1949

PROBLÉMAALAPÚ MEGKÖZELÍTÉS ALKALMAZÁSA MATEMATIKAÓRÁN ÉS HATÁSAI FELSŐ TAGOZATOS DIÁKOK MOTIVÁCIÓJÁRA, GONDOLKODÁSMÓDJÁRA ÉS TANULÁSI EREDMÉNYEIRE

Egyetemi doktori (PhD) értekezés

Szerző: Báró Emőke

Témavezetők: Herendiné Dr. Kónya Eszter

Dr. Kovács Zoltán

DEBRECENI EGYETEM

Természettudományi és Informatikai Doktori Tanács

Matematika- és Számítástudományok Doktori Iskola

Debrecen, 2024

Ezen értekezést a Debreceni Egyetem Természettudományi és Informatikai Doktori Tanács Matematika- és Számítástudományok Doktori Iskola programja keretében készítettem a Debreceni Egyetem természettudományi doktori (PhD) fokozatának elnyerése céljából.

Nyilatkozom arról, hogy a tézisekben leírt eredmények nem képezik más PhD disszertáció részét.

Debrecen, 20. . . . .

…………………………

a jelölt aláírása

Tanúsítom, hogy Báró Emőke doktorjelölt 2020- 2024 között a fent megnevezett Doktori Iskola Didaktika programjának keretében irányításommal végezte munkáját. Az értekezésben foglalt eredményekhez a jelölt önálló alkotó tevékenységével meghatározóan hozzájárult. Nyilatkozom továbbá arról, hogy a tézisekben leírt eredmények nem képezik más PhD disszertáció részét.

Az értekezés elfogadását javasolom.

Debrecen, 20.. . . . . *……………………….......................*

a témavezető aláírása

Problémaalapú megközelítés alkalmazása matematikaórán és hatásai felső tagozatos diákok motivációjára, gondolkodásmódjára és tanulási eredményeire

Értekezés a doktori (Ph.D.) fokozat megszerzése érdekében
a matematika- és számítástudományok tudományágban

Írta: Báró Emőke okleveles matematika szakos tanár

Készült a Debreceni Egyetem Matematika- és Számítástudományok doktori iskolája (Didaktika programja) keretében

Témavezetők: Herendiné Dr. Kónya Eszter
Dr. Kovács Zoltán.

Az értekezés bírálói:

Dr. ....
Dr. ....

A bírálóbizottság:

elnök: Dr. ....
tagok: Dr. ....
Dr. ....
Dr. ....
Dr. ....

Az értekezés védésének időpontja: 2024 ……………… … .

Köszönetnyilvánítás

Köszönettel tartozom témavezetőimnek, Herendiné Dr. Kónya Eszternek és Dr. Kovács Zoltánnak, akik az elmúlt években egyengették az utamat, időt és energiát nem spórolva, online meetingeken vagy élő találkozásokon tanácsokkal láttak el, irányt mutattak, és hozzásegítettek ahhoz, hogy szakmailag és az életben fejlődhessek.

Köszönet az MTA-ELKH-ELTE Matematikadidaktikai Kutatócsoportnak a megvalósult kutatások támogatását, és hogy segítségükkel több nemzetközi tudományos konferencián részt vehettem.

Köszönöm a székelyudvarhelyi Orbán Balázs Általános Iskola vezetőségének, munkaközösségének, hogy beleegyezésükkel, bátorításukkal folyamatosan támogattak kutatásom során. Külön köszönet illeti az iskola diákjait, akik nem csak részt vettek a kutatásban, hanem lelkesedésükkel és odaadásukkal szebbé tették ezt a folyamatot számomra.

Köszönet illeti a kolozsvári Babes-Bolyai Tudományegyetemen tanító volt tanáraimat és az összes olyan tanáromat, akik egyengették utamat. Külön köszönettel tartozom néhai Dr. Varga Csaba tanár úrnak, aki elindított ezen a pályán, aki rendkívül fontosnak tartotta, hogy szeressem, amit csinálok, és biztatott álmaim követésére.

Nagyon hálás vagyok családomnak, férjemnek és családjának, akik mindig mellettem álltak, támogattak döntéseimben, ha kellett vigasztaltak, bátorítottak, biztattak, és minden körülmények között szerettek és szeretnek.

Hálás vagyok a jó Istennek, hogy erőt, energiát és hitet adott a cél kitűzéséhez és a munka elvégzéséhez.

Köszönöm!

A Kulturális és Innovációs Minisztérium ÚNKP-23-3 kódszámú Új Nemzeti Kiválóság Programjának a Nemzeti, Kutatási, Fejlesztési és Innovációs Alapból finanszírozott szakmai támogatásával készült.

Új Nemzeti Kiválóság Program

Kulturális és Innovációs Minisztérium

A dolgozat megírását támogatta az “Agenția de Credite și Burse de Studii” (A.C.B.S.). This thesis was also supported by the Romanian Ministry of Education through “Agenția de Credite și Burse de Studii” (A.C.B.S.).

Tartalomjegyzék

Bevezetés

Az elmúlt években megfigyelhettük, hogy folyamatosan csökkent a diákok érdeklődése a matematika és a természettudományok iránt. A nemzetközi eredmények mellett különösen szembetűnő a magyar tanulók negatív viszonyulása a természettudományi tantárgyakhoz (Balázsi, 2012; Csíkos et al., 2020). Egyes tanulók emiatt szándékosan döntenek úgy, hogy nem tanulnak felsőoktatásban matematikát vagy nem választanak matematikához kapcsolódó karriert. A nemzetközi felmérések arra mutatnak rá, hogy ez az attitűd különösen jellemző a Magyarországon vagy Romániában tanuló diákokra (OECD, 2016). Idővel tehát egyre kevesebb diák fog matematikával kapcsolatos továbbtanulást választani, ami hozzájárul nemcsak a matematika tanári pályaválasztás, de a matematika igényes szakokon történő továbbtanulás háttérbe szorulásához is. Matematikatanárként személyes elköteleződésként tekintettem e probléma orvoslására.

Mivel a diákok matematika iránti érdeklődésében bekövetkezett visszaesés gyökerei a tárgy tanításának módszereiben is kereshetők (Rocard et al., 2010), ebben a dolgozatban elsősorban a matematika tanítás módszereire összpontosítunk. Ezért egy olyan módszert kerestünk és teszteltünk, amely bizonyítottan pozitív hatással van a diákok matematikával kapcsolatos attitűdjére, mindemellett más területekre is kedvezően hat.

A szakirodalom szerint erre alkalmas lehet a problémaalapú tanulási környezet kialakítása, amely ösztönzi a tanulók belső motivációját (Hmelo-Silver, 2004; Sari et al., 2019). Csíkos (2010) is a problémaalapú tanulás eszméjének felkarolására buzdít a tanulás iránti kedvező attitűd és a személyiség más, nem kizárólag kognitív szférához tartozó jellemzőiben bekövetkezett pozitív változások miatt. Célunk volt tehát megtanítani a tananyagot úgy, hogy a diákoknak kedve legyen megtanulni azt, mindazonáltal a beavatkozás egyéb területekre is pozitív hatással legyen, például tanulási eredmények, kritikus gondolkodás. Ennek érdekében a problémaalapú tanulást ezen cél eszközeként használjuk.

A problémaalapú tanítási módszereket a matematika oktatásban olyan környezetként értelmezzük, amelyben a tanulónak lehetősége van problémahelyzetek vizsgálatára, kritikus elemzésre és magyarázásra, indoklásra, érvelésre (Csíkos, 2010). A kritikus elemzés, indoklás, érvelés arra utal, hogy a kritikus gondolkodás a problémaalapú tanulás velejárója. Ezt az is alátámasztja, hogy a problémaalapú módszerek a motivációra mért pozitív hatáson kívül potenciálisan fejlesztik a tanulók kritikai gondolkodását, sőt növelhetik a tanulói bevonódást (Mandeville & Stoner, 2015). Kutatásunkban ezen területeken vizsgáltuk a módszer hatékonyságát egy négy évig tartó akciókutatás keretében a felső tagozatos korosztályban. Elemzéseink kiterjednek a diákok tanulási eredményeire, különös tekintettel algebrai gondolkodásmódjuk fejlesztésére.

A felsoroltak tanulmányozása lehetővé tette a módszer mélyebb megértését és ezáltal a kutatási terület szakirodalmának bővítését. Itt főként a problémaalapú tanulás motivációra mért hatásának vizsgálatára gondolunk, hisz a korábbi kutatások vagy rövidtávúak voltak vagy a teljes tanterv problémaalapúvá formálását tűzték ki célul. Amellett, hogy keresztmetszeti beavatkozásokat is beiktattunk, egy hosszú távú, longitudinális vizsgálatot is végeztünk. Ennek során a kiválasztott témaköröknek csak bizonyos leckéit terveztük a problémaalapú módszer alapján, nem törekedtünk kizárólagosságra.

A motiváció mellett vizsgáltuk még a problémaalapú tanulás hatását egyéb területekre is, például kritikus gondolkodásra, bevonódásra. Ezen hatások vizsgálatának szükségességét az Ambrus (2004) által jelzett probléma is alátámasztja: *különösen a matematikatanításban áll fenn a veszélye annak, hogy a tanár csak a kognitív célokra figyel*, amelyek könnyen operacionalizálhatók és ellenőrizhetők. Így ebben a dolgozatban az affektív célokra különösen figyeltünk, mert amellett, hogy az attitűdök közvetlenül befolyásolják azt, hogy milyen eredményeket érnek el a tanulók, visszacsatolást nyújthatnak az egyes beavatkozások pozitív vagy negatív hatásairól (Csapó, 2000). Mindezeket alapul véve a dolgozat fejezetei a problémaalapú megközelítést alkalmazó tanulás hatásait vizsgálják motiváció, bevonódás, kritikus gondolkodás, algebrai gondolkodás és tanulási eredmények szempontjából.

Az első fejezetben a szakirodalom tanulmányozásán keresztül kutatásunk elméleti hátterét mutatjuk be, kiindulva általánosan a tanulás és a matematika tanulás elméleteiből, majd a probléma, problémamegoldás, problémaalkotás fogalmainak bemutatása után a problémaalapú tanulást

definiáljuk. A fejezet további része a problémaalapú tanulás és tanulói gondolkodás, tanulási eredmények, motiváció, bevonódás kapcsolatához tartozó jelentősebb kutatási eredményeket mutatja be.
A 2. fejezet a kutatási kérdésekről, míg az 3. fejezet a kutatás körülményeiről szól. A 4-9. fejezetekben a kutatás eredményeire térünk rá. A 4. és 5. fejezet a diákok motivációjával foglalkozik. A 6. fejezet a problémaalapú tanórán megjelenő kritikus gondolkodást tárgyalja pármunka során alkalmazott problémamegoldás keretében. Ebben és a 7. fejezetben a diákok kritikus és algebrai gondolkodásmódját elemezzük. Az algebrai gondolkodás vizsgálatát a diákok kora indokolja. A felsős diákok (10-14 év) egy átmeneti szakaszban vannak az aritmetikai és algebrai gondolkodás között (Rivera, 2013), ennek az átmenetnek a feltérképezésére törekszünk. Az algebrai gondolkodásra vonatkozó vizsgálataink már a beavatkozás eredményességére utaló választ is adnak. További eredményességre vonatkozó elemzéseink a tanulási kimenetelhez kapcsolódnak. Egy tanmenetből kiválasztott fejezetet problémaalapú módszerrel tanítva, elő- és utótesztekkel vizsgáljuk a tananyag elsajátításának mértékét a 8. fejezetben. Végül pedig annak érdekében, hogy a diákok bevonódásáról is képet kapjunk, a 9. fejezetben a négy éven keresztül követett diákok rövid önbeszámolói által a matematikai bevonódás indikátorait és facilitátorait keressük.
A dolgozat zárásaként összefoglaljuk tapasztalatainkat, eredményeinket, összehasonlítva azokat a szakirodalomban olvasottakkal, majd vázolunk néhány további kutatási lehetőséget.

1. Elméleti áttekintés

1.1. A tanulás

A tanulás a legáltalánosabb emberi tevékenység, hiszen mindenki mindig mindenhol tanul, ugyanakkor bonyolult, mert az egész személyiségünk aktivitását igényli, és az egész személyiségünkre kihat (Lappints et al., 2002). A tanulás azonosítható a megértésre való törekvéssel (Brooks & Brooks, 1993). A tanuláspszichológiai elméletek eltérően definiálják a tanulás fogalmát (Kelemen, 1988), de közös bennük annak hangsúlyozása, hogy a tanulás hosszabb távú, adaptív változást jelent (Gaskó et al., 2006). A tanulással kapcsolatban számtalan koncepció látott napvilágot, amelyeket tanuláselméleteknek nevezünk (Lappints et al., 2002), ilyenek például a behaviorista, a kognitív és a konstruktív tanuláselméletek (Seel, 2012).

A behaviorista és a kognitív szemlélet szerint a tanulási folyamat külső hatások függvénye, a konstruktivizmus értelmében viszont belső hatások következménye. A konstruktivizmus szerint tanulás akkor jön létre, amikor a tanuló a saját kontextusában ad jelentést tapasztalatainak. Ebből adódik, hogy a behaviorista és kognitív szemlélet tanár- és tananyagcentrikus, a konstruktív megközelítés viszont tanuló- és problémaközpontú. Mivel mi (a szerző és a témavezetők) leginkább a konstruktivista tanulási szemlélettel tudunk azonosulni, a matematika tanulása és tanítása során olyan jellegű környezetet próbáltunk kialakítani és vizsgálni, amelyben a tanulók, valamint az általuk megoldandó problémák vannak a középpontban.

1.2. A matematika tanulása

Az elmúlt évtizedekben a matematika tanulásának és tanításának kutatása önálló tudományos kutatási területté vált. Ennek a területnek a kiemelt célja a matematikai ismeretek és készségek elsajátítása, fejlesztése mögött meghúzódó folyamatok jobb megértése, hasznosítása, értékes eszközök és hatékony tanulási környezetek tervezése.

Hosszú időn keresztül a matematikatanulás csak intézményesített formában volt jelen és készségekre alapozott (a matematika tanulása egyéni, főként memorizálásból álló tevékenység, amelyet a tanár adhat át).

Sok vitának volt alapja a matematika tanítás célja, tartalma, tanítási módszerei, eszközei, még a matematikatanárok között is. Az a nézet, hogy a tanulás konstruktív folyamat, ma már általánossá kezd válni a matematikát oktatók körében.

1.3. A probléma fogalma

“a matematika valójában problémákból és megoldásokból áll” (Halmos, 1980, p. 519)

A matematikaoktatáshoz kapcsolódó kutatásokban a „probléma” kifejezés nehezen körülhatárolható fogalom, ami bizonyos nehézségekhez és félreértelmezésekhez vezethet (Schoenfeld, 2016).
Problémának nevezzük azokat a helyzeteket, amelyekben „bizonyos célt el akarunk érni, de a cél elérésének útja számunkra rejtve van” (Lénárd, 1984, p. 37) Tehát minden olyan kérdés, feladat, amelyre a választ vagy a megoldást nem tudjuk azonnal, pontosan megadni, problémának tekinthető. A matematikaoktatásban, probléma alatt olyan feladatot értünk, amelynek a megoldásához szükséges eszköz vagy módszer ismeretlen, vagy több ismert eszköz, módszer variálására van szükség, és ez nem nyilvánvaló a feladatmegoldó számára. Ugyanakkor a problémának van egy relatív és szubjektív jellege is, mert egy bizonyos kérdés vagy feladat problémát okozhat egyes személyeknek, míg mások rutinfeladatként kezelik azt (Schoenfeld, 1992). Tehát a probléma több szempontból is megközelíthető, függ a problémamegoldó készségeitől és képességeitől, a probléma természetétől, a kontextustól, amelyben megjelenik, és felvázolásának módjától (Jonassen, 2007).

1.3.1. Problémamegoldás

Santos-Trigo (2020) szerint a problémamegoldás egy folyamat, amelyben a probléma mentális reprezentációját megalkotjuk, azt alkalmazzuk, a folyamat végén pedig megoldást találunk.
A matematika és a matematikaoktatás problémamegoldási modelljeit nézve, fázismodelleket találunk, amelyeket a szerzők a saját vagy az általuk ismert személyek problémamegoldó folyamatainak megfigyelésével alakítottak ki (Rott et al., 2021). A problémamegoldási folyamatok fázismodelljeinek két „alaptípusát” különböztetjük meg,

amelyek a pszichológiában és a matematika-didaktikában fejlődtek ki. Minden további modell hozzárendelhető ezen két típus, az intuitív típus és a logikai típus valamelyikéhez (Neuhaus, 2001). Az intuitív modellek különleges hangsúlyt fektetnek a tudatalatti tevékenységekre a problémamegoldás folyamatában (Duncker, 1945; Hadamard, 1945; Poincare, 1914) és általában 4 fázist foglalnak magukba: (1) előkészület – a problémamegoldó hosszú időn át keresi, de nem találja a megoldást egy problémára, (2) inkubáció – a problémamegoldó máson gondolkozik, félreteszi a problémát, (3) megvilágosodás – bizonyos idő után hirtelen egy zseniális ötlet megjelenése és (4) ellenőrzés. Mivel az inkubációs fázis ezekben a modellekben akár napokat, heteket vagy hónapokat jelenthet, ugyanakkor a problémamegoldó folyamatok az iskolában általában rövidebbek, a dolgozat további részében a logikai típusú modellekre fogunk koncentrálni. A logikai modellek közül Pólya György (1973) híres négyfázisú modelljét mutatjuk be, amely a következő lépésekből áll: (1) a probléma megértése, (2) tervkészítés, (3) terv végrehajtása és (4) megoldás vizsgálata. Mind a négy, de főként az utolsó pont szorosan kapcsolódik a problémaalkotás témaköréhez, ezt a következő fejezetben részletesen tárgyaljuk.

Pehkonen (1997) a problémaalkotást egy sajátos problémamegoldásnak tekinti, míg más kutatók (Baumanns & Rott, 2021; Dickman, 2014) a kettőt hasonló, de jellemében eltérő tevékenységként azonosítják. Mindkét nézőpont szerint a problémamegoldás és problémaalkotás szorosan kapcsolódik egymáshoz (Cai & Hwang, 2002).

1.3.2. Problémaalkotás

Az utóbbi évtizedekben a problémaalkotásnak egyre nagyobb figyelmet szentelnek a szakirodalomban (English, 2020; Koichu, 2020), s ez különböző értelmezések megjelenéséhez vezetett (Baumanns & Rott, 2021). Silver (1994) megközelítése az egyik legismertebb, eszerint a problémaalkotás magába foglalja az egyedi helyzetekre épülő új problémák kitalálását és a meglévő problémák újrafogalmazását. Stoyanova és Ellerton (1996) úgy jellemzi a problémaalkotást, mint lehetőséget, amelyben a tanulók személyes értelmezéseket alkotnak konkrét helyzetekről, és azokat matematikai problémákká alakítják át.

Ebben a dolgozatban a Cai és Hwang (2020) értelmezésére támaszkodunk, amely szerint a problémaalkotás olyan tevékenységeket foglal magába, amelyek támogatják és ösztönzik a tanárokat és a diákokat egy probléma vagy feladat adott kontextus alapján történő megfogalmazására (újrafogalmazására).

Papadopoulos és munkatársai (2021) öt, nem feltétlen diszjunkt kategóriába sorolják a problémaalkotás definícióit: (1) csak új problémák alkotása, (2) létező vagy ismert problémák újrafogalmazása, (3) problémák generálása és/vagy újrafogalmazása, (4) kérdések felvetése, és (5) modellezés. A problémaalkotást kiváltó tényezők szerint problémát alkothatunk szabadon, adott válaszhoz, adott információhoz, adott helyzethez és adott megoldási módhoz (Stoyanova, 1998). Ugyanakkor a problémaalkotási tevékenységeket csoportosíthatjuk aszerint, hogy mikor történnek a Pólya-féle probléma megoldási fázisokhoz képest (Silver, 1994):

(1) A problémamegoldás előtt: problémát alkothatunk adott helyzethez, ezután az általunk alkotott problémát oldjuk meg. A probléma forrása lehet például kísérletezés, melynek során sejtéseket fogalmazhatunk meg.

(2) A probléma megértésekor: speciális esetek alkotása, a probléma átfogalmazása.

(3) Tervezés-végrehajtás folyamán: rokon problémák, segédproblémák, részproblémák megfogalmazása.

(4) A megoldás vizsgálata során új probléma alkotása a célok, feltételek, adatok változtatásával, azaz általánosabb vagy speciálisabb probléma kitűzése az eredetihez képest.

Bármely fázisában vizsgáljuk a tevékenységet, elmondható róla, hogy a problémaalkotás kognitív feladat (Cai & Hwang, 2002), amely megköveteli a tanulóktól, hogy gondolkodásukat kiterjesszék, elmélyítsék (Papadopoulos et al., 2021). Koichu (2020) szerint a problémaalkotó tevékenységek tantárgypedagógiai szükségleteket elégítenek ki, például a problémaalkotás alkalmazható didaktikai, vagy diagnosztikai/értékelésre alkalmas eszközként.

Azt már láttuk, hogy problémaalkotási tevékenységet miért érdemes bevinni az osztályterembe, viszont bizonyos módszerek a „hogyan?" kérdésre is választ adnak. Ellerton (2013) aktív tanulási keretrendszere

(Active Learning Framework, ezután ALF-nak nevezve) természetes módon kapcsolja össze a problémamegoldást a problémaalkotással. Az ALF a problémaalkotás osztálytermi megvalósítására alkalmas módszer, ami négy egyszerű, különálló szakaszra bontható:

1. szakasz: tanári magyarázat, amelyben a tanár bemutat egy modellfeladatot és annak megoldási módját;

2. szakasz: gyakorlás, amelyben a diákok a modellfeladathoz hasonló problémákat oldanak meg;

3. szakasz: problémaalkotás, amelyben a diákok a modellfeladat struktúrájához hasonló feladatot tűznek ki;

4. szakasz: osztálymegbeszélés, amelyben a tanulók egymás feladatait beszélik meg, és oldják meg.

Ezt a négy szakaszt az ALF keretrendszer implementálása során kibővítettük, az általunk alkalmazott változatot később, saját kutatásunk bemutatásával vázoljuk. A problémaalkotási tevékenységeket az ALF keretrendszert szem előtt tartva terveztük, mert természeténél fogva kapcsolja össze a problémaalkotást a problémamegoldással. Ezekre a komponensekre pedig mi a problémaalapú tanulás két fő elemeként tekintünk, melyek lehetőségeket adnak a problémahelyzetek elemzésére. Azért, hogy teljes legyen a kép, szükséges megemlítenünk azokat a heurisztikus stratégiákat, amelyeket a problémamegoldás során alkalmaztunk.

1.3.3. Heurisztikus stratégiák

A heurisztikus, mint melléknév azt jelenti, hogy „felfedezésre szolgáló" (Pólya, 1973, p. 112), és a cselekvés általi tanulás elvére utal (lásd aktív tanulás, konstruktivista szemlélet). Pólya (1973) a heurisztikákat ökölszabályokként értelmezi, amelyek segítségével előrehaladhatunk egy probléma megoldásában. Schoenfeld (1985) szerint a heurisztikák inkább általános stratégiai javaslatok, amelyeket felfedezéshez, elemzéshez és nem rutin feladatok (problémák) tárgyalásához használhatunk fel. Pólya szerint a heurisztika tanulmányázásának vannak gyakorlati céljai, amelyek a problémamegoldásban, különösen a matematika tanulásában és tanításában hasznosíthatók, például a diákok gondolkodásmódjának megismerése.

Pólya alapján a problémamegoldáshoz kapcsolódó kutatások első fázisa a heurisztikus gondolkodásra, stratégiákra fektetette a hangsúlyt. Abban a feltételezésben, hogy a heurisztikus képzés valóban javítja a hallgatók problémamegoldó képességét, néhány kutató feltette a kérdést: „De jó-e a heurisztika mindenkinek?”. Schoenfeld (1979) kontrollcsoportos kutatással kimutatta, hogy minden heurisztikus stratégiát tanuló hallgató javított az előteszttől az utótesztig, míg a kontrollcsoportból csak egy tanuló ért el hasonló haladást. Megvizsgálták a diákok iskolai matematikáról alkotott véleményét is. Minden heurisztikus stratégiákat is tanuló diák azt állította, hogy a matematika hasznos, és példákat hozott mindennapi alkalmazásokkal, míg más tanulók a matematikát kevésbé ítélték hasznosnak (Liu, 2003). Ugyanakkor a heurisztikával tanuló diákok kitartóbbnak bizonyultak a problémamegoldás terén. Singh és munkatársai (2018) tanulmánya is azt mutatja, hogy a heurisztika alkalmazása pozitív hatással van az érettségiző és egyetemista tanulók matematikai gondolkodásának fejlődésére, segíti őket abban, hogy a felfedezés útján különféle problémák megoldásának módjait találják ki. Mindezekből következik, hogy olyan tanulási környezetet kell teremteni az osztályteremben, amely lehetőséget ad az egyéni felfedezésekre és elősegíti a matematikai érvelést (Reiss & Renkl, 2002). Erre egy lehetséges útnak tűnik a problémaalapú megközelítést alkalmazó órák (továbbiakban problémaalapú órák) tervezése és megvalósítása. A problémaalapú órákhoz a következő heurisztikus stratégiákat választottuk ki: a visszafelé gondolkodás, a mintakeresés, az ábrák rajzolása és a probléma átfogalmazása. Választásunkat a diákok életkori sajátosságai és a tananyag témakörei indokolják, illetve hogy ezek a gondolatmenetek, gondolkodási struktúrák igen gyakran alkotják a feladatgyűjtemények, feladatsorozatok összeállításának bázisát (Vásárhelyi et al., 1996). Az egyes stratégiákat a kutatásban alkalmazott problémák kapcsán mutatjuk be részletesebben.

1.4. Problémaalapú tanulás

A problémaalapú tanulás koncepciója az 1950-es 1960-as évekből származik. Elsőként talán Dewey (1910) fogalmazta meg, hogy a tanulóknak az ismereteket aktívan, cselekvő, felfedező módon kell átadni. Dewey munkájában az aktív tanulás bevezetését szorgalmazza, miszerint a tanár feladata nem csak az, hogy a tanulókra bizonyos elméleteket, ismereteket ráerőszakoljon. A tanár feladata sokkal inkább olyan tanulási szituációk teremtése (problémaszituációk), amelyekben a tanulók önálló ismeretszerzésre képesek, illetve a tanulóknak nyújtott segítség arra irányul, hogy ezeket a helyzeteket megfelelően kezeljék (Dewey, 1916). A problémaalapú tanulás igazi paradigmaváltást jelentett a korábbi tanítási-tanulási stratégiákhoz képest.

A problémaalapú tanulást először általánosan értelmezzük, majd ismertetjük az általunk alkalmazott matematikai környezetre vonatkozó értelmezést is. Több kutatás azt igazolja (Torp & Sage, 2002), hogy a problémaalapú tanulást hatékonyan lehet alkalmazni különböző iskolaszinteken és tantárgyakban, például a matematika, a biológia, a kémia, a fizika, a földrajz, a történelem vagy akár az irodalom órákon. Figyelembe véve a fogalom komplexitását, számos megközelítést adtak meg a kutatók. A problémaalapú tanulás értelmezhető:

- oktatási módszerként, amelyben a diákok csoportban dolgoznak és az életszerű problémák megoldásai indítják el a tanulást (Duch, 1996), ami a tanulók való világra történő felkészítését célozza (Jonassen & Hung, 2012);
- tanulási környezetként, amelyben a tanulás mozgatóereje a problémában rejlik (Woods, 1996) és munkafolyamatként a probléma megértése és megoldása felé (H. Barrows & Tamblyn, 1980);
- a tananyag egy strukturálási módjaként, amelynek során a tanulók gyakorlati problémákkal szembesülnek, amelyek tanulási motivációként működnek (Boud & Feletti, 1997);
- az aktív tanulást fejlesztő oktatási stratégiaként (Major, 2002).

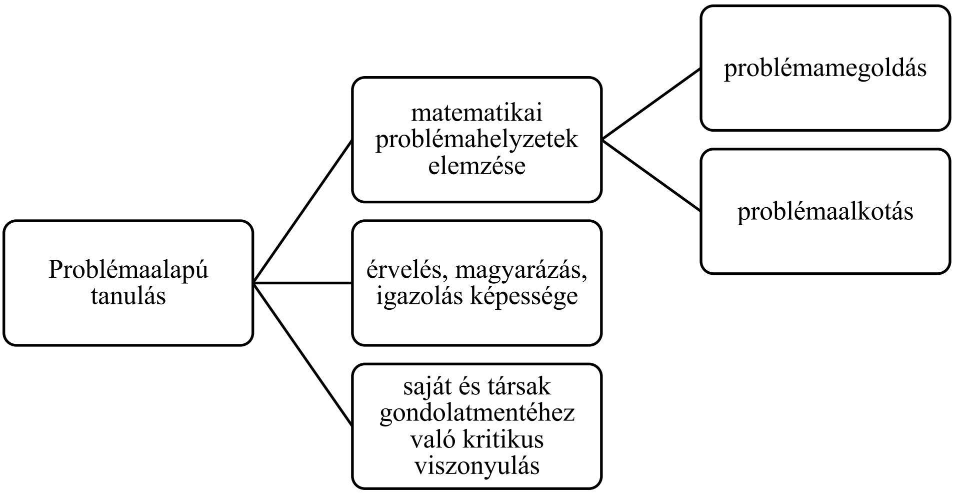
1.4.1. Problémaalapú tanulás a matematika oktatásban

Az előző értelmezésekben az, hogy a tanulók aktív részesei a problémahelyzetek megoldásának és elemzésének mint közös jellemző kiemelhető. A problémaalapú matematikatanulás definíciójának is alapját képezi ez a közös jellemző. A matematika órákon használatos problémaalapú tanulás alatt olyan környezetet értünk (Csíkos, 2010; Kónya & Kovács, 2021), amelyben a tanulók

(1) matematikai problémahelyzeteket elemeznek,

(2) saját és társaik gondolatmentéhez kritikusan viszonyulnak,
(3) tudnak érvelni a gondolatmenetük mellett, valamint elmagyarázni, igazolni azt.

Megjegyezzük, hogy a továbbiakban problémahelyzetek elemzése alatt nemcsak problémamegoldást, hanem a megoldás átható vizsgálatát, illetve problémaalkotást is értünk. Ebben a dolgozatban tehát az előző értelmezést kibővítjük és a továbbiakban ezt használjuk, amikor problémaalapú tevékenységre gondolunk (1. ábra).



1. ábra: Problémaalapú matematikatanulás

A problémaalapú tanulás megvalósítása változhat a tanulásra fordított időszak terjedelme szerint; egyetlen óra kivitelezésétől, akár egy fejezet átdolgozása vagy az egész tanterv módosítása lehetséges problémaalapú elvek mentén. Nyilván az egész tantervet reformáló hatása mélyebb lesz, viszont egyetlen óra megvalósítása kontrolláltabb környezetet kínálhat a problémaalapú tanulás konkrét hatásainak vizsgálatához (Albanese & Mitchell, 1993). Dochy és munkatársai (2003) ugyanakkor azt is kimutatták, hogy teljesítmény szempontjából nincs szignifikáns eltérés egyetlen óra és az egész tanterv problémaalapú megvalósítása között, ám mindkét esetben pozitív hozadékra számíthatunk. Ilyen vizsgálatok már az

1960-as években elkezdődtek, főként a problémaalapú tanulás komplex képesség-, kompetenciafejlesztő (kommunikációs, kooperatív, problémamegoldó, kritikai gondolkodási, önálló ismeretszerző) hatására koncentráltak (Barrows & Tamblyn, 1977). Ezek a vizsgálatok elterjedtebbek általános iskolában, vagy reál tantárgyak körében, mint más korosztály vagy tantárgy esetén. Kimutatták, hogy az általános iskolában tanító pedagógusok hozzáállása pozitívabb a problémaalapú tanuláshoz, illetve a problémaalapú tanulással kapcsolatos módszerek alkalmazását a reál tantárgyakat tanító tanárok fontosabbnak ítélik, mint a nem reál tantárgyakat tanítók (Bánfi, 2018).

1.4.2. Problémaalapú matematikatanulásra való törekvések Romániában és Magyarországon

A kutatás helyszínén, Romániában, 2017-től a közoktatási rendszert az alábbi szintek alkotják:

1) elemi oktatás 6 éves kortól: előkészítő osztály, 1., 2., 3. és 4. osztály – kötelező;
2) alsó középfokú oktatás: 5., 6., 7. és 8. osztály – kötelező;
3) felső középfokú oktatás: a 9. és a 10. osztály kötelező
    i. líceum:
        - elméleti szakágazat (9–12. osztály);
        - speciális szakmai szakágazat (9–12./13. osztály);
        - technológiai szakágazat (9–13. osztály);
    ii. szakoktatás (9–11. osztály).

A tanítandó tantárgyakat országos kerettantervek írják elő. A kötelező oktatási szinteken 80% az aránya a kötelező tantárgyaknak.
Az osztályzatok 1-től 10-ig terjednek, a legalacsonyabb átmenő jegy az 5-ös. A 2., a 4., a 6. és a 8. osztály végeztével a tanulók a nemzetközi felmérések mintájára készült országos felméréseken vesznek részt, a felső középfokú oktatás befejezésével érettségizhetnek. A matematika érettségi csak bizonyos szakágazatokon kötelező, és ennek a szintje függ az osztály profiljától, például elméleti szakágazaton belül a matematika-informatika profilon kötelező M1 (emelt) szintű matematika érettségi, vagy a természettudományok profilon M2 (közép) szintű matematika érettségi.

Úgy Romániában, mint Magyarországon, vannak törekvések a problémaalapú matematikaoktatás megvalósítására. Erre példát láthatunk tantárgypedagógiai munkákban, könyvekben[1], tankönyvcsaládokban[2]. Mindamellett, hogy ezen forrásokból is inspirálódtunk a problémaalapú órák tervezésénél (lásd 6. melléklet - 11. melléklet), egyetértünk Csíkos (2010) kijelentésével: a problémaalapú tanulás megvalósítása során nem csak a („jó" vagy „rossz") feladatok megválogatása fontos, hanem kiemelt jelentősége van a pedagógus személyes meggyőződésének is.

1.4.3. A problémaalapú tanulás hatásai

Dochy és munkatársai (2003) metaanalízise, amely 43 kutatás eredményét szintetizálta a következő kérdésre kívánt választ adni: azok a tanulók, akik problémaalapú megközelítéssel tanulnak hatékonyabban érnek-e el tanulási célokat (tudás és készségek, azaz tudásalkalmazás), mint a nem problémaalapú vagy hagyományos oktatásban részesülők? A kutatások eredményeképpen azt állapították meg, hogy a tanulók készségeinek és képességeinek területén azonnali és tartós pozitív hatás érhető el, míg az ismeretek terén negatív hatást találtak. Ez az elemzés azt jelzi, hogy a problémaalapú módszerrel tanulók valamivel kevesebb tudással rendelkeznek, de ugyanakkor többre emlékeznek a megszerzett tudásból. Ezt a vegyesnek mondható képet erősíti meg Hattie (2005) tanulmánya, amely szerint a problémaalapú tanulás nem feltétlenül volt szignifikáns hatással a tanulói teljesítményre. Ugyanakkor Allen és munkatársai (2011) arra a következtetésre jutottak, hogy a problémaalapú módszerek javítják a tanulók tanulásának érzelmi területét, növelik a teljesítményt az összetett feladatokban, és elősegítik a tudás hosszantartó megőrzését. Ezek az eredmények azt jelzik, hogy bár a tanulói teljesítmény növelésének lehetnek hatékonyabb módjai, a problémaalapú tevékenységek alkalmazása nem jár azzal a kockázattal, hogy jelentősen lecsökkenne a tanulói teljesítmény. Ráadásul, a tanulás iránti pozitív attitűdben és készségekben, képességekben bekövetkezett változás is a problémaalapú tanulás módszerének befogadására ösztönöz (Csíkos, 2010).

[1] Predarea Matematicii prin metode bazate pe curiozitate şi investigaţii – Kíváncsiságvezérelt matematika tanítás, Státus Kiadó, 2010,

[2] Sokszínű matematika, Mozaik Kiadó, 2007

A problémaalapú tanulásnak és tanításnak számos pozitív hozadéka ismert, tehát a hatásvizsgálatok több szempontra is kiterjedhetnek: a tanulók készségeire, képességeire (például érvelés, bizonyítás), ismereteire, attitűdjére, problémamegoldására, problémaalkotására, az önszabályozó tanulásra, a metakognícióra stb. Az általunk vizsgált egyik szempont a problémaalapú tanulás hatása a tanulók kritikus gondolkodására. A következő fejezetben bemutatjuk a problémaalapú tanulás és kritikus gondolkodás értelmezéséből eredő szoros kapcsolatot, illetve a szakirodalmi hátteret, ami indokolja ennek a területnek a vizsgálatát.

1.5. A kritikus gondolkodás

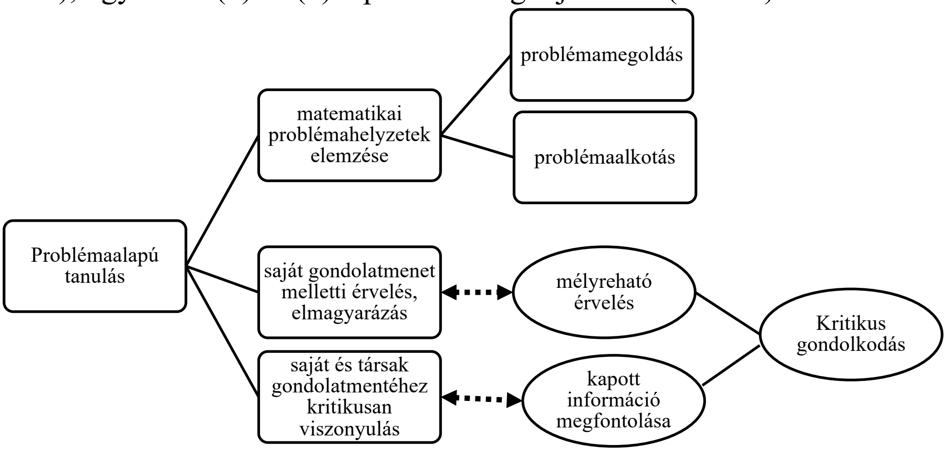
A problémaalapú tanulás definíciójában megjelenik a tanulónak „saját és társai gondolatmenetéhez való kritikus viszonyulása", vagyis a kritikus gondolkodás megléte eszerint egyik alappillére a problémaalapú tanulásnak.

1.5.1. A kritikus gondolkodás értelmezése

A kritikus gondolkodás szabatos meghatározása kihívást jelent a fogalom pszichológiai összetettsége miatt, ugyanakkor ez a komplexitás hozzájárult ahhoz, hogy a kritikus gondolkodást sokan a 21. század egyik szükséges készségének tartsák (Trilling & Fadel, 2009). Facione (1990b) hat, elsődlegesen a kritikus gondolkodáshoz kapcsolódó készséget sorol fel: értelmezés, elemzés, értékelés, következtetés, magyarázat és önszabályozás. Ezeket a készségeket mi is a kritikus gondolkodás kulcsfontosságú elemeiként azonosítjuk.

Mivel a kritikus gondolkodás komplex fogalom, ami az egyén készségétől és hajlamától is függ (Ennis, 2011; Paul & Elder, 2002), több különböző értelmezést találunk rá az irodalomban. Ezek azonban sok aspektusban hasonlítanak egymásra. Egyesek szerint a kritikus gondolkodás arra készteti az egyént, hogy megkérdőjelezze az ötleteket, megoldásokat generáljon a felmerülő problémákra, és intelligens döntéseket hozzon, amikor kihívásokkal szembesül. Ezért a kritikus gondolkodáshoz kapcsolódó készségek lehetővé teszik az információk elemzését és szintetizálását a problémák megoldása érdekében (Facione, 1990a). Moon (2007) szerint a kritikus gondolkodás segítségével a különböző

forrásokból nyert információkat megfontoljuk, majd kreatívan és logikusan feldolgozzuk, végül elemezzük a megfelelő következtetések levonása érdekében.
Ebben a dolgozatban Fahim és Pezeshki (2012) definícióját használjuk, amely szerint a kritikus gondolkodás mélyreható érvelést és a kapott információk elfogadásának megfontolását foglalja magában. Ez a definíció tulajdonképpen részhalmaza a problémaalapú tanulás értelmezésének (1. ábra), ugyanis a (2) és (3) alpontokat foglalja össze (2. ábra).



2. ábra: Problémaalapú tanulás és kritikus gondolkodás

1.5.2. A kritikus gondolkodás és a problémaalapú tanulás

Az ismertetett definíciók mind azt igazolják, hogy a kritikus gondolkodás az egyik alapvető összetevője azon készségeknek, amelyek adott problémahelyzetek kezeléséhez szükségesek. Karim és Normaya (2015) korábbi kutatási eredményei szerint az iskoláztatás egyik elsődleges célja a tanulók kritikus gondolkodásának fejlesztése, ennek pedig egyik tárgya a matematika. Azt, hogy mennyire sikeresen lehet matematika órán problémaalapú tanulást alkalmazva kritikus gondolkodást fejleszteni, számos kutató vizsgálta. Több kísérlet eredménye az, hogy a problémaalapú beavatkozás pozitív hatással van a kritikus gondolkodás fejlődésére (Mandeville & Stoner, 2015; Martyn et al., 2014; Muehlenkamp et al., 2015; Ulger, 2018). Sőt, mi több, Mulyanto és munkatársai (2018) szignifikáns különbséget figyeltek meg a matematika tanulási eredményben azon tanulók között, akik problémaalapú modellt követve tanulnak azokkal szemben, akik nem. Ezt alátámasztja már Duch (1996) megfigyelése is, miszerint a problémaalapú megközelítésnek köszönhetően a tanulók kritikus és elemző gondolkodást fejlesztenek ki, és megtanulják megtalálni és használni a rendelkezésre álló előzetes ismereteket. Ezzel szemben néhány másik kutatás arra az eredményre vezetett, hogy nincs szignifikáns hatással vagy egyáltalán nincs hatással a problémalapú tanulási környezet a kritikus gondolkodásra (Hesterberg, 2005). Habár a tanulók érettsége, nemzetisége, az oktatás típusa és csoportlétszáma a kritikus gondolkodás befolyásoló tényezői lehetnek, Sanderson (2008) szerint a gyenge szignifikancia további oka lehet a tanulásra fordított idő vagy a problémaalapú tanulási tapasztalat hiánya.

A kritikus gondolkodás és problémaalapú tanulás kapcsolatát Liu és Pásztor (2022) is vizsgálta, metaanalízisükben ötven 2000 és 2020 között végzett kutatást elemeztek. Arra a következtetésre jutottak, hogy a problémalapú tanulás hatékony a kritikus gondolkodás fejlesztésére a készségek és a tanuláshoz való kedv szintjén. A továbbiakban ezért rátérünk a tanulási kedv, az attitűd és a motiváció irodalmi feldolgozására a problémaalapú tanórák kapcsán.

1.6. Motiváció

Általánosan elfogadott tény, hogy a motiváció pozitív hatással van a tanulási eredményre: a motivált tanulók több időt szánnak az általuk preferált tantárgyra (Pintrich, 2003; Pintrich & Schunk, 2002) és nagyobb valószínűséggel teljesítik a tantárgyi követelményeket sikeresen, mint alulmotivált társaik, akiket a lemorzsolódás veszélye is fenyegethet (Vallerand & Blssonnette, 1992).

A motiváció az affektivitást tárgyaló kutatások egyik kulcseleme. Az affektív tartományt gyakran széles gyűjtőfogalomként használják az oktatási és pszichológiai szakirodalomban, amely lefedi az attitűdöket, a hozzáállást, *a motivációt*, az érzelmeket, értékeket és az emberi elme minden egyéb nem kognitív vonatkozását (Hannula, 2020). Az affektivitás a matematikai tevékenység fontos része és releváns előjelzője a tanulók jövőbeli matematikai viselkedésének (Hannula, 2019). Kiemelten a motivációval fogunk foglalkozni ebben a dolgozatban, illetve a motiváció és problémaalapú tanulás kapcsolatával.

A motivációt jellemezhetjük úgy, mint a tanuló akaratát, hajlandóságát vagy vágyát, hogy részt vegyen és sikeres legyen egy tanulási folyamatban (Yunus & Ali, 2008). Weiner (1992) a motivációt úgy határozza meg, mint az egyén vágyát, hogy meghatározott, specifikus módon megnyilvánuljon és cselekedjen. Megkülönböztetünk külső és belső motivációt (Corpus et al., 2009), attól függően, hogy az ösztönzés milyen forrásból fakad. Míg az egyik belső késztetésből ered, a másik külső jutalomból vagy büntetésből. Azt, hogy mi minden befolyásolhatja a belső motivációt a következő alfejezetben tárgyaljuk.

1.6.1. A motiváció forrásai

Walter & Hart (2009) összegyűjtötte a tanulók belső motivációját befolyásoló tényezőket (lásd még Francisco, 2005). Eszerint a tanuló számára fontos lehet, hogy:

(1) érdekesnek, kihívásnak vagy az életben potenciálisan hasznosnak érzi-e a matematikai feladatokat - feladatfüggő motiváció (Francisco, 2005) - *feladat iránti érdeklődés*
(2) dolgozhat-e kooperatív formában - *szocializálódásra alkalmas tanulási környezet*
(3) adódik-e lehetőség a felfedezésre - *felfedezés lehetősége*
(4) tudja-e, hogy éppen mit miért csinál (Francisco, 2005) - *miértek ismerete*
(5) használhat-e különböző taneszközöket a tanóra során - *eszközök használata*
(6) van-e lehetősége társaiktól segítséget kérni vagy segítséget nyújtani - *egymás segítése*.

Az utolsó forrással a későbbiekben több szempontból is fogunk foglalkozni a társas kapcsolatok megállapítása és fontossága miatt. Ezt más szavakkal nevezhetjük a kötődés érzésének is. A kötődés pozitív hatással van a tanulókra a belső motivációjukat tekintve (Ryan et al., 1994; Sheldon & Filak, 2008). Ez a kötődés a tanulási környezetben létrejöhet diák-diák között, illetve diák-tanár között. A diák ugyanakkor kötődhet magához a problémához is, ha például annak a kontextusa közel áll hozzá. A következő alfejezet a kontextus személyre szabása és a motiváció kapcsolatát vázolja röviden, amelyet a problémaalkotás témaköre mentén fogunk érinteni.

1.6.2. Kontextus személyre szabása

A kontextus személyre szabása a tananyagnak a tanulók iskolán kívüli érdeklődési köréhez és tapasztalataihoz való igazítását jelenti (Walkington et al., 2013). Kutatások igazolják, hogy a kontextus személyre szabása fontos a motiváció szempontjából, hisz segít megcélozni a tanulók iskolán kívüli érdeklődését és tapasztalatait (Cordova & Lepper, 1996). A személyre szabott problémák elérhetőbbé tehetik a matematikát a tanulók számára, segíthetnek közelebb hozni a „való világ" problémáinak megoldását az iskolai matematikához, és felkelthetik a tanulók figyelmét és érdeklődését (Boaler, 1994). A kontextus megválasztására lehetőséget nyújthat a problémaalkotási tevékenység (Voica et al., 2020). Több kutató állítja, hogy a problémaalkotás pozitívan befolyásolhatja a tanulók matematika iránti attitűdjét (Brown & Walter, 2005; Silver, 1994). Főként iskolai közegben, a problémaalkotás támogatja a tanulók motivációját; ezt az a tény bizonyítja, hogy tanulók a saját vagy társuk által adott problémákra lelkesebben keresik a megoldást és választ, mint a tankönyvek, vagy tanárok által megadott feladatokra (Christidamayani & Kristanto, 2020; Silverman et al., 1992). Az ilyen jellegű tevékenységek tehát alkalmasak lehetnek a tanulók motiválásra, ami egy eszköz a bevonódás kialakítására.

1.6.3. A bevonódás

A motiváció, mint az affektivitást tárgyaló kutatások központi fogalma szorosan kapcsolódik a tanulók bevonódásához. A motiváció úgy is definiálható, mint az emberek energiája és lendülete a tanulás, a hatékony munka és a teljesítmény érdekében. A bevonódás pedig ehhez az energiához kötődő viselkedésekhez kapcsolódik (Liem & Martin, 2012). Mivel a bevonódás sokkal összetettebb a viselkedések megfigyelésénél, ezért nincs egységes, jól elfogadott definíciója (Christenson et al., 2012). Ennek ellenére a kutatók egyetértenek abban, hogy az osztálytermi bevonódás különböző *viselkedési, érzelmi és kognitív* komponenseket foglal magába (Fredricks et al., 2004). A *viselkedési bevonódás* a

tanulóknak a tanulási folyamathoz közvetlenül kapcsolódó, megfigyelhető magatartásformákban való részvételére utal, például jelenlét, figyelem, koncentráció, összpontosítás, kitartás és kemény munka (Christenson et al., 2012). Az *érzelmi bevonódás* a tanulók iskolához való kötődésének érzésére összpontosít. Így az iskolai kötődés, az iskolához való tartozás, a ragaszkodás, az értékbecsülés és az önazonosság méréséből származnak (Skinner, 2016). Később ezek a fogalmak kibővültek a tanárokkal és a társaikkal való kapcsolat, a közelség és a támogató kapcsolatok érzésével.
A *kognitív bevonódás* azon meggyőződések összessége, amelyeket a tanulók az észlelt képességükről, kompetenciájukról, hatékonyságukról vagy identitásukról vallanak (Skinner, 2016), tehát ez egyfajta tanulási folyamat során megnyilvánuló tudatosság.
Mivel a problémaalapú tanulás sokféle módszert alkalmaz a tanulók bevonására: aktív, együttműködő, tanulóközpontú (Allen et al., 2011), feltételezhető, hogy a tanulók nagyobb mértékű bevonását eredményezi. A következő fejezetben az eddigi kutatások eredményeit tárgyaljuk a problémaalapú tanulás és motiváció, bevonódás kapcsolata témakörében.

1.6.4. Motiváció és a problémaalapú tanulás

A problémaalapú tanulásnak számos olyan jellemzője van, ami növelheti a belső motivációt (autonómiát támogató tanárok, tartalmas és kihívásokkal teli feladatok, pozitív visszajelzés, együttműködés) (Deci & Ryan, 2000; Pintrich, 2003; Pintrich & Schunk, 2002), mégis ezen a téren végzett kutatások különböző eredményeket mutatnak. Hmelo-Silver (2004) szerint a problémaalapú tevékenységek kifejezetten arra törekednek, hogy ösztönözzék a tanulók belső motivációját. A pedagógusok, különösen a szakmai programokon, továbbképzéseken résztvevők, előnyben részesítik a problémaalapú tanulást a diákok motiváltsága miatt (Stokes et al., 1997). Dolmans és Schmidt (2006) 37 dolgozatot elemzett a problémaalapú tanulás keretein belül történő kiscsoportos tanulás motivációra mért hatásairól, és azt állapította meg, hogy az ilyen jellegű tevékenységek pozitívan hatnak a belső motivációra. Ugyanakkor sok más kutató is megfigyelte, hogy a problémaalapú tanulás alkalmazását követően javulás volt észlelhető a diákok aktivitásában és belső motivációjában (Sari et al., 2019; Sungur & Tekkaya, 2006). Ennek ellenére egyes kutatások azt mutatták ki, hogy nincs szignifikáns eltérés a motiváltság terén a problémaalapú és a nem problémaalapú módon történő tanulás után (Argaw et al., 2016; Wijnia et al., 2011). A különbség azon kutatások között, ahol pozitív hatást figyeltek meg a problémaalapú tanulás által a motivációra és ahol nem találtak semmiféle eltérést, a megvalósítás hossza volt. Azokban a kutatásokban, ahol a motiváció pozitívan kapcsolódott a problémaalapú tanuláshoz általában rövid idejű beavatkozások volt jellemző (15 nap, 6 hét, fél év), ám ahol ezt a megközelítést kiterjesztették az egész tantervre, ott nem volt megfigyelhető változás. Ebből akár azt a következtetést is levonhatjuk, hogy mindaddig érdekes, motiváló a problémaalapú tanulási környezet a tanuló számára, amíg újdonságot nyújt, ám ha csak ilyen jellegű környezetben tanulnak, akkor egy bizonyos idő után számukra ez lesz a hagyományos tanulási mód, és már nem lesz motiváló hatású.

Ebben a kutatásban erre a „két időtartam dilemmájára" is igyekszünk válaszolni azáltal, hogy vizsgáljuk a tanulók motiváltságát egy-egy beavatkozás után és közben (keresztmetszeti vizsgálat), valamint két csoport esetében longitudinálisan (négy évre vonatkozóan) is. A longitudinális beavatkozás az előbbi kutatásoktól abban tér el, hogy a beavatkozás időtartama alatt a tanulók nem kizárólag problémaalapúan tanultak, hanem bizonyos leckékbe, fejezetekbe lettek beépítve problémaalapú részek. Ezzel pontosan az előbb említett problémát akartuk kiküszöbölni, hogy ne tekintsék a diákok a problémalapú tanórákat egy bizonyos idő után „megszokottnak, hagyományosnak".

Az ebben a fejezetben ismertetett szakirodalom alapul szolgált kutatásaink megtervezéséhez, és kivitelezéséhez, a következőkben saját eredményeinkről fogunk beszámolni mindezek tükrében.

2. Kutatási kérdések

A kutatásunk célja, hogy több különböző szempontból vizsgáljuk a problémaalapú megközelítés hatását, hozzájárulva ezáltal a módszer mélyebb megértéséhez és a kutatási terület szakirodalmának bővítéséhez. Munkánk kiterjedt olyan szempontokra, mint a tanulói gondolkodás, ezen belül a kritikus és az algebrai gondolkodás, a tanulási eredmény, a motiváció, a bevonódás. A **K1-K3** kérdések a módszer egyes jellemzőire, előforduló jelenségekre, míg a **K4-K6** kérdések a beavatkozás eredményességére vonatkoznak.

K1. Mely motivációs források jelenhetnek meg egy problémaalapú tanórán?

Mivel kiindulópontunk a diákok csökkenő motivációja, ezért elsősorban a problémaalapú tanulás és a motiváció kapcsolatát vizsgáljuk egy tanóra megfigyelésével.
A második kérdés szintén ezt a kapcsolatot vizsgálja, specifikusabb körülmények között, egy tanegység feldolgozásával, nagyobb hangsúlyt fektetve a problémaalkotásra mint problémaalapú tanulási elemre. Ez esetben a perszonális tényezőknek (egy problémába beleszőtt személyes jegyek) a motivációra kifejtett hatását elemezzük.

K2. Hogyan hatnak a problémaalkotás során potenciálisan megjelenő perszonális tényezők a motivációra?

A szakirodalomból a problémaalapú tanulás kritikus gondolkodásra gyakorolt pozitív hatását is ismerjük, ezért ezt a kapcsolatot vizsgáljuk a következő kérdéssel, egy tanóra megfigyelése által.

K3. A problémaalapú megközelítés során alkalmazott páros munkaforma hogyan támogathatja a kritikus gondolkodás megjelenését?

A K3 kutatási kérdésre választ adó tanulmány során érdekes jelenségre lettünk figyelmesek, amely a 6-7. osztályos diákok aritmetikai és algebrai gondolkodásával kapcsolatos. Mivel ebben az életkorban a diákok a két gondolkodásmód közötti átmeneti szakaszban vannak, fontosnak találtuk megvizsgálni ezt a jelenséget. Ehhez kapcsolódik a következő kutatási kérdés:

K4. Fejlődött-e a tanulók algebrai gondolkodásmódja a problémaalapú megközelítés alkalmazása során?

Az előző kérdések a problémaalapú tanulás és a motiváció, a kritikus gondolkodás, az algebrai gondolkodás kapcsolatát járják körül. Ezen kapcsolatok ismeretében a problémaalapú tanulás tanulási eredményekre kifejtett hatására is kíváncsiak voltunk. Erre vonatkozik a következő kérdés.

K5. Milyen hatással van a problémaalapú megközelítés a tanulási folyamat kimenetére?

A rövid távú beavatkozások (egy óra vagy tanegység, fejezet) elemzése után a tanulók bevonódását, motivációját vizsgáljuk egy négyéves ciklust tekintve. Ebben a kutatásban arra fókuszáltunk, hogy a rövidtávú tevékenységre vonatkozó motivációból hogyan lehet hosszabb távú bevonódást kiváltani.

K6. Milyen hatással van a felső tagozatos tanulmányi szakaszban folyamatosan alkalmazott problémaalapú megközelítés a tanulók bevonódására?

Kutatási kérdéseink megválaszolására terveztünk egy hosszú távú akciókutatást, mely során több forrásból gyűjtöttünk adatokat, s ezeket különböző szempontok szerint elemeztük.
A **K1** kérdést egy problémaalapú megközelítést alkalmazó tanórai problémamegoldás videófelvétele és diákok visszajelzései alapján kívánjuk megválaszolni.
A **K2** kérdésre egy problémaalkotáson alapuló kutatás elemzésével fogunk válaszolni.
A **K3** kérdésre egy problémaalapú pármunka során kialakult párbeszédek és a tanulói vélemények elemzése által válaszolunk.
A **K4** kérdésre adott válasz a diákok által alkotott problémák és az osztálymegbeszélések elemzésén alapul.
A **K5** kérdést elő- és utótesztek kvalitatív és kvantitatív elemzése tárgyalja, amelyet a diákok interjúban megadott válaszai egészítenek ki.

A **K6** kérdésre pedig a diákok rövid önbeszámolójának vizsgálatával válaszolunk.
A továbbiakban a kutatás módszertanát mutatjuk be, a mintaválasztástól kezdve a begyűjtött adatok típusáig és azok elemzési módjáig.

3. A kutatás módszertana

3.1. Akciókutatás

A kutatásunk célja, hogy több szempontból vizsgáljuk a problémaalapú tanulás, tanítás hatásait. Maga a kutató volt egyben a tanár is, aki szakmai segítséggel megtervezte a problémaalapú órákat, majd az óratervek alapján megtartotta őket. Mindez több beavatkozási ciklusban jött létre, így akciókutatásról beszélhetünk. Az akciókutatás alapelveit Koshy (2005) tárgyalja részletesen, ezek a következők:

- a cél a bevont tanulók tanítási kísérlethez kapcsolódó vizsgálata;
- a kutató és a tanár személye megegyezik;
- a kutatás a tanterven és tanmeneten alapul, nem tér el attól;
- az akció és reflexió folyamatosan kölcsönhatásban van egymással, azaz a kísérlet tapasztalatai és a menet közbeni értékelések a következő kísérlet alappillérei;
- a pedagógiai probléma azonosítása és a beavatkozás megtervezése.

Az akciókutatások általában a kvalitatív kutatási paradigmára hagyatkoznak, bár tartalmazhatnak kvantitatív elemeket is, főként leíró statisztikát. A mi kutatásunk célja (mint ahogy a legtöbb kvalitatív kutatásé is) az ember, a helyzet szubjektív valóságának megismerése a jelenség természetes körülmények közötti vizsgálatával.
A kvalitatív kutatásoknál általában több adatforrást használnak, ezt a folyamatot háromszögelésnek, vagy triangulációnak nevezik (Jalongo & Saracho, 2016). A háromszögelést négy kategóriába sorolhatjuk be, attól függően, hogy mire vonatkozik az elemzés:

- az adatok háromszögelése: idő, tér, személyek;
- kutatók háromszögelése: több megfigyelő, például más személy kódolja az adatokat az érvényességet fenyegető veszélyek kezelésére;
- elméletek háromszögelése: az eredmények több elméleti keretben történő értelmezése, majd ezek összevetése;
- módszerek háromszögelése: többféle módszer, kutatási stratégia alkalmazása.

Annak érdekében, hogy kutatásunk eredményei megbízhatóak és hitelesek legyenek a trianguláció módszerével éltünk, egyes adatelemzések esetén a kutatók, más esetekben a módszerek, illetve az adatok háromszögelése által.

3.2. A problémaalapú órák tervezése

A problémaalapú órák tervezése szakmai segítséggel történt, így témavezetőim irányításával kiválasztottuk a feladatokat, megszerkesztettük a lecketerveket, illetve meghatároztuk a reflektálási szempontokat. A dolgozatban bemutatott tanórák lecketerveit mellékletben csatoljuk (6. melléklet - 11. melléklet). Ezen órák tervezésénél a szakirodalomra és a következő kritériumokra alapoztunk:

(1) az óra folyamán a tanulók matematikai problémahelyzeteket elemezzenek problémamegoldás vagy problémaalkotás útján,

(2) a problémahelyzetek elemzésénél a tanulók célzottan alkalmazzanak heurisztikus stratégiákat,

(3) az órák tartalmazzanak kooperatív vagy kollaboratív feladatot,

(4) a tevékenységek fejlesszék a tanulók szóbeli és írásbeli kommunikációs készségét, ösztönözve az önálló véleményalkotást és érvelést,

(5) a tevékenységek a kritikus gondolkodást követeljék meg és ösztönözzék,

(6) támogassák a felfedeztető tanulást.

Több problémaalapú óránkra volt jellemző a következő felépítés: tanórára való ráhangolódás („bemelegítő rész”), fő tevékenység, problémaalkotás, lezárás.
A tanórára való ráhangolódás általában egy pár perces bevezető tevékenység, amely előkészíti a fő tevékenységet, az alkalmazandó heurisztikus stratégiát, vagy felvázolja a tanóra célját (például számkitalálós játék - 11. melléklet, vagy Heuréka - 10. melléklet).
A fő tevékenység szorosan kapcsolódik a tanmenetből kiválasztott tanóra témájához és céljaihoz. A fő tevékenység során alkalmazhatunk különböző kooperatív tevékenységeket, heurisztikus problémamegoldást. Például a 11. mellékletben levő óratervben a fő tevékenység a NIM-típusú korongos

játék, a 10. mellékletben olvasható óra esetében a papírhajtogatósásból kiinduló feladatsorozat.
A problémaalkotás a fő tevékenység témájához kapcsolódik, amelyben a diáknak lehetősége van az ismert problémák továbbgondolására, átfogalmazására, új kontextusban való kifejezésére.
A lezárás tartalmazhat még egy rövid tevékenységet, gyakorlást vagy alkalmazást, illetve az óra végén a diákok véleményének kilépő kártyán történő begyűjtését.
A bemutatott struktúrát nem mindig követtük szigorúan, a tanóra felépítését az óra témája és célja jelentősen befolyásolta.
A továbbiakban bemutatjuk a kutatás mintáját, illetve a háromszögeléshez felhasznált adatokat, azaz a kutatás korpuszát.

3.3. A minta

A kutatásban egy erdélyi általános iskola 5-8. osztályos diákjai vettek részt, összesen 171 diák, akiknek matematikatanára a dolgozat szerzője. Bizonyos vizsgálatok több évfolyamon is megvalósultak 2018 és 2022 között (1. táblázat) mint keresztmetszeti vizsgálatok. A négy év során figyeltünk az akciókutatás részéről igényelt ciklikusságra, mindemellett két párhuzamos osztályt longitudinálisan is végigkövettünk, ők 4 év alatt rendszeresen részesültek problémaalapú beavatkozásokban. A kísérletben résztvevő diákok anyanyelve magyar, így az oktatás is magyar nyelven zajlott. A kísérletben résztvevő osztályok matematikából átlagosnak mondhatók, a fejlesztés nem tehetséggondozás keretén belül zajlott.
Mindegyik csoport kísérleti csoportként funkcionált, nem volt kontrollcsoport. Ennek oka egyrészt a kvalitatív módszer, elemzés alkalmazása volt, amihez fontos, hogy a két párhuzamos osztályban ugyanazt a tervet valósítsuk meg. Másrészt az, hogy a kísérletet végző tanár elkötelezett volt a problémaalapú oktatás mellett, így a másik osztályt kevésbé tudta volna ugyanolyan meggyőződéssel tanítani, más tanár bevonása a kísérletbe pedig további kísérleti változókat vont volna maga után.

1. táblázat: A kutatásban résztvevő csoportok táblázata

Csoport megnevezése	Vizsgált időtartam	Létszám	Kapcsolódó kutatási kérdések
A (5-8.a. osztály)	2018-2022 (4 tanév)	31	K3, K4, K5, K6
B (5-8.b. osztály)	2018-2022 (4 tanév)	30	K3, K4, K5, K6
C (5-7.a. osztály)	2019-2022 (3 tanév)	30	K2
D (5-7.b. osztály)	2019-2022 (3 tanév)	30	K2
E (7.c. osztály)	2018-2019 (1 tanév)	24	K1
F (7-8.a. osztály)	2018-2020 (2 tanév)	26	K1

3.4. Korpusz

A kutatás során bármilyen formában összegyűjtött, későbbi feldolgozásra alkalmas anyagokat, dokumentumokat korpusznak nevezzük. Az adatgyűjtés és adatelemzés több különböző formában történt a megadott időszakban, a következő alfejezetek ezeket mutatják be.

3.4.1. Órafelvételek

Minden problémaalapú órát videóra rögzítettünk. A videófelvétel az osztályterem hátsó részéből készült, így a diákok arca nem látszott, viszont a tábla és vetítő folyamatosan követhető volt. A megfigyelő státusza és részvétele szempontjából a megfigyelés nyílt volt, a diákok tisztában voltak azzal, hogy az órákról videofelvétel készül, és hogy ezt a tanár később visszanézi elemzés céljából. A videókról transzkriptek (átiratok) készültek. Az átírás percekre bontva történt párbeszéd formájában, ahol a tanárt (T)-vel, a diákokat pedig (S) és egy sorszámmal jelöltük (sorszámot véletlenszerűen rendeltünk tanulókhoz és egy adott sorszám csak egy adott órán jellemezte a tanulót, másik órafelvételen már más sorszámot kaphatott). A videókban megszólaló diákokat a tanár a saját reflexiója és a diákok hangja alapján azonosította. Összesen 50 órát vettünk videóra. A kutatások táblázata megtalálható az 1. mellékletben.

3.4.2. Feladatlapok, táblaképek, óratervek

A problémaalapú tananyag-feldolgozásra alkalmas leckékhez készült óraterveket elmentettük. A kísérleti órákon a diákok által kitöltött feladatlapokat beszkenneltük, és digitális formában tároljuk. Ha a diákok a füzetben is dolgoztak a megadott órákon, akkor a füzeteket is a dokumentumok közé soroltuk, hasonlóan járva el, mint a feladatlapok esetében. Az online órák során is dolgoztak a diákok feladatlapokon, megosztott dokumentumokon, ezeket szintén elmentettük. A táblaképek kimenthetők a videókból, de minden osztálytermi beavatkozás után a tanár fényképeket is készített a tábláról, valamint az online térben történő táblaképek szintén rendelkezésre álltak.

3.4.3. Saját reflexiók

Minden problémaalapú óra után a tanár rövid reflexiót írt az órával kapcsolatban. A reflexióírást megelőzte egy hangjegyzet készítése. Mivel a 10 perces szünetek nem voltak alkalmasak egy tartalmas reflexió megírására, a tanár az óra végeztével hangrögzítőre mondta az aktuális gondolait, megjegyzéseit, benyomásait az órával kapcsolatban, majd ez szolgált alapjául a későbbi reflexióírásnak. Ezek a megjegyzések alkalmasak voltak a tanári nézőpont vizsgálatára, a tanítási nehézségek elemzésére, valamint a transzkript megírása után a pillanatnyi benyomások és az utólagos észrevételek összehasonlítására.

3.4.4. Kérdőívek

A problémaalapú tevékenységek után a diákok véleményére, attitűdjére is kíváncsiak voltunk. Egy óra esetén általában a kilépő kártyán keresztül történő véleménynyilvánítást választottuk, ahol a diákokat pontosan instruáltuk, hogy mi kerüljön a kilépő kártyára, például röviden írja le, hogy érezte magát, rajzoljon egy emojit, ami az ő hangulatát, állapotát tükrözi, vagy válaszoljon a tananyaggal és attitűddel kapcsolatos kérdésekre. Azokban az esetekben, amikor egy teljes fejezetet dolgoztunk át problémaalapúvá, kérdőíves kikérdezést vagy félig-strukturált interjút (lásd később) alkalmaztunk. A kérdőíveket egyénileg töltötték ki a tanulók, interneten keresztül, az így begyűjtött adatokat Excel fájlba konvertáltuk, majd feldolgoztuk. A kérdőívek nyílt és zárt kérdéseket egyaránt tartalmaztak, attitűdskálaként a Likert-skálát használtuk.

3.4.5. Interjúk

Fejezetet átölelő tevékenységek tervezése és lebonyolítása után esetenként félig strukturált interjú formájában kérdeztük ki a tanulókat. Az interjú a kikérdezés szóbeli formája, egy irányított beszélgetés a kutató és a vizsgált személy között. Napjainkban elfogadott, ismerős kommunikációs forma és az a tapasztalat, hogy az emberek szívesen nyilatkoznak interjúkban, mert úgy érzik, hogy gondolataik, véleményük fontos lehet a másik ember számára. Ezt a jelenséget mi is tapasztaltuk, ugyanis az interjúkat véletlenszerűen sorsolt tanulókkal végeztük, de más diákok is szerettek volna mindenképpen véleményt nyilvánítani az órákról, ezért őket külön is kikérdeztük, önkéntes alanyokként megjelölve. Mivel félig-strukturált interjúkat vezettünk az egyéni, szubjektív vélemények feltárása érdekében, ezért a kérdezetteknek nagyobb szabadsága volt, ami alakíthatta a beszélgetést.

Az interjúkat videóra vettük, majd mindegyikről átirat készült, amelyben percre pontosan lebontva a tanár mondatai és a diákok válaszai lettek lejegyezve, gesztikulálással, arcmimikával együtt. Az elemzések ezen átiratok alapján készültek.

A dolgozat további részében rátérünk a kutatási eredményeink bemutatására és a kutatási kérdések megválaszolására. A felmerülő speciális körülményeket majd az adott kutatás bemutatásánál fogjuk részletesen ismertetni.

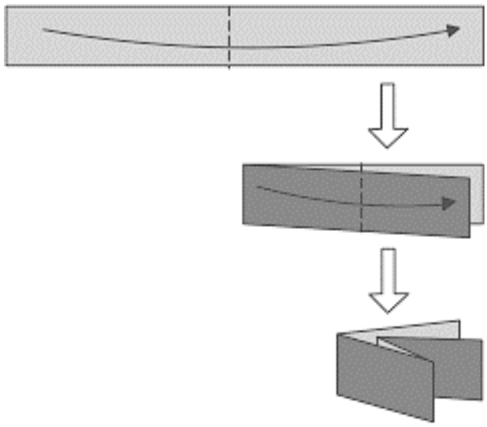
4. Problémamegoldás során megjelenő motivációs források egy problémaalapú tanórán

Célunk volt megvizsgálni, hogy beigazolódnak-e az elméleti részben ismertetetett rövid távon alkalmazott problémaalapú megközelítés pozitív hatásai a tanulók motivációjára nézve. Ennek érdekében egy problémaalapú tanórát terveztünk és elemeztünk, majd azonosítottuk a tanórán megjelenő motivációs forrásokat. Tehát ebben a fejezetben a **K1** kutatási kérdést kívánjuk megválaszolni: *Mely motivációs források jelenhetnek meg egy problémaalapú tanórán?* A kérdést a tanóra kvalitatív elemzésével válaszoljuk meg.

4.1. A kutatás körülményei

A kutatás résztvevői egy erdélyi általános két 7. osztálya, amelyben 2018-ban összesen 50 diák tanult (1. táblázat, 36. oldal): F csoport (26 tanuló), E csoport (24 tanuló). Ez a két osztály nem a longitudinálisan mért két osztály, a jelen kutatás keresztmetszeti.
A két óra elemzése a dolgozat módszertani fejezetében megadott elemzési szempontok alapján történt. Mindkét tanórát videóra vettük, az átirat segítségével egy idővonalat készítettünk, amely mutatja, hogy a különböző tevékenységekre mennyi időt fordítottak a tanulók. Az idővonal létrehozásának módszertanával kapcsolatos lépésekhez a (Herendiné-Kónya & Földesi, 2016) cikket használtuk.
Az óra témája a függvényfogalom kialakítása témakörhöz tartozik. Ehhez készült egy problémaalapú megközelítést alkalmazó óraterv. Ez az óraterv a következő részekre bontható: ráhangolódás, fő tevékenység-papírhajtogatás, problémaalkotás, majd minta gyufaszálakból lezárásként.
Az óra a fő tevékenységre való ráhangolódással, a Heuréka! feladvánnyal kezdődött. A diákoknak egy játékgép működési szabályát kellett kitalálniuk, egy képletet, összefüggést, ami szerint a gép két bementi számból egy kimeneti adatot, egy harmadik számot ad ki. A gép működési szabályát csak a tanár ismeri, aki igen/nem válaszokkal segíti a diákok próbálkozásait. A tevékenység célja annak tudatosítása, hogy egy számhármasra végtelen sok szabály alkalmazható.
A fő tevékenység a papírhajtogatás problémája volt (3. ábra): *„Fogj egy papírcsíkot, majd hajtsd félbe jobbról balra. Ezt kinyitva láthatunk egy*

hajtásvonalat és két papírszakaszt. Most hajtsd össze a papírcsíkot kétszer jobbról balra, ezt kinyitva három hajtásvonal, és négy papírszakasz keletkezik. Ha n*-szer hajtjuk félbe a papírcsíkot, hány hajtásvonal és hány papírszakasz fog keletkezni?"* (Mason et al., 2010).



3. ábra: A papírhajtogatás problémája

A papírhajtogatás tevékenységhez tartozó problémaalkotási feladat: *Hajtsd ki a 4 hajtást tartalmazó papírlapot! Találj ki hozzá történetet, készíts hozzá feladatot!*

A lezárás egy gyufaszálas mintakeresési tevékenységhez kapcsolódott, majd kilépő kártyán begyűjtöttük a diákok visszajelzéseit.

A 10. melléklet a tanóra lecketervét tartalmazza, amelyben a leírt tevékenységeket részletesebben bemutatjuk, illetve a Báró (2021) cikkben a tanóra tapasztalatairól bővebben írunk.

Ebben a részben főként a papírhajtogatás problémájával foglalkozunk, amelyet központi tevékenységnek tekintünk.

4.2. Adatgyűjtés

A papírhajtogatás problémáját a következő struktúra alapján ismerték meg a diákok:

1. A tanár bemutatta az egy hajtás után keletkező papírszakaszok és hajtásvonalak számát, majd közös megbeszélés alapján a kettő, illetve három hajtással keletkező szakaszok és hajtásvonalak is megállapításra kerültek.

2. A diákok önállóan válaszoltak a feladatlapon megadott kérdésekre (lásd a 159. oldalon kezdődő óratervhez kapcsolódó feladatlapot).
3. Az egyéni munka után pármegbeszélés következett, ahol a diákok megoszthatták egymással megoldásaikat.
4. A pármunkát osztálymegbeszélés követte, ahol elhangzottak a helyes megoldások, illetve a helytelenek tisztázásra kerültek.

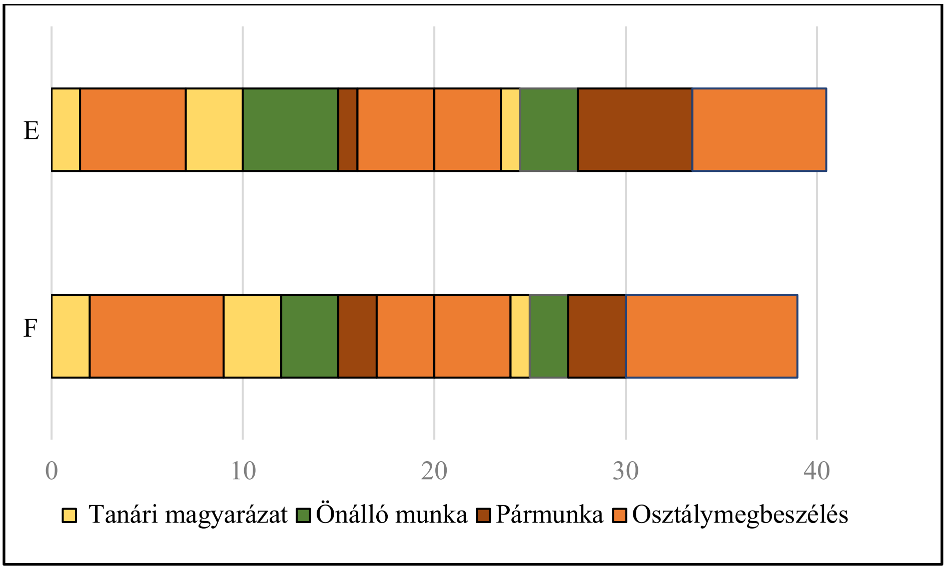
Az órákról készült videófelvétel alapján a tanulók motivációját vizsgáltuk. A 2-3-4 pontok magukba foglalják a Think-Pair-Share (TPS: Gondolkozz önállóan – Oldd meg párban – Oszd meg másokkal) kooperatív módszert. A videófelvétel nem csak a TPS-t segített utólagosan is monitorizálni, hanem a diákok motivációjának elemzésében is jelentős szerepet játszott. Ez által tudtuk azonosítani az elméleti részben bemutatott motiváció forrásait, amelyek a feladat iránti érdeklődés, a szocializálódásra alkalmas környezet, a felfedezés lehetősége, a miértek ismerete, a tárgyak használata és mások segítése pontokban foglalhatók össze. Az első négy tényezőre a 2. táblázatban láthatóak a megfelelő indikátorok. A „mások segítése” forrás a kooperatív TPS módszer által valósult meg. A tárgyak használata pedig a papírcsík mint segédeszköz révén lett azonosítva.

2. táblázat: A motivációs források és ezek indikátorai

Motivációs források	Indikátora
A feladat iránti érdeklődés	Akarati és érzelmi megnyilvánulások Diákok kitartása
Szocializálódásra alkalmas környezet	Osztálymegbeszélés (megbeszélésben résztvevő diákok száma)
A felfedezés lehetősége	A szabályok megfogalmazása
A miértek ismerete	Magyarázat, érvelés (bizonyítás-féle momentumok)

4.3. Eredmények és következtetések

Romániában a tanórák 50 percesek, azonban ebben a kutatásban csak az óra „effektív részét” vettük figyelembe, vagyis az óra eleji szervezéseket, a váratlan külső megszakításokat figyelmen kívül hagytuk. A két óra idővonalán (4. ábra) láthatjuk, hogy mindkét osztályban az óra nagy részét az osztálymegbeszélések alkotják, a tanár beavatkozása minimális. A két óra idővonala hasonlít egymáshoz, annyi különbséggel, hogy az E osztályban több időt szántunk az egyéni munkára a diákok kérése szerint.



4. ábra: A kísérleti órák idővonala

A továbbiakban elemezzük a motiváció forrásait és a kapcsolódó indikátorokat, illetve néhány példát mutatunk arra, hogy ezek milyen módon nyilvánultak meg a problémaalapú megközelítést alkalmazó tanóra során.

4.3.1. A feladat iránti érdeklődés

Akarati, érzelmi megnyilvánulások

A következő tanulói megnyilvánulások, amelyeket a videófelvétel átiratából emeltünk ki, arra utalnak, hogy a tanuló figyel, érdekelt abban, hogy éppen mi történik a tanórán, és részt akar venni benne: „Nekem van, adok neked papírt!”, „Írjuk le vagy elég, ha elmondjuk?”.
A „Behajthatjuk a másikat is?” „Hagyjuk három hajtásra?”, „Csak négyszer kell behajtsuk?” kérdések azt sugallják, hogy a diákok készen állnak a feladatra, kíváncsiak mi következik legközelebb. Minden idézett

megnyilvánulás szorosan kapcsolódik az eszközhasználat forráshoz, amely megsokszorozta az érzelmi bevonódás jeleit a hagyományos órákhoz képest.

A diákok kitartása

A „Mondjuk el, hogy számoltuk ki?", „Tudok még egy megoldást!" típusú megnyilvánulások jelzik, hogy a tanulók részt vesznek az aktuális feladatokban és addig próbálkoznak, amíg meg nem oldják a problémát, el nem érik a tanulási céljukat. A kérés, hogy „Egy pillanat, még ne [vetítse ki a megoldást]!" azt mutatja, hogy a diák először önállóan szeretné megoldani a feladatot, nem akarja az eredményt látni, csak miután ő is megoldotta, ellenőrzés gyanánt. Ez ugyanakkor azt is igazolja, hogy a probléma megfelelően volt kiválasztva a korcsoport számára: a diákok érzik a kihívást, de azt is, hogy képesek a megoldására, csak időre van szükségük.

4.3.2. Mások segítése

A pármegbeszélések ebben a kutatásban nem voltak külön hangfelvételre rögzítve, így ezek elemzése a tanár óra után történő reflexióján alapult. Itt tapasztaltuk először azt a jelenséget, hogy egy gyengébb jegyekkel rendelkező tanuló elfogadja a társa hibás gondolatmenetét, arra alapozva, hogy „ő jobban tudja, hisz jobb jegyei vannak", így a kritikus gondolkodás meghiúsul. Az egyik csoportban a pármegbeszélést követő osztálymegbeszélés után kiderült, hogy a gyengébb eredményekkel rendelkező tanulónak volt helyes a megoldása az egyébként matematikából remekelő társával szemben. Rögtön felkiáltott: „Na látod-e, hogy nekem van igazam?!". Így ez a tevékenység nem csak egy lehetőség volt a gyengébb teljesítménnyel rendelkező tanuló számára, hogy aktívan részt vegyen a matematikaórán, de elégtétel, motiváció is, hogy legközelebb érdemes lehet ismét becsatlakozni a megbeszélésekbe, mert jó ötletei és megoldásai vannak.

4.3.3. Szocializálódásra alkalmas környezet

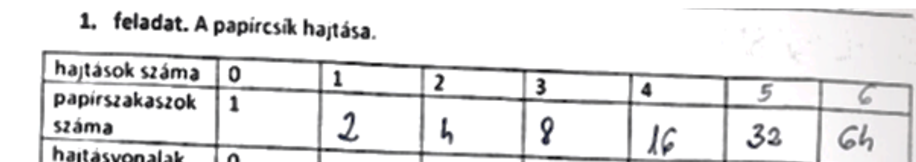
A kooperatív munkának köszönhetően kellemes volt az osztálylégkör. A TPS azzal is segítette a motivációt, hogy lehetővé tette a diákok számára, hogy úgy vegyenek részt az osztálybeszélgetésben, hogy van már korábbi tapasztalatuk az egyéni és pármunka fázisokból, s ez elősegítette a tanulók aktivitását, közlékenységét, kommunikációját. A 3. táblázat szerint mindkét osztályban a diákok legalább fele becsatlakozott az osztálymegbeszélésbe (F csoport: 50%, E csoport: 66%). Nem csak azt számoltuk meg, hogy hány diák szólalt meg az óra alatt, hanem azt is, hogy hány alkalommal: a diákok összesen 86, illetve 81 alkalommal szólaltak meg az osztálymegbeszélések során.

3. táblázat: A frontálisan megszólaló diákok száma a három tevékenység alatt

Tevékenység	Diákok száma		Megszólalások száma	
	F	E	F	E
Heuréka!- ráhangolódás	10	10	24	24
Papírhajtogatás	11	10	26	37
Minta gyufaszálakból	9	12	36	20
Teljes órán	13	16	86	81

4.3.4. A felfedezés lehetősége

A pármegbeszélés előtt a TPS módszerrel biztosítottuk a diákok egyéni munkáját (5. ábra), az egyéni gondolatmenetek kifejlesztését, az összetartozó értékek közötti kapcsolat felfedezését.


1. feladat. A papírcsík hajtása.

hajtások száma	0	1	2	3	4	5	6
papírszakaszok száma	1	2	4	8	16	32	64
hajtásvonalak száma	0	1	3	7	15	31	63

5. ábra: Részlet S14 feladatlapjáról

A tanár kérdésére, miszerint „Milyen szabályszerűséget véltek felfedezni a sorozatban?” többféle helyes válasz érkezett:

S4: A szakaszok száma mindig megduplázódik, a hajtási vonalak száma pedig 1-gyel kevesebb.
S5: Felül ugyanaz, de alul mindig megduplázódik a különbség.
S2: Az alsó sorozatban megduplázzuk az előző számot, és hozzáadunk egyet.
S6: A számot önmagához hozzáadjuk.
S7: Ha összeadjuk a felső számot az alatta levővel, a következő alsót kapjuk meg.
S8: A 2 hatványai!

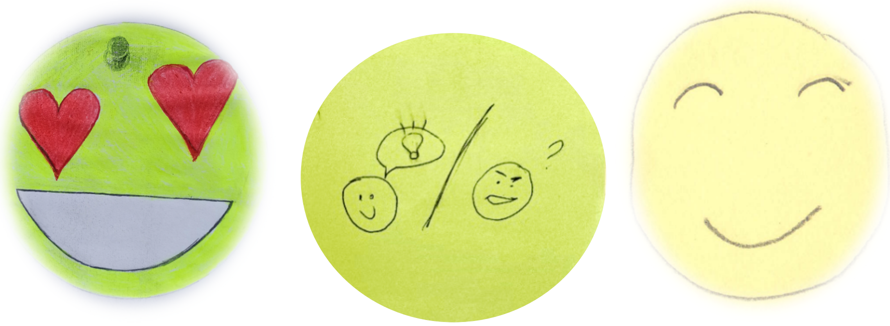
4.3.5. A miértek ismerete

A diákok nem csak helyes megoldásokat adtak, hanem el is magyarázták azokat. Elmagyarázták például, hogy a papírszakaszok száma miért duplázódik, így nem csak az eredményben voltak érdekeltek, hanem a folyamatban, ahogy eljutottak az eredményhez. A papírcsík használata (eszközhasználat) segített nekik abban, hogy feltérképezzék a folyamatot, megoldják a problémát, és reflektáljanak a megoldásra. Ezáltal a problémaalapú tanulásban megjelenő érvelés, magyarázat, indoklás még hangsúlyosabbá vált.

T: Beszéljük meg, miért is működnek ezek a szabályosságok?
S9: … amit már behajtottunk, az megduplázódik…
S10: Ha van egy behajtott papírcsíkom, és azt még egyszer behajtom, egy új hajtásvonal jelenik meg minden papírszakaszon. Így kapjuk meg a következő számot.

4.4. Összegzés

Az itt bemutatott akciókutatásban egy problémaalapú megközelítést alkalmazó tanórán a motiváció forrásait azonosítottuk és vizsgáltuk. Ezek a feladat iránti érdeklődés, a szocializálódásra alkalmas környezet, a felfedezés lehetősége, a miértek ismerete, a tárgyak használata és mások segítése. Azt tapasztaltuk, hogy ezek a források természetes módon illeszkednek be egy problémaalapú óra lecketervébe. Ezt a konklúziót alátámasztják a diákok által beadott kilépőkártyák is (6. ábra), amelyek többsége pozitív visszajelzés volt (F csoport: 73%, E csoport: 83%). Megállapíthatjuk tehát, hogy a problémamegoldás és az ehhez kapcsolódó szociális és fizikai (papírhajtogatás) aktivitás kiváló módja annak, hogy támogassa és növelje a tanulók motivációját. Ehhez természetesen szükséges, hogy jó tanulási és tanítási módszereket, megfelelő eszközöket és tananyagot válasszunk, amit meg lehet közelíteni valamely problémát jelentő tevékenységen keresztül, illetve, hogy jó tantermi légkört teremtsünk. A Báró (2020) publikációban részletesen tárgyaljuk a kutatást.



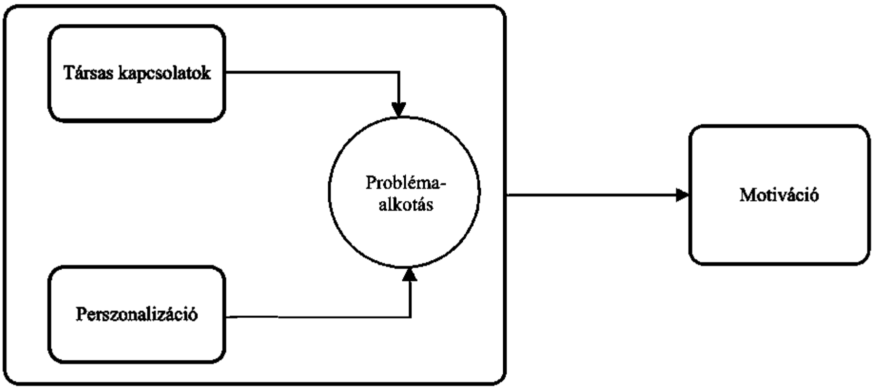
6. ábra: A diákok óra végi kilépő kártyái

5. A problémaalkotás során megjelenő perszonális tényezők hatása a motivációra

Az előző fejezetben problémamegoldás során megjelenő motivációs forrásokat vizsgáltuk, ebben a fejezetben, a motiváció témakörénél maradva, a problémaalkotás során felfedezhető perszonális jegyekkel (egy problémába beleszőtt személyes jegyek) foglalkozunk és azok hatásait vizsgáljuk a motivációra nézve.

Jelen kutatást a kezdetekben normál tantermi körülményekre terveztük, ám a 2020-ban elszabaduló világjárvány arra kényszerített, hogy a kutatást áttervezzük úgy, hogy az óratervek alkalmasak legyenek az online formában való megvalósításra. A koronavírus járvány Romániában is, mint más országokban, kezdetben az iskolák bezárását vonta maga után, ami a szociális interakciókat jelentősen lecsökkentette. Flack és munkatársai (2020) tanulmányukban bemutatták a tanárok aggályait az online tanulás, tanítás kapcsán. Az első három helyre került a diákok szociális izolációja, a diákok közérzetének romlása, valamint az esetleges tanulási veszteség. Ugyanakkor azt is tudjuk, hogy ezen jelenségek kölcsönösen hatnak egymásra, például a szociális interakciók megléte egy osztályon belül pozitív hatással van a tanulmányi eredményekre (Hattie, 2008). Ezek a többletinformációk ösztönöztek arra, hogy előzetes tapasztalat után próbáljuk megnövelni a problémaalkotási folyamat során létrejövő szociális megnyilvánulások számát.

A problémaalkotásnak kimutatott pozitív hatása van a motivációra, és a motiváció szoros kapcsolatban áll a matematikai kontextus személyre szabottságával (Walkington et al., 2013). Ezekre az eredményekre alapozva terveztük meg kutatásunkat (7. ábra). Egyrészt a perszonalizációt egyfajta motivációs faktornak tekintettük (Suriakumaran et al., 2017), másrészt megpróbáltuk összekapcsolni az ALF módszer (lásd 15. oldal) problémaalkotó folyamataiba beékelhető társas kapcsolatokkal. Erre az ösztönzést (Martin & Dowson, 2009) cikke adta, miszerint a csökkent társas kapcsolatok a motiváció csökkenéséhez vezetnek. Ez szolgáltatta **K2** kutatási kérdésünk alapját: *Hogyan hatnak a problémaalkotás során potenciálisan megjelenő perszonális tényezők a motivációra?*



7. ábra: Problémaalkotás kapcsolata a motivációval

5.1. A kutatás körülményei

A kutatás résztvevői négy hatodik osztály, kettő Erdélyből (C, D csoportok), kettő Magyarországról. Mindkét osztályt páronként ugyanaz a tanár tanította Erdélyben és Magyarországon is, tehát első körben más volt a tanár (Lócska Orsolya Dóra), mint a másodikban (a dolgozat szerzője). Összesen 125 diák vett részt a kutatásban: 65 a magyarországi iskolából és 60 az erdélyi iskolából.

A kiválasztott tananyagot pár hónap eltéréssel tanítják a két országban, ezért két részre osztottuk a kutatást, így az akciókutatásunkat itt két körben valósítottuk meg. Az akciókutatásunk első része a magyarországi iskolában történt 2020 tavaszán (Kovács et al., 2023), míg a második része az erdélyi iskolában, az őszi félévben. Mindkét iskolában a kutatók az ALF módszer szerint dolgoztak fel az Arányok és arányos mennyiségek fejezetből három leckét:

1. Arányos osztás (két problémaalkotási tevékenység),
2. Egyenes és fordított arányosság (két problémaalkotási tevékenység),
3. Százalékszámítás, százalékalap (egy problémaalkotási tevékenység).

A tanítás online környezetben valósult meg, és mindkét kör lezárta után a diákok véleményeit online kérdőív kitöltésével gyűjtöttük be. A 4. táblázat tartalmazza a két kör közötti hasonlóságokat és különbségeket.

1. kör:

A tanár egy narrációval és időzítővel ellátott prezentációt készített (12. melléklet), amely a modellprobléma és gyakorlás fázisokat tartalmazta. A diákok több alkalommal is lejátszhatták a diasort, mielőtt rátértek a problémaalkotási fázisra. A tanár házi feladat formájában alkotott problémákat begyűjtötte, majd kiválasztott egyet (vagy kettőt) az „Osztálytársam feladata" fázishoz. Ennek megoldása szintén házi feladat volt.

2. kör:

A tanár kisebb módosításokkal előkészítette ugyanazt a diasort, de nem küldte ki, hanem egy online óra keretében valós időben bemutatta a diákoknak, ahol lehetőség volt kérdezni, megjegyzéseket tenni. A problémaalkotási tevékenység az első körhöz hasonlóan házi feladat volt, de az „Osztálytársam feladata" fázis élőben került osztálymegbeszélésre, Google Meet-en. Az „Osztálytársam feladata" részt ebben a körben megelőzte egy beszélgetés, amelynek kulcskérdése volt, hogy „Szerinted ki alkothatta ezt a problémát? Miért gondolod ezt?" Mint egy új ALF-lépésként, a problémaalkotó kilétének felfedése és a feladat megoldása után az illető elmesélte a történetet, ami inspirálta őt a problémaalkotás folyamatában. A feladat megoldása után pedig egy rövid diszkusszió következett arról, hogy a probléma alkotója elfogadja-e osztálytársainak megoldását. Ezeken a megbeszéléseken keresztül az affektív tényezők a második körben jelentősebb szerepet kaptak. Lényegében az volt a cél, hogy a megoldandó feladatot érzelmileg közel hozzuk a tanulókhoz, ezáltal motiváltabbá tegyük őket a megoldásra.

4. táblázat: Az ALF módszer két akciókutatási köre közötti hasonlóságok és különbségek

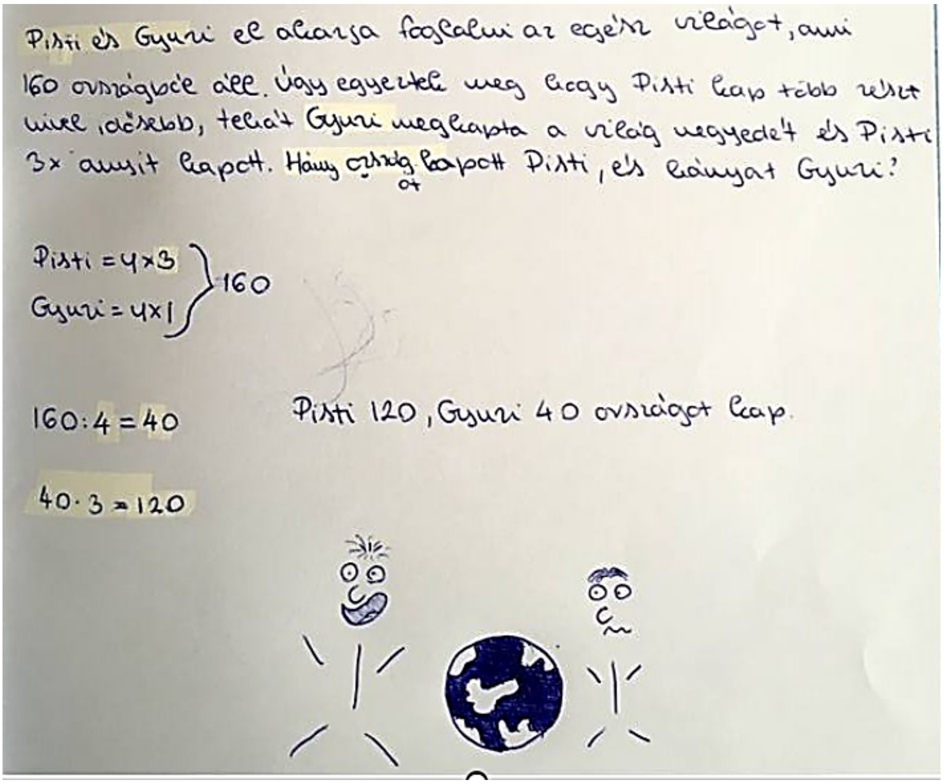
ALF lépések	**1. kör**	**2. kör**
Modellprobléma	Prezentáció, amelyet a diák otthon néz végig.	Diavetítés, amelyen a tanulók a tanárral együtt dolgoznak online órán.
Gyakorlás	Önszabályozó tanulás a prezentáción keresztül.	Tanár által szabályozott tanulás a prezentáción keresztül, online órán.
Problémaalkotás	Beküldendő házi feladat.	Beküldendő házi feladat.
Osztálytársam feladata	Tanár választása szerint.	Tanár választása szerint.
		Ki alkotta a problémát?
	Házi feladat	Online órán egyéni munka.
Megoldás ellenőrzése	Tanár által	Problémaalkotó által

5.2. Adatgyűjtés

Az adatokat a mindkét körben begyűjtött tanulói feladatalkotások, illetve a tanulók kérdőívre adott válaszai, valamint a 2. kör tanóráiról készült videófelvételek és a tanári reflexiók alkotják. Valamennyi diákmunkát kódoltuk, figyelembe véve a Walkington és munkatársai (2013) által megadott iskolán kívüli érdeklődés értékelésére szolgáló kódolási keretet. Ez a keret hat iskolán kívüli tevékenységre, érdeklődésre ad kódot. A két iskolában azonosított kódokat egy-egy példa segítségével az alábbiakban mutatjuk be:

C1. sport: „Norbi, Szabi és Szilárd a teqball verseny első fordulójában összesen 90 pontot gyűjtött össze 7:6:5 arányban. Hány pontot gyűjtöttek a fiúk külön-külön?”

C2. videojátékok (8. ábra):



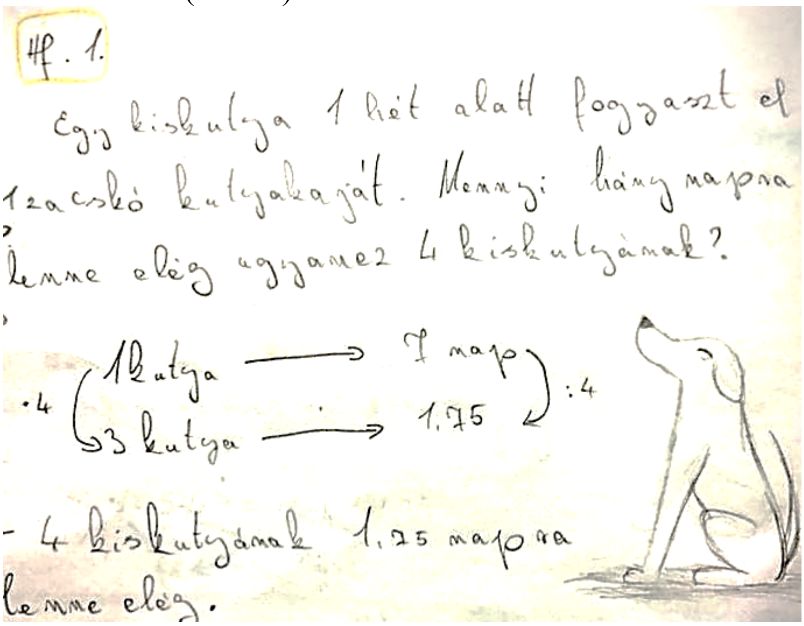
8. ábra: Iskolán kívüli érdeklődés a feladatalkotásban – videojáték

C3. infó-kommunikációs eszközök: „Egy új Huawei Mate 40 pro árát 15%-kal csökkentették, így 4800 lej, számítsd ki mennyi az eredeti ára!”

C4. közösségi média: nem volt rá példa a diákok munkájában

C5. élelmiszer: Kettő gömb fagyit vásároltam, ami 350 Ft-ba került. Mennyit kellett fizetnie a barátnőmnek, ha ő 4 gömb fagyit vett?

C6. házi kedvencek (9. ábra):



9. ábra: Iskolán kívüli érdeklődés a feladatalkotásban – házi kedvenc

Két másik módot is azonosítottunk (az iskolán kívüli érdeklődésen kívül), amellyel a tanulók kifejezték jelenlétüket a felvetett problémákban, ezeket *személyes megnyilvánulásoknak* neveztük:

a. A diák közvetlen jelenléte az alkotott példákban azáltal, hogy egyes szám első személyben ír. A személyesség a ragozásban „mentem”, „vettem” és személyes névmások „én”, „engem” által jelenik meg, például „A kedvenc pulcsimat leakciózták”. Egy másik mód, amikor a diák közvetve foglalja bele magát a feladat szövegébe: a feladat főhősének a neve megegyezik a feladatalkotó nevével. Például, „Zsófi 50 perc alatt 3 km-t tesz meg…” (a feladatot Zsófi alkotta).
b. Aktuális vagy megtörtént szituációk: A felvázolt probléma egy olyan eseményt tárgyal, amely a közelmúltban történt, pédául Fekete péntek vagy koronavírus járvány. “Peti vásárolt egy új laptopot, ami Fekete pénteken 30% -os kedvezménnyel 1500 Ron-ba került. Mennyi volt a laptop eredeti ára?”

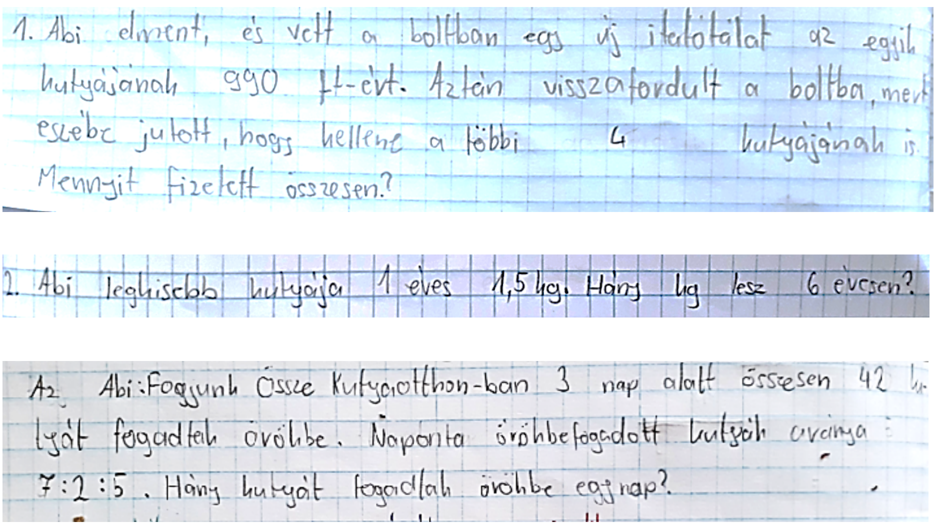
5.3. Eredmények és következtetések

Az akciókutatás 2. körében (őszi, erdélyi szakasz) különös figyelmet szenteltünk a megjelenő érzelmeknek és két szemszögből vizsgáltuk azokat:

1. különböző érzelmek szerepe a problémaalkotásban,
2. affektív tényezők szerepe a tanulók, tanárok közötti társas kapcsolatokban.

5.3.1. A különböző érzelmek szerepe a problémaalkotásban

A különböző érzelmek, hobbik, érdeklődési körök arra ösztönzik a tanulókat, hogy közvetlenül vagy közvetve belefoglalják ezeket vagy akár magukat az alkotott problémákba. A diákok érdeklődési körére utaló jelek több alkotott problémában is fellelhetőek voltak, és ezáltal lehetőségük volt kifejezni, hogy mennyire kötődnek az adott témához.
Például a 10. ábra mutatja, hogy egy tanuló minden egyes problémáját a kutyája köré fogalmazta. De hasonló történt autókkal, macskákkal, lovakkal stb.

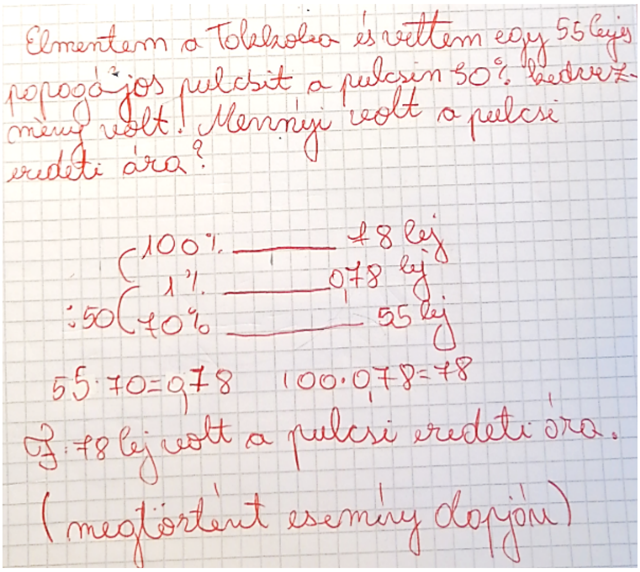

1. Abi elment, és vett a boltban egy új itatótálat az egyik kutyájának 990 Ft-ért. Aztán visszafordult a boltba, mert eszébe jutott, hogy kellene a többi 4 kutyájának is. Mennyit fizetett összesen?

2. Abi legkisebb kutyája 1 éves 1,5 kg. Hány kg lesz 6 évesen?

A2. Abi: Fogjunk Össze Kutyaotthon-ban 3 nap alatt összesen 42 kutyát fogadtak örökbe. Naponta örökbefogadott kutyák aránya 7:2:5. Hány kutyát fogadtak örökbe egy nap?

10. ábra: Feladatokon átívelő témák

Az aktuális vagy megtörtént szituációk feladatba foglalásával sikerült a való világot egy kicsit közelebb hozni az iskolai matematikához, és a matematika órán történő problémamegoldáshoz is, ami felkeltheti a diákok figyelmét. Ilyen (11. ábra) feladatokat olvasva, mondják a tanulók "ez megtörtént (megtörténhetett volna) velem is!"



11. ábra: Megtörtént szituáció feladatba foglalása

Az ilyen jellegű személyes megnyilvánulások a két körben alkotott probléma 18%-ban voltak fellelhetőek (5. táblázat) és ezen a téren nem volt szignifikáns különbség a két iskola között (21% az 1. körben és 14.8% a 2. körben). Ezt a megállapítást a Fisher-féle egzakt teszt eredményéből ($p = 0.12 > 0.05$) vontuk le. (A Fisher-féle egzakt teszt egy statisztikai szignifikanciateszt, amely a nem paraméteres eljárások közé tartozik. Két dichotóm változó közötti kapcsolat erősségét méri. Ebben az esetben alkalmazhatjuk, hisz nem érzékeny az eloszlásra és a mintanagyságra sem.) A fentiek alapján tehát azt mondhatjuk, hogy a személyes megnyilvánulások beleszövése a feladatba magából a problémaalkotási tevékenységből származik, és a kutatás azt sugallja, hogy az osztálytermi megbeszélések által megerősített affektív faktoroknak kevés befolyása van az ilyen jellegű megnyilvánulásokra.

5. táblázat: Személyes megnyilvánulást tartalmazó problémák

Perszonalizáció megjelenése	**Személyes megnyilvánulások**	**Nincsenek személyes megnyilvánulások**	**Összes probléma**
1.kör	46	173	219
2.kör	28	160	188
Összesen	74	333	407

Ezzel szemben azt figyeltük meg, hogy a perszonalizáció sokkal inkább jellemző a 2. körben részt vevő diákokra, mint az 1. körben részt vevőkre (6. táblázat). Például az iskolán kívüli tevékenységekről 67 (az összes alkotott probléma 30.6%-a) esetben írtak az 1. körben, míg 76-an (az összes alkotott probléma 40.4%-a) a 2. körben.

6. táblázat: Iskolán kívüli tevékenységet tartalmazó problémák

Perszonalizáció megjelenése	**Iskolán kívüli tevékenységet tartalmazó problémák**	**Iskolán kívüli tevékenységet NEM tartalmazó problémák**	**Összes probléma**
1.kör	67	152	219
2.kör	76	112	188
Összesen	143	264	407

Ez a fajta perszonalizáció erősebb volt a 2. körben, és a különbség szignifikáns. Fisher-féle egzakt tesztjének eredményeképpen ($p = 0.047$) szignifikáns eltérést tudunk kijelenteni 95%-os bizonyossággal. A különbséget az affektív tényezők megnövekedett szerepével magyarázzuk, azzal, hogy a tanulók motivációt érezhettek arra, hogy az iskolán kívüli érdeklődésüket felhasználják a felvetett problémák megírásához.

5.3.2. Az affektív tényezők szerepe a tanulók, tanárok közötti társas kapcsolatokban

A második körben arra kértük a diákokat, hogy találják ki, melyik osztálytársuk alkotta az adott feladatot. A következő átirat a második online leckéből lett kiválasztva, amelyben az arányos osztáshoz kellett feladatot kitalálјanak a diákok: két fiú között kellett elosztani 60 linzert, és a tanulók feladata volt az elosztás módjának kitalálása:

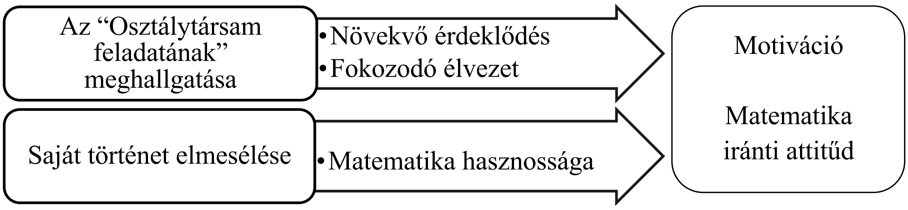
T:	[megosztja a képernyőt az alkotott feladattal: S82: „...a nagymamájuk tyúkjai megtetvesedtek ... Megkérte a fiúkat, hogy fújják le tetűsprével... Laci 7 tyúkot, Robi 5 tyúkot fújt be. Hogy osztották el a sütiket?”] Először arra kérlek, próbáljátok meg kitalálni, ki írhatta ezt a feladatot?
S66:	Tanár néni, ez biztosan G. (S82).
S62:	Ez G. volt.
Sokan:	Igen, G. írta.
T:	Miért olyan egyértelmű, hogy G. írta? Vannak neki tetves tyúkjai?
S69:	Neki vannak ilyen sztorijai.
S62:	Mert ő tanyasi.
Sokan:	[kacagnak]
T:	G. megtetvesedtek a tyúkjaitok, vagy mi lett?
S82:	[kacag] Nem, de mamámnak voltak tyúkjai. Onnan jött az ötlet.
T:	Imádom ezt a feladatot.

Amint a diákok a lehetséges problémaalkotót találgatták, a tanár bekapcsolódhatott a beszélgetésbe, vagy csak figyelhetett, milyen kapcsolat van vagy alakul ki a tanulók között. Ez által a tanár megismerhette a diákok háziállatainak a neveit, vagy azt, hogy ki, kiről, mit tudott korábban. Ezek a beszélgetések az online környezetben is lehetőséget teremtettek szociális interakciók kialakulására diák-diák, illetve tanár-diák között. Ezzel is erősítettük a Walter és Hart-féle (2009) motivációs forrásokat, mint például a feladat iránti érdeklődést, a szociális környezetet, egymás segítését. Azt vettük észre, hogy építve az online szociális környezetet, egy sokkal inkluzívabb osztálylégkört teremthetünk. Ezek a problémák, alkotott feladatok emlékezetesek maradtak, még több hónappal a problémaalkotási tevékenység után is, néhány diák megjegyezte, hogy jó szívvel emlékszik vissza például G. által alkotott tetves tyúkos feladatra, és szívesen oldotta meg a feladatot. Az egyik diák matematika órára mémet is készített erről, majdcsak nem fél évvel a problémaalkotási tevékenység után (12. ábra).

12. ábra: Visszajelzés a problémaalkotásról

Az 1. körben az ALF módszer a kontextus személyre szabása révén különböző affektív tényezőket is tartalmazott, például a motivációt vagy matematika iránti attitűdöt. Az „Osztálytársam feladatának” ismertetése és meghallgatása többlet érzelmi forrásokat hozott be ehhez képest a 2. körben.

A 13. ábra szemlélteti a hatást: a történet megismerése, amely inspirálta az osztálytársat a feladatalkotásban figyelemfelkeltő hatással bír, ami érdeklődéshez, a matematika élvezetéhez vezet. Azáltal, hogy az illető beszámol arról, hogy tulajdonképpen mi adta számára az ötletet a problémaalkotás folyamatában, ráeszmél arra, hogy az ő feladata realisztikus, s ez megváltoztathatja a nézőpontját a matematikáról, a matematika hasznosságáról. Ez által a matematika iránti attitűd javítható.



13. ábra: Saját történetek elmesélésének hatása

A feladat keletkezésének háttértörténete felkeltette a diákok érdeklődését, mondván "ez megtörténhetett volna velem is". A kérdőív válaszainak (2. melléklet) kiértékelése megerősítette ezt a megfigyelésünket. Az akciókutatás keretében feldolgozott fejezet végén arra kértük a diákokat, hogy töltsenek ki egy 16 kérdésből álló kérdőívet, melyben az új tanítási-tanulási módszerről kérdeztük őket. A 7. táblázatban 3 kérdést emeltünk ki ezek közül (K6: S*zerettem saját feladatot kitalálni a matematika órákhoz.*, K8: *Olyan feladatokat találtam ki, amelyek a való életben is előfordulhatnak.*, K9: *Tetszett, amikor a házi feladat az osztálytársam feladata volt.*). Három fokú Likert skálát használtunk a diákok életkorára való tekintettel: Egyetértek – Nem tudom – Nem értek egyet. Csak a határozott válaszokat (Igen-Nem) vettük figyelembe az értékelésnél. Annak érdekében, hogy elemezzük az adatokat, kontingencia táblázatot hoztunk létre, a válaszok eloszlása a 7. táblázatban látható.

7. táblázat: Az Igen-Nem válaszok a kérdőív három kérdésére

	K6		**K8**		**K9**	
Egyetért	Igen	Nem	Igen	Nem	Igen	Nem
1. kör	22	8	24	4	28	5
2. kör	32	11	39	3	45	2

A táblázatból leolvashatjuk, hogy a diákok majdnem háromnegyede szívesen alkotott problémát (K6 item: 1. kör 73,33%, 2. kör 74,41%). Tehát úgy tekintjük, hogy az ALF paradigma adaptációja mindkét körben sikeres volt. A K8 kérdésre az 1. körben részt vevő diákok 85,71%-a válaszolta azt, hogy valós életben előforduló problémát alkotott, míg a 2. körben a diákok 92%-a gondolta így. Az K8 itemre adott pozitív válaszok arra utalnak, hogy a tanulók tisztában vannak azzal, hogy problémáik reálisak, és alátámasztják azt a megállapításunkat, hogy a problémafelvetés pozitívan befolyásolja a tanulók felfogását az iskolai matematika és a valós élet kapcsolatáról. Ebben a tekintetben nem volt jelentős különbség a két kör között. A diákok mindkét körben szerették az osztálytársuk feladatát megoldani, ám a százalékos eredmény a második körben nagyobb volt, mint az elsőben (95.7%, illetve 84.8%). Ennek ellenére a különbség nem szignifikáns ($p = 0.12$).

5.4. Összegzés

A kutatásunk egy két ciklusú akciókutatásra épült, amelyben a problémaalkotásra helyeztük a hangsúlyt. A szakirodalomból ismerjük a kontextusperszonalizáció motiváló hatását. Ez a jelenség kutatásunk első ciklusában valóban megjelent. A második ciklusban azt tapasztaltuk, hogy a társas kapcsolatok megerősítésével tovább erősödött a tanulók motivációja a problémaalkotás során. Ezzel egy újabb motivációs forrás megjelenésére mutattunk rá, a perszonalizáció lehetőségét magában hordozó tanulási környezetre, amely a problémaalkotási tevékenységhez szorosan kapcsolódik. Megállapíthattuk, hogy a problémaalkotásnak az online környezetben is motiváló hatása van, ráadásul ez a pozitív hatás fokozható affektív tényezők bevonásával. Összességében elmondható, hogy az online tanulási környezethez való alkalmazkodás sikeresen zajlott, a tervnek megfelelően sikerült kivitelezni. A szakirodalom (Martin & Dowson, 2009) és a kutatás alapján azt állíthatjuk, hogy a több társas interakció elősegíti a perszonalizációt, ami motivációs tényezőket vált ki. A Báró (2022b) publikációban részletesen tárgyaljuk ezt a kutatást.

A problémaalapú tanulás nem csak a diákok motivációjára lehet jó hatással, hanem matematika órai bevonódásra vagy különböző gondolkodásmódok fejlődésére. A továbbiakban a problémaalapú tanórán megjelenő kritikus gondolkodást mint jellemző és alapvető gondolkodásmódot vizsgáljuk.

6. Páros problémamegoldás során megjelenő kritikus gondolkodás vizsgálata egy problémaalapú tanórán

Az előző két fejezet a problémaalapú tanórák motivációra mért hatásaival foglalkozott. Ugyanakkor a szakirodalom szerint (Liu & Pásztor, 2022) a problémaalapú megközelítés nem csak a motivációra mért jótékony hatásáról ismert, hanem a kritikus gondolkodás aktivizálásáról is. Ez a fejezet egy online problémaalapú tanórán alkalmazott páros munka során megfigyelt kritikus gondolkodás jellemzőit mutatja be.

6.1. A kutatás körülményei

A kutatást 2021-ben valósítottuk meg, amikor a világjárványnak köszönhetően egész Románia területén kötelező online oktatás volt elrendelve. A kutatásban két hetedik osztály vett részt (A és B csoport – a longitudinálisan vizsgált tanulók), összesen 61 diák (31, illetve 30 diák). A problémaalapúan feldolgozott téma ez esetben a tanmenet egy 6 órából álló fejezete volt, amelynek címe: Egyenletek és egyenletekkel megoldható feladatok. Ebből a fejezetből négy órát alakítottunk át problémaalapúvá, a négyből most egyet fogunk elemezni.

A 8. táblázatban látható a fejezet felépítése, amelyet egy előteszt és egy utóteszt foglalt keretbe. Megjegyezzük, hogy a tanulók az egész és a racionális számok halmazán már tanultak egyenletmegoldást 6. osztályban, ugyancsak online formában, a világjárvány kitörése utáni első szemeszterben (2020 tavasz). Mivel ekkor az online oktatás még csak kialakulóban volt, ezért az előteszt eredményei arról is számot adtak, hogy mit sikerül a korábbi félévben megtanítani ebből a témakörből.

Annak érdekében, hogy pontosan dokumentálni tudjuk a kutatást és alkalmazni tudjuk a trianguláció elvét, különböző kutatási eszközöket használtunk. Minden óra online formában volt megtartva, Google Meet-en keresztül, ezekről videófelvétel készült, majd átirat. Szintén átirat készült a párbeszédekről, amelyeket a diákok hangrögzítőn rögzítettek a pármunkájuk során. A dokumentumokat, amelyeken valós időben a diákok dolgoztak (például Jamboard, Google Dokumentumok) elmentettük. Máskülönben ezek a megosztott dokumentumok lehetővé tették a tanár számára azt is, hogy valós időben figyelje a diákok munkáit.

8. táblázat: Az Egyenletek és egyenletekkel megoldható feladatok fejezet felépítése

Előteszt	2021.május 5.	felmérés		
	Az óra témája	**Óratípus**	**PBL elem**	**Munka-forma**
Tanórák	Egyenlet átalakítása ekvivalens egyenletté (1)	problémaalapú	probléma-megoldás	kooperatív csoportos
	Gyakorlatok (2)	hagyományos	-	frontális
	$ax + b = 0, a \neq 0$ típusú egyenletek megoldása (3)	problémaalapú	probléma-megoldás és problémaalkotás	páros
	Alkalmazások (4)	hagyományos	-	frontális
	Szöveges feladat megoldása egyenlettel (5)	problémaalapú	heurisztikus probléma-megoldás	egyéni
	Gyakorlás (6)	problémaalapú	problémaalkotás	kooperatív páros, majd egyéni
Utóteszt	2021.május 18.	felmérés		
Interjú	2021. május 25-30.	kikérdezés		

A fejezet lezárása után, ahogy az a 8. táblázatban is látszik, egy félig strukturált interjú készült 12 véletlenszerűen kiválasztott tanulóval. A véletlenszerű kiválasztás három diákkategória létrehozása után történt: átlagon felüli, átlagos, átlagon aluli tanulási eredményekkel rendelkező diákok. Az átlagokat a két osztály tanulóinak előző félév végén szerzett matematika jegyeinek átlaga adta. A kategóriák definiálása a következőképpen történt:

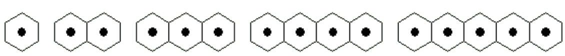
1. átlagon aluli tanulmányi eredményekkel rendelkezők (6-os vagy 6-osnál gyengébb jegyátlag)
2. átlagos tanulmányi eredményekkel rendelkezők (7-es vagy 8-as jegyátlag)
3. átlagon felüli tanulmányi eredményekkel rendelkezők (9-es vagy 10-es jegyátlag)

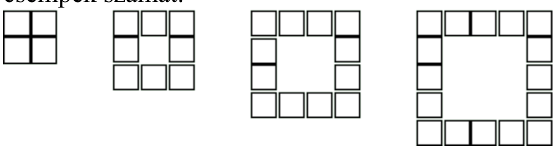
Minden kategóriából osztályokként két tanulót sorsoltunk ki a félig strukturált interjúra. A diákok ilyen típusú kategorizálását Csapó (2000) vizsgálata is indokolja, miszerint a matematikából szerzett jegy és a matematikához kapcsolódó attitűd között van kapcsolat.
Ebben a fejezetben tehát a kritikus gondolkodást vizsgáljuk a 8. táblázat (3) tanórája kapcsán, amelynek elemzésével a **K3** kutatási kérdést kívánjuk megválaszolni: *A problémaalapú megközelítés során alkalmazott páros munkaforma hogyan támogathatja a kritikus gondolkodás megjelenését?*

6.2. Adatgyűjtés

A (3) órán előforduló feladatokat táblázatba rendeztük. A továbbiakban a 9. táblázatban levő feladatokhoz kapcsolódó órai tevékenységeket elemezzük a kutatási körülményekben bemutatott adatok alapján.

9. táblázat: Órai tevékenységek

Feladat	Módszer/ Munkaforma
1. feladat (Mason, 1988): Adott az alábbi minta. Készíts táblázatot, amely tartalmazza az egyes ábrákon lévő pontok és vonalszakaszok számát! 	Frontális (tanár bemutatja a problémát)
Keress szabályt/összefüggést a pontok és vonalszakaszok száma között. Magyarázd meg a szabályt!	Online pármunka
A diákok bemutatják és összehasonlítják a megoldásaikat	Osztály-megbeszélés

Válaszolj a következő kérdésekre: a. Hány szakasz lesz az ábrán, amelyben 7 pont van? b. Hát azon az ábrán, amelyben 12 pont van? c. Hány pont van az ábrán, amelyben 46 szakasz van? d. Hát, amelyben 50 szakasz van?	Egyéni munka
A diákok bemutatják és összehasonlítják a megoldásaikat	Osztály-megbeszélés
2. *feladat* (Mason, 1988): A mintát négyzet alakú csempékből raktuk ki az alábbi ábrán. Készíts egy táblázatot, amely tartalmazza az egyes ábrákon lévő csempék számát. 	Frontális (tanár bemutatja a problémát)
Válaszolj a következő kérdésekre: a. Hány csempe lesz a 9. ábrán? b. Hány csempe lesz a 20. ábrán? c. Melyik ábrán lesz 98 csempe? d. Általánosíts: Hány csempe lesz az n-dik ábrán?	Online pármunka
A diákok bemutatják és összehasonlítják a megoldásaikat	Osztály-megbeszélés
3. feladat: Alkoss egy mintát (használhatsz fogvájót, gyufaszálat stb.) legalább a minta első négy elemét megadva. Tegyél fel két, a mintához kapcsolódó kérdést, majd válaszold is meg azokat!	Házi feladat, problémaalkotás

6.3. Eredmények és következtetések

Több kutatás eredménye is azt mutatja, hogy a problémaalapú beavatkozás pozitív hatással van a kritikus gondolkodásra, ennek eredményességéről mi is meg szerettünk volna bizonyosodni. Mivel az általunk alkalmazott problémaalapú tanulás értelmezésébe szervesen beleépül a Fahim és Pezeshki (2012) által definiált kritikus gondolkodás, ezért minden problémaalapú tevékenység és óra tervezésénél ennek fejlesztését is szem előtt tartottuk. Fahim és Pezeshki (2012) alapján a kritikus gondolkodást két szemszögből vizsgáljuk: (1) sejtés és érvelés megjelenése és minősége; (2) a kapott információ megfontolása, nem pedig a különböző ötletek azonnali elfogadása.

6.3.1. Sejtés és érvelés

A legtöbb esetben a pároknak sikerült azonosítaniuk a szabály(oka)t. Például az 1. feladatban a szokásos válasz az volt, hogy „a szakaszok száma öttel nő”, de mindkét osztályban néhány pár megfogalmazott más szabályt is: „$6 \cdot n - (n-1)$”, ahol n a pontok száma, vagy akár tovább számolva „$5n + 1$”.
A 2. feladatban szinte minden párnak sikerült a „$4 \cdot n$” összefüggést megállapitania, ahol n az ábra sorszáma. A szabályok megállapításának módjáról a következő fejezetben részletesebben is lesz szó. Érdekes megfigyelés volt, ahogy egyes párok törekedtek arra, hogy több szabályt is megadjanak. Például S1 azonosítja a *„pontok száma szorozva öttel plusz egy*” szabályt, amelyre S24 azt válaszolja: *„… igen. De szerintem van még egy. Mert az is elég egyértelmű, hogy a 6+5 az 11, a 11+5 az 16, a 16+5 az 21, és így tovább […], de a te szabályod is jó”*. Egy másik párnál S20 azt állítja: *„Két megoldásom van”* – és felsorolja; vagy egy másik esetben S17 megkérdezi: *„Van még valami más [szabály]?”* vagy S34: *„Még milyen szabályt fedezhetnénk fel…?”*.
A diákoknak egy másik feladata az volt, hogy magyarázzák meg a kapott szabályokat. A hangfelvételeket elemezve azt vettük észre, hogy a diákok a „miért?” kérdésre három különböző módon reagáltak. Ez alapján az érvelési képességet három kategóriába sorolhatjuk:

1) Megmagyarázzák a szabályt, az érvelés helyes, például:
   S19-S4 (1. feladat):

S19	Igen, mert az elsőnek van 6 [oldala], ezután mindig, ahogy több lesz, +5 lesz, mert…
S4	… mert mindig van egy közös oldal

S6-S26 (1. feladat):

S6	és háromnál pedig úgy van, hogy 6 · 3 az 18, viszont ott két közös oldal van és akkor az mínusz 2. Szerintem így kell.

S14-S29 (2. feladat):

S29 … itt felosztod két részre, a hosszú vonalakra meg a rövidebbekre

S14 Igen.

S29 A felső kettőt hívod hosszúnak, azok a teljes sorok. S a rövidebbek azok a függőlegesek […] Tehát kétszer az ábra száma +2, tehát ezek a hosszúak plusz kétszer az ábra száma mínusz 2.

2) Szeretnék megmagyarázni a szabályt, de nem tudják, például:

S44 De az a lényeg, […] hogy miért? Miért nő ötösével?

S58 Ez egy igazán jó kérdés…

S44 Én sem tudom, hogy miért, de a szabályt szerintem igen.

3) Nem igénylik a magyarázatot: miután megállapítják a szabályt, úgy gondolják, hogy megoldották a feladatot, befejezik a pármunkát.

Érdekes módon a kimaradt negyedik kategóriára nem találtunk példát, vagyis nem volt olyan tanulópár a két osztályban, akik meg szerették volna magyarázni a szabályt, de helytelenül érveltek. Kíváncsiak vagyunk, hogy nagyobb minta vagy más feladat esetén szintén kimaradna-e ez a kategória.

6.3.2. A kapott információ megfontolása

A kapott információ megfontolását és elfogadását tekintve két tanulópár típust figyeltünk meg:

(a) különböző tanulmányi eredményekkel rendelkező tanulópárok

Elemezve a pármunkákból származó hangfelvételeket egy olyan jelenségre lettünk figyelmesek, amelyet már korábbi problémaalapú órák kivitelezése során szintén tapasztaltaltunk (Báró, 2021, 2022a vagy a dolgozat 43. oldala). Ez tipikusan az az eset, amikor a gyengébb tanulmányi eredménnyel rendelkező tanuló rögtön, vagy egy kisebb vita után elfogadja a társának - akinek jobb jegyei vannak matematikából - az eredményeit, még akkor is, ha neki van igaza (példa ilyen párokra: S53-S43; S56-S45; S8-S23). Ezekben a szituációkban a kritikus gondolkodás csődöt mond, mert az a tény, hogy a társnak jobb jegye van matematikából befolyásoló tényezőként jelenik meg, így a megfontolás, elemzés elmarad. Ennél rosszabb eset az, amikor a gyengébb tanulmányi eredményekkel rendelkező tanulók nem is gondolkodnak a megoldáson, bízva abban, hogy a „náluk okosabb” társuk majd úgyis megoldja (példa ilyen párokra: S5-S20; S15-S30; S32-S48).

(b) hasonló vagy azonos tanulmányi eredményekkel rendelkező tanulópárok

Az előzőkkel ellentétben, a pármunka sokkal hatékonyabbnak bizonyult azon párok esetében, ahol a diákok hasonló tanulmányi eredményekkel rendelkeztek. Ők hajlandóbbak voltak egymást kijavítani, felhívni egymás figyelmét a hiányosságokra, megkérdőjelezni az elmondottakat vagy éppen hozzáfűzni valamit azokhoz. A következő párbeszédben a kritikus gondolkodás felbukkanását szinte minden lépésben megfigyelhetjük: az egyik diák igyekszik megoldani a feladatot, míg a társa folyamatosan javítja, helyesbíti az elmondottakat.

S9-S27 (1. feladat):

S27	Szóval itt akkor hogy lesz? Tehát úgy lesz, hogy a pontok száma szorozva 5 és azt megszorozzuk… nem…
S9	Nem kell szorozni!
S27	Nem szorozzuk!
S9	Pontok száma · 5+1, igen.
S27	Például az egyesnél a pontok száma egy. Megszorzod 5-tel és hozzáadsz egyet, az 6. Ez itt pipa.
S9	Aha.
S27	A kettesnél a pontok száma plusz 5, az 7, és ehhez hozzáadsz kettőt, az nem lesz 11!
S9	De nem, nem, nem. Pontok száma szorozva 5-tel plusz 1.
S27	Igen. Mert az akkor úgy lesz, hogy 2·5+1=11; 3·5+1=16; 4·5+1=21.

6.3.3. A kritikus gondolkodás megnyilvánulása az osztálymegbeszéléseken

A pármunkát egy osztálymegbeszélés követte, ami lehetőséget adott az esetleges hibás gondolatmenetek kijavítására, a helyes megoldások bemutatására. Az osztálymegbeszélés során a problémaalapú tanulás egyik kritériuma hangsúlyossá vált: a tanulók valóban kritikusan közelítették meg egymás gondolatmenetét. Erre példa a 2. c. feladat (Melyik ábrán lesz 98 csempe?) megoldása. Miután azonosították a szabályt: „az ábra számának négyszerese", és kiszámolták, hány csempére van szükség a 9. és 20. ábránál, a tanulóknak először visszafelé kellett gondolkodniuk, azaz elosztani 98-at 4-gyel. Ezután, észrevéve, hogy a válasz nem egész szám, meg kellett hozniuk azt a döntést, hogy „ennek az alpontnak nincs megoldása". Tipikus hiba volt, hogy az osztás után nem vonták le ezt a következtést, hanem tizedes számot adtak meg megoldásként: „a 24,5. ábrán lesz 98 darab csempe".

S10-S16 (2.c. feladat):

S16	Akkor hányadik mintában lesz 98 csempe? Akkor itt visszafele kell menjünk.
S11	ööö…
S16	98 csempét el kell osztani 4-gyel szerintem.
S11	4-gyel.
S16	Vagy nem biztos, csak szerintem igen. Vagy az nem? Nem? Vagy nem tudom.
S11	Szerintem el kell osztani 4-gyel. Az nem tizedes szám??
S16	De igen. Azt nézem. 24,5.
S11	Szerintem is.
S16	De ezt másképp nem lehet. Szerintem írjuk be.
S11	Akkor 24,5.

Egy másik típushiba volt, hogy rosszul értelmezték a feladatot, azt gondolva, hogy a kérdés: „Hány csempe lesz a 98. ábrán?", így 392-t adtak meg válaszként.

Az osztálymegbeszélés alkalmat biztosított ezeknek a félrecsúszott gondolatmeneteknek a tisztázására, a diákok egymás helytelen megoldásaira a következőképpen reagáltak: „és nem lesz ábra 98 csempével, mert a 98 nem osztható 4-gyel"; „Ez nem egész szám, […] tehát nem lesz ilyen szám." (első típushiba). Vagy „Nem… a kérdés nem az, hogy hány csempe lesz! Hanem melyik ábrán lesz 98 csempe?! Tehát el kell osztania 98-at 4-gyel!" (második típushiba).

6.3.4. Tanulói vélemények

A diákok véleménye egybecseng az általunk megfigyeltekkel. Az interjúk által próbáltuk feltárni a tanulók attitűdjét a páros munkaformához kapcsolódóan. Az „Általában szívesebben dolgozol egyedül, párban vagy csoportban?” kérdésre adott válaszok elemzése során azt tapasztaltuk, hogy az átlagon felüli eredményekkel rendelkező tanulók ambivalens vagy negatív attitűdöt fogalmaznak meg a páros munka kapcsán, míg mások pozitívan értékelték. Ezek a vélemények pedig szoros kapcsolatban állnak a páros munka során megfigyelt kritikus gondolkodással.
A jobb tanulmányi eredményekkel rendelkező tanulók általában azt válaszolták, hogy szívesebben dolgoznak „egyedül” vagy „attól függ, hogy kivel kell együtt dolgoznom, milyen feladaton…”. Az alábbi kivonat feltárja az egyik okot, amiért egy kiváló tanuló jobban szeret egyedül dolgozni, mint párban vagy csoportban. Ez a válasz azonban szorosan összefügg a kritikus gondolkodás korábban bemutatott kudarcával, vagyis azzal, hogy az átlagon alul teljesítők hajlamosabbak minden megfontolás nélkül elfogadni a jobb jegyeket szerző társaik véleményét.

T:	Általában véve egyedül, párban vagy csoportban szeretsz inkább dolgozni?
S32:	Egyedül.
T:	Miért?
S32:	Hát nem szeretem először is a véleményemet másra rátuszkolni. Meg ugyanúgy azt se szeretem, hogyha más akarja velem elhitetni azt, ami szerintem nem úgy van és általában úgy szokott lenni, nem csak a matek csapatmunkákban, hogy én mondok valamit, amit nem akarom, hogy a többiek elfogadjanak, de elfogadják. És akkor úgy érzem, hogy az az én munkám, de közben akarom, hogy mindenki hozzátegyen.
T:	Mit gondolsz, miért van az, hogy rád hagyják, hogy legyen az, amit te mondasz?
S32:	Nem tudom, attól mert jó tanuló vagyok, nem mindig van nekem [igazam], lehet, hogy másnak a véleménye sokkal jobb lenne, meg összesítve jobb lenne több ember

> munkája… s nem várom el, hogy az legyen, amit én mondok, csak én is ugyanúgy egy ötletet mondok. És elfogadom, hogyha valaki ezt túlszárnyalja, és még jobbat mond, sőt az úgy jó, de van, amikor csak úgy ráhagyják, hogy legyen az, amit én mondok.

Ezzel ellentétben az átlagos vagy átlagon aluli tanulmányi eredménnyel rendelkező tanulók a pármunkát vagy csoportmunkát részesítették előnyben az egyéni munkával szemben, azzal érvelve, hogy „az én legfőbb tulajdonságom az, hogy nem vagyok magabiztos, és jobban szeretem, ha esetleg a társam is ugyanazt gondolja, […] mert úgy lehetséges hogy kicsit több bizalmat kapok" vagy „például egyikre én tudtam a választ, másikra meg ő, s emiatt úgymond kiegészítettük egymást, és elmagyaráztuk egymásnak a dolgokat".

6.4. Összegzés

Összegezve a fentieket, elmondhatjuk, hogy a problémamegoldó tevékenységek, még online környezetben is alkalmasak a diákok kritikus gondolkodásának feltérképezésére. Ezen az órán azt figyeltük meg, hogy a pármunka során bizonyos párok esetében tökéletesen működött a kritikus gondolkodás, érveltek, megcáfolták egymás és saját gondolatmeneteiket, fenntartásokkal voltak az új ötletek iránt, csak megfontolás útján fogadták el azokat. Ám néhány páros esetében, ott, ahol jelentősen különböző teljesítményű tanulókból állt össze a pár, kudarcot vallott a kritikus gondolkodás, mert a gyengébb teljesítményű tanuló hajlamos volt a nála jobb jegyeket szerző társa esetleges rossz megoldását is elfogadni. Ezekben az esetekben a kritikus gondolkodás hiánya készteti az átlagon felüli tanulókat arra, hogy a munkaformák közül az egyéni munkát preferálják a páros vagy csoportos munka helyett. Az átlagos vagy átlagon aluli teljesítménnyel rendelkező diákok a pármunkát részesítik előnyben, mert így magabiztosabbak lesznek, több ötletre tesznek szert, és szívesebben szólalnak meg az osztálymegbeszélés során.

A kutatás eredményeképpen megfogalmazhatjuk azt a pedagógiai üzenetet, hogy a problémaalapú tevékenység tervezésénél érdemes olyan jellegű módosításokat bevezetni, amelyek ösztönzik a kritikus gondolkodás megvalósulását. Ez elérhető a munkaforma megváltoztatásával, a feladathoz adott részletesebb útmutatással, pármunka esetén egyéni feladatok megfogalmazásával (például a jobb teljesítményűek magyarázzák el a megoldást társaiknak, ilyenkor elképzelhető, hogy ők is mélyebben megértik azt, vagy magyarázat közben rájönnek az esetleges hibára), de akár a szabad párválasztást is érdemes kipróbálni. A kutatás tapasztalatait részletesebben a Báró (2022a) cikkben tárgyaljuk.

A következő fejezetben az algebrai gondolkodás szempontjából elemezzük az előző feladatok megoldásait, ezen belül is a hozzájuk tartozó egyéni munkát, az osztálymegbeszéléseket, valamint a problémaalkotási fázist, rámutatva a beavatkozás eredményességére.

7. A problémaalapú megközelítés hatása a tanulók algebrai gondolkodására

Több kutatás tárgyalja az algebra, a mintakeresés és az általánosítás kapcsolatát. Például Kaput (1999) szerint az algebra a minták megalkotásával és az általánosítással hozható szoros kapcsolatba. Usiskin (1988) az algebrát mint általánosított aritmetikát említi. Jelen kutatásban az algebrát az egyenletek bevezetéséhez, szimbólumok használatához kötjük (Kaput, 2008). Tudva, hogy a felsős diákok az aritmetikai és az algebrai gondolkodás közötti átmeneti szakaszban vannak, a korábban megfogalmazott kérdések megválaszolásához igyekszünk hozzájárulni. Felkeltette érdeklődésünket Rivera (2013) könyve, amely többek között azt is tárgyalja, hogy a diákok, sőt még sok esetben a felnőttek is, hajlamosabbak egy empirikus (numerikus vagy vizuális) érveléssel szolgálni, mint egy formálissal. Ugyanakkor azt is állítja, hogy az érvelés fejleszthető, mégpedig mintakeresést alkalmazó feladatok megoldásával, amelyben a sorozatok első néhány tagjának ismeretében további tagokat kell meghatározni. Többek között ez is inspirálta több oktatási projekt tervezését: egy tantervben szereplő fejezet átalakítása problémaalapú megközelítést alkalmazva (például lásd a fejezet leírását korábban). A **K4** kutatási kérdésünket szintén Rivera könyve alapján fogalmaztuk meg: *Fejlődött-e a tanulók algebrai gondolkodásmódja a problémaalapú megközelítés alkalmazása során?*

7.1. A kutatás körülményei

A kutatás körülményei megegyeznek az előző fejezetben ismertetettekkel, ugyanis a 8. táblázat (3) órájának folytatását fogjuk tárgyalni ebben a fejezetben.

7.2. Adatgyűjtés

A 9. táblázatban megadott feladatokat elemezzük a problémamegoldás szemszögéből, az erről szóló részt korábban kifejtettük a pármunka feladatai kapcsán. Ebben a fejezetben a pármunkákat és problémaalkotást követő osztálymegbeszéléseket elemezzük, valamint a problémaalkotás eredményességét vizsgáljuk. A problémaalkotási feladat a következőképpen volt kitűzve: *Alkoss egy mintát (használhatsz fogvájót,*

gyufaszálat stb.) legalább a minta első négy elemét megadva. Tegyél fel két, a mintához kapcsolódó kérdést, majd válaszold is meg azokat!
A tanulók által alkotott problémák elemzéséhez egy kódrendszert hoztunk létre.

7.2.1. Kódrendszer

A diákok beküldött feladatait kvalitatív tartalomelemzéssel dolgoztuk fel. Első lépésként megalkottuk a kódolási keretet a diákok problémaalkotásának és problémamegoldásának értékelésére. A kódrendszer alapját korábbi kutatásaink képezték (Kovács et al., 2023; Lócska & Kovács, 2022). Minden esetben megvizsgáltuk, hogy a diákok által feltett kérdések mindegyike releváns-e a minta és a feladat szempontjából (10. táblázat).

10. táblázat: A kérdések helyességének kódolása

Kód	Magyarázat
Releváns	A tanuló legalább egy releváns kérdést megfogalmazott és irrelevánst nem. Ha csak egy kérdést tett fel, de az releváns, azt tanulói figyelmetlenségnek tudjuk be és ide soroljuk.
Irreleváns	Egy vagy két irreleváns kérdést tett fel a tanuló, releváns nélkül. A tanuló matematikailag értelmezhetetlen kérdést tett fel.
Nincs kérdés	A diák megalkotta a mintát, de nem tett fel kérdést vagy egy releváns és egy irreleváns kérdést tett fel.
Nincs minta	A diák nem alkotott mintát, például a sorozatnak csak az első elemét adta meg.

Amennyiben helyes kérdéseket alkotott egy tanuló, vagyis Releváns kódot kapott az előző kritériumrendszer szerint, további kódot állapítottunk meg a kérdés típusát vizsgálva (11. táblázat). A megoldáshoz szükséges gondolkodásmód tekintetében kétféle kérdéstípust különböztettünk meg: (1) Célirányos ($n \rightarrow a_n$), amikor az ábra száma adott és a hozzátartozó elemek számát kell meghatározni (például 1. Feladat a, b - 9. táblázat), vagy (2) Fordított irányú ($a_n \rightarrow n$), amikor az elemek száma adott, és az ábra számát kell meghatározni (például 1. Feladat c, d – 9. táblázat).

A célirányos típusnál különbséget teszünk a közeli, távoli, általános elemre vonatkozó kérdések között.

11. táblázat: A kérdések típusának kódolása

$n \to a_n$	Közeli	A tanuló legfeljebb a sorozat hetedik tagjára (közeli elemre) tesz fel kérdést.
	Távoli	A tanuló kérdést tesz fel a sorozat legalább nyolcadik tagjáról (távoli elem).
	Általános	A tanuló általánosítást kér.
$a_n \to n$	Visszafelé gondolkodás	A tanuló fordított irányú okoskodást igénylő feladatot alkot (például 1.Feladat c, d).

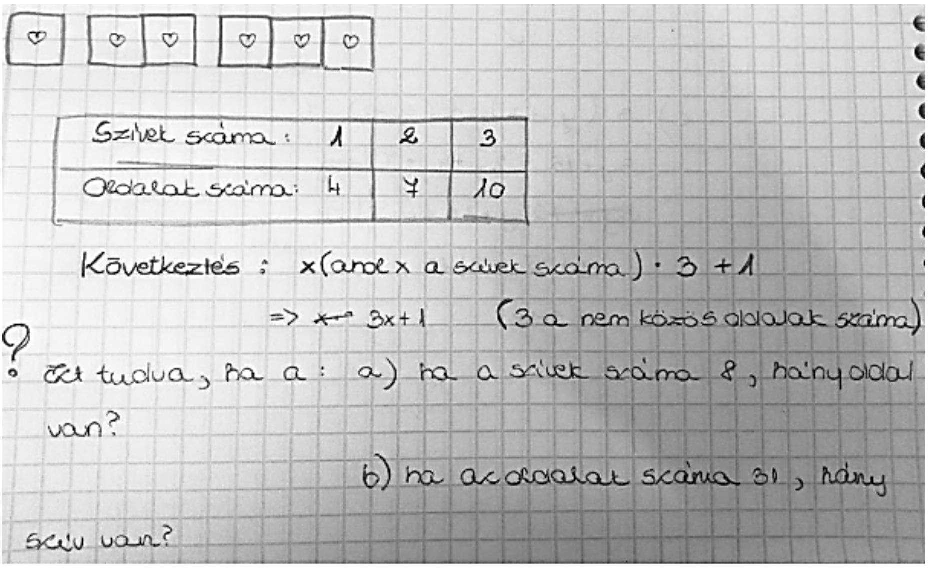
A diákok saját feladataikra adott megoldásait is elemeztük és kódoltuk (12. táblázat). Ebben az esetben nem csak a helyes megoldásoknak adtunk kódokat, hanem a helyteleneknek is, mert arra is kíváncsiak voltunk, milyen gondolkodásmód (algebrai, aritmetikai) jellemzi ezeket a megoldásokat.

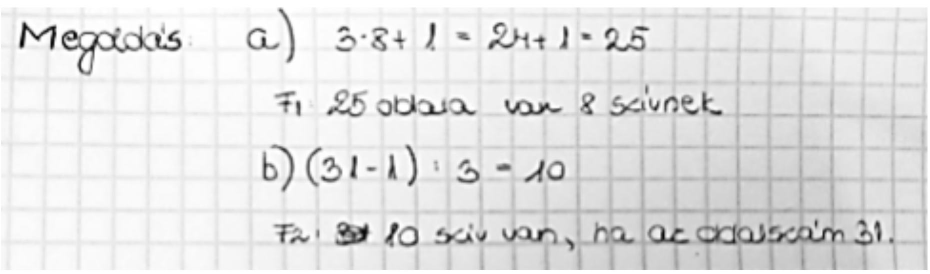
12. táblázat: A megoldások kódolása

	Kód	Magyarázat
Helyesség	Helyes	A tanuló helyesen oldotta meg a feladatot. Ebbe a kategóriába tartoznak azok a munkák is, ahol a tanuló helyesen alkalmazta a matematikai modellt, de számítási hibát vétett.
	Helytelen	A tanuló rosszul alkalmazza a tanultakat. A megoldás akkor is „Helytelen” kódot kap, ha a tanuló egy helyes és egy helytelen megoldást ad a két kérdésére (például hibásan azonosítja a szabályt, hibás adatokkal van kitöltve a táblázat).
	Nincs megoldás	A diák nem oldotta meg a feladatot.

Gondolkodásmód	Algebrai	A feladat megoldását algebrai (Kaput, 2008) gondolkodásmód jellemzi.
	Aritmetikai	A feladat megoldását aritmetikai gondolkodásmód jellemzi (szimbólumok vagy egyenletek nélkül).
	Vegyes	A diák mindkét gondolkodásmódot alkalmazza, váltogatva azokat.

A következő példában bemutatjuk egy tanuló munkájának kódolását a kódtáblának megfelelően (14. ábra).





14. ábra: S19 problémaalkotása és megoldása

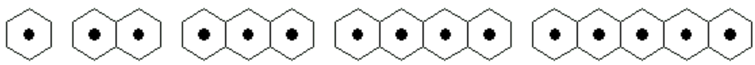
A problémaalkotás helyessége: A felvetett probléma *helyes*, a tanuló két releváns kérdést alkotott a mintáról.
A megoldás helyessége: *helyes,* mert a tanuló mindkét kérdésre helyesen válaszolt.
A megoldás során alkalmazott gondolkodásmód *vegyes*. A tanuló az első probléma megoldásánál szimbólumokat használ a szabály megállapítására, majd behelyettesíti a 8-at a kapott kifejezésbe, vagyis algebrai gondolkodásmód jellemzi. Ezzel ellentétben a második kérdésre fordított irányú okoskodással válaszol.

7.3. Eredmények és következtetések

A továbbiakban három helyzetben vizsgáljuk az adatainkat: problémamegoldás az osztálymegbeszélés során, problémaalkotás és az „osztálytársam feladatának" megoldása.

7.3.1. Problémamegoldás: az osztálymegbeszélésen történő általánosítás és fordított irányú okoskodás

Az osztálymegbeszélések első része az általános szabály megtalálásáról, azaz az általánosításról ($n \to a_n$) szólt, a második része pedig a fordított irányú okoskodás alkalmazásáról ($a_n \to n$). Az első részben a diákok bemutatták és összehasonlították a pármunka során kapott eredményeiket. Az 1. feladat esetében például a következő megfogalmazásokat adták az ábrán lévő pontok és vonalszakaszok számára vonatkozó szabályokra:



S22: A szakaszok száma mindig 5-tel nő.
S9: A szakaszok száma egyenlő ötször a pontok számával plusz egy.
S39: Vegyük úgy, hogy az első az 0, a második 1, és hatszor az ábrák száma mínusz az előzőleg megadott számok növekedve.
S20: Hatszor x mínusz $(x - 1)$, ahol x a pontok száma.
S15: szakaszok száma $= 5x + 1$, ahol x a pontok számát jelenti.

A szabályokat a diákok azonosították, többnyire önállóan, néhol tanári segítséggel. S20 volt az egyik diák, aki szimbólumokat is használt a megoldás során, majd egy kis útbaigazítással, megfogalmazták a zárt formulát általános esetben. Ez lehetővé tette az egyenletek bevezetését, ahogy azt a tanterv előírja. Látható, hogy egyes diákok köznyelven, számukra természetes módon fejezték ki a gondolataikat, ami elősegítette az általánosítást, míg mások már magabiztosan használták a szimbólumokat, azaz az algebra nyelvét az általánosításhoz.

Az 1. feladat *második részében* a szabály megállapítása után ($5x + 1$) arra kértük a diákokat, hogy oldják meg a feladat alpontjait önállóan, majd az osztálymegbeszélés során hasonlítsák össze a megoldásokat. A c) és d) alpontok így lineáris egyenletekre vezettek, ezeket kellett megoldani (1.c. $5x + 1 = 46$ és 1.d. $5x + 1 = 50$). A megbeszélés átiratát elemezve azonban arra a következtetésre jutottunk, hogy a diákok egyenlet felhasználása nélkül oldották meg ezeket a típusú feladatokat, inkább a lebontogatás módszerét használva egy lépésbe sűrítve. Ez azért volt meglepő, mert arra számítottunk, hogy a szabály megtalálása és felírása után, valamint a korábbi években tanultak alapján, ők is egyenletekkel fognak dolgozni. Ennek ellenére a megoldási módjukat inkább a Franke és munkatársai (2008) által megnevezett „relációs" gondolkodásmódhoz[3] tudjuk kapcsolni. Erre egy példát láthatunk a következő rövid párbeszédben:

S32:	Kivonunk egyet a 46-ból, elosztjuk 5-tel, tehát 9.
T:	Igen, és ezt hogy írnád le matekosan?
S32:	46 mínusz 1, zárójelben, osztva 5-tel [vagyis (46 – 1):5].

Ebben az esetben az egyenlőségjel reprezentál egy relációt, vagyis a diák összeköti az egyenlet két oldalát, anélkül, hogy egyenletként kezelné azt. Ugyanaz a mennyiség áll az egyenlőségjel két oldalán, az egyik szimbolikus ($5x + 1$ - algebra), a másik egy konkrét szám (46). Tehát mondhatjuk, hogy ez a Franke-féle "relációs gondolkodás" egy hidat képez az aritmetika és algebra között. Ennek a gondolkodásmódnak a megjelenését elsősorban azzal magyarázzuk, hogy ebben a korban az

[3] Franke és munkatársai (2008) az egyenletek és kifejezések teljes egészében történő vizsgálatát javasolja, a lépésről lépésre való haladás helyett.

aritmetika és algebra közötti átmeneti szakaszban vannak a tanulók, másodsorban pedig azzal, hogy az egyenletekről szóló leckéket a korábbi évben szintén online formában tanulták, rögtön a járvány kitörése után, amikor az online oktatás még kereste az útjait.

7.3.2. Problémaalkotás

Ha úgy tekintünk a problémaalkotásra, mint egy ablakra, amin keresztül betekintést nyerünk a tanuló gondolkodásába, Silverrel (1994) együtt úgy gondolhatjuk, hogy a problémaalkotás képes feltárni a tanulók matematikai megértésének természetét. Célunk a tanulók algebrai és aritmetikai gondolkodásának a feltérképezése volt az általuk alkotott problémák elemzésével, a fentebb bemutatott kódrendszer segítségével. A 13. táblázatban látható a diákok számának eloszlása az általuk alkotott probléma helyességét tekintve.

13. táblázat: A diákok számának eloszlása az általuk alkotott probléma helyességét tekintve

Kód	Tanulók száma
Releváns	34
Irreleváns	1
Nincs kérdés	7
Nincs minta	6
Összesen	48

A diákok által feltett kérdéseket elemezve felfigyeltünk egyes tanulók problémaalkotási és problémamegoldási sajátosságaira, őket három csoportba soroltuk: a) csak közeli elemre kérdező tanulók b) távoli elemre kérdező tanulók c) fordított irányú gondolkodást igénylő kérdést feltevő tanulók.

22 diák alkotott olyan problémát, amelyben a sorozat egy közeli elemére kérdezett rá, de csak hárman voltak közülük, akiknek mindkét kérdése közeli elemre vonatkozott. Ilyen módon a megoldáshoz nem volt

szükséges meghatározniuk az általános szabályt, hisz felrajzolhatták az első pár elemet és megszámolhatták az egyes tagokban szereplő szakaszok számát. Ezt nyilván aritmetikai megoldásnak tekintjük. Ám azok a tanulók, akiknek csak az egyik kérdésük vonatkozott közeli elemre, a másik pedig egy távolira vagy általánosra sokkal nagyobb eséllyel folyamodtak algebrai megoldásokhoz.

További 25 kérdést kódoltunk távoli elemre kérdezőnek, ezek közül 9 általános szabályra kérdezett rá. A 14. táblázatban látható, hogy az általánosítást igénylő diákmunkákban milyen megoldásokat találtunk. Nyilván azok a diákok, akik általános elemre kérdeztek rá, többségben algebrai módon próbálták megválaszolni ezt a kérdést.

14. táblázat: Általánosításhoz kapcsolódó feladatmegoldások

	Helyes	**Helytelen**
Algebrai	7	1
Aritmetikai	0	1

A távoli elemekre vonatkozó kérdésekre adott válaszok elemzésénél a következőket figyeltük meg: 8 tanuló adott helyes algebrai megoldást, 8 tanuló adott aritmetikait, ezek közül 3 helytelen, míg ketten kombinálták az algebrai és aritmetikai gondolkodásmódot, mindketten helyesen.

Arra is kíváncsiak voltunk, mi jellemzi a fordított gondolkodást igénylő feladatok megoldását. A korábbi osztálymegbeszéléseken azt vettük észre, hogy a diákok hajlamosabbak aritmetikai, relációs gondolkodást alkalmazni ezen feladattípusok megoldásánál, még akkor is, ha már van előzetes tapasztalatuk az egyenletek megoldásában. Éppen ezért érdekelt, hogy vajon milyen módon közelítik meg az általuk alkotott ilyen típusú feladatokat. 18 tanuló alkotott ilyen típusú feladatot, ezekre a kérdésekre a válaszok típusát és helyességét a 15. táblázatban szemléltetjük.

15. táblázat: Fordított gondolkodást igénylő megoldások

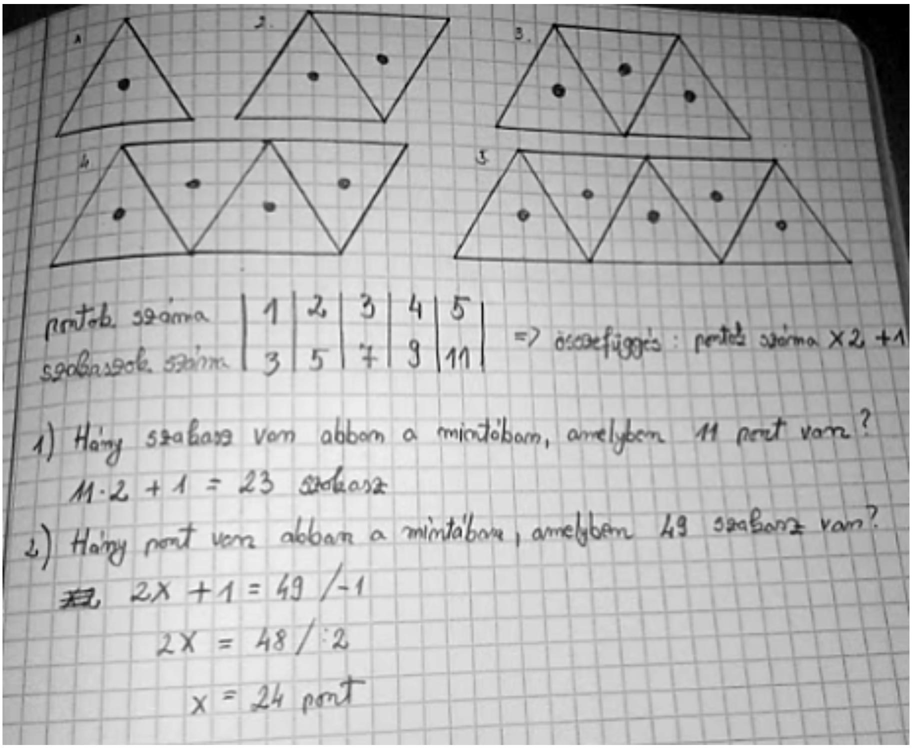
	Helyes	Helytelen
Algebrai	10	1
Aritmetikai	4	1
Vegyes	2	0

18 tanulóból 13 próbált algebrai képletekkel, szimbólumokkal vagy egyenletekkel válaszolni a kérdésre, bár az osztálytermi beszélgetés során tartózkodtak ezek használatától. Feltételezzük, hogy a tanár tanterven alapuló beavatkozása az egyenletet tartalmazó megoldásokkal hatással volt a tanulók válaszaira. Ugyanakkor a diákok által alkotott problémák azt mutatják, hogy a tanulók problémaalkotása szempontjából hasznosak voltak a kitűzött problémák és azok megoldása.

Ahogy már többször megállapítottuk, 7. osztályban a tanulók az aritmetikai gondolkodásról az algebrai gondolkodásra való átmenetben vannak, és a megfigyelt relációs gondolkodás a mintakereséses problémák megoldása során hídként szolgálhat a két gondolkodásmód között. Ezt a következőkben bemutatott osztálytermi megbeszélés is alátámasztja.

7.3.3. „Osztálytársam feladatának" megoldása

A problémaalkotás után történő osztálymegbeszélések kissé eltértek az előző megfigyeléseinktől. A következő részlet az egyik diák által alkotott feladat osztálytermi megoldásából származik. A diák által kitűzött feladat és saját megoldást a 15. ábra szemlélteti.



15. ábra: S32 feladata

S37:	Ha megszorozzuk a szakaszok számát 3-mal, és kivonunk 2-t, 5-öt kapunk. […] A következő $3 \cdot 3 - 2 = 7$, majd $3 \cdot 4 - 3 = 9$, de nem tudom általánosan.
S56:	Szerintem $3 \cdot x - 1$ lesz általánosan.
Tanár:	Nézzük meg, helyes-e!
Sokan:	[intik, hogy nem]
S57:	De ha kivonunk egyet a 9-ből, 8-at kapunk. Az nem lesz igaz.
S33:	$3 \cdot x - x$, mindig más számot kell kivonjunk, vagy nem?
S45:	De… $3 \cdot 2$ az 6, és kivonunk egyet, aztán kivonunk kettőt és hármat, és így tovább…
Tanár:	Tehát a szám, amit kivonunk mindig…
S45:	Mindig nő eggyel!
S42:	Igen. Mondhatom? $2 \cdot x + 1$ lesz.
Tanár:	Ellenőrizzük! […] Ez jó, de mi a köze az S37 megoldásához? […]

S57: Úgy lesz, hogy $3 \cdot x - (x - 1)$, nemde?
Tanár: És az mennyi?
Sokan: $2x + 1$.

Egyértelműen látszik az osztálymegbeszélésben, hogy a diákok sokkal magabiztosabbak a mintakereséses feladatok megoldásában, könnyebben fedezik fel az általános formulát szimbólumok segítségével, egyre kevésbé igényelve a tanár segítségét. Képesek egymás gondolatmenetéhez kapcsolódni, azt folytatni, egymás megoldására kritikusan reagálni. Az ilyen megnyilvánulásokat soroltuk a problémaalapú megközelítés alapelvei közé.

7.4. Összegzés

Ebben a fejezetben azt vizsgáltuk, hogy az algebrai gondolkodás milyen módon tükröződik a diákok problémaalkotó tevékenységében mintakereséses problémamegoldást követően. Elemezve a diákok osztálytermi beszélgetéseiben megnyilvánuló problémamegoldást, azt figyeltük meg, hogy képesek a szabályok és összefüggések felfedezésére, megfogalmazására. Arra a következtetésre jutottunk, hogy bár a tanulók többsége hétköznapi nyelven fejezte ki gondolatait, ez a tevékenység elősegítette az általánosítást (Lócska & Kovács, 2022). Továbbá Riverahoz hasonló megállapításokhoz jutottunk, miszerint a mintakeresések elősegítik a szimbólumok szükségességének, felhasználásának megértését, tehát az algebrai gondolkodás kialakulását. Ezt a jelenséget a problémaalkotó tevékenység után figyeltük meg.
A problémaalkotási tevékenység előtt a tanulmányban részt vevő hetedikesek a relációs gondolkodást részesítették előnyben, amely hídként szolgált az algebra és aritmetika között. A problémaalkotó tevékenységeket tekintve pedig azt vettük észre, hogy azok a tanulók, akik olyan problémát tűztek ki, amelyben általánosításra volt szükség, algebrai módon oldották meg azt. Továbbá, a fordított irányú gondolkodást igénylő feladatoknál is többen használtak algebrai megoldást, mint korábban az osztálymegbeszélések során. Sőt, a problémaalkotást követő osztálytermi beszélgetéseken a diákok sokkal magabiztosabban mutattak be algebrai megoldásokat, egymást korrigálva, alig igényelve a tanár segítségét. Tehát azt láttuk, hogy a hetedik osztályban levő diákok egy átmeneti szakaszban

vannak az aritmetika és algebra között. A mintakeresés pedig támogatja az általánosítások megfigyelését, szimbólumok bevezetését (Schoenfeld & Arcavi, 1988) és a tanulók által alkotott problémák mutatják, hogy a problémaalkotási tevékenység szempontjából hasznosak voltak a tanár által kitűzött problémák és azok megoldása.

Összességében kijelenthetjük, hogy sikerült megalkotnunk egy olyan „ablakot", amelyen keresztül megfigyelhettük a diákok gondolkodását. Találtunk egy lehetséges módszert az algebrai gondolkodás ösztönzésére is, a mintakeresési tevékenységek alkalmazását mind problémamegoldásban, mind a problémaalkotásban. A problémaalkotási tevékenység eredménye visszajelzés volt a tanulók algebrai gondolkodásának szintjéről, amelynek fejlődését a kísérlet során megállapíthattuk.

A továbbiakban a hat tanórából álló tanulási folyamat kimenetelére vonatkozó eredményeket vizsgáljuk meg.

8. A problémaalapú megközelítés hatása a tanulási folyamat kimenetelére

Az előző két fejezet az ismertetett tanrészlet két órájának elemzése kapcsán íródott. Ebben a fejezetben a problémaalapú megközelítésnek a tanulási folyamat kimenetelére mért hatásait vizsgáljuk. A szakirodalom szerint a problémaalapú tanulás hosszú távon nem javítja szignifikánsan a tanulási eredményt, ám ezzel szemben a heurisztikus módszerek célzott alkalmazása kifejezetten jó hatással van a tanulási eredményekre. Éppen ezért olyan problémamegoldó tevékenységeket terveztünk, amelyekben a problémákat aszerint választottuk ki, hogy megoldhatók legyenek egy bizonyos heurisztikus stratégiát alkalmazva. A tanrészlet problémaalapúvá formálása előtt elő- és utótesztet terveztünk, amelyet a beavatkozás előtt és után írattunk meg a diákokkal (8. táblázat). Ezen tesztek elemzésével a problémaalapú órasorozatok lehetséges hatását szeretnénk tárgyalni a tanulási eredményekre nézve, először kvantitatívan, majd a nyert tapasztalatokat alátámasztjuk kvalitatív elemzés által is: *Milyen hatással van a problémaalapú megközelítés a tanulási folyamat kimenetére?*

8.1. A kutatás körülményei

A kutatás körülményei megegyeznek az előző két fejezetben ismertetett kutatási körülményekkel (lásd 60. oldal), ugyanis a 8. táblázatban szereplő elő- és utóteszteket fogjuk elemezni, valamint ebben a táblázatban szereplő tanórák kapcsán kérdeztük meg a diákok véleményét egy félig-strukturált interjú keretében. A kikérdezés a már korábban bemutatott 12 véletlenszerűen választott diákkal történt.

8.2. Adatgyűjtés

A 16. táblázatban a fejezethez tartozó előteszt és utóteszt feladatai találhatóak. Mivel ez a kutatás is online körülmények között zajlott le, fontos megemlítenünk, hogy az elő- és utótesztben a diák leírt feladatmegoldásán kívül magyarázó hangfelvételeket is begyűjtöttünk mindenkitől. Arra kértük a diákokat, hogy a feladat megoldása közben vagy utána közvetítsék gondolataikat, magyarázzák el a lépéseket, amelyeket végrehajtottak.

16. táblázat: Az elő- és utóteszt feladatai

Feladat sorszáma	Előteszt feladatai	Utóteszt feladatai
1.	Oldd meg a racionális számok halmazán a következő egyenleteket!	
a.	$2x + 3 = 15$	$2x + 5\sqrt{3} = 11\sqrt{3}$
b.	$3x - 6 = 2x - 8$	$4x - 15 = 2x - 5$
c.	$5(x + 2) = 30$	$10(x + 3) = 35$
d.	$6(x - 2) - 3(x - 5) = 7$	$7(x - 2) - 5(x - 5) = 19$
2.	Katiék fel kell hordják a lakásukba az új bútorokat. A bútorok dobozban vannak, és összesen 31,4 kg-osak. A dobozban van egy asztal, ami 10 kg és négy db szék. Hány kg-os egy db szék?	Nagyapóék gyümölcsöt szállítanak a piacra eladni, összesen 62 kg-ot. Egy nagy ládában van 30 kg alma és 4 kiskosárban egyenlően elosztva körte. Hány kilogramm körte van egy kosárban? (a láda és kosarak tömegétől eltekintünk)

Mindegyik feladatnál a maximálisan 4 pontot lehetett szerezni. A feladatok pontozása a következőképpen történt:

- 4 pont – hibátlan megoldás
- 3 pont – előjel hiba, vagy kisebb számolási hiba
- 2 pont – a diák helytelen eredményt adott, de a megoldás első lépései helyesek
- 1 pont – a diák próbálkozott megoldani a feladatot, de a megoldás első felében már hibát vétett
- 0 pont – a diák nem írt megoldást a feladathoz.

A második feladat megoldása esetében külön feljegyeztük a diákok feladatmegoldásának típusát – Algebrai vagy Aritmetikai (lásd korábbi kódokat - 12. táblázat), megoldási módtól függetlenül bármilyen helyes

megoldást természetesen elfogadtunk (például szakaszos ábrázolás, tervszerű próbálkozás, ...), amit a diák megindokolt.
A diákok eredményeit a már ismertetett három csoportra bontva elemeztük (1. csoport: átlagon aluli-, 2. csoport: átlagos-, 3. csoport: átlagon felüli tanulmányi eredménnyel rendelkezők). Célunk volt megvizsgálni, hogy hogyan hatnak a problémaalapú tevékenységek a korábban definiált tanulói csoportokra. Összesen 54 diáktól gyűjtöttük be az elő- és utóteszteket, ezeket csoportokra bontva az 17. táblázatban láthatjuk. A következőkben a pontszámokkal mért eredményeket elemezzük.

17. táblázat: Az elő- és utótesztet kitöltő diákok létszáma csoportonként

Csoport	Létszám
1. csoport	19
2. csoport	18
3. csoport	17
Összesen	54

8.3. Eredmények és következtetések

A diákok elő- és utótesztjeit először kvantitatívan, majd kvalitatívan elemezzük.

8.3.1. Kvantitatív elemzés

A csoportok részletes eredményei megtalálhatóak a 3. mellékletekben. A mintáink átlagainak összehasonlítására egyszempontos varianciaanalízist nem használhatunk (ANOVA), mivel a Levene-féle homogenitás teszt eredménye $p = 0.005$, tehát nem parametrikus eljárást kell alkalmaznunk.
A Kruskal-Wallis teszt szerint a fejlődés mértéke szignifikánsan csoportfüggő ($U(2) = 11.233, p = 0.004$). Mivel a Kruskal-Wallis próba önmagában nem mutatja meg, honnan ered az eltérés, vagy hogy ez melyik csoportpárnál jelentkezik, ezért ennek a feltárására a Dunn-féle post hoc tesztet alkalmaztuk. A tesztek kiértékelése után megállapítható, hogy az 1. csoport és a 2. csoport fejlődése között nincs szignifikáns különbség, míg minden más összehasonlítás szignifikáns különbséget mutatott. Ez azt jelenti, hogy az átlagon aluli tanulmányi eredményekkel rendelkező tanulókat és az átlagos tanulmányi eredményekkel rendelkezőket akár

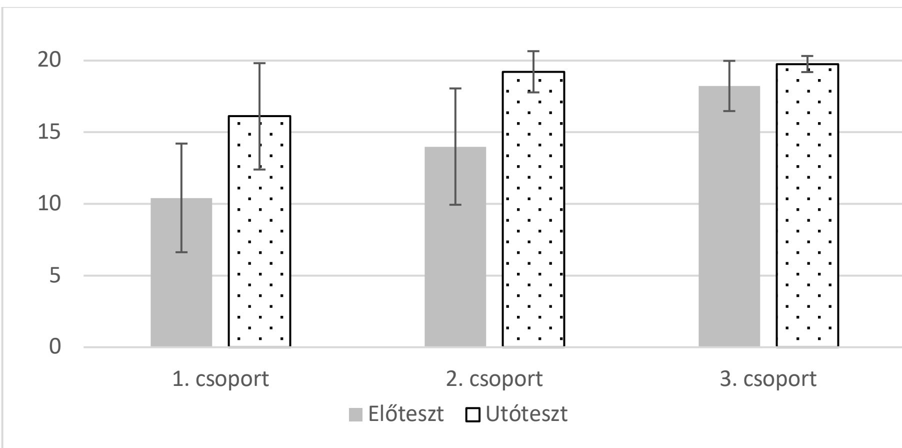
összevonhatnánk egy csoportba, mert fejlődésük mértéke között nem találtunk szignifikáns különbséget. Ezt azonban a későbbi kvalitatív elemzések miatt nem tesszük meg.

Az elő- és utótesztek összehasonlításához első sorban megnéztük, hogy a mintánk normális eloszlású-e. A normalitás feltétele nem teljesült, ezért a páros t-próbát nem alkalmazhattuk, ebben az esetben is nem paraméteres próbát végzünk: a Wilcoxon $(z = -5.235, p < 0.001)$ próbával vizsgáljuk, hogy a különbségek mediánja mennyire tér el a nullától. A Wilcoxon próba mindhárom csoport esetében szignifikáns javulást mutat, a csoportokhoz tartozó z és p értékek a 18. táblázatból kiolvashatók.

18. táblázat: A Wilcoxon próba p értékei csoportonként

Csoport	**Wilcoxon próba (z)**	**Wilcoxon próba (p)**
1. csoport	-3.243	<0.001
2. csoport	-3.351	< 0.001
3. csoport	-2.666	0.004

Bár a 3. csoport esetében a p szignifikancia értéke nagyobb, mint a másik két csoportnál, ez az eredmény is szignifikáns 0.05 szinten. Az eltérés annak tudható be, hogy a 3. csoportból (átlagon felüli diákok) a 17 diákból 10 már az előteszten is nagyon magas pontszámot ért el (18-20 pontot a lehetséges 20-ból). A diákok átlagait ábrázoltuk oszlopdiagramon is (16. ábra).



16. ábra: Előteszt és utóteszt eredmények összehasonlítása

8.3.2. Kvalitatív elemzés

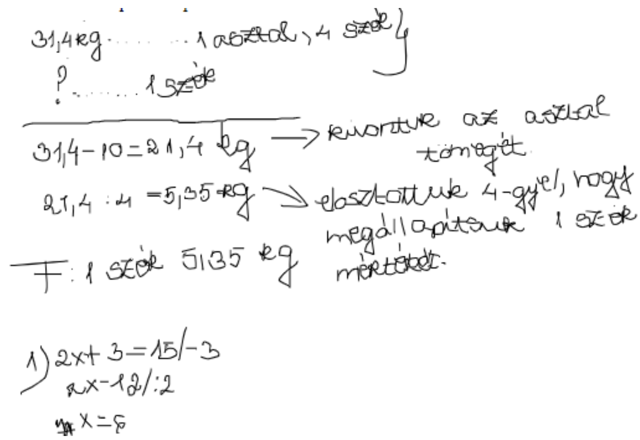
Az adatok kvantitatív elemzése során láttuk, hogy a diákok elő- és utótesztje között szignifikáns javulás mutatható ki mindhárom csoport esetében, azonban erősebb javulás figyelhető meg az átlagos és átlagon aluli tanulmányi eredményekkel rendelkező diákoknál. A következőkben ezeket az eredményeket alátámasztjuk kvalitatív tartalomelemzéssel is, bizonyos csoportok jellemzőit kiemelve a leírt megoldások és beküldött hangjegyzetek alapján. A véletlenszerűen kiválasztott 12 diák dolgozatát fogjuk vizsgálni a továbbiakban, amelyek nagyon jól szemléltetik az általuk reprezentált alcsoportokat, ugyanis hasonló jellemzőket véltünk felfedezni egy-egy csoporton belül.

1. csoport (átlagon aluli tanulmányi eredmények)

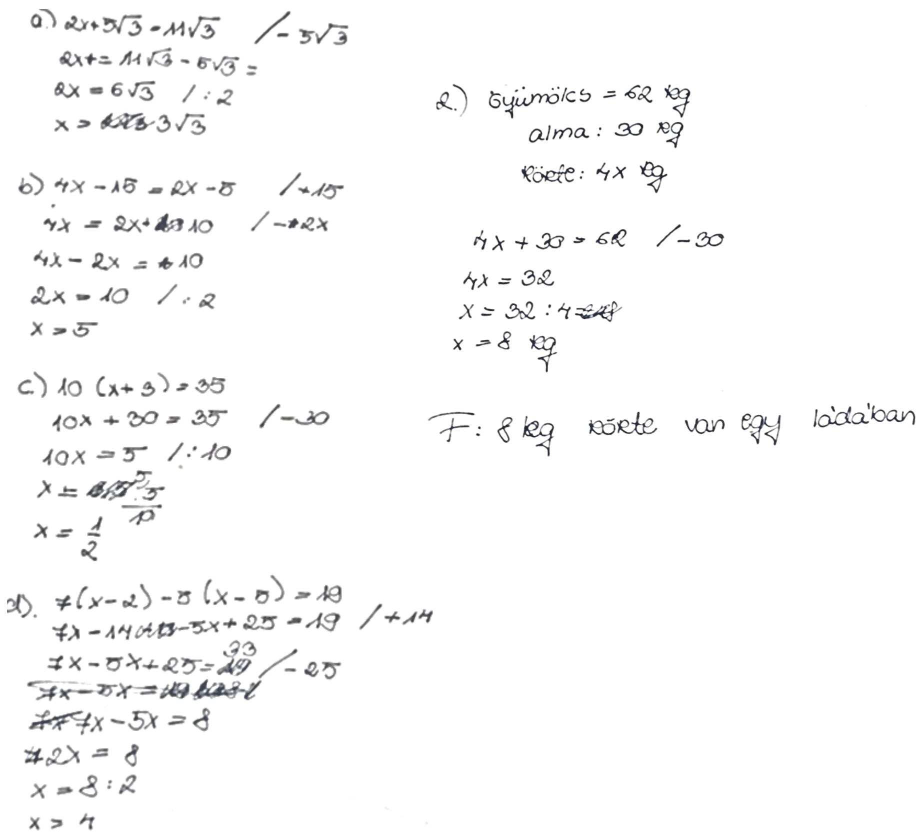
Egyértelműen ennél a csoportnál a leglátványosabb a javulás (5,6 pont mértékű), ezt két szempontból is megvizsgáltuk:

- milyen mértékben képesek javítani vagy kiküszöbölni az előteszten vétett hibáikat a tanulók – a két dolgozat összehasonlításával vizsgáljuk
- mennyire magabiztosak a feladatmegoldásban – ezt a hangfelvételek alapján vizsgáljuk.

A következő példában az S13 tanuló elő- és utótesztjének megoldását láthatjuk. A 17. ábra mutatja, hogy az egyenletek közül csak az elsőt tudta megoldani, a többinek neki sem fogott, illetve a második feladatot helyesen oldotta meg (nem használt egyenletet). Az utótesztjében (18. ábra) viszont minden feladat megoldását helyesen leírja, esetleg jelölési hibát vét (az egyszerűsítést bal oldalon jelöli), és a második feladatot változók és egyenlet segítségével oldja meg, szintén helyesen.



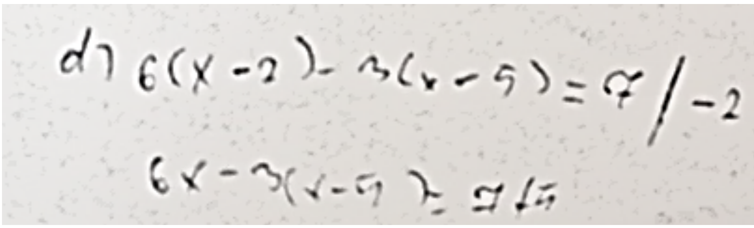
17. ábra: S13 előtesztjének megoldása



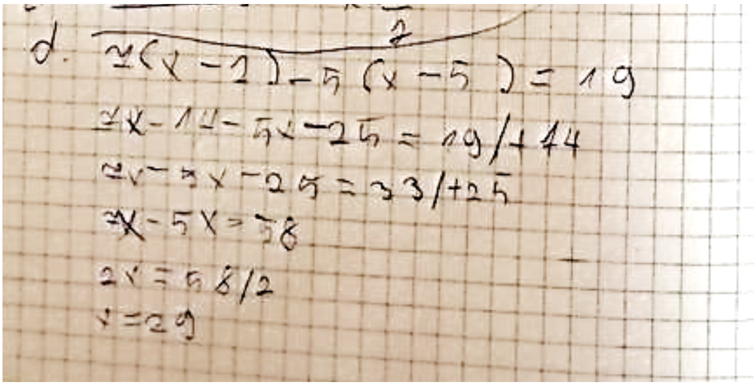
18. ábra: S13 utótesztjében levő megoldások

Egy másik megfigyelt jelenség ebben a csoportban, hogy a tanuló teljesítménye javul, de még nem hibátlan (19. ábra - előteszt és 20. ábra –

utóteszt). Itt látható, hogy habár fejlődött a feladat típusának megoldása terén a tanuló, még előjel (vagy más hasonló jellegű) hibát elvét.



19. ábra: S58 előtesztjében levő feladatmegoldás részlet

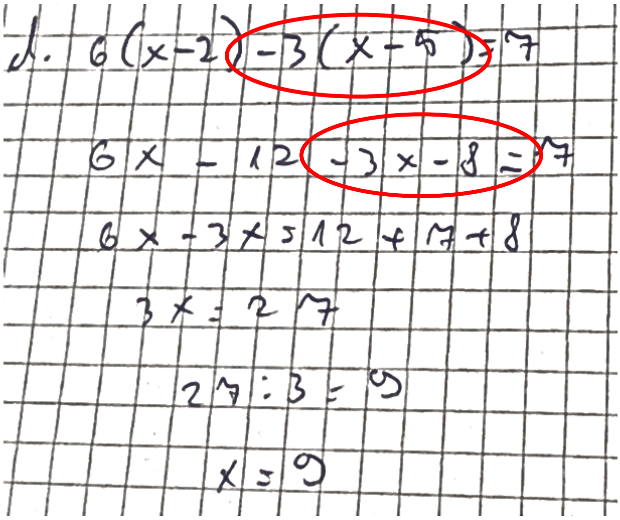


20. ábra: S58 utótesztjében levő feladatmegoldás

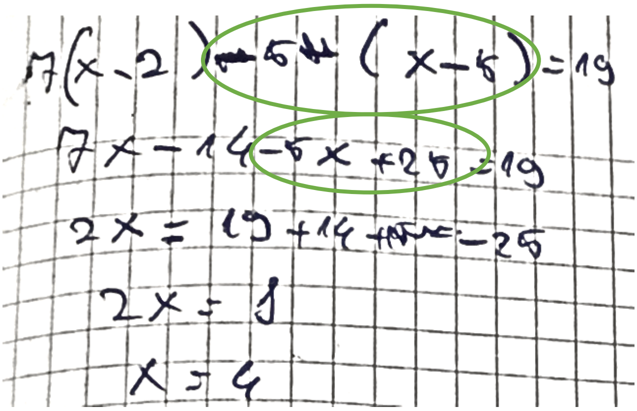
A 2. feladatot elemezve azt vettük észre, hogy míg az előteszten a 19 diákból 14 oldotta meg aritmetikailag a feladatot, 2 algebrailag, 3 pedig sehogy, addig az utóteszten 7 aritmetikai és 10 algebrai megoldás készült. Tehát van, aki áttért az algebrai megoldásra, van, aki nem, de a választott megoldási módot helyesen alkalmazták.

2. csoport (átlagos tanulmányi eredménnyel rendelkezők)

Ebbe a csoportba tartozó diákok átlagosan 5 ponttal szereztek többet az utóteszten, a javításra egy példát S28 megoldásában láthatunk (21. ábra; 22. ábra).



21. ábra: S28 előteszt megoldása 1.d.



22. ábra: S28 utóteszt megoldása 1.d.

3. csoport (Átlagon felüli tanulmányi eredményekkel rendelkezők)

Ennél a csoportnál átlagban 1,5 pontot javítottak a diákok, ami az előző két csoporthoz mérve elenyésző, viszont várható eredmény. Az átlagon felüli tanulmányi eredményekkel rendelkezők már az előteszten nagyon jó pontszámokkal végeztek (átlagosan 18,24 ponttal). Egy más jellegű különbség az előző két csoporthoz képest az aritmetikai-algebrai megoldások száma. Már az előteszten a 17 diákból 13 algebrai módon oldotta meg a 2. feladatot, viszont az utóteszten minden ide tartozó diák algebrai megoldást használt. Ebből azt a következtetést vonhatjuk le, hogy az átlagon felüli tanulmányi eredményekkel rendelkező tanulók könnyebben tudnak szimbólumokat kezelni, absztraktan gondolkodni. Többségüknél az aritmetikai-algebrai átmenet már korábban megtörtént, akiknél nem, azok pedig a jelenlegi tanulási folyamat eredményeképpen jutottak el erre a szintre.

A kísérő hangfelvételek alapján még néhány gondolatot meg tudunk fogalmazni. Minden csoportban megfigyelhető volt a diákok feladataihoz tartozó magyarázatok egyik jellemzője: a magabiztosság. Több diák monológjában véltünk felfedezni különbségeket a diákok feladatmegoldásának magabiztosságát tekintve. Az előtesztben előforduló *„ebbe egy kicsit belezavarodtam", „nekifogtam, csak nem tudtam", „ebben itt nem vagyok biztos", „ez a feladat nem ment"* vagy *„hát ez nem jó, de csak így tudtam megoldani"* mondatok kicserélődtek *„gondolkoztam, és aztán rájöttem, hogy kell", „a videó visszanézésekor észrevettem egy hatalmas hibát, amit most ki is javítottam…"* vagy *„ezt itt újracsináltam, mert rájöttem, hogy nem jó"* megjegyzésekre. Ezekből a megjegyzésekből a magabiztosság mellett még további metakognitív elemeket is beazonosíthatunk, azonban ezekre ebben a dolgozatban nem térünk ki.

Összességében a kvalitatív elemzés után szintén azt mondhatjuk, hogy a diákok a problémaalapú órasorozatok után szignifikánsan jobb eredményt értek el minden csoportban. A statisztikai elemzésekből és a diákok munkáiból azonban nem mondhatjuk teljes bizonyossággal azt, hogy ez a javulás kizárólag a módszernek köszönhető. A továbbiakban azt nézzük meg, hogy a diákok hogyan vélekednek a problémaalapú elemekről, és hogy szerintük minek tulajdonítható a jobb megértés. Ez az elemzés hozzájárul ahhoz, hogy a szignifikáns javulás okát megtaláljuk.

8.3.3. A diákok véleménye a problémaalapú elemekről

A problémaalapú megközelítést alkalmazó tanítási egység lezárása után a diákok véleményére is kíváncsiak voltunk, a már korábban ismertetett 12 diákkal készítettünk félig strukturált interjút. Ebben a részben bemutatjuk a diákok jellemző válaszát az általunk vizsgált két problémaalapú elemre: problémamegoldás és problémaalkotás. A problémamegoldást az alkalmazott heurisztikus stratégiához, a mintakereséséhez kapcsolódva vizsgáljuk. A diákok válaszai tanulói csoporttól függetlenül egybecsengenek.

Problémamegoldás: Mintakeresés mint heurisztikus stratégia

Arra a kérdésre, hogy mi a véleményük az olyan feladatokról, amelyekben valamilyen mintát kellett megállapítani, keresni, a diákok azt válaszolták, hogy az ilyen jellegű problémamegoldások alkalmasak lehetnek a logikus gondolkodás fejlesztésére:

S29:	… tetszik […] hogy el kell gondolkozni, hogyha még egyet rakok, akkor hogy változik, s akkor sorozatban megfigyeljük, hogy miként változik s milyen egyenletek alapján, s ezáltal úgymond a logikus gondolkodást is fejlesszük.
S37:	… értettem is és volt a fejemben logika, hogy hogy jöhetnek ki az eredmények.

Ugyanakkor az ilyen jellegű feladatok lehetőséget adnak a felfedezésre, saját gondolatok kifejezésére, az önbizalom növelésére, s mindezek jó érzéssel töltik el a diákokat:

S53:	Azt, hogy fel lehet olyat fedezni, amit esetleg más nem fedezett föl, s akkor úgymond te vagy az első, aki észrevette ezt.
S13:	Az [tetszik], hogy jól ki lehet logikázni hogy hogyan kell és […] meg szoktuk kapni az esélyt, hogy mi is kitaláljuk, hogy hogyan kell megcsinálni és ettől hogyha rájövök, akkor úgymond kisebb önbizalmat kapok [...] [Mosolyog] És ettől így boldogabb leszek…
S32:	például megkapok egy olyan, nem feltétlenül képletet, egy olyan szabályt, ami bármelyik ilyen számra illik, tudom azt alkalmazni bármelyik esetben, felfedezni az összefüggést ezek között, és az jó érzés.
S17:	Ezen az órán […] magabiztosnak éreztem magam […] mert, ha így fel van ábrázolva, azokat könnyebben megértem, mint például a csak a feladatokat, amiket csak el lesznek magyarázva, […] hogyha mondják, hogy az

összefüggés, akkor én így nézek, hogy tessék?! De ha azt mondják, hogy a pontos és fülpiszkálós feladat, akkor visszaemlékszem és értem, hogy hogy kell.

Problémaalkotás

A problémaalkotásról és annak hasznosságáról kérdezve a diákokat, a vélemények szerteágazóak voltak, ám abban mind egyetértettek, hogy ezek a feladatok kreativitást igényelnek:

S2: nagyon-nagyon jó feladatok és szerintem a kreativitást is fejlesztik.

S54: Szeretem, jó. Fantáziafejlesztő, vagy hogy mondjam.

S13: Hát nekem a kreativitásom az nem olyan határtalan. […] de ha van egy kiindulópont és meg van adva, hogy miről kell, akkor ki tudom találni...

Megkérdeztük azt is, hogy szerették-e vagy sem a problémaalkotó tevékenységeket. A válaszok egy kivétellel pozitívok voltak, a fő indok, amiért szerették a diákok a feladatalkotást az irányítás kézben tartása volt, mert így „ők dönthettek majdnem mindenről".

S28: Ezek által képes vagyok a dolgok mögé látni [...], ebben az esetben én vagyok a kitaláló, tehát én szabom meg a határokat, és azt csinálok a feladattal, amit akarok. [...] Szeretem ezeket a tevékenységeket, mert én hozom a szabályokat.

S56: Hát én szeretek kitalálni feladatokat, mert az legalább az enyém, és tudom, hogy én raktam össze és tudom miről szól és hogy van. Én adtam meg a számokat…

Az az egy diák, aki nem szívesen alkotott problémákat azzal indokolt, hogy túl komplikált volt számára, jobban szeret inkább problémát megoldani. A problémaalkotás kihívását ugyanakkor több diák említette mondván, hogy feladatot alkotni nehezebb, mint feladatot megoldani.

S38: Nekem ez is tetszik, viszont ez már egy kicsit nehezebb volt és nem tudtam annyira helyesen […] kitalálni ezt a feladatot, mert nem vagyok ehhez hozzászokva annyira és nehezebb, mint kész feladatot megoldani. […] Mert én kell kitaláljam az adatokat, én kell utánaszámoljak, hogy akkor jó-e ez a kettő, hogyha így írom, az eredménynek akkor mi is fog kijönni.

S16: Leginkább az első fele [nehezebb], amikor ki kellett találnunk, hogy mi lenne a helyes módja annak, hogy ezt az egészet felépítsük.

Habár tevékenység szintjén nehéznek minősítették a problémaalkotást, többnyire egységes volt a vélemény abban a tekintetben, hogy ez mindenképpen segíti a matematikai megértésüket.

S2: ...segít a megértésben, mert látod a feladatnak a struktúráját, hogy hogy van felépítve.

S16: ...ha például egy egyenletet tartalmazó feladatot kell megoldanom, előfordulhat, hogy nem értem. Viszont, ha én kell formáljam az egyenletet, vagy a szöveget, akkor az egész dolog világosabbá és érthetőbbé válik.

S11: Hát szerintem jó, mert igazából, hogyha megérted ennek a lényegét, akkor te is hogyha kicsit használod a kreativitásod, akkor könnyebben ki tudsz találni egy ilyen féle feladatot, csak ahhoz ugye meg kell értsd, hogy miről van szó.

S29: Szerintem úgy jó ötlet azért, hogy próbáljunk úgy kicsit visszafelé gondolkodni […] hogyha pozitívan állsz hozzá, akkor könnyen segíthetnek, de hogyha másképp állsz hozzá úgy nem tanulhatsz belőle sokat.

Egy, a hasznossághoz kapcsolódó kérdés azért felmerült, mondván, hogy *„De most van egy annyi hátránya is, hogy nem adsz magadnak olyan feladatot, amit nem tudnál megoldani.”* Itt azért megjegyezzük, hogy jó pár osztálytárs rácáfolt erre az állításra és bizony talált ki olyan feladatot, amit nem tudott (helyesen) megoldani.

Összességében azt mondhatjuk, hogy a diákok a mintakereséses problémamegoldásra logikafejlesztőként tekintenek, amely magabiztosságot is ad, a problémaalkotást kreativitás fejlesztőnek, de nehéz feladatnak találják, amely elősegítheti a jobb megértést. A jobb megértés, a „tudom, hogy tudom”, vagyis a megélt kompetencia a tanulók véleményeiből a fejlesztés hatását indokolja.

8.4. Összegzés

Ebben a fejezetben azt vizsgáltuk, hogy egy tantervből kiragadott fejezet problémaalapú órasorozatai milyen hatással vannak a tanulási folyamat kimenetelére, valamint, hogy hogyan vélekednek a diákok ezekről a problémaalapú elemekről. Az irodalom szerint a problémaalapú megközelítést alkalmazó tevékenységek nem járulnak hozzá a diákok tanulmányi eredményeinek a javításához, viszont a heurisztikus problémamegoldások célzott alkalmazása annál inkább. Ez okból kifolyólag heurisztikus stratégiára épülő problémákra építettük fel az óraterveket, és azt vizsgáltuk, hogy ez a megközelítés milyen hatással lesz a tanulási eredményekre. Eredményképpen megfogalmazhatjuk, hogy a kísérletben részt vevő 54 diák esetében szignifikáns különbséget mutattunk ki az elő- és utóteszten elért eredmények között mindhárom tanulói csoportban. Látványos javulás az átlagos és átlagon aluli tanulmányi eredményekkel rendelkezők csoportjaiban volt. Az átlagon felüli tanulmányi eredményekkel rendelkező diákok már az előteszten is nagyon magas pontszámokat produkáltak.

Mindezek után a 12 véletlenszerűen választott diákkal készített félig strukturált interjúkat elemeztük. Itt azokra a részekre tértünk ki, amelyek a problémaalapú tanulás két fő, általunk vizsgált elemére vonatkoztak: a problémamegoldásra és problémaalkotásra. Ezekből az interjúkból olyan következtetéseket tudtunk levonni, amelyek mindhárom csoportra jellemzőek voltak: a problémamegoldással logikát fejleszthetünk, bizonyos heurisztikus stratégiákkal a gondolkodást és megértést segítő eszközt adhatunk a diákok kezébe, illetve jól alkalmazva mindezeket növelhetjük az önbizalmukat. A problémaalkotásnak pedig annak ellenére, hogy nehéz és összetett tevékenység, megvan az előnye: fejleszti a kreativitást, valamint segíti a megértést. A megélt kompetencia kifejezése a tanulók oldaláról is megerősítette a kísérlet fejlesztő hatását.

A fejezet alapjául szolgáló tanulmány a Báró (2023) közleményben olvasható.

9. A problémaalapú megközelítés hatása a tanulói bevonódásra

Az előző fejezetekben láthattunk példákat az általunk alkalmazott problémaalapú megközelítés gyakorlatából, amelyet négy éven keresztül következetesen végeztünk. Az elméleti részben azt is bemutattuk, hogy a problémaalapú megközelítésnek széles körben elismert a matematikatanulás affektív területére gyakorolt pozitív hatása (Allen et al., 2011). Tekintettel arra, hogy a motiváció és a bevonódás döntő szerepet játszik a diákok teljesítményében, valamint az iskola és a tantárgy iránti érdeklődésben, szükségesnek tartottuk megvizsgálni a problémaalapú matematikatanulás hosszútávú hatását is az affektív területre. A négyéves matematikatanulás befejezése után visszatekintést kértünk a longitudinális kutatásban résztvevő diákoktól. Tehát a dolgozat ezen fejezete a diákok bevonódására koncentrál a négyéves problémaalapú beavatkozás után, így kutatási kérdésünk: *Milyen hatással van a felső tagozatos tanulmányi szakaszban folyamatosan alkalmazott problémaalapú megközelítés a tanulók bevonódására?*

9.1. A kutatás körülményei

Ebben a tanulmányban a két longitudinálisan vizsgált osztály vett részt (A és B csoport). Ahogy azt már korábban ismertettük a két osztály számára négy éven keresztül rendszeresen terveztünk és tartottunk problémaalapú órákat.

A négy év során számos problémaalapú tanórát terveztünk, ebből 50 került dokumentálásra. Kíváncsiak voltunk a diákok matematika órákhoz kapcsolódó emlékeire az 5-8. osztályból. Hat hónappal a 8. osztály befejezése után, amikor a diákok már más iskolában tanultak és nem a dolgozat szerzője tanította őket, megkértük, hogy idézzék fel emlékeiket a következő instrukciókat követve:

a) Idézz fel egy olyan élményt a felső tagozatos matematikaórákról, amelyre szívesen emlékszel vissza!

b) Magyarázd el, miért kellemes számodra ez az élmény!

Negyvenhárom diák töltötte ki az online kérdőívet, az általuk megadott válaszok szolgálnak a kutatás alapjául.

9.2. Adatgyűjtés

A diákok anonim módon töltötték ki a kérdőívet, és a kitöltés időpontjában a kutató tanár már nem tanította őket.

A diákok válaszait a szakirodalom mentén elemeztük, egy kódrendszert alkotva (Skinner, 2016): indikátorokat és facilitátorokat különböztettünk meg. Az indikátorok magára a bevonódás típusára vonatkoznak (érzelmi bevonódás, kognitív bevonódás, viselkedési bevonódás), míg a facilitátorok befolyásoló tényezőket jelölnek, amelyek potenciálisan kiválthatják a bevonódást.

19. táblázat: A kódrendszerben megjelenő indikátorok és facilitátorok

Indikátorok	Viselkedési bevonódás	Utalás a tanulók részvételére a tanulási folyamatban (jelenlét, figyelem, koncentráció, összpontosítás, kitartás, szorgalom, kemény munka)	
	Érzelmi bevonódás	Utalás a tanulók érzéseire, melyek a matematikaórához és a tanárhoz való kötődésre vonatkoznak (hovatartozás, megbecsülés, kapcsolat érzése, közelség)	
	Kognitív bevonódás	Utalás az önszabályozó tanulásra	
Facilitátorok	Kontextus és környezet	Pozitív interperszonális kapcsolatok	A csoportmunka pozitív hatásai, a közösséghez való kötődés érzése, mások segítése
		Osztálytermi légkör	Motiváló tanórai hangulat, szocializálódásra alkalmas környezet
	Matematika	Kihívás	Problémák (nem rutin feladatok) megoldása vagy alkotása
		Tartalom	A tananyagra való konkrét hivatkozás
	Önreflexió	Megélt kompetencia	A tanuló sikeresen megold egy feladatot vagy megért egy matematikai gondolatot
	Tanár	Barátságosság	Lelkes, vicces, kedves tanár
		Segítőkészség	A tanár segítőkészsége
		Eszközhasználat	Taneszközök használata (fizikai vagy digitális)
		Játék	Játékos tevékenységek
		Tanítási módszerek	A tanár változatos stratégiákat és eljárásokat alkalmaz a tanulók tudásának biztosítására és a tanulóközpontú, felfedeztető, önszabályozó tanulási módszerek iránti elkötelezettségét tanúsítja

A 19. táblázatban csak azokat a kódokat tüntettük fel, amelyek legalább öt alkalommal előfordultak a kódolás során. A válaszok kódolását három kutató végezte: a dolgozat szerzője és a két témavezető. Első lépésben a tanulói válaszokat szegmentálátuk. A szegmentálás a megjelenő tartalmi motívumok alapján történt. Összesen 220 szegmenst azonosítottunk a 43 diák önbeszámolójában. A korpusz 1622 szót tartalmazott, tehát egy diák átlagosan 38 szavas önbeszámolót nyújtott be. A 20. táblázat egy példát mutat a kódolásra.

20. táblázat: S4 válaszainak kódolása

Szegmensek	**Kódok**
Nekem az egyik kedvenc élményem az volt, amikor a 3D-s szemüvegekkel tanulmányoztuk	Eszközhasználat
a mértani testeket	Tartalom
Azért volt számomra kellemes az élmény, mert így sokkal átláthatóbbak és érthetőbbek lettek a testek	Megélt kompetencia
és így órán sokkal könnyebben meg tudtam rajzolni és érteni őket	Kognitív bevonódás

Megvizsgáltuk a kódok gyakoriságát, de a kis mintaszám miatt csak informatívnak tekinthetjük a kódok közötti kapcsolatokat, az együttes előfordulást. A Jaccard-indexet használtuk a kódok kapcsolatának leírására. A Jaccard-index egy hasonlósági mérőszám, amely két véges halmaz metszetében és az uniójában lévő elemek számának arányát méri. Fontos megjegyeznünk, hogyha egy tanuló önbeszámolójában kétszer fordult elő ugyanaz a kód, akkor azt összevontuk, egynek tekintettük. Így a kódok előfordulásának száma megegyezik azon tanulók számával, akiknek a beszámolójában az adott kód megjelent.

9.3. Eredmények és következtetések

A 43 diák közül 33 legalább egyfajta bevonódást kifejezett (indikátor típusú kódot is kapott). A többi 10 diák szövegében indikátor típusú kód ugyan nem jelent meg, egy kivételével, mind pozitív visszajelzést tükrözött.

9.3.1. Problémaalapú tanulás és a bevonódás kapcsolata

A kódolási folyamat mellett megszámoltuk a konkrét problémaalapú órákra utaló szegmenseket (lásd a problémaalapú beavatkozás körülményei között felsorolt feltételeket - 34. oldal). 20 diák hivatkozott dokumentált problémaalapú órára, 17 további diák nem dokumentált problémaalapú órára utalt az önbeszámolója során. A fennmaradó 6 diák olyan emléket idézett fel, amely nem kapcsolódott meghatározott problémaalapú tevékenységhez. A diákok a korábban meghatározott hat kritériumból (34. oldal) visszaemlékezéseikben háromra is utaltak, például egy problémaalkotási tevékenység felidézése által (1): *„amikor mi találtunk ki feladatokat”*, vagy kooperatív tevékenységre hivatkozva (2): *„amikor csapatban kellett körbe fussunk és kiegészítsük egymás rajzait és képleteit”* vagy felfedeztető tevékenységre utalva (6): *„amikor mértani testeket vizsgáltunk 3D-s szemüvegekkel”*.
Ezen kívül néhány diák konkrétan említett egy-egy problémaalapú tevékenységet, például: *„amikor játékosan kellett megoldjunk valamit, például a torpedó játék”*, itt a torpedó játék a derékszögű koordináta rendszer bevezetésére szolgáló problémaalapú tevékenység volt.
Mind a 17 tanuló, aki nem dokumentált problémaalapú tevékenységet idézett fel, egy olyan felfedeztető órára hivatkozott, amelyen 3D szemüvegeket használtunk. Ez arra késztetett minket, hogy nagyobb hangsúlyt fektessünk az „Eszközhasználat” kódot kapott beszámolók elemzésére, és megvizsgáljuk, hogy ez a facilitátor milyen hatással van a bevonódásra, valamint a többi facilitátorra.

9.3.2. Az eszközhasználat és egyéb facilitátorok kapcsolata

A diákok által leggyakrabban említett facilitátor az eszközök használatára vonatkozott (19 diák). Habár ezeknek az élményeknek többsége (17) egy olyan órához kapcsolódott, amelyen 3D szemüvegeket használtak (felfedeztető tanóra), érdemesnek tartottuk megvizsgálni, hogy mit váltott ki az eszközhasználat a diákokban. Számos önbeszámoló azt mutatja, hogy a megfelelő *tartalom* és *taneszköz* kiválasztása *megértést, megélt kompetenciát* eredményezhet. Ezt alátámasztja a következő két részlet is:

S4: számomra az egyik legkedvesebb élmény az volt, amikor 3D szemüveggel néztük, és tanulmányoztuk a mértani testeket. […] mert így 3D-ben valóban sokkal átláthatóbbak lettek a mértani testek

S28: amikor a tanár néni hozott be dolgokat, hogy szemléltesse jobban [a leckét] Mert így jobban megértettem az egész leckét.

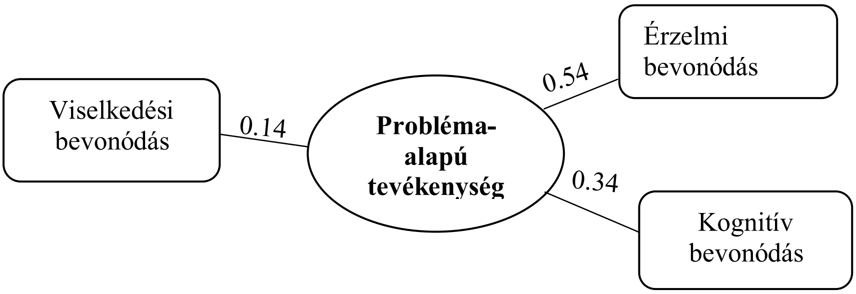
Néhány esetben azt is megfigyeltük, hogy az *eszközhasználat* a megfelelő *tartalommal* kombinálva *érzelmi bevonódást* eredményezhet.

S37: ami a mai napig a „legjobb emlékek” kollekciómba díszeleg, az nem más, mint amikor a térmértani alakzatokat 3D-s szemüveggel vizsgáltuk meg. […] mert a 3D-s szemüveg hatására, egy olyan speciális emóció részesévé váltam, mintha valóban átléptem volna egy másik dimenzióba.

9.3.3. A problémaalapú tanulás és a bevonódás típusai

A 23. ábra a problémaalapú tanulás és a bevonódás típusai közötti Jaccard-kapcsolatokat mutatja be (ezeket a korábban bemutatott módon határoztuk meg azáltal, hogy azonosítottuk a kódok számát a különböző halmazokban és metszeteikben). A legerősebb kapcsolat az érzelmi bevonódás és problémaalapú megközelítés között van. Ennek az lehet a magyarázata, hogy ezek a tevékenységek vidámsággal járnak, és a matematikaórák szeretetét hozzák magukkal. Ezt a következő tanulói gondolatok is alátámasztják: *„Mert nagyon gördülékenyen ment minden és sokat kacagtunk közben”* vagy *„Mert így élvezetesebben telt a matek óra”*.

Ugyancsak szorosabb kapcsolatot figyelhetünk meg a problémaalapú megközelítés és a kognitív bevonódás között. A tanulói beszámolókban jellemzően a kihívás és a kihívás sikeres teljesítésének gondolata jelenik meg, például *„amikor feladatokat oldottunk és találtunk ki […] mert én is hozzátettem a feladathoz”* vagy *„mert mindig meg tudtam oldani azt”*. A problémaalkotást kihívásnak tekintettük egy korábbi kutatás eredménye alapján (Kovács et al., 2023).



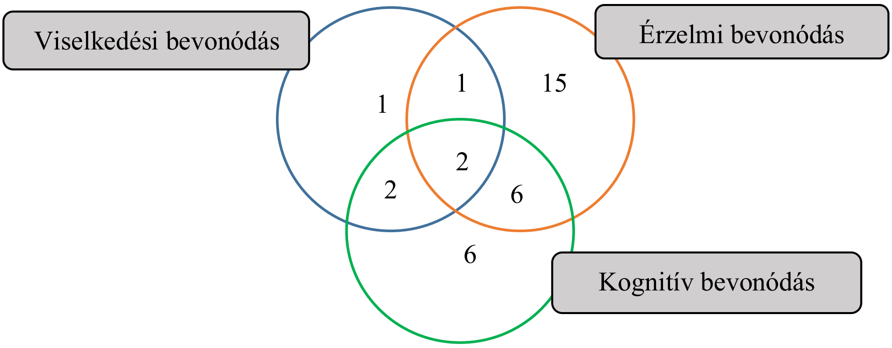
23. ábra: Jaccard-kapcsolatok a problémaalapú tevékenység és bevonódás típusai között

A következő bekezdésben a leghangsúlyosabb indikátor, az érzelmi bevonódás kiváltását, illetve ennek a motivációval való kapcsolatát bővebben tárgyaljuk.

9.3.4. Érzelmi bevonódás és motivációs források

Eddigi elemzéseink azt mutatják, hogy a problémaalapú órák az érzelmi bevonódással vannak a legszorosabb kapcsolatban, és ez az indikátortípus fordult elő a leggyakrabban a tanulók reflexióiban. A továbbiakban megvizsgáljuk az indikátorok együttes előfordulását, majd rátérünk az érzelmi bevonódás szerepére.

A 24. ábra szemlélteti, hogy 2 olyan diák volt, akinek önbeszámolójában mindhárom típusú bevonódás megjelent, ez mindkét esetben problémaalapú órához köthető. További 9 diáknál két indikátor típus jelent meg egyszerre, 22-nél pedig egyféle.



24. ábra: Venn-diagram a bevonódott diákokról

Azokban az esetekben, ahol csak egy indikátor jelent meg a diákok válaszaiban, a szakirodalom alapján a motiváció jeleire utalhat az adott órán. A legkiemelkedőbb példa erre a jelenségre az érzelmi bevonódásra utaló önbeszámolók (24 tanuló). Ráadásul, a korábbi elemzéseink alapján, ennek az indikátornak volt a legszorosabb Jaccard-féle kapcsolata a problémaalapú tevékenységekkel.

Kiszámolva az egyes indikátorok és facilitátorok közötti Jaccard-indexeket, arra voltunk kíváncsiak, hogy a leggyakrabban előforduló indikátor, az érzelmi bevonódás mely facilitátorokkal van szoros kapcsolatban, vagyis melyek azok a facilitátorok, amik ezt kiváltják. Öt ilyen tényezőt találtunk: az eszközhasználat, a tartalom, a pozitív interperszonális kapcsolatok, az osztálytermi légkör és a tanítási módszerek. Megfigyeléseink szerint a gyakori érzelmi bevonódás szorosan kapcsolódik a K1-ben tárgyalt motivációs forrásokhoz. A 21. táblázat első oszlopa az érzelmi bevonódást kiváltó öt facilitátort mutatja be a kapcsolatot jelző Jaccard-indexekkel. A táblázat utolsó oszlopa a facilitátornak megfeleltethető motivációs forrást tartalmazza. Az első két megfeleltetés egyértelmű, a további érzelmi bevonódáshoz kapcsolódó facilitátorok (például pozitív interperszonális kapcsolatok, tanítási módszerek) értelmezései (19. táblázat) magukba foglalják a megfelelő motivációs forrásokat.

A K1 kutatási kérdéssel foglalkozó fejezetben (39. oldal) bemutattuk, hogy egy konkrét problémaalapú tanóra hogyan aktiválja a szakirodalomból ismert motivációs forrásokat. A diákok önbeszámolói megerősítik és kiegészítik korábbi tapasztalatainkat. Az, hogy kapcsolatot találtunk a motiváció forrásai és az érzelmi bevonódás facilitátorai között, arra enged következtetni, hogy nem csupán egyetlen kiválasztott problémalapú óra, hanem a problémaalapú órák általában motiváló hatással bírnak.

21. táblázat: A motivációs forrásoknak megfelelő facilitátorok

Az érzelmi bevonódáshoz kapcsolódó facilitátorok	A Jaccard kapcsolatok az érzelmi bevonódás és adott facilitátor között	Megfelelő motivációs források
Eszközhasználat	0.483	Eszközök használata
Tartalom	0.464	A feladat iránti érdeklődés
Pozitív interperszonális kapcsolatok	0.273	Mások segítése
Osztálytermi légkör	0.200	A szocializálódásra alkalmas környezet
Tanítási módszerek	0.281	A felfedezés lehetősége
Nem találtunk megfelelőt		A „miértek” ismerete

9.4. Összegzés

Ebben a fejezetben a problémaalapú megközelítés és a tanulói bevonódás kapcsolatát vizsgáltuk. E célból megkértük a négy éven keresztül problémaalapú megközelítéssel tanított diákokat, hogy számoljanak be kedvenc matematikai élményükről hat hónap távlatában. Habár 43 diák beszámolója által nem tudunk általános megállapításokat tenni, elemzéseink figyelemre méltó észrevételeket tartalmaznak.

A diákok 86%-a (6 fő kivételével mindenki) problémaalapú tanórát idézett fel legkedvesebb matematika órai emlékként. Ezekhez az emlékekhez legszorosabban az érzelmi bevonódás kapcsolódott. Ebből arra következtethetünk, hogy a négy éven át következetesen végzett problémaalapú beavatkozások a diákokban kellemes emlékeket idéztek fel, és hozzájárultak a matematikatanulással összefüggő érzelmi bevonódás kialakulásához. Azzal, hogy a problémaalapú órákon jelen vannak a motiváció forrásai, megerősítést nyert az a feltételezésünk, hogy a tananyag problémalapú feldolgozási módja motiváló hatású a tanulók számára. A kutatásról részletesebben olvasható a Báró és munkatársai (2024) tanulmányban.

10. Következtetések, további kutatási lehetőségek

A tanulók csökkenő érdeklődése a matematika és a természettudományok iránt motiválta kutatásunkat, ez vezetett minket a problémaalapú tanítási módszerek felé. A dolgozatban a problémaalapú megközelítés alkalmazásának hatékonyságát, a diákok tanulási eredményeit, valamint ennek kapcsán kritikus- és algebrai gondolkodásmódjukat vizsgáltuk egy négy évig tartó akciókutatás keretében a felső tagozatos korosztályban.

A vizsgált területekhez fogalmaztunk meg kutatási kérdéseket, melyekre akciókutatás keretében igyekeztünk válaszolni kvalitatívan és kvantitatívan elemezve a begyűjtött adatokat. Az eredményeket most röviden összefoglaljuk.

K1. Mely motivációs források jelenhetnek meg egy problémaalapú tanórán?

A kérdést egy problémaalapú megközelítést alkalmazó tanóra egy problémamegoldási tevékenységének elemzése révén válaszoltuk meg két csoport óráinak videófelvételei, illetve a tanulók visszajelzései alapján. A kutatás megerősíti a szakirodalomból ismert eredményeket. Ezek szerint a motivációs források természetes módon épülhetnek be a problémaalapú tevékenységbe, és ezek valóban motivációs hatással bírnak, amelyet a tanulói megszólalások elemzésével mutattunk ki.

K2. Hogyan hatnak a problémaalkotás során potenciálisan megjelenő perszonális tényezők a motivációra?

Erre a kérdésre két ciklusú akciókutatás segítségével válaszoltunk, amelyben a problémaalkotásra helyeztük a hangsúlyt. A szakirodalomból ismerjük a kontextusperszonalizáció motiváló hatását. Ez a jelenség kísérletünk során valóban megjelent. Az akciókutatás első ciklusában a kontextusperszonalizáció motiváló hatását kimutattuk. A második ciklusban azt tapasztaltuk, hogy az társas kapcsolatok megerősítésével tovább erősödött a tanulók motivációja a problémaalkotás során. Ezzel egy újabb motivációs forrás megjelenésére mutattunk rá, a perszonalizáció lehetőségét magában hordozó tanulási környezetre, amely tipikusan a problémaalkotási tevékenységhez kapcsolható.

K3. A problémaalapú megközelítés során alkalmazott páros munkaforma hogyan támogathatja a kritikus gondolkodás megjelenését?

A kérdést mintakereséses feladatok feldolgozása által egy problémaalapú tanóra keretén belül szervezett pármunka során kialakult párbeszédek és a tanulói vélemények alapján válaszoltuk meg. Arra jutottunk, hogy a problémaalapú megközelítés pármunkában megfelelő lehetőséget adott a kritikus megnyilvánulásokra, a társak gondolatmenetének reflektálására. Azonban bizonyos körülmények között nem működött megfelelően. Például azon párok esetén, ahol a tanulók készségszintje lényegesen eltért, a kritikus megnyilvánulásokat blokkolta ez a különbség.

K4. Fejlődött-e a tanulók algebrai gondolkodásmódja a problémaalapú megközelítés során?

A mintakeresési problémákra vonatkozó osztálymegbeszélések és a problémaalkotási feladatok elemzésével adtunk választ a kérdésre. A problémaalkotási feladatra Silver (1994) nyomán, mint a tanuló gondolkodásába bepillantást engedő „ablakra” tekintettünk, és a problémaalkotási feladatban megnyilvánuló gondolkodásmódokat vizsgáltuk. Azt tapasztaltuk, hogy a problémaalkotási tevékenység eredménye visszajelzés volt a tanulók algebrai gondolkodásának szintjéről, amelynek fejlődését megállapítottuk.

K5. Milyen hatással van a problémaalapú megközelítés a tanulási folyamat kimenetére?

A kérdésre egyrészt egy kvantitatív vizsgálat válaszolt, egy elő- és egy utóteszt eredményeinek összehasonlításával. Majd rátértünk a megoldások kvalitatív elemzésére is, valamint a tanulók megélt kompetenciájának vizsgálatára. Kijelenthetjük, hogy minden képességcsoportban fejlődés mutatkozott, de a legnagyobb kísérleti hatást a gyenge és közepes matematika képességű csoportokban tapasztaltunk. A tanulók megélt kompetenciája a személy oldaláról is megerősíti a fejlesztési hatást.

K6. Milyen hatással van a felső tagozatos tanulmányi szakaszban folyamatosan alkalmazott problémaalapú megközelítés a tanulók bevonódására?

A kérdést a négyéves problémaalapú beavatkozás lezárása után kitöltött önbeszámolók elemzésével válaszoltuk meg. Vizsgálataink arra mutattak rá, hogy a négy éven át következetesen végzett problémaalapú beavatkozások után a diákoknak a felidézett kedvenc tevékenységei elsősorban érzelmi bevonódásra utaltak. Ugyanakkor felfedeztük a szakirodalomból ismert motivációs forrásokat a diákok beszámolóiban, ami a **K1** kutatási kérdésben kapott eredményt is megerősíti.

A **K1-K3** kérdések a módszer egyes jellemzőire, előforduló jelenségekre, a **K4-K6** kérdések pedig a beavatkozás eredményességére vonatkoztak.

Összességében elmondhatjuk, hogy a problémaalapú tanulás alkalmasnak bizonyult a diákok motiválására, a matematikával kapcsolatos attitűd jó irányba formálására, és mindezek mellett a tanulási folyamat kimeneti eredménye is pozitív képet mutatott.

A kutatás a dolgozat megírásával nem fejeződik be. Tervben van az összegyűjtött tanulói munkák további elemzése, például a longitudinálisan követett csoportok esetében a problémaalkotások elemzése, fejlődésének tanulmányozása.

Másik lehetőség további korosztályok vizsgálata hasonló szempontok szerint, például középiskolások vagy egyetemisták körében történő hasonló jellegű problémaalapú beavatkozás.

További terveink között szerepel a kutatás kibővítése minta szempontjából. Erre egy lehetőség más matematika tanárok bevonása problémaalapú órák megtartásába, az órák dokumentálása, majd elemzése. Néhány eddigi tapasztalatunk más tanárok bevonásáról pozitív. Például a K2 kutatási kérdés tárgyalásánál, az akciókutatás első körét megvalósító tanár reflexiója sok hasonlóságot mutat a mi tapasztalatainkkal. Ilyen közös motívumok a problémalapú órák hasznosságának megfogalmazásában:

- segített a tanulók megértésének megítélésében, a tanulók megismerésében, hibák (gondolkodási és tárgyi) felismerésében;
- pozitív élményekkel való gazdagodás, érdekes, a tanár részéről is motiváló tevékenységek megvalósítása;
- kedvezően hatott tanári elkötelezettségre, identitásra.

Kutató tanárként hasonló pozitív emlékekkel és reflexióval zártam minden sikeres problémaalapú beavatkozást, akárcsak Lócska Orsolya Dóra, matematika szakos tanár, aki így foglalta össze gondolatait:

„*A napjaim fénypontját jelentették a tanulók által írt feladatok. Imádom a gyerekek fantáziáját. Rendkívüli volt megfigyelni, ahogy a személyiségük átszőtte az általuk írt problémákat. Nagyon büszke voltam a tanulóimra, amiért ilyen szépen végrehajtották a feladatokat*.”

Irodalomjegyzék

Albanese, M. A., & Mitchell, S. (1993). Problem-based learning: A review of literature on its outcomes and implementation issues. *Academic Medicine*, *68*(1), 52–81. https://doi.org/10.1097/00001888-199301000-00012

Allen, D. E., Donham, R. S., & Bernhardt, S. A. (2011). Problem-based learning. *New Directions for Teaching and Learning*, *2011*(128), 21–29. https://doi.org/10.1002/tl.465

Ambrus, A. (2004). *Bevezetés a matematika-didaktikába*. ELTE Eötvös Kiadó.

András, S., Csapó, H., Nagy, Ö., Szilágyi, J., Sipos, K., & Soós, A. (2010). *Kivancsiságvezérelt matematika tanítás*. https://doi.org/10.25656/01:7203

Argaw, A. S., Haile, B. B., Ayalew, B. T., & Kuma, S. G. (2016). The Effect of Problem Based Learning (PBL) Instruction on Students' Motivation and Problem Solving Skills of Physics. *EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, *13*(3), 857-871. https://doi.org/10.12973/eurasia.2017.00647a

Balázsi, I. (2012). *TIMSS 2011: Összefoglaló jelentés a 8. évfolyamos tanulók eredményeiről*. Oktatási Hivatal.

Bánfi G. (2018). A kutatás-, a projekt- és a problémaalapú tanulás vizsgálata általános és középiskolai tanárok körében. *Pedagógiai Értékelési Konferencia*, *16*, 23.

Báró, E. (2020). Mapping students' motivation in a problem oriented mathematics classroom. *Teaching Mathematics and Computer Science*, *18*(3), 111–121. https://doi.org/10.5485/TMCS.2020.0477

Báró, E. (2021). Teaching strategies for developing critical thinking skills. In B. Maj-Tatsis & K. Tatsis (Eds.), *Critical thinking in mathematics: Perspectives and challenges* (pp. 17–25).

Báró, E. (2022a). Observing critical thinking during online pair work. In B. Maj-Tatsis & K. Tatsis (Eds.), *Critical Thinking Practices in Mathematics Education and Beyond* (pp. 128–136).

Báró, E. (2022b). Positive changes in affective variables: Two-round action research in Hungary and Romania. In *Twelfth Congress of* *the European Society for Research in Mathematics Education (CERME12)*. https://hal.science/hal-03745582v1

Báró, E. (2023). Exploring students' algebraic thinking through problem-posing activities. In I. Papadopoulos & N. Patsiala (Eds.), *Proceedings of the 22nd conference on Problem Solving in Mathematics Education: ProMath 2022* (pp. 165–178). Aristotle University of Thessaloniki.

Báró, E., Kovács, Z., & Kónya, E. (2024). Students recalling favourite math experience: How does problem- based approach promote mathematical engagement? In P. Drijvers, C. Csapodi, H. Palmér, K. Gosztonyi, & E. Kónya (Eds.), *Proceedings of the Thirteenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME13)* (pp. 1400–1407). Alfréd Rényi Institute of Mathematics, Hungarian Academy of Sciences.

Barrows, H. S., & Tamblyn, R. M. (1977). The portable patient problem pack: A problem-based learning unit. *Academic Medicine*, *52*(12), 1002–1004. https://doi.org/10.1097/00001888-197712000-00007

Barrows, H., & Tamblyn, R. (1980). *Problem-Based Learning: An Approach to Medical Education*. Springer Publishing Company.

Baumanns, L., & Rott, B. (2021). Rethinking Problem-Posing Situations: A Review. *Investigations in Mathematics Learning*, *13*(2), 59–76. https://doi.org/10.1080/19477503.2020.1841501

Boaler, J. (1994). When Do Girls Prefer Football to Fashion? An Analysis of Female Underachievement in Relation to „Realistic" Mathematic Contexts. *British Educational Research Journal*, *20*(5), 551–564.

Boud, D., & Feletti, G. I. (1997). *The Challenge of Problem-Based Learning. 2nd Edition*. Kogan Page Limited, England.

Brooks, J. G., & Brooks, M. G. (1993). *In Search of Understanding: The Case for Constructivist Classrooms*. Association for Supervision and Curriculum Development.

Brown, S. I., & Walter, M. I. (2005). *The Art of Problem Posing*. Psychology Press. https://doi.org/10.4324/9781410611833

Cai, J., & Hwang, S. (2002). Generalized and generative thinking in US and Chinese students' mathematical problem solving and problem posing. *The Journal of Mathematical Behavior*, *21*(4), 401–421. https://doi.org/10.1016/S0732-3123(02)00142-6

Cai, J., & Hwang, S. (2020). Learning to teach through mathematical problem posing: Theoretical considerations, methodology, and directions for future research. *International Journal of Educational Research*, *102*, 101391. https://doi.org/10.1016/j.ijer.2019.01.001

Christenson, S. L., Reschly, A. L., & Wylie, C. (Eds.). (2012). *Handbook of Research on Student Engagement*. Springer US. https://doi.org/10.1007/978-1-4614-2018-7

Christidamayani, A. P., & Kristanto, Y. D. (2020). The Effects of Problem Posing Learning Model on Students' Learning Achievement and Motivation. *Indonesian Journal on Learning and Advanced Education (IJOLAE)*, *2*(2), 100–108. https://doi.org/10.23917/ijolae.v2i2.9981

Cordova, D. I., & Lepper, M. R. (1996). Intrinsic motivation and the process of learning: Beneficial effects of contextualization, personalization, and choice. *Journal of Educational Psychology*, *88*(4), 715–730. https://doi.org/10.1037/0022-0663.88.4.715

Corpus, J. H., McClintic-Gilbert, M. S., & Hayenga, A. O. (2009). Within-year changes in children's intrinsic and extrinsic motivational orientations: Contextual predictors and academic outcomes. *Contemporary Educational Psychology*, *34*(2), 154–166. https://doi.org/10.1016/j.cedpsych.2009.01.001

Csapó, B. (2000). A tantárgyakkal kapcsolatos attitűdök összefüggései. *MAGYAR PEDAGÓGIA*, *100*(3).

Csíkos, C. (2010). Problémaalapú tanulás és matematikai nevelés. *Iskolakultúra*, *12*, 52–60. https://doi.org/10.25656/01:7122

Csíkos, C., Pásztor, A., Rausch, A., & Szitányi, J. (2020). A matematikai nevelés kutatásának aktuális irányzatai Recent Trends of Research on Mathematics Education. *Magyar Tudomány, 181*(2020), 24-33. https://doi.org/10.1556/2065.181.2020.1.3

Csordás, M., Konfár, L., Kothencz, J., Kozmáné, J. Á., Pintér, K., & Vincze, I. (2007). *Sokszínű Matematika 6. Osztály*. Mozaik Kiadó.

Deci, E. L., & Ryan, R. M. (2000). The „what" and „why" of goal pursuits: Human needs and the self-determination of behavior.

Psychological Inquiry, *11*, 227–268. https://doi.org/10.1207/S15327965PLI1104_01

Dewey, J. (1910). *How We Think*. D.C. Heath.

Dewey, J. (1916). *Democracy and Education: An Introduction to the Philosophy of Education*. Macmillan.

Dickman, B. (2014). Problem Posing with the Multiplication Table. *Journal of Mathematics Education at Teachers College*, *5*(1). https://doi.org/10.7916/JMETC.V5I1.643

Dochy, F., Segers, M., Van Den Bossche, P., & Gijbels, D. (2003). Effects of problem-based learning: A meta-analysis. *Learning and Instruction*, *13*(5), https://doi.org/10.1016/S0959-4752(02)00025-7

Dolmans, D. H. J. M., & Schmidt, H. G. (2006). What Do We Know About Cognitive and Motivational Effects of Small Group Tutorials in Problem-Based Learning? *Advances in Health Sciences Education*, *11*(4), 321–336. https://doi.org/10.1007/s10459-006-9012-8

Duch, B. J. (1996). Problem-Based Learning in Physics: The Power of Students Teaching Students. *Journal of College Science Teaching*, *15*(5), 326–329.

Duncker, K. (1945). On problem-solving. (L. S. Lees, Ford.). *Psychological Monographs*, *58*(5), i–113. https://doi.org/10.1037/h0093599

Ellerton, N. F. (2013). Engaging pre-service middle-school teacher-education students in mathematical problem posing: Development of an active learning framework. *Educational Studies in Mathematics*, *83*(1), 87–101. https://doi.org/10.1007/s10649-012-9449-z

English, L. D. (2020). Teaching and learning through mathematical problem posing: Commentary. *International Journal of Educational Research*, *102*, 101451. https://doi.org/10.1016/j.ijer.2019.06.014

Ennis, R. (2011). Critical Thinking: Reflection and Perspective Part I. *Inquiry: Critical Thinking Across the Disciplines*, *26*(1), 4–18. https://doi.org/10.5840/inquiryctnews20112613

Facione, P. A. (1990a). *Critical Thinking: A Statement of Expert Consensus for Purposes of Educational Assessment and Instruction. Research Findings and Recommendations*.

Facione, P. A. (1990b). *The California Critical Thinking Skills Test—College Level. Technical Report #1. Experimental Validation and Content Validity*. California Academic Press.

Fahim, M., & Pezeshki, M. (2012). Manipulating Critical Thinking Skills in Test Taking. *International Journal of Education*, *4*(1), 153-160. https://doi.org/10.5296/ije.v4i1.1169

Flack, C. B., Walker, D. L., Bickerstaff, A., Earle, H., & Margetts, C. (2020). *Educator perspectives on the impact of COVID-19 on teaching and learning in Australia and New Zealand*.

Francisco, J. M. (2005). Students' reflections on their learning experiences: Lessons from a longitudinal study on the development of mathematical ideas and reasoning. *The Journal of Mathematical Behavior*, *24*(1), 51–71. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2004.12.005

Franke, M., Carpenter, T., & Battey, D. (2008). Content Matters: Algebraic Reasoning in Teacher Professional Development. In J. Kaput, D. Carraher, & M. Blanton (Eds.), *Algebra in the Early Grades (pp. 333-359)*. Routledge.

Fredricks, J. A., Blumenfeld, P. C., & Paris, A. H. (2004). School Engagement: Potential of the Concept, State of the Evidence. *Review of Educational Research*, *74*(1), 59–109. https://doi.org/10.3102/00346543074001059

Gaskó K., Erzsébet H., Orsolya K., István L., István N., & Judit P. F. (2006). *Hatékony tanulás*. Bölcsész Konzorcium.

Hadamard, J. (1945). *The psychology of invention in the mathematical field*. Princeton University Press.

Halmos, P. R. (1980). The Heart of Mathematics. *The American Mathematical Monthly*, *87*(7), 519–524. https://doi.org/10.1080/00029890.1980.11995081

Hannula, M. S. (2019). Young learners' mathematics-related affect: A commentary on concepts, methods, and developmental trends.

Educational Studies in Mathematics, *100*(3), 309–316. https://doi.org/10.1007/s10649-018-9865-9

Hannula, M. S. (2020). Affect in Mathematics Education. In S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 32–36). Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-030-15789-0_174

Hattie, J. (2005). The paradox of reducing class size and improving learning outcomes. *International Journal of Educational Research*, *43*(6), 387–425. https://doi.org/10.1016/j.ijer.2006.07.002

Hattie, J. (2008). *Visible Learninglearning: A synthesis of over 800 meta-analyses relating to achievement*. Routledge. https://doi.org/10.4324/9780203887332

Herendiné-Kónya, E., & Földesi, K. (2016). On observation of problem solving in a Swedish and a Hungarian 5th year class. In T. In: Fritzlar, D. Aßmus , K. Bräuning, A. Kuzle, & B. Rott (Eds.) *Problem solving in mathematics education. Proceedings of the 2015 joint conference of ProMath and the GDM working group on problem solving.* (pp. 123-136). WTM.

Hesterberg L. J. (2005). *Evaluation of a problem-based learning practice course: Do self-efficacy, critical thinking, and assessment skills improve? - ProQuest*. University of Kentucky.

Hmelo-Silver, C. E. (2004). Problem-Based Learning: What and How Do Students Learn? *Educational Psychology Review*, *16*(3), 235–266. https://doi.org/10.1023/B:EDPR.0000034022.16470.f3

Jalongo, M., & Saracho, O. N. (2016). *Writing for Publication*. Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-319-31650-5

Jonassen, D. H. (2007). What Makes Scientific Problems Difficult? In D. H. Jonassen (Ed.), *Learning to Solve Complex Scientific Problems* (pp. 3–24). Routledge.

Jonassen, D. H., & Hung, W. (2012). Problem-Based Learning. In N. M. Seel (Ed.), *Encyclopedia of the Sciences of Learning* (pp. 2687–2690). Springer US. https://doi.org/10.1007/978-1-4419-1428-6_210

Kaput, J. J. (1999). Teaching and Learning a New Algebra. In E. Fennema, & T. Romberg (Eds.), *Mathematics classrooms that promote understanding* (pp. 133-155). Erlbaum.

Kaput, J. J. (2008). What Is Algebra? What Is Algebraic Reasoning? In J. Kaput, D. Carraher, & M. Blanton (Eds.), *Algebra in the Early Grades (pp. 5-17)*. Routledge.

Karim, K., & Normaya, N. (2015). Kemampuan Berpikir Kritis Siswa dalam Pembelajaran dalam Pembelajaran Matematika dengan Menggunakan Model Jucama di Sekolah Menengah Pertama. *EDU-MAT: Jurnal Pendidikan Matematika*, *3*(1), 92-104. https://doi.org/10.20527/edumat.v3i1.634

Kelemen, L. (1988). *Pedagógiai pszichológia.* Tankönyvkiadó

Koichu, B. (2020). Problem posing in the context of teaching for advanced problem solving. *International Journal of Educational Research*, *102*, 101428. https://doi.org/10.1016/j.ijer.2019.05.001

Kónya, E., & Kovács, Z. (2021). Management of Problem Solving in a Classroom Context. *Center for Educational Policy Studies Journal*. https://doi.org/10.26529/cepsj.895

Koshy, V. (2005). Action Research for Improving Practice: A Practical Guide. Sage Publications Company.

Kovács, Z., Báró, E., Lócska, O., & Kónya, E. (2023). Incorporating Problem-Posing into Sixth-Grade Mathematics Classes. *Education Sciences*, *13*(2). https://doi.org/10.3390/educsci13020151

Lappints, Á., Kozma, B., & Dr Fehér, I. (2002). *Tanuláspedagógia: A tanulás tanításának alapjai*. Comenius Bt.

Lénárd, F. (1984). *A problémamegoldó gondolkodás*. Akadémiai Kiadó.

Liem, G. A. D., & Martin, A. J. (2012). The Motivation and Engagement Scale: Theoretical Framework, Psychometric Properties, and Applied Yields. *Australian Psychologist*, *47*(1), 3–13. https://doi.org/10.1111/j.1742-9544.2011.00049.x

Liu, P.-H. (2003). *The relationship of a problem-based calculus course and sdtudents' views of mathemtical thinking*. Oregon State University.

Liu, Y., & Pásztor, A. (2022). Effects of problem-based learning instructional intervention on critical thinking in higher education:

A meta-analysis. *Thinking Skills and Creativity*, *45*, 101069. https://doi.org/10.1016/j.tsc.2022.101069

Lócska, O. D., & Kovács, Z. (2022). *The „Sense-Making-Algebra" project for Hungarian seventh graders*. Twelfth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME12), Feb 2022, Bozen-Bolzano, Italy. ⟨hal-03745145⟩

Major, C. H. (2002). Problem-Based Learning in General Education at Samford University: A Case Study of Changing Faculty Culture Through Targeted Improvement Efforts. *The Journal of General Education*, *51*(4), 235–256. https://doi.org/10.1353/jge.2003.0015

Mandeville, D., & Stoner, M. (2015). Research and Teaching: Assessing the Effect of Problem-Based Learning on Undergraduate Student Learning in Biomechanics. *Journal of College Science Teaching*, *045*(01). https://doi.org/10.2505/4/jcst15_045_01_66

Martyn, J., Terwijn, R., Kek, M. Y. C. A., & Huijser, H. (2014). Exploring the relationships between teaching, approaches to learning and critical thinking in a problem-based learning foundation nursing course. *Nurse Education Today*, *34*(5), 829–835. https://doi.org/10.1016/j.nedt.2013.04.023

Mason, J. (1988). *Expressing generality*. Centre for Mathematics Education, The Open University.

Mason, J., Burton, L., & Stacey, K. (2010). *Thinking Mathematically*. Pearson.

Md.Yunus, A. S., & Wan Ali, W. Z. (2008). Metacognition and Motivation in Mathematical Problem Solving. *The International Journal of Learning: Annual Review*, *15*(3), 121–132. https://doi.org/10.18848/1447-9494/CGP/v15i03/45692

Moon, J. (2007). *Critical Thinking*. Routledge. https://doi.org/10.4324/9780203944882

Muehlenkamp, J. J., Weiss, N., & Hansen, M. (2015). Problem-based learning for introductory psychology: Preliminary supporting evidence. *Scholarship of Teaching and Learning in Psychology*, *1*(2), 125–136. https://doi.org/10.1037/stl0000027

Mulyanto, H., Gunarhadi, G., & Indriayu, M. (2018). The Effect of Problem Based Learning Model on Student Mathematics Learning

Outcomes Viewed from Critical Thinking Skills. *International Journal of Educational Research Review*, *3*(2), 37–45. https://doi.org/10.24331/ijere.408454

Neuhaus, K. (2001). *Die Rolle des Kreativitätsproblems in der Mathematikdidaktik. 1. Aufl.* Köster.

OECD. (2016). *PISA 2015 Results (Volume I): Excellence and Equity in Education*. OECD. https://doi.org/10.1787/9789264266490-en

Papadopoulos, I., Patsiala, N., Baumanns, L., & Rott, B. (2021). Multiple Approaches to Problem Posing: Theoretical Considerations Regarding its Definition, Conceptualisation, and Implementation. *Center for Educational Policy Studies Journal*. https://doi.org/10.26529/cepsj.878

Paul, R., & Elder, L. (2002). *Critical Thinking: Tools for Taking Charge of Your Professional and Personal Life*. Financial Times Prentice Hall

Pehkonen, E. (1997). *Use of open-ended problems in mathematics classroom*. Dept. of Teacher Education, University of Helsinki.

Pintrich, P. R. (2003). Motivation and classroom learning. In I.B. Weiner (Ed.) *Handbook of psychology: Educational psychology, Vol. 7.* (pp. 103–122). John Wiley & Sons, Inc. https://doi.org/10.1002/0471264385.wei0706

Pintrich, P. R., & Schunk, D. H. (2002). *Motivation in Education: Theory, Research, and Applications*. Upper Saddle River.

Poincare, H. (1914). *Science and Method*. South Bend, Ind.: Dover Publications.

Polya, G. (1973). *How to Solve It*. Princeton University Press.

Reiss, K., & Renkl, A. (2002). Learning to prove: The idea of heuristic examples. *Zentralblatt Für Didaktik Der Mathematik*, *34*(1), 29–35. https://doi.org/10.1007/BF02655690

Rivera, F. (2013). *Teaching and Learning Patterns in School Mathematics: Psychological and Pedagogical Considerations*. Springer Netherlands. https://doi.org/10.1007/978-94-007-2712-0

Rocard M., Csermely P., Jorde D., Lenzen D., Walberg-Henriksson H., & Hemmo V. (2010). Természettudományos nevelés ma: Megújult pedagógia Európa jövőjéért : vezetői összefoglaló. *Iskolakultúra*, *20*(12), 13-30.

Rott, B., Specht, B., & Knipping, C. (2021). A descriptive phase model of problem-solving processes. *ZDM – Mathematics Education*, *53*(4), 737–752. https://doi.org/10.1007/s11858-021-01244-3

Ryan, R. M., Stiller, J. D., & Lynch, J. H. (1994). Representations of Relationships to Teachers, Parents, and Friends as Predictors of Academic Motivation and Self-Esteem. *The Journal of Early Adolescence*, *14*(2), 226–249. https://doi.org/10.1177/027243169401400207

Sanderson, H. L. (2008). *Comparison of problem based learning and traditional lecture instruction on critical thinking, knowledge, and application of strength and conditioning*. The University of North Carolina.

Santos-Trigo, M. (2020). Problem-Solving in Mathematics Education. In S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 686–693). Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-030-15789-0_129

Sari, L. Y., Adnan, M. F., & Hadiyanto, H. (2019). Enhancing Students' Active Involvement, Motivation and Learning Outcomes on Mathematical Problem Using Problem-Based Learning. *International Journal of Educational Dynamics*, *1*(1), 309–316. https://doi.org/10.24036/ijeds.v1i1.70

Schoenfeld, A. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics. In D. A. Grouws (Eds.), *NCTM Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 334–370). Macmillan.

Schoenfeld, A. H. (1979). Explicit Heuristic Training as a Variable in Problem-Solving Performance. *Journal for Research in Mathematics Education*, *10*(3), 173-187. https://doi.org/10.2307/748805

Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical Problem Solving*. Academic Press.

Schoenfeld, A. H. (2016). Learning to Think Mathematically: Problem Solving, Metacognition, and Sense Making in Mathematics

(Reprint). *Journal of Education*, *196*(2), 1–38. https://doi.org/10.1177/002205741619600202
Schoenfeld, A. H., & Arcavi, A. (1988). On the Meaning of Variable. *The Mathematics Teacher*, *81*(6), 420–427. https://doi.org/10.5951/MT.81.6.0420
Seel, N. M. (2012). Learning Theory. In *Encyclopedia of the Sciences of Learning* (pp. 1983–1983). Springer US. https://doi.org/10.1007/978-1-4419-1428-6_4726
Sheldon, K. M., & Filak, V. (2008). Manipulating autonomy, competence, and relatedness support in a game-learning context: New evidence that all three needs matter. *British Journal of Social Psychology*, *47*(2), 267–283. https://doi.org/10.1348/014466607X238797
Silver, E. (1994). On Mathematical Problem Posing. *for the learning of mathematics, 14,* 19-28.
Silverman, F. L., Winograd, K., & Strohauer, D. (1992). Student-Generated Story Problems. *Arithmetic Teacher*, *39*(8), 6–12.
Singh, P., Teoh, S. H., Cheong, T. H., Md Rasid, N. S., Kor, L. K., & Md Nasir, N. A. (2018). The Use of Problem-Solving Heuristics Approach in Enhancing STEM Students Development of Mathematical Thinking. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, *13*(3). https://doi.org/10.12973/iejme/3921
Skinner, E. A. (2016). Engagement and Disaffection as Central to Processes of Motivational Resilience and Development. In *Handbook of Motivation at School*. Routledge.
Stokes, S., Mackinnon, M., & Whitehill, T. (1997). *Students' experiences of PBL: Journal and questionnaire analysis*.
Stoyanova, E. (1998). Problem posing in mathematics classrooms. *Research in mathematics education: A contemporary perspective*, 164–185.
Stoyanova, E., & Ellerton, N. F. (1996). A framework for research into students' problem posing in school mathematics. *Technology in mathematics education*, *4*(7), 518–525.
Sungur, S., & Tekkaya, C. (2006). Effects of Problem-Based Learning and Traditional Instruction on Self-Regulated Learning. *The Journal of*

Educational Research, *99*, 307–317. https://doi.org/10.3200/JOER.99.5.307-320

Suriakumaran, N., Duchhardt, C., & Vollstedt, M. (2017). *Personal meaning and motivation when learning mathematics: A theoretical approach*. CERME 10. https://hal.science/hal-01935808

Torp, L., & Sage, S. (2002). *Problems as Possibilities: Problem-Based Learning for K-16 Education. 2nd Edition*. Association for Supervision and Curriculum Development, P.

Trilling, B., & Fadel, C. (2009). *21st Century Skills: Learning for Life in Our Times*. John Wiley & Sons.

Ulger, K. (2018). The Effect of Problem-Based Learning on the Creative Thinking and Critical Thinking Disposition of Students in Visual Arts Education. *Interdisciplinary Journal of Problem-Based Learning*, *12*(1). https://doi.org/10.7771/1541-5015.1649

Usiskin, Z. (1988). Conceptions of School Algebra and Uses of Variables. In A. Coxford & A. Shuite (Eds.), *The ideas of algebra, K-12. 1988 yearbook* (pp. 8–19). National Council of Teachers of Mathematics.

Vallerand, R. J., & Blssonnette, R. (1992). Intrinsic, Extrinsic, and Amotivational Styles as Predictors of Behavior: A Prospective Study. *Journal of Personality*, *60*(3), 599–620. https://doi.org/10.1111/j.1467-6494.1992.tb00922.x

Vásárhelyi É., Hermann A., Herber H. J., & Parisot K. J. (1996). Tanítható-e a problémamegoldás? *Iskolakultúra*, *6*(10), 54–61.

Voica, C., Singer, F. M., & Stan, E. (2020). How Are Motivation and Self-Efficacy Interacting in Problem-Solving and Problem-Posing? *Educational Studies in Mathematics*, *105*(3), 487–517. https://doi.org/10.1007/s10649-020-10005-0

Walkington, C., Petrosino, A., & Sherman, M. (2013). Supporting Algebraic Reasoning through Personalized Story Scenarios: How Situational Understanding Mediates Performance. *Mathematical Thinking and Learning*, *15*(2), 89–120. https://doi.org/10.1080/10986065.2013.770717

Walter, J. G., & Hart, J. (2009). Understanding the complexities of student motivations in mathematics learning. *The Journal of Mathematical*

Behavior, *28*(2–3), 162–170. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2009.07.001

Weiner, B. (1992). *Human Motivation: Metaphors, Theories, and Research*. SAGE Publications.

Wijnia, L., Loyens, S. M. M., & Derous, E. (2011). Investigating effects of problem-based versus lecture-based learning environments on student motivation. *Contemporary Educational Psychology*, *36*(2), 101–113. https://doi.org/10.1016/j.cedpsych.2010.11.003

Woods, D. R. (1996). Problem-based learning for large classes in chemical engineering. *New Directions for Teaching and Learning*, *1996*(68), 91–99. https://doi.org/10.1002/tl.37219966813

Ábrajegyzék

Összefoglaló

A tanulók csökkenő érdeklődése a matematika és a természettudományok iránt vezetett minket a problémaalapú tanítási módszerek felé, amelyet a matematika oktatásban olyan környezetként értelmezünk, amelyben a tanulónak lehetősége van problémahelyzetek elemzésére (problémamegoldás, problémaalkotás), saját és társaik gondolatmenetéhez való kritikus megnyilvánulásra, valamint magyarázásra, indoklásra és érvelésre (Csíkos, 2010; Kónya & Kovács, 2021). Célunk volt a problémaalapú módszer következetes alkalmazása: problémaalapú megközelítést alkalmazó lecketervek megtervezése, ezen órák megtartása, dokumentálása, majd elemzése. A problémaalapú megközelítést alkalmazó tanulást és tanítást több szempontból vizsgáltuk, elemzéseink kiterjednek a motivációra, a bevonódásra, a tanulói gondolkodástípusokra és a tanulási eredményekre. A felsoroltak tanulmányozása lehetővé tette a módszer mélyebb megértését és ezáltal a kutatási terület szakirodalmának bővítését.

Ezeket az elveket és célokat szem előtt tartva fogalmaztuk meg a kutatási kérdéseket:

K1. Mely motivációs források jelenhetnek meg egy problémaalapú tanórán?

Mivel kiindulópontunk a diákok hanyatló motivációja volt, ezért elsősorban a problémaalapú tanulás és motiváció kapcsolatát vizsgáltuk egy tanóra kapcsán az óra megfigyelésével. A második kérdés szintén ezt a kapcsolatot vizsgálja, specifikusabb körülmények között, egy tanegység feldolgozásával, nagyobb hangsúlyt fektetve a problémaalkotásra mint problémaalapú tanulási elemre. Ez esetben a perszonális tényezők (egy problémába beleszőtt személyes jegyek) hatását vizsgáltuk a motivációra nézve.

K2. Hogyan hatnak a problémaalkotás során potenciálisan megjelenő perszonális tényezők a motivációra?

Ugyanakkor a szakirodalomból a problémaalapú tanulás kritikus gondolkodásra gyakorolt pozitív hatását is ismerjük (Martyn et al., 2014), ezért ezt a kapcsolatot vizsgáltuk a következő kérdéssel, egy tanóra megfigyelése által.

K3. A problémaalapú megközelítés során alkalmazott páros munkaforma hogyan támogathatja a kritikus gondolkodás megjelenését?

A **K3** kutatási kérdésre választ adó tanulmány során érdekes jelenségre lettünk figyelmesek, amely a 6-7. osztályos diákok aritmetikai és algebrai gondolkodásával kapcsolatos. Mivel ebben a korban a diákok a két gondolkodásmód közötti átmeneti szakaszban vannak, fontosnak találtuk megvizsgálni ezt a jelenséget. Ehhez kapcsolódik a következő kutatási kérdés:

K4. Fejlődött-e a tanulók algebrai gondolkodásmódja a problémaalapú megközelítés alkalmazása során?

Az előző kérdések a problémaalapú tanulás és motiváció, kritikus gondolkodás, algebrai gondolkodás kapcsolatát vizsgálják. Ezen kapcsolatok ismeretében a problémaalapú tanulás tanulási eredményekre kifejtett hatására is kíváncsiak voltunk.

K5. Milyen hatással van a problémaalapú megközelítés a tanulási folyamat kimenetére?

Végül pedig a rövid távú tanulmányok (egy óra vagy tanegység, fejezet) elemzése után a tanulók bevonódását, motivációját elemeztük egy négyéves ciklust tekintve. Ebben a tanulmányban vizsgáltuk, hogy a rövidtávú tevékenységre vonatkozó motivációból hogyan lett hosszabb távú elkötelezettség.

K6. Milyen hatással van a felső tagozatos tanulmányi szakaszban folyamatosan alkalmazott problémaalapú megközelítés a tanulók bevonódására?

A **K1-K3** kérdések a módszer egyes jellemzőire, előforduló jelenségekre, míg a **K4-K6** kérdések a beavatkozás eredményességére vonatkoznak.

Kutatási kérdéseink megválaszolására terveztünk egy hosszú távú akciókutatást, mely során több forrásból gyűjtöttünk adatokat, s ezeket különböző szempontok szerint elemeztük. A kutatásban egy erdélyi általános iskola 5-8. osztályos diákjai vettek részt, összesen 171 diák, hat osztály, amelyek közül két csoportot longitudinálisan, négy éven keresztül követtünk nyomon.

A kutatási eredmények röviden összefoglalva:

K1: A kérdést egy problémaalapú megközelítést alkalmazó tanóra egy problémamegoldási tevékenységének elemzése révén válaszoltuk meg két csoport óráinak videófelvételei, illetve tanulók visszajelzései alapján. A kutatás megerősíti a szakirodalomból ismert eredményeket. A motivációs források természetes módon épülhetnek be a problémamegoldási tevékenységbe, és ezek valóban motivációs hatással bírnak, amelyet a tanulói megszólalások elemzésével mutattunk ki.

K2: Erre a kérdésre két ciklusú akciókutatás segítségével válaszoltunk, amelyben a problémaalkotásra helyeztük a hangsúlyt. A szakirodalomból ismerjük a kontextusperszonalizáció motiváló hatását. Ez a jelenség kísérletünk során valóban megjelent. Az akciókutatás első ciklusában a kontextusperszonalizáció motiváló hatását kimutattuk. A második ciklusban azt tapasztaltuk, hogy a társas kapcsolatok megerősítésével tovább erősödött a tanulók motivációja a problémaalkotás során. Ezzel egy újabb motivációs forrás megjelenésére mutattunk rá, a perszonalizáció lehetőségét magában hordozó tanulási környezetre, amely kutatásunk által a problémaalkotási tevékenységhez kapcsolható.

K3: A kérdést mintakereséses feladatok feldolgozása által egy problémaalapú tanóra keretén belül szervezett pármunka elemzése alapján válaszoljuk meg. Ez tartalmazza a pármunkában rögzített párbeszédeket és a tanulói véleményeket. Arra a következtetésre jutottunk, hogy a problémaalapú megközelítés pármunkában megfelelő lehetőséget adott a kritikus megnyilvánulásokra, a társak gondolatmenetének reflektálására. Azonban a kritikus gondolkodás bizonyos körülmények között nem működött megfelelően. Például azon párokban, ahol a tanulók készségszintje lényegesen eltért, a kritikus megnyilvánulásokat blokkolta ez a különbség.

K4: Mintakeresésre vonatkozó osztálymegbeszélések és problémaalkotási feladatok elemzésével adtunk választ a kérdésre. A problémaalkotási feladat Silver (1994) szerint ablak, amelyen keresztül a tanuló gondolkodásába tekinthetünk be. Jelen esetben az alkotott problémákon keresztül a tanulók általánosító képességét vizsgáltuk. A problémaalkotási tevékenység eredménye visszajelzés volt a tanulók algebrai gondolkodásának szintjéről, amelynek fejlődését megállapítottuk.

K5: A kérdésre egyrészt egy kvantitatív vizsgálat válaszol, ami egy előteszt és egy utóteszt eredményeinek összehasonlításából állt. Majd rátértünk a megoldások kvalitatív elemzésére is, valamint a tanulók megélt kompetenciájának vizsgálatára. Kijelenthetjük, hogy minden képességcsoportban fejlődés mutatkozott, de legnagyobb kísérleti hatást a gyenge és közepes matematika képességű csoportokban tapasztaltunk. A tanulók megélt kompetenciája a személy oldaláról is megerősíti ezt a hatást.

K6: A kérdést a négyéves problémaalapú beavatkozás lezárása után kitöltött önbeszámolók elemzésével válaszoltuk meg. A beérkezett 43 válaszból 37-ben történt utalás problémaalapú megközelítést alkalmazó órára mint legkedvesebb matematika órához kapcsoló emlékre. Vizsgálataink arra mutattak rá, hogy a négy éven át következetesen végzett problémaalapú beavatkozások után a diákoknak a felidézett kedvenc tevékenységei elsősorban érzelmi bevonódásra utaltak. Ugyanakkor felfedeztük a szakirodalomból ismert motivációs forrásokat a diákok beszámolóiban, ami a **K1** kutatási kérdésben kapott eredményt is megerősíti. Azzal, hogy a problémaalapú órákon jelen vannak a motiváció forrásai, megerősítést nyert az a feltételezésünk, hogy a tananyag problémalapú feldolgozási módja motiváló hatású a tanulók számára.

Összességében elmondhatjuk, hogy a problémaalapú tanulás alkalmas a diákok motivációjának növelésére, a matematikával kapcsolatos attitűd jó irányba formálására, és mindezek mellett a tanulási folyamat kimeneti eredménye is pozitív képet mutatott.

Saját eredmények

A kutatás során nyert következő eredményeket fogalmazhatjuk meg:

1. A problémaalapú tanulás definíciójának kibővítése: matematikai problémahelyzetek elemzése alatt nem csak problémamegoldást értünk, hanem annak átható vizsgálatát és problémaalkotást is.
2. A kritikus gondolkodás és problémaalapú tanulás szakirodalmi értelmezéseinek összekapcsolása, a kapcsolat értelmezése.
3. A problémaalapú tanulás motivációs hatásának vizsgálata az időtartam dilemmája szempontjából: a keresztmetszeti vizsgálatokban megállapítottuk a problémaalapú megközelítést alkalmazó beavatkozások motiváló hatását. A longitudinális kutatásban pedig arra a következtetésre jutottunk, hogy a problémaalapú tanulás alkalmazása hosszú távon is motiváló hatású tud lenni. Ezt rendszeres és

következetesen alkalmazott problémaalapú beavatkozásokkal értük el, a módszert nem terjesztettük ki a tanmenet egészére.

4. A szakirodalomban általánosan leírt motivációs forrásokat kimutattuk speciálisan a problémaalapú matematikatanulási környezetben.
5. A szakirodalomból eddig ismert motivációs források kibővítése: perszonalizáció lehetőségét magában hordozó tanulási környezet egy új motivációs forrás, amely kutatásunk által a problémaalkotási tevékenységhez kapcsolható.
6. A felső tagozatos diákok tanulási eredményeinek vizsgálata olyan problémaalapú beavatkozások során, amelyekben heurisztikus stratégiákat célzottan alkalmaztunk. A statisztikai elemzésekben szignifikáns fejlődés mutatkozott, és a tanulók megélt kompetenciája a személy oldaláról is megerősíti ezt a hatást.

Summary

Students' declining interest in mathematics and science has led us towards problem-based teaching methods. Csíkos (2010) defines problem-based learning in mathematics as requiring students to analyze mathematical problem situations, critically approach their own and their peers' minds, and they must learn to explain and justify their reasoning (see also Kónya & Kovács, 2021). We aimed to apply this method consistently by designing lesson plans in which we used a problem-based approach and by delivering these lessons and documenting them. We analyzed this method from several perspectives: motivation, engagement, critical thinking, algebraic thinking and learning outcomes. Examining these aspects has helped us gain a deeper understanding of the problem-based method and thus broaden the literature in this research area. With these principles and objectives in mind, we formulated the research questions:

Q1. Which motivational sources can be present in a problem-based learning lesson?

Since our starting point was students' declining motivation, we focused on the relationship between problem-based learning and motivation by observing a lesson. The second question also investigates this relationship in more specific contexts by working through a lesson unit, with a greater emphasis on problem-posing. In this case, the impact of personalization (personal traits built into a problem) on motivation was examined.

Q2. How does the personalization involved in the problem-posing process affect motivation?

The positive impact of problem-based learning on critical thinking is also known from the literature, so we investigated this relationship as well.

Q3. How can pair work in a problem-based approach support critical thinking?

During the analysis of question **Q3**, we observed an interesting phenomenon related to the arithmetic and algebraic thinking of students in grades 6-7. They are in transition from arithmetic thinking to algebraic thinking. The following research question is related to this phenomenon.

Q4. Did the students' algebraic thinking develop while using a problem-based approach?

The previous questions examine the relationship between problem-based learning and motivation, critical thinking and algebraic thinking. Given these relationships, we were also interested in the impact of problem-based learning on learning outcomes.

Q5. What impact does the problem-based approach have on the learning outcomes?

Finally, we analyzed the engagement and motivation of learners over a four-year cycle. In this part of the thesis, we investigated how motivation identified in the short-term activities turned into longer-term engagement.

Q6. What impact does a consistently applied problem-based approach have on student engagement?

Questions **Q1-Q3** deal with some of the many characteristics of the method, while questions **Q4-Q6** deal with the effectiveness of the intervention.

To answer our research questions, we designed action research, collecting data from several sources and analyzing them according to different criteria. The research involved 171 lower secondary students from Transylvania, Romania. This represents a total of six classes, two of which were monitored longitudinally over four years.

A summary of the research findings:

Q1. This question was answered by analyzing a problem-solving activity during a problem-based lesson. This lesson was held in two classes, and the source of the data was the video recordings of two lessons and student feedback. The research confirms the results reported in the literature. Motivational resources can be naturally incorporated into problem-based activities, and they do have a motivational effect. This was demonstrated also by analyzing the students' feedback.

Q2. This question was answered by conducting a two-cycle action research with a focus on problem-posing. From the literature, we are familiar with the motivational effects of context personalization. This phenomenon indeed emerged during our experiment. In the first cycle of our action research, we demonstrated the motivational effect of context personalization. In the second cycle, we found that strengthening interpersonal relationships increased students' motivation. We thus pointed to the existence of another source of motivation, the learning environment with the potential for personalization, which is linked to problem-posing based on our research.

Q3. The question was answered by analyzing audio recordings made during pair work in a problem-based lesson and by students' opinions. We conclude that the problem-based approach in pair work provided adequate opportunities for critical expression and reflection. However, it did not work well in certain circumstances. For example, in pairs where the learners' skill levels differed significantly, critical expression was blocked by this difference.

Q4. We answered this question by analyzing class discussions, pattern recognition-based problem-solving and problem-posing activities. Problem-posing, according to Silver (1994), is a window into the learner's thinking. In our case, we investigated learners' ability to generalize through the problems they posed. The outcome of the problem-posing activity was feedback on the level of students' algebraic thinking, the development of which was noted.

Q5. This question was answered by a quantitative study comparing the results of a pre-test and a post-test. Afterward, we analyzed qualitatively the solutions and identified perceived competence reported by the learners. It can be concluded that there was an improvement in every group. The reported perceived competence also confirms this effect.

Q6. The question was answered by analyzing the students' self-reports completed after having finished the four-year problem-based intervention. Of the 43 responses received, 37 students referred to a problem-based lesson as their favorite memory connected to a mathematics lesson. Our findings indicated that, after four years of consistent problem-based interventions, students recalled favorite activities primarily connected to emotional engagement. At the same time, we identified sources of motivation (Walter & Hart, 2009) in students' reports, which confirms the results obtained in research question **Q1**. Therefore, the problem-based approach uses various methods to engage students, including active, collaborative, and student-centered methods. Our expectation that student engagement would be more significant has been confirmed.

Overall, we can say that problem-based learning may increase students' motivation, shape their attitudes towards mathematics, and nevertheless have a positive impact on students' academic achievement.

Results of the research

1. We have expanded the definition of problem-based learning: besides problem-solving, we added problem-posing from the aspect of analyzing mathematical problem situations.
2. We have linked critical thinking and problem-based learning in the literature, interpreting the relationship.
3. The impact of problem-based learning on motivation is answered in terms of the dilemma of duration: in cross-sectional studies, we identified the motivational impact of the problem-based approach. In the longitudinal research, we concluded that if the use of problem-based learning does not imply the complete modification of the curriculum, but regular and consistent interventions, it can be motivating too.
4. Based on this research the general sources of motivation known from the literature have been identified specifically in problem-based learning environments.
5. We have expanded the sources of motivation known from the literature: a learning environment with the possibility of personalization is a new source of motivation. This is linked to problem-posing in our study.
6. We have evaluated the learning outcomes of lower secondary students after problem-based interventions combined with purposeful use of heuristic strategies: statistical analyses showed significant improvement, and the identified perceived competence from students' reflections confirms this effect.

Mellékletek

1. melléklet: Kutatások táblázata

Téma	Altéma (ha van)	Videó	Visszajelzés	Elő-utóteszt	Dátum	Osztály[4]	Tantervi kapcsolat
Visszafele gondolkodás		Van	Előzetes 3 kijelentés + kilépő kártya	Nincs	2018. nov	**5A, 5B**	Visszafele gondolkodás, szöveges feladatok
Mintakeresés		Van	Előzetes 3 kijelentés + kilépő kártya	Van	2018. nov	7A, 7C	Függvény-fogalom
ALF - Racionális számok halmaza	Racionális számok összeadása és kivonása	Nincs	Van (kérdőív)	Nincs	2020. május	**6A, 6B**	Racionális számok
	Racionális számok szorzása és osztása	Nincs	Van (kérdőív)	Nincs	2020. május	**6A, 6B**	Racionális számok
	Egyenletek és szöveges feladatok	Nincs	Van (kérdőív)	Nincs	2020. május	**6A, 6B**	Racionális számok

[4] a félkövér betűtípussal jelzett osztályok a longitudinálisan követett osztályok

Pitagorasz tétele		Van	Nincs	Nincs	2020.okt.	**7A, 7B**	Pitagorasz tétele
Mintakeresés		Van	Kilépő kártya	Nincs	2021 nov.	**7A, 7B**	Függvény-fogalom
Guszti, a manó		Nincs	Nincs	Nincs	2021. dec.	**7A, 7B**	Külső pontból húzott érintő
Derékszögű koordináta rendszer		Van	Kilépő kártya	Nincs	2021	**7A,7B**	Derékszögű koordináta rendszer
Egyenletek és egyenletekkel megoldható feladatok	Bevezető	Van	Interjú	Van	2021. május	**7A,7B**	Egyenletek
	Mintakeresés, pármunka	Van	Interjú	Van	2021. május	**7A,7B**	Egyenletek
	Szöveges feladat megoldása tervszerű próbálgatással, majd egyenlettel	Van	Interjú	Van	2021. május	**7A,7B**	Egyenletekkel megoldható feladatok
	Villámkérdés: egyenlet kiegészítése	Van	Interjú	Van	2021. május	**7A,7B**	Egyenletekkel megoldható feladatok

ALF- Arányok és aránypárok	Arányos osztás	Van	Kérdőív	Nincs	2020. nov	6A, 6B	Arányok és aránypárok
	Egyenesen és fordítottan arányos mennyiségek	Van	Kérdőív	Nincs	2020. nov	6A, 6B	Arányok és aránypárok
	Százalékalap	Van	Kérdőív	Nincs	2020. nov	6A, 6B	Arányok és aránypárok
ALF – Racionális számok halmaza	Racionális számok összeadása és kivonása	Nincs	Nincs	Nincs	2021. május	6A, 6B	Racionális számok
	Racionális számok szorzása és osztása	Nincs	Nincs	Nincs	2021. május	6A, 6B	Racionális számok
	Egyenletek és szöveges feladatok	Nincs	Nincs	Nincs	2021. május	6A, 6B	Racionális számok
Térmértan: felszín és térfogat tanegység	Kocka és téglatest	Van	Kilépő kártya	Van	2021. nov	**8A, 8B**	Felszín és térfogat
	Kocka és téglatest gyakorlatok	Van	Nincs	Van	2021. nov	**8A, 8B**	Felszín és térfogat
	Hasábok	Van	Nincs	Van	2021. nov	**8A, 8B**	Hasábok
	Videóra feladatalkotás	Van	Van	Van	2021. nov	**8A, 8B**	Hasábok
Pitagorasz tétele		Van	Nincs	Nincs	2021. okt	7A, 7B	Pitagorasz tétele
Mintakeresés		Nincs	Kilépő	Nincs	2021. nov	7A, 7B	Függvény-fogalom

2. melléklet: Attitűdvizsgálat problémaalkotás kapcsán

Név, osztály

1. Szerinted a matematika órán feladott matematika feladatokat ki találja ki? (Rövid válasz)
2. Úgy érzem én is tudok matematikai feladatot kitalálni.
   Likert-skála: 3 szint: Igen // Nem tudom eldönteni // Nem
3. Mit gondolsz, feladatot megoldani vagy kitalálni nehezebb? Miért? (Kifejtés)
4. Nehéz volt kitalálni saját feladatokat.
   Likert-skála: 3 szint: Igen // Nem tudom eldönteni // Nem
5. A saját feladat kitalálásához könnyen jött az ötletem.
   Likert-skála: 3 szint: Igen // Nem tudom eldönteni // Nem
6. Szerettem saját feladatot kitalálni a matematika órákhoz.
   Likert-skála: 3 szint: Igen // Nem tudom eldönteni // Nem
7. Meg voltam elégedve a kitalált feladataimmal.
   Likert-skála: 3 szint: Igen // Nem tudom eldönteni // Nem
8. Olyan feladatokat találtam ki, amelyek a való életben is előfordulhatnak.
   Likert-skála: 3 szint: Igen // Nem tudom eldönteni // Nem
9. Tetszett, amikor a házi feladat az osztálytársam feladata volt.
   Likert-skála: 3 szint: Igen // Nem tudom eldönteni // Nem
10. Jobban megértettem a tananyagot azáltal, hogy feladatot találtam ki hozzá.
    Likert-skála: 3 szint: Igen // Nem tudom eldönteni // Nem
11. Ki segített a feladatok kitalálásában? (feleletválasztás)
    senki
    osztálytárs
    szülő
    testvér
    barát
    más
12. Mielőtt beadtad a saját feladatodat, megkértél-e valakit, hogy oldja meg? (feleletválasztás)

senkit
osztálytársat
szülőt
testvért
barátot
mást

13. Több időt vett-e igénybe a feladat kitalálós házi, mint egy szokásos házi? (feleletválasztás)
igen, sokkal többet
igen, kicsivel többet
körülbelül ugyanannyit
nem, kicsivel kevesebbet
nem, sokkal kevesebbet

14. Melyik feladat tetszett a legjobban?
Válaszodat röviden indokold! (kifejtős)

15. Melyikhez volt a legkönnyebb feladatot kitalálni?
Válaszodat röviden indokold! (kifejtős)

16. Melyikhez volt a legnehezebb feladatot kitalálni?
Válaszodat röviden indokold! (kifejtős)

3. melléklet: Az átlagon aluli tanulmányi eredményekkel rendelkező diákok elő- és utótesztjeinek pontszámai

Tanuló	**Előteszt**							**Utóteszt**							**Differencia**
Ssz.	1a	1b	1c	1d	2	2T[5]	Össz	1a	1b	1c	1d	2	2T	Össz	
S5	4	4	0	0	1	alg.	9	0	4	0	3	4	alg.	11	**2**
S7	1	1	1	1	4	aritm.	8	1	4	2	1	2	alg.	10	**2**
S35	0	0	1	1	4	aritm.	6	1	1	4	3	4	aritm.	13	**7**
S36	4	1	1	1	4	aritm.	11	4	4	4	1	4	aritm.	17	**6**
S45	4	1	1	0	0	-	6	4	3	4	3	4	aritm.	18	**12**
S41	1	1	1	0	4	aritm.	7	4	1	1	1	4	aritm.	11	**4**
S46	4	4	4	1	0	-	13	4	4	4	4	4	aritm.	20	**7**
S43	1	1	4	0	4	aritm.	10	4	4	4	4	4	aritm.	20	**10**
S23	4	4	1	0	0	-	9	4	4	4	4	4	alg.	20	**11**
S47	4	1	4	2	4	aritm.	15	4	4	4	4	4	alg.	20	**5**
S48	1	1	1	1	1	aritm.	5	4	4	4	4	4	aritm.	20	**15**
S50	4	1	1	1	4	alg.	11	4	1	4	2	4	alg.	15	**4**
S49	4	3	4	0	4	aritm.	15	2	4	4	3	2	alg.	15	**0**
S53	4	4	4	4	4	aritm.	20	4	4	4	2	0	-	14	**-6**
S57	4	0	2	0	4	aritm.	10	3	1	1	1	4	alg.	10	**0**
S11	4	1	4	0	1	aritm.	10	4	4	3	4	4	alg.	19	**9**
S13	4	0	0	0	4	aritm.	8	4	4	4	4	4	alg.	20	**12**
S33	4	3	4	0	4	aritm.	15	1	4	4	4	4	aritm.	17	**2**
S58	4	1	3	1	1	aritm.	10	4	1	4	3	4	alg.	16	**6**

[5] A 2. feladat megoldásának típusa (algebrai, aritmetikai vagy más jellemző gondolkodásmód)

4. melléklet: Az átlagos tanulmányi eredményekkel rendelkező diákok elő- és utótesztjeinek pontszámai

Tanuló	**Előteszt**							**Utóteszt**							**Differencia**
	1a	1b	1c	1d	2	2T	Össz	1a	1b	1c	1d	2	2T	Össz	
S4	4	4	4	0	4	alg.	16	4	4	4	4	4	alg.	20	**4**
S1	4	4	4	0	0	-	12	4	4	4	4	4	aritm.	20	**8**
S3	4	2	1	0	4	aritm.	11	4	4	4	4	4	alg.	20	**9**
S10	4	4	4	0	4	aritm	16	4	4	4	4	4	alg.	20	**4**
S17	4	4	4	4	4	alg.	20	4	4	4	4	4	alg.	20	**0**
S21	4	1	1	1	0	-	7	4	4	4	4	4	alg.	20	**13**
S24	4	4	4	4	4	alg.	20	4	4	4	4	4	alg.	20	**0**
S6	4	4	2	2	4	alg.	16	4	4	4	4	4	alg.	20	**4**
S61	4	4	1	0	4	alg.	13	4	4	4	4	4	alg.	20	**7**
S31	4	0	0	0	4	aritm.	8	4	4	4	3	4	aritm.	19	**11**
S38	4	4	0	0	4	alg.	12	4	4	4	0	4	alg.	16	**4**
S39	1	1	1	1	4	aritm.	8	4	4	4	3	4	alg.	19	**11**
S44	4	4	4	0	4	aritm.	16	4	4	4	3	4	aritm.	19	**3**
S	4	4	1	1	4	aritm.	14	4	4	4	3	4	alg.	19	**5**
S28	4	3	4	2	3	aritm.	16	4	4	4	4	4	alg.+ aritm.	20	**4**
S24	4	4	4	4	4	alg.	20	4	4	4	4	4	alg.	20	**0**
S37	4	1	1	1	4	aritm.	11	4	4	4	3	4	aritm.	19	**8**
S52	4	3	4	2	3	aritm.	16	4	3	1	3	4	alg.	15	**-1**

5. melléklet: Az átlagon felüli tanulmányi eredményekkel rendelkező diákok elő- és utótesztjeinek pontszámai

Tanuló	**Előteszt** 1a	1b	1c	1d	2	2T	Össz	**Utóteszt** 1a	1b	1c	1d	2	2T	Össz	**Differencia**
S2	4	4	4	3	4	alg.	19	4	4	4	4	4	alg.	20	**1**
S19	4	3	4	3	4	alg.	18	2	4	4	4	4	alg.	18	**0**
S20	4	4	4	4	4	prea	20	4	4	4	4	4	alg.	20	**0**
S8	4	4	4	4	4	alg.	20	4	4	4	4	4	alg.	20	**0**
S9	4	4	4	4	4	alg.	20	4	4	4	4	4	alg.	20	**0**
S14	4	4	4	4	4	alg.	20	4	4	4	4	4	alg.	20	**0**
S15	4	4	4	0	4	prea	16	4	4	4	4	4	alg.	20	**4**
S27	4	4	3	0	4	alg.	15	4	4	4	4	4	alg.	20	**5**
S12	4	4	4	3	2	alg.	17	4	4	4	4	4	alg.	20	**3**
S25	4	4	4	4	4	alg.	20	4	4	4	4	4	alg.	20	**0**
S42	4	4	4	1	4	prea	17	4	4	4	3	4	alg.	19	**2**
S	4	4	4	0	4	alg.	16	4	4	4	4	4	alg.	20	**4**
S	4	4	4	1	4	alg.	17	4	4	4	3	4	alg.	19	**2**
S29	4	4	4	4	4	alg.	20	4	4	4	4	4	alg.	20	**0**
S16	4	4	4	2	4	alg.	18	4	4	4	4	4	alg.	20	**2**
S32	4	4	4	1	4	prea	17	4	4	4	4	4	alg.	20	**3**
S54	4	4	4	4	4	alg.	20	4	4	4	4	4	alg.	20	**0**

6. melléklet: Lecketerv – Egyenletek – 1. óra

Tantárgy: matematika
Osztály: 7a.,7b.
Az óra témája: Egyenlet átalakítása ekvivalens egyenletté
A tanóra cél- és feladatrendszere: Egyenletek megoldásának gyakorlása, ismétlés
Az óra didaktikai feladatai: gyakorló, ismétlő
Dátum: 2021. május
Jellemző kooperatív módszer: Dobj egy kérdést!
Módszertani elv: Problémaalapú tanulás
Előforduló problémamegoldási stratégia: hibakeresés

Idő	Az óra menete	Módszer	Munkaforma	Eszköz	Megjegyzés
3’	Óra előkészítése, házi feladat ellenőrzése				
12’	Dobj egy kérdést! [6] A vetítőn 2×4 db egyszerű egyenlet megoldása ($ax = b, a + x = b, ax + b = 0, a \neq 0$ alakúak)	Kooperatív mestermódszer: Dobj egy kérdést	Egyéni	Vetítő, Diasor Füzet	Először a diákok mindegyik egyenletet megoldják a füzetükben, majd ezután „dobják a kérdést”, ami egy-egy egyenlet megoldását kérdezi.

[6] Dobj egy kérdést! – kooperatív mestermódszer: A gyerekek papírgolyót vagy labdát egymásnak dobálnak, miközben a kérdéseket tesznek fel egymásnak. A papírgolyó elkapója válaszol, majd ő is kérdező-dobó lehet.

					Csak a végeredményt várjuk válaszként
(5’)	Keresd a hibát! A következő megoldott egyenletek megoldásairól döntsétek el, hogy helyes vagy nem. A helyteleneket javítsátok ki! 1. $3(x+1)+1=11-4x,\ x\in\mathbb{R}$ $3x+3+1=11-4x$ $3x+4=11-4x \mid +4x$ $7x+4=11 \mid -4$ $7x=7 \mid :7 \Rightarrow x=1 \quad M=\{1\}$	Hibakeresés	Egyéni Osztálymeg-beszélés	Vetítő, Diasor Füzet	2-3 db egyenlet a dián Ha az idő engedi mindhárom, ha nem, akkor csak 2 - Aki szerint helytelen emelje fel a kezét, aki szerint helyes, emelje fel a lábát.
(5’)	2. $\frac{x}{6}+\frac{x}{4}=10 \mid \cdot 12$ $12\cdot\frac{x}{6}+12\cdot\frac{x}{4}=10$ $2\cdot x+3\cdot x=10$ $5x=10$ $x=2$ $M=\{2\}$ $\frac{x}{6}+\frac{x}{4}=10 \mid \cdot 12$ $12\cdot\frac{x}{6}+12\cdot\frac{x}{4}=12\cdot 10$ $2\cdot x+3\cdot x=120$ $5x=120$ $x=24$ $M=\{24\}$	Hibakeresés és javítás	Egyéni		Vigyázzunk, szorozzuk be az egyenletek mindkét oldalát!
(8’)	A három tanuló közül ki oldotta meg helyesen a $\frac{4x+7}{2}=5$ egyenletet?	Hibakeresés és javítás	Egyéni Osztály-megbeszélés		Mindenki írja be annak a gyereknek a nevét a chatszobába, akiről úgy gondolja, hogy helyesen oldotta meg.

	Tamás megoldása $\frac{4x+7}{2}=5$ $\frac{4x+7}{2}=5$ $2x+7=5\mid-7$ $2x=-2\mid:2$ $x=-1$ Anna megoldása: $\frac{4x+7}{2}=5$ $\frac{4x+7}{2}=5\mid\cdot 2$ $4x+7=10\mid-7$ $4x=3\mid:4$ $x=\frac{3}{4}$ Dani megoldása: $\frac{4x+7}{2}=5$ $\frac{4x+7}{2}=5\mid\cdot 2$ $8x+14=10\mid-14$ $8x=-4\mid:8$ $x=-\frac{4}{8}=-\frac{1}{2}$ Milyen hibákat követtek el azok a tanulók, akik nem oldották meg helyesen az egyenletet?				
(12’)	Döntsd el, hogy a következő egyenleteknek a megadott szám megoldása vagy nem! a. $3x+12=24,\ x=4$ b. $5(y-2)=15, y=4$ c. $3(x+5)-2(x-2)=7,\ x=-2$ d. $\sqrt{3}x+8=11, x=\sqrt{3}$ e. $5\sqrt{2}x-3\sqrt{2}=7\sqrt{2}, x=2$	Behelyettesítés módszere	Osztály-megbeszélés		Megbeszéljük, hogy ez lehet az ellenőrzése is egy megoldásnak
(1’)	Házi feladat kitűzése		Megbeszélés		
	Kilépő kártya: A legfontosabb dolog, amit ma tanultam…. Erre egy példa…. https://forms.gle/EgE97siae9cbpZAY6 - a válaszok	Visszajelzés kilépő kártyán	Egyéni	Kilépő kártya	

Megj. A melléklet további része a tanórához tartozó prezentáció diáit tartalmazza (4 dia/oldal).

EGYENLETEK - ISMÉTLÉS

DOBJ EGY KÉRDÉST!

OLDJUK MEG A RACIONÁLIS SZÁMOK HALMAZÁN!

1. $4x = 10$

$4x = 10 \mid : 4$

$x = \frac{10}{4}$

$x = \frac{5}{2}$

2. $-2x = 18$

$-2x = 18 \mid : (-2)$

$x = -9$

3. $x + 8 = -22$

4. $-x - 3 = 15$

DOBJ EGY KÉRDÉST!

OLDJUK MEG A RACIONÁLIS SZÁMOK HALMAZÁN!

3. $x + 8 = -22$

$x + 8 = -22 \mid -8$

$x = -22 - 8$

$x = -30$

4. $-x - 3 = 15$

$-x - 3 = 15 \mid + 3$

$-x = 15 + 3$

$-x = 18 \mid \cdot (-1)$

$x = -18$

DOBJ EGY KÉRDÉST!

OLDJUK MEG A RACIONÁLIS SZÁMOK HALMAZÁN!

1. $4x + 5 = 29$

2. $2x - 10 = -14$

3. $3x + 8 = 3x + 12$

4. $2x + 3 = 2x + 3$

DOBJ EGY KÉRDÉST!

OLDJUK MEG A RACIONÁLIS SZÁMOK HALMAZÁN!

1. $4x + 5 = 29$ /−5
$4x = 24 \,|:4$
$x = 6$
$M = \{6\}$

2. $2x - 10 = -14 \,|+10$
$2x = -4 \,|:2$
$x = -2$
$M = \{-2\}$

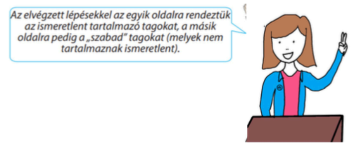
3. $3x + 8 = 3x + 12 \,|-3x$
$3x - 3x + 8 = 12$
$8 = 12$
$M = \emptyset$

4. $2x + 3 = 2x + 3 \,|-2x$
$2x - 2x + 3 = 3$
$3 = 3$
$M = \mathbb{Q}$

KERESSÜNK HIBÁT!

HELYES VAGY HELYTELEN? HA HIBÁS, JAVÍTSD KI!

$3(x+1) + 1 = 11 - 4x, \; x \in \mathbb{R}$
$3x + 3 + 1 = 11 - 4x$
$3x + 4 = 11 - 4x \;\big|+4x$
$7x + 4 = 11 \;\big|-4$
$7x = 7 \;\big|:7 \;\Rightarrow\; x = 1 \quad M = \{1\}$



KERESSÜNK HIBÁT!

HELYES VAGY HELYTELEN? HA HIBÁS, JAVÍTSD KI!

$\frac{x}{6} + \frac{x}{4} = 10 \,|\cdot 12$
$\cancel{12} \cdot \frac{x}{\cancel{6}} + \cancel{12} \cdot \frac{x}{\cancel{4}} = 10$
$2 \cdot x + 3 \cdot x = 10$
$5x = 10$
$x = 2$
$M = \{2\}$

A HELYES VÁLTOZAT

$\frac{x}{6} + \frac{x}{4} = 10 \,|\cdot 12$
$\cancel{12} \cdot \frac{x}{\cancel{6}} + \cancel{12} \cdot \frac{x}{\cancel{4}} = 12 \cdot 10$
$2 \cdot x + 3 \cdot x = 120$
$5x = 120$
$x = 24$
$M = \{24\}$

A HÁROM TANULÓ KÖZÜL KI OLDOTTA MEG HELYESEN A $\frac{4x+7}{2} = 5$ EGYENLETET?

Tamás megoldása	Anna megoldása:	Dani megoldása:
$\frac{4x+7}{2} = 5$	$\frac{4x+7}{2} = 5$	$\frac{4x+7}{2} = 5$
$\frac{4x+7}{2} = 5$	$\frac{4x+7}{2} = 5 \mid \cdot 2$	$\frac{4x+7}{2} = 5 \mid \cdot 2$
$2x + 7 = 5 \mid -7$	$4x + 7 = 10 \mid -7$	$8x + 14 = 10 \mid -14$
$2x = -2 \mid : 2$	$4x = 3 \mid : 4$	$8x = -4 \mid : 8$
$x = -1$	$x = \frac{3}{4}$	$x = -\frac{4}{8} = -\frac{1}{2}$

Milyen hibákat követtek el azok a tanulók, akik nem oldották meg helyesen az egyenletet?

Döntsd el a következő egyenletekneknek a megadott szám megoldása vagy nem!

$3 \cdot 4 + 12 = 12 + 12 = 24$ ✓
$x = 4$ megoldása az egyenl.

a. 3x+12=24, x=4
b. 5(x-2)=15, x = 4
c. 3(y+5)-2(y-2)=7, y=-2
d. $\sqrt{3}$x+8=11, x=$\sqrt{3}$
e. 5$\sqrt{2}$y-3$\sqrt{2}$=7$\sqrt{2}$, y=2

Házi feladat

1. $3x + 5 =$ 

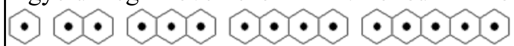
Egészítsd ki úgy az egyenletet, hogy a megoldása

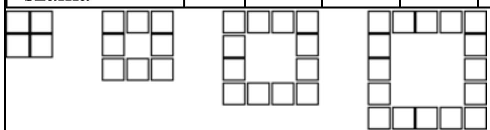
A. egész szám legyen

B. ne legyen egész szám

2. írj egy olyan egyenletet, amelynek x=5 megoldása!

Tantárgy: matematika
Osztály: 7a.,7b.
Az óra témája: Egyenletek megoldása, mintakeresés
A tanóra cél- és feladatrendszere: Egyenletek megoldásának gyakorlása, ismétlés
Az óra didaktikai feladatai: gyakorló
Felhasznált források: J. Mason, L. Burton, K. Stacey: Thinking Mathematically (Second edition), Pearson, 2010., Orbán Julianna Enikő: Algebra munkafüzet a VII. osztály számára, Corvin Kiadó, 2013-as kiadás
Dátum: 2021. május
Jellemző kooperatív módszer: TPS
Módszertani elv: Probléma alapú tanulás – heurisztikus stratégiák beépítése online tanórai keretek közé
Előforduló problémamegoldási stratégia: mintakeresés

<table>
<tr><th>Idő</th><th>Az óra menete</th><th>Módszer</th><th>Munkaforma</th><th>Eszköz</th><th>Megjegyzés</th></tr>
<tr><td>(2’)</td><td>Házi feladat megbeszélése</td><td>Visszatekintés</td><td>Frontális</td><td>Vetítő, diasor</td><td></td></tr>
<tr><td>(5’)</td><td>Mintakövetés
Figyeld meg a következő mintát! Töltsd ki a táblázatot! (5-ig)

<table>
<tr><td>Pontok száma</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td></tr>
<tr><td>Szakaszok száma</td><td>6</td><td>11</td><td>16</td><td>21</td><td>26</td></tr>
</table></td><td></td><td>Egyéni</td><td>Diasor, füzet</td><td>A tevékenység eredményének rögzítése táblázatban.</td></tr>
<tr><td>(1’)</td><td>Ellenőrzés</td><td></td><td>Frontális</td><td></td><td></td></tr>
</table>

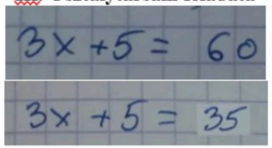
<table>
<tr>
<td>(4’
+
6’)</td>
<td>Alkoss szabályt! Keress összefüggést a pontok és szakaszok száma között! Magyarázd meg a szabályt!
(Ha szükséges irányító kérdés: Mivel magyarázod, hogy a szakaszok száma 5-tel nő? Mivel magyarázod a pontok és szakaszok közötti megfeleltetést?)
Beszéljétek meg párban!</td>
<td>Probléma-megoldás, TPS</td>
<td>Egyéni, páros (online: a diákok felhívják egymást, rögzítik a beszélgetést, majd feltöltik)</td>
<td>Füzet</td>
<td>Lehetséges válaszok:
a. Szakaszok száma mindig 5-tel nő
b. 5n+1, ahol n a pontok száma</td>
</tr>
<tr>
<td>(3’)</td>
<td>Ellenőrzés</td>
<td></td>
<td>Osztálymegbeszélés</td>
<td></td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>(8’)</td>
<td>Válaszolj a következő kérdésekre:
a. Hány szakasz van abban a mintában, melyben 7 pont van?
b. Hány szakasz van abban a mintában, amelyben 12 pont van?
c. Hány pont van abban a mintában, amelyben 46 szakasz van?
d. Hány pont van abban a mintában, amelyben 50 szakasz van?</td>
<td>Problémamegoldás</td>
<td>Egyéni</td>
<td></td>
<td>Válaszok:
a) 36
b) 61
c) 9
d) nincs</td>
</tr>
<tr>
<td>(10’)</td>
<td>Az alábbi ábrán négyzet alakú csempékből rakjuk ki a mintákat. Készíts táblázatot, amelyben megadod az egyes mintákban levő csempék számát.
<table>
<tr><td>Ábra</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td></tr>
<tr><td>Négyzetek száma</td><td>4</td><td>8</td><td>12</td><td>16</td><td>20</td></tr>
</table>

1. Hány csempe lesz a 9. mintában?
2. Hány csempe lesz a 20. mintában?
3. Hányadik mintában lesz 98 csempe?
4. Általánosíts: hány csempe lesz a n-edik mintában?</td>
<td>Problémamegoldás</td>
<td>Páros (megosztott dokumentumban dolgoznak)</td>
<td></td>
<td>A párválasztás lehet szabad, vagy irányított.</td>
</tr>
</table>

	Gyakorlatok a munkafüzetből 42. oldal 6, 7 feladatokból a gyököt tartalmazó egyenletek 43. oldal 7.II.				Ezekre a feladatokra csak a fennmaradó időben (ha van) kerül sor.
(3’)	Házi feladat kitűzése Alkoss meg egy mintasorozatot (gyufaszálból, fogpiszkálóból, fülpucolóból, pálcikából,...) úgy, hogy legalább az első négy elemet megadod, majd tegyél fel hozzá két kérdést, valamint válaszold is meg azokat! Az elkészült mintát rajzold le, a készült képeket (mintáról, rajzról, megoldásról) küldd be!	Frontális	Megbeszélés	A minta-szerkesztéshez szükséges eszközök	A megoldásokat lehetőleg egy dokumentumban gyűjtjük be

Megj. A melléklet további része a tanórához tartozó prezentáció diáit tartalmazza (4 dia/oldal).

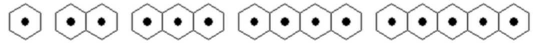
Ellenőrzés

Hf. Osztálytársam feladata



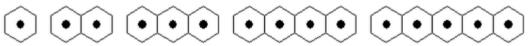
Melyik feladatnak lesz egész megoldása? Melyiknek nem?

FIGYELD MEG A KÖVETKEZŐ MINTÁT! TÖLTSD KI A TÁBLÁZATOT!

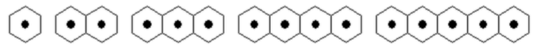


Pontok száma	1	2	3	4	5
Szakaszok száma	6	11			

FIGYELD MEG A KÖVETKEZŐ MINTÁT! TÖLTSD KI A TÁBLÁZATOT!



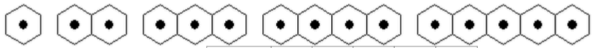
Pontok száma	1	2	3	4	5
Szakaszok száma	6	11	16	21	26



Pontok száma	1	2	3	4	5
Szakaszok száma	6	11	16	21	26

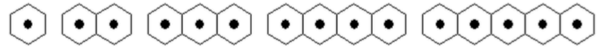
KERESS SZABÁLYT!

KERESS EGY ÖSSZEFÜGGÉST A PONTOK SZÁMA ÉS SZAKASZOK SZÁMA KÖZÖTT!



Pontok száma	1	2	3	4	5
Szakaszok száma	6	11	16	21	26

MAGYARÁZD MEG A SZABÁLYT!



a) Hány szakasz van abban a mintában, melyben 7 pont van?

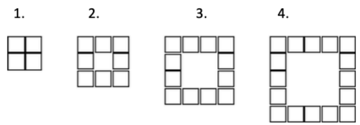
b) Hány szakasz van abban a mintában, amelyben 12 pont van?

c) Hány pont van abban a mintában, amelyben 46 szakasz van?

d) Hány pont van abban a mintában, amelyben 50 szakasz van?

Pontok száma	1	2	3	4	5
Szakaszok száma	6	11	16	21	26

FELADAT



Az alábbi ábrán négyzet alakú csempékből rakjuk ki a mintákat. Készíts egy táblázatot, amelyben megadod az egyes mintákban levő csempék számát.

Ábra	1	2	3	4	5
Négyzetek száma	4	8			

1.Hány csempe lesz a 9. mintában?
2.Hány csempe lesz a 20. mintában?
3.Hányadik mintában lesz 98 csempe?
4.Általánosíts: hány csempe lesz a n-edik mintában?

HÁZI FELADAT

Alkoss meg egy minta sorozatot (gyufaszálból, fogpiszkálóból, fülpucolóból, pálcikából,...) úgy, hogy legalább az első négy elemet megadod, majd tegyél fel hozzá két kérdést, valamint válaszold is meg azokat!

Az elkészült mintát rajzold is le, a készült képeket (mintáról, rajzról, megoldásról) küldd be!

A leadást egy WORD dokumentumban kérem, amelybe beszúrjátok a készített képeket, beleértve a feladat megoldását is!

8. melléklet: Lecketerv – Egyenletek – 5. óra

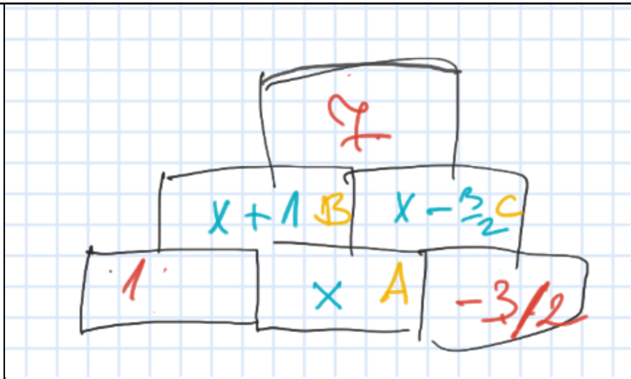
Tantárgy: matematika
Osztály: 7a.,7b.
Az óra témája: Alkalmazások - szöveges feladatokkal
A tanóra cél- és feladatrendszere: A feladat eredményének megsejtése, majd megoldás
Az óra didaktikai feladatai: gyakorló, alkalmazó
Felhasznált források (tankönyv, munkafüzet, feladat- és szöveggyűjtemény, digitális tananyag, online források, szakirodalom stb.): Orbán Julianna Enikő: Algebra munkafüzet a VII. osztály számára, Corvin Kiadó, 2013-as kiadás, Tuzson Zoltán: Egyenletekkel megoldható szöveges feladatok
Dátum: 2021. május
Jellemző kooperatív módszer: -
Módszertani elv: A matematizálás készségének segítése tervszerű próbálkozás által
Előforduló problémamegoldási stratégia: tervszerű próbálgatás, szakaszos ábrázolás

<table>
<tr><th>Idő</th><th>Az óra menete</th><th>Módszer</th><th>Munkaforma</th><th>Eszköz</th><th>Megjegyzés</th></tr>
<tr><td>3’</td><td>Óra előkészítése, házi feladat ellenőrzése</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>1’</td><td>Huni kinyitja a könyvet és azt látja, hogy a két oldalszám összege 149. Melyik szám van a könyv jobb lapján?</td><td>Feladat kitűzése</td><td>Frontális</td><td>Jamboard a feladatok kivetítésére
Füzet</td><td>Virtuális tábla = Jamboard</td></tr>
<tr><td>4’</td><td>Mindenki vegyen egy akármilyen könyvet a kezébe, nyissa ki és töltsünk ki pár oszlopot a következő táblázatból:
<table>
<tr><td>Bal o.</td><td>12</td><td></td><td></td><td>x</td></tr>
<tr><td>Jobb o.</td><td>13</td><td></td><td></td><td>x+1</td></tr>
<tr><td>Összeg</td><td>25</td><td></td><td></td><td>2x+1</td></tr>
</table></td><td>Osztálymegbeszélés
Tervszerű próbálgatás – heurisztikus stratégia</td><td>Frontális</td><td>Egy tetszőleges könyv

Jamboard</td><td>Hátha valaki feldobja az ötletet, hogy jelöljük x-szel, hanem 3-4 szám után javasoljuk</td></tr>
<tr><td>4’</td><td>Felírják a 2x+1=149 egyenletet, majd megoldják
2x=148
x=74</td><td>Munkáltatás</td><td>Egyéni</td><td>Füzet</td><td></td></tr>
</table>

<table>
<tr><td></td><td>Ellenőrzés
F: a 75 szám van a jobb oldalon.</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>1’</td><td>Timi és Szabi testvérek, életkoruk összege 38 év. Amikor Timi 14 éves volt, Szabi 9 éves volt. Hány évesek most?</td><td>Feladat kitűzése</td><td>Frontális</td><td>Jamboard</td><td></td></tr>
<tr><td>(5’)</td><td>A diákok számokat tippelnek, javasolnak, helyettesítenek, majd eldöntik, hogy jó válasz vagy sem.
Egészen addig tippeljenek, amíg meg nem találjuk a jó választ? - itt ez lehet hamar meglesz, a többiben?
Táblázat
<table><tr><td>Szabi</td><td>10</td><td></td><td></td><td>x</td></tr><tr><td>Timi</td><td></td><td></td><td></td><td>x+5</td></tr><tr><td>Összeg</td><td></td><td></td><td></td><td>2x+5</td></tr></table></td><td>Megbeszélés
Tervszerű próbálgatás–heurisztikus stratégia</td><td>Osztály-megbeszélés</td><td>Jamboard, Füzet</td><td>Amikor Szabi 10 éves volt, Timi hány éves volt? … Próbáljunk ki más számokat is. Ki tudjuk próbálni az összeset?</td></tr>
<tr><td>(4’)</td><td>A feladat megoldása egyenlettel
2x+5=38
2x=33
x=16,5
x-ennyi éves Szabi
Ellenőrzés: $16{,}5 + 21{,}5 = 38$
Felelet: Szabi 16 és fél éves, Timi 21 és fél éves.</td><td>Munkáltatás</td><td>Egyéni
Frontális
(ellenőrzés)</td><td>Füzet,
Jamboard</td><td></td></tr>
<tr><td>(1’)</td><td>Rebeka egy háromnapos kiránduláson elköltötte a zsebpénzét. Első nap elköltötte a 3/5-ét, második nap a megmaradt összeg 25%-át, a harmadik napot pedig a megmaradt 27 lejt. Mennyi volt Rebeka zsebpénze?</td><td>Feladat kitűzése</td><td>Osztály-megbeszélés</td><td>Jamboard</td><td></td></tr>
<tr><td>(5’)</td><td><table><tr><td>Zsebpénz</td><td colspan="2"></td><td colspan="2"></td></tr><tr><td></td><td>Elköltötte</td><td>Maradt</td><td>Elköltötte</td><td>Maradt</td></tr><tr><td>1.nap</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td>2.nap</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td>3.nap</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr></table></td><td>Tervszerű próbálgatás – heurisztikus stratégia</td><td>Frontális, tanuló válaszol</td><td>Füzet,
Jamboard</td><td></td></tr>
<tr><td>(4’)</td><td>Egyenlettel</td><td>szemléltetés – szakaszos ábrázolással is</td><td>Frontális</td><td></td><td></td></tr>
</table>

<table>
<tr>
<td></td>
<td>
<table>
<tr><td></td><td>Elköltötte</td><td>Maradt</td></tr>
<tr><td>1. nap</td><td>$x \cdot 3/5$</td><td>$x \cdot 2/5$</td></tr>
<tr><td>2. nap</td><td>$x \cdot 2/5 \cdot 25/100$</td><td>$x \cdot 2/5 \cdot 75/100$</td></tr>
<tr><td>3. nap</td><td>$x \cdot 2/5 \cdot 75/100$
$=27$</td><td></td></tr>
</table>
$x \cdot 2/5 \cdot 75/100=27$
$x \cdot 3/10=27$
$x=90$
</td>
<td></td>
<td></td>
<td></td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td></td>
<td>Házi feladat:
Emlékeztek még a tavalyi Kati és Laci számpiramisra?
Amikor úgy kaptuk meg a felső elemet, hogy az alatta levő két alsót összeadtuk?
Az osztályból (Klau és Robi) olyan feladatot tűztek ki, amit akkor még nem tudtatok megoldani, de mostmár sokkal ügyesebbek és jártasabbak vagytok, tehát ahhoz hasonló feladatot fogtok kapni!</td>
<td>Visszacsatolás,
magyarázat
Házi feladat</td>
<td></td>
<td>Jamboard</td>
<td></td>
</tr>
</table>

					
		Vélemény kérdezése	Egyéni	Kilépőkártya vagy online esetben Google Form	Válassz egy kijelentést, amely igaz rád.

A melléklet további része az órai táblavázlatokat tartalmazza.

Huni kinyitja a könyvet és azt látja, hogy a két oldalszám összege 149. Melyik szám van a könyv jobb lapján?

Bal o.	76	80	212	x
Jobb o.	77	81	213	$x+1$
Összeg	153	161	425	$2x+1$

← 74
← 75 } ellenőrzés
149 ✓

$x + x + 1 = 2x + 1$

$$2x + 1 = 149 \quad /-1$$
$$2x = 148 \quad /:2$$
$$x = 74$$

F: A könyv jobb oldalán 75 szám van.

Timi és Szabi testvérek, életkoruk összege 38 év. Amikor Timi 14 éves volt, Szabi 9 éves volt. Hány évesek most?

Szabi	10	12	16	x
Timi	15	17	21	$x+5$
Összeg	25	29	37	$2x+5$

← 16,5
← 21,5
38 ✓

$$2x + 5 = 38 \quad /-5$$
$$2x = 33 \quad /:2$$
$$x = 16{,}5 \leftarrow \text{Szabi}$$

F: Szabi 16,5 és Timi 21,5

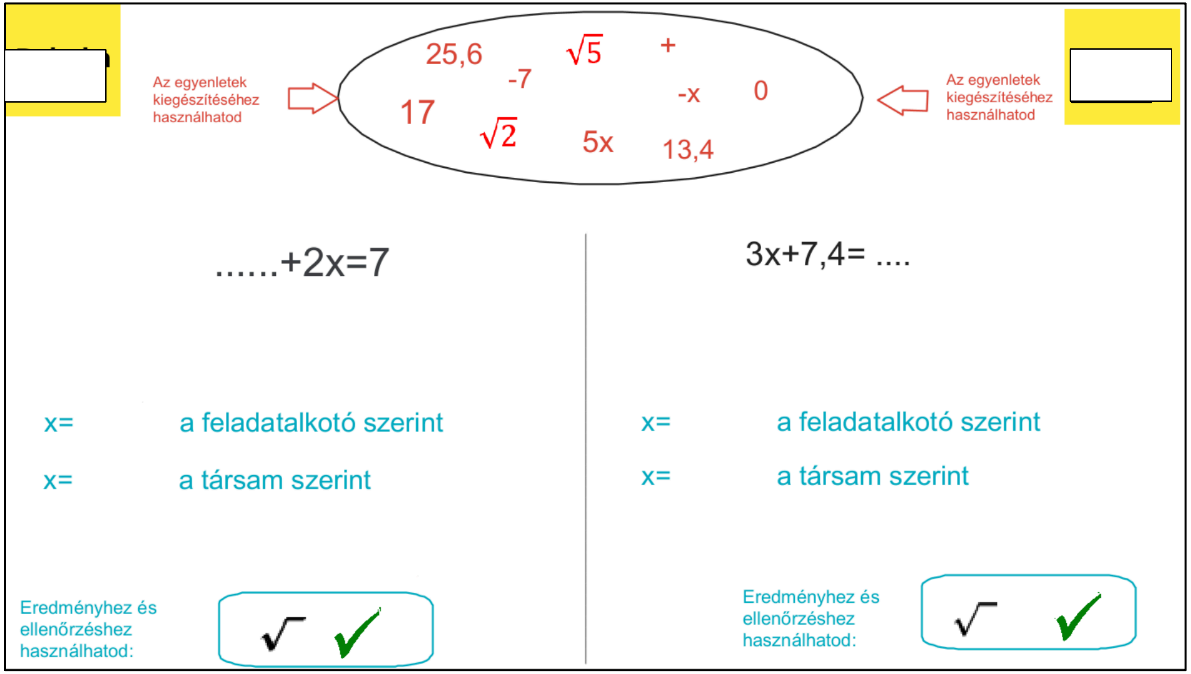
9. melléklet: Lecketerv - Egyenletek – 6. óra

Tantárgy: matematika
Osztály: 7a.,7b.
Az óra témája: Egyenletek és egyenletekkel megoldható feladatok
A tanóra cél- és feladatrendszere: Kooperatív módszer alkalmazása online, feladatalkotás és gyakorlás, kritikus gondolkodás fejlesztése (ellenőrzés)
Az óra didaktikai feladatai: gyakorló, alkalmazó
Dátum: 2021. május
Jellemző kooperatív módszer: Villámkártya
Módszertani elv: Kooperatív módszerre és feladatalkotásra alapozott tanulás
Előforduló problémamegoldási stratégia: feladatalkotás

Idő	Az óra menete	Módszer	Munkaforma	Eszköz	Megjegyzés
(3’)	Óra előkészítése, házi feladat ellenőrzése				
(2’)	Szövegdobozban üzenetküldés		Frontális	Jamboard	A tanár megmutatja, hogy lehet szövegdobozban szerkeszteni
(6’)	A tanulók párban dolgoznak. Mindenkinek van saját szerkeszthető oldala, amelyen két megkezdett egyenlet található, ezeket ki kell egészítsék. A kiegészítendő egyenletek összetevőit egy közös tárból válogathatják. (Példa: az óraterv után Jamboard slide.) Megoldják a saját	Kooperatív mestermódszer: Villámkártya	Páros	Előre gyártott kártyalapok vagy – online esetben: Párokra osztott Jamboard	A megkezdett egyenletek lehetnek: $2x + \cdots = 15$ vagy $3x + 7{,}4 = \ldots$ Kíváncsiak vagyunk, mivel egészíti ki, használ-e jobb oldalon x-es vagy gyökös kifejezést stb.

	egyenletüket.				
(10’)	Villámkártya: Egymás villámkártya feladatait kell megoldják megadott időkereten belül (például 1 db egyenlet 2 perc vagy egyszerre adják oda egymásnak). Kiegészítik a jamet a saját eredményekkel, majd egyeztetnek.	Kooperatív mestermódszer: Villámkártya	Páros	Kártyalapok Esetleg stopperóra	Az ellenőrzésnél kíváncsiak vagyunk, hogy behelyettesítéssel ellenőriznek vagy nem.
(5’)	A “legérdekesebb” egyenletek közül egy párat megoldunk a táblánál.		Frontális		Vagy Jamboard-on
(10’)	Szerkessz feladatot az egyik egyenletre, amit az imént megoldottunk! Válassz ki a három alkotott egyenletedből egyet, majd alkoss egy feladatot, amelynek megoldása az adott egyenlettel történik.	ALF – de a múlt órákra alapozva (vajon ez működik?) Vagy fejlődtek azóta ebben?	Egyéni	Füzet	Kíváncsiak vagyunk: melyiket választják, milyent szerkesztenek, hogy oldják meg, előtte van-e tervszerű próbálkozás?
(5’)	A diákok felolvasnak pár alkotott problémát	Megbeszélés	Osztálymeg-beszélés		
(3’)	HF. kitűzése: Mindenki küldje be a saját szerkesztett feladatát! A három feladatnál döntsd el, hogy melyik egyenlethez alkották a szöveges feladatot! Helyes-e? Ha tudod, javítsd ki!				
(2’)	Kilépő: Írj egy jelzőt, ami jellemezte az órát (órai tevékenységedet)!	Visszajelzés Kilépő kártya	Egyéni	Kilépő kártya	Az órán való hangulatra való visszajelzés - Lehet online szófelhő vagy jamboard

A tanórához tartozó JamBoard egy slide-ja:



Tantárgy: matematika
Az óra témája: Hogyan oldunk meg feladatokat? Keressünk mintát!

A tanóra cél- és feladatrendszere: a fejlesztendő attitűd, készségek, képességek, a tanítandó ismeretek (fogalmak, szabályok stb.) és az elérendő fejlesztési szint, tudásszint megnevezése. Az óra célja az induktív gondolkodás fejlesztése. A tanuló ismerjen fel mintát plauzibilis és definiált sorozatokban.

Az óra didaktikai feladatai: gyakorlás

Felhasznált források (tankönyv, munkafüzet, feladat- és szöveggyűjtemény, digitális tananyag, online források, szakirodalom stb.): J. Mason, L. Burton, K. Stacey: Thinking Mathematically (Second edition), Pearson, 2010.
Jellemző kooperatív módszer: gondolkozz önállóan beszéld meg párban, oszd meg az osztállyal! (TPS- Think, pair, share)
A feladatot először minden tanuló önállóan próbálja megoldani, majd párban megbeszélik. Az egyéni és pármunka fázisában a tanár nem segít, de figyeli a munkát, amely segíteni fog neki a megosztás fázisához abban, hogy melyik tanulót válassza ki.

Módszertani elv: A sorozatok modellalkotó szerepének tudatosítása.
Előforduló problémamegoldási stratégia: mintakeresés.
Speciális reflektálási szempont a tanárnak: Hogyan sikerül a tanulóknak induktív módon következtetést levonni, azaz konkrét numerikus példák alapján képesek-e szabályt alkotni, és ezt magyarázni.

Idő-keret	Az óra menete	Módszer	Munka-forma	Eszköz	Megjegyzés
5' (5)	Az óra indítása, cél kijelölése, házi feladat ellenőrzése	Strukturálás	Frontális		
2' (7)	Ráhangolódás: Tanár: Számos helyen figyelhetünk meg mintát nap, mint nap, legyen itt szó akár a természetről, akár az emberek által felépített mesterséges világról. Tudnátok-e példát mondani bármilyen mintázatra, mintára, szabályosságra, amivel találkoztatok már? (Ha szükséges pár irányító példa: pókháló, versek rímelése, zenék ritmusa stb.) Ha matematikailag gondolunk valamilyen mintázatra, akkor az első dolog, ami eszünkbe jut, az a szabályosság. Ha mintákról beszélünk, a következő szavakat használhatjuk ezek leírására: valamiből összeáll, identikus, ismétlődik, mindig …, vagyis kell legyen egy szabály, amely körülírja a mintát.	Ráhangolódás	Frontális, beszélgetés		Cél: tudatosítani, mit értünk minta alatt
2' (9)	A tanár irányításával egy papírcsíkot kétszer félbehajtanak, megszámolják a keletkezett hajtásvonalak számát. A tanár elmondja, hogy a hajtásvonalak között, illetve az első hajtásvonal és a lapszél között és az utolsó hajtásvonal és a lapszél között papírszakaszról fogunk beszélni. (Például hét hajtás: Három hajtásvonal, négy papírszakasz.)	Munkáltatás	Frontális	Minden tanuló kap 3 db papírcsíkot.	

4' (13)	Feladatlap 1. feladat. (Új papírcsíkkal dolgoznak.) Egymás után négy hajtást végezz el! A táblázatba jegyezd fel, hogy hányszor hajtottad meg a lapot, hány papírszakasz, és hány hajtásvonal keletkezett! (Melléklet) Ellenőrzés.	A tevékenység eredményének rögzítése táblázatban.	Egyéni	Papírcsík, prezentáció az ellenőrzéshez	A sorozat a tevékenység által definiált.
2' (15)	Folytasd a sorozatot! Alkoss szabályt! (A táblázatában folytassák 5, 6 hajtásra.)	Problémamegoldás	Egyéni		
1' (16)	Megoldások egyeztetése	Pármegbeszélés	Páros	Feladatlap	
1' (17)	Várható válasz: A papírszakaszok száma 2, 4, 8, 16, a hajtások száma mindig 1-gyel kevesebb.	Megosztás az osztállyal	Frontális		Bármilyen más helyes válasz elfogadható: például kettő hatványai, vagy rekurzívan definiált sorozat.
6' (23)	Magyarázd meg a szabályt! (Ha szükséges, irányító kérdés: Mivel magyarázod, hogy a papírszakaszok száma minden hajtásnál megduplázódik?) Várható magyarázat: 1. a papírszakaszok száma minden hajtásnál megduplázódik, mert minden szakaszt félbehajtunk. 2. Mindig annyi új hajtás keletkezik, ahány rétegű a papír a hajtás előtt. (Ha nem vetődik fel ez a magyarázat, ne erőltessük.)	Pármegbeszélés, osztálymegbeszélés	Páros, frontális		A szabályt a tevékeny-séggel magyarázzák meg! A második indoklás rekurzív magyarázat, a két sorozat közötti kapcsolaton alapul.
2' (25)	Feladatlap 2. feladat. Határozd meg hány hajtásvonal keletkezne, ha tízszer hajtanánk meg a papírt! (1023. A cél a sorozat folytatása a szabály alapján, hajtogatás nélkül.)	Feladatmegoldás	Egyéni	Feladatlap	A sorozat távoli elemének meghatározása.

Idő-keret	Az óra menete	Módszer	Munka-forma	Eszköz	Megjegyzés
5' (30)	3. feladat. Hajts ki a 4 hajtást tartalmazó papírlapot! Találj ki hozzá történetet, készíts hozzá feladatot! (Például: Két villanypózna közötti távolság 25m. Mennyi a távolság 17 villanypózna között?)	Problémaalkotás	Egyéni	Papírcsík, Feladatlap	Ha az időbe belefér, és a tanár úgy ítéli meg, akkor valamelyik tanuló feladatát a többiek megoldják.
2' (32)	4. feladat. Gyufaszálakból rácsokat készítettünk az ábrának megfelelő módon. Az első rács szélessége egy gyufaszál, a másodiké két gyufaszál, és így tovább. a. Folytasd a sorozatot! Rajzold le színessel a negyedik rácsot!	Munkáltatás	Egyéni	Feladatlap, színes ceruza	
1' (33)	Ellenőrzés		Frontális	Prezentáció	
4' (37)	b. Az első rácshoz négy gyufaszál kellett. Számold meg, hogy hány gyufaszál kell a többi rácshoz!	Problémamegoldás	Egyéni +pármunka	Feladatlap	
1(38)	Ellenőrzés		Osztálymeg-beszélés	Prezentáció	
4' (42)	c. Hány gyufaszálra van szükség a sorozatban a hatodik rácshoz?	Problémamegoldás	Egyéni + pármunka	Feladatlap	
6' (48)	Magyarázat: Az egyik megoldási lehetőség a sorozat folytatása: 4, 12, 24, 40, 60, 84. (A differencia mindig 4-gyel nő.) A másik megoldási lehetőség a tervszerű összeszámolás. Függőlegesen és vízszintesen ugyanannyi gyufa kell egy rácshoz. A gyufaszálak száma: $2 \cdot 1 + 2 \cdot 1 = 4$, $3 \cdot 2 + 3 \cdot 2 = 12$, $4 \cdot 3 + 4 \cdot 3 = 24$, $5 \cdot 4 + 5 \cdot 4 = 40$.	Problémamegoldás, szükség esetén rávezetés	Osztály-megosztás		Lehetőség szerint mind a sorozatos megoldásra, mind a tervszerű összeszámolásra kerüljön sor.

	6 szélességű rácsnál: $7 \cdot 6 + 7 \cdot 6 = 84$.				
2’ (50)	Exit card kitöltése. A tanuló egy emotikont rajzol egy Post-it-re, amely kifejezi, hogy hogyan érezte magát az órán. A terem elhagyásakor felragasztja az ajtóra.	vélemény kérdezése	Egyéni	Kilépő kátya	

Segédanyag:

A papírcsíkos tevékenység eredményének rögzítése

hajtások száma	0	1	2	3	4			
papírszakaszok száma	1	2	4	8	16			
hajtásvonalak száma	0	1	3	7	15			

Lehetséges magyarázatok a hajtásvonalak számára

1.

hajtások száma	0	1	2	3	4	5	6
papírszakaszok száma	1	2	4	8	16	32	64
hajtásvonalak száma	0	2 – 1 = 1	4 – 1 = 3	8 – 1 = 7	16 – 1 = 15	32 – 1 = 31	64 – 1 = 63

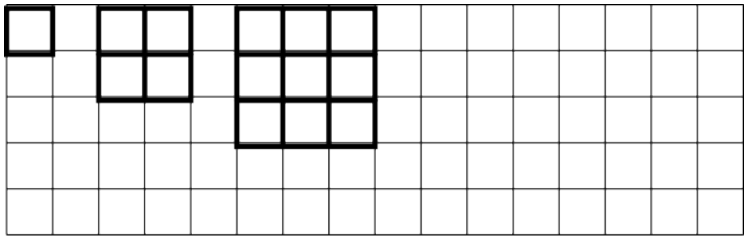
2.

hajtások száma	0	1	2	3	4	5	6
rétegek száma	1	2	4	8	16	32	64
hajtásvonalak száma	0	0 + 1= 1	1 + 2 = 3	3 + 4= 7	7 + 8=15	15 + 16=31	31 + 32= 63

A gyufaszálas feladat

Feladat. Gyufaszálakból rácsokat készítettünk az ábrának megfelelő módon. Az első rács szélessége egy gyufaszál, a másodiké két gyufaszál, és így tovább.

a. Folytasd a sorozatot! Rajzold le színessel a negyedik rácsot!
b. Az első rácshoz négy gyufaszál kellett. Számold meg, hogy hány gyufaszál kell a többi rácshoz!
c. Hány gyufaszálra van szükség a sorozatban a hatodik rácshoz?



rács szélessége (gyufaszál)	1	2	3	4
gyufaszálak száma	4	12	24	40

Feladatlap

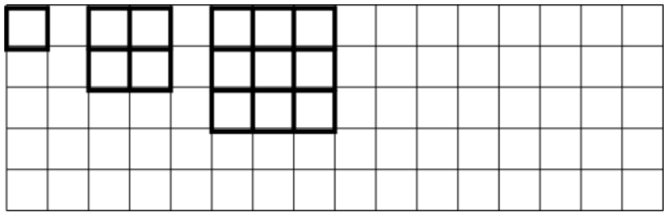
Név: ______________________________

1. **feladat.** A papírcsík hajtása.

hajtások száma	0	1	2	3	4		
papírszakaszok száma	1						
hajtásvonalak száma	0						

2. **feladat.** Hány hajtásvonal keletkezne, ha tízszer hajtanánk meg a papírt!

3. **feladat.** Gyufaszálakból rácsokat készítettünk az ábrának megfelelő módon. Az első rács szélessége egy gyufaszál, a másodiké két gyufaszál, és így tovább.
   a. Folytasd a sorozatot! Rajzold le színessel a negyedik rácsot!
   b. Az első rácshoz négy gyufaszál kellett. Számold meg, hogy hány gyufaszál kell a többi rácshoz!
   c. Hány gyufaszálra van szükség a sorozatban a hatodik rácshoz?



rács szélessége (gyufaszál)	1	2	3	4
gyufaszálak száma	4			

Tantárgy: matematika
Osztály: 6. osztály
Az óra témája: Hogyan oldunk meg feladatokat? Következtessünk visszafelé!
A tanóra cél- és feladatrendszere: a fejlesztendő attitűd, készségek, képességek, a tanítandó ismeretek (fogalmak, szabályok stb.) és az elérendő fejlesztési szint, tudásszint megnevezése. Az óra célja a problémamegoldó képesség fejlesztése, a visszafelé gondolkodás, mint problémamegoldó stratégia bemutatása, a stratégia alkotás képességének fejlesztése. Számolási készség fejlesztése.
Az óra didaktikai feladatai: gyakorlás
Felhasznált források (tankönyv, munkafüzet, feladat- és szöveggyűjtemény, digitális tananyag, online források, szakirodalom stb.): Sokszínű matematika 6. o. Mozaik Kiadó, 2014. B. A. Korgyemszkij: Matematikai fejtörők, Budapest, 1962.
Dátum: 2018. december
Jellemző kooperatív módszer: pármunka és gondolkozz önállóan beszéld meg párban, oszd meg az osztállyal! (TPS-Think, pair, share) A feladatot először minden tanuló önállóan próbálja megoldani, majd párban megbeszélik. Az egyéni és pármunka fázisában a tanár nem segít, de figyeli a munkát, amely segíteni fog neki a megosztás fázisához abban, hogy melyik tanulót válassza ki.
Módszertani elv: Probléma alapú tanulás. Feladatalkotás.
Előforduló problémamegoldási stratégia: visszafelé gondolkodás.

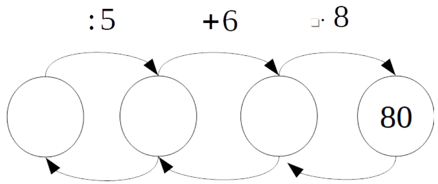
Speciális reflektálási szempont a tanárnak: A játék mennyiben segítette a matematikai tartalom megértését, a nyerő stratégia megalkotását. Mennyire sikerült a tanulóknak releváns feladatokat alkotniuk? (Számkitalálós játék és „az nyer, aki az utolsót húzza” játék.)

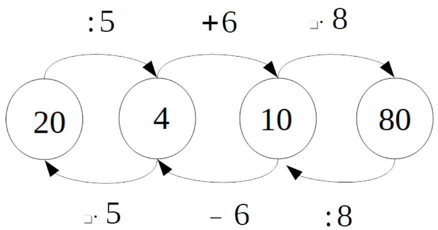
Idő-keret	**Az óra menete**	**Módszer**	**Munka-forma**	**Eszköz**	**Megjegyzés**
6 (6)	Ráhangolás: számkitalálós játék. Írd le a megoldást! A. Gondoltam egy számra, megszoroztam 4-gyel és így 16-ot kaptam. Melyik számra gondoltam? (4) B. Gondoltam egy számra, megszoroztam 4-gyel, elvettem belőle 5-öt, és az eredmény 3 lett. Melyik számra gondoltam? (2) C. Gondoltam egy számra, elosztottam 5-tel,hozzáadtam 6-ot, megszoroztam 8-cal és így 80-at kaptam. Melyik számra gondoltam? (20) Ellenőrzés: ki marad állva?	Játék, Feladat-megoldás	Egyéni Osztály-megbeszélés	Prezen-táció, tábla	Hogyan gondolkodtál? Az állva maradt tanulók közül valaki elmondja. A sémát felírják a táblára. (Ha szükséges, akkor a második feladatnál is)
6 (12)	Ti is alkossatok számkitalálós játékot két (három) művelettel. (A játék eredményétől, illetve az osztálymegbeszéléstől függően kettő, vagy három.) Írd le a feladatot! A párod oldja meg a feladatot! Ellenőrzés: melyek azok a párok, akik kitalálták egymás feladatát?	Feladat-alkotás Feladat-megoldás	Páros		

4 (16)	Párban fogunk játszani. Minden pár kap 11 korongot. A játékosok felváltva vesznek el korongokat a kupacból. Mindkét játékos tetszése szerint 1, 2, 3 korongot vehet el. Az veszít, aki az utolsó korongot veszi el.	Szabad játék	Páros	Páronként kapnak egy csomagot 11 színes koronggal.	A tanulók párban lejátszanak néhány játékot. A lényeg, hogy megértsék a játék szabályát.
4 (20)	Mit gondoltok, hogy ha a kezdő játékos ügyesen játszik, akkor meg tudja-e nyerni a játékot? Vagy a második játékos? Beszéljétek meg párban! Használhatjátok a korongokat továbbra is. Nem várható el, hogy a tanulók megalkotják a nyerő stratégiát, de felvetődhet a visszafelé gondolkodás ötlete, illetve az, hogy aki egy tárgyat hagy maga után, az nyerni fog.	Probléma-megoldás	Páros és frontális Osztálymeg beszélés:	Korongok	
4 (24)	Továbbra is ügyes játékosaink vannak, akik szeretnék megnyerni a játékot. Visszafelé gondolkodva keressük meg a „kezdő nyer” (KNY), és a „kezdő veszít” (KV) állásokat. Közösen elemzik, azokat az állásokat, amikor a tárgyak száma 1, 2, 3, 4, 5	Kérdve kifejtő	Frontális	Mágneses korongok	A táblán mágneses koronggal is játsszuk le!
4 (28)	Keressétek meg a további helyzeteket, amikor a kezdő játékos nyer, ha ügyesen játszik!	Probléma-megoldás	Páros		

2 (30)	Milyen szabályosságot figyeltek meg a „kezdő veszít” állásoknál? Mi lenne a következő „kezdő veszít” helyzet? (1, 5, 9, 13 állandó különbségű sorozat.) Mi a kezdő játékos első lépése a „kezdő nyer” helyzetekben? (11 tárgy esetén kettőt kell elvenni a kezdőnek. El kell érnie a KV helyzetet.)	Kérdve kifejtő	Osztály-megbeszélés	Munkalap	A sorok kitöltése
2 (32)	Hogyan játsszon tovább a kezdő játékos? (A kezdő első lépése után 9 korong marad.) Mit lép a kezdő, ha a második játékos egyet, kettőt, hármat vesz el? (A konkrét állás tanulmányozásával rávezeti a tanulókat, hogy mindig négyre kell kiegészíteni az elvett tárgyak számát.)	Kérdve kifejtő	Osztály-megbeszélés		
5 (37)	A tanulók lejátszanak 11 koronggal egy-egy játékot úgy, hogy felváltva legyenek kezdők. Értékelés: tudott-e mindig a kezdő nyerni?	Játék	Páros	Korongok	
6 (43)	Alkossátok meg a saját játékotokat! Mit változtassunk meg a játékon? A saját játékot a tanulók írják le a füzetbe! (A kezdő állás kockáinak számát, az elvehető tárgyak számát, az nyer, aki az utolsót veszi el…) A probléma variációk megbeszélése. Az egyik probléma variáció házi feladat lesz.	Probléma-alkotás	Egyéni	Füzet	
2 (45)	Kilépő kártya kitöltés: mit üzensz nekem a mai óráról?	Értékelés	Egyéni	A6 méretű papír	a tanuló szabadon írhat

Séma a számkitalálós játékhoz (táblakép)





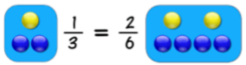
Kezdő nyer és kezdő veszít állások az órán játszott játékban

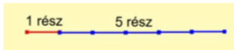
Állás	A kezdő játékos nyerő lépése	A kezdő játékos nyer vagy veszít?
1	nincs	KV
2	-1	KNY
3	-2	KNY
4	-3	KNY
5	nincs	KV
6	-1	KNY
7	-2	KNY
8	-3	KNY
9	nincs	KV
10	-1	KNY
11	-2	KNY

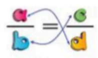
A tanár értelmezi a táblázatot, állás: hány korong van játékban. A kezdő játékos nyerő lépése:leírjuk, hogy hány korongot kell elvenni. Például -1 azt jelenti, hogy 1 korongot elveszünk.

12. melléklet: Arányos osztás online óra prezentációjából származó diasorok – ALF keretrendszer (K2 kérdés)

Arányos osztás - ALF

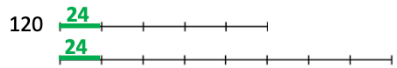






1. Két szám aránya $\frac{5}{8}$. Ha az egyik szám 120, mennyi a másik szám?

   a) Legyen a kisebb szám 120 -> $\frac{5}{8} = \frac{120}{x}$



5 rész = 120

1 rész = 120 : 5 = **24**

8 rész = 8 · 24 = **192**

Ellenőrzés → $\frac{5}{8} = \frac{120}{192}$

Vagy:

$\frac{5}{8} = \frac{120}{x}$

$x = \frac{8 \cdot \cancel{120}}{\cancel{5}}$

$x = \frac{8 \cdot 24}{1}$

$x = 192$

1. Két szám aránya 5 : 8. Ha az egyik szám 120, mennyi a másik szám?

   b) Legyen a nagyobb szám 120.

$\frac{5}{8} = \frac{x}{120}$

8 rész = 120

1 rész = 120 : 8 = **15**

5 rész = 5 · 15 = **75**

Ellenőrzés → 5 : 8 = 75 : 120

Vagy:

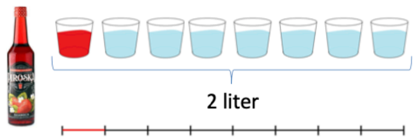
$\frac{5}{8} = \frac{x}{120}$

$x = \frac{5 \cdot 120}{8}$

$x = \frac{5 \cdot 15}{1}$

$x = 75$

2. A szörpös üvegen lévő $\frac{szörp}{víz} = \frac{1}{7}$ arányban készítettünk 2 liter üdítőt. Számítsuk ki a felhasznált szörp és víz mennyiségét!



1) Az arányt meghatározó számokat összeadjuk

1 + 7 = 8

2) Mennyiség elosztása az arányt maghatározó számok összegével

2 liter : 8 = 0,25 liter

0,25

3) A hányadost megszorozzuk az arányt meghatározó számokkal

Szörp → 1 · 0,25 liter = **0,25 liter**

Víz → 7 · 0,25 liter = **1,75 liter**

3. Ellenőrzés

a) 0,25 liter + 1,75 liter = 2 liter

b) $\frac{0,25}{1,75} = \frac{1}{7}$

A 2 liter üdítőben 0,25 liter szörp és 1,75 liter víz van.

3. Rita és Éva 18 db sárkánygyümölcsöt vásárolt. Rita 8 €-t, Éva 28 €-t adott a gyümölcsért. Hány sárkánygyümölcs jutott egy-egy lánynak,ha a kifizetett pénz arányában osztották el a gyümölcsöt?

$$\frac{Rita}{Éva} = \frac{8}{28}$$

A feladatot oldd meg önállóan!

3. Rita és Éva 18 db sárkánygyümölcsöt vásárolt. Rita 8 €-t, Éva 28 €-t adott a gyümölcsért. Hány sárkánygyümölcs jutott egy-egy lánynak, ha a kifizetett pénz arányában osztották el a gyümölcsöt? $\frac{Rita}{Éva} = \frac{8}{28}$

1) 8 + 28 = 36

2) 18 : 36 = 0,5

3) Rita → 8 · 0,5 = **4 db**

Éva → 28 · 0,5 = **14 db**

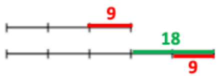
4) a) 4 db + 14 db = 18 db

b) $\frac{8}{28} = \frac{4}{14}$

13. melléklet: Arányok, százalékok online gyakorló óra prezentációjából származó diasorok – ALF keretrendszer (K2 kérdés)

Gyakorlás

1. Két szám különbsége 18, arányuk $\frac{3}{5}$. Melyik ez a két szám?



2 rész = 18

1 rész = 18 : 2 = 9

Kisebb szám → 3 · 9 = **27**

Nagyobb szám → 5 · 9 = **45**

Ellenőrzés: 45 – 27 = 18 $\quad \frac{27}{45} = \frac{3}{5}$

2. Két szám összege 108, arányuk $\frac{4}{5}$. Melyik ez a két szám?

1) 4 + 5 = 9 rész

   9 rész = 108

2) 1 rész = 108 : 9 = 12

3) Kisebb szám → 4 · 12 = **48**

   Nagyobb szám → 5 · 12 = **60**

4) Ellenőrzés: 48 + 60 = 108

   $\frac{48}{60} = \frac{4}{5}$

3. Egy család három napos, összesen 90 km-es bicikli túrát tervezett a Madarasi Hargitára úgy, hogy a naponta megteendő utak aránya 5 : 6 : 4 legyen. Hány kilométert tettek meg naponta?

első : második : harmadik = 5 : 6 : 4

1) 5 + 6 + 4 = 15

2) 90 : 15 = 6

3) Első nap → 5 · 6 = **30 km**

   Második nap → 6 · 6 = **36 km**

   Harmadik nap → 4 · 6 = **24 km**

3. Egy család három napos, összesen 90 km-es bicikli túrát tervezett a Madarasi Hargitára úgy, hogy a naponta megteendő utak aránya 5 : 6 : 4 legyen. Hány kilométert tettek meg naponta?

első : második : harmadik = 5 : 6 : 4

4) a) 30 + 36 + 24 = 90

   b) 30 : 36 : 24 = 5 : 6 : 4

Az első napon 30, a másodikon 36, a harmadik napon 24 km-t tett meg a család.

Házi feladat

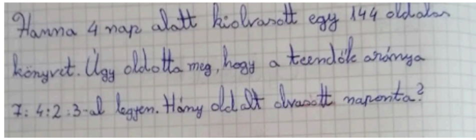
Laci és Robi kaptak egy nagy doboz lekváros linzert a nagymamájuktól. Mind a 60 linzert el kell osztani a két fiú között úgy, hogy a fiúk nem kaphatnak ugyanannyi süteményt.
Találd ki, hogy mi alapján és milyen arányban osszák el a linzert! Mennyi süti jutott a fiúknak külön-külön?
Készíts szöveges feladatot, és írd le a részletes megoldást is!

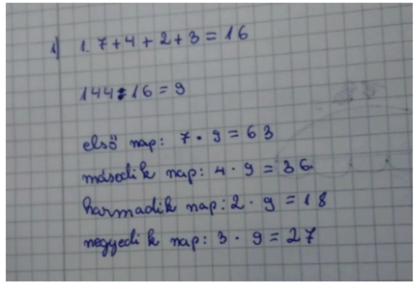
Házi feladat

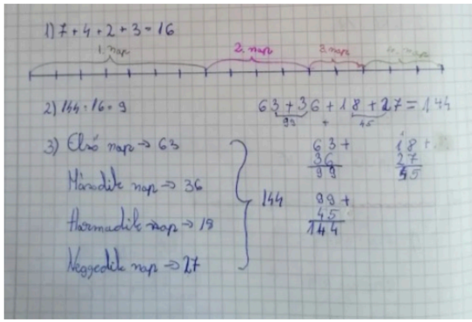
Találj ki egy feladatot arányos osztásra!
Írd le a feladat szövegét és a részletes megoldását is!

14. melléklet: Egyenes arányosság online gyakorló óra prezentációjából származó diasorok – ALF keretrendszer (K2 kérdés)

Osztálytársam feladata







Egyenes arányosság

Ha egy Rumos csoki 1,1 lej, akkor két Rumos csoki 2,2 lej.

Minél többet veszünk, annál többet kell fizetnünk.

Példa egyenes arányosságra.

További példák:

- Minél több vizet használunk, annál nagyobb lesz a vízszámla.

- Minél több lisztből sütünk, annál több lesz a sütemény.

- Minél több narancsot facsarunk ki, annál több lesz a narancslé.

1. Egy kisboltban az Chokotoff Poiana 15 lejbe kerül. Mennyibe kerül 2, 3, 4, 5, 6, 7 darab Chokotoff Poiana ?
   Készíts táblázatot!

Darab	1	2	3	4	5	6	7
Ár (Lej)	15	30	45	60	75	90	105

$\frac{1}{15} = \frac{2}{30} = \frac{3}{45} = \frac{4}{60}$

1 : 15
2 : 30

15 : 1 = 15
30 : 2 = 15

Két változó mennyiséget egymással **egyenesen arányosnak** nevezünk, ha ahányszorosára változik az egyik mennyiség, ugyanannyiszorosára változik a másik mennyiség.

Pl.:

$\cdot 2$ 1 csoki ⟶ 1,1 lej $\cdot 2$
2 csoki ⟶ 2,2 lej

Ha két változó mennyiség között egyenes arányosság van, az összetartozó értékeik hányadosa állandó

Ha két változó mennyiség között egyenes arányosság van, az összetartozó értékeik hányadosa állandó

Pl.: csoki

1 cs → 1,1 lej
2 cs → 2,2 lej

Darab → $\frac{1}{2}$ □ **0,5**

Ár (Lej) → $\frac{1,1}{2,2}$ □ **0,5**

$$\frac{1}{2} = \frac{1,1}{2,2}$$

2. A pékségben 2 db minifánk 12 Lejbe kerül. Hány lejt kell adni 5 db minifánkért.

$$\begin{array}{rcl} & 2\text{ db} \longrightarrow 12\text{ lej} & \\ :2 & 1\text{ db} \longrightarrow 6\text{ lej} & :2 \\ \cdot 5 & 5\text{ db} \longrightarrow \mathbf{30\text{ lej}} & \cdot 5 \end{array}$$

5 db minifánk 30 lejbe kerül.

3. Egy autó kereke 20 fordulattal 38 m-t tesz meg. Mekkora utat tesz meg, ha 150-et fordul?

$$\begin{array}{rcl} & 20\text{ ford.} \longrightarrow 38\text{ m} & \\ :20 & 1\text{ ford.} \longrightarrow 1{,}9\text{ m} & :20 \\ \cdot 150 & 150\text{ ford.} \longrightarrow \mathbf{285\text{ m}} & \cdot 150 \end{array}$$

285 métert tesz meg az autó, ha a kereke 150-et fordul.

Házi feladat:

1. Ha 250 kg kenyér megsütéséhez 180 kg lisztre van szükség, akkor számítsd ki mennyi liszt szükséges 320 kg kenyér elkészítéséhez!
2. Egy játékgyárban 3,5 óra alatt 56 db játékot tudnak elkészíteni. Számítsd ki hány játék készül 8 óra alatt!

Segítség a házihoz: Először számold ki az 1 egységet.
Például 1 kg kenyérhez való liszt mennyisége, 1 óra alatt elkészült játékok.

Gyakorlás

1. **Oldd meg a következő feladatot!**
   Egy vonat 8 perc alatt 11,2 km-t tesz meg. Hány kilométer utat tesz meg 1 óra alatt, ha egyenletesen halad? Egyenes arányosság.

	8 perc	$\longrightarrow$	11,2 km	
:8				:8
	1 perc	$\longrightarrow$	1,4 km	
· 60				· 60
	60 perc	$\longrightarrow$	84 km	

1 óra alatt 84 km-t tesz meg a vonat.

3. A következő feladatokat nem kell kiszámolnod, csak döntsd el, hogy egyenes vagy fordított arányosságról van szó, vagy esetleg nincs arányosság az adatok között!
   a) A rétesnek 150 Ft darabja. Hány forintba kerül 7 darab rétes?

7-szer annyi rétesért 7-szer annyit kell fizetnünk.
Egyenes arányosság.

b) Egy 5 éves kisfiú tömege 18 kg. Hány kg lesz 65 évesen?

Nincs arányosság.

c) Ha 6 tehén legel a legelőn, akkor 10 napra elegendő a fű. Hány napra elég a fű, ha csak 2 tehén legel, és a fű növekedését nem vesszük figyelembe?

Ha harmadannyi tehén legel, akkor háromszor annyi ideig elegendő a fű.
Fordított arányosság.

Házi feladat

Készíts két szöveges feladatot!

- Az egyikben **egyenes vagy fordított arányosság** szerepeljen, és írd le a részletes megoldását is!
- A másik feladatnál **ne álljon fenn arányosság**. Ha tudod, készítsd el ennek a feladatnak a megoldását is!