átvinni, egy-egy újabb egyenletet biztosítanak. Ezeket az egyenleteket megkapjuk, ha a kardáncsuklók helyén az állapotvektor harmadik sorát kifejtjük ($M_i = 0$).

$$\underline{\eta_3} = \underline{F_3} \underline{P_2} \underline{F_2} \underline{P_1} \underline{F_1} \underline{\eta_0} \quad (7.102)$$

$$\underline{\eta_4} = \underline{F_4} \underline{P_3} \underline{F_3} \underline{P_2} \underline{F_2} \underline{P_1} \underline{F_1} \underline{\eta_0} \quad (7.103)$$

Az egyenletek és ismeretlenek száma megegyezik, tehát az egyenletrendszer megoldható. A gerjesztő erők és nyomatékok, melyek a kardáncsuklók üzemviszonyából és a forgó elemek kiegyensúlyozatlanságából, vagy külső terhelésből adódnak, a működési helyükön figyelembe vehetőek. A gerjesztések miatt az egyenletrendszer inhomogén. A frekvenciaegyenletet az inhomogén rész együtthatóiból képzett determináns kifejtésével kapjuk.



A gördülőcsapágyakat modellező rugók rugómerevsége, mint láthattuk a terhelés függvénye. A csapágyterhelések a gerjesztő erők és nyomatékok, valamint a gerjesztő frekvencia ismeretében határozhatóak meg. A szakasz és illesztő mátrixok α paraméterei helyére az ω gerjesztő (üzemi) frekvencia értékét helyettesítve kiszámítható a $v_0, \phi_0, \Delta\beta_3, \Delta\beta_4$ ismeretlenek értékei.

Az egyenletrendszer inhomogén részét K_1, K_2, K_3, K_4 betűkkel jelöltük. Két kardáncsukló esetén a peremfeltételeknek megfelelő mátrixszorzásokat elvégezve a következő egyenletrendszer adódik, ahol az együtthatók konkrét számértékek, melyeket a könnyebb áttekinthetőség kedvéért a, \dots, m betűkkel jelöljük:

$$\begin{aligned} av_0 + b\phi_0 + c\Delta\beta_{30} + d\Delta\beta_{40} &= K_1 \\ ev_0 + f\phi_0 + g\Delta\beta_{30} + h\Delta\beta_{40} &= K_2 \\ iv_0 + j\phi_0 + k\Delta\beta_{30} &= K_3 \\ lv_0 + m\phi_0 &= K_4 \end{aligned} \tag{7.104}$$

Az egyenletrendszerben szereplő ismeretleneket a Kramer módszerrel számíthatjuk ki.

Az éppen kiszámítandó ismeretlen együtthatója helyére beírjuk az inhomogén részt és az így kapott együtthatókból képzett determinánst osztjuk a homogén rész együtthatóiból képzett determinánssal.

A ϕ_0 - értéke például a következőképpen számítható ki:

$$\phi_0 = \frac{\begin{vmatrix} a & K_1 & c & d \\ e & K_2 & g & h \\ i & K_3 & k & 0 \\ l & K_4 & 0 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & 0 \\ l & m & 0 & 0 \end{vmatrix}} \tag{7.105}$$

Az ismeretlenek kiszámítása után a csapágyterhelést a csapágyazások helyén az állapotvektorok negyedik sorának kifejtésével számíthatjuk ki. Ezek ismeretében a csapágymerevség számító programmal kiszámítható a csapágy radiális merevsége. Az illesztő mátrixokban adatbevitelkor fiktív értéként megadott merevség helyére az így kiszámított értéket helyettesítjük be. A módosított csapágymerevség értékkel a hajtáslánc minden paramétere változni fog, ezért az egyenletrendszer ismeretleneit és a csapágyak támasztóerőit újra ki kell számítani. Az újból kiszámított csapágyerőkhöz ezt követően ismét meghatározzuk a csapágymerevséget. Ezt az iterációs számítást addig ismételjük, amíg a csapágymerevségek egymást követő számított értékei nem változnak jelentősen. Tapasztalat szerint négy, öt iterációs számítás elvégzése szükséges.

A csapágymerevségek meghatározása után a rendszer sajátfrekvenciáit azoknál az α értékeknél kapjuk meg, melyeknél az egyenletrendszer homogén részének együtthatóiból képzett determináns 0. Ha a számítógépes programmal a rezonancia esetét vizsgáljuk (ha az üzemi frekvencia értékének a sajátfrekvenciát vesszük fel), a szakaszhatárok mechanikai



paramétereinek számított értékei végtelen nagyra válnának, ami a gyakorlatban csak azért nem történhet meg, mert a tengely törése hamarabb bekövetkezik. Az ismeretlenek számításakor ugyanis az egyenletrendszer homogén részéből képzett determináns, melynek értéke rezonancia esetén nullába tart, a nevezőben szerepel. A közel nullával való osztás pedig végtelenbe tartó eredményt ad.

7.2.4.4. Általános hajtáslánc esete

A tetszőleges csuklószámú és csapágyazási helyű hajtáslánc ismeretlenjeinek és egyenleteinek száma tehát a fentiek alapján $2+k$, ahol k a csuklók száma.

A peremfeltételekből felírható egyenletrendszert levezetés nélkül közöljük, melyből az ismeretlenek és a hajlító sajátfrekvenciák meghatározhatóak [20]:

$$\begin{aligned} I_A v_0 + J_A \varphi_0 + \sum_{i=cs_1}^{cs_n} J_i \Delta \beta_i &= - \left(\sum_{j=e_1}^{e_v} L_j F_{gj} + \sum_{k=ny_1}^{ny_w} K_k M_{gk} \right) \\ M_d v_0 + N_A \varphi_0 + \sum_{i=cs_1}^{cs_n} N_i \Delta \beta_i &= - \left(\sum_{j=e_1}^{e_v} P_j F_{gj} + \sum_{k=ny_1}^{ny_w} O_k M_{gk} \right) \\ I_{cs_n} v_0 + J_{cs_n} \varphi_0 + \Delta \beta_{cs_n} + \sum_{i=cs_1}^{cs_{n-1}} J_i \Delta \beta_i &= - \left(M_{gcs_n} + F_{gcs_n} + \sum_{j=e_1}^{cs_{n-1}} L_j F_{gj} + \sum_{k=ny_1}^{cs_{n-1}} K_k M_{gk} \right) \\ I_{cs_{n-1}} v_0 + J_{cs_{n-1}} \varphi_0 + \Delta \beta_{cs_{n-1}} + \sum_{i=cs_1}^{cs_{n-2}} J_i \Delta \beta_i &= - \left(M_{gcs_{n-1}} + F_{gcs_{n-1}} + \sum_{j=e_1}^{cs_{n-2}} L_j F_{gj} + \sum_{k=ny_1}^{cs_{n-2}} K_k M_{gk} \right) \\ &\vdots \\ &\vdots \\ &\vdots \\ I_{cs_1} v_0 + J_{cs_1} \varphi_0 + \Delta \beta_{cs_1} &= - \left(M_{gcs_1} + F_{gcs_1} + \sum_{j=e_1}^{cs_1} L_j F_{gj} + \sum_{k=ny_1}^{cs_1} K_k M_{gk} \right) \end{aligned} \tag{7.106}$$

ahol: $cs_1 - cs_n$: a csuklók sorszám

$e_1 - e_v$: a gerjesztő erők szakaszhatár sorszám

$ny_1 - ny_w$: a gerjesztő nyomatékok szakaszhatár sorszám

Az első két egyenletben szereplő A index az első és utolsó állapotvektor között a szakasz és illesztő mátrixok szorzatából képzett mátrix elemeit jelenti.

Az adott egyenletekben szereplő együtthatók indexei (az első két egyenlet kivételével) a legnagyobb szakaszhatár sorszámmal jelzett illesztő mátrixtól az első szakaszhatárig történő végigszorzással kapott mátrix megfelelő elemeit jelenti.

A szakasz és illesztő mátrix elemek szorzatából képzett együtthatókat az egyszerűbb írásmód kedvéért ismét betűkkel jelöltük.



8. Számítógépes szimulációs program

A hajtáslánc rezgéseit, lengéseit leíró mozgásegyenletek és a rájuk épülő dinamikai modellek felírását lépésről lépésre ismertettük. A hajtáslánc elemeinek mechanikai jellemzői a frekvenciaegyenlet paraméterei, melyek a függvénykapcsolatban betöltött szerepüktől függően eltérő mértékben befolyásolják a sajátfrekvenciák értékét. Bár a hajtáslánc elemeinek mechanikai paraméterei, geometriai méretei és egyéb működési jellemzői egyszerű számításokkal, vagy egyszerűsítő módszerekkel meghatározhatóak, a dinamikai számításokat nem lehet számítógépes program nélkül elvégezni. A kereskedelmi forgalomban kapható tervezőrendszerek programjai, így a dinamikai számítást végző programok is, általában egyszerű alkalmazásokat biztosítanak. Az adatbevitelt követően a program kiszámolja az eredményeket anélkül, hogy betekintést engedne az alkalmazott számítási eljárásba és a részeredményekről.

A jegyzet címében megfogalmazott cél - hajtáslánc optimalizáció - eléréséhez a dinamikai modellezés és számítás egy eszköz, mely segítségével meghatározhatóak a hajtáslánc főbb működési jellemzői és sajátfrekvenciái. Az optimalizáció azt jelenti, hogy a számított értékek elemzése után megvizsgáljuk annak lehetőségét, hogy hogyan lehet a hajtáselemek, hajtásrészek módosításával az adott működési jellemzőket változtatni. A megfogalmazott célok érdekében, a hajtásláncon végzett többszörös módosítással optimalizálhatjuk a hajtást, figyelembe véve annak más hajtásjellemzőkre gyakorolt kedvezőtlen hatását. A dinamikai számításokhoz olyan számítógépes programot fejlesztettünk, amellyel az ismertett számítások követhetőek és a részszámítási eredményeket is ismerteti.

A következőkben röviden bemutatjuk a kifejlesztett programot, ismertetjük a számítások folyamatábráját. Ezt követően bemutatunk egy konkrét hajtásláncot, a megfelelő mérőhely kialakítással. Végezetül néhány, a szimulációs programmal nyert eredményt ismertetünk melyet diagramban ábrázoltunk.

8.1. A szimulációs program működése

A szimulációs program feladata az előzetesen felépített matematikai modell nagy bonyolultságú számításainak elvégzése, kiértékelése.

A szimulációs program Windows XP ill. Windows 7 (32 bit) operációs rendszer alatt, valamint alacsonyabb verziójú Microsoft operációs rendszereken futtatható. Mérete 97 kB, indítása után lehetőséget ad a kommunikáció nyelvének a magyar, az angol, vagy a német nyelv kiválasztására.

A szimulációs program három programból áll:

- csapágymereség program
- torziós sajátfrekvenciák program
- hajlító lengések program

A csapágymereség számító program egysorú mélyhornyú és beálló golyóscsapágyak radiális és axiális irányú rugómereségének meghatározására fejlesztettük. A program két számítási eljárást ajánl fel, a Sjóvall csapágymereség számító modellt, és a mérési



eredményen alapuló közelítő számítást. A program önálló programként is működik valamint a hajlító lengések program alprogramjaként is.

A torziós sajátfrekvenciák program a koncentrált paraméterű rugómodell számító programja. Ezért a bemenő adatok a tengelyek torziós rugóállandója, a tárcsák tehetetlenségi nyomatéka és a kardáncsuklók szögkitérése. A program a torziós sajátfrekvenciákat grafikusán is ábrázolja a tengely szögelfordulásának függvényében.

A hajlító lengések program a kontinuum modellen alapul, ezért a program adatbevitelkor minden adatot bekér, mellyel a szakaszmátrixok és az illesztő mátrixok lépésről lépésre felépíthetők. Az illesztő mátrixok felépítése a szakaszhatárokon az általános mátrixból indul ki, és elemei aszerint épülnek fel, hogy a csapágyazásra, felszerelt alkatrészekre, gerjesztésre, ill. tengelycsuklóra vonatkozó mechanikai paramétereket megadtuk-e adatbevitelkor. Az adott szakaszhatáron így definiáljuk a csapágyazást, a gerjesztést, a felszerelt alkatrészt és a csuklót.

A szakaszhatárok számozása tizesével nő, így lehetőség van utólag, két szakaszhatár közé még további kilenc szakaszhatárt beszúrni. A hajtáslánc bemenő adatai, mint később látni fogjuk, mind egy-egy paramétere a sajátfrekvenciák számításának. A modelleket minden esetben illeszteni kell a megvalósult hajtáslánchoz, melyeket az egyes paraméterek megfelelő módosításával érhetjük el. Adatbevitelkor csak a csapágyazást modellező rugó rugómerevsége nem ismert, hiszen a meghatározásához szükséges csapágyerőt még ezután fogjuk kiszámítani. A programban az előzetes számításokhoz ezért egy fiktív értéket adunk meg, melyet majd az iterációs számítások során több lépésben fogunk pontosítani.

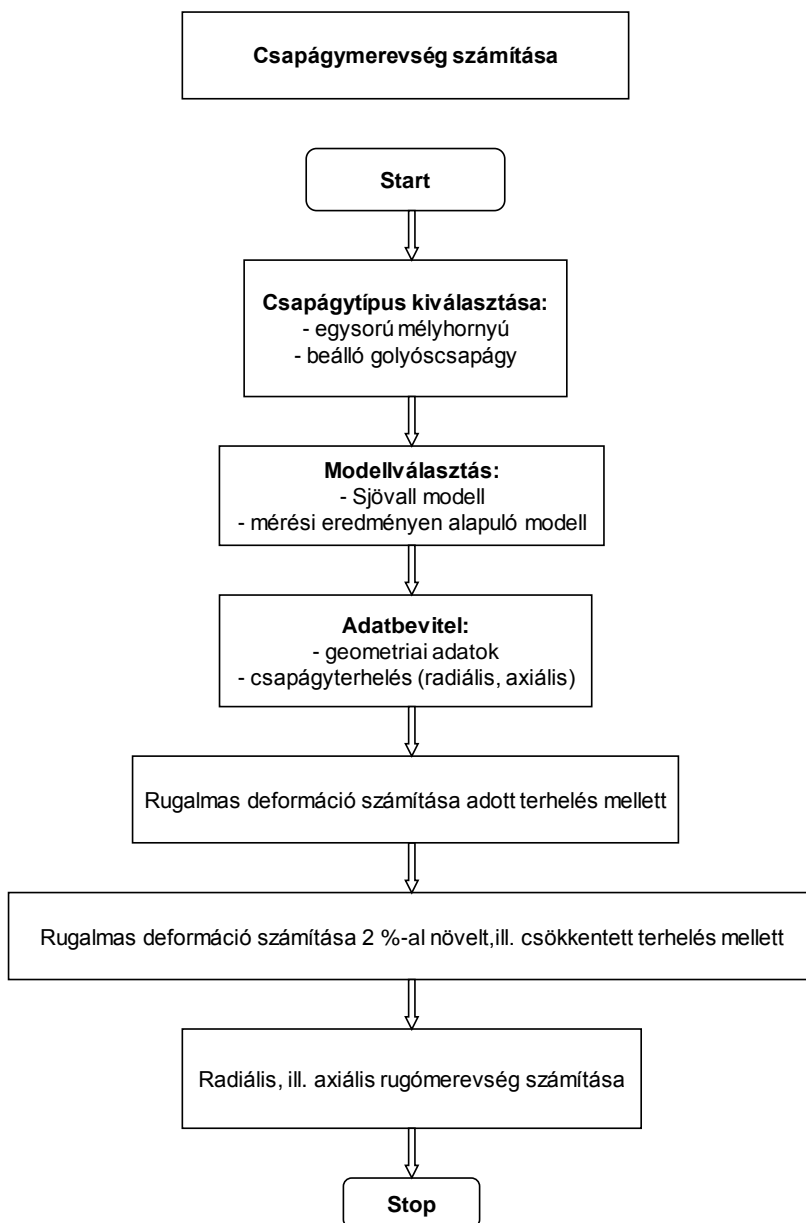
Miután a program egy megadott üzemi frekvenciához, amit szabadon változtathatunk, számítja ki az egyenletrendszer ismeretlenjeit, lehetőségünk van minden szakaszhatáron lekérni a mechanikai paramétereket tartalmazó állapotvektort, mely tartalmazza az elmozdulást, a deformáció szögét, a nyomatékot és a nyíróerőt. Azokon a szakaszhatárokon, ahol adatbevitelkor csapágyazást definiáltunk, a program kiszámítja a csapágyerőt anélkül, hogy a csapágyazási helyeken az állapotvektort egyenként meghatároznánk. A program ekkor rákérdez, hogy a csapágy merevséget kívánjuk-e, és hányszor iterációs számítással módosítani. Ha igen, akkor a hajlító lengések program, mint egy alprogramot, betölti a csapágy merevség programot az előzőleg kiszámított csapágyerővel. A csapágy geometriai és egyéb paramétereinek bevitele után a program kiszámítja a csapágy merevségét, melynek értékét visszatölti az adott csapágy illesztő mátrixába. Miután ez minden csapágyazási helyen megtörténik, a hajlító lengések program a már módosított csapágy merevségekkel az adott üzemi frekvencia mellett újra meghatározza az ismeretleneket és a csapágyerőket. Ezzel egy iterációs számítás ciklus lezárul és ez addig tart, amíg a megadott iterációs számítás számát el nem érjük. Ezeket a számításokat, az illesztő mátrixban a csapágy merevség módosítását, az ismeretlenek számítását a képernyőn végigkövethetjük. A program ezt követően jut el a sajátfrekvenciák meghatározásához. A maradék módszer számítási lépésközét elvileg szabadon megválaszthatjuk, de erre a program három értéket ajánl fel. A beállított pontosságnak megfelelően a program meghatározza a hajlító sajátfrekvenciákat. Mivel a sajátfrekvenciák és az üzemi frekvencia egymáshoz viszonyított közelsége befolyásolja a hajtáslánc nyugodt járását (ismeretlenek, szakaszhatárok mechanikai paraméterei, csapágyerők, csapágy merevségek), ezek egymástól való elhangolását meg kell tudjuk oldani. A program lehetőséget biztosít az üzemi frekvencia újbóli megadására és a már bevitt bemenő adatok módosítására, így az előbb



említett hajtáslánc paramétereiket rezonancia, vagy rezonancia közeli állapotban is meg tudjuk határozni.

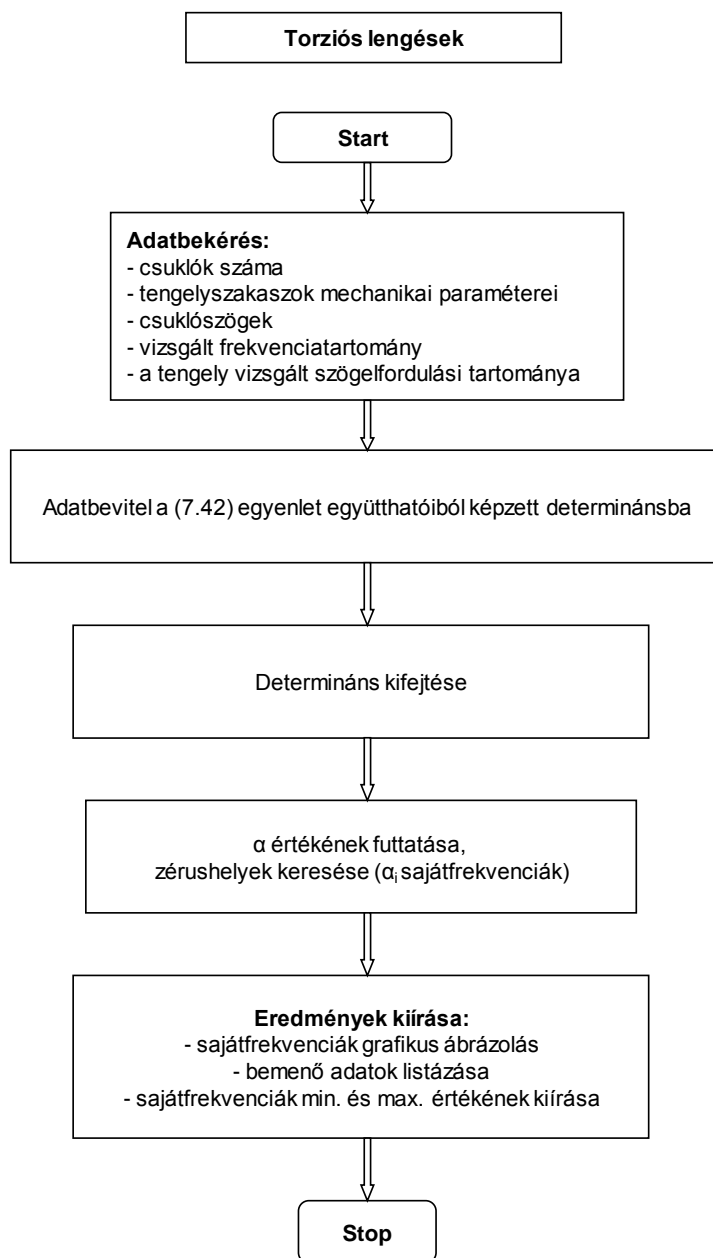
A hajtáslánc sajátfrekvenciáinak elhangolására annyi lehetőség van, ahány bemenő paraméter van adatbevitelkor.

8.1 táblázat: A csapágmerevség program blokkdiagramja

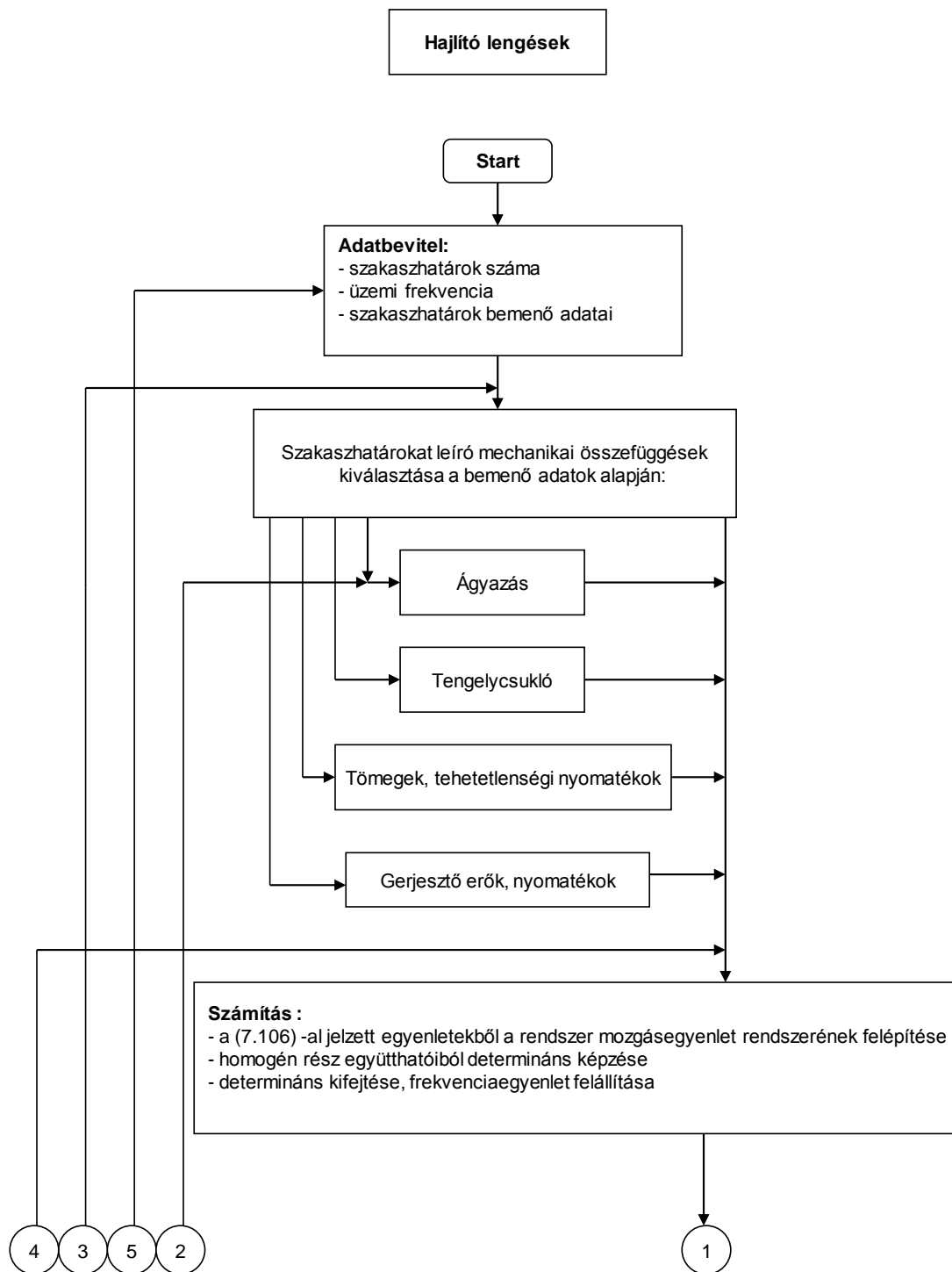


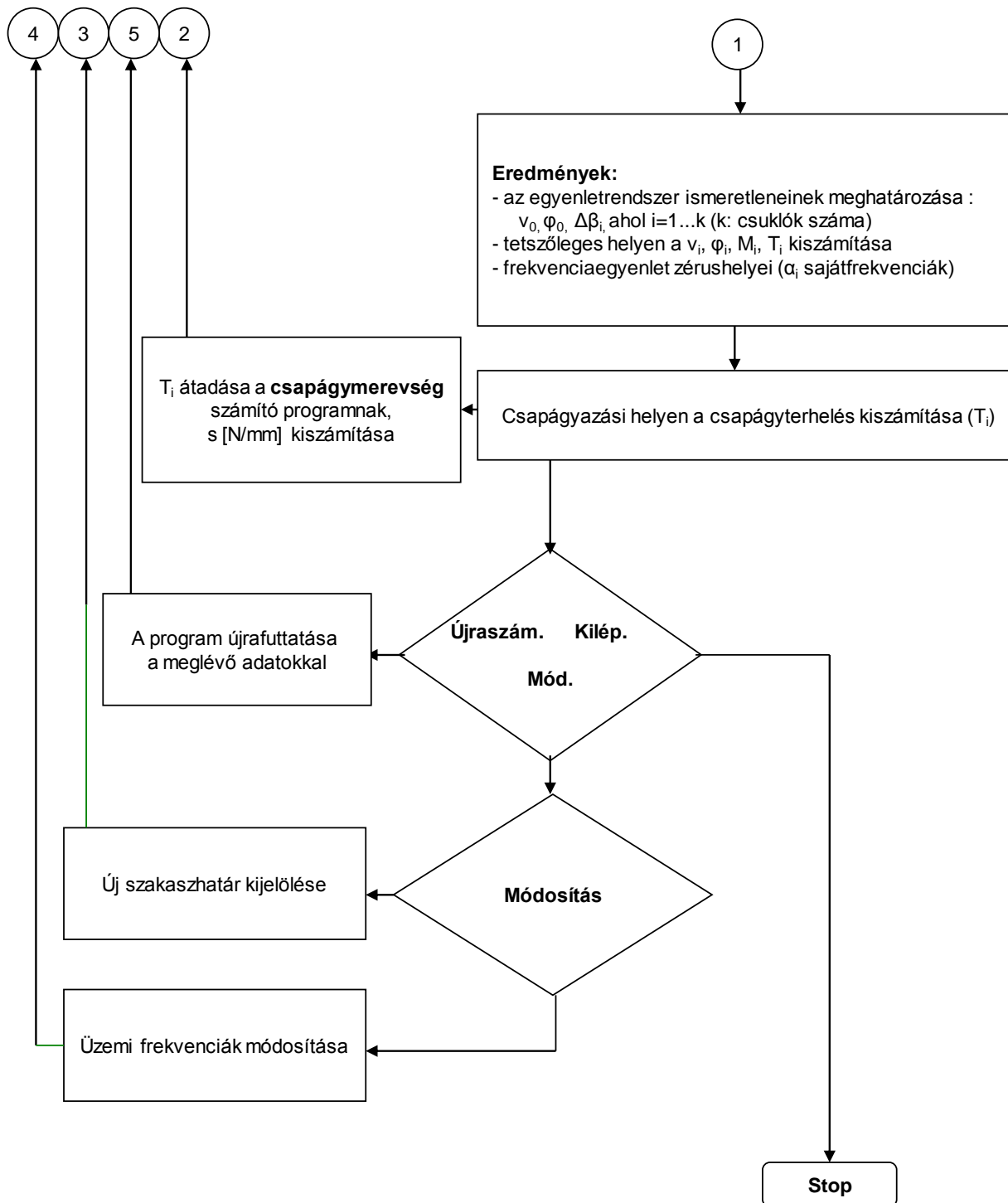


8.2 táblázat: A torziós program blokkdiagramja



8.3 táblázat: A hajlító program blokkdiagramja





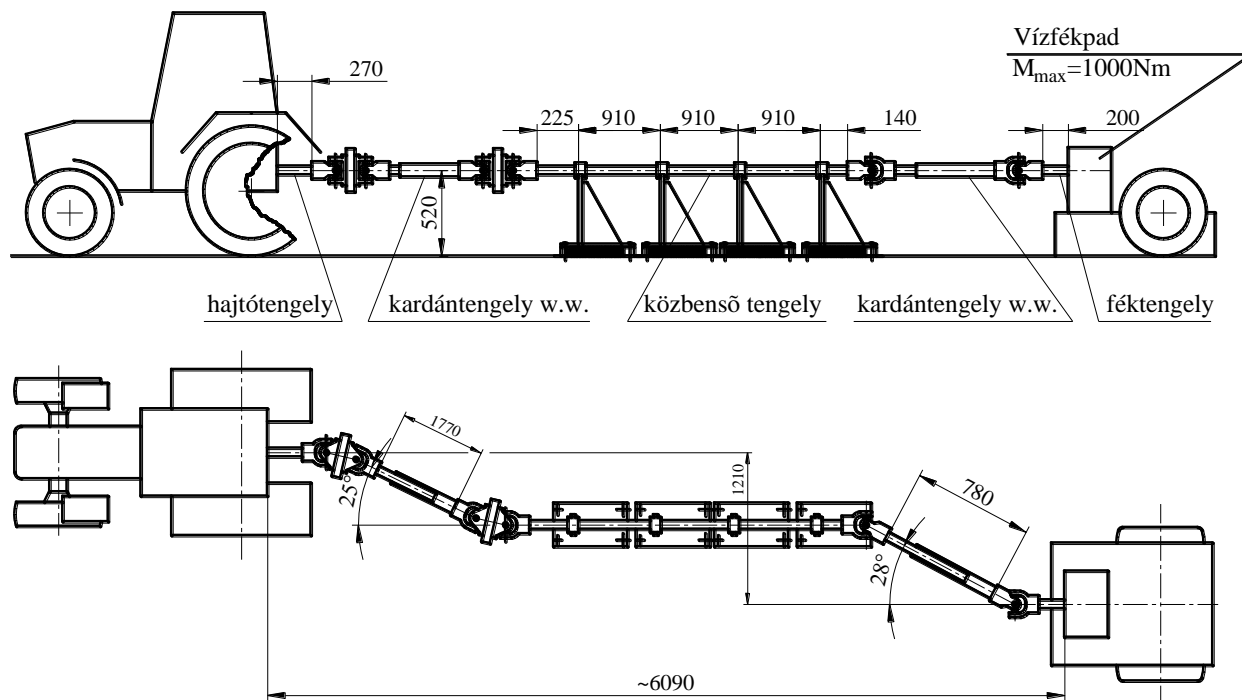


9. A próbapadi mérés kialakítása, követelmények

A dinamikai modellezés és a számítógépes szimulációs program elsődleges célja a tervezés fázisban a hajtásláncot érő terhelések meghatározása és a sajátfrekvenciák kiszámítása annak érdekében, hogy a hajtáslánc feladatának megfelelően vagy nyugodt járást, vagy rezonancia közeli állapotot biztosítson.

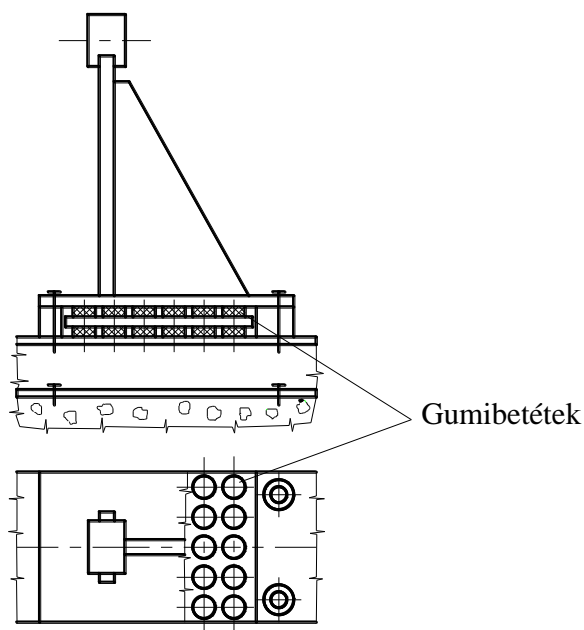
A másik alkalmazási terület a már működő hajtásláncok áttervezése a sajátfrekvenciák elhangolása céljából. A hajtásláncok összeállítása, szerelése különböző elrendezésben és paraméterekkel költséges és időigényes. A modellezéssel leszűkíthető a kör azokra a megoldásokra, melyeket célszerű ténylegesen megépíteni és a konstrukció helyességét méréssel igazolni. Bármelyik területen alkalmazzuk a modellezést, el kell végezni a modell illesztését a hajtáslánchoz. Az illesztéshez szükség van egy működő, megfelelően felműszerezett hajtásláncre és megfelelő mérés-technikai háttérre.

A továbbiakban egy konkrét példán keresztül mutatjuk be ennek a folyamatát. A próbapad a Walterscheid GmbH kísérleti üzemében került megépítésre Lohmarban (Németország). A próbapadon olyan, leginkább a mezőgazdaságban alkalmazott hajtásokat modelleztünk, ahol a mobil mezőgazdasági gépet traktorral vontatják és kardánhajtással hajtják meg. A kardánhajtás ennek megfelelően hosszú és több kardántengelyt tartalmaz. A 9.1 ábrán látható próbapad egy FIAT típusú traktorról kapta a hajtását, a munkagép terhelését pedig egy vízfékpadal helyettesítettük. A vízfékpad a vízzel telt térben hajtott járókeréken keresztül, a víz belső súrlódása révén alakítja át a traktor által biztosított mechanikai energiát hőenergiává. A nagy hőfejlődés miatt a vízfékpad rá volt kötve a vízhálózatra és a csatornarendszerre. Az átfolyó víz így vonta ki a folyamatosan fejlődő hőt a fékpadból. A traktor által biztosított hajtáslánc fordulatszám 0–540 1/min, terhelése pedig a vízfékpadal volt állítható. A mérések reprodukálhatóak voltak, ami azt jelenti, hogy azonos beállítások mellett a megismételt mérések, figyelembe véve a mérési eredmények szórását, hasonló eredményeket adtak. A hajtáslánc a következő mennyiségek mérésére volt műszerezve: a tengely fordulatszámának mérése, a tengelyt terhelő csavarónyomaték mérése, függőleges irányú csapágyerő mérése az egyik csapágybakban.



9.1 ábra: A próbapad kialakítása

A csapágybakok számát és annak merevségét a gumibetétek számának változtatásával lehetett módosítani (lásd 9.2 ábra). Ezen kívül a hajtásláncot különböző hosszban és szöghelyzetben lehetett összeszerelni.



9.2 ábra: Csapágybak konstrukciós kialakítása



9.1. A vizsgálati paraméterek és faktorok meghatározása

A modellalkotáshoz ki kell választani egy megfelelő numerikus jellemzőt (vizsgálati paraméter), melyet a mérések során vizsgálni fogunk. Ezt követően meg kell határozni valamennyi faktort, melyek hatást gyakorolnak a vizsgált folyamatra. A faktorokkal szemben támasztott követelmények [21]:

- irányíthatóság: megadott pontossággal beállítható az adott szintre,
- objektív mérhetőség,
- közvetlen hatása legyen a folyamatra,
- függetlenség: a faktorok ne legyenek egymásra hatással.

A faktorok egy-egy rögzített értékének kombinációja egy lehetséges kísérleti beállítás. A kísérleti eredmények felhasználhatók a vizsgált folyamat matematikai modelljének előállítására. Ez a modell a vizsgálati paraméterek és a faktorok közötti függvénykapcsolat. A hajlító rezgések vizsgálatánál kísérleti paraméternek y -t, az egyik csapágyazásra ható radiális irányú támasztóerő maximális és minimális értékének hányadosát, mint dimenzió nélküli mennyiséget választottuk. Ennek maximális értéke a rezonancia közeli állapotban lép fel. A kísérleti paraméter értékét (y) adott hajtáselrendezés mellett a következő faktorok határozzák meg:

- a tengelyek keresztmetszetének másodrendű nyomatéka: = X_1
- a tengelyek keresztmetszetének mérete: = X_2
- a tengelyszakaszok hossza: = X_3
- a hajtott elemek tehetetlenségi nyomatéka: = X_4
- a tengellyel együttforgó elemek tömege: = X_5
- csapágyak radiális rugómerevsége: = X_6

Tehát: $Y = Y_{(X_1, X_2, \dots, X_6)}$

A torziós rezgések vizsgálatánál kísérleti paraméternek a tengelyre ható torziós nyomatékok maximális és minimális értékének hányadosát célszerű választani. A faktorok a következők lesznek:

- a tengelyek torziós rugómerevsége: = X_1
- a hajtott elemek tehetetlenségi nyomatéka: = X_2
- a tengelyek szögkitérése: = X_3

Tehát: $Y = Y_{(X_1, X_2, X_3)}$

A dinamikai modellek faktorai a hajtáslánc egyes paramétereinek felelnek meg. Ezért a próbapadot úgy alakítottuk ki, hogy az egyes faktoroknak megfelelő paramétereket változtatni lehessen.

A mérések célja, hogy egyértelműen kapcsolatot találjunk a dinamikai modellek faktorainak módosítása és a mérési eredmények között. Ezért fontos, hogy a faktorok lehetőleg ne függjenek egymástól, vagy ha igen, akkor ezzel legyünk tisztában és a kapcsolatot matematikailag pontosan le tudjuk írni. Például, ha egy csapágyazási távolságot növeljük,



azzal természetesen változik a tengelyszakasz hossza, de változatlan tengely keresztmetszet mellett változik annak torziós rugómerevsége.

A próbapadon a következő beállítások végezhetőek el:

1. A csapágyazások merevségének változtatása a csapágybakok rugalmas lefogatásán keresztül. A merevséget a gumirugók számának változtatásával lehet beállítani.
2. A kardántengelyek hosszmeretének változtatása a teleszkóposan kialakított nyomatékkötés széthúzása, ill. összetolása által. Ezzel biztosítható a csapágyazási távolságok módosítása.
3. A csapágyazások számának változtatása pótlólagos csapágybakok beépítésével.
4. A csuklók szögkitérésének beállítása. A csuklószögek a hajtáslánc összeállításakor, a csapágybakok lerögzítésekor voltak beállíthatóak. Mérés közben ezek nem voltak módosíthatóak.
5. A tengelyre szerelt alkatrészeket modellező lendítőkerek pozíciójának beállítása a közbenső tengelyen, melyet kúpos szorítóhüvely alkalmazásával oldottuk meg.

9.2. A mérések végrehajtásának és kiértékelésének módszere

A 9. fejezetben több angol nyelvű szöveget tartalmazó mérési eredményt mutatunk be, ezért ezen szövegek fordítását itt közöljük:

Natural frequency: sajátfrekvencia

Moment of inertia of the engine: a motor tehetetlenségi nyomatéka

Force: erő

Torsional torque: csavaró nyomaték

Time: idő

Speed: fordulatszám

Cardan joint angle: kardáncsukló szögkitérés

Torsional spring constant of the first shaft: az első csukló torziós rugóállandója

Spring stiffness of the bearing: a csapágy rugómerevsége

Cardan shafts longitudinal dimension code: a kardántengelyek hosszirányú méretének jele

Radial bearing stiffness: a csapágy radiális csapágymerevsége

Radial bearing load: a csapágy radiális terhelése

A mérés során a hajtáslánc legkisebb sajátfrekvenciáját a hajtáslánc fordulatszámának lassú növelésével mértük ki. Az egyik csapágybakban kialakított erőmérő műszer hajlító rezonancia esetén, míg a hajtásláncba épített torziós nyomatékot mérő tengely torziós rezonancia esetén, a névleges értékek többszörösét mutatták.

Mivel a rezonancia kialakulásához elegendő idő szükséges, nagyon fontos a hajtáslánc fordulatszámának egyenletes és megfelelő mértékű növelése. Ha a fordulatszámot túl gyorsan növeltük, a rezonancia nem tudott kialakulni. A túl lassú növelés esetén pedig akkora lengési amplitúdók alakultak ki, amely a további fordulatszám növelését nem tette lehetővé.

A vizsgálatok során a csapágyerőt, a tengelyt terhelő csavaró nyomatékot és a fordulatszámot az idő függvényében mértük egy Spider 8 adatgyűjtő és mérőerősítő segítségével, majd a mérési eredményeket a Catman Professional mérőprogrammal értékeltük ki [22]. A mérés során fontos szerepe volt a fordulatszám növelés sebességének,

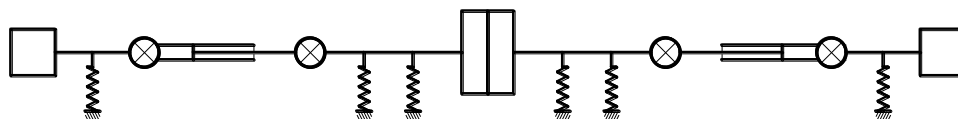
tehát a hajtás szöggyorsulásának. Ez határozza meg ugyanis a rezgési amplitúdók kialakulásához rendelkezésre álló időt a gyorsítási szakaszban. A fordulatszám többé - kevésbé egyenletes növelését a traktor gázpedáljának egyenletes lenyomásával próbáltuk biztosítani. A mérési eredményekből látható, hogy a mérések során nem tudtuk biztosítani az állandó szöggyorsulást, ami az azonos mérések között is a mérési eredmények közötti eltérésekhez vezetett. Az ebből adódó eltérés kb. 5% volt.

A következőkben közölt számítási és mérési eredményeket tartalmazó diagramokat csak jelleghelyes ábráknak tekintjük, ugyanis a modellezés és mérés alapjául szolgáló hajtáslánc részletes bemutatásától, annak geometriai és mechanikai paramétereinek, mint a szimulációs program bemenő adatainak ismertetésétől most eltekintünk.

9.2.1. Torziós lengések vizsgálata

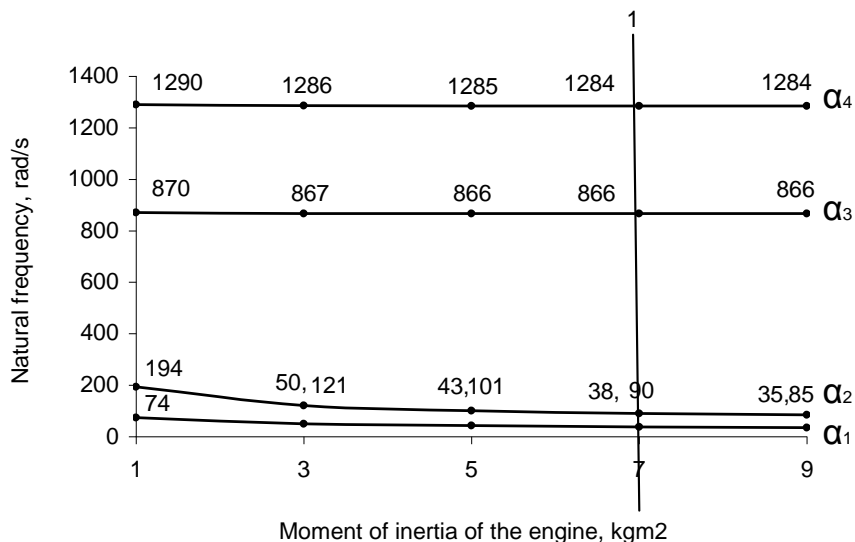
A torziós rezgéseket befolyásoló vizsgált paraméterek:

- a hajtáselemek tehetetlenségi nyomatéka
- a kardántengely hossza, mely meghatározza a tengely torziós rugómerevségét
- kardáncsuklók csuklósöge



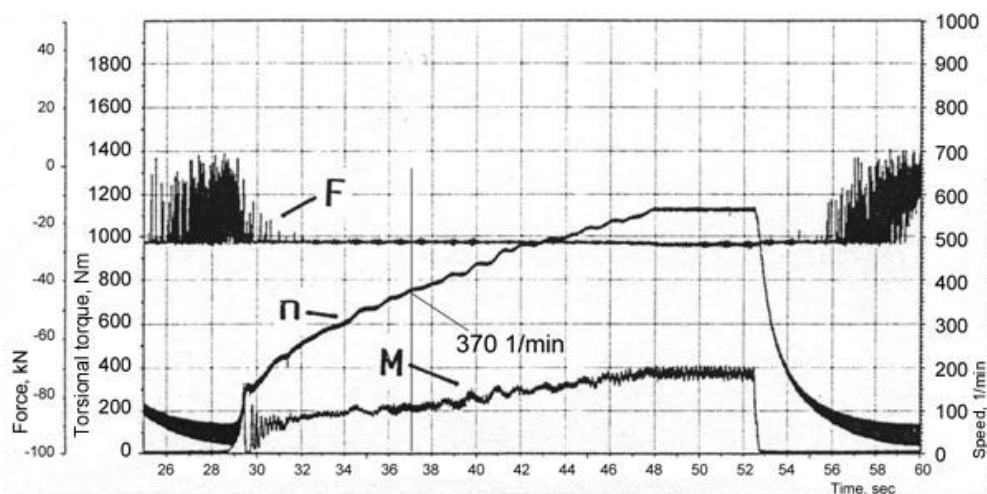
9.3 ábra: A torziós vizsgálatok hajtáselrendezése

A méréseket a 9.3 ábra szerinti hajtáselrendezésen végeztük. A 9.4 ábra a hajtáslánc egy adott elemének tehetetlenségi nyomaték változásának hatását szemlélteti a torziós sajátfrekvenciára. A számított legkisebb sajátfrekvencia egy rögzített tehetetlenségi nyomaték mellett 38 rad/s volt (363 1/min). A különböző csuklósögekhez tartozó mérési eredményeket a 9.5-9.7 ábrák tartalmazzák. Látható, hogy minél kisebb a csuklósög, annál kisebb a járulékos terhelésekből adódó gerjesztés és a rendelkezésre álló idő alatt kialakult rezgési amplitúdó.

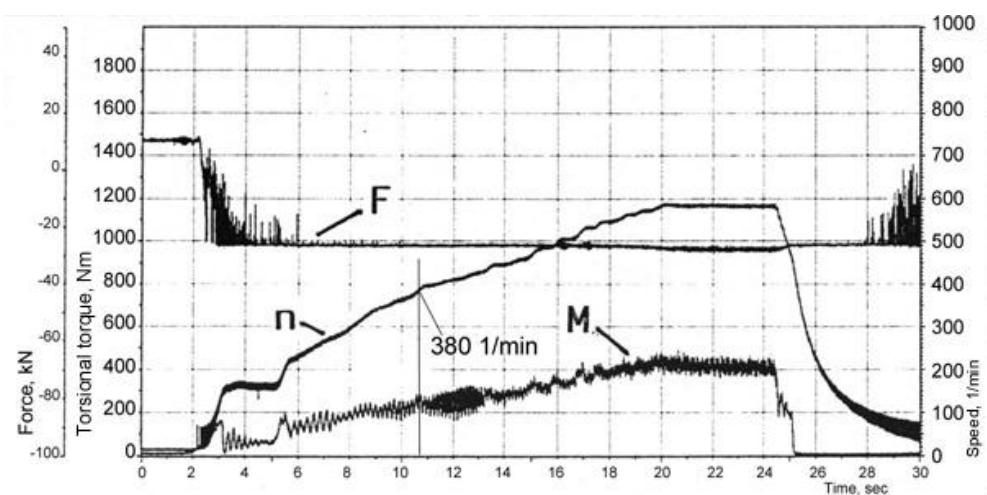


9.4 ábra: A tehetetlenségi nyomaték hatása a torziós sajátfrekvenciákra

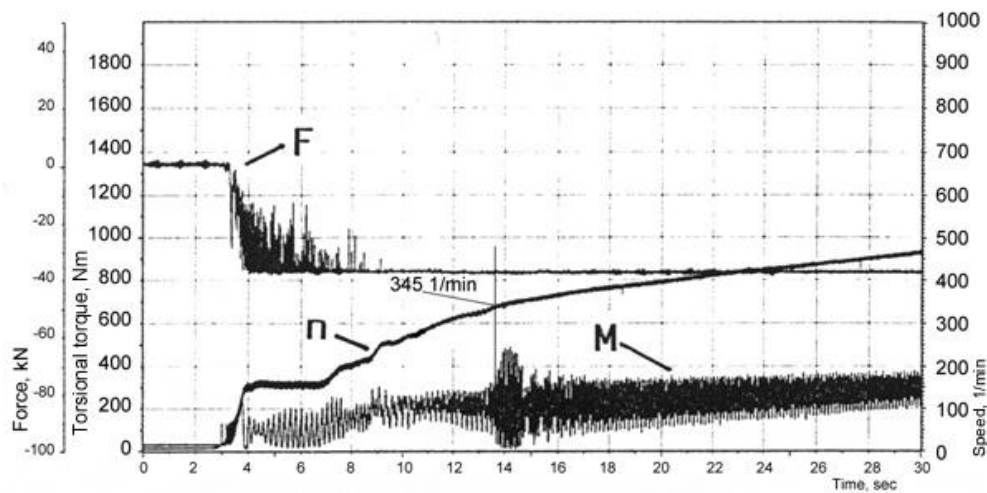
Forrás: [20]



9.5 ábra: A csuklószőgek hatása (csuklószőg: 0°) a torziós sajátfrekvenciákra
 Forrás: [20]



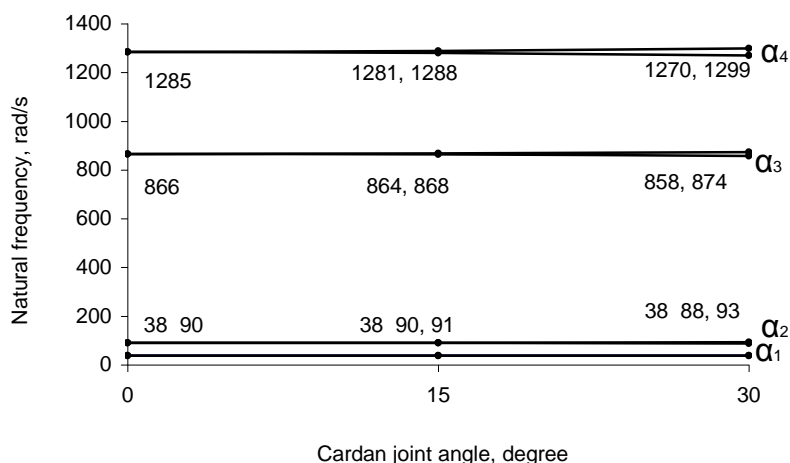
9.6 ábra: A csuklószőgek hatása (csuklószőg: 15°) a torziós sajátfrekvenciákra
 Forrás: [20]



9.7 ábra: A csuklószőgek hatása (csuklószőg: 30°) a torziós sajátfrekvenciákra
 Forrás: [20]

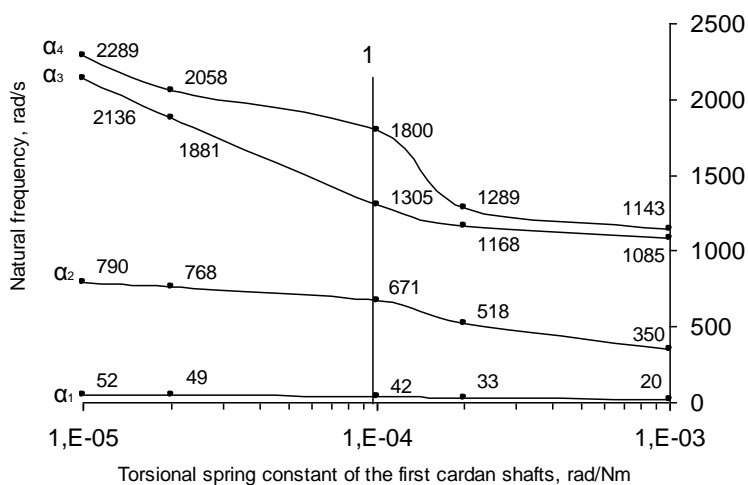


A csuklósögek növelésével a sajátfrekvenciák a szögelfordulás függvényében változnak. A 9.8 ábra a sajátfrekvenciák adott csuklósöghöz tartozó határértékeit adják meg.



9.8 ábra: Különböző csuklósögekhez tartozó torziós sajátfrekvenciák határértékei
Forrás: [20]

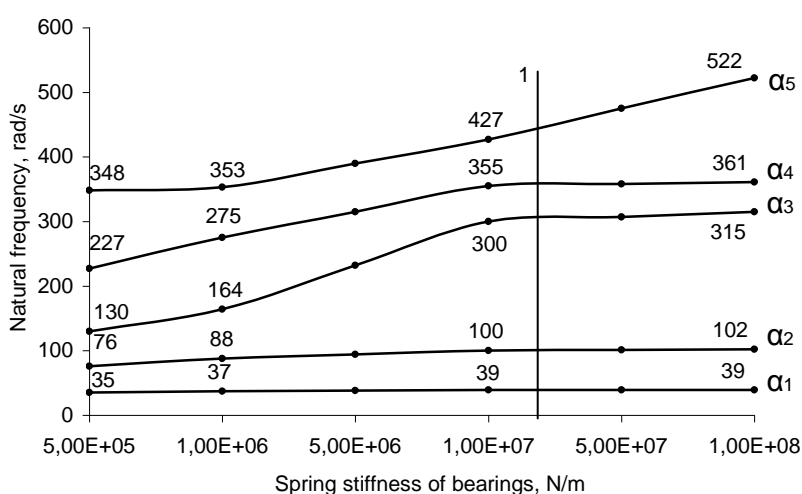
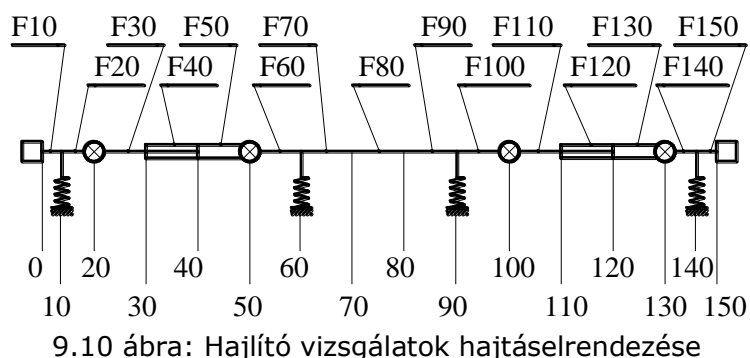
A 9.9 ábra a tengely torziós rugóállandójának hatását mutatja a torziós sajátfrekvenciákra. A tengely torziós merevsége vagy a keresztmetszeti méretekkel módosítható, vagy a hossz méretének változtatásával.



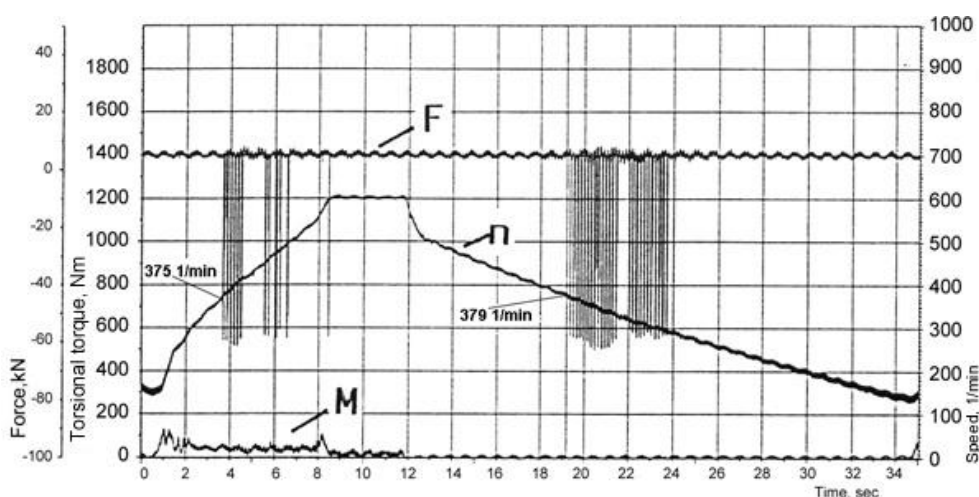
9.9 ábra: A tengely torziós rugóállandójának hatása a torziós sajátfrekvenciákra
Forrás: [20]

9.2.2. Hajlító lengések vizsgálata

A hajlító lengések vizsgálatát több hajtáselrendezésben elvégeztük, ezek közül egyet a 9.10 ábra szemléltet.



9.11 ábra: Az ágyazási merevség hatása a hajlító sajátfrekvenciákra
($s \sim 2 \cdot 10^7$ N/m) Forrás: [20]

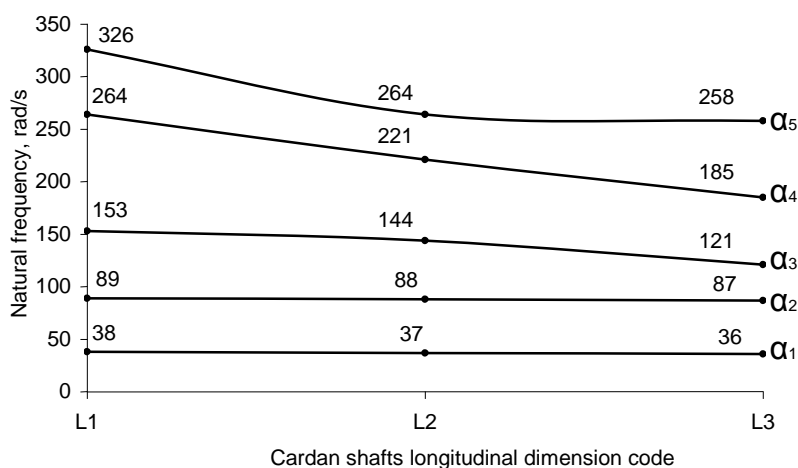


9.12 ábra: A hajlító sajátfrekvenciák mérési eredménye eltérő gyorsítással
($s \sim 2 \cdot 10^7$ N/m) Forrás: [20]

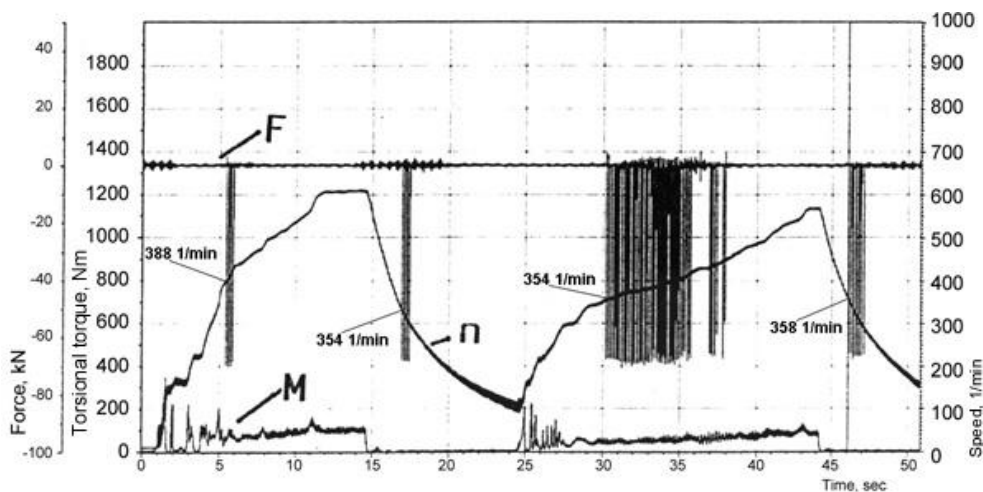
A 9.11 ábra az ágyazási merevség hatását mutatja a hajlító sajátfrekvenciákra. Az ágyazási merevséget a csapágybakba épített gumibetétek számával módosítottuk. Az adott

csapágmerevséghez tartozó legkisebb sajátfrekvencia értéke 39 rad/s volt, ami 372 1/min -nak felel meg. A mérési eredményt a 9.12 ábra szemlélteti a gyorsítási és motorfék üzemben.

A 9.13 ábrán szemléltetett számítási eredmény L_1, L_2, L_3 kóddal jelzett hajtáslánc hosszhoz tartozik, ahol $L_1 > L_2 > L_3$. Az L_2 hossz méretekhez tartozó mérési eredményeket a 9.14 ábra ismerteti.



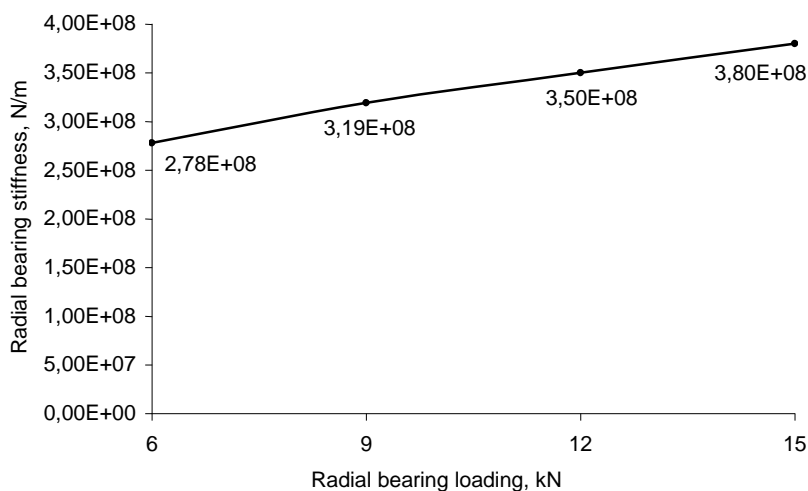
9.13 ábra: A kardántengely hossz méretének hatása a hajlító sajátfrekvenciákra ($s \sim 2 \cdot 10^7$ N/m,) Forrás: [20]



9.14 ábra: A kardántengely hossz méretének hatása a hajlító sajátfrekvenciákra ($s \sim 2 \cdot 10^7$ N/m, tengelyhossz: L_2) Forrás: [20]

Látható, hogy a 372 1/min számított érték helyett a mérési eredmények 354-388 1/min érték között adódtak. Ennek oka részben az eltérő gyorsítási sebességből adódó mérési pontatlanság, részben a változó csapágmerevség hatása a hajlító sajátfrekvenciákra.

A 9.15 ábra 2209.2RS.TV típusú beálló golyóscsapágy radiális rugómerevségét szemlélteti a csapágyterhelés függvényében.



9.15 ábra: A csapágyterhelés hatása a csapágymerevségre
Forrás: [20]

9.2.3. A mérési eredményekből levonható következtetések

9.2.3.1. A torziós lengések vizsgálati eredményei

- A kardáncsuklók szögkitérése esetén a torziós sajátfrekvenciák a csuklók szögelfordulás függvényében periodikusan változnak. A függvények középvértékeit a csuklószögek nem befolyásolják, ezek megegyeznek a szögkitérés nélküli értékekkel. Az egyes csuklók szögkitérése befolyásolja a megfelelő sajátfrekvencia, vagy frekvenciák változását. Ennek mértékét a frekvenciaegyenlet fejezi ki.
- A hajtáslánc tengelyeinek, a tengelyekkel együtt forgó elemek tehetetlenségi nyomatékának növelésével, valamint a hajtáslánc elemeinek torziós rugómerevségének csökkentésével a sajátfrekvenciák csökkennek.

9.2.3.2. A hajlító lengések vizsgálati eredményei

- A hajtáslánccal együtt forgó elemek tömegeinek, tehetetlenségi nyomatékainak, ill. a csapágyazási távolságok növelésével kisebb-nagyobb mértékben, de csökkennek a sajátfrekvenciák.
- A hajtáslánc csapágymerevségének növelése, tengelyeinek pótlólagos rugalmas felfüggesztése minden esetben a sajátfrekvenciák növekedését eredményezi. Újabb megtámasztással ugyanis a csapágyazási távolságok csökkennek, ezáltal a tengelyszakaszok hossza is.
- A hajtáslánc hajlító sajátfrekvenciái rezonancia esetén követik egy bizonyos mértékig az üzemi frekvenciát, ha a hajtáslánc ágyazása változó rugómerevségű. Bár a hajtáslánccot érő gerjesztő erők és nyomatékok nem befolyásolják közvetlenül a sajátfrekvenciák értékét, közvetlen hatásuk van a csapágyazások rugómerevségére. A csapágyterhelések növekedésével a csapágyazások rugómerevsége növekszik, mely a hajtáslánc hajlító sajátfrekvenciáinak növekedését eredményezi. Éppen ezért, ha a hajtáslánccot a kritikus fordulatszám lassan hajtjuk keresztül, a rezonancia tartomány kiszélesedik a kritikus fordulatszám növekedése miatt.



FELHASZNÁLT SZAKIRODALOM

- [1] Zsolt Tiba: Dynamic driveline modeling. Kiadó: Debrecen University Press 2010., 109 pages, ISBN 978-963-318-044-0
- [2] Ansel Ugural, NEW JERSEY INSTITUTE TECH: Mechanical Design: An Integrated Approach, 1st Edition Hardcover with access card, ©2004, ISBN-13 9780072921854
- [3] SKF General Catalogue
<http://www.skf.com/group/knowledge-centre/subscriptions/displayfactbox.html?itemid=tcm:12-121486>
- Letöltés dátuma: 2014. 08. 01.
- [4] OPTIBELT V-belt drives Power Transmission Technical manual
www.optibelt.com
- Letöltés dátuma: 2014. 07. 10.
- [5] BRANDO Power transmission belt selector
www.bando.co.jp
- Letöltés dátuma: 2014. 07. 10
- [6] REXNORD Chain Drive Design
http://www.rexnord-kette.de/fileadmin/downloads/qualitaetsketten_2009_DE.pdf
- Letöltés dátuma: 2014. 07. 05
- [7] Fenner Roller Chain Technical manual
<http://www.fptgroup.com/>
- Letöltés dátuma: 2014. 06. 05
- [8] REXNORD Link-Belt Drive and Roller Chain Catalog
<http://pdf.directindustry.com/pdf/rexnord-industries-llc/link-belt-drive-and-roller-chain-catalog/7386-89868.html>
- Letöltés dátuma: 2014. 06. 05
- [9] Schmelz, v. Seherr-Thoss, Auctor: Gelenke und Gelenkwellen
Springer-Verlag Berlin Heidelberg 1988, ISBN 3-540-18322-1
- [10] GKN Walterscheid GmbH: Spare Parts Catalogs
<http://www.gkn-walterscheid.de/en/downloads/spare-parts-catalogs/>
- [11] Duditz, F.: Kardangetriebe und ihre Anwendungen VDI-Verlag GmbH, Düsseldorf 1973.



[12] COOPER Power Tools: Universal Joints

<http://www.apexpowertools.com/news-events/MP5187NeedleScaler.cfm>

[13] VOITH: High-Performance Universal Joint Shafts

<http://www.voith.com/en/products-services/power-transmission/universal-joint-shafts-10128.html>

[14] Shigley J., Charles Mischke, Richard Budynas: Mechanical Engineering Design, 7th Edition Hardcover with access card, 1056 pages©2004, ISBN-13 9780072921939

[15] Molnár, L.; Varga, L.: Gördülőcsapágyazások tervezése Műszaki Könyvkiadó, Budapest 1997. ISBN 963-10-2073-8

[16] Terplán Zénó, Lendvai Pál: Általános Géptan. Tankönyvkiadó Budapest, 1989

[17] BMW 3 Series Sedan Catalogue

http://www.bmw.com/com/en/newvehicles/3series/sedan/2011/_shared/pdf/BMW_3series_sedan_catalogue.pdf?download=true&exporturi=/hu_rb/_shortcuts/prospektus/3aslimousine.jsp

Letöltés dátuma: 2015. 01. 01.

[18] Bosznay, Á.: Műszaki rezgésstan. Műszaki Könyvkiadó, Budapest. 1962

[19] Ludvig, Gy.: Gépek dinamikája. Műszaki Könyvkiadó, Budapest. 1983. ISBN: 9631048020

[20] Tiba, Zs.: Kardánhajtások lengéstanai viszonyai. Doktori értekezés 1998

[21] ADLER - MARKOVA GRANOVSZKIJ: Kísérletek tervezése optimális feltételek meghatározására. Budapest, Műszaki könyvkiadó 1977.

[22] Zsolt TIBA, Géza HUSI: Mechanical Design of a Mechatronics Systems: Laboratory Handbook, Debrecen: [University of Debrecen Faculty of Engineering], 2012, ISBN: 978 963 473 525 0, 152 pages

Belsőégésű motorok tervezése és vizsgálata

>> Szerzők: dr. Dezsényi György, dr. Emőd István, dr. Finichiu Liviu

>> ISBN: 963 19 0069 X