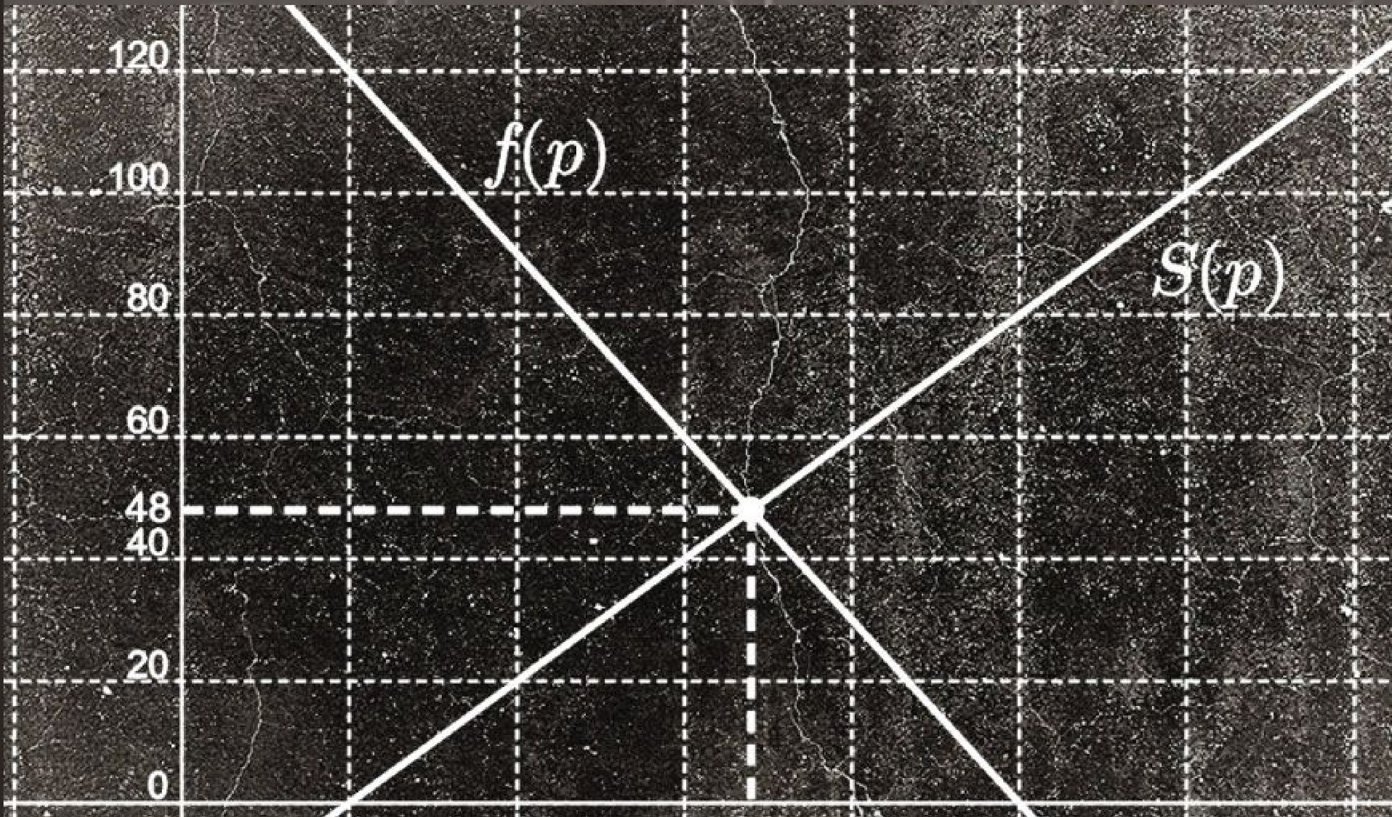
Dr. Kézi Csaba Gábor

Mátrixok és lineáris egyenletrendszerek gazdasági és mérnöki alkalmazásokkal

feladatgyűjtemény



Debreceni Egyetem Műszaki Kar
Műszaki Alaptárgyi Tanszék

DEBRECENI EGYETEM
MŰSZAKI KAR

Dr. Kézi Csaba Gábor

MÁTRIXOK ÉS LINEÁRIS EGYENLET-RENDSZEREK GAZDASÁGI ÉS MÉRNÖKI ALKALMAZÁSOKKAL (FELADATGYŰJTEMÉNY)

DUPress

Debreceni Egyetemi Kiadó
Debrecen University Press
2018

Lektorok:

Dr. Kocsis Imre

Tanszékvezető főiskolai tanár
Debreceni Egyetem Műszaki Kar Műszaki Alaptárgyi Tanszék

Dr. Nagy Gergő

Egyetemi adjunktus, Debreceni Egyetem TTK Analízis Tanszék

DUPress

© Debreceni Egyetemi Kiadó Debrecen University Press,
beleértve az egyetemi hálózaton belüli elektronikus terjesztés jogát is

ISBN 978 963 318 048 8

Kiadta: a Debreceni Egyetemi Kiadó Debrecen University Press
Felelős kiadó: Karácsony Gyöngyi
Nyomdai munkálatokat
a Debreceni Egyetem sokszorosítóüzeme végezte 2018-ban.
www.dupress.hu

Előszó

Ez a feladatgyűjtemény elsősorban a Debreceni Egyetem Műszaki Karának Matematika I. gyakorlatához készült oktatási segédanyagként.

A feladatgyűjtemény a precíz matematikai felépítésen túl számos, a műszaki és gazdasági életben felmerülő probléma megoldására alkalmazható módszert is bemutat.

A feladagyűjtemény felépítésében, jelöléseiben nagyban támaszkodik az azonos címmel megjelenő elméleti jegyzetben leírtakra, így a két segédanyagot együtt célszerű használni.

A feladatgyűjtemény 197 darab részletesen kidolgozott feladatot tartalmaz. A feladattípusok a lineáris algebra elemeivel kezdődnek, ezt követően az alkalmazásorientált feladatok veszik át a főszerepet.

Széles skálán mozog a feladatok nehézségi szintje, ezáltal egyrészt segítséget nyújt a zárthelyi dolgozatokra és a vizsgákra való felkészüléshez, másrészt a későbbi tanulmányok során, vagy akár versenyekre való felkészüléshez is hasznos segítség lehet.

A feladatgyűjteményben a nehezebb, gondolkodtatóbb feladatokat $\star$ jelöli.

A jegyzet elkészüléséért köszönettel tartozom a jegyzet lektorainak, Dr. Kocsis Imre főiskolai tanárnak, a Műszaki Alaptárgyi Tanszék vezetőjének, valamint Dr. Nagy Gergő egyetemi adjunktusnak, akik hasznos információkkal láttak el a jegyzet megírása során, a jegyzet gondos átolvasásával és értékes megjegyzéssel segítették a tananyag elkészülését.

Köszönettel tartozom Dr. Szíki Gusztáv Áron főiskolai tanárnak, aki a fizikai megfogalmazású témakörökben segítette munkámat.

Köszönöm továbbá Kedvesemnek, Józsa Bettina Csillának és Édesanyámnak, akik mindenben mellettem álltak és támogattak a jegyzet megírása során.

2018. január 10.

DUPress

1. Alapműveletek mátrixokkal

1.1. **Feladat.** Tekintsük az $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ mátrixot!

a) Adjuk meg az A mátrix a_{12} és a_{21} elemeit!
b) Adjuk meg az A mátrix típusát!
c) Határozzuk meg az A mátrix főátlóját!
d) Határozzuk meg az A mátrix mellékátlóját!
e) Négyzetes-e az A mátrix?
f) Felső háromszög alakú-e az A mátrix?

Megoldás:

a) Az A mátrix a_{12} eleme az első sor második eleme, azaz $a_{12} = 2$. Az a_{21} elem a második sor első eleme, azaz $a_{21} = 3$.
b) A mátrixnak 3 sora van és 3 oszlopa, így 3×3-as, azaz $(3; 3)$ típusú.
c) Az A mátrix főátlója: $(5; 1; 3)$.
d) Az A mátrix mellékátlója: $(2; 1; 4)$.
e) A mátrix négyzetes, mert a sorainak száma és oszlopainak száma megegyezik.
f) A mátrix nem felső háromszög alakú, mert nem teljesül az, hogy a főátló „alatt” minden elem 0.

1.2. **Feladat.** Tekintsük az $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 8 & 2 \\ 0 & 2 & 9 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ mátrixot!

a) Adjuk meg az A mátrix a_{22} és a_{31} elemeit!
b) Adjuk meg az A mátrix típusát!
c) Határozzuk meg az A mátrix főátlóját!
d) Határozzuk meg az A mátrix mellékátlóját!
e) Négyzetes-e az A mátrix?
f) Felső háromszög alakú-e az A mátrix?

Megoldás:

a) Az A mátrix a_{22} eleme a második sor második eleme, azaz $a_{22} = 2$. Az a_{31} elem a harmadik sor első eleme, azaz $a_{31} = 0$.
b) A mátrixnak 4 sora van és 4 oszlopa, így 4×4-es, azaz $(4; 4)$ típusú.
c) Az A mátrix főátlója: $(1; 2; 4; 5)$.
d) Az A mátrix mellékátlója: $(0; 0; 9; 2)$.
e) A mátrix négyzetes, mert 4 sora és 4 oszlopa van, így a sorok száma megegyezik az oszlopok számával.
f) Igen, mert a mátrix főátlója „alatt” minden elem 0.

1.3. **Feladat.** Egy mátrixnak 24 eleme van. Határozzuk meg a mátrix típusát!

Megoldás:

Valójában azt kell megvizsgálnunk, hogy a 24 hogyan áll elő két pozitív egész szám szorzatként:

$$24 = 1 \cdot 24 = 2 \cdot 12 = 3 \cdot 8 = 4 \cdot 6.$$

Tehát a mátrix típusa lehet:

$$\begin{gathered} 1 \times 24;\ 2 \times 12;\ 3 \times 8;\ 4 \times 6 \\ 24 \times 1;\ 12 \times 2;\ 8 \times 3;\ 6 \times 4. \end{gathered}$$

1.4. **Feladat.** Adjuk meg azt a diagonális mátrixot, amely 4×4-es, továbbá $a_{ii} = i^2$ minden $i \in \{1; 2; 3; 4\}$ esetén.

Megoldás:

A diagonális mátrix definíciója szerint a főátlón kívüli elemek mindegyike zérus. A keresett mátrix tehát:

$$A = \begin{pmatrix} 1^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}.$$

1.5. **Feladat.** Adjuk meg azt a 3×2-es mátrixot, amelynek a_{ij} elemeire teljesül, hogy $a_{ij} = i \cdot j$ minden $i \in \{1; 2; 3\}$ és $j \in \{1; 2\}$ esetén.

Megoldás:

A keresett mátrix:

$$A = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 & 1 \cdot 2 \\ 2 \cdot 1 & 2 \cdot 2 \\ 3 \cdot 1 & 3 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

1.6. **Feladat.** Adjuk meg azt a 2×2-es mátrixot, amelynek a_{ij} elemeire teljesül, hogy $a_{ij} = \frac{i}{j}$ minden $i \in \{1;2\}$ és $j \in \{1;2\}$ esetén.

Megoldás:

Mivel

$$a_{11} = \frac{1}{1} = 1;\ a_{12} = \frac{1}{2}$$
$$a_{21} = \frac{2}{1} = 2;\ a_{22} = \frac{2}{2} = 1.$$

A keresett mátrix:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

1.7. **Feladat.** Adjuk meg a 3×4-es zérusmátrixot:

Megoldás:

A 3×4-es zérusmátrix:

$$O_{3\times 4} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1.8. **Feladat.** Adjuk meg az x és y valós számokat úgy, hogy az

$$A = \begin{pmatrix} x & 3 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$$

és a

$$B = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 4 & y \end{pmatrix}$$

mátrixok egyenlőek legyenek!

Megoldás:

Két mátrix pontosan akkor egyenlő, ha a megfelelő elemeik egyenlőek, így $x = 5$ és $y = -2$.

1.9. **Feladat.** Adjuk meg az x és y valós számokat úgy, hogy az

$$A = \begin{pmatrix} x + y & 2 \\ 5 + z & x \cdot y \end{pmatrix}$$

és a

$$B = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}$$

mátrixok egyenlőek legyenek!

Megoldás:

Két mátrix pontosan akkor egyenlő, ha a megfelelő elemeik egyenlőek, így teljesüline kell az

$$\begin{aligned} x + y &= 6 \\ 5 + z &= 5 \\ x \cdot y &= 8 \end{aligned}$$

egyenletrendszernek. A második egyenletből azt kapjuk, hogy $z = 5$. Az első egyenletből kifejezzük az y ismeretlent:

$$x = 6 - y.$$

Ezt behelyettesítjük a harmadik egyenletbe:

$$(6 - y) \cdot y = 8.$$

A zárójel felbontása után azt kapjuk, hogy

$$6y - y^2 = 8 \qquad \Rightarrow \qquad y^2 - 6y + 8 = 0.$$

A másodfokú egyenlet megoldóképletével

$$y_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 32}}{2} = \frac{6 \pm 2}{2}$$

adódik, így $y_1 = 4$, illetve $y_2 = 2$. Ezeket behelyettesítve az $x = 6 - y$ egyenletbe azt kapjuk, hogy $x_1 = 2$, illetve $x_2 = 4$.

1.10. **Feladat.** Adjuk meg az $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ és a $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ mátrixok típusát!

Megoldás:

Az A mátrixnak 2 sora és 3 oszlopa van, így 2×3 típusú, míg a B mátrixnak 3 sora és 2 oszlopa van, így 3×2 típusú.

1.11. **Feladat.** Adjuk meg az $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ mátrix transzponáltját!

Megoldás:

Egy mátrix transzponáltja a sorok és oszlopok felcserélésével kapott mátrix:

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

1.12. **Feladat.** Határozzuk meg az alábbi mátrixok transzponáltját:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 3 & -2 & 6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 4 & -9 \\ 5 & -2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Megoldás:

Az A mátrix transzponáltja:

$$A^T = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -2 \\ -4 & 6 \end{pmatrix},$$

a B mátrix transzponáltja:

$$B^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix},$$

a C mátrix transzponáltja:

$$C^T = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 1 \\ -9 & -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

1.13. **Feladat.** Tekintsük az $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & -5 & 6 \end{pmatrix}$ és a $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 7 & -9 & 7 \end{pmatrix}$ mátrixokat! Határozzuk meg az

a) $A + B$

b) $2A - 3B$

mátrixokat!

Megoldás:

a) Két mátrixot úgy adunk össze, hogy a megfelelő helyen lévő elemeket összeadjuk, így:

$$A + B = \begin{pmatrix} 1+1 & -2+3 & 3+(-5) \\ 4+7 & -5+(-9) & 6+7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 11 & -14 & 13 \end{pmatrix}.$$

b) Először a skalárral való szorzásokat végezzük el (azaz az első mátrix minden elemét 2-vel, a második mátrix minden elemét 3-mal szorozzuk), majd a kapott mátrixokat kivonjuk (az első mátrix megfelelő elemeiből kivonjuk a második mátrix megfelelő elemeit):

$$2A - 3B = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 6 \\ 8 & -10 & 12 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 9 & -15 \\ 21 & -27 & 21 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} -1 & -13 & 21 \\ -13 & 17 & -9 \end{pmatrix}.$$

1.14. **Feladat.** Tekintsük az $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ és a $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 5 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$ mátrixokat! Határozzuk meg az

a) $A - B$

b) $3A + 2B$

mátrixokat!

Megoldás:

a) Két mátrixot úgy vonunk ki, hogy a megfelelő helyen lévő elemeket kivonjuk, így:

$$A - B = \begin{pmatrix} 1-2 & -1-(-1) \\ 2-1 & 3-5 \\ 4-5 & 5-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

b) Először a skalárral való szorzásokat végezzük el (azaz az első mátrix minden elemét 3-mal, a második mátrix minden elemét 2-vel szorozzuk), majd a kapott mátrixokat összeadjuk:

$$3A + 2B = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 6 & 9 \\ 12 & 15 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 2 & 10 \\ 10 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -5 \\ 8 & 19 \\ 22 & 19 \end{pmatrix}.$$

1.15. **Feladat.** Határozzuk meg az x, y, z, t valós számokat úgy, hogy a

$$3 \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x+1 & 4 \\ -6 & -2t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & x+y \\ z+t & 3 \end{pmatrix}$$

egyenlőség teljesüljön!

Megoldás:

Első lépésben az egyenlőség bal oldalán elvégezzük a skalárral való szorzást, jobb oldalán az összeadást, így az

$$\begin{pmatrix} 3x & 3y \\ 3z & 3t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x+5 & x+y+4 \\ z+t-6 & 3-2t \end{pmatrix}$$

egyenlőséghez jutunk. Két mátrix pontosan akkor egyenlő, ha a megfelelő helyen lévő elemeik egyenlőek. Tehát az egyenlőség fennállásának szükséges és elégséges feltétele az alábbi egyenletek teljesülése

$$\begin{aligned} 3x &= 2x+5 \\ 3y &= x+y+4 \\ 3z &= z+t-6 \\ 3t &= 3-2t. \end{aligned}$$

Az első egyenletből azt kapjuk, hogy $x = 5$. Ezt behelyettesítve a második egyenletbe $y = 4,5$ adódik. Az utolsó egyenletből $t = 0,6$ következik, amit behelyettesítve a harmadik egyenletbe $z = -2,7$ adódik.

1.16. **Feladat.** Jelöljön $m \times n$ egy m-szer n típusú mátrixot. Összeszorozhatók-e az alábbi mátrixok, ha igen, határozzuk meg az eredménymátrix méretét:

a) $2 \times 4 \cdot 3 \times 6$
b) $3 \times 5 \cdot 4 \times 3)$
c) $2 \times 5 \cdot 2 \times 5)$
d) $4 \times 2 \cdot 2 \times 5)$
e) $4 \times 6 \cdot 6 \times 2)$
f) $5 \times 2 \cdot 5 \times 5)$

Megoldás:

Két mátrix pontosan akkor szorozható össze, ha az első mátrix oszlopainak a száma megegyezik a második mátrix sorainak a számával. Ilyenkor az eredménymátrixnak annyi sora, illetve oszlopa van, amennyi sora van az első mátrixnak, illetve amennyi oszlopa van a második mátrixnak. Tehát összeszorozni csak $m \times n$ és $n \times k$ típusú mátrixokat lehet, és ekkor a szorzatmátrix $m \times k$ típusú lesz.

A fentiek alapján azt kapjuk, hogy

a) nem összeszorozhatók;
b) nem összeszorozhatók;
c) nem összeszorozhatók;
d) összeszorozhatók, az eredménymátrix 4×5-ös lesz;
e) összeszorozhatók, az eredménymátrix 4×2-es lesz;
f) nem összeszorozhatók.

1.17. **Feladat.** Tekintsük az $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ és a $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 3 & -2 & 6 \end{pmatrix}$ mátrixokat! Határozzuk meg az

a) $A \cdot B$ b) $B \cdot A$

szorzatokat!

Megoldás:

a) Az első mátrix 2×2-es, a második 2×3-as, így a szorzás elvégezhető, és az eredménymátrix 2×3-as lesz. A mátrixok szorzása úgynevezett sor-oszlop kompozíciós szorzat, azaz az i-edik sor minden elemét megszorozzuk a j-edik oszlop megfelelő elemeivel, és a kapott eredményeket összeadjuk. Így kapjuk a szorzatmátrix $(i; j)$ indexű elemét. Azaz

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 3 & -2 & 6 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2+9 & 0-6 & -4+18 \\ 4-3 & 0+2 & -8-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & -6 & 14 \\ 1 & 2 & -14 \end{pmatrix}.$$

b) A $B \cdot A$ szorzat nem létezik.

1.18. **Feladat.** Tekintsük az $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$ és a $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix}$ mátrixokat! Határozzuk meg az

a) $A \cdot B$ b) $B \cdot A$

szorzatokat!

Megoldás:

a) Az $A \cdot B$ szorzat létezik és

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -5 & 3 \\ 11 & 15 & -11 \\ 7 & 8 & -7 \end{pmatrix}.$$

b) A $B \cdot A$ szorzat is létezik és

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}.$$

DUPress

1.19. **Feladat.** Határozzuk meg az $A \cdot B$ és $B \cdot A$ mátrixokat, ha

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ -1 & -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Megoldás:

Az $A \cdot B$ szorzat:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ -1 & -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 7 & 3 & 3 \\ -2 & -5 & 5 & -3 \end{pmatrix}.$$

A $B \cdot A$ szorzat nem létezik, mert a B mátrixnak 4 oszlopa van és az A mátrixnak 2 sora van.

1.20. **Feladat.** Tekintsük az $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ és a $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & -4 \end{pmatrix}$ mátrixokat! Határozzuk meg az

a) $A^T \cdot B$

b) $B^T \cdot A$

szorzatokat!

Megoldás:

a) Az $A^T \cdot B$ mátrix:

$$A^T \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 6 \\ 3 & 2 & -11 \\ 3 & 6 & -9 \end{pmatrix}.$$

b) A $B^T \cdot A$ mátrix:

$$B^T \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ -3 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -3 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 3 \\ 4 & 2 & 6 \\ 6 & -11 & -9 \end{pmatrix}.$$

1.21. **Feladat.** Határozzuk meg az

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

mátrix négyzetét!

Megoldás:

DUPress

Mivel $A^2 = A \cdot A$, ezért

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 9 & 4 \end{pmatrix}.$$

1.22. **Feladat.** Adottak az

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{és} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 3 & 4 \\ 5 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

mátrixok. Határozzuk meg azt az X mátrixot, melyre $A + X = B$ teljesül.

Megoldás:

Az X mátrixot kifejezve $X = B - A$ adódik, így

$$X = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 3 & 4 \\ 5 & 2 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -3 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 5 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

1.23. **Feladat.** Tekintsük az $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ k & -1 \end{pmatrix}$ mátrixot! Határozzuk meg a k valós szám értékét úgy, hogy az A^2 mátrix zérusmátrix legyen!

Megoldás:

Az A^2 mátrix:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ k & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ k & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2k & 0 \\ 0 & 2k+1 \end{pmatrix}.$$

A zérusmátrix minden eleme nulla, így azt kapjuk, hogy

$$2k + 1 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad k = -\frac{1}{2}.$$

1.24. **Feladat.** Tekintsük az $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$ mátrixot! Határozzuk meg a k valós szám értékét úgy, hogy teljesüljön az

$$A^2 - 6 \cdot A + k \cdot E_2 = 0$$

egyenlet, ahol E_2 a 2×2-es egységmátrixot jelöli!

Megoldás:

Az A^2 mátrix:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -6 \\ -18 & 19 \end{pmatrix}.$$

A $6 \cdot A$ mátrix:

$$6 \cdot A = \begin{pmatrix} 12 & -6 \\ -18 & 24 \end{pmatrix}.$$

A $k \cdot E_2$ mátrix:

$$\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}.$$

Ezek felhasználásával azt kapjuk, hogy

$$A^2 - 6 \cdot A + k \cdot E_2 = \begin{pmatrix} -5+k & 0 \\ 0 & -5+k \end{pmatrix}.$$

A zérusmátrix minden eleme nulla, így teljesülnie kell a $-5 + k = 0$ egyenletnek, amiből azt kapjuk, hogy $k = 5$.

1.25. **Feladat.** Tekintsük az $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ mátrixot! Határozzuk meg az a és b valós számokat úgy, hogy teljesüljön az

$$A^2 = a \cdot A + b \cdot E_2$$

egyenlet, ahol E_2 a 2×2-es egységmátrix.

Megoldás:

Az A^2 mátrix:

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{pmatrix}.$$

Az $a \cdot A + b \cdot E_2$ mátrix:

$$\begin{pmatrix} a & 2a \\ 3a & 4a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b & 2a \\ 3a & 4a+b \end{pmatrix}.$$

Két mátrix pontosan akkor egyenlő, ha a megfelelő elemeik egyenlőek, így teljesülnie kell a $2a = 10$ egyenletnek, amiből azt kapjuk, hogy $a = 5$. Ezt felhasználva, mivel $a + b = 7$, ezért $b = 2$ adódik.

1.26. **Feladat.** ★ Tekintsük az $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ mátrixot!

a) Adjuk meg a $2A$ mátrixot!

b) Adjuk meg az A^2 mátrixot!

c) Adjuk meg az A^3 mátrixot!

d) Bizonyítsuk be, hogy

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 2n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

e) Határozzuk meg a $\sum\limits_{k=1}^{100} A^k$ mátrxiot!

<u>**Megoldás**</u>:

a) A $2A$ mátrix:

$$2A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

b) Az A^2 mátrix:

$$A^2 = A \cdot A = A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

c) Az A^3 mátrix:

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

d) A bizonyítást teljes indukcióval végezzük. Tegyük fel, hogy n-re igaz az állítás, azaz

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 2n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ekkor

$$A^{n+1} = A^n \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 2n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2n+2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Mivel

$$A^{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \cdot (n+1) \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

ezért igazoltuk az állítást.

DUPress

e) Mivel

$$\sum_{k=1}^{100} A^k = A^0 + A^1 + \ldots + A^{100} =$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \ldots + \begin{pmatrix} 1 & 2n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 2+4+\ldots+200 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

ezért ki kell számolnunk az első 100 páros szám összegét. Ezek egy 2 differenciájú számtani sorozatot alkotnak. A számtani sorozat összegképletét felhasználva azt kapjuk, hogy

$$2+4+\ldots+200 = \frac{2\cdot 2 + 99\cdot 2}{2}\cdot 100 = 10\,100.$$

A keresett mátrix tehát:

$$\begin{pmatrix} 1 & 10\,100 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1.27. **Feladat.** Tekintsük az $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ mátrixot! Bizonyítsuk be, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$A^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 1-2^n & 1 \end{pmatrix}.$$

Megoldás:

A bizonyítást teljes indukcióval végezzük. Az állítás $n = 1$-re nyilvánvalóan igaz. Tegyük fel, hogy n-re igaz az állítás. Ekkor

$$A^{n+1} = A^n \cdot A = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 1-2^n & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 2^n\cdot 2 & 0 \\ 1-2^n\cdot 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{n+1} & 0 \\ 1-2^{n+1} & 1 \end{pmatrix}.$$

Azt kaptuk tehát, hogy az állítás $n+1$-re is teljesül, így igazoltuk azt.

1.28. **Feladat.** Szimmetrikus-e az $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 5 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & 2 \\ 5 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ mátrix?

Megoldás:

Mivel az A mátrix transzponáltja:

$$A^T = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 5 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & 2 \\ 5 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

ezért $A^T = A$, így az A mátrix szimmetrikus.

1.29. **Feladat.** Ferdén szimmetrikus-e az

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 4 \\ -3 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

mátrix?

<u>**Megoldás**</u>:

Mivel

$$A^T = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -3 \\ 2 & 0 & -4 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix} = -A,$$

ezért az A mátrix ferdén szimmetrikus.

1.30. **Feladat.** Ferdén szimmetrikus-e az

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 2 \\ -5 & 0 & -4 \\ -2 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

mátrix?

<u>**Megoldás**</u>:

Mivel

$$A^T = \begin{pmatrix} 0 & -5 & -2 \\ 5 & 0 & -4 \\ 2 & -4 & 0 \end{pmatrix} \neq -A,$$

ezért az A mátrix nem ferdén szimmetrikus.

1.31. **Feladat.** Állítsuk elő az

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$

mátrixot egy szimmetrikus és egy ferdén szimmetrikus mátrix összegeként.

DUPress

Megoldás:

Az A mátrix transzponáltja:

$$A^T = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Az $A + A^T$ mátrix:

$$A + A^T = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}.$$

Az eddigieket felhasználva azt kapjuk, hogy

$$\frac{1}{2} \cdot (A + A^T) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Az $A - A^T$ mátrix:

$$A - A^T = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ezt felhasználva azt kapjuk, hogy

$$\frac{1}{2} \cdot (A - A^T) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Felhasználva a kapott eredményeket azt kapjuk, hogy az A mátrix előáll

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

alakban, ahol

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

szimmetrikus és

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

ferdén szimmetrikus mátrix.

1.32. **Feladat.** ★ Tekintsük az $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ mátrixot! Határozzuk meg azokat a zérusvektortól különböző u vektorokat, melyekre $A \cdot u = u$.

Megoldás:

Az u vektornak 2 koordinátából álló oszlopvektornak kell lennie, ellenkező esetben a szorzás nem végezhető el. Legyenek az u vektor koordinátái x és y. Így az $A \cdot u = u$ egyenlet

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

alakban írható föl. Az egyenlet bal oldalán elvégezve a szorzást

$$\begin{pmatrix} 2x + 2y \\ 2x + 5y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

adódik. Két mátrix pontosan akkor egyenlő, ha a megfelelő helyen lévő elemeik megegyeznek, így a

$$\begin{aligned} 2x + 2y &= x \\ 2x + 5y &= y \end{aligned}$$

egyenletrendszerhez jutunk. Elvégezve az összevonásokat az

$$\begin{aligned} x + 2y &= 0 \\ 2x + 4y &= 0 \end{aligned}$$

egyenletrendszert kapjuk. Vegyük észre, hogy a második egyenlet éppen kétszerese az elsőnek, így a két egyenlet ekvivalens (azaz ugyanaz a megoldáshalmazuk), tehát az egyik egyenlet elhagyható. Az $x + 2y = 0$ egyenletben az egyik ismeretlent tetszőlegesen választhatjuk meg. Legyen például $y = t$, ahol $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tetszőleges. Ekkor $x = -2t$ adódik. Tehát a feltételeknek minden

$$u = \begin{pmatrix} -2t \\ t \end{pmatrix}$$

alakú vektor eleget tesz, ahol $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tetszőleges.

1.33. **Feladat.** Tekintsük azt a 2×2-es A mátrixot, amelynek $(i; j)$ indexű eleme $i \cdot j$ minden $i, j = 1, 2$ esetén. Legyen B olyan 3×2-es mátrix, amelynek $(i; j)$ indexű eleme $i + j$ minden $i = 1, 2$ és $j = 1, 2, 3$ esetén. Legyen továbbá

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Adjuk meg az A mátrixot!

b) Határozzuk meg az A^T mátrixot!

c) Szimmetrikus-e az A mátrix?

d) Határozzuk meg az A^2 mátrixot!

e) Határozzuk meg az A^3 mátrixot!
f) Adjuk meg az $A^2 - A$ mátrixot!
g) Határozzuk meg a B mátrixot!
h) Számoljuk ki az $A \cdot B$ mátrixot!
i) Adjuk meg a $B \cdot A$ mátrixot!
j) Létezik-e az $A + B$ mátrix?
k) Határozzuk meg a $C \cdot A$ mátrixot!
l) Határozzuk meg az $A \cdot C$ mátrixot!
m) Adjuk meg a C^T mátrixot és a $C^T \cdot C$ mátrixot!
n) Határozzuk meg a $C \cdot C^T$ mátrixot!
o) Adjuk meg a $C^T + B$ mátrixot!

Megoldás:

a) Az A mátrix:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

b) Az A^T mátrix:

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

c) Az A mátrix szimmetrikus, mert $A^T = A$.

d) Az A^2 mátrix:

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 10 & 20 \end{pmatrix}.$$

e) Az A^3 mátrix:

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 10 & 20 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 & 50 \\ 50 & 100 \end{pmatrix}.$$

f) Az $A^2 - A$ mátrix:

$$A^2 - A = \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 10 & 20 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 8 & 16 \end{pmatrix}.$$

g) A B mátrix:

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

h) Az $A \cdot B$ mátrix:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 11 & 14 \\ 16 & 22 & 28 \end{pmatrix}.$$

i) A $B \cdot A$ mátrix nem létezik, mert a B oszlopainak a száma (3) nem egyezik meg az A sorainak a számával (2).

j) Az $A + B$ mátrix nem létezik, hiszen az A és B mátrixok nem azonos típusúak.

k) A $C \cdot A$ mátrix:

$$C \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

l) Az $A \cdot C$ mátrix nem létezik, mert az A mátrix oszlopainak a száma (2) nem egyenlő a C mátrix sorainak a számával (3).

m) A C mátrix transzponáltja:

$$C^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

A $C^T \cdot C$ mátrix:

$$C^T \cdot C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

n) A $C \cdot C^T$ mátrix:

$$C \cdot C^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

o) A $C^T + B$ mátrix:

$$C^T + B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 5 \\ 2 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

1.34. **Feladat.** Ortogonális-e az

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

DUPress

mátrix?

Megoldás:

Mivel

$$A^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

ezért

$$A^T \cdot A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

így $A^T \cdot A = E_2$, tehát $A^T = A^{-1}$, ami azt jelenti, hogy A ortogonális.

DUPress

2. Mátrixok alapműveleteinek gazdasági alkalmazásai

2.1. **Feladat.** Egy cég három különböző alapanyagból négyféle terméket állít elő. Az alábbi táblázat megmutatja azt, hogy az egyes termékek előállításához mennyi alapanyag szükséges, az egyes alapanyagok költségeit, a nyersanyagokból rendelkezésre álló mennyiségeket (kapacitás), valamint a kész termékek eladási árait:

	T1	**T2**	**T3**	**T4**	**költség (Ft/db)**	**kapacitás**
A1	1	2	1	1	30	60
A2	3	0	3	2	20	80
A3	2	2	1	4	10	100
egységár (Ft/db)	200	100	300	150		

Az egyes termékekből rendre 10, 10, 5, 10 darabot gyártunk. Válaszoljunk mátrixműveletekkel az alábbi kérdésekre!

a) Elegendő-e a rendelkezésre álló kapacitás?
b) Mennyi a megmaradt alapanyag?
c) Mennyi a termékek előállítási költsége 1-1 darab előállítása esetén?
d) Mekkora az összköltség?
e) Mennyi a bevétel?
f) Mennyi a haszon (profit)?

Megoldás:

a) Az egyes alapanyagokból felhasznált mennyiségeket egy mátrix és egy vektor szorzata adja:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 45 \\ 65 \\ 85 \end{pmatrix}.$$

Azt kaptuk tehát, hogy az első alapanyagból 45 darabot, a második alapanyagból 65 darabot, a harmadik alapanyagból 85 darabot kell felhasználni. Mivel

$$45 \leq 60$$
$$65 \leq 80$$
$$85 \leq 100,$$

ezért elegendő a rendelkezésre álló alapanyag mennyiség.

b) A megmaradt alapanyag:

$$\begin{pmatrix} 60 \\ 80 \\ 100 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 45 \\ 65 \\ 85 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 15 \\ 15 \end{pmatrix}.$$

Azt kaptuk tehát, hogy minden alapanyagból 15 darab maradt meg.

c) Az előállítási költség $1-1$ darab termék gyártása esetén:

$$\begin{pmatrix} 30 & 20 & 10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 110 & 80 & 100 & 110 \end{pmatrix}.$$

Az egyes termékek előállítási költsége tehát rendre 110 forint, 80 forint, 100 forint, 110 forint.

d) Az összköltség:

$$C = \begin{pmatrix} 110 & 80 & 100 & 110 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix} =$$
$$= 110 \cdot 10 + 80 \cdot 10 + 100 \cdot 5 + 110 \cdot 10 = 3\,500.$$

Az összköltség tehát 3 500 forint.

e) A bevétel:

$$R = \begin{pmatrix} 200 & 100 & 300 & 150 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix} =$$
$$= 200 \cdot 10 + 100 \cdot 10 + 300 \cdot 5 + 150 \cdot 10 = 6\,000.$$

f) A profit a bevétel és a költség különbsége:

$$\Pi = R - C = 6\,000 - 3\,500 = 2\,500.$$

2.2. **Feladat.** Egy étteremben háromféle levesből eladott adagok számát az alábbi táblázat mutatja:

	gulyásleves	**zöldségleves**	**gyümölcsleves**
hétfő	10	5	5
kedd	20	10	5
szerda	10	10	10
csütörtök	5	20	10
péntek	30	10	20
egységár (Ft/db)	400	200	300

Válaszoljunk mátrixműveletekkel az alábbi kérdésekre!

a) Mennyi a levesekből származó napi bevétel?

b) Mennyi a levesekből származó összbevétel az öt nap alatt?

c) Határozzuk meg az egyes levesfélékből eladott adagok számát az öt nap alatt összesen!

d) Az egyes napokon zöldséglevesből hány adaggal többet adtak el, mint gyümölcslevesből?

<u>**Megoldás**</u>:

a) A megfelelő eredményt egy mátrix és egy vektor szorzata adja:

$$\begin{pmatrix} 10 & 5 & 5 \\ 20 & 10 & 5 \\ 10 & 10 & 10 \\ 5 & 20 & 10 \\ 30 & 10 & 20 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 400 \\ 200 \\ 300 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6\,500 \\ 11\,500 \\ 9\,000 \\ 9\,000 \\ 20\,000 \end{pmatrix}.$$

A levesekből származó bevétel tehát hétfőn $6\,500$ forint, kedden $11\,500$ forint, szerdán és csütörtökön $9\,000$ forint és pénteken $20\,000$ forint volt.

b) Mivel

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6\,500 \\ 11\,500 \\ 9\,000 \\ 9\,000 \\ 20\,000 \end{pmatrix} =$$

$$= 6\,500 + 11\,500 + 9\,000 + 9\,000 + 20\,000 = 56\,000,$$

ezért a levesekből származó összbevétel az 5 nap alatt $56\,000$ forint.

c) Mivel

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 & 5 & 5 \\ 20 & 10 & 5 \\ 10 & 10 & 10 \\ 5 & 20 & 10 \\ 30 & 10 & 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 75 & 55 & 50 \end{pmatrix},$$

ezért az egyes levesekből eladott adagok száma rendre 75; 55; 50.

d) Mivel

$$\begin{pmatrix} 10 & 5 & 5 \\ 20 & 10 & 5 \\ 10 & 10 & 10 \\ 5 & 20 & 10 \\ 30 & 10 & 20 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \\ 10 \\ -10 \end{pmatrix},$$

ezért hétfőn és szerdán ugyanannyi zöldséglevest adtak el, mint gyümölcslevest, kedden 5 adaggal, csütörtökön 10 adaggal több zöldséglevest adtak el, mint gyümölcslevest, pénteken 10 adaggal több gyümölcslevest adtak el, mint zöldséglevest.

2.3. **Feladat.** Egy étteremben négyféle ételből eladott adagok számát az alábbi táblázat mutatja:

	1. étel	**2. étel**	**3. étel**	**4. étel**
hétfő	10	2	3	4
kedd	5	10	7	6
szerda	2	5	4	5
csütörtök	10	6	1	6
péntek	5	10	6	8
egységár (Ft/db)	800	600	900	700

Válaszoljunk mátrixműveletekkel az alábbi kérdésekre!

a) Mennyi volt a bevétel naponta?

b) Adjuk meg a levesekből származó összbevételt az 5 nap alatt!

c) Hány adag fogyott az egyes ételekből naponta?

d) Mennyivel fogyott több naponta a második ételből, mint az elsőből?

Megoldás:

a) A megfelelő eredményt egy mátrix és egy vektor szorzata adja:

$$\begin{pmatrix} 10 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 10 & 7 & 6 \\ 2 & 5 & 4 & 5 \\ 10 & 6 & 1 & 6 \\ 5 & 10 & 6 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 800 \\ 600 \\ 900 \\ 700 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14\,700 \\ 20\,500 \\ 11\,700 \\ 16\,700 \\ 21\,000 \end{pmatrix},$$

tehát a bevétel hétfőn $14\,700$ forint, kedden $20\,500$ forint, szerdán $11\,700$ forint, csütörtökön $16\,700$ forint és pénteken $21\,000$ forint volt.

b) Mivel

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 14\,700 \\ 20\,500 \\ 11\,700 \\ 16\,700 \\ 21\,000 \end{pmatrix} =$$
$$= 14\,700 + 20\,500 + 11\,700 + 16\,700 + 21\,000 = 84\,600,$$

ezért a levesekből származó összbevétel az 5 nap alatt $84\,600$ forint.

c) Mivel

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 10 & 7 & 6 \\ 2 & 5 & 4 & 5 \\ 10 & 6 & 1 & 6 \\ 5 & 10 & 6 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 32 & 33 & 21 & 29 \end{pmatrix},$$

ezért az első ételből 32 adag, a második ételből 33 adag, a harmadik ételből 21 adag és a negyedik ételből 29 adag fogyott összesen az öt nap alatt.

d) Az egyes napokon a második ételből

$$\begin{pmatrix} 10 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 10 & 7 & 6 \\ 2 & 5 & 4 & 5 \\ 10 & 6 & 1 & 6 \\ 5 & 10 & 6 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 5 \\ 3 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

adaggal fogyott több, mint az elsőből. Pontosabban kedden, szerdán és pénteken a második ételből fogyott több rendre 5, 3 és 5 adaggal, míg hétfőn és csütörtökön az első ételből fogyott több, rendre 8, illetve 4 adaggal.

2.4. **Feladat.** Egy utazási irodában a hét első három napján eladott jegyek számát négy helyszínre vonatkozóan az alábbi táblázat mutatja:

	London	**Bécs**	**Párizs**	**Velence**
hétfő	10	5	10	15
kedd	20	6	20	7
szerda	6	7	10	8
egységár (ezer Ft/db)	20	7	20	30

Válaszoljunk mátrixműveletekkel az alábbi kérdésekre!

a) Mennyi az utazási iroda bevétele naponta?

b) Három nap alatt hány jegyet adtak el az egyes városokba?

c) Mennyivel volt több a keddi bevétel, mint a hétfői?

<u>**Megoldás**</u>:

a) A megfelelő eredményt egy mátrix és egy vektor szorzata adja:

$$\begin{pmatrix} 10 & 5 & 10 & 15 \\ 20 & 6 & 20 & 7 \\ 6 & 7 & 10 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 20 \\ 7 \\ 20 \\ 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 885 \\ 1\,052 \\ 609 \end{pmatrix}.$$

b) Az egyes városokba eladott jegyek száma:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 & 5 & 10 & 15 \\ 20 & 6 & 20 & 7 \\ 6 & 7 & 10 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 36 & 18 & 40 & 30 \end{pmatrix}.$$

c) Mivel

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 885 \\ 1\,052 \\ 609 \end{pmatrix} = 167,$$

ezért a hétfői bevétel $167\,000$ forinttal volt több, mint a keddi.

2.5. **Feladat.** Egy cég 3 raktárban 4-féle terméket tárol. Az alábbi táblázat mutatja a tárolt mennyiségeket, az egyes termékek egységárait, a raktározás költségét, valamint a raktár befogadó képességét:

	T1	**T2**	**T3**	**T4**	**költség (Ft/db)**	**kapacitás**
R1	10	4	10	5	20	30
R2	3	5	0	15	30	25
R3	15	9	10	40	15	80
egységár (Ft/db)	200	100	300	50		

Válaszoljunk mátrixműveletekkel az alábbi kérdésekre!

a) Hány darabot tárolnak az egyes termékekből?

b) Mekkora az egyes raktárak szabad kapacitása?

c) Mennyi az egyes termékek raktározási költsége?

d) Mekkora értéket tárolnak az egyes raktárak?

Megoldás:

a) A megfelelő eredményt egy mátrix és egy vektor szorzata adja:

$$\begin{pmatrix} 10 & 4 & 10 & 5 \\ 3 & 5 & 0 & 15 \\ 15 & 9 & 10 & 40 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 29 \\ 23 \\ 74 \end{pmatrix}.$$

b) Az egyes raktárak szabad kapacitása:

$$\begin{pmatrix} 30 \\ 25 \\ 80 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 29 \\ 23 \\ 74 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

c) Az egyes termékek raktározási költsége:

$$\begin{pmatrix} 20 & 30 & 15 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 & 4 & 10 & 5 \\ 3 & 5 & 0 & 15 \\ 15 & 9 & 10 & 40 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 515 & 365 & 350 & 1\,150 \end{pmatrix}.$$

d) Az egyes raktárakban tárolt értékek:

$$\begin{pmatrix} 10 & 4 & 10 & 5 \\ 3 & 5 & 0 & 15 \\ 15 & 9 & 10 & 40 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 200 \\ 100 \\ 300 \\ 50 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5\,650 \\ 1\,850 \\ 8\,900 \end{pmatrix}.$$

2.6. **Feladat.** Négy feladóhelyről három rendeltetési állomásra szállítunk árut. A szállítási költségeket az alábbi mátrix mutatja:

	R1	**R2**	**R3**
F1	10	20	30
F2	40	50	20
F3	30	10	20
F4	60	70	20

Mindegyik feladóhelyről az első rendeltetési helyre 3, a másodikra 5, a harmadikra 4 egységnyi mennyiséget kell szállítani. Mennyi a szállítási költség feladóhelyenként?

Megoldás:

A szállítási költség feladóhelyenként:

$$\begin{pmatrix} 10 & 20 & 30 \\ 40 & 50 & 20 \\ 30 & 10 & 20 \\ 60 & 70 & 20 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 250 \\ 450 \\ 220 \\ 610 \end{pmatrix}.$$

2.7. **Feladat.** Három csoport matematika vizsgajegyeit tartalmazza az alábbi táblázat:

	jeles (5)	**jó (4)**	**közepes (3)**	**elégséges (2)**	**elégtelen (1)**
Cs1	5	8	7	3	1
Cs2	2	4	0	6	2
Cs3	4	6	5	4	0

Mátrixműveletek segítségével válaszoljunk az alábbi kérdésekre.

a) Határozzuk meg a csoportonkénti létszámot!

b) Határozzuk meg az összlétszámot!

c) Határozzuk meg az osztályzatok megoszlását, azaz, hogy az egyes osztályzatokból összesen hány darab született!

d) Számoljuk ki az egyes csoportok vizsgaátlagát!

Megoldás:

a) A csoportonkénti létszám:

$$\begin{pmatrix} 5 & 8 & 7 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 0 & 6 & 2 \\ 4 & 6 & 5 & 4 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 \\ 14 \\ 19 \end{pmatrix}.$$

b) Az összlétszám:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 24 \\ 14 \\ 19 \end{pmatrix} = 24 + 14 + 19 = 57.$$

c) Az osztályzatok megoszlása:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 8 & 7 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 0 & 6 & 2 \\ 4 & 6 & 5 & 4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 18 & 12 & 13 & 3 \end{pmatrix}.$$

d) Az első csoport vizsgaátlaga:

$$\frac{1}{24} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 8 & 7 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{85}{24} = 3,54.$$

A második csoport vizsgaátlaga:

$$\frac{1}{14} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 & 6 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{40}{14} = 2,86.$$

A harmadik csoport vizsgaátlaga:

$$\frac{1}{19} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 6 & 5 & 4 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{67}{19} = 3,53.$$

DUPress

2.8. **Feladat.** Egy vállalat háromféle terméket állít elő (T_1, T_2, T_3) háromféle alkatrész (A_1, A_2, A_3) összeszerelésével. Legyen adott az A és a B mátrix, továbbá a c, d és f vektorok. Az A mátrix a_{ij} elemei azt jelentik, hogy az i-edik alkatrészből a j-edik termék összeszereléséhez hány darabra van szükség. A B mátrix b_{ij} elemei azt jelentik, hogy az i-edik negyedévben a j-edik termékből hány darabot állítanak elő. A c vektor c_i koordinátái jelentik a T_i termék szerelési költségeit. A d vektor d_i koordinátái jelentik az A_i alkatrészből felhasznált mennyiséget egy adott időszakban. Az f vektor f_i koordinátái az i-edik negyedévben felhasznált alkatrészek összköltségei.

a) Mennyi a szerelési költség az egyes negyedévekben?

b) Mennyi az egyes negyedévekben az egyes alkatrészekből felhasznált mennyiség?

c) Az egyes termékekből mennyit tud előállítani a vállalat, ha az alkatrészekből a d vektornak megfelelő mennyiséget használ fel egy adott időszakban?

d) Az egyes termékek előállítása során mennyi az alkatrészek költsége?

Megoldás:

a) A szerelési költség az egyes negyedévekben: $B \cdot c$;

b) Az egyes alkatrészekből felhasznált mennyiség: $B \cdot A^T$;

c) Az előállított mennyiséget az $A \cdot x = d$ egyenlet x megoldása adja, amit úgy is megkaphatunk, hogy $x = A^{-1} \cdot d$;

d) Az alkatrészek költsége: $p^T \cdot A$.

DUPress

3. Mátrixok determinánsa és inverze

3.1. **Feladat.** Határozzuk meg az $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ mátrix determinánsát!

Megoldás:

Kétszer kettes mátrix determinánsa a főátlóbeli és mellékátlóbeli elemek szorzatának különbsége, így

$$\det A = 2 \cdot 5 - 2 \cdot 2 = 10 - 4 = 6.$$

3.2. **Feladat.** Határozzuk meg az $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ mátrix determinánsát!

Megoldás:

Kétszer kettes mátrix determinánsa a főátlóbeli és mellékátlóbeli elemek szorzatának különbsége, így

$$\det A = 3 \cdot 2 - 4 \cdot (-1) = 6 + 4 = 10.$$

3.3. **Feladat.** Határozzuk meg az $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ mátrix determinánsát

a) Sarrus-szabállyal;

b) kifejtési tétellel!

Megoldás:

a) Sarrus-szabállyal.
Leírjuk a mátrix mellé az első két oszlopát:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{matrix}.$$

Ezután a főátlóban és vele párhuzamosan, tőle jobbra lévő két másik átlóban lévő elemeket összeszorozzuk, ezen szorzatokat összeadjuk, majd a mellékátlóban és vele párhuzamosan, tőle jobbra lévő két másik átló elemeit összeszorozzuk és ezen szorzatokat összeadjuk, majd az így kapott összeget kivonjuk az előző összegből, azaz

$$\begin{aligned} \det A = &\big(1 \cdot 1 \cdot 0 + (-2) \cdot 2 \cdot 1 + 3 \cdot 0 \cdot 1\big) - \\ &- \big(1 \cdot 1 \cdot 3 + 1 \cdot 2 \cdot 1 + 0 \cdot 0 \cdot (-2)\big) = -9. \end{aligned}$$

DUPress

b) Kifejtési tétellel.
Egy $n \times n$-es mátrix determinánsának kiszámításához egy tetszőleges sor (vagy oszlop) minden elemét meg kell szoroznunk a hozzá tartozó előjeles aldeterminánssal, és összegeznünk kell a kapott számokat. Ha lehetséges, akkor érdemes olyan sort, vagy oszlopot választani, mely a lehető legtöbb zérust tartalmazza. Jelen esetben válasszuk ki a mátrix második sorát. Ekkor

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \cdot (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} +$$
$$+ 1 \cdot (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Kiszámolva a 2×2-es determinánsokat

$$\det A = 0 \cdot (0-3) + 1 \cdot (0-3) - 2 \cdot (1+2) = -9$$

adódik.

Lényeges, hogy a Sarrus-szabály CSAK 3×3-as mátrixra alkalmazható, míg a kifejtési tétel TETSZŐLEGES négyzetes mátrix determinánsának kiszámolására.

3.4. **Feladat.** Határozzuk meg az $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ mátrix determinánsát!

Megoldás:

Az A mátrix determinánsa:

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = -12 - 2 - (-2-2) = -14 + 4 = -10.$$

3.5. **Feladat.** Számoljuk ki az $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & 4 & 3 \\ 1 & 4 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ mátrix determinánsát!

Megoldás:

Az első sor szerinti kifejtést alkalmazzuk, majd a keletkező háromszor hármas

DUPress

determinánsokat például Sarrus szabállyal számolhatjuk ki:

$$\det A = 2\cdot(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 \\ -2 & 4 & 3 \\ 4 & 0 & -2 \end{vmatrix} + 0\cdot(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 3 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} +$$

$$+\,1\cdot(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 3 \\ 1 & 4 & -2 \end{vmatrix} + (-1)\cdot(-1)^{1+4}\cdot\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & 4 \\ 1 & 4 & 0 \end{vmatrix}.$$

Mivel

$$\left|\begin{array}{rrr|rr} -1 & 3 & 2 & -1 & 3 \\ -2 & 4 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & 0 & -2 & 4 & 0 \end{array}\right. = 8 + 36 - 32 - 12 = 0,$$

továbbá

$$\left|\begin{array}{rrr|rr} 1 & 3 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 3 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right. = -8 + 9 - 8 - 7,$$

és

$$\left|\begin{array}{rrr|rr} 1 & -1 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 4 & 0 & -2 \\ 1 & 4 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right. = -4 + 6 - 16 = -14,$$

ezért

$$\det A = 2\cdot 0 + 0 + 1\cdot(-7) + (-1)\cdot(-1)\cdot(-14) = -21.$$

3.6. **Feladat.** Határozzuk meg az $(1;-3)$ és a $(2;5)$ vektorok által kifeszített paralelogramma területét!

Megoldás:

A keresett terület a vektorok által meghatározott determináns abszolútértéke. Mivel

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} = 5 - (-6) = 11,$$

ezért a keresett terület 11.

3.7. **Feladat.** Határozzuk meg az $(1;-2;1)$, $(2;1;0)$ és az $(1;1;3)$ vektorok által kifeszített paralelepipedon térfogatát!

Megoldás:

DUPress

A keresett térfogat a vektorok által meghatározott determináns abszolútértéke. Mivel

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} = 3 + 2 - 1 + 12 = 16,$$

ezért a keresett térfogat 16.

3.8. **Feladat.** Határozzuk meg az x valós számot úgy, hogy az

$$A = \begin{pmatrix} 2 & x \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$$

mátrix invertálható legyen!

Megoldás:

Egy mátrix pontosan akkor invertálható, ha a determinánsa nem nulla. Így első lépésben kiszámoljuk a mátrix determinánsát:

$$\begin{vmatrix} 2 & x \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-4) - 2x = -8 - 2x,$$

ami pontosan akkor nem nulla, ha $x \neq -4$.

3.9. **Feladat.** Határozzuk meg az x valós szám értékét úgy, hogy az

$$A = \begin{pmatrix} x & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

mátrix invertálható legyen!

Megoldás:

Egy mátrix pontosan akkor invertálható, ha a determinánsa nem nulla. Az A mátrix determinánsa:

$$\det A = \begin{pmatrix} x & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = 3x + 2,$$

ami pontosan akkor nem nulla, ha $x \neq -\frac{2}{3}$.

3.10. **Feladat.** Határozzuk meg az x valós számot úgy, hogy a

$$A = \begin{pmatrix} 2 & x & 1 \\ 3 & -4 & 4 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

mátrix invertálható legyen!

DUPress

Megoldás:

Egy mátrix pontosan akkor invertálható, ha a determinánsa nem nulla. Így első lépésben kiszámoljuk a mátrix determinánsát:

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & x & 1 \\ 3 & -4 & 4 \\ -1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 4x + 9 - 4 - 24 = -4x - 19,$$

ami pontosan akkor nem nulla, ha $x \neq -\frac{19}{4}$.

3.11. **Feladat.** Számoljuk ki az

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$

mátrix inverzét!

Megoldás:

Az

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

mátrix inverze

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix},$$

amennyiben a determináns nem zérus.
Jelen esetben az A mátrix determinánsa:

$$\det A = 2 \cdot 4 - 3 \cdot (-1) = 11,$$

ami nem nulla, így a mátrixnak létezik inverze. Az inverzmátrix

$$A^{-1} = \frac{1}{11} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

3.12. **Feladat.** Számoljuk ki az

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & -6 \end{pmatrix}$$

mátrix inverzét!

Megoldás:

Az A mátrix inverze

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \frac{1}{-38} \cdot \begin{pmatrix} -6 & -4 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}.$$

3.13. **Feladat.** Számoljuk ki az

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 3 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

mátrix inverzét! Az inverzmátrix definíciója alapján ellenőrizzük megoldásunkat!

Megoldás:

A mátrix determinánsát kiszámolhatjuk például Sarrus-szabállyal

$$\det A = \big(1 \cdot (-5) \cdot 1 + 3 \cdot 0 \cdot 0 + (-1) \cdot 3 \cdot 1\big) - \\ - \big(0 \cdot (-5) \cdot (-1) + 1 \cdot 0 \cdot 1 + 1 \cdot 3 \cdot 3\big) = -17,$$

ami nem nulla, így a mátrixnak létezik inverze. Az A mátrix inverzének b_{ij} elemét úgy kapjuk, hogy

$$b_{ij} = \frac{(-1)^{i+j} \cdot \det A_{ji}}{\det A},$$

ahol $\det A_{ji}$ az A mátrix j-edik sorának és i-edik oszlopának törlésével kapott mátrix determinánsa.
A b_{11}-es elem:

$$b_{11} = \frac{(-1)^{1+1} \cdot \det A_{11}}{\det A} = \frac{\begin{vmatrix} -5 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{-17} = \frac{5}{17}.$$

A b_{12}-es elem:

$$b_{12} = \frac{(-1)^{1+2} \cdot \det A_{21}}{\det A} = (-1) \cdot \frac{\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{-17} = \frac{4}{17}.$$

A b_{13}-es elem:

$$b_{13} = \frac{(-1)^{1+3} \cdot \det A_{31}}{\det A} = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 0 \end{vmatrix}}{-17} = \frac{5}{17}.$$

A b_{21}-es elem:

$$b_{21} = \frac{(-1)^{2+1} \cdot \det A_{12}}{\det A} = (-1) \cdot \frac{\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}}{-17} = \frac{3}{17}.$$

A b_{22}-es elem:

$$b_{22} = \frac{(-1)^{2+2} \cdot \det A_{22}}{\det A} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}}{-17} = -\frac{1}{17}.$$

A b_{23}-es elem:

$$b_{23} = \frac{(-1)^{2+3} \cdot \det A_{32}}{\det A} = (-1) \cdot \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}}{-17} = \frac{3}{17}.$$

A b_{31}-es elem:

$$b_{31} = \frac{(-1)^{3+1} \cdot \det A_{13}}{\det A} = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}}{-17} = -\frac{3}{17}.$$

A b_{32}-es elem:

$$b_{32} = \frac{(-1)^{3+2} \cdot \det A_{23}}{\det A} = (-1) \cdot \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}}{-17} = \frac{1}{17}.$$

A b_{33}-es elem:

$$b_{33} = \frac{(-1)^{3+3} \cdot \det A_{33}}{\det A} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -5 \end{vmatrix}}{-17} = \frac{14}{17}.$$

Az inverzmátrix tehát:

$$A^{-1} = -\frac{1}{17} \cdot \begin{pmatrix} -5 & -4 & -5 \\ -3 & 1 & -3 \\ 3 & -1 & -14 \end{pmatrix}.$$

Ellenőrzésképpen kiszámoljuk az $A^{-1} \cdot A$ szorzatot:

$$A^{-1} \cdot A = -\frac{1}{17} \cdot \begin{pmatrix} -5 & -4 & -5 \\ -3 & 1 & -3 \\ 3 & -1 & -14 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 3 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{17} \cdot \begin{pmatrix} -17 & 0 & 0 \\ 0 & -17 & 0 \\ 0 & 0 & -17 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Eredményül a 3×3-as egységmátrixot kaptuk, amivel ellenőriztük az inverz helyességét.

DUPress

Megjegyezzük, hogy az inverz helyességének ellenőrzéséhez az $A \cdot A^{-1}$ szorzatot is ki kellene számolni. Megmutatható azonban, hogy ha $A^{-1} \cdot A = E_n$, akkor abból már az is következik, hogy $A \cdot A^{-1} = E_n$, ahol E_n az $n \times n$-es egységmátrixot jelöli.

3.14. **Feladat.** Tekintsük az

$$A = \begin{pmatrix} 5 & x \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$$

mátrixot!

a) Határozzuk meg az A mátrix determinánsát!

b) Milyen x valós szám esetén invertálható az A mátrix?

c) Ha $x = 2$, akkor számoljuk ki az A mátrix inverzét!

<u>**Megoldás**</u>:

a) Az A mátrix determinánsa

$$\det A = \det \begin{pmatrix} 5 & x \\ 1 & -3 \end{pmatrix} = -15 - x.$$

b) Egy mátrix pontosan akkor invertálható, ha a determinánsa nem nulla, így $-15 - x \neq 0$ kell, hogy teljesüljön, amiből $x \neq -15$ adódik.

c) Ha $x = 2$, akkor a determináns $-15 - 2 = -17$, így az A mátrix inverze

$$A^{-1} = -\frac{1}{17} \cdot \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}.$$

3.15. **Feladat.** Tekintsük az

$$A = \begin{pmatrix} x & 3 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

mátrixot!

a) Határozzuk meg az A mátrix determinánsát!

b) Milyen x valós szám esetén nem invertálható A?

c) Ha $x = 0$, akkor számoljuk ki az A mátrix inverzét!

<u>**Megoldás**</u>:

a) Az A mátrix determinánsa:

$$\det A = \begin{vmatrix} x & 3 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \\ 4 & -2 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} x & 3 \\ -2 & 1 \\ 4 & -2 \end{matrix} =$$
$$= x + 12 - 8 - (8 - 2x - 6) = 3x + 2.$$

b) Egy mátrix pontosan akkor invertálható, ha a determinánsa nem nulla, így $3x + 2 \neq 0$ kell, hogy teljesüljön, amiből $x \neq -2/3$ adódik.

c) Ha $x = 0$, akkor $\det A = 3 \cdot 0 + 2 = 2$, így az

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

mátrix inverze

$$A^{-1} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -6 & 0 \\ 7 & -8 & -12 \\ 1 & 4 & 6 \end{pmatrix}^T = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 7 & 1 \\ -6 & -8 & 4 \\ 0 & -12 & 6 \end{pmatrix}.$$

3.16. **Feladat.** Tekintsük az

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -2 & 2 \\ 3 & 1 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

mátrixot!

a) Határozzuk meg az A mátrix transzponáltját!

b) Szimmetrikus-e az A mátrix?

c) Számoljuk ki a mátrix determinánsát!

d) Adjuk meg az A mátrix inverzének b_{12} elemét!

Megoldás:

a) A mátrix transzponáltja:

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

b) A mátrix nem szimmetrikus, mert $A \neq A^T$.

c) Az A mátrix első sorának -2-szeresét adjuk hozzá a második sorához, az első sor -3-szorosát adjuk hozzá a harmadik sorhoz, az első sor -4-szeresét adjuk hozzá a negyedik sorhoz:

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -2 & 2 \\ 3 & 1 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -3 & -8 & -6 \\ 0 & -5 & -6 & -11 \\ 0 & -7 & -10 & -17 \end{pmatrix}.$$

Amiatt, hogy a mátrixban kisebb számok szerepeljenek, és ezzel megkönnyítsük a további számolásokat, a második sor -2-szeresét adjuk hozzá a harmadik sorhoz és a második sor -3-szorosát adjuk hozzá a negyedik sorhoz:

$$\det A = \det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -3 & -8 & -6 \\ 0 & 1 & 10 & 1 \\ 0 & 2 & 14 & 1 \end{pmatrix}.$$

Az első oszlop szerinti kifejtéssel azt kapjuk, hogy

$$\det A = \det\begin{pmatrix} -3 & -8 & -6 \\ 1 & 10 & 1 \\ 2 & 14 & 1 \end{pmatrix}.$$

A kapott mátrix determinánsának kiszámolására használhatjuk a Sarrus-szabályt:

$$\det A = -30 - 16 - 84 - (-120 - 42 - 8) = 40.$$

Mivel $\det A \neq 0$, ezért az A mátrix invertálható.

d) A mátrix inverzének b_{12} eleme:

$$b_{12} = \frac{(-1)^{1+2} \cdot \det A_{21}}{\det A},$$

ahol

$$\det A_{21} = \det\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

A determinánst számolhatjuk például Sarrus-szabállyal:

$$\det A_{21} = -6 + 3 + 8 - (12 + 4 - 3) = 5 - 13 = -8.$$

Az A mátrix inverzének b_{12} eleme:

$$b_{12} = \frac{(-1)^3 \cdot (-8)}{40} = \frac{1}{5}.$$

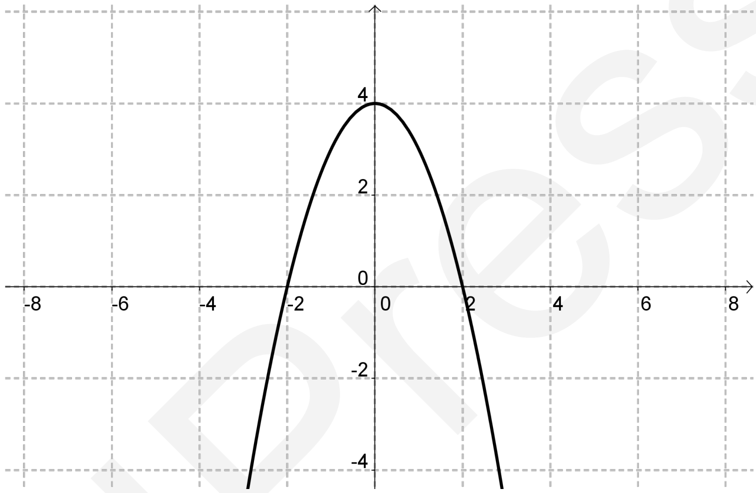
3.17. **Feladat.** Vázoljuk fel az $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \det \begin{pmatrix} 4 & x \\ x & 1 \end{pmatrix}$ függvény grafikonját! Határozzuk meg az f függvény értékkészletét!

Megoldás:

Mivel

$$f(x) = \det \begin{pmatrix} 4 & x \\ x & 1 \end{pmatrix} = 4 - x^2,$$

ezért a függvény értékkészlete a $]-\infty; 4]$ intervallum. A függvény grafikonja:



3.18. **Feladat.** Oldjuk meg a valós számok halmazán a

$$\det \begin{pmatrix} \sin x & -\cos x \\ \cos x & \sin x \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} x & 2 \\ 0 & -x \end{pmatrix} = 0$$

egyenletet!

Megoldás:

Mivel egyrészt

$$\det \begin{pmatrix} \sin x & -\cos x \\ \cos x & \sin x \end{pmatrix} = 1,$$

másrészt

$$\det \begin{pmatrix} x & 2 \\ 0 & -x \end{pmatrix} = -x^2,$$

így az $1 - x^2 = 0$ másodfokú egyenletet kell megoldnunk, amelyre azt kapjuk, hogy $x = \pm 1$.

3.19. **Feladat.** Az $A = \begin{pmatrix} 2p & 3 \\ -4p & p \end{pmatrix}$ mátrix determinánsa $\det(A) = 14$. Adjuk meg a p értékét!

Megoldás:

Az A mátrix determinánsa:

$$\begin{vmatrix} 2p & 3 \\ -4p & p \end{vmatrix} = 2p^2 + 12p.$$

Mivel $\det(A) = 14$, ezért a

$$2p^2 + 12p = 14$$

egyenletet kell megoldanunk, amely ekvivalens a

$$p^2 + 6p - 7 = 0$$

egyenlettel. A másodfokú egyenlet megoldóképletével azt kapjuk, hogy

$$p_{1,2} = \frac{-6 \pm \sqrt{36+28}}{2} = \frac{-6 \pm 8}{2},$$

így a keresett p értékek: $p_1 = 1$, illetve $p_2 = -7$.

3.20. **Feladat.** Tekintsük a $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ mátrixot! Határozzuk meg a

$$\det(A - \lambda \cdot E_2) = 0$$

egyenlet megoldását, ahol E_2 a 2×2-es egységmátrix.

Megoldás:

Az $A - \lambda \cdot E_2$ mátrix:

$$A - \lambda \cdot E_2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-\lambda & 2 \\ 2 & 5-\lambda \end{pmatrix}.$$

A kapott mátrix determinánsa:

$$\det(A - \lambda \cdot E_2) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 \\ 2 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)\cdot(5-\lambda) - 4 = \lambda^2 - 7\lambda + 6.$$

Tehát a $\lambda^2 - 7\lambda + 6 = 0$ egyenlet megoldása:

$$\lambda_{1,2} = \frac{7 \pm 5}{2},$$

így $\lambda_1 = 6$, illetve $\lambda_2 = 1$.

3.21. **Feladat.** Tekintsük az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & x & 4 \\ 0 & x & x \end{vmatrix}$$

függvényt! Ábrázoljuk az $f(x)$ függvényt, adjuk meg az értékkészletét és a zérushelyeit!

Megoldás:

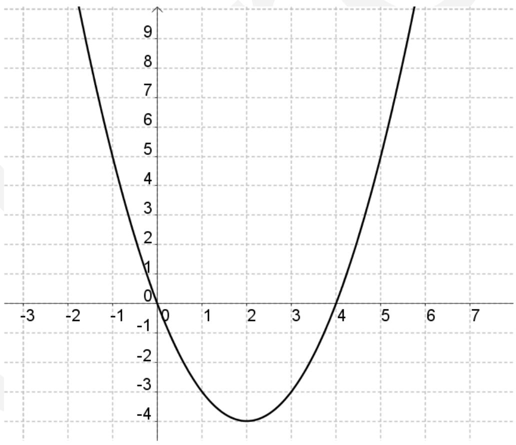
A determinánst az első sora szerinti kifejtéssel számoljuk ki:

$$f(x) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & x & 4 \\ 0 & x & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & 4 \\ x & x \end{vmatrix} = x^2 - 4x.$$

Alakítsuk teljes négyzetté a kapott kifejezést:

$$f(x) = (x-2)^2 - 4.$$

A függvény grafikonja:



A függvény értékkészlete: $y \in [-4; \infty[$.
Mivel

$$x^2 - 4x = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x \cdot (x-4) = 0,$$

ezért a függvény zérushelyei: $x_1 = 0$, illetve $x_2 = 4$.

3.22. **Feladat.** Oldjuk meg a valós számok halmazán a

$$\begin{vmatrix} 2^x & 2^x \\ 5 & 2^x \end{vmatrix} = -4$$

egyenletet!

Megoldás:

A determináns:

$$\begin{vmatrix} 2^x & 2^x \\ 5 & 2^x \end{vmatrix} = 2^{2x} - 5 \cdot 2^x.$$

A megoldandó egyenlet tehát:

$$2^{2x} - 5 \cdot 2^x + 4 = 0$$

Vezessük be a $2^x = a$ jelölést. Ekkor az

$$a^2 - 5a + 4 = 0$$

egyenletet kapjuk. A másodfokú egyenlet megoldóképletét alkalmazva:

$$a_{1,2} = \frac{5 \pm 3}{2}.$$

Azt kaptuk tehát, hogy $a_1 = 4$, illetve $a_2 = 1$. Mivel $2^x = a$, ezért $2^x = 4$, ezért $x_1 = 2$, illetve $2^x = 2^0$, ezért $x_2 = 0$.

3.23. **Feladat.** Tekintsük az

$$A = \begin{pmatrix} x-3 & 1 \\ 1 & x-3 \end{pmatrix}$$

mátrixot.

a) Határozzuk meg az x valós számot úgy, hogy az A mátrix szinguláris legyen!

b) Igazoljuk, hogy

$$A^2 = (2x-6) \cdot A - (x^2 - 6x + 8) \cdot E_2.$$

c) Létezik-e olyan x valós szám, amelyre teljesül, hogy $A^2 = A$? Ha igen, határozzuk meg.

Megoldás:

a) Meg kell határoznunk az x értékét úgy, hogy $\det A = 0$ teljesüljön. Az A mátrix determinánsa

$$\det A = (x-3)^2 - 1 = x^2 - 6x + 8.$$

Az $x^2 - 6x + 8 = 0$ egyenlet megoldóképletével azt kapjuk, hogy

$$x_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{36-32}}{2} = \frac{6 \pm 2}{2},$$

így $x_1 = 4$, illetve $x_2 = 2$ esetén szinguláris a mátrix.

b) Egyrészt

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} x-3 & 1 \\ 1 & x-3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x-3 & 1 \\ 1 & x-3 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} (x-3)^2+1 & 2\cdot(x-3) \\ 2\cdot(x-3) & (x-3)^2+1 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} x^2-6x+10 & 2x-6 \\ 2x-6 & x^2-6x+10 \end{pmatrix}.$$

Másrészt

$$(2x-6)\cdot A = \begin{pmatrix} 2x^2-12x+18 & 2x-6 \\ 2x-6 & 2x^2-12x+18 \end{pmatrix},$$

illetve

$$(x^2-6x+8)\cdot E_2 = \begin{pmatrix} x^2-6x+8 & 0 \\ 0 & x^2-6x+8 \end{pmatrix},$$

így

$$(2x-6)\cdot A - (x^2-6x+8)\cdot E_2 =$$
$$= \begin{pmatrix} x^2-6x+10 & 2x-6 \\ 2x-6 & x^2-6x+10 \end{pmatrix},$$

amivel megkaptuk a bizonyítandó összefüggést.

c) Az $A^2 = 2A$ egyenlet:

$$\begin{pmatrix} x^2-6x+8 & 2x-6 \\ 2x-6 & x^2-6x+8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x-6 & 2 \\ 2 & 2x-6 \end{pmatrix}.$$

Két mátrix pontosan akkor egyenlő, ha a megfelelő elemeik egyenlőek. Az első sor második eleme az egyik mátrix esetén $2x-6$, a másik mátrix esetén 2, így teljesülni kell a

$$2x-6=2$$

egyenletnek, amiből azt kapjuk, hogy $x=4$. Ellenőriznünk kell, hogy ez megoldása-e az

$$x^2-6x+10 = 2x-6$$

egyenletnek is. Mivel

$$4^2-6\cdot 4+10 = 2\cdot 4-6 \qquad \Rightarrow \qquad 2=2,$$

ezért $x=4$ megoldása az egyenletnek. Tehát létezik olyan valós szám, amelyre teljesül az $A^2=2A$ egyenlet, nevezetesen $x=4$.

DUPress

3.24. **Feladat.** Határozzuk meg az $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \det \begin{pmatrix} x^2 - x + 1 & x - 1 \\ x + 1 & x + 1 \end{pmatrix}$$

függvény lokális szélsőértékeit!

Megoldás:

A determinánst kiszámolva azt kapjuk, hogy

$$f(x) = (x^2 - x + 1) \cdot (x + 1) - (x - 1) \cdot (x + 1).$$

A zárójel felbontása és az azonosság elvégzése után azt kapjuk, hogy

$$f(x) = x^3 + x^2 - x^2 - x + x + 1 - x^2 + 1 = x^3 - x^2 + 2.$$

Lokális szélsőérték ott lehet, ahol a függvény deriváltja zérus, így az

$$f'(x) = 0$$

egyenlet megoldását kell meghatároznunk. Mivel

$$f'(x) = 3x^2 - 2x,$$

ezért a $3x^2 - 2x = 0$ egyenletet kell megoldanunk. Kiemelve x-et azt kapjuk, hogy

$$x \cdot (3x - 2) = 0.$$

Egy szorzat úgy lehet nulla, ha valamelyik tényezője nulla, így $x = 0$, illetve $x = \frac{2}{3}$. A függvény második deriváltja

$$f''(x) = 6x - 2.$$

Mivel

$$f''(0) = 6 \cdot 0 - 2 = -2 < 0,$$

ezért az $x = 0$ helyen lokális maximum helye van a függvénynek. Mivel

$$f''\left(\frac{2}{3}\right) = 6 \cdot \frac{2}{3} - 22 > 0,$$

ezért az $x = \frac{2}{3}$ helyen lokális minimum helye van a függvénynek. Mivel

$$f(0) = 0^3 - 0^2 + 2 = 2,$$

ezért a lokális maximum:

$$P_1 = (0; 2).$$

Mivel

$$f\left(\frac{2}{3}\right) = \left(\frac{2}{3}\right)^3 - \left(\frac{2}{3}\right)^2 + 2 = \frac{8}{27} - \frac{4}{9} + 2 = \frac{8 - 12 + 54}{27} = \frac{50}{27},$$

DUPress

ezért a lokális minimum:

$$P_2 = \left(\frac{2}{3}; \frac{50}{27}\right).$$

3.25. **Feladat.** Határozzuk meg az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \det \begin{pmatrix} x & 3 & 0 \\ x & x & 0 \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix}$$

függvény lokális szélsőértékeit!

Megoldás:

A determinánst a harmadik sor szerint kifejtve azt kapjuk, hogy

$$f(x) = x \cdot \det \begin{pmatrix} x & 3 \\ x & x \end{pmatrix} = x \cdot (x^2 - 3x) = x^3 - 3x^2.$$

Lokális szélsőérték ott lehet, ahol a függvény deriváltja zérus, így az

$$f'(x) = 0$$

egyenlet megoldását kell meghatároznunk. Mivel

$$f'(x) = 3x^2 - 6x,$$

ezért a $3x^2 - 6x = 0$ egyenletet kell megoldanunk. Kiemelve x-et azt kapjuk, hogy

$$x \cdot (3x - 6) = 0.$$

Egy szorzat úgy lehet nulla, ha valamelyik tényezője nulla, így $x = 0$, illetve $x = 2$. A függvény második deriváltja

$$f''(x) = 6x - 6.$$

Mivel

$$f''(0) = 6 \cdot 0 - 6 = -6 < 0,$$

ezért az $x = 0$ helyen lokális maximum helye van a függvénynek. Mivel

$$f''(2) = 6 \cdot 2 - 6 = 6 > 0,$$

ezért az $x = 2$ helyen lokális minimum helye van a függvénynek. Mivel

$$f(0) = 0^3 - 3 \cdot 0^2 = 0,$$

ezért a lokális maximum:

$$P_1 = (0; 0).$$

Mivel

$$f(2) = 2^3 - 3 \cdot 2^2 = -4,$$

DUPress

ezért a lokális minimum:

$$P_2 = (2; -4).$$

3.26. **Feladat.** ★ Legyen $n \in \mathbb{N}$ és $n \geq 3$, továbbá A egy olyan $n \times n$-es mátrix, melynek minden sora olyan, hogy az egy sorban lévő elemek egy számtani sorozat egymást követő tagjai. Mennyi az A mátrix determinánsa?

Megoldás:

Az A mátrix utolsó oszlopából vonjuk le az utolsó előtt oszlopát. Az utolsó előtti oszlopból vonjuk le az azt megelőzőt. A kapott oszlopok azonosak, ugyanis mindkét oszlopban a sorokban szereplő számtani sorozatok differenciái szerepelnek, tehát a mátrix determinánsa zérus. Olyan átalakításokat végeztünk, amelyek nem változtattak a mátrix determinánsán, így az eredeti mátrix determinánsa is nulla.

DUPress

4. Titkosírás mátrixokkal

4.1. **Feladat.** A magyar ábécé betűihez rendeljük hozzá azt a számot, ahanyadik helyen található a szóbanforgó betű az ábécében. A „kettős” mássalhangazókat és a hármas mássalhangzót hagyjuk ki ebből a felsorolásból, hiszen például a „cs” betűt egy „c” és „s” karakter egymás mellé írásával fogjuk előállítani. A „szóközhöz” a 0 számot rendeljük hozzá, a mondatközi és mondat végi írásjelektől jelen esetben eltekintünk. Azaz tekintsük az alábbi hozzárendelést:

a $\to 1$	h $\to 10$	ó $\to 19$	ú $\to 28$
á $\to 2$	i $\to 11$	ö $\to 20$	ü $\to 29$
b $\to 3$	í $\to 12$	ő $\to 21$	ű $\to 30$
c $\to 4$	j $\to 13$	p $\to 22$	v $\to 31$
d $\to 5$	k $\to 14$	q $\to 23$	w $\to 32$
e $\to 6$	l $\to 15$	r $\to 24$	x $\to 33$
é $\to 7$	m $\to 16$	s $\to 25$	y $\to 34$
f $\to 8$	n $\to 17$	t $\to 26$	z $\to 35$
g $\to 9$	o $\to 18$	u $\to 27$	szóköz $\to 0$

Határozzuk meg azt a szót, amelyet az

$$X = \begin{pmatrix} 34 & 56 \\ 63 & 90 \\ 30 & 50 \\ 77 & 104 \end{pmatrix}$$

mátrix felhasználásával kapunk a

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

kódoló mátrix segítségével!

<u>**Megoldás**</u>:

A B mátrix determinánsa:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 6 = -2.$$

A B mátrix inverze:

$$B^{-1} = -\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

A „dekódolt” A mátrix:

$$A = X \cdot B^{-1} = -\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 34 & 56 \\ 63 & 90 \\ 30 & 50 \\ 77 & 104 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & 6 \\ 9 & 18 \\ 15 & 5 \\ 2 & 25 \end{pmatrix}.$$

A fenti kulcs alapján a keresett szó: „megoldás”.

4.2. **Feladat.** Határozzuk meg azt a szót, amelyet az

$$X = \begin{pmatrix} 22 & 40 \\ 98 & 148 \\ 110 & 154 \end{pmatrix}$$

mátrix felhasználásával kapunk a

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

kódoló mátrix segítségével!

Megoldás:

A B mátrix inverze:

$$B^{-1} = -\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

A „dekódolt" A mátrix

$$A = X \cdot B^{-1} = -\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 22 & 40 \\ 98 & 148 \\ 110 & 154 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & 2 \\ 26 & 24 \\ 11 & 33 \end{pmatrix}.$$

A keresett szó tehát az ábécé 16., 2., 26., 24., 11. és 33. betűjének egymás mellé írásából keletkezik, ami: „mátrix”.

4.3. **Feladat.** Kódoljuk a „feladatok” szót a

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 10 \end{pmatrix}$$

kódoló mátrix segítségével!

Megoldás:

A 4.1. feladatban ismertetett karaktertáblázat szerint az A mátrix:

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 6 & 15 \\ 1 & 5 & 1 \\ 26 & 18 & 14 \end{pmatrix}.$$

A kódolt mátrix tehát:

$$X = A \cdot B = \begin{pmatrix} 8 & 6 & 15 \\ 1 & 5 & 1 \\ 26 & 18 & 14 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 10 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 137 & 166 & 210 \\ 28 & 35 & 43 \\ 196 & 254 & 326 \end{pmatrix}.$$

4.4. **Feladat.** Határozzuk meg azt a szót, amelyet az

$$X = \begin{pmatrix} 125 & 163 & 206 \\ 260 & 319 & 404 \end{pmatrix}$$

mátrix felhasználásával kapunk a

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 10 \end{pmatrix}$$

kódoló mátrix segítségével!

Megoldás:

A B mátrix determinánsa:

$$\det(B) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 10 \end{vmatrix} =$$
$$= 50 + 84 + 96 - 105 - 48 - 80 = -3.$$

Az inverz mátrix $(1;1)$-es eleme:

$$\frac{(-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 10 \end{vmatrix}}{-3} = -\frac{2}{3}.$$

Az inverz mátrix $(1;2)$-es eleme:

$$\frac{(-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 10 \end{vmatrix}}{-3} = -\frac{4}{3}.$$

Az inverz mátrix $(1;3)$-as eleme:

$$\frac{(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix}2 & 3\\ 5 & 6\end{vmatrix}}{-3}=1.$$

Az inverz mátrix $(2;1)$-es eleme:

$$\frac{(-1)^{2+1}\cdot\begin{vmatrix}4 & 6\\ 7 & 10\end{vmatrix}}{-3}=-\frac{2}{3}.$$

Az inverz mátrix $(2;2)$-es eleme:

$$\frac{(-1)^{2+2}\cdot\begin{vmatrix}1 & 3\\ 7 & 10\end{vmatrix}}{-3}=\frac{11}{3}.$$

Az inverz mátrix $(2;3)$-as eleme:

$$\frac{(-1)^{2+3}\cdot\begin{vmatrix}1 & 3\\ 4 & 6\end{vmatrix}}{-3}=-2.$$

Az inverz mátrix $(3;1)$-es eleme:

$$\frac{(-1)^{3+1}\cdot\begin{vmatrix}4 & 5\\ 7 & 8\end{vmatrix}}{-3}=1.$$

Az inverz mátrix $(3;2)$-es eleme:

$$\frac{(-1)^{3+2}\cdot\begin{vmatrix}1 & 2\\ 7 & 8\end{vmatrix}}{-3}=-2.$$

Az inverz mátrix $(3;3)$-es eleme:

$$\frac{(-1)^{3+3}\cdot\begin{vmatrix}1 & 2\\ 4 & 5\end{vmatrix}}{-3}=1.$$

Az előbbieket felhasználva a B mátrix inverze:

$$B^{-1}=-\frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix}2 & 4 & -3\\ 2 & -11 & 6\\ -3 & 6 & -3\end{pmatrix}.$$

A „dekódolt” A mátrix

$$A = X \cdot B^{-1} = -\frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 125 & 163 & 206 \\ 260 & 319 & 404 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 & -3 \\ 2 & -11 & 6 \\ -3 & 6 & -3 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 14 & 19 & 5 \\ 18 & 15 & 26 \end{pmatrix}.$$

A keresett szó „kódolt”.

4.5. **Feladat.** Lehet-e a

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

mátrix kódoló mátrix?

<u>**Megoldás**</u>:

A B mátrix determinánsa:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 45 + 84 + 96 - 105 - 48 - 72 = 0,$$

ezért a B mátrix nem lehet kódoló mátrix.

4.6. **Feladat.** Kódoljuk a „szeretlek” szót a kódoló mátrix segítségével! Ellenőrizzük, hogy a B mátrix invertálható!

<u>**Megoldás**</u>:

A 4.1. feladatban ismertetett karaktertáblázat szerint az A mátrix:

$$A = \begin{pmatrix} 25 & 35 & 6 \\ 24 & 6 & 26 \\ 15 & 6 & 14 \end{pmatrix}.$$

A kódolt mátrix tehát:

$$X = A \cdot B = \begin{pmatrix} 25 & 35 & 6 \\ 24 & 6 & 26 \\ 15 & 6 & 14 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 5 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 57 & 14 & 77 \\ 13 & 6 & 30 \\ 78 & 44 & 208 \end{pmatrix}.$$

A B mátrix determinánsa:

$$\det B = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 5 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 15 - 12 - 2 = 1.$$

Mivel a B mátrix determinánsa nem nulla, ezért a mátrix invertálható.

DUPress

5. Leontief-féle modell

5.1. **Feladat.** Egy gazdaság ráfordítási mátrixa

$$A = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,5 \\ 0,4 & 0,3 \end{pmatrix}.$$

a) Produktív-e (működőképes-e) a gazdaság?

b) Mennyi legyen a teljes kibocsátás ahhoz, hogy a

$$d = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

vektorral megadott nettó termelést elérjük?

c) Mely termékek előállítása nyereséges, ha árrendszerünk a $v = (2,5)$ vektorral adható meg?

Megoldás:

a) Az $E_2 - A$ mátrix inverzének az elemeit kell megvizsgálnunk, ahol E_2 a 2×2-es egységmátrix. Az

$$E_2 - A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0,1 & 0,5 \\ 0,4 & 0,3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,9 & -0,5 \\ -0,4 & 0,7 \end{pmatrix}$$

mátrix inverze

$$(E_2 - A)^{-1} = \frac{1}{0,43} \cdot \begin{pmatrix} 0,7 & 0,5 \\ 0,4 & 0,9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,63 & 1,16 \\ 0,93 & 2,09 \end{pmatrix}.$$

Mivel a Leontief inverz minden tagja nemnegatív, ezért a gazdaság működőképes.

b) A teljes kibocsátás

$$(E_2 - A)^{-1} \cdot d = \begin{pmatrix} 1,63 & 1,16 \\ 0,93 & 2,09 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9,53 \\ 11,15 \end{pmatrix},$$

tehát $9,53$ egységet kell az első, $11,15$ egységet kell a második termékből előállítani, ahhoz hogy a megadott nettó termelést elérjük.

c) Mivel

$$v \cdot A = (2\ 5) \cdot \begin{pmatrix} 0,1 & 0,5 \\ 0,4 & 0,3 \end{pmatrix} = (2,2; 2,5),$$

ezért az első termék előállítása $2,2$ egységbe kerül, így az veszteséges (a veszteség $0,2$ egység), a második termék előállítása $2,5$ egységbe kerül, így az nyereséges (a nyereség $2,5$ egység).

5.2. **Feladat.** Egy gazdaság ráfordítási mátrixa

$$A = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,4 \\ 0,5 & 0,3 \end{pmatrix}.$$

Produktív-e (működőképes-e) a gazdaság?

Megoldás:

Az $E_2 - A$ mátrix:

$$E_2 - A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0,2 & 0,4 \\ 0,5 & 0,3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,8 & -0,4 \\ -0,5 & 0,7 \end{pmatrix}.$$

Az $E_2 - A$ mátrix determinánsa:

$$\det(E_2 - A) = 0,56 - 0,2 = 0,36.$$

Az $E_2 - A$ mátrix inverze:

$$\frac{1}{0,36} \cdot \begin{pmatrix} 0,7 & 0,4 \\ 0,5 & 0,8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{35}{18} & \frac{10}{9} \\ \frac{25}{18} & \frac{20}{9} \end{pmatrix}.$$

A kapott mátrix minden eleme nem-negatív, ezért a gazdaság produktív.

5.3. **Feladat.** Egy gazdaság ráfordítási mátrixa

$$A = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,4 & 0,3 \\ 0,5 & 0,3 & 0,1 \\ 0,2 & 0,3 & 0,2 \end{pmatrix}.$$

Produktív-e (működőképes-e) a gazdaság?

Megoldás:

Az $E_3 - A$ mátrix:

$$E_3 - A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0,2 & 0,4 & 0,3 \\ 0,5 & 0,3 & 0,1 \\ 0,2 & 0,3 & 0,2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0,8 & -0,4 & -0,3 \\ -0,5 & 0,7 & -0,9 \\ -0,2 & -0,3 & 0,8 \end{pmatrix}.$$

Az $E_3 - A$ mátrix determinánsa:

$$\det(E_3 - A) = -0,087.$$

DUPress

Az $E_3 - A$ mátrix inverzének első eleme:

$$\frac{(-1)^2 \cdot \begin{vmatrix} 0,7 & -0,9 \\ -0,3 & 0,8 \end{vmatrix}}{-0,087} = \frac{0,29}{-0,087} = -\frac{10}{3}.$$

Az $(E_3 - A)$ mátrix inverzének már az első eleme negatív, így a gazdaság nem produktív.

5.4. **Feladat.** Tekintsünk egy olyan gazdaságot, amely három szektorból áll. A szektorok az autógyártás, a fémipar és a villamosenergia termelés. Az alábbi táblázat oszlopai megmutatják, hogy az egyes szektorok által előállított termékek előállításához hány egység szükséges a különböző szektorok termékeiből, továbbá a táblázat tartalmazza a teljes ráfordítást. Az autógyártás esetén az egység ezer darab, a fémipar esetén ezer kilogramm, a villamosenergia esetén pedig ezer kWh.

	autógyártás	**fémipar**	**villamosenergia term.**
autógyártás	2	1	1
fémipar	3	4	3
villamosenergia term.	1	3	6
teljes ráfordítás	10	10	10

a) Adjuk meg a gazdaság ráfordítási mátrixát!

b) Rövid távon produktív-e a gazdaság?

Megoldás:

a) A gazdaság ráfordítási mátrixa:

$$\begin{pmatrix} 0,2 & 0,1 & 0,1 \\ 0,3 & 0,4 & 0,3 \\ 0,1 & 0,3 & 0,6 \end{pmatrix}.$$

b) Ahhoz, hogy megtudjuk, hogy produktív-e a gazdaság, ki kell számolnunk az $E_3 - A$ mátrix inverzét. Az $E_3 - A$ mátrix:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0,2 & 0,1 & 0,1 \\ 0,3 & 0,4 & 0,3 \\ 0,1 & 0,3 & 0,6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,8 & -0,1 & -0,1 \\ -0,3 & 0,6 & -0,3 \\ -0,1 & -0,3 & 0,4 \end{pmatrix}.$$

Az $E_3 - A$ mátrix inverze:

$$(E_3 - A)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{5}{3} & \frac{7}{9} & 1 \\ \frac{5}{3} & \frac{31}{9} & 3 \\ \frac{5}{3} & \frac{25}{9} & 5 \end{pmatrix}.$$

A mátrix minden eleme pozitív, így a gazdaság rövid távon produktív.

DUPress

6. Vektorterek, mátrix rangja

6.1. **Feladat.** Vektorteret alkotnak-e $\mathbb{R}^3$ azon vektorai, ahol a második koordináta 1?

Megoldás:

Ezen vektorok nem alkotnak alkotnak vektorteret, mert az összeadásra nézve nem zárt a halmaz, pontosabban ha a_1 és a_2 olyan vektorok, amelyik második koordinátája 1, akkor $a_1 + a_2$ olyan vektor, amelynek második koordinátája 2.

6.2. **Feladat.** Vektorteret alkotnak-e azok a 2×2-es mátrixok, amelyek főátlóbeli elemei nullák?

Megoldás:

Vektorteret alkotnak, mert két ilyen típusú mátrix összege is ilyen típusú, és egy ilyen mátrix számszorosa is ilyen. Hiszen, ha a, b, c, d tetszőleges valós számok és

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix}$$

és

$$B = \begin{pmatrix} 0 & c \\ d & 0 \end{pmatrix},$$

akkor

$$A + B = \begin{pmatrix} 0 & a+c \\ b+d & 0 \end{pmatrix}$$

és minden $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén

$$\lambda \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & \lambda \cdot a \\ \lambda \cdot b & 0 \end{pmatrix}.$$

6.3. **Feladat.** Vektorteret alkotnak-e azok a 2×2-es mátrixok, amelynek egyetlen eleme sem zérus?

Megoldás:

Nem alkotnak vektorteret, mert két ilyen típusú mátrix összege nem mindig lesz ilyen típusú, ugyanis legyen például

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$$

és

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -3 & -3 \end{pmatrix}.$$

Ekkor

$$A + B = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

tehát az $A + B$ mátrixnak van olyan eleme, ami zérus.

6.4. **Feladat.** Vektorteret alkotnak-e azok az $\mathbb{R}^3$-beli vektorok, amelyek koordinátáinak összege nulla?

Megoldás:

Legyen $a_1 \in \mathbb{R}^3$,

$$a_1 = (x_1; x_2; x_3)$$

olyan vektor, melyre

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0.$$

Legyen $a_2 \in \mathbb{R}^3$

$$a_2 = (y_1; y_2; y_3)$$

olyan vektor, melyre

$$y_1 + y_2 + y_3 = 0.$$

Ekkor

$$a_1 + a_2 = (x_1; x_2; x_3) + (y_1; y_2; y_3).$$

Az összeadást elvégezve:

$$a_1 + a_2 = (x_1 + y_1; x_2 + y_2; x_3 + y_3).$$

Ennek a vektornak a koordinátáinak az összege

$$x_1 + y_1 + x_2 + y_2 + x_3 + y_3 = (x_1 + +x_2 + x_3) + (y_1 + y_2 + y_3) = 0.$$

Tehát ha

$$X = \{(x_1; x_2; x_3) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$$

és $a_1, a_2 \in X$, akkor $a_1 + a_2 \in X$, azaz zárt az összeadásra nézve a halmaz. Másrészt $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén

$$\lambda \cdot a_1 = \lambda \cdot (x_1; x_2; x_3) = (\lambda \cdot x_1; \lambda \cdot x_2; \lambda \cdot x_3)$$

és

$$\lambda \cdot x_1 + \lambda \cdot x_2 + \lambda \cdot x_3 = \lambda \cdot (x_1 + x_2 + x_3) = \lambda \cdot 0 = 0.$$

Tehát ha $a_1 \in X$, akkor $\lambda \cdot a_1 \in X$, tehát X zárt a skalárral való szorzásra nézve.

6.5. **Feladat.** Adjuk meg az $a_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ és az $a_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ vektoroknak a $2a_1 + 3a_2$ lineáris kombinációját!

Megoldás:

A keresett lineáris kombináció:

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 18 \end{pmatrix}.$$

6.6. **Feladat.** Lineárisan függetlenek-e az alábbi vektorok:

$$a_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad a_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}?$$

Megoldás:

Tekintsük az

$$x_1 \cdot a_1 + x_2 \cdot a_2 = 0$$

lineáris kombinációt. Behelyettesítve az a_1, a_2 vektorokat

$$x_1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} + x_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

adódik. Elvégezve a skalárral való szorzást, majd az összeadást azt kapjuk, hogy

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ -2x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Két vektor pontosan akkor egyenlő, ha a megfelelő helyen lévő koordinátái egyenlőek, így $x_2 = 0$, valamint $-2x_1 = 0$, amiből $x_1 = 0$, következésképpen a megadott vektorok lineárisan függetlenek.
A lineáris függetlenséget eldönthetjük az egyes vektorokból képzett mátrix determinánsának kiszámításával is. Ha a determináns értéke nullától különböző, akkor a vektorok lineárisan függetlenek, egyébként lineárisan függők. Jelen esetben

$$\det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = 2 \neq 0,$$

így a vektorok lineárisan függetlenek.
Megjegyezzük, hogy a síkon két vektor pontosan akkor lineárisan független, ha nem egy, az origón átmenő egyenesre illeszkednek.

DUPress

6.7. **Feladat.** Lineárisan függetlenek-e az alábbi vektorok:

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad a_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}?$$

Megoldás:

Tekintsük az

$$x_1 \cdot a_1 + x_2 \cdot a_2 = 0$$

lineáris kombinációt. Behelyettesítve az a_1, a_2 vektorokat

$$x_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + x_2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

adódik. Elvégezve a skalárral való szorzást, majd az összeadást azt kapjuk, hogy

$$\begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 \\ 2x_1 + 4x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Két vektor pontosan akkor egyenlő, ha a megfelelő helyen lévő koordinátái egyenlőek, így az

$$x_1 + 2x_2 = 0,$$

valamint a

$$2x_1 + 4x_2 = 0$$

egyenletekhez jutunk. A két egyenlet ekvivalens egymással, így az egyik egyenlet elhagyható. Az $x_1 + 2x_2 = 0$ egyenletnek pedig végtelen sok megoldása van, nem csak a $(0; 0)$ számpár, következésképpen a megadott vektorok lineárisan függők.

6.8. **Feladat.** Lineárisan függetlenek-e az alábbi vektorok:

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad a_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad a_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}?$$

Megoldás:

Tekintsük az

$$x_1 \cdot a_1 + x_2 \cdot a_2 + x_3 \cdot a_3 = 0$$

lineáris kombinációt. Behelyettesítve az a_1, a_2, a_3 vektorokat

$$x_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} + x_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + x_3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

adódik. Elvégezve a skalárral való szorzást és az összevonást azt kapjuk, hogy

$$\begin{pmatrix} x_1 + x_2 + x_3 \\ -x_1 + 2x_3 \\ -2x_1 - x_2 + 3x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Két vektor pontosan akkor egyenlő, ha a megfelelő helyen lévő koordinátái egyenlőek. Így az

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ -\,x_1 \phantom{{}+x_2} + 2x_3 &= 0 \\ -2x_1 - x_2 + 3x_3 &= 0 \end{aligned}$$

egyenletrendszert kell megoldanunk. A második egyenletből $x_1 = 2x_3$ adódik, melyet behelyettesítve az első és a harmadik egyenletbe, az

$$\begin{aligned} x_2 + 3x_3 &= 0 \\ -x_2 - x_3 \ &= 0 \end{aligned}$$

egyenletrendszerhez jutunk. A két egyenletet összeadva $2x_3 = 0$, amiből az következik, hogy $x_3 = 0$. Ezt visszahelyettesítve $x_2 = 0$, majd $x_1 = 0$ adódik, így a megadott vektorok lineárisan függetlenek.

6.9. **Feladat.** Határozzuk meg az R^3 vektortér

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \,\middle|\, x_1 + x_2 + x_3 = 0 \right\}$$

alterének egy bázisát és az altér dimenzióját!

Megoldás:

Mivel $x_1 + x_2 + x_3 = 0$, ezért

$$x_3 = -x_1 - x_2.$$

Tehát ha $a \in H$ tetszőleges, akkor

$$a = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ -x_1 - x_3 \end{pmatrix} = x_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + x_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Tehát az altér egy bázisa:

$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix};\ b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

DUPress

A bázisnak két eleme van, így 2 dimenziós az altér.

6.10. **Feladat.** Lineárisan független-e az

$$\{1; \sin x; \cos x\}$$

vektorrendszer?

Megoldás:

A Wronski-determináns:

$$W(x) = \det \begin{pmatrix} 1 & \sin x & \cos x \\ 0 & \cos x & -\sin x \\ 0 & -\sin x & -\cos x \end{pmatrix} = 1 \cdot (-\cos^2 x - \sin^2 x) =$$
$$= -1 \cdot (\cos^2 x + \sin^2 x) = -1 \neq 0,$$

így a vektorrendszer lineárisan független.

6.11. **Feladat.** Lineárisan független-e az

$$\{1; x; x^2; x^3\}$$

vektorrendszer?

Megoldás:

A Wronski-determináns:

$$W(x) = \det \begin{pmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 0 & 1 & 2x & 3x^2 \\ 0 & 0 & 2 & 6x \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 6 = 12 \neq 0,$$

így a vektorrendszer lineárisan független.

DUPress

7. Lineáris egyenletrendszerek megoldása

7.1. **Feladat.** Tekintsük az

$$\begin{aligned} x + 2y - 4z &= -4 \\ 2x + 5y - 9z &= -10 \\ 3x - 2y + 3z &= 11 \end{aligned}$$

egyenletrendszert!

a) Írjuk fel az alapmátrixát és kibővített mátrixát!
b) Adjuk meg az egyenletrendszer mátrixos alakját!
c) Határozzuk meg az alapmátrix és a kibővített mátrix rangját!
d) Döntsük el, hogy megoldható vagy ellentmondásos a lineáris egyenletrendszer!
e) Amennyiben megoldható, osztályozzuk a megoldások száma szerint!
f) Adjuk meg az egyenletrendszer általános megoldását!

Megoldás:

a) A lineáris egyenletrendszer alapmátrixa az egyenletrendszer ismeretleneinek együtthatóiból képzett mátrix:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 2 & 5 & -9 \\ 3 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

A lineáris egyenletrendszer kibővített mátrixa:

$$(A\,|\,b) = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -4 & -4 \\ 2 & 5 & -9 & -10 \\ 3 & -2 & 3 & 11 \end{array}\right).$$

b) Az egyenletrendszer mátrixos alakja:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 2 & 5 & -9 \\ 3 & -2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -10 \\ 11 \end{pmatrix}.$$

c) A keresett rangok meghatározásához Gauss-eliminációt alkalmazunk. Első lépésben a kibővített mátrix első sorának -2-szeresét hozzáadjuk a második sorhoz, illetve az első sor -3-szorosát hozzáadjuk a harmadik sorhoz. Második lépésben a második sor 8-szorosát hozzáadjuk a harmadik sorhoz:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -4 & -4 \\ 2 & 5 & -9 & -10 \\ 3 & -2 & 3 & 11 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -4 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & -8 & 15 & 23 \end{array}\right) \to$$

$$\to \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -4 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 7 & 7 \end{array}\right).$$

Gauss-elimináció után kapott mátrix rangja a nem csupa nulla sorok száma. Így az alapmátrix rangja 3, a kibővített mátrix rangja 3.

d) Mivel az egyenletrendszer alapmátrixának és a kibővített mátrixának a rangja megegyezik, ezért megoldható.

e) Az alapmátrix rangja megegyezik az ismeretlenek számával, így az egyenletrendszer határozott, azaz egy megoldása van.

f) A Gauss-elimináció elvégzése után kapott kibővített mátrix segítségével felírva az egyenletrendszert

$$\begin{aligned} x + 2y - 4z &= -4 \\ y - z &= -2 \\ 7z &= 7. \end{aligned}$$

adódik. Az utolsó egyenletet elosztva 7-tel azt kapjuk, hogy $z = 1$. A kapott eredményt visszahelyettesítve a második egyenletbe $y = -1$ adódik. Az első egyenletbe y-t és z-t behelyettesítve megkapjuk, hogy $x = 2$.

7.2. **Feladat.** Tekintsük az

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 1 \\ 2x + 3y + 4z &= 2 \\ 3x + 4y + 5z &= 4 \end{aligned}$$

egyenletrendszert!

a) Írjuk fel az alapmátrixát és kibővített mátrixát!

b) Adjuk meg az egyenletrendszer mátrixos alakját!

c) Határozzuk meg az alapmátrix és a kibővített mátrix rangját!

d) Döntsük el, hogy megoldható vagy ellentmondásos a lineáris egyenletrendszer!

e) Amennyiben megoldható, osztályozzuk a megoldások száma szerint!

f) Adjuk meg az egyenletrendszer általános megoldását!

Megoldás:

a) A lineáris egyenletrendszer alapmátrixa:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

A kibővített mátrix:

$$(A \,|\, b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 2 \\ 3 & 4 & 5 & 4 \end{array}\right).$$

b) A lineáris egyenletrendszer mátrixos alakja:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

c) Első lépésben a kibővített mátrix első sorának -2-szeresét hozzáadjuk a második sorhoz, illetve az első sor -3-szorosát hozzáadjuk a harmadik sorhoz. Második lépésben a második sor -2-szeresét hozzáadjuk a harmadik sorhoz:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 2 \\ 3 & 4 & 5 & 4 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & -4 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Az alapmátrix rangja 2, a kibővített mátrix rangja 3.

d) Mivel az alapmátrix és a kibővített mátrix rangja nem egyezik meg, ezért az egyenletrendszer nem oldható meg, azaz ellentmondásos. Ez a tény úgy is megállapítható, hogy az utolsó mátrixból felírjuk az egyenletrendszert

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 1 \\ -y - 2z &= 0 \\ 0 &= 1. \end{aligned}$$

Ekkor az utolsó egyenletből ellentmondásra jutunk, így az egyenletrendszernek nincs megoldása.

7.3. **Feladat.** Tekintsük az

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 1 \\ 2x + 3y + 4z &= 2 \\ 3x + 4y + 5z &= 3 \end{aligned}$$

egyenletrendszert!

a) Írjuk fel az alapmátrixát és kibővített mátrixát!
b) Adjuk meg az egyenletrendszer mátrixos alakját!
c) Határozzuk meg az alapmátrix és a kibővített mátrix rangját!
d) Döntsük el, hogy megoldható vagy ellentmondásos a lineáris egyenletrendszer!
e) Amennyiben megoldható, osztályozzuk a megoldások száma szerint!
f) Adjuk meg az egyenletrendszer általános megoldását!

<u>**Megoldás**</u>:

a) A lineáris egyenletrendszer alapmátrixa:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix},$$

kibővített mátrixa

$$(A \,|\, b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 2 \\ 3 & 4 & 5 & 3 \end{array}\right).$$

b) A lineáris egyenletrendszer mátrixos alakja:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

c) Első lépésben a kibővített mátrix első sorának -2-szeresét hozzáadjuk a második sorhoz, illetve az első sor -3-szorosát hozzáadjuk a harmadik sorhoz. Második lépésben a második sor -2-szeresét hozzáadjuk a harmadik sorhoz:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 2 \\ 3 & 4 & 5 & 3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & -4 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

az alapmátrix rangja 2, a kibővített mátrix rangja 2.

d) Mivel az alapmátrix és a kibővített mátrix rangja megegyezik, ezért az egyenletrendszer megoldható.

e) Az alapmátrix rangja 2, míg az ismeretlenek száma 3, így az egyenletrendszer határozatlan, azaz végtelen sok megoldása van.

f) Az általános megoldást $3 - 2 = 1$ szabad paraméter bevezetésével írhatjuk fel. A szabad paraméterek számát az ismeretlenek számának és az alapmátrix rangjának különbsége adja. Az utolsó mátrixból felírva az egyenletrendszert

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 1 \\ -y - 2z &= 0 \end{aligned}$$

adódik. Legyen például $z = t$. Ekkor a második egyenletből $y = -2t$ adódik. Az első egyenletbe ezeket visszahelyettesítve megkapjuk az x-et: $x = 1 + t$, ahol $t \in \mathbb{R}$ tetszőleges. Egy konkrét megoldás (például $t = 1$ esetén) $x = 2$, $y = -2$, $z = 1$.

7.4. **Feladat.** Tekintsük az

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z + 4u &= 1 \\ 2x + 3y + 4z + 5u &= 2 \\ 3x + 4y + 5z + 6u &= 3 \\ 4x + 5y + 6z + 7u &= 4 \end{aligned}$$

egyenletrendszert!

a) Írjuk fel az alapmátrixát és kibővített mátrixát!
b) Adjuk meg az egyenletrendszer mátrixos alakját!
c) Határozzuk meg az alapmátrix és a kibővített mátrix rangját!
d) Döntsük el, hogy megoldható vagy ellentmondásos a lineáris egyenletrendszer!
e) Amennyiben megoldható, osztályozzuk a megoldások száma szerint!
f) Adjuk meg az egyenletrendszer általános megoldását!

Megoldás:

a) A lineáris egyenletrendszer alapmátrixa:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}.$$

DUPress

A kibővített mátrix:

$$(A\,|\,b) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 2 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 3 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 4 \end{array}\right).$$

b) A lineáris egyenletrendszer mátrixos alakja:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

c) Első lépésben a kibővített mátrix első sorának -2-szeresét hozzáadjuk a második sorhoz, az első sor -3-szorosát hozzáadjuk a harmadik sorhoz, illetve az első sor -4-szeresét hozzáadjuk a negyedik sorhoz:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 2 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 3 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 4 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & -2 & -4 & -6 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & -9 & 0 \end{array}\right)$$

Második lépésben a második sor -2-szeresét hozzáadjuk a harmadik sorhoz, -3-szorosát pedig a negyedikhez:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & -2 & -4 & -6 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & -9 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

d) Az alapmátrix rangja 2, a kibővített mátrix rangja 2. Mivel az alapmátrix és a kibővített mátrix rangja megegyezik, ezért az egyenletrendszer megoldható.

e) Az alapmátrix rangja 2, míg az ismeretlenek száma 4, így az egyenletrendszer határozatlan, azaz végtelen sok megoldása van.

f) A megoldásokat $4 - 2 = 2$ szabad paraméter bevezetésével adhatjuk meg. A szabad paraméterek számát az ismeretlenek számának és az alapmátrix rangjának különbsége adja. Az utolsó mátrixból felírva az egyenletrendszert

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z + 4u &= 1 \\ -y - 2z - 3u &= 0 \end{aligned}$$

adódik. Legyen például $z = t_1$, illetve $u = t_2$. Ekkor a második egyenletből

$$y = -2z - 3u = -2t_1 - 3t_2.$$

Az első egyenletbe ezeket visszahelyettesítve megkajuk az x-et:

$$x = 1 - 2y - 3z - 4u = 1 + 4t_1 + 6t_2 - 3t_1 - 4t_2 = 1 + t_1 + 2t_2,$$

ahol t_1 és t_2 tetszőleges valós számok.

7.5. **Feladat.** Tekintsük az

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + \ x_3 + \ \ x_4 &= 4 \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 - \ \ x_4 &= 4 \\ 3x_1 + x_2 - \ \ x_3 + 2x_4 &= 4. \end{aligned}$$

egyenletrendszert!

a) Írjuk fel az alapmátrixát és kibővített mátrixát!
b) Adjuk meg az egyenletrendszer mátrixos alakját!
c) Határozzuk meg az alapmátrix és a kibővített mátrix rangját!
d) Döntsük el, hogy megoldható vagy ellentmondásos a lineáris egyenletrendszer!
e) Amennyiben megoldható, osztályozzuk a megoldások száma szerint!
f) Adjuk meg az egyenletrendszer általános megoldását!

<u>**Megoldás**</u>:

a) A lineáris egyenletrendszer alapmátrixa:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 & -1 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

A kibővített mátrix:

$$(A \,|\, b) = \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 4 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & -1 & 2 & 4 \end{array}\right).$$

b) A lineáris egyenletrendszer mátrixos alakja:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 & -1 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

DUPress

c) Első lépésben a kibővített mátrix első sorának -2-szeresét hozzáadjuk a második sorhoz, illetve az első sor -3-szorosát hozzáadjuk a harmadik sorhoz:

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 4 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & -1 & 2 & 4 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & -5 & 2 & -3 & -4 \\ 0 & -5 & -4 & -1 & -8 \end{array}\right)$$

Második lépésben a második sor -1-szeresét hozzáadjuk a harmadik sorhoz:

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & -5 & 2 & -3 & -4 \\ 0 & -5 & -4 & -1 & -8 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & -5 & 2 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & -6 & 2 & -4 \end{array}\right).$$

Tehát az alapmátrix rangja 3, a kibővített mátrix rangja 3.

d) Mivel az alapmátrix és a kibővített mátrix rangja megegyezik, ezért az egyenletrendszer megoldható.

e) Az ismeretlenek száma 4, ami nem egyezik meg az alapmátrix rangjával, így az egyenletrendszer határozatlan, azaz végtelen sok megoldása van.

f) Az utolsó mátrixból felírva az egyenletrendszert

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 &= 4 \\ -5x_2 + 2x_3 - 3x_4 &= -4 \\ -6x_3 + 2x_4 &= -4. \end{aligned}$$

adódik. Legyen $x_3 = t$, ahol $t \in \mathbb{R}$. Az utolsó egyenletből $x_4 = 3t - 2$. Ezt visszahelyettesítve a második egyenletbe

$$x_2 = \frac{-7t + 10}{5}$$

adódik. Az első egyenletbe x_2-t, x_3-at és x_4-et behelyettesítve megkapjuk, hogy

$$x_1 = -1,2t + 2.$$

7.6. **Feladat.** Tekintsük az

$$\begin{aligned} x - 2y + 3z &= 2 \\ 2x + y \phantom{{}-1} - 5z &= -2 \\ 3x - y \phantom{{}-1} - 2z &= 0 \end{aligned}$$

egyenletrendszert!

a) Írjuk fel az alapmátrixát és kibővített mátrixát!

b) Adjuk meg az egyenletrendszer mátrixos alakját!

c) Határozzuk meg az alapmátrix és a kibővített mátrix rangját!
d) Döntsük el, hogy megoldható vagy ellentmondásos a lineáris egyenletrendszer!
e) Amennyiben megoldható, osztályozzuk a megoldások száma szerint!
f) Adjuk meg az egyenletrendszer általános megoldását!

Megoldás:

a) A lineáris egyenletrendszer alapmátrixa:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -5 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

A kibővített mátrix:

$$(A\,|\,b) = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & -5 & -2 \\ 3 & -1 & -2 & 0 \end{array}\right).$$

b) A lineáris egyenletrendszer mátrixos alakja:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -5 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

c) Első lépésben a kibővített mátrix első sorának -2-szeresét hozzáadjuk a második sorhoz, illetve az első sor -3-szorosát hozzáadjuk a harmadik sorhoz. Második lépésben a második sor -1-szeresét hozzáadjuk a harmadik sorhoz:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & -11 & -6 \\ 0 & 5 & -11 & -6 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & -11 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Az alapmátrix és a kibővített mátrix rangja is 2.

d) A lineáris egyenletrendszer megoldható, mivel az alapmátrix és a kibővített mátrix rangja megegyezik.

e) Az egyenletrendszer határozatlan, mert az alapmátrix rangja kisebb, mint az ismeretlenek száma.

f) Az általános megoldás felírásához 1 darab szabad paramétert kell választanunk. A Gauss-elimináció elvégzése után kapott kibővített mátrixból felírva az egyenletrendszert

$$\begin{aligned} x - 2y + 3z &= 2 \\ 5y - 11z &= -6. \end{aligned}$$

adódik. Válasszuk az utolsó ismeretlent tetszőlegesnek, azaz legyen például $z = t$, ahol $t \in \mathbb{R}$ tetszőleges. Ekkor a második egyenletből

$$y = \frac{-6 + 11t}{5}$$

adódik. A kapott eredményeket visszahelyettesítve az első egyenletbe azt kapjuk, hogy

$$x = 2 + 2y - 3z = 2 + \frac{-12 + 22t}{5} - 3t = -0,4 + 1,4t.$$

7.7. **Feladat.** Tekintsük az

$$\begin{aligned} 2x + 2y - z \ &= \ 3 \\ 3x + 3y + z \ &= 12 \\ 4x + y \quad + 5z &= 21 \end{aligned}$$

egyenletrendszert!

a) Írjuk fel az alapmátrixát és kibővített mátrixát!

b) Adjuk meg az egyenletrendszer mátrixos alakját!

c) Határozzuk meg az alapmátrix és a kibővített mátrix rangját!

d) Döntsük el, hogy megoldható vagy ellentmondásos a lineáris egyenletrendszer!

e) Amennyiben megoldható, osztályozzuk a megoldások száma szerint!

f) Adjuk meg az egyenletrendszer általános megoldását!

Megoldás:

a) A lineáris egyenletrendszer alapmátrixa:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 3 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

A kibővített mátrix:

$$(A\,|\,b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & -1 & 3 \\ 3 & 3 & 1 & 12 \\ 4 & 1 & 5 & 21 \end{array}\right).$$

b) A lineáris egyenletrendszer mátrixos alakja:

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 3 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 12 \\ 21 \end{pmatrix}.$$

c) Első lépésben a kibővített mátrix második sorát szorozzuk 2-vel. Ezután az első sor -3-szorosát hozzáadjuk a második sorhoz, illetve az első sor -2-szeresét hozzáadjuk a harmadik sorhoz:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & -1 & 3 \\ 6 & 6 & 2 & 24 \\ 4 & 1 & 5 & 21 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & 15 \\ 0 & -3 & 7 & 15 \end{array}\right)$$

Ezt követően cseréljük fel a második és harmadik sort:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & 15 \\ 0 & -3 & 7 & 15 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -3 & 7 & 15 \\ 0 & 0 & 5 & 15 \end{array}\right).$$

Az alapmátrix rangja 3, a kibővített mátrix rangja 3, ezért az egyenletrendszer megoldható.

d) Az egyenletrendszer határozott.

e) A Gauss-elimináció után kapott mátrixból felírva az egyenletrendszert

$$\begin{aligned} 2x + 2y - z &= 3 \\ -3y + 7z &= 15 \\ 5z &= 15 \end{aligned}$$

adódik. Az utolsó egyenletből azt kapjuk, hogy $z = 3$. Ezt visszahelyettesítve a második egyenletbe $y = 2$ adódik. Az első egyenletbe y-t és z-t behelyettesítve azt kapjuk, hogy $x = 1$

f) Az egyenletrendszer általános megoldása tehát:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

7.8. **Feladat.** Tekintsük az

$$\begin{aligned} x + y + z + 3u + 2v &= 3 \\ x + 2y + z + 5u + 2v &= 5 \\ 2x + 3y + z + 8u + 3v &= 7 \\ 2x + 3y + 2z + 8u + 4v &= 9. \end{aligned}$$

egyenletrendszert!

a) Írjuk fel az alapmátrixát és kibővített mátrixát!

b) Adjuk meg az egyenletrendszer mátrixos alakját!

c) Határozzuk meg az alapmátrix és a kibővített mátrix rangját!

d) Döntsük el, hogy megoldható vagy ellentmondásos a lineáris egyenletrendszer!

e) Amennyiben megoldható, osztályozzuk a megoldások száma szerint!

f) Adjuk meg az egyenletrendszer általános megoldását!

Megoldás:

a) A lineáris egyenletrendszer alapmátrixa:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 5 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 8 & 3 \\ 2 & 3 & 2 & 8 & 4 \end{pmatrix}.$$

A kibővített mátrix:

$$(A \,|\, b) = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 5 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 8 & 3 & 7 \\ 2 & 3 & 2 & 8 & 4 & 9 \end{array}\right).$$

b) A lineáris egyenletrendszer mátrixos alakja:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 5 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 8 & 3 \\ 2 & 3 & 2 & 8 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

DUPress

c) A kibővített mátrix első sorának -1-szeresét hozzáadjuk a második sorhoz, az első sor -2-szeresét hozzáadjuk a harmadik sorhoz és az első sor -2-szeresét hozzáadjuk a negyedik sorhoz:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 5 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 8 & 3 & 7 \\ 2 & 3 & 2 & 8 & 4 & 9 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Ezt követően a második sor -1-szeresét adjuk hozzá a harmadik sorhoz és a második sor -1-szeresét adjuk hozzá a negyedik sorhoz:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Az utolsó sor elhagyható:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & -2 \end{array}\right).$$

Az alapmátrix rangja 3, a kibővített mátrix rangja 3, ezért az egyenletrendszer megoldható.

d) Az egyenletrendszer határozatlan, mert az alapmátrix rangja kisebb, mint az ismeretlenek száma. A szabad paraméterek száma: $5 - 3 = 2$.

e) A Gauss-elimináció után kapott mátrixból felírva az egyenletrendszert

$$\begin{aligned} x + y + z + 3u + 2v &= 4 \\ y \quad + 2u \quad\quad &= 1 \\ - z + \quad - v &= -2 \end{aligned}$$

adódik. Legyen $v = t$ $(t \in \mathbb{R})$ tetszőleges és $u = k$ $(k \in \mathbb{R})$ tetszőleges. Ekkor az utolsó egyenletből azt kapjuk, hogy

$$-z - v = -2 \qquad \Rightarrow \qquad z = 2 - t.$$

Ezt visszahelyettesítve a második egyenletbe

$$y + 2u = 1 \qquad \Rightarrow \qquad y = 1 - 2k$$

adódik. Az első egyenletbe behelyettesítve az y, z, u és v értékeit azt kapjuk, hogy

$$x + 1 - 2k + 2 - t + 3k + 2t = 4,$$

DUPress

így

$$x = 1 - k - t.$$

f) Az egyenletrendszer általános megoldása tehát:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-k-t \\ 1-2k \\ 2-t \\ k \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

7.9. **Feladat.** Oldjuk meg Cramer-szabállyal az

$$\begin{aligned} x - 2y + 5z &= 12 \\ 2x - \ \ y + \ \ z &= \ \ 3 \\ 3x + 2y + 6z &= 25 \end{aligned}$$

egyenletrendszert!

Megoldás:

Az egyenletrendszer alapmátrixának determinánsa:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 6 \end{vmatrix} = 8 - (-37) = 45.$$

Az első ismeretlent úgy kapjuk meg, hogy az alapmátrix első oszlopát töröljük, majd annak helyére az egyenletrendszer jobb oldalából képzett oszlopvektort írjuk. Ezután a kapott mátrix determinánsának és az alapmátrix determinánsának hányadosként áll elő az x. Mivel

$$D_1 = \begin{vmatrix} 12 & -2 & 5 \\ 3 & -1 & 1 \\ 25 & 2 & 6 \end{vmatrix} = 45, \text{ ezért } x = \frac{D_1}{D} = \frac{45}{45} = 1.$$

A második ismeretlent úgy kapjuk meg, hogy az alapmátrix második oszlopát töröljük, majd annak helyére az egyenletrendszer jobb oldalából képzett oszlopvektort írjuk. Ezután a kapott mátrix determinánsának és az alapmátrix determinánsának hányadosként kapjuk y-t. Mivel

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 12 & 5 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 25 & 6 \end{vmatrix} = 90, \text{ ezért } y = \frac{D_2}{D} = \frac{90}{45} = 2.$$

A harmadik ismeretlent úgy kapjuk meg, hogy az alapmátrix harmadik oszlopát töröljük, majd annak helyére az egyenletrendszer jobb oldalából képzett oszlopvektort írjuk. Ezután a kapott mátrix determinánsának és az alapmátrix determinánsának hányadosként kapjuk z-t. Mivel

$$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 12 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 25 \end{vmatrix} = 135, \text{ ezért } z = \frac{D_3}{D} = \frac{135}{45} = 3.$$

7.10. **Feladat.** Oldjuk meg Cramer-szabállyal a

$$\begin{aligned} 3x + y \quad - 4z &= -4 \\ 3x + 3y + z \quad &= 8 \\ 4x + y \quad + 5z &= 15 \end{aligned}$$

lineáris egyenletrendszert!

Megoldás:

Az egyenletrendszer alapmátrixának determinánsa:

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -4 \\ 3 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 37 - (-30) = 67.$$

Az első ismeretlent úgy kapjuk meg, hogy az alapmátrix első oszlopát töröljük, majd annak helyére az egyenletrendszer jobb oldalából képzett oszlopvektort írjuk. Ezután a kapott mátrix determinánsának és az alapmátrix determinánsának hányadosa lesz az x. Mivel

$$D_1 = \begin{vmatrix} -4 & 1 & -4 \\ 8 & 3 & 1 \\ 15 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 67, \text{ ezért } x = \frac{D_1}{D} = \frac{67}{67} = 1.$$

A második ismeretlent úgy kapjuk meg, hogy az alapmátrix második oszlopát töröljük, majd annak helyére az egyenletrendszer jobb oldalából képzett oszlopvektort írjuk. Ezután a kapott mátrix determinánsának és az alapmátrix determinánsának hányadosa lesz az y. Mivel

$$D_2 = \begin{vmatrix} 3 & -4 & -4 \\ 3 & 8 & 1 \\ 4 & 15 & 5 \end{vmatrix} = 67, \text{ ezért } y = \frac{D_2}{D} = \frac{67}{67} = 1.$$

A harmadik ismeretlent úgy kapjuk meg, hogy az alapmátrix harmadik oszlopát töröljük, majd annak helyére az egyenletrendszer jobb oldalából képzett oszlopvektort írjuk. Ezután a kapott mátrix determinánsának és az alapmátrix determinánsának hányadosa lesz a z. Mivel

$$D_3 = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -4 \\ 3 & 3 & 8 \\ 4 & 1 & 15 \end{vmatrix} = 134, \text{ ezért } z = \frac{D_3}{D} = \frac{134}{67} = 2.$$

7.11. **Feladat.** Tekintsük az

$$\begin{aligned} x + ay + 2z &= 4 \\ 2x - 3y + 5z &= 4 \\ 3x + 7y - 3z &= 7 \end{aligned}$$

egyenletrendszert!

a) Milyen a valós szám esetén alkalmazható a Cramer-szabály?

b) Ha $x = 1$, akkor határozzuk meg az a értékét!

Megoldás:

a) A Cramer-szabály pontosan akkor alkalmazható, ha az alapmátrix determinánsa nem nulla. Jelen esetben az alapmátrix determinánsa:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & a & 2 \\ 2 & -3 & 5 \\ 3 & 7 & -3 \end{vmatrix} =$$
$$= 9 + 15a + 28 - (-18 + 35 - 6a) = 21a + 20,$$

ami pontosan akkor nem nulla, ha $a \neq -\dfrac{20}{21}$.

b) Mivel

$$D_1 = \begin{vmatrix} 4 & a & 2 \\ 4 & -3 & 5 \\ 7 & 7 & -3 \end{vmatrix} =$$
$$= 36 + 35a + 56 - (-42 + 140 - 12a) = 47a - 6,$$

ezért

$$x = \frac{D_1}{D} = \frac{47a - 6}{21a + 20},$$

azaz

$$1 = \frac{47a - 6}{21a + 20}.$$

A kapott egyenlet mindkét oldalát megszorozva a nevezővel, majd rendezve az egyenletet

$$\begin{aligned} 21a + 20 &= 47a - 6 \\ 26 &= 26a, \end{aligned}$$

adódik, amiből azt kapjuk, hogy $a = 1$.

7.12. **Feladat.** Tekintsük az

$$\begin{aligned} x + ay + 3z &= 5 \\ 2x + 3y + bz &= 6 \\ 3x - 4y + 2z &= 1 \end{aligned}$$

egyenletrendszert!

a) Milyen a és b valós szám esetén alkalmazható a Cramer-szabály?

b) Ha $x = 1$ és $y = 1$, akkor határozzuk meg az a és b értékét!

Megoldás:

a) A Cramer-szabály pontosan akkor alkalmazható, ha az alapmátrix determinánsa nem nulla. Jelen esetben az alapmátrix determinánsa

$$D = \begin{vmatrix} 1 & a & 3 \\ 2 & 3 & b \\ 3 & -4 & 2 \end{vmatrix} =$$
$$= 6 + 3ab - 24 - (27 - 4b + 4a) = 3ab - 4a + 4b - 45,$$

ami pontosan akkor nem nulla, ha

$$3ab - 4a + 4b - 45 \neq 0.$$

b) Mivel

$$D_1 = \begin{vmatrix} 5 & a & 3 \\ 6 & 3 & b \\ 1 & -4 & 2 \end{vmatrix} =$$
$$= 30 + ab - 72 - (9 - 20b + 12a) = ab - 12a + 20b - 51,$$

ezért

$$x = \frac{D_1}{D} = \frac{ab - 12a + 20b - 51}{3ab - 4a + 4b - 45},$$

azaz

$$1 = \frac{ab - 12a + 20b - 51}{3ab - 4a + 4b - 45}.$$

Továbbá

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 2 & 6 & b \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} =$$
$$= 12 + 15b + 6 - (54 + b + 20) = 14b - 56,$$

így

$$y = \frac{D_2}{D} = \frac{14b - 56}{3ab - 4a + 4b - 45},$$

azaz

$$1 = \frac{14b - 56}{3ab - 4a + 4b - 45}.$$

Tehát az

$$\left.\begin{aligned} \frac{ab - 12a + 20b - 51}{3ab - 4a + 4b - 45} &= 1 \\ \frac{14b - 56}{3ab - 4a + 4b - 45} &= 1 \end{aligned}\right\}$$

egyenletrendszert kell megoldani. Beszorozva a közös nevezővel

$$\left.\begin{aligned} ab - 12a + 20b - 51 &= 3ab - 4a + 4b - 45 \\ 14b - 56 &= 3ab - 4a + 4b - 45 \end{aligned}\right\}$$

adódik. Elvégezve az összevonásokat az

$$\left.\begin{aligned} 2ab + 8a - 16b &= -6 \\ 3ab - 4a - 10b &= -11 \end{aligned}\right\}$$

egyenletrendszerhez jutunk. Az első egyenlet másfélszeresét vonjuk ki a második egyenletből. Ekkor az

$$-16a + 14b = -2$$

egyenlethez jutunk. Az egyenletet -2-vel osztva, majd a-t kifejezve

$$a = \frac{1 + 7b}{8}$$

adódik. Ezt visszahelyettesítve a

$$2ab + 8a - 16b = -6$$

egyenlettel ekvivalens

$$ab + 4a - 8b = -3$$

egyenletbe azt kapjuk, hogy

$$\frac{1+7b}{8} \cdot b + 4 \cdot \frac{1+7b}{8} - 8b = -3.$$

Beszorozva a közös nevezővel, majd elvégezve a zárójelfelbontást és az összevonást az alábbiakat kapjuk:

$$\begin{aligned} \frac{1+7b}{8} \cdot b + 4\frac{1+7b}{8} - 8b &= -3 \\ (1+7b) \cdot b + 4 \cdot (1+7b) - 64b &= -24 \\ b + 7b^2 + 4 + 28b - 64b &= -24 \\ 7b^2 - 35b + 28 &= 0 \\ b^2 - 5b + 4 &= 0. \end{aligned}$$

Megoldva a másodfokú egyenletet

$$b_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25-16}}{2} = \frac{5 \pm 3}{2},$$

adódik, így $b_1 = 4$, illetve $b_2 = 1$. Ezeket visszahelyettesítve az

$$a = \frac{1+7b}{8}.$$

egyenletbe $a_1 = \dfrac{29}{8}$, illetve $a_2 = 1$ adódik.

7.13. **Feladat.** Oldjuk meg a

$$\begin{aligned} 2^x + 2^y + \quad 2^z &= 14 \\ 2 \cdot 2^x - 2^y + \quad 2^z &= \ \ 8 \\ 3 \cdot 2^x + 2^y + 2 \cdot 2^z &= 26 \end{aligned}$$

egyenletrendszert!

Megoldás:

Az egyenletrendszer nem lineáris, azonban ha bevezetjük az $a = 2^x$, $b = 2^y$, $c = 2^z$ jelöléseket, akkor az

$$\begin{aligned} a + b + \ \ c &= 14 \\ 2a - b + \ \ c &= \ \ 8 \\ 3a + b + 2c &= 26 \end{aligned}$$

egyenletrendszerhez jutunk, ami már egy lineáris egyenletrendszer, ahol $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$.
Az egyenletrendszer alapmátrixa:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

A kibővített mátrix:

$$(A \,|\, b) = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 14 \\ 2 & -1 & 1 & 8 \\ 3 & 1 & 2 & 26 \end{array}\right).$$

A lineáris egyenletrendszer mátrixos alakja:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ 8 \\ 26 \end{pmatrix}.$$

Első lépésben a kibővített mátrix első sorának -2-szeresét hozzáadjuk a második sorhoz, majd a második sort szorozzuk 3-mal.

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 14 \\ 0 & -3 & -1 & -20 \\ 0 & -2 & -1 & -16 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 14 \\ 0 & -3 & -1 & -20 \\ 0 & -6 & -3 & -48 \end{array}\right).$$

Következő lépésben a második sor -2-szeresét hozzáadjuk a harmadik sorhoz.

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 14 \\ 0 & -3 & -1 & -20 \\ 0 & 0 & -1 & -8 \end{array}\right).$$

Az alapmátrix és a kibővített mátrix rangja is 3. A lineáris egyenletrendszer megoldható, mivel az alapmátrix és a kibővített mátrix rangja megegyezik. A Gauss-elimináció elvégzése után kapott kibővített mátrixból felírva az egyenletrendszert

$$\begin{aligned} a + b + c &= 14 \\ -3b - c &= -20 \\ -c &= -8 \end{aligned}$$

adódik. Az utolsó egyenletből azt kapjuk, hogy $c = 8$, amit a második egyenletbe behelyettesítve $b = 4$ adódik, végül az első egyenletből azt kapjuk, hogy

$a = 2$. Felhasználva, hogy $2^x = a$, $2^x = b$, továbbá $2^z = c$ azt kapjuk, hogy $x = 1$, $y = 2$, illetve $z = 3$.

7.14. **Feladat.** Oldjuk meg az a valós paraméter függvényében az alábbi lineáris egyenletrendszert:

$$\begin{aligned} 3x - 2y - z &= -3 \\ -x + y + z &= 1 \\ + y + az &= 2. \end{aligned}$$

<u>**Megoldás**</u>:

Az egyenletrendszer kibővített mátrixa:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 3 & -2 & -1 & -3 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & a & 2 \end{array}\right).$$

Cseréljük meg az első és második sort:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & a & 2 \end{array}\right).$$

Az első sor háromszorosát adjuk hozzá a második sorhoz:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & a & 2 \end{array}\right).$$

A második sor -1-szeresét adjuk hozzá a harmadik sorhoz:

$$\left(\begin{array}{rrc|r} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & a-2 & 2 \end{array}\right).$$

Az utolsó sornak megfelelő egyenlet:

$$(a-2) \cdot z = 2.$$

Ha $a = 2$, akkor nincs megoldás. Ha $a \neq 2$, akkor

$$z = \frac{2}{a-2}.$$

A Gauss-elimináció után kapott mátrix második sorának megfelelő egyenlet:

$$y + 2z = 0 \qquad \Rightarrow \qquad y + \frac{4}{a-2} = 0,$$

így

$$y = \frac{4}{2-a}.$$

A Gauss-elimináció után kapott mátrix első sorának megfelelő egyenlet:

$$-x + y + z = 1 \qquad \Rightarrow \qquad -x + \frac{4}{2-a} + \frac{2}{a-2} = 1.$$

Az egyenlet rendezése után azt kapjuk, hogy

$$x = \frac{2}{2-a} - 1 = \frac{2-2+a}{2-a} = \frac{a}{2-a}.$$

7.15. **Feladat.** Írjuk fel a $b = \begin{pmatrix} 10 \\ 17 \\ 1 \end{pmatrix}$ vektort az

$$a_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad a_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad a_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

vektorok lineáris kombinációjaként!

<u>**Megoldás**</u>:

Keressük azokat az x_1, x_2, x_3 ismeretleneket, melyekre

$$a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_2 + a_3 \cdot x_3 = b$$

teljesül. Felhasználva a vektorok összeadására és skalárral való szorzására vonatkozó definíciókat az

$$\begin{pmatrix} -x_1 + x_2 + 3x_3 \\ 3x_1 + x_2 + 4x_3 \\ 2x_2 - x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 17 \\ 1 \end{pmatrix}$$

összefüggéshez jutunk. Két vektor pontosan akkor egyenlő, ha a megfelelő koordinátáik egyenlőek, így az előbbi egyenlőség ekvivalens az

$$\left.\begin{aligned} -x_1 + x_2 + 3x_3 &= 10 \\ 3x_1 + x_2 + 4x_3 &= 17 \\ 2x_2 - x_3 &= 1 \end{aligned}\right\}$$

egyenletrendszerrel, amit megoldhatunk például Gauss-eliminációval. A lineáris egyenletrendszer kibővített mátrixa:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} -1 & 1 & 3 & 10 \\ 3 & 1 & 4 & 17 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \end{array}\right).$$

Első lépésben az első sor 3-szorosát hozzáadjuk a második sorhoz Második lépésben megcseréljük a második és a harmadik sort:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} -1 & 1 & 3 & 10 \\ 0 & 4 & 13 & 47 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rrr|r} -1 & 1 & 3 & 10 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & 13 & 47 \end{array}\right)$$

Harmadik lépésben a második sor -2-szeresét hozzáadjuk a harmadik sorhoz:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} -1 & 1 & 3 & 10 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 15 & 45 \end{array}\right).$$

Ezen utóbbi mátrixból felírva az egyenletrendszert azt kapjuk, hogy

$$\left.\begin{aligned} -x_1 + x_2 + 3x_3 &= 10 \\ 2x_2 - x_3 &= 1 \\ 15\,x_3 &= 45 \end{aligned}\right\}.$$

Az utolsó egyenletből $x_3 = 3$ adódik, amit visszahelyettesítve a második egyenletbe $x_2 = 2$. Az első egyenletből azt kapjuk, hogy $x_1 = 1$. Tehát a keresett lineáris kombináció

$$b = 3a_1 + 2a_2 + a_3.$$

Az a_1, a_2 és a_3 vektorok visszahelyettesítésével ellenőrizhetjük megoldásunkat.

7.16. **Feladat.** Írjuk fel a $b = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 9 \end{pmatrix}$ vektort az

$$a_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad a_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad a_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

vektorok lineáris kombinációjaként!

Megoldás:

Keressük azokat az x_1, x_2, x_3 ismeretleneket, melyekre

$$a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_2 + a_3 \cdot x_3 = b.$$

Felhasználva a vektorok összeadására és skalárral való szorzására vonatkozó definíciókat az

$$\begin{pmatrix} 2x_1 + 3x_2 + x_3 \\ -x_1 + x_2 + x_3 \\ 5x_1 + 2x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 9 \end{pmatrix}$$

összefüggéshez jutunk. Két vektor pontosan akkor egyenlő, ha a megfelelő koordinátáik egyenlőek, így az előbbi egyenlőség ekvivalens az

$$\left.\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + x_3 &= 7 \\ -x_1 + x_2 + x_3 &= 2 \\ 5x_1 + 2x_3 &= 9 \end{aligned}\right\}$$

egyenletrendszerrel, amit megoldhatunk például Gauss-eliminációval. A lineáris egyenletrendszer kibővített mátrixa

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 3 & 1 & 7 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \\ 5 & 0 & 2 & 9 \end{array}\right).$$

Első lépésben cseréljük fel az első és második sort. Ezután az első sor 2-szeresét hozzáadjuk a második sorhoz, illetve az első sor 5-szörösét a harmadikhoz. Következő lépésben a második sor -1-szeresét hozzáadjuk a harmadik sorhoz:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} -1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 7 \\ 5 & 0 & 2 & 9 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rrr|r} -1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 3 & 11 \\ 0 & 5 & 7 & 19 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rrr|r} -1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 3 & 11 \\ 0 & 0 & 4 & 8 \end{array}\right).$$

Ezen utóbbi mátrixból felírva az egyenletrendszert

$$\left.\begin{aligned} -x_1 + x_2 + x_3 &= 2 \\ 5x_2 + 3x_3 &= 11 \\ 4\,x_3 &= 8 \end{aligned}\right\}$$

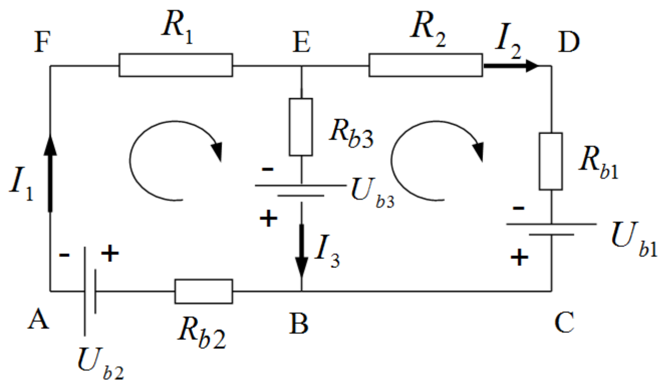
adódik. Az utolsó egyenletből azt kapjuk, hogy $x_3 = 2$, amit visszahelyettesítve a második egyenletbe $x_2 = 1$ adódik. Az első egyenletből azt kapjuk, hogy $x_1 = 1$. Tehát a keresett lineáris kombináció

$$b = a_1 + a_2 + 2a_3.$$

Visszahelyettesítéssel ellenőrizhetjük megoldásunkat.

8. Számítások egyenáramú hálózatokban

8.1. **Feladat.** Tekintsük az alábbi egyenáramú hálózatot!



Adatok:

$$U_{b1} = 20\,[V]; \quad U_{b2} = 10\,[V]; \quad U_{b3} = 5\,[V]; \quad R_1 = 2\,[\Omega]; \quad R_2 = 4\,[\Omega];$$
$$R_{b1} = 7\,[\Omega]; \quad R_{b2} = 6\,[\Omega]; \quad R_{b3} = 4\,[\Omega].$$

a) Írjuk fel Kirchhoff első törvényét a B csomópontra!
b) Írjuk fel Kirchhoff második törvényét az $A - B - E - F - A$ hurokra!
c) Írjuk fel Kirchhoff második törvényét a $B - C - D - E - B$ hurokra!
d) Adjuk meg a kapott egyenletrendszer alapmátrixát és kibővített mátrixát!
e) Határozzuk meg az ismeretlen áramerősségeket Cramer-szabállyal!
f) Adjuk meg a valódi áramirányokat!

Megoldás:

a) Kirchhoff első törvénye szerint egy csomópontba befolyó és onnan elfolyó áramok algebrai összege zérus, így az $A - F - E - B - A$ hurokra azt kapjuk, hogy

$$-I_1 + I_2 + I_3 = 0.$$

b) Kirchhoff második törvénye szerint bármely hurokban körbehaladva és a feszültségeket előjelesen összegezve zérust kapunk, így

$$I_1 \cdot R_1 + I_3 \cdot R_{b3} - U_{b3} + I_1 \cdot R_{b2} + U_{b2} = 0.$$

c) Kirchhoff második törvényét felírva a $B - E - D - C - B$ hurokra:

$$U_{b3} - I_3 \cdot R_{b3} + I_2 \cdot R_2 + I_2 \cdot R_{b1} - U_{b1} = 0.$$

d) Az adatokat behelyettesítve a megoldandó egyenletrendszer

$$\begin{aligned} -I_1 + I_2 + \ \ I_3 &= \ \ 0 \\ 8I_1 \qquad + 4I_3 &= -5 \\ 11I_2 - 4I_3 &= 15 \end{aligned}$$

A fenti lineáris egyenletrendszer alapmátrixa

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 11 & -4 \\ 8 & 0 & 4 \end{pmatrix},$$

kibővített mátrixa

$$\left(\begin{array}{rrr|r} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 11 & -4 & 15 \\ 8 & 0 & 4 & -5 \end{array}\right).$$

e) Az egyenletrendszer alapmátrixának determinánsa (például Sarrus-szabállyal számolva):

$$D = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 11 & -4 \\ 8 & 0 & 4 \end{vmatrix} = -44 - 32 - 88 = -164.$$

Mivel ezen determináns értéke nem zérus, ezért az egyenletrendszer megoldására alkalmazhatjuk például a Cramer-szabályt.
Az egyenletrendszerben szereplő I_1 ismeretlen értékét úgy kaphatjuk meg, hogy az alapmátrix első oszlopát töröljük, majd annak helyére az egyenletrendszer jobb oldalából képzett oszlopvektort írjuk, kiszámoljuk az így kapott mátrix determinánsát, végül az első ismeretlent a kapott mátrix determinánsának és az alapmátrix determinánsának hányadosaként kapjuk. Mivel

$$D_1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 15 & 11 & -4 \\ -5 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 20 + 55 - 60 = 15,$$

ezért

$$I_1 = \frac{D_1}{D} = -\frac{15}{164} \approx -0,09\,[\mathrm{A}].$$

DUPress

Az egyenletrendszerben szereplő I_2 ismeretlen értékét úgy kaphatjuk meg, hogy az alapmátrix második oszlopát töröljük, majd annak helyére az egyenletrendszer jobb oldalából képzett oszlopvektort írjuk, kiszámoljuk az így kapott mátrix determinánsát, végül a második ismeretlent a kapott mátrix determinánsának és az alapmátrix determinánsának hányadosaként kapjuk. Mivel

$$D_2 = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 15 & -4 \\ 8 & -5 & 4 \end{vmatrix} = -60 - 120 + 20 = -160,$$

ezért

$$I_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{160}{164} \approx 0,98\,[\mathrm{A}].$$

Az egyenletrendszerben szereplő I_3 ismeretlen értékét úgy kaphatjuk meg, hogy az alapmátrix harmadik oszlopát töröljük, majd annak helyére az egyenletrendszer jobb oldalából képzett oszlopvektort írjuk, kiszámoljuk az így kapott mátrix determinánsát, végül a harmadik ismeretlent a kapott mátrix determinánsának és az alapmátrix determinánsának hányadosaként kapjuk. Mivel

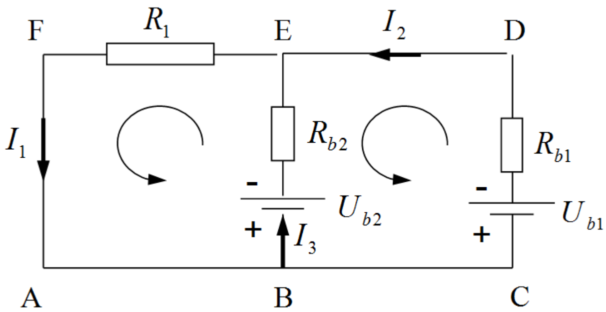
$$D_3 = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 11 & 15 \\ 8 & 0 & -5 \end{vmatrix} = 55 + 120 = 175,$$

ezért

$$I_3 = \frac{D_3}{D} = -\frac{175}{164} \approx -1,07\,[\mathrm{A}].$$

f) Az I_1 és az I_3 áramerősségek értékére negatív számot kaptunk, ami azt jelenti, hogy a hozzájuk tartozó technikai áramirányok ellentétesek a feltételezettel.

8.2. **Feladat.** Az alábbi egyenáramú hálózatban ismert az ellenállások értéke, továbbá az áramforrás belső feszültsége és ellenállása. Két hurokban rögzítettük a pozitív körüljárási irányt, az egyes ágakban pedig a feltételezett áramirányt.



Adatok:

$$U_{b1} = 5\,[V]; \quad U_{b2} = 20\,[V]; \quad R_1 = 2\,[\Omega]; \quad R_{b1} = 5\,[\Omega]; \quad R_{b2} = 2\,[\Omega].$$

a) Írjuk fel Kirchhoff első törvényét a B csomópontra!
b) Írjuk fel Kirchhoff második törvényét az $A - B - E - F - A$ hurokra!
c) Írjuk fel Kirchhoff második törvényét a $B - C - D - E - B$ hurokra!
d) Írjuk fel a kapott egyenletrendszer alapmátrixát és kibővített mátrixát!
e) Határozzuk meg az ismeretlen áramerősségeket Cramer-szabállyal!
f) Határozzuk meg a technikai áramirányokat!

Megoldás:

a) Kirchhoff első törvényét alkalmazva

$$I_1 - I_2 - I_3 = 0$$

adódik.

b) Kirchhoff második törvényét alkalmazva az $A - B - E - F - A$ hurokra

$$U_{b2} + I_3 \cdot R_{b2} + I_1 \cdot R_1 = 0$$

adódik.

c) Kirchhoff második törvényét felírva a $B - C - D - E - B$ hurokra az

$$U_{b1} + I_2 \cdot R_{b1} - I_3 \cdot R_{b2} - U_{b2} = 0$$

egyenlethez jutunk.

DUPress

d) Az adatokat behelyettesítve a megoldandó egyenletrendszer

$$\begin{aligned} I_1 - \ I_2 - \ I_3 &= 0 \\ 2I_1 \qquad + 2I_3 &= -20 \\ 5I_2 - 2I_3 &= 15 \end{aligned}$$

A fenti lineáris egyenletrendszer alapmátrixa

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 5 & -2 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

kibővített mátrixa

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & -2 & 15 \\ 2 & 0 & 2 & -20 \end{array}\right).$$

e) Az egyenletrendszer alapmátrixának determinánsa

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 5 & -2 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 24.$$

Mivel ezen determináns értéke nem zérus, ezért az egyenletrendszer megoldására alkalmazhatjuk például a Cramer-szabályt.
A mintafeladatban szereplő jelölések megtartásával azt kapjuk, hogy

$$D_1 = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 15 & 5 & -2 \\ -20 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -110,$$

ezért

$$I_1 = \frac{D_1}{D} = -\frac{110}{24} \approx -4,58\,[\mathrm{A}].$$

Mivel

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 15 & -2 \\ 2 & -20 & 2 \end{vmatrix} = 20,$$

ezért

$$I_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{20}{24} \approx 0,83\,[\mathrm{A}].$$

Az I_3 ismeretlen meghatározása céljából először kiszámoljuk a D_3 determináns értékét:

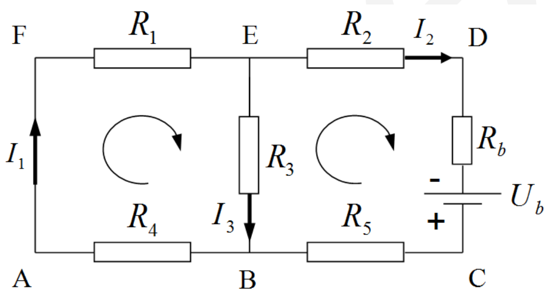
$$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & 15 \\ 2 & 0 & -20 \end{vmatrix} = -130.$$

A kapott eredményt felhasználva:

$$I_3 = \frac{D_3}{D} = \frac{130}{-24} \approx -5,42\,[\mathrm{A}].$$

f) Az I_1 és az I_3 áramerősségek értéke negatív, így a hozzájuk tartozó technikai áramirányok ellentétesek a feltételezettel.

8.3. **Feladat.** Az alábbi egyenáramú hálózatban ismert az ellenállások értéke, továbbá az áramforrás belső feszültsége és ellenállása. Két hurokban rögzítettük a pozitív körüljárási irányt, az egyes ágakban pedig a feltételezett áramirányt.



Adatok:

$$U_b = 20\,[V]; \quad R_b = 2\,[\Omega]; \quad R_1 = 2\,[\Omega]; \quad R_2 = 3\,[\Omega];$$
$$R_3 = 1\,[\Omega]; \quad R_4 = 6\,[\Omega]; \quad R_5 = 6\,[\Omega].$$

a) Írjuk fel Kirchhoff első törvényét a B csomópontra!

b) Írjuk fel Kirchhoff második törvényét az $A-B-E-F-A$ hurokra!

c) Írjuk fel Kirchhoff második törvényét a $B-C-D-E-B$ hurokra!

d) Írjuk fel a kapott egyenletrendszer alapmátrixát és kibővített mátrixát!

e) Határozzuk meg az ismeretlen áramerősségeket Gauss-eliminációval!

f) Határozzuk meg a valódi áramirányokat!

<u>**Megoldás**</u>:

a) Kirchhoff első törvényét alkalmazva a B csomópontra

$$-I_1 + I_2 + I_3 = 0$$

adódik.

b) Kirchhoff második törvényét alkalmazva a $A - F - E - B - A$ hurokra

$$I_1 \cdot R_1 + I_3 \cdot R_3 + I_1 \cdot R_4 = 0$$

adódik.

c) Kirchhoff második törvényét felírva a $B - E - D - C - B$ hurokra az

$$-I_3 \cdot R_3 + I_2 \cdot R_2 + I_2 \cdot R_b - U_b + I_2 \cdot R_5 = 0$$

egyenlethez jutunk.

d) Az adatokat behelyettesítve a megoldandó egyenletrendszer

$$\begin{aligned} -I_1 + \ \ I_2 + I_3 &= \ \ 0 \\ 8I_1 \qquad + I_3 &= 0 \\ 11I_2 - I_3 &= 20 \end{aligned}$$

A fenti lineáris egyenletrendszer alapmátrixa

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 11 & -1 \\ 8 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

kibővített mátrixa

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 11 & -1 & 20 \\ 8 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

e) A fenti lineáris egyenlerendszer megoldásához első lépésben az első sor 8-szorosát hozzáadjuk a harmadik sorhoz, második lépésben a második sor 8-szorosát hozzáadjuk a harmadik sor -11-szereséhez:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 11 & -1 & 20 \\ 0 & 8 & 9 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 11 & -1 & 20 \\ 0 & 0 & -107 & 160 \end{array}\right).$$

Gauss elimináció után kapott mátrix rangja a nem csupa nulla sorok száma. Így az alapmátrix rangja 3, a kibővített mátrix rangja 3. Mivel az alapmátrix és a kibővített mátrix rangja megegyezik, ezért az egyenletrendszer megoldható. Az alapmátrix rangja megegyezik az ismeretlenek számával, így az

DUPress

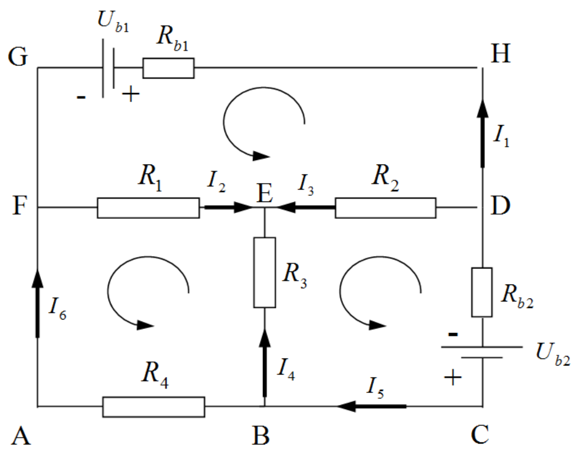
egyenletrendszer határozott, azaz egyértelmű a megoldása.
Az utolsó mátrixból felírva az egyenletrendszert

$$\begin{aligned} -I_1 + I_2 + I_3 &= 0 \\ 11I_2 - \quad I_3 &= 20 \\ -107I_3 &= 160. \end{aligned}$$

adódik. Az utolsó egyenletből azt kapjuk, hogy $I_3 \approx -1,5\,[\mathrm{A}]$. Ezt visszahelyettesítve a második egyenletbe $I_2 \approx 1,68\,[\mathrm{A}]$ adódik. Az első egyenletbe I_2-t és I_3-at behelyettesítve megkapjuk, hogy $I_1 \approx 0,18\,[\mathrm{A}]$.

f) Az I_3 áramerősség értéke negatív, így a hozzá tartozó valódi áramirány ellentétes a feltételezettel.

8.4. **Feladat.** Az alábbi egyenáramú hálózatban ismert az ellenállások értéke, továbbá az áramforrás belső feszültsége és ellenállása. Három hurokban rögzítettük a pozitív körüljárási irányt, az egyes ágakban pedig a feltételezett áramirányt.



Adatok:

$$U_{b_1} = 20\,[V]; \quad U_{b_2} = 10\,[V]; \quad R_{b1} = 2\,[\Omega]; \quad R_{b2} = 3\,[\Omega];$$
$$R_1 = 2\,[\Omega]; \quad R_2 = 4\,[\Omega]; \quad R_3 = 4\,[\Omega]; \quad R_4 = 3\,[\Omega].$$

a) Írjuk fel Kirchhoff első törvényét a D, E és F csomópontokra!
b) Írjuk fel Kirchhoff második törvényét az $A - B - E - F - A$ hurokra!
c) Írjuk fel Kirchhoff második törvényét a $B - C - D - E - B$ hurokra!
d) Írjuk fel Kirchhoff második törvényét a $D - H - G - F - E - D$ hurokra!

e) Írjuk fel a lineáris egyenletrendszer kibővített mátrixát!

f) Gauss-elimináció alkalmazásával határozzuk meg az ismeretlen áramerősségek értékét!

g) Adjuk meg a technikai áramirányokat!

Megoldás:

a) Kirchhoff első törvényét felírva a D, E és F csomópontokra az alábbi egyenleteket kapjuk:

$$\begin{aligned} -I_1 - I_3 - I_5 &= 0 \\ I_2 + I_3 + I_4 &= 0 \\ I_1 - I_2 + I_6 &= 0. \end{aligned}$$

b) Kirchhoff második törvényét alkalmazva az $A - B - E - F - A$ hurokra azt kapjuk, hogy

$$-I_2 \cdot R_1 + I_4 \cdot R_3 - I_6 \cdot R_4 = 0$$

c) Kirchhoff második törvényét felírva a $B - C - D - E - B$ hurokra az

$$I_3 \cdot R_2 - I_4 \cdot R_3 - I_5 \cdot R_{b2} + U_{b2} = 0$$

egyenlethez jutunk.

d) Kirchhoff második törvényét felírva a $D - E - F - G - H - D$ hurokra az alábbi egyenletet kapjuk:

$$I_1 \cdot R_{b1} + I_2 \cdot R_1 - I_3 \cdot R_2 + U_{b1} = 0.$$

e) Az adatokat behelyettesítve a megoldandó egyenletrendszer

$$\begin{array}{rrrrrrcr} & -2I_2 & & +4I_4 & & -3I_6 & = & 0 \\ & & 4I_3 & -4I_4 & -3I_5 & & = & -10 \\ 2I_1 & +2I_2 & -4I_3 & & & & = & -20 \\ -I_1 & & -I_3 & & -I_5 & & = & 0 \\ & I_2 & +I_3 & +I_4 & & & = & 0 \\ I_1 & -I_2 & & & & +I_6 & = & 0 \end{array}$$

DUPress

A fenti lineáris egyenletrendszer kibővített mátrixa

$$\left(\begin{array}{rrrrrr|r} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 4 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -4 & -3 & 0 & -10 \\ 2 & 2 & -4 & 0 & 0 & 0 & -20 \end{array}\right).$$

f) A fenti lineáris egyenletrendszer megoldásához első lépésben az első sort hozzáadjuk a harmadik sorhoz, illetve az első sor -2-szeresét hozzáadjuk a hatodik sorhoz:

$$\left(\begin{array}{rrrrrr|r} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 4 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -4 & -3 & 0 & -10 \\ 0 & 4 & -4 & 0 & 0 & -2 & -20 \end{array}\right).$$

Második lépésben a második sort hozzáadjuk a harmadik sorhoz, a második sor 2-szeresét hozzáadjuk a negyedik sorhoz, illetve a második sor -4-szeresét hozzáadjuk a hatodik sorhoz:

$$\left(\begin{array}{rrrrrr|r} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 6 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -4 & -3 & 0 & -10 \\ 0 & 0 & -8 & -4 & 0 & -2 & -20 \end{array}\right).$$

A kapott mátrix harmadik és negyedik sorát megcseréljük, majd az új harmadik sor -2-szeresét hozzáadjuk az ötödik sorhoz és az új harmadik sor 4-szeresét hozzáadjuk a hatodik sorhoz:

$$\left(\begin{array}{rrrrrr|r} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 6 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -16 & -3 & 6 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 20 & 0 & -14 & -20 \end{array}\right).$$

DUPress

A negyedik sor 16-szorosát hozzáadjuk az ötödik sorhoz és a negyedik sor -20-szorosát hozzáadjuk a hatodik sorhoz:

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 6 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -19 & 22 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 20 & -34 & -20 \end{array}\right).$$

Végezetül az ötödik sor 20-szorosát adjuk hozzá a hatodik sor 19-szereséhez. Ekkor az alábbi „lépcsős” mátrixhoz jutunk:

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 6 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -19 & 22 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -206 & -580 \end{array}\right).$$

A kapott alapmátrix rangja 6, a kibővített mátrix rangja szintén 6. Mivel az alapmátrix és a kibővített mátrix rangja megegyezik, ezért az egyenletrendszer megoldható. Az alapmátrix rangja megegyezik az ismeretlenek számával, így az egyenletrendszer határozott, azaz egyértelmű a megoldása. Az utolsó mátrixból felírva az egyenletrendszert azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} I_1 - I_2 \qquad\qquad + I_6 &= 0 \\ I_2 + I_3 + I_4 \qquad &= 0 \\ 2I_3 + 6I_4 \quad - 3I_6 &= 0 \\ I_4 - I_5 + I_6 &= 0 \\ -19I_5 + 22I_6 &= 10 \\ -206I_6 &= -580. \end{aligned}$$

Az utolsó egyenletből

$$I_6 = \frac{580}{206} \approx 2,82\,[\mathrm{A}]$$

adódik. Ezt visszahelyettesítve az ötödik egyenletbe azt kapjuk, hogy

$$-19I_5 + 22 \cdot 2,82 = 10 \qquad \Rightarrow \qquad I_5 \approx 3,79\,[\mathrm{A}].$$

A negyedik egyenletbe behelyettesítve az I_5 és I_6 értékeit

$$I_4 - 3,79 + 2,82 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad I_4 \approx 0,97\,[\mathrm{A}]$$

adódik, a harmadik egyenletből a már megkapott értékek behelyettesítése után

$$2I_3 + 6 \cdot 0,97 - 3 \cdot 2,82 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad I_3 \approx 1,32\,[\mathrm{A}]$$

adódik. A második egyenletből azt kapjuk, hogy $I_2 \approx -2,29\,[\mathrm{A}]$, míg az első egyenletből $I_1 \approx -5,11\,[\mathrm{A}]$ adódik.

g) Az I_1 és I_2 áramerősségek értéke negatív, így a hozzájuk tartozó technikai áramirányok ellentétesek a feltételezettel.

Megjegyezzük, hogy nagy elemszámú mátrixok esetében a hosszadalmas számolásokat érdemes matematikai szoftver (például maple, excel, matlab, geogebra, scilab) segítségével végezni.

DUPress

9. Kémiai reakcióegyenletek

9.1. **Feladat.** A kalcium-klorid és nátrium-foszfát reakcióját az alábbi kémiai egyenlet írja le:

$$a \cdot CaCl_2 + b \cdot Na_3PO_4 \ \rightarrow \ c \cdot Ca_3(PO_4)_2 + d \cdot NaCl.$$

Határozzuk meg az egyenletben szereplő ismeretlen együtthatók értékét úgy, hogy azok mindegyike a lehető legkisebb pozitív egész szám legyen, majd írjuk fel a helyes reakció egyenletet!

Megoldás:

Az egyensúlyi feltételeknek megfelelő lineáris egyenletrendszer:

$$\begin{aligned} a &= 3c \\ 2a &= d \\ 3b &= d \\ b &= 2c \\ 4b &= 8c. \end{aligned}$$

Azonnal látható, hogy az utolsó egyenlet következmény egyenlete az utolsó előttinek, így az elhagyható az egyenletrendszer egyenletei közül. A fenti egyenletrendszer kibővített mátrixa:

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & -3 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Az első sor -2-szeresét adjuk hozzá a második sorhoz, majd cseréljük meg a második és negyedik sort:

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & -1 & 0 \end{array}\right).$$

A második sor -3-szorosát adjuk hozzá a harmadik sorhoz, majd a harmadik sor -1-szeresét adjuk hozzá a negyedik sorhoz:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & -1 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Az alapmátrix és kibővített mátrix rangja is 3, így az egyenletrendszer megoldható. Az alapmátrix rangja 1-gyel kevesebb, mint az ismeretlenek száma, így az egyeletrendszer határozatlan, azaz végtelen sok megoldása van. A fenti mátrixból felírva a Gauss-elimináció után kapott egyenleteket az alábbi egyenletrendszert kapjuk:

$$\begin{aligned} a - 3c &= 0 \\ b - 2c &= 0 \\ 6c - d &= 0. \end{aligned}$$

Legyen $c = t$, ahol $t \in \mathbb{R}$. Ekkor $a = 3t$, $b = 2t$, $d = 6t$. Mivel az egyenletrendszer legkisebb pozitív egész megoldását keressük, ezért az alábbi megoldásokat kapjuk: $a = 3$, $b = 2$, $c = 1$, $d = 6$. A kapott eredményeket felhasználva a reakcióegyenlet:

$$3 \cdot CaCl_2 + 2 \cdot Na_3PO_4 \;\rightarrow\; Ca_3(PO_4)_2 + 6 \cdot NaCl.$$

9.2. **Feladat.** A hidrogén-peroxid (H_2O_2) bomlékony anyag. Vízre (H_2O) és oxigénre (O_2) bomlik. Keressük meg azokat a legkisebb x_1, x_2 és x_3 poztitív egész számokat, melyek leírják a reakcióban résztvevő vegyületek mennyiségét:

$$x_1 \cdot H_2O_2 \rightarrow x_2 \cdot H_2O + x_3 \cdot O_2.$$

Megoldás:

Felírjuk az egyensúlyi egyenleteket. A hidrogén (H) és oxigén (O) atomok mennyisége a reakcióegyenlet mindkét oldalán meg kell, hogy egyezzen, ami két egyenletet ad:

$$\begin{aligned} H:&\;\; 2x_1 = 2x_2 \\ O:&\;\; 2x_1 = \;\; x_2 + 2x_3. \end{aligned}$$

Ez alapján a megoldandó lineáris egyenletrendszer kibővített mátrixa:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -2 & 0 \end{array}\right).$$

DUPress

Az első sor -1-szeresét adjuk hozzá a második sorhoz:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right).$$

Ekkor a

$$\begin{aligned} 2x_1 - 2x_2 \phantom{{}-2x_3} &= 0 \\ x_2 - 2x_3 &= 0 \end{aligned}$$

egyenletrendszerhez jutunk. Az egyenletrendszernek végtelen sok megoldása van (hiszen az alapmátrix rangja 2, az ismeretlenek száma pedig 3), így például x_3-t tetszőleges paraméternek választjuk. Ha $x_3 = t$, ahol $t \in \mathbb{R}$, akkor a második egyenletből $x_2 = 2t$ adódik. Ezt az első egyenletbe behelyettesítve azt kapjuk, hogy $2x_1 - 4t = 0$, azaz $x_1 = 2t$. Mivel a legkisebb pozitív egész megoldást keressük, (amit $t = 1$ esetén kapunk meg), ezért a keresett ismeretlenek $x_1 = 2$, $x_2 = 2$ és $x_3 = 1$. Ennek megfelelően a helyes kémiai egyenlet:

$$2 \cdot H_2O_2 \to 2 \cdot H_2O + O_2.$$

9.3. **Feladat.** Határozzuk meg az alábbi kémiai reakcióegyenletben az ismeretlen együtthatók értékét úgy, hogy azok a lehető legkisebb pozitív egész számok legyenek:

$$x_1 \cdot C_3H_8 + x_2 \cdot O_2 \to x_3 \cdot CO_2 + x_4 \cdot H_2O.$$

Megoldás:

Felírjuk az egyensúlyi egyenleteket. A szén (C), a hidrogén (H) és oxigén (O) atomok száma a reakció egyenlet mindkét oldalán meg kell, hogy egyezzen, ami három egyenletet ad:

$$\begin{aligned} C:\ 3x_1 &= x_3 \\ H:\ 8x_1 &= 2x_4 \\ O:\ 2x_2 &= 2x_3 + x_4. \end{aligned}$$

Ez alapján a megoldandó lineáris egyenletrendszer kibővített mátrixa:

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 3 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 8 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & -1 & 0 \end{array}\right).$$

A második sort szorozzuk 3-mal:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 8 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & -1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 24 & 0 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & -1 & 0 \end{array}\right).$$

Az első sor -8-szorosát hozzáadjuk a második sorhoz, végül megcseréljük a második és harmadik sort:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & -6 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & -1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & -6 & 0 \end{array}\right).$$

Ekkor a

$$\begin{aligned} 3x_1 - x_3 &= 0 \\ 2x_2 - 2x_3 - x_4 &= 0 \\ 8x_3 - 6x_4 &= 0 \end{aligned}$$

egyenletrendszerhez jutunk. Az egyenletrendszernek végtelen sok megoldása van (hiszen az alapmátrix rangja 3, az ismeretlenek száma pedig 4), így például x_4-et tetszőleges paraméternek választjuk. Ha $x_4 = t$, ahol $t \in \mathbb{R}$, akkor a harmadik egyenletből $x_3 = \frac{3}{4}t$ adódik. Ezt a második egyenletbe behelyettesítve azt kapjuk, hogy

$$2x_2 - \frac{3}{2}t - t = 0 \quad \Rightarrow \quad x_2 = \frac{5}{4}t.$$

Az első egyenletből

$$3x_1 - \frac{3}{4}t = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = \frac{1}{4}t.$$

Mivel a legkisebb pozitív egész megoldást keressük, (amit $t = 4$ esetén kapunk meg), ezért a keresett ismeretlenek $x_1 = 1$, $x_2 = 5$, $x_3 = 3$ és $x_4 = 4$. Ennek megfelelően a helyes kémiai egyenlet:

$$C_3H_8 + 5 \cdot O_2 \to 3 \cdot CO_2 + 4 \cdot H_2O.$$

10. Lineáris egyenletrendszerek további alkalmazásai

10.1. **Feladat.** Egy lóversenyen három lóra fogadnak. Ha az első nyer, akkor a rá tett összeg kétszeresét; ha a második nyer, az arra tett összeg négyszeresét; ha a harmadik nyer, az arra tett összeg nyolcszorosát kapják. Mekkora összeget kell tenni egy-egy lóra ahhoz, hogy bármelyik fusson be elsőnek, 100 dollár nyeresége legyen a fogadónak?

Megoldás:

Legyen az egyes lovakra tett összeg rendre x, y, z Ft. Ha az első fut be, a nyeremény $2x$, a veszteség $x + y + z$; ha a második fut be, akkor a nyeremény $4y$, a veszteség $x + y + z$; ha a harmadik fut be, akkor a nyeremény $8z$, a veszteség $x + y + z$. Így a megoldandó lineáris egyenletrendszer

$$\begin{aligned} 2x - x - y - z &= 100 \\ 4y - x - y - z &= 100 \\ 8z - x - y - z &= 100, \end{aligned}$$

amiből az ismeretlenek összevonása után az

$$\begin{aligned} x - y - z &= 100 \\ -x + 3y - z &= 100 \\ -x - y + 7z &= 100 \end{aligned}$$

egyenletrendszerhez jutunk, amit Gauss-eliminációval oldjuk meg. Első lépésben a lineáris egyenletrendszer kibővített mátrixának első sorát adjuk hozzá a második és a harmadik sorhoz:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & -1 & 100 \\ -1 & 3 & -1 & 100 \\ -1 & -1 & 7 & 100 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & -1 & 100 \\ 0 & 2 & -2 & 200 \\ 0 & -2 & 6 & 200 \end{array}\right).$$

Második lépésben a második sort adjuk hozzá a harmadik sorhoz:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & -1 & 100 \\ 0 & 2 & -2 & 200 \\ 0 & -2 & 6 & 200 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & -1 & 100 \\ 0 & 2 & -2 & 200 \\ 0 & 0 & 4 & 400 \end{array}\right).$$

A Gauss-elimináció elvégzése után az

$$\begin{aligned} x - \quad y - \quad z &= 100 \\ 2y - 2z &= 200 \\ 4z &= 400 \end{aligned}$$

egyenletrendszerhez jutunk. Az utolsó egyenletből $z = 100$, a második egyenletből $y = 200$, az első egyenletből $x = 400$ adódik. Tehát az első lóra 400 dollárt, a másodikra 200 dollárt, a harmadikra 100 dollárt kell tennünk.

10.2. **Feladat.** Egy gépkocsi a vízszintes úton $80\left[\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}\right]$, az emelkedőn $56\left[\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}\right]$, a lejtőn $120\left[\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}\right]$ sebességgel halad. A $320\,[\mathrm{km}]$ hosszú utat oda 4 óra, vissza $4,25$ óra alatt teszi meg. Milyen hosszúak az egyes útszakaszok?

Megoldás:

Jelölje V a vízszintes útszakaszt, E az emelkedőt, L a lejtőt. Táblázatba foglalva felírjuk a szövegnek megfelelő matematikai modellt. Az első táblázat az odafelé, a második táblázat a visszafelé útnak megfelelő modellt tartalmazza. Az időt a jól ismert $v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$ képletből kifejezve kapjuk meg $\Delta t = \frac{\Delta s}{v}$. Az odafelé út esetén:

	v	Δs	Δt
I.(V)	80	x	$\frac{x}{80}$
II.(E)	56	y	$\frac{y}{56}$
III.(L)	120	z	$\frac{z}{120}$

A visszafelé út esetén:

	v	Δs	Δt
I.(V)	80	x	$\frac{x}{80}$
II.(E)	56	z	$\frac{z}{56}$
III.(L)	120	y	$\frac{y}{120}$

A megoldandó lineáris egyenletrendszer:

$$\begin{aligned} x+y+z&=320\\ \frac{x}{80}+\frac{y}{56}+\frac{z}{120}&=4\\ \frac{x}{80}+\frac{y}{120}+\frac{z}{56}&=4,25. \end{aligned}$$

A második és harmadik egyenlet mindkét oldalát szorozzuk 1 680-nal, majd az egyenletrendszert Gauss-eliminációval oldjuk meg. Első lépésben a lineáris egyenletrendszer kibővített mátrixa első sorának -21-szeresét adjuk hozzá a második sorhoz és a harmadik sorhoz:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 320\\ 21 & 30 & 14 & 6\,720\\ 21 & 14 & 30 & 7\,140 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 320\\ 0 & 9 & -7 & 0\\ 0 & -7 & 9 & 420 \end{array}\right)$$

Második lépésben a második sor 7-szeresét adjuk hozzá a harmadik sorhoz:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 320\\ 0 & 9 & -7 & 0\\ 0 & -63 & 81 & 3\,780 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 320\\ 0 & 9 & -7 & 0\\ 0 & 0 & 32 & 3\,780 \end{array}\right).$$

Az utolsó egyenletből $z = 118,125$ adódik, a második egyenletből azt kapjuk, hogy $y = 91,875$, végül az első egyenletből $x = 110$. A vízszintes útszakasz 110 [km], az emelkedő rész $91,875$ [km], a lejtős rész $118,875$ [km].

10.3. **Feladat.** Mekkorák annak a négyszögnek az oldalai, amelyben három-három oldal összege rendre 22, 24, 27 és 20 egység.

Megoldás:

Jelöljük a négyszög oldalait a, b, c, d-vel. Ekkor a megoldandó egyenletrendszer

$$\begin{aligned} a+b+c&=22\\ b+c+d&=24\\ a+b+d&=27\\ a+c+d&=20. \end{aligned}$$

Felírjuk a lineáris egyenletrendszer kibővített mátrixát, majd az egyenletrendszert Gauss-eliminációval oldjuk meg. Első lépésben az első sor -1-szeresét hozzáadjuk a harmadik sorhoz és a negyedik sorhoz:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 22 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 24 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 27 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 20 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 22 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 24 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right).$$

Második lépésben a második sort hozzáadjuk a negyedik sorhoz:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 22 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 24 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 22 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 24 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 22 \end{array}\right).$$

Következő lépésben a harmadik sort hozzáadjuk a negyedik sorhoz:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 22 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 24 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 22 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 22 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 24 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 27 \end{array}\right).$$

Az utolsó mátrixból az

$$\begin{aligned} a+b+c+\ \ d &= 22 \\ b+c+\ \ d &= 24 \\ -\,c+\ \ d &= 5 \\ 3d &= 27 \end{aligned}$$

lineáris egyenletrendszerhez jutunk. Az utolsó egyenletből $d = 9$ adódik, amit visszehelyettesítve a harmadik egyenletbe azt kapjuk, hogy $c = 4$. A második egyenletből $y = 11$, végül az első egyenletből $x = 7$ adódik. A négyszög oldalai tehát 4 [cm], 7 [cm], 9 [cm] és 11 [cm].

10.4. **Feladat.** Mekkorák annak a háromszögnek az oldalai, amelyben két-két oldal összege rendre 26, 32 és 34 cm.

Megoldás:

Jelöljük a háromszög oldalait a, b, c-vel. Ekkor a megoldandó lineáris egyenletrendszer:

$$\begin{aligned} a+b &= 26 \\ a+c &= 32 \\ b+c &= 34. \end{aligned}$$

Felírjuk a lineáris egyenletrendszer kibővített mátrixát, majd Gauss-eliminációval megoldjuk az egyenletrendszert. Első lépésben a kibővített mátrix az első sorának -1-szeresét adjuk hozzá a második sorhoz:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 26 \\ 1 & 0 & 1 & 32 \\ 0 & 1 & 1 & 34 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 26 \\ 0 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 34 \end{array}\right)$$

Második lépésben adjuk össze a második és a harmadik sort:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 26 \\ 0 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 34 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 26 \\ 0 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & 40 \end{array}\right).$$

Az utolsó egyenletből azt kapjuk, hogy $c = 20$, a második egyenletből $b = 14$, az elsőből $a = 12$. A háromszög oldalai tehát $12\,[\mathrm{cm}]$, $14\,[\mathrm{cm}]$ és $20\,[\mathrm{cm}]$.

10.5. **Feladat.** Egy medencébe három csapon folyhat víz. Az első és a második csapon együtt $1,2$ óra alatt tudjuk megtölteni a medencét, a második és a harmadik csapon együtt 2 óra alatt, az első és a harmadik csapon együtt 1 óra 30 perc alatt. Mennyi idő alatt tölti meg a medencét egy-egy csap külön? Mennyi idő alatt telik meg a medence, ha egyszerre mind a három csapot megnyitják?

Megoldás:

Átvitt értelemben munkának tekinthető a medence megtöltése. A feladat szövegének megfelelő matematikai modell, melyben felhasználjuk, hogy a teljesítmény az időegységre eső munkavégzés, azaz $P = \frac{W}{t}$:

	P	W	t
1.	$\frac{1}{x}$	1	x
2.	$\frac{1}{y}$	1	y
3.	$\frac{1}{z}$	1	z

A megoldandó egyenletrendszer:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{x}+\frac{1}{y}&=\frac{1}{1,2}\\
\frac{1}{y}+\frac{1}{z}&=\frac{1}{2}\\
\frac{1}{x}+\frac{1}{z}&=\frac{1}{1,5}.
\end{aligned}
$$

Ebből az

$$\frac{1}{x}=a,\quad \frac{1}{y}=b,\quad \frac{1}{z}=c$$

helyettesítéssel a

$$
\begin{aligned}
6a+6b&=5\\
2b+2c&=1\\
a+c&=\frac{2}{3}
\end{aligned}
$$

lineáris egyenletrendszerhez jutunk. Felírjuk a lineáris egyenletrendszer kibővített mátrixát, majd az egyenletrendszert Gauss-eliminációval oldjuk meg. Első lépésben cseréljük meg a kibővített mátrix első és harmadik sorát, majd az új első sor -6-szorosát adjuk hozzá az új harmadik sorhoz:

$$
\left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 6 & 0 & 5\\ 0 & 2 & 2 & 1\\ 1 & 0 & 1 & \frac{2}{3} \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 2 & 2 & 1\\ 0 & 6 & -6 & \frac{2}{3} \end{array}\right).
$$

Második lépésben a második sor -3-szorosát adjuk hozzá a harmadik sorhoz és a második sort osszuk el 2-vel:

$$
\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 2 & 2 & 1\\ 0 & 6 & -6 & \frac{2}{3} \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & \frac{2}{3}\\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2}\\ 0 & 0 & -12 & -2 \end{array}\right).
$$

A kapott mátrixból felírhatjuk az

$$
\begin{aligned}
a \quad + \quad c &= \frac{2}{3}\\
b + \quad c &= \frac{1}{2}\\
-\,12c &= -2
\end{aligned}
$$

DUPress

lineáris egyenletrendszert. Az utolsó egyenletből azt kapjuk, hogy $c = \frac{1}{6}$. Ezt behelyettesítve a második egyenletbe $b = \frac{1}{3}$ adódik. Az első egyenletből b és c értékeinek behelyettesítése után azt kapjuk, hogy$a = \frac{1}{2}$. A kapott eredményeket felhasználva $z = 6$, $y = 3$, illetve $x = 2$ adódik. Tehát az első csapon át 2 óra, a másodikon 3 óra, a harmadikon 6 óra alatt telik meg a medence. A három csapot együtt működtetve

$$\frac{1}{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}} = 1$$

óra alatt telik meg a medence.

10.6. **Feladat.** Egy munkát az A és B csapat együtt 9 nap alatt, az A és C együtt 12 nap alatt, a B és C csapat együtt 11 nap alatt végezné el. Hány nap alatt készülnek el, ha mindhárman együtt dolgoznak?

Megoldás:

A feladat szövegének megfelelő matematikai modell, melyben felhasználjuk, hogy a teljesítmény az időegységre eső munkavégzés, azaz $P = \frac{W}{t}$:

	P	W	t
A	$\frac{1}{x}$	1	x
B	$\frac{1}{y}$	1	y
C	$\frac{1}{z}$	1	z

A megoldandó egyenletrendszer:

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} &= \frac{1}{9} \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{z} &= \frac{1}{12} \\ \frac{1}{y} + \frac{1}{z} &= \frac{1}{11}. \end{aligned}$$

Ha bevezetjük az

$$\frac{1}{x} = a, \quad \frac{1}{y} = b, \quad \frac{1}{z} = c$$

helyettesítéseket, akkor a

$$\begin{aligned} 9a + 9b &= 1 \\ 12a + 12c &= 1 \\ 11b + 11c &= 1 \end{aligned}$$

lineáris egyenletrendszerhez jutunk. Felírjuk a lineáris egyenletrendszer kibővített mátrixát, majd arra alkalmazzuk a Gauss-eliminációt. Első lépésben a második sort 3-mal szorozzuk:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 9 & 9 & 0 & 1 \\ 12 & 0 & 12 & 1 \\ 0 & 11 & 11 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 9 & 9 & 0 & 1 \\ 36 & 0 & 36 & 3 \\ 0 & 11 & 11 & 1 \end{array}\right).$$

Második lépésben az első sor -4-szeresét hozzáadjuk a második sorhoz:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 9 & 9 & 0 & 1 \\ 36 & 0 & 36 & 3 \\ 0 & 11 & 11 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 9 & 9 & 0 & 1 \\ 0 & -36 & 36 & -1 \\ 0 & 11 & 11 & 1 \end{array}\right).$$

Harmadik lépésben a harmadik sort szorozzuk 36-tal, majd a második sor 11 szeresét hozzáadjuk a harmadik sorhoz:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 9 & 9 & 0 & 1 \\ 0 & -36 & 36 & -1 \\ 0 & 396 & 396 & 36 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 9 & 9 & 0 & 1 \\ 0 & -36 & 36 & -1 \\ 0 & 0 & 792 & 25 \end{array}\right).$$

A kapott mátrixból a

$$\begin{aligned} 9a + 9b \phantom{{}+36c} &= 1 \\ -36b + 36c &= -1 \\ 792c &= 25 \end{aligned}$$

egyenletrendszerhez jutunk. Az utolsó egyenletből azt kapjuk, hogy

$$792 = 25 \qquad \Rightarrow \qquad c = \frac{25}{792}.$$

A második egyenletből

$$-36b + 36 \cdot \frac{25}{792} \qquad \to \qquad b = \frac{1}{47},$$

míg az első egyenletből

$$9a + 9 \cdot \frac{1}{47} = 1 \qquad \Rightarrow \qquad a = \frac{38}{329}$$

DUPress

adódik. Felhasználva a kapott eredményeket azt kapjuk, hogy a három csap együtt

$$\frac{1}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}}=\frac{1}{a+b+c}\approx 6$$

nap alatt végzi el a munkát.

10.7. **Feladat.** Három szám összege 100. Ha az első számot elosztjuk a másodikkal, a hányados 5, a maradék 1 lesz. Ha a harmadik számot osztjuk az elsővel, ugyanaz a hányados is, és a maradék is, mint az előbb. Adjuk meg a három számot!

Megoldás:

Jelöljük az első számot x-el, a másodikat y-nal, a harmadikat z-vel. Ekkor a szövegnek megfelelő egyenletrendszer:

$$\begin{aligned} x+y+z&=100\\ \frac{x}{y}&=5+\frac{1}{y}\\ \frac{z}{x}&=5+\frac{1}{x}, \end{aligned}$$

amelyet átírhatunk az

$$\begin{aligned} x+y+z&=100\\ x-5y\quad\;&=\;\;1\\ -5x\qquad+z&=\;\;1 \end{aligned}$$

lineáris egyenletrendszerré. Felírjuk az egyenletrendszer kibővített mátrixát, majd alkalmazzuk a Gauss-eliminációt. Első lépésben az első sor -1-szeresét hozzáadjuk a második sorhoz és az első sor 5-szörösét hozzáadjuk a harmadik sorhoz:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 100\\ 1 & -5 & 0 & 1\\ -5 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)\to\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 100\\ 0 & -6 & -1 & -99\\ 0 & 5 & 6 & 501 \end{array}\right)$$

Második lépésben a harmadik sort szorozzuk 6-tal, majd a második sor 5-szörösét hozzáadjuk a harmadik sorhoz:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 100\\ 0 & -6 & -1 & -99\\ 0 & 30 & 36 & 3\,006 \end{array}\right)\to\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 100\\ 0 & -6 & -1 & -99\\ 0 & 0 & 31 & 2\,511 \end{array}\right).$$

A kapott mátrixból az alábbi lineáris egyenletrendszert kapjuk:

$$\begin{aligned} x + \ \ y + \ \ \ z &= 100 \\ -6y - \ \ \ z &= -99 \\ 31z &= 2511. \end{aligned}$$

Az utolsó egyenletből kapjuk, hogy $z = 81$. Ezt visszahelyettesítve a második egyenletbe $y = 3$ adódik. Az első egyenletből azt kapjuk, hogy $x = 16$.

10.8. **Feladat.** Egy $100\,[\mathrm{m}]$ hosszú körpályán két test kering. Egy irányba haladva 20 másodpercenként, ellenkező irányba haladva 4 másodpercenként találkoznak. Mekkora a testek sebessége?

Megoldás:

Legyen a két test sebessége v_1 és v_2. Feltehető, hogy $v_1 > v_2$. Azonos irányba haladva, az első találkozásig az útkülönbség a pálya hossza;
ellenkező irányba haladva, egy találkozástól a következőig az utak összege a pálya hossza. Tehát a megoldandó lineáris egyenletrendszer:

$$\begin{aligned} 20v_1 - 20v_2 &= 100 \\ 4v_1 + \ \ 4v_2 &= 100. \end{aligned}$$

Az egyenletrendszert Cramer-szabállyal oldjuk meg. Az alapmátrix determinánsa:

$$D = \begin{vmatrix} 20 & -20 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} = 80 + 80 = 160.$$

Továbbá

$$D_1 = \begin{vmatrix} 100 & -20 \\ 100 & 4 \end{vmatrix} = 400 + 2\,000 = 2\,400$$

és

$$D_2 = \begin{vmatrix} 20 & 100 \\ 4 & 100 \end{vmatrix} = 2\,000 - 400 = 1\,600.$$

A kapott eredményeket felhasználva azt kapjuk, hogy

$$v_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{2\,400}{160} = 15\left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right];$$

$$v_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{1\,600}{160} = 10\left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right].$$

Azt kaptuk tehát, hogy a testek sebessége:

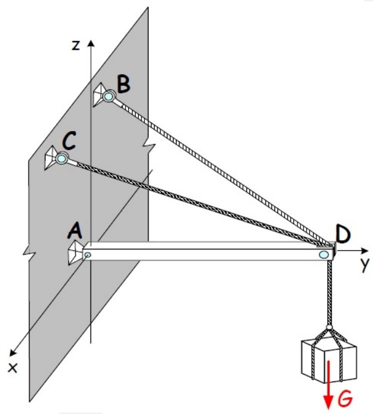
$$v_1 = 10\left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right] \qquad v_2 = 15\left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right].$$

DUPress

10.9. **Feladat.** Az alábbi szerkezet AD gerendája a B, illetve C pontoknál rögzített kötelek segítségével egy $m = 960\,[\mathrm{kg}]$ tömegű terhet tart. A teher súlyát a súlypontjához kötött

$$G = m \cdot g = 960 \cdot 10 = 9600\,[\mathrm{N}] = 9,6\,[\mathrm{kN}]$$

nagyságú erőként vesszük figyelembe, amely az alkalmasan megválasztott koordináta-rendszerben $G = (0; 0; -9,6)\,[\mathrm{kN}]$ erővektor lesz. A teher súlya mellett a gerenda súlya elhanyagolható, így a gerendát egy súlytalan rúddal modellezhetjük. A feladat egyszerűsített ábráját elkészítjük, ahol a berajzolt egyenes szakaszok egyben az ébredő belső erők. Az adott koordináta-rendszerben a vonatkozó pontok helye
$A = (0; 0; 0)$, $B = (-1; 0; 4)$, $C = (3; 0; 4)$ és $D = (0; 0; 6)$.



Tegyük fel, hogy a szerkezet tartós nyugalomban van. Határozzuk meg az ismeretlen kötélerőket!

<u>**Megoldás**</u>:

Az adott koordinátarendszerben a pontok helye

$$r_A = (0; 0; 0), \quad r_B = (-1; 0; 4), \quad r_C = (3; 0; 4), \quad r_D = (0; 6; 0).$$

A tartós egyensúly feltétele, hogy a testre ható erők eredője zérus legyen. Az ismeretlen kötélerőket F_i-vel jelölve $(i = 1, 2, 3)$, az egyensúly feltételére az

$$F_1 + F_2 + F_3 + G = 0$$

egyenlet adódik. A megoldást a továbbiakban az

$$F_i = \lambda_i \cdot a_i$$

alakban keressük, ahol a_i az erő irányát kijelölő irányvektor, λ_i pedig a vonatkozó skalárszorzó lesz. Ennek megfelelően

$$a_1 = \overrightarrow{AD} = (0; 6; 0), \quad a_2 = \overrightarrow{BD} = (1; 6; -4), \quad a_3 = \overrightarrow{CD} = (-3; 6; -4).$$

Tehát a megoldandó lineáris egyenletrendszer

$$\lambda_1 \cdot a_1 + \lambda_2 \cdot a_2 + \lambda_3 \cdot a_3 = -G.$$

Behelyettesítve a megfelelő adatokat az

$$\begin{aligned} \lambda_2 - 3\lambda_3 &= 0 \\ 6\lambda_1 + 6\lambda_2 + 6\lambda_3 &= 0 \\ -4\lambda_2 - 4\lambda_3 &= 9,6. \end{aligned}$$

egyenletrendszerhez jutunk. Felírjuk a lineáris egyenletrendszer kibővített mátrixát, majd Gauss-eliminációval megoldjuk az egyenletrendszert. Első lépésben megcseréljük az első és második sort, majd az új első sort osztjuk 6-tal, a harmadik sort osztjuk -4-gyel:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -3 & 0 \\ 6 & 6 & 6 & 0 \\ 0 & -4 & -4 & 9,6 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2,4 \end{array}\right)$$

Végül a második sor -1-szeresét hozzáadjuk a harmadikhoz:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -2,4 \end{array}\right).$$

Az egyenletrendszer megoldása $\lambda_3 = -0,6$, $\lambda_2 = -1,8$, $\lambda_1 = 2,4$. Ezek ismeretében

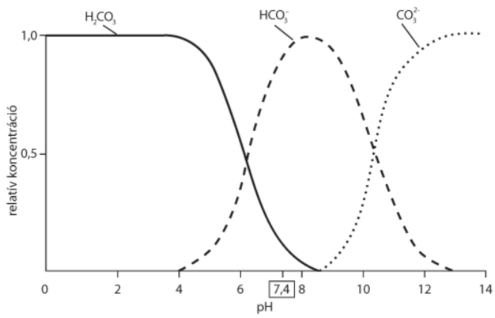
$$\begin{aligned} F_1 &= \lambda_1 \cdot a_1 = (0; 14,4; 0)\ [\mathrm{kN}] \\ F_2 &= \lambda_2 \cdot a_2 = (-1,8; -10,8; 7,2)\ [\mathrm{kN}] \\ F_3 &= \lambda_3 \cdot a_3 = (1,8; -3,6; 2,4)\ [\mathrm{kN}]. \end{aligned}$$

11. Formula mátrix, sztöchiometriai mátrix

11.1. **Feladat.** A szénsav disszociációját két egyenlet írja le:

$$H_2CO_3 \rightleftharpoons HCO_3^- + H^+$$
$$HCO_3^- \rightleftharpoons CO_3^{2-} + H^+.$$

Az alábbi ábra mutatja a széndioxidból keletkező szénsav disszociációját vizes oldatban 25°-on:



a) Írjuk fel a formula mátrixot!
b) Adjuk meg a formula mátrix rangját!
c) Adjuk meg a sztöchiometriai mátrixot!
d) Adjuk meg a sztöchiometriai mátrix rangját!
e) Adjuk meg a lineárisan független reakciók számát!

<u>**Megoldás**</u>:

a) A formula mátrixot úgy állítjuk elő, hogy a mátrix sorai (az utolsó kivételével) az egyes kémiai elemeknek felelnek meg, míg a mátrix utolsó sora a töltéseket mutatja. A mátrix egyes oszlopai az egyes vegyületeknek felelnek meg. A feladatban megadott folyamathoz az alábbi formula mátrix írható föl, ahol az első sor a H, a második a C, a harmadik az O molekulának megfelelő sor. Az első oszlop a H_2CO_3, a második oszlop a HCO_3^-, a harmadik oszlop a H^+ és a negyedik oszlop a CO_3^{2-} vegyületet jelenti:

$$A = \left(\begin{array}{c|cccc} & H_2CO_3 & HCO_3^- & H^+ & CO_3^{2-} \\ \hline H & 2 & 1 & 1 & 0 \\ C & 1 & 1 & 0 & 1 \\ O & 3 & 3 & 0 & 3 \\ q & 0 & -1 & 1 & -2 \end{array}\right).$$

b) A formula mátrix rangjának meghatározásához első lépésben cseréljük meg a mátrix első és második sorát:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Az első sor -2-szeresét adjuk hozzá a második sorhoz, az első sor -3-szorosát adjuk hozzá a harmadik sorhoz:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

A második sor -1-szeresét adjuk hozzá a negyedik sorhoz:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

A mátrix rangja: 2.

c) Ha már ismerjük egy folyamatban lejátszódó reakciókat, a köztük lévő lineáris kapcsolatot a sztöchiometriai mátrix segítségével írhatjuk le. Ennek oszlopai a reakciókhoz, sorai pedig a reakciókban szereplő vegyületekhez tartoznak. Az i-edik sorban, j-edik oszlopban álló szám a j-edik reakció 0-ra rendezett egyenletében az i-edik vegyület mennyisége. A sztöchiometriai mátrix tehát jelen esetben:

$$B = \left(\begin{array}{c|cc} H_2CO_3 & -1 & 0 \\ HCO_3^- & 1 & -1 \\ H^+ & 1 & 1 \\ CO_3^{2-} & 0 & 1 \end{array} \right).$$

Az első oszlop a feladatban szereplő első, a második oszlop a feladatban szereplő második reakciónak felel meg. Az egyes sorokban a vegyületek rendre: H_2CO_3, HCO_3^-, H^+ és CO_3^{2-}.

DUPress

d) A B mátrix első sorát adjuk hozzá a második sorhoz és a harmadik sorhoz:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

A második sort adjuk hozzá a harmadik sorhoz és a negyedik sorhoz:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

A kapott mátrix rangja: 2.

e) A lineárisan független reakciók száma: 2.

11.2. **Feladat.** Tekintsük az alábbi reakciósorozatot:

$$H_2 + CO \rightleftharpoons CO_2 + H_2$$
$$H_2O + H \rightleftharpoons H_2 + OH$$
$$OH + CO \rightleftharpoons CO_2 + H.$$

Írjuk fel a sztöchiometriai mátrixot, majd adjuk meg annak a rangját és határozzuk meg a lineárisan független reakciók számát!

<u>**Megoldás**</u>:

A sztöchiometriai mátrix:

$$B = \left(\begin{array}{c|ccc} H_2O & -1 & -1 & 0 \\ CO & -1 & 0 & -1 \\ CO_2 & 1 & 0 & 1 \\ H_2 & 1 & 1 & 0 \\ H & 0 & -1 & 1 \\ OH & 0 & 1 & -1 \end{array} \right).$$

A mátrix első sorának -1-szeresét adjuk hozzá a második sorához. A mátrix első sorát adjuk hozzá a harmadik sorához és a negyedik sorához:

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

A második sort adjuk hozzá a harmadik és ötödik sorhoz, továbbá a második sor -1-szeresét adjuk hozzá az utolsó sorhoz:

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

A sztöchiometriai mátrix rangja 2, így a lineárisan független reakciók száma: 2.

11.3. **Feladat.** [**60**] Egy több reakcióból álló folyamatban az alábbi bruttó reakciót mérték:

$$5BrO_1^- + 2H^+ \rightleftharpoons Br_2 + 3BrO_3^- + H_2O$$

Ebben a folyamatban az alábbi elemi reakciók mehetnek végbe:

$$\begin{aligned} BrO_2^- + HBrO_2 &\rightleftharpoons BrO_3^- + BrOH \\ BrO_2^- + H^+ &\rightleftharpoons HBrO_2 \\ BrO_2^- + H_2O_2 &\rightleftharpoons BrO_3^- + H_2O \\ 2BrOH &\rightleftharpoons Br_2 + H_2O_2. \end{aligned}$$

a) Írjuk fel a folyamatnak megfelelő sztöchiometriai mátrixot!
b) Határozzuk meg a sztöchiometriai mátrix rangját!
c) Adják meg a lineárisan független reakciók számát!
d) Melyik elemi reakciónak hányszor kell végbemennie a bruttó reakcióban?

<u>**Megoldás**</u>:

a) A B-vel jelölt sztöchiometriai mátrix:

$$B = \begin{array}{c} BrO_2^- \\ H^+ \\ Br_2 \\ BrO_3^- \\ H_2O \\ HBrO_2 \\ BrOH \\ H_2O_2 \end{array} \left(\begin{array}{rrrr} -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right).$$

DUPress

b) A bruttó reakciónak megfelelő együtthatókból képzett oszlopvektor jelöljük b-vel:

$$b = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

A feladatunk az, hogy állítsuk elő a b vektort a B mátrix oszlopainak lineáris kombinációjaként, ami azt jelenti, hogy határozzuk meg az $A \cdot x = b$ lineáris egyenletrendszer megoldását. A megoldandó lineáris egyenletrendszert mátrixos alakban is felírjuk úgy, hogy az előbbi „tömörebb" $A \cdot x = b$ formát részletesebben írjuk föl:

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -2 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

A lineáris egyenletrendszer kibővített mátrixát jelöljük $B|b$-vel:

$$B|b = \left(\begin{array}{rrrr|r} -1 & -1 & -1 & 0 & -5 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

Az első sort adjuk hozzá a negyedik és a hetedik sorhoz, továbbá az első sor -1-szeresét adjuk hozzá a hatodik sorhoz:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & -1 & -1 & 0 & -5 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

A második sor -1-szeresét adjuk hozzá a negyedik sorhoz és a hetedik sorhoz:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & -1 & -1 & 0 & -5 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

A negyedik sort elhagyhatjuk, mert minden eleme zérus, továbbá az ötödik sor is elhagyható, mert a megfelelő helyen lévő elemeik megegyeznek a hatodik soréval:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & -1 & -1 & 0 & -5 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

Cseréljük meg a harmadik és a negyedik sort:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & -1 & -1 & 0 & -5 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

A harmadik sort adjuk hozzá az ötödik sorhoz és a hatodik sorhoz:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & -1 & -1 & 0 & -5 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Az utolsó sort elhagyjuk, mert megegyezik a negyedik sorral:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & -1 & -1 & 0 & -5 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -2 \end{array}\right).$$

A negyedik sor 2-szeresét hozzáadjuk az ötödik sorhoz:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & -1 & -1 & 0 & -5 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

A kapott mátrix utolsó sora elhagyható, így Gauss-elimináció után az alábbi mátrix adódik:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & -1 & -1 & 0 & -5 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Látható, hogy a sztöchiometriai mátrix rangja 4.

c) Mivel a sztöchiometriai mátrix rangja 4, így a lineárisan független reakciók száma: 4.

d) Az előbbi egyenletrendszer egyértelműen megoldható. Az utolsó sornak megfelelő egyenletből azt kapjuk, hogy $x_4 = 1$, a harmadik sornak megfelelő egyenletből $x_3 = 1$ adódik. A második sornak megfelelő egyenletből $x_2 = 2$. A kapott értékeket behelyettesítve az első sornak megfelelő

$$-x_1 - x_2 - x_3 = -5$$

egyenletbe azt kapjuk, hogy

$$-x_1 - 2 - 1 = -5 \qquad \Rightarrow \qquad x_1 = 2.$$

A sztöchiometriai mátrix oszlopait jelölje: a_1, a_2, a_3 és a_4. Ekkor azt kapjuk, hogy

$$b = 2a_1 + 2a_2 + a_3 + a_4,$$

ami azt jelenti, hogy az első és második reakció kétszer, a harmadik és negyedik reakció egyszer megy végbe a bruttó reakció során.

DUPress

12. Parciális törtekre bontás

12.1. **Feladat.** Bontsuk fel parciális törtek összegére a

$$\frac{2x+3}{x^2+5x+6}$$

algebrai törtet!

Megoldás:

Első lépésben szorzattá alakítjuk a nevezőt. Ehhez megkeressük az

$$x^2+5x+6=0$$

egyenlet megoldását:

$$x_{1,2}=\frac{-5\pm\sqrt{25-24}}{2}=\frac{-5\pm 1}{2},$$

azaz $x_1=-2$, illetve $x_2=-3$. Ezt felhasználva a gyöktényezős alak:

$$x^2+5x+6=(x+2)\cdot(x+3).$$

A keresett kifejezést

$$\frac{2x+3}{x^2+5x+6}=\frac{A}{x+2}+\frac{B}{x+3}$$

alakban keressük. Az előbbi egyenlet mindkét oldalát szorozzuk a közös nevezővel:

$$2x+3=A\cdot(x+3)+B\cdot(x+2).$$

Felbontva a zárójeleket

$$2x+3=Ax+3A+Bx+2B$$

adódik. A tagokat csoportosítsuk fokszám szerint csökkenő sorrendbe:

$$2x+3=(A+B)\cdot x+3A+2B.$$

A megfelelő fokszámú tagok együtthatóit összehasonlítva az

$$\begin{aligned} A+\ \ B&=2\\ 3A+2B&=3 \end{aligned}$$

egyenletrendszerhez jutunk. Az egyenletrendszert Cramer-szabállyal oldjuk meg. Az alapmátrix determinánsa:

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 1\\ 3 & 2 \end{vmatrix}=2-3=-1.$$

Továbbá

$$D_1 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 3 = 1$$

és

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 6 = -3.$$

A kapott eredményeket felhasználva azt kapjuk, hogy

$$A = \frac{D_1}{D} = \frac{1}{-1} = -1;$$

$$B = \frac{D_2}{D} = \frac{-3}{-1} = 3.$$

Azt kaptuk tehát, hogy a keresett felbontás:

$$\frac{2x+3}{x^2+5x+6} = \frac{-1}{x+2} + \frac{3}{x+3}.$$

12.2. **Feladat.** Bontsuk fel parciális törtek összegére a

$$\frac{3x+1}{x^2+7x+12}$$

algebrai törtet!

<u>**Megoldás**</u>:

Első lépésben szorzattá alakítjuk a nevezőt. Ehhez megkeressük az

$$x^2 + 7x + 12 = 0$$

egyenlet megoldását:

$$x_{1,2} = \frac{-7 \pm \sqrt{49 - 248}}{2} = \frac{-7 \pm 1}{2},$$

azaz $x_1 = -3$, illetve $x_2 = -4$. Ezt felhasználva a gyöktényezős alak:

$$x^2 + 5x + 6 = (x+3) \cdot (x+4).$$

A keresett kifejezést

$$\frac{3x+1}{x^2+7x+12} = \frac{A}{x+3} + \frac{B}{x+4}$$

alakban keressük. Az előbbi egyenlet mindkét oldalát szorozzuk a közös nevezővel:

$$3x + 1 = A \cdot (x+4) + B \cdot (x+3).$$

Felbontva a zárójeleket

$$3x + 1 = Ax + 4A + Bx + 3B$$

DUPress

adódik. A tagokat csoportosítsuk fokszám szerint csökkenő sorrendbe:

$$3x + 1 = (A + B) \cdot x + 4A + 3B.$$

A megfelelő fokszámú tagok együtthatóit összehasonlítva az

$$\begin{aligned} A + \ \ B &= 3 \\ 4A + 3B &= 1 \end{aligned}$$

egyenletrendszerhez jutunk. Az egyenletrendszert Cramer-szabállyal oldjuk meg. Az alapmátrix determinánsa:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 4 = -1.$$

Továbbá

$$D_1 = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 9 - 1 = 8$$

és

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 5 - 12 = -11.$$

A kapott eredményeket felhasználva azt kapjuk, hogy

$$A = \frac{D_1}{D} = \frac{8}{-1} = -8;$$

$$B = \frac{D_2}{D} = \frac{-11}{-1} = 11.$$

Azt kaptuk tehát, hogy a keresett felbontás:

$$\frac{3x + 1}{x^2 + 7x + 12} = \frac{-8}{x + 3} + \frac{11}{x + 4}.$$

12.3. **Feladat.** Bontsuk fel parciális törtek összegére a

$$\frac{3x - 7}{(x - 4)^2}$$

algebrai törtet!

Megoldás:

A keresett kifejezést

$$\frac{3x - 7}{(x - 4)^2} = \frac{A}{x - 4} + \frac{B}{(x - 4)^2}$$

alakban keressük. Az előbbi egyenlet mindkét oldalát szorozzuk a közös nevezővel:

$$3x - 7 = A \cdot (x - 4) + B.$$

DUPress

A zárójel felbontása után azt kapjuk, hogy

$$3x - 7 = Ax - 4A + B.$$

A megfelelő fokszámú tagok összehasonlítása után az

$$\begin{aligned} A \quad &= 3 \\ -4A + B &= -7 \end{aligned}$$

egyenletrendszerhez jutunk. A második egyenletbe behelyettesítve az A értékét azt kapjuk, hogy $B = 5$. A keresett felbontás tehát:

$$\frac{3x - 7}{(x-4)^2} = \frac{3}{x-4} + \frac{5}{(x-4)^2}.$$

12.4. **Feladat.** Bontsuk fel parciális törtek összegére a

$$\frac{4x + 7}{x^2 - 6x + 9}$$

algebrai törtet!

<u>**Megoldás**</u>:

A nevező teljes négyzet, így átalakítható az $(x-3)^2$ kifejezéssé. A keresett törtet

$$\frac{4x + 7}{(x-3)^2} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{(x-3)^2}$$

alakban keressük. Az előbbi egyenlet mindkét oldalát szorozzuk a közös nevezővel:

$$4x + 7 = A \cdot (x - 3) + B.$$

A zárójel felbontása után azt kapjuk, hogy

$$4x + 7 = Ax - 3A + B.$$

A megfelelő fokszámú tagok összehasonlítása után az

$$\begin{aligned} A \quad &= 4 \\ -3A + B &= 7 \end{aligned}$$

egyenletrendszerhez jutunk. A második egyenletbe behelyettesítve az A értékét azt kapjuk, hogy $B = 19$. A keresett felbontás tehát:

$$\frac{4x + 7}{(x-3)^2} = \frac{4}{x-3} + \frac{19}{(x-3)^2}.$$

12.5. **Feladat.** Bontsuk fel parciális törtek összegére a

$$\frac{x+1}{x^2-4}$$

algebrai törtet!

<u>**Megoldás**</u>:

Első lépésben szorzattá alakítjuk a nevezőt:

$$x^2-4=(x-2)\cdot(x+2).$$

A keresett kifejezést

$$\frac{x+1}{(x-2)\cdot(x+2)}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x+2}$$

alakban keressük. Az előbbi egyenlet mindkét oldalát szorozzuk a közös nevezővel:

$$x+1=A\cdot(x+2)+B\cdot(x-2).$$

Felbontva a zárójeleket

$$x+1=Ax+2A+Bx-2B$$

adódik. A tagokat csoportosítsuk fokszám szerint csökkenő sorrendbe:

$$x+1=(A+B)\cdot x+2A-2B.$$

A megfelelő fokszámú tagok együtthatóit összehasonlítva az

$$\begin{aligned} A+\ \ B&=1\\ 2A-2B&=1 \end{aligned}$$

egyenletrendszerhez jutunk. Az egyenletrendszert Gauss-eliminációval oldjuk meg. A lineáris egyenletrendszer kibővített mátrixa:

$$\left(\begin{array}{rr|r} 1 & 1 & 1\\ 2 & -2 & 1 \end{array}\right).$$

Az első sor -2-szeresét adjuk hozzá a második sorhoz:

$$\left(\begin{array}{rr|r} 1 & 1 & 1\\ 0 & -4 & -1 \end{array}\right).$$

A második sornak megfelelő egyenletből azt kapjuk, hogy $B=\frac{1}{4}$, amiből az első sornak megfelelő egyenlet szerint $A=-\frac{1}{4}$ adódik. A keresett felbontás tehát:

$$\frac{x+1}{x^2-4}=\frac{-\frac{1}{4}}{x+2}+\frac{\frac{1}{4}}{x-2}=\frac{1}{4x-8}-\frac{1}{4x+8}.$$

DUPress

12.6. **Feladat.** Bontsuk fel parciális törtek összegére a

$$\frac{-2x+4}{(x-1)^2\cdot(x^2+1)}$$

algebrai törtet!

Megoldás:

A keresett kifejezést

$$\frac{-2x+4}{(x-1)^2\cdot(x^2+1)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{Cx+d}{x^2+1}$$

alakban keressük. Az előbbi egyenlet mindkét oldalát szorozzuk a közös nevezővel:

$$-2x+4=A\cdot(x-1)\cdot(x^2+1)+B\cdot(x^2+1)+(Cx+D)\cdot(x-1)^2.$$

A nevezetes azonosság alkalmazása és a zárójelek felbontása után azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}-2x+4=A\cdot(x^3-x^2+x-1)+Bx^2+B+\\+(Cx+D)\cdot(x^2-2x+1).\end{aligned}$$

Ismét felbontjuk a zárójeleket:

$$\begin{aligned}-2x+4=Ax^3-Ax^2+Ax-A+Bx^2+B+\\+Cx^3-2Cx^2+Cx+Dx^2-2Dx+D.\end{aligned}$$

Rendezzük fokszám szerint csökkenő sorrendbe a tagokat:

$$\begin{aligned}-2x+4=(A+C)\cdot x^3+(-A+B-2C+D)\cdot x^2+\\+(A+C-2D)\cdot x-A+B+D.\end{aligned}$$

A két oldalon a megfelelő fokszámú tagok együtthatóinak meg kell egyezni, így az

$$\begin{aligned}A\quad+C\quad&=0\\-A+B-2C+D&=0\\A\quad+C-2D&=-2\\-A+B\quad+D&=4\end{aligned}$$

egyenletrendszerhez jutunk. A lineáris egyenletrendszert megoldhatjuk például Gauss-eliminációval. Az egyenletrendszer kibővített mátrixa:

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -2 & -2 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right).$$

Első lépésben az első sort adjuk hozzá a második és negyedik sorhoz, az első sor -1-szeresét adjuk hozzá a harmadik sorhoz:

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -2 & -2 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right).$$

Második lépésben a második sor -1-szeresét adjuk hozzá a negyedik sorhoz, végül cseréljük meg a harmadik és a negyedik sort:

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 4 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -2 \end{array}\right).$$

Ezen mátrixból visszaírva a lineáris egyenletrendszert

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} A & & & + & C & & & = & 0 \\ & & B & - & C & + & D & = & 0 \\ & & & & 2C & & & = & 4 \\ & & & & & - & 2D & = & -2 \end{array}$$

adódik. Az utolsó egyenletből azt kapjuk, hogy $D = 1$, amit behelyettesítve a harmadik egyenletbe $C = 2$ adódik. A második egyenletből $B = 1$, míg az első egyenletből $A = -2$ következik. Ezeket visszahelyettesítve megkapjuk a keresett felbontást:

$$\frac{-2x+4}{(x-1)^2 \cdot (x^2+1)} = \frac{-2}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{2x+1}{x^2+1}.$$

12.7. **Feladat.** Bontsuk fel parciális törtek összegére a

$$\frac{10x^4 - 28x^3}{(x-1)^2 \cdot (x^2+1) \cdot (x+1)}$$

algebrai törtet!

Megoldás:

A keresett felbontást

$$\frac{10x^4 - 28x^3}{(x-1)^2 \cdot (x^2+1) \cdot (x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+1} + \frac{E}{x+1}$$

alakban keressük. Az előbbi törtet szorozzuk a közös nevezővel:

$$\begin{aligned} 10x^4 - 28x^3 = {} & A \cdot (x-1) \cdot (x^2+1) \cdot (x+1) + B \cdot (x^2+1) \cdot (x+1) + \\ & + (Cx+D) \cdot (x-1)^2 \cdot (x+1) + E \cdot (x-1)^2 \cdot (x^2+1). \end{aligned}$$

Elvégezzük a nevezetes azonosságokat:

$$\begin{aligned} 10x^4 - 28x^3 = {} & A \cdot (x^2-1) \cdot (x^2+1) + B \cdot (x^2+1) \cdot (x+1) + \\ & + (Cx+D) \cdot (x^2-2x+1) \cdot (x+1) + \\ & + E \cdot (x^2-2x+1) \cdot (x^2+1). \end{aligned}$$

Elvégezzük a kijelölt műveleteket:

$$\begin{aligned} 10x^4 - 28x^3 = {} & A \cdot (x^4-1) + B \cdot (x^3+x^2+x+1) + \\ & + (Cx^4 - Cx^3 + Dx^3 - Cx^2 - Dx^2 - Dx + Cx + D) + \\ & + E \cdot (x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1). \end{aligned}$$

A jobb oldalon fokszám szerinti csökkenő sorrendben csoportosítjuk a tagokat:

$$\begin{aligned} 10x^4 - 28x^3 = {} & (A+C+E) \cdot x^4 + (B-C+D-2E) \cdot x^3 + \\ & + (B-C-D+2E) \cdot x^2 + (B+C-D-2E) \cdot x + \\ & + (-A+B+D+E). \end{aligned}$$

A megfelelő fokszámú tagok együtthatóinak összehasonlításából az alábbi egyenletrendszerhez jutunk:

$$\begin{aligned} A \qquad + C \qquad + \ E &= \ \ 10 \\ B - C + D - 2E &= -28 \\ B - C - D + 2E &= \ \ 0 \\ B + C - D - 2E &= \ \ 0 \\ -A + B \qquad + D + \ E &= \ \ 0. \end{aligned}$$

A lineáris egyenletrendszert megoldhatjuk például Gauss-eliminációval. Az egyenletrendszer kibővített mátrixa:

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 10 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -2 & -28 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

Első lépésben az első sort adjuk hozzá az utolsó sorhoz:

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 10 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -2 & -28 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 10 \end{array}\right).$$

Második lépésben a második sor -1-szeresét adjuk hozzá a a harmadik, negyedik és ötödik sorhoz:

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 10 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -2 & -28 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 4 & 28 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 & 28 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 4 & 38 \end{array}\right).$$

Cseréljük meg a harmadik és a negyedik sort:

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 10 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -2 & -28 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 & 28 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 4 & 28 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 4 & 38 \end{array}\right).$$

A harmadik sor -1-szeresét adjuk hozzá az utolsó sorhoz:

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 10 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -2 & -28 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 & 28 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 4 & 28 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4 & 10 \end{array}\right).$$

A negyedik sort adjuk hozzá az utolsó sorhoz:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 10 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -2 & -28 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 & 28 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 4 & 28 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 38 \end{array}\right).$$

Az utolsó kibővített mátrixból felírva az egyenleteket (az utolsó sorral kezdve)

$$8E = 38 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{19}{4}$$

adódik. Az utolsó előtti sor felhasználásával azt kapjuk, hogy

$$-2D + 4E = 28 \qquad \Rightarrow \qquad -2D + 19 = 28 \qquad \Rightarrow \qquad D = -\frac{9}{2}.$$

A harmadik sornak megfelelő egyenletből:

$$2C - 2D = 28 \qquad \Rightarrow \qquad 2C + 9 = 28 \qquad \rightarrow \qquad C = \frac{19}{2}.$$

A második sornak megfelelő egyenlet:

$$B - C + D - 2E = -28 \qquad \Rightarrow \qquad B - \frac{19}{2} - \frac{9}{2} - \frac{19}{2} = -28,$$

amiből azt kapjuk, hogy $B = -\frac{9}{2}$.

A Gauss-elimináció végrehajtása után kapott mátrix első sorának megfelelő egyenlet:

$$A + C + E = 10 \qquad \Rightarrow \qquad A + \frac{19}{2} + \frac{19}{4} = 10 \qquad \Rightarrow \qquad A = -\frac{17}{4}.$$

A keresett felbontás tehát:

$$\frac{10x^4 - 28x^3}{(x-1)^2 \cdot (x^2+1) \cdot (x+1)} =$$

$$= -\frac{17}{4 \cdot (x-1)} - \frac{9}{2 \cdot (x-1)^2} + \frac{19x - 9}{2 \cdot (x^2+1)} + \frac{19}{4 \cdot (x+1)}.$$

DUPress

13. Mátrixok alkalmazása a koordinátageomatriában

13.1. **Feladat.** Írjuk fel az $A = (2;1)$ és a $B = (3;5)$ pontokon áthaladó egyenes egyenletét!

Megoldás:

Az egyenes egyenlete:

$$\det \begin{pmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{pmatrix} = 0,$$

ahol $A = (x_1; y_1)$, $B = (x_2; y_2)$. Az adatok behelyettesítése után azt kapjuk, hogy

$$\det \begin{pmatrix} x & y & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix} = 0.$$

A determinánst az első sora szerint kifejtve

$$x \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} - y \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 0$$

adódik. A megfelelő determinánsok kiszámolása után azt kapjuk, hogy

$$x \cdot (1-5) - y \cdot (2-3) + 1 \cdot (10-3) = 0,$$

így az egyenes egyenlete:

$$-4x + y + 7 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad y = 4x - 7.$$

13.2. **Feladat.** Írjuk fel az $A = (-3;2)$ és a $B = (4;5)$ pontokon áthaladó egyenes egyenletét!

Megoldás:

Az egyenes egyenlete:

$$\det \begin{pmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{pmatrix} = 0,$$

ahol $A = (x_1; y_1)$, $B = (x_2; y_2)$. Az adatok behelyettesítése után azt kapjuk, hogy

$$\det \begin{pmatrix} x & y & 1 \\ -3 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 1 \end{pmatrix} = 0.$$

A determinánst az első sora szerint kifejtve

$$x \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} - y \cdot \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 0$$

adódik. A megfelelő determinánsok kiszámolása után azt kapjuk, hogy

$$x \cdot (2-5) - y \cdot (-3-4) + 1 \cdot (-15-8) = 0,$$

így az egyenes egyenlete:

$$-3x + 7y - 23 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad 7y = 3x + 23.$$

13.3. **Feladat.** Határozzuk meg az $A = (-1; 2)$, $B = (4; -3)$ és $C = (-2; 2)$ csúcsokkal rendelkező háromszög területét!

Megoldás:

A háromszög előjeles területe:

$$T = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix},$$

ahol $A = (x_1; y_1)$, $B = (x_2; y_2)$ és $C = (x_3; y_3)$. A háromszög területe a kapott determináns értékének abszolútérétéke. Az adatok behelyettesítése után azt kapjuk, hogy

$$\frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 4 & -3 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \end{vmatrix}.$$

A determinánst az első sora szerint kifejtve

$$-1 \cdot \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 2 \end{vmatrix}$$

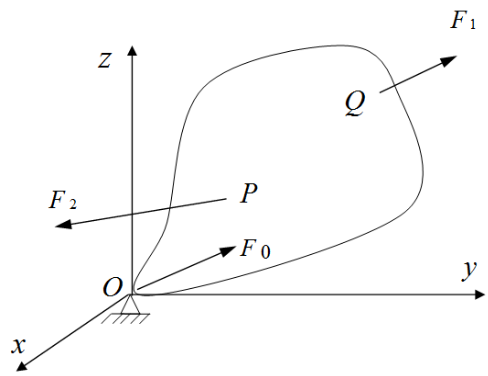
adódik. A megfelelő determinánsok kiszámolása után azt kapjuk, hogy

$$-1 \cdot (-3-2) - 2 \cdot (4+2) + 1 \cdot (8-6) = -5,$$

így a háromszög területe:

$$T = \frac{1}{2} \cdot |-5| = \frac{5}{2}.$$

13.4. **Feladat.** Az ábrán látható merev, súlytalan test O sarokpontján támaszkodik, amely körül ellenállásmentesen elfordulhat. A testet Q pontjában egy F_1, P pontjában egy F_2 erő támadja. A test az F_1, F_2 és az O pontnál támadó kényszererő hatására nyugalomban van. A P pont koordinátái nem ismertek.



Adatok:

$$F_1 = \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} \text{[kN]}; \qquad Q = (4; 8; 8)\ \text{[m]};$$

$$F_2 = \begin{pmatrix} 12 \\ -18 \\ -6 \end{pmatrix} \text{[kN]}; \qquad P = (x; y; z)\ \text{[m]}.$$

a) Az egyensúly $\sum_i F_i = 0$ feltételéből határozzuk meg a csuklónál ébredő F_0 kényszererőt!

b) Adjuk meg az F_1 erő O pontra vonatkozó forgatónyomatékát!

c) Az egyensúly $\sum_i \underset{O}{M_i} = 0$ feltételéből egy lineáris egyenletrendszert kapunk. Határozzuk meg ebből az F_2 kötélerő lehetséges, P támadáspontjainak koordinátáit!

d) Adjunk meg hármat a fenti P pontok közül!

<u>**Megoldás**</u>:

a) Legyenek az F_0 vektor koordinátái F_x, F_y és F_z. Ekkor

$$\sum_i F_i = F_0 + F_1 + F_2 =$$
$$= \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 12 \\ -18 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Elvégezve a vektorok összeadását azt kapjuk, hogy

$$\begin{pmatrix} F_x + 8 \\ F_y - 12 \\ F_z - 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ebből azt kapjuk, hogy

$$F_0 = \begin{pmatrix} -8 \\ 12 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ [kN]}.$$

b) Az F_1 erő O pontra vonatkozó forgatónyomatéka:

$$M_1 = r_1 \times F_1 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 4 & 8 & 8 \\ -4 & 6 & 2 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -32 \\ -40 \\ 56 \end{pmatrix} \text{ [kNm]}.$$

c) Az F_2 erő O pontra vonatkozó forgatónyomatéka:

$$M_2 = r_2 \times F_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ 12 & -18 & -6 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -6y_2 + 18z_2 \\ 6x_2 + 12z_2 \\ -18x_2 - 12y_2 \end{pmatrix} \text{ [kNm]}.$$

Az F_0, F_1 és F_2 erők O pontra vonatkozó együttes forgatónyomatéka:

$$\begin{aligned} M &= M_0 + M_1 + M_2 = \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -32 \\ -40 \\ 56 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6y_2 + 18z_2 \\ 6x_2 + 12z_2 \\ -18x_2 - 12y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Elvégezve a vektorok összeadását azt kapjuk, hogy

$$\begin{pmatrix} -32 - 6y_2 + 18z_2 \\ -40 + 6x_2 + 12z_2 \\ 56 - 18x_2 - 12y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Mivel két vektor pontosan akkor egyenlő, ha valamennyi koordinátájuk páronként megegyezik, ezért az alábbi lineáris egyenletrendszerhez jutunk:

$$\begin{aligned} -6y_2 + 18z_2 &= 32 \\ 6x_2 \qquad + \quad 12z_2 &= 40 \\ -18x_2 - 12y_2 \qquad &= -56. \end{aligned}$$

DUPress

Az egyenletrendszer kibővített mátrixa:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 0 & -6 & 18 & 32 \\ 6 & 0 & 12 & 40 \\ -18 & -12 & 0 & -56 \end{array}\right).$$

Cseréljük meg az első és második sort, majd az első sor 3-szorosát adjuk hozzá a harmadik sorhoz:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 6 & 0 & 12 & 40 \\ 0 & -6 & 18 & 32 \\ -18 & -12 & 0 & -56 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rrr|r} 6 & 0 & 12 & 40 \\ 0 & -6 & 18 & 32 \\ 0 & -12 & 36 & 64 \end{array}\right).$$

A lépcsős alak eléréséhez a második sor -2-szeresét adjuk hozzá a harmadik sorhoz:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 6 & 0 & 12 & 40 \\ 0 & -6 & 18 & 32 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Az alapmátrix és kibővített mátrix rangja megegyezik, így az egyenletrendszer megoldható. Az alapmátrix rangja (2) eggyel kevesebb, mint az ismeretlenek száma (3), így az egyeneletrendszer határozatlan, egy ismeretlen értékét választhatjuk meg tetszőlegesen. A fenti elimináció utolsó lépésében megkapott mátrixból felírva az egyenleteket azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} 6x_2 \qquad + 12z_2 &= 40 \\ -6y_2 + 18z_2 &= 32. \end{aligned}$$

Legyen $z_2 = t$, ahol $t \in \mathbb{R}$ tetszőleges. Ekkor

$$y_2 = 3t - \frac{16}{3},$$

valamint

$$x_2 = -2t + \frac{20}{3}.$$

Azt kaptuk tehát, hogy

$$P_2 = \left(\frac{20}{3} - 2t; -\frac{16}{3} + 3t; t\right).$$

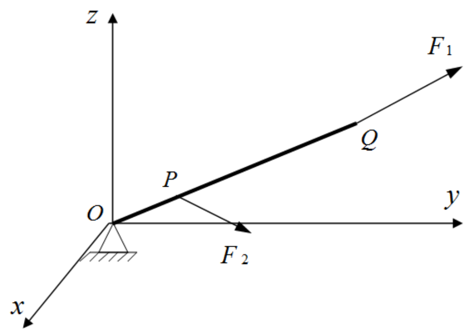
d) Ha $t = \frac{1}{3}$, akkor

$$P = \left(6; -\frac{13}{3}; \frac{1}{3}\right) \text{ [m]}.$$

DUPress

Ha $t = 0$, akkor
$$P = \left(\frac{20}{3}; -\frac{16}{3}; 0\right) \text{ [m]}.$$
Ha $t = \frac{10}{3}$, akkor
$$P = \left(0; \frac{14}{3}; \frac{10}{3}\right) \text{ [m]}.$$

13.5. **Feladat.** Az ábrán látható merev, súlytalan rúd O végpontja egy gömbcsuklóhoz kapcsolódik, amely körül ellenállásmentesen elfordulhat. A rúd másik, Q végpontjában egy ismert F_1 erő támad.



Adatok:
$$F_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ [kN]}; \qquad Q = (2; 4; 3) \text{ [m]};$$
$$F_2 = \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix} \text{ [kN]}; \qquad P = (x; y; z) \text{ [m]}.$$

a) Adjuk meg az F_1 erő O gömbcsuklóra vonatkozó forgatónyomatékát!
b) Az ábrán látható P pont $1 : 3$ arányban osztja az OQ rudat. Határozzuk meg a koordinátáit!
c) Írjuk fel az O pontra az egyensúly $\sum\limits_i \underset{O}{M_i} = 0$ feltételét, majd a kapott lineáris egyenletrendszert megoldva adjunk meg azokat az F_2 erőket, amely esetén a rúd egyensúlyban van!

Megoldás:

a) Az F_1 erő O pontra vonatkozó forgatónyomatéka:

$$\underset{O}{M_1} = r_1 \times F_1 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 4 & 3 \\ -2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -8 \\ 14 \end{pmatrix} \text{ [kNm]}.$$

b) A P pont koordinátái:

$$P = \frac{Q + 3 \cdot O}{4} = \left(\frac{1}{2}; 1; \frac{3}{4}\right) \text{ [m]}.$$

c) Az F_2 erő O pontra vonatkozó forgatónyomatéka:

$$\underset{O}{M_2} = r_2 \times F_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{3}{4} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} F_z - \frac{3}{4}F_y \\ \frac{3}{4}F_x - \frac{1}{2}F_z \\ \frac{1}{2}F_y - F_x \end{pmatrix} \text{ [kNm]}.$$

Az egyensúlyi nyomatékokra vonatkozó feltételt felírva azt kapjuk, hogy

$$M = M_1 + M_2 = $$
$$= \begin{pmatrix} -5 \\ -8 \\ 14 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F_z - \frac{3}{4}F_y \\ \frac{3}{4}F_x - \frac{1}{2}F_z \\ \frac{1}{2}F_y - F_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Elvégezve a vektorok összeadását

$$\begin{pmatrix} -5 + F_z - \frac{3}{4}F_y \\ -8 + \frac{3}{4}F_x - \frac{1}{2}F_z \\ 14 + \frac{1}{2}F_y - F_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

adódik. Mivel két vektor pontosan akkor egyenlő, ha valamennyi koordinátájuk páronként megegyezik, ezért az alábbi lineáris egyenletrendszerhez jutunk:

$$\begin{aligned} -\frac{3}{4}F_y + F_z &= 5 \\ \frac{3}{4}F_x - \frac{1}{2}F_z &= 8 \\ -F_x + \frac{1}{2}F_y &= -14. \end{aligned}$$

Az egyenletrendszer kibővített mátrixa:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -\frac{3}{4} & 1 & 5 \\ \frac{3}{4} & 0 & -\frac{1}{2} & 8 \\ -1 & \frac{1}{2} & 0 & -14 \end{array}\right).$$

Cseréljük meg a második és harmadik sort, majd az első sor $\frac{3}{4}$-szeresét adjuk hozzá a harmadik sorhoz:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & \frac{1}{2} & 0 & -14 \\ 0 & -\frac{3}{4} & 1 & 8 \\ \frac{3}{4} & 0 & -\frac{1}{2} & 5 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & \frac{1}{2} & 0 & -14 \\ 0 & -\frac{3}{4} & 1 & 5 \\ 0 & \frac{3}{8} & -\frac{1}{2} & -\frac{5}{2} \end{array}\right).$$

A lépcsős alak eléréséhez a második sor $\frac{1}{2}$-szeresét adjuk hozzá a harmadik sorhoz:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & \frac{1}{2} & 0 & -14 \\ 0 & -\frac{3}{4} & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Az alapmátrix és kibővített mátrix rangja megegyezik, így az egyenletrendszer megoldható. Az alapmátrix rangja (2) egyel kevesebb, mint az ismeretlenek száma (3), így az egyeneletrendszer határozatlan, egy ismeretlen értékét választhatjuk meg tetszőlegesen. A fenti elimináció utolsó lépésében megkapott mátrixból felírva az egyenleteket azt kapjuk, hogy

$$-\frac{3}{4}F_y + F_z = 5$$

$$-F_x + \frac{1}{2}F_y = -14.$$

Legyen $F_y = t$, ahol $t \in \mathbb{R}$ tetszőleges. Ekkor $F_x = \frac{1}{2}t + 14$ és $F_z = \frac{3}{4}t + 5$. Azt kaptuk tehát, hogy

$$F_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}t + 14 \\ t \\ \frac{3}{4}t + 5 \end{pmatrix}.$$

14. Lagrange interpoláció

14.1. **Feladat.** Adjuk meg az $(1;2)$, $(2;5)$, $(3;10)$ pontokra illeszkedő Lagrange-interpolációs polinomot!

Megoldás:

Mivel 3 pont van megadva, ezért egyértelműen létezik olyan legfeljebb másodfokú polinom, amely illeszkedik a megadott pontokra. A polinomot

$$P(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$$

alakban keressük. Mivel az $(1;2)$ pont illeszkedik a $P(x)$ függvényre, ezért

$$2 = a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c.$$

Mivel a $(2;5)$ pont illeszkedik a $P(x)$ függvényre, ezért

$$5 = a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c.$$

Mivel a $(3;10)$ pont illeszkedik a $P(x)$ függvényre, ezért

$$10 = a \cdot 3^2 + b \cdot 3 + c.$$

Tehát az

$$\begin{aligned} a + b + c &= 2 \\ 4a + 2b + c &= 5 \\ 9a + 3b + c &= 10 \end{aligned}$$

egyenletrendszerhez jutottunk. Az egyenletrendszer kibővített mátrixa:

$$(A\,|\,b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 1 & 5 \\ 9 & 3 & 1 & 10 \end{array}\right).$$

Az egyenletrendszert Gauss-eliminációval oldjuk meg.
Első lépésben a kibővített mátrix első sorának a -4-szeresét adjuk hozzá a második sorához, továbbá az első sor -9-szeresét adjuk hozzá a harmadik sorhoz:

$$(A\,|\,b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -3 & -3 \\ 0 & -6 & -8 & -8 \end{array}\right).$$

Második lépésben a második sor -3-szorosát adjuk hozzá a harmadik sorhoz:

$$(A\,|\,b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

A kapott mátrixból írjuk fel a lineáris egyenletrendszert:

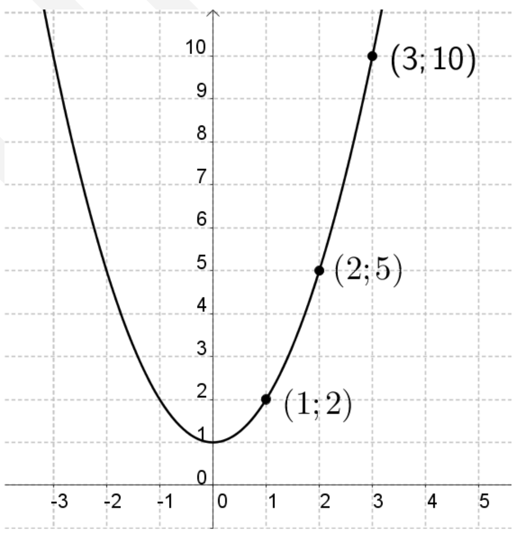
$$\begin{aligned} a + \ \ b + \ \ c &= \ \ 2 \\ -\,2b - 3c &= -3 \\ c &= \ \ 1. \end{aligned}$$

Az utolsó egyenletből megkaptuk a c értékét. Ezt behelyettesítve a második egyenletbe $b = 0$ adódik. Az első egyenletből pedig azt kapjuk, hogy $a = 1$. A keresett polinom tehát

$$P(x) = x^2 + 1.$$

Könnyen ellenőrizhető, hogy a megadott pontok valóban illeszkednek a polinom grafikonjára:

$$\begin{aligned} 2 &= 1^2 + 1 \\ 5 &= 2^2 + 1 \\ 10 &= 3^2 + 1. \end{aligned}$$



14.2. **Feladat.** Egy 2013-ban alapított gyár nyeresége millió forintban kifejezve az alapítás évében -2 volt (azaz két millió forintos veszteséggel) zárt. Az alapítás után egy évvel 4 millió forintos nyereségre tett szert. Ezután a termékei iránti kereslet részben visszaesett, így az alapítás után 2 évvel csupán 2 millió forint nyereséget könyvelhetett el. Ezt követően a reklámok hatására ismételten élénkült a forgalom, és a 2016-os évet már 8 millió forint nyereséggel zárta. Modellezzük az adatokat legfeljebb harmadfokú polinom függvénnyel! Írjuk fel az adatoknak megfelelő Lagrange-interpolációs polinomot, majd annak segítségével adjunk becslést arra vonatkozóan, hogy a modell szerint milyen nyereség várható 2018-ban!

Megoldás:

Tekintsük a $A = (0; -2)$, $B = (1; 4)$, $C = (2; 2)$, $D = (3; 8)$ pontokat. Mivel 4 pontot ismerünk, ezért egyértelműen megadható egy legfeljebb harmadfokú polinom, amely illeszkedik a megadott pontokra. A polinomot

$$P(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + cx + d$$

alakban keressük. Mivel a $(0; -2)$ pont illeszkedik a $P(x)$ függvényre, ezért

$$-2 = a \cdot 0^3 + b \cdot 0^2 + c \cdot 0 + d \qquad \Rightarrow \qquad d = -2.$$

Mivel az $(1; 4)$ pont illeszkedik a $P(x)$ függvényre, ezért

$$4 = a \cdot 1^3 + b \cdot 1^2 + c \cdot 1 + d \qquad \Rightarrow \qquad a + b + c + d = 4.$$

Mivel a $(2; 2)$ pont illeszkedik a $P(x)$ függvényre, ezért

$$2 = a \cdot 2^3 + b \cdot 2^2 + c \cdot 2 + d \qquad \Rightarrow \qquad 8a + 4b + 2c + d = 2.$$

Mivel a $(3; 8)$ pont illeszkedik a $P(x)$ függvényre, ezért

$$8 = a \cdot 3^3 + b \cdot 3^2 + c \cdot 3 + d \qquad \Rightarrow \qquad 27a + 9b + 3c + d = 8.$$

Mivel a d értékét megkaptuk, ezért azt a másik három egyenletbe behelyettesítve, majd az egyenleteket rendezve az alábbi egyenletrendszerhez jutunk:

$$\begin{aligned} a + b + c &= 6 \\ 8a + 4b + 2c &= 4 \\ 27a + 9b + 3c &= 10. \end{aligned}$$

Az egyenletrendszer kibővített mátrixa:

$$(A \,|\, b) = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 8 & 4 & 2 & 4 \\ 27 & 9 & 3 & 10 \end{array}\right).$$

Az egyenletrendszert Gauss-eliminációval oldjuk meg.
Első lépésben a kibővített mátrix első sorának a -8-szorosát adjuk hozzá a második sorához, továbbá az első sor -27-szeresét adjuk hozzá a harmadik sorhoz:

$$(A\,|\,b) = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -4 & -6 & -44 \\ 0 & -18 & -24 & -152 \end{array}\right).$$

Második lépésben a második sor $-4,5$-szeresét adjuk hozzá a harmadik sorhoz:

$$(A\,|\,b) = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -4 & -6 & -44 \\ 0 & 0 & 3 & 46 \end{array}\right).$$

A kapott mátrixból írjuk fel a lineáris egyenletrendszert:

$$\begin{aligned} a + \ \ b + \ \ c &= \ \ 6 \\ -\,4b - 6c &= -44 \\ 3c &= \ \ 46. \end{aligned}$$

Az utolsó egyenletből megkapjuk a c értékét:

$$3c = 46 \qquad \Rightarrow \qquad c = \frac{46}{3}.$$

Ezt behelyettesítve a második egyenletbe

$$-4b - 6 \cdot \frac{46}{3} = -44 \qquad \Rightarrow \qquad -4b - 92 = -44$$

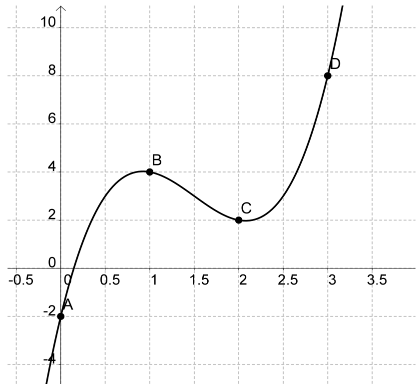
adódik, amiből $b = -12$ adódik. Az első egyenletből azt kapjuk, hogy

$$a - 12 + \frac{46}{3} = 6 \qquad \Rightarrow \qquad a = \frac{8}{3}.$$

A keresett polinom tehát

$$P(x) = \frac{8}{3}x^3 - 12x^2 + \frac{46}{3}x - 2.$$

A polinom függvény grafikonja:



Mivel

$$P(5) = \frac{8}{3} \cdot 5^3 - 12 \cdot 5^2 + \frac{46}{3} \cdot 5 - 2 = 108,$$

ezért 2018-ban a modellünk szerint 108 millió forint lesz a bevétel.

14.3. **Feladat.** Adjuk meg az $(1; 2)$, $(2; 3)$, $(3; 4)$ pontokra illeszkedő Lagrange-interpolációs polinomot!

Megoldás:

Mivel 3 pont van megadva, ezért egyértelműen létezik olyan legfeljebb másodfokú polinom, amely illeszkedik a megadott pontokra. A polinomot

$$P(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$$

alakban keressük. Mivel az $(1; 2)$ pont illeszkedik a $P(x)$ függvényre, ezért

$$2 = a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c.$$

Mivel a $(2; 3)$ pont illeszkedik a $P(x)$ függvényre, ezért

$$3 = a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c.$$

Mivel a $(3; 4)$ pont illeszkedik a $P(x)$ függvényre, ezért

$$4 = a \cdot 3^2 + b \cdot 3 + c.$$

Tehát az

$$\begin{aligned} a + b + c &= 2 \\ 4a + 2b + c &= 3 \\ 9a + 3b + c &= 4 \end{aligned}$$

egyenletrendszerhez jutottunk. Az egyenletrendszer kibővített mátrixa:

$$(A\,|\,b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \\ 9 & 3 & 1 & 4 \end{array}\right).$$

Az egyenletrendszert Gauss-eliminációval oldjuk meg.
Első lépésben a kibővített mátrix első sorának a -4-szeresét adjuk hozzá a második sorához, továbbá az első sor -9-szeresét adjuk hozzá a harmadik sorhoz:

$$(A\,|\,b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -3 & -5 \\ 0 & -6 & -8 & -14 \end{array}\right).$$

Második lépésben a második sor -3-szorosát adjuk hozzá a harmadik sorhoz:

$$(A\,|\,b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

A kapott mátrixból írjuk fel a lineáris egyenletrendszert:

$$\begin{aligned} a + \;\; b + \;\; c &= \;\; 2 \\ -\,2b - 3c &= -5 \\ c &= \;\; 1. \end{aligned}$$

Az utolsó egyenletből megkaptuk a c értékét. Ezt behelyettesítve a második egyenletbe $b = 1$ adódik. Az első egyenletből pedig azt kapjuk, hogy $a = 0$. A keresett polinom tehát

$$P(x) = x + 1.$$

Könnyen ellenőrizhető, hogy a megadott pontok valóban illeszkednek a polinom grafikonjára:

$$\begin{aligned} 2 &= 1 + 1 \\ 3 &= 2 + 1 \\ 4 &= 3 + 1. \end{aligned}$$

DUPress

15. Legkisebb négyzetek módszere

15.1. **Feladat.** Adjuk meg az $(1;2)$, $(2;5)$, $(3;4)$ pontokat a „négyzetes” hibafüggvény szerint legjobban közelítő

$$g(x) = a + b \cdot x$$

függvény ismeretlen paramétereit! Határozzuk meg a közelítés hibáját!

Megoldás:

Az $g(x)$ függvény az x^0 és az x^1 függvények lineáris kombinációjából állítható elő. A Gauss-féle normál egyenletrendszert kell megoldanunk:

$$A^T \cdot A \cdot x = A^T \cdot f,$$

ahol

$$A = \begin{pmatrix} 1^0 & 1^1 \\ 2^0 & 2^1 \\ 3^0 & 3^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Az x vektor az ismeretlen paramétereket tartalmazó oszlopvektor:

$$x = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}.$$

Az f vektor az adott pontok y koordinátáit tartalmazó oszlopvektor:

$$f = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Az A mátrix transzponáltja:

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Az $A^T \cdot A$ mátrix:

$$A^T \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 6 & 14 \end{pmatrix}.$$

Az $A^T \cdot f$ mátrix:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 24 \end{pmatrix}.$$

A megoldandó lineáris egyenletrendszer tehát:

$$\begin{aligned} 3a + 6b &= 11 \\ 6a + 14b &= 24. \end{aligned}$$

Az egyenletrendszer kibővített mátrixa:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 6 & 11 \\ 6 & 14 & 24 \end{array}\right).$$

Az első sor -2-szeresét adjuk hozzá a második sorhoz:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 6 & 11 \\ 0 & 2 & 2 \end{array}\right).$$

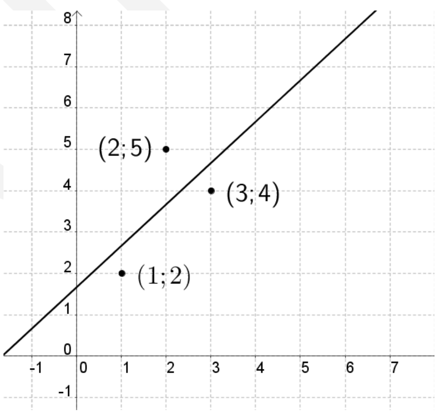
Az utolsó sorból a $2b = 2$ egyenlethez jutunk, amiből azt kapjuk, hogy $b = 1$. Az első sornak megfelelő egyenlet:

$$3a + 6b = 11 \qquad \Rightarrow \qquad 3a + 6 = 11,$$

amiből azt kapjuk, hogy $a = \frac{5}{3}$. A paraméterek meghatározása után azt kaptuk, hogy a g függvény:

$$g(x) = \frac{5}{3} + x.$$

A függvény grafikonja és az adott pontok:



A közelítés hibája:

$$\big(g(1) - 2\big)^2 + \big(g(2) - 5\big)^2 + \big(g(3) - 4\big)^2.$$

Mivel

$$g(1) = \frac{5}{3} + 1 = \frac{8}{3}$$
$$g(2) = \frac{5}{3} + 2 = \frac{11}{3}$$
$$g(3) = \frac{5}{3} + 3 = \frac{14}{3},$$

így

$$\left(\frac{8}{3} - 2\right)^2 + \left(\frac{11}{3} - 5\right)^2 + \left(\frac{14}{3} - 4\right)^2 = \frac{24}{9}.$$

15.2. **Feladat.** Adjuk meg az $(1;3)$, $(2;6)$, $(3;1)$ pontokat a „négyzetes" hibafüggvény szerint legjobban közelítő

$$g(x) = a + b \cdot x$$

függvény ismeretlen paramétereit!

Megoldás:

Az $g(x)$ függvény az x^0 és az x^1 függvények lineáris kombinációjából állítható elő. A Gauss-féle normál egyenletrendszert kell megoldanunk:

$$A^T \cdot A \cdot x = A^T \cdot f,$$

ahol

$$A = \begin{pmatrix} 1^0 & 1^1 \\ 2^0 & 2^1 \\ 3^0 & 3^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Az x vektor az ismeretlen paramétereket tartalmazó oszlopvektor:

$$x = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}.$$

Az f vektor az adott pontok y koordinátáit tartalmazó oszlopvektor:

$$f = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Az A mátrix transzponáltja:

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Az $A^T \cdot A$ mátrix:

$$A^T \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 6 & 14 \end{pmatrix}.$$

Az $A^T \cdot f$ mátrix:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 18 \end{pmatrix}.$$

A megoldandó lineáris egyenletrendszer tehát:

$$\begin{aligned} 3a + \ \ 6b &= 10 \\ 6a + 14b &= 18. \end{aligned}$$

Az egyenletrendszer kibővített mátrixa:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 6 & 10 \\ 6 & 14 & 18 \end{array} \right).$$

Az első sor -2-szeresét adjuk hozzá a második sorhoz:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 6 & 10 \\ 0 & 2 & -2 \end{array} \right).$$

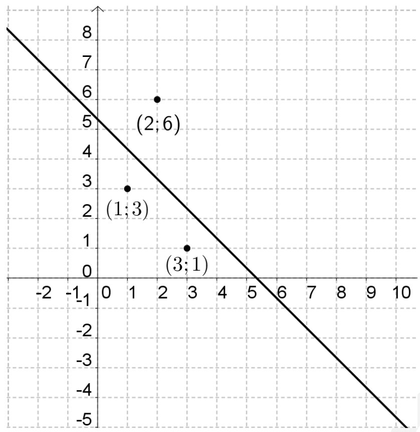
Az utolsó sorból a $2b = -2$ egyenlethez jutunk, amiből azt kapjuk, hogy $b = -1$. Az első sornak megfelelő egyenlet:

$$3a + 6b = 10 \qquad \Rightarrow \qquad 3a - 6 = 10,$$

amiből azt kapjuk, hogy $a = \frac{16}{3}$. A paraméterek meghatározása után azt kaptuk, hogy a g függvény:

$$g(x) = \frac{16}{3} - x.$$

A függvény grafikonja és az adott pontok:



15.3. **Feladat.** Adjuk meg az $(1;2)$, $(2;6)$, $(3;11)$ pontokat (a négyzetes hibafüggvény szerint) legjobban közelítő

$$g(x) = a + b \cdot 2^x$$

függvény ismeretlen paramétereit!

Megoldás:

Az $g(x)$ függvény az x^0 és a 2^x függvények lineáris kombinációjából állítható elő. A Gauss-féle normál egyenletrendszert kell megoldanunk:

$$A^T \cdot A \cdot x = A^T \cdot f,$$

ahol

$$A = \begin{pmatrix} 1^0 & 2^1 \\ 2^0 & 2^2 \\ 3^0 & 2^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \\ 1 & 8 \end{pmatrix}.$$

Az x vektor az ismeretlen paramétereket tartalmazó oszlopvektor:

$$x = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}.$$

Az f vektor az adott pontok y koordinátáit tartalmazó oszlopvektor:

$$f = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 11 \end{pmatrix}.$$

Az A mátrix transzponáltja:

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 8 \end{pmatrix}.$$

Az $A^T \cdot A$ mátrix:

$$A^T \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \\ 1 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 14 \\ 14 & 84 \end{pmatrix}.$$

Az $A^T \cdot f$ mátrix:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 \\ 116 \end{pmatrix}.$$

A megoldandó lineáris egyenletrendszer tehát:

$$\begin{aligned} 3a + 14b &= 19 \\ 14a + 84b &= 116. \end{aligned}$$

Az egyenletrendszer kibővített mátrixa:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 14 & 19 \\ 14 & 84 & 116 \end{array}\right).$$

A második sort szorozzuk 3-mal, majd az első sor -14-szeresét adjuk hozzá a második sorhoz:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 14 & 19 \\ 42 & 252 & 348 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 14 & 19 \\ 0 & 56 & 82 \end{array}\right).$$

Az utolsó sorból az $56b = 82$ egyenlethez jutunk, amiből azt kapjuk, hogy $b = \frac{41}{28}$. Az első sornak megfelelő egyenlet:

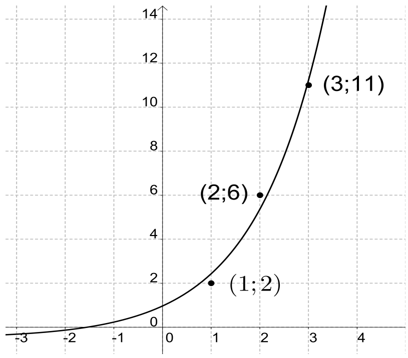
$$3a + 14b = 19 \qquad \Rightarrow \qquad 3a + \frac{41}{2} = 19,$$

amiből azt kapjuk, hogy $a = -\frac{1}{2}$. A paraméterek meghatározása után azt kaptuk, hogy a g függvény:

$$g(x) = \frac{41}{2} + \frac{41}{28} \cdot 2^x.$$

A függvény grafikonja és az adott pontok:

DUPress



15.4. **Feladat.** Adjuk meg az $(1;1)$, $(2;5)$, $(3;10)$; $(4;15)$ pontokat (a négyzetes hibafüggvény szerint) legjobban közelítő

$$g(x) = a + b \cdot x + c \cdot 2^x$$

függvény ismeretlen paramétereit!

<u>**Megoldás**</u>:

Az $g(x)$ függvény az x^0, az x és a 2^x függvények lineáris kombinációjából állítható elő. A Gauss-féle normál egyenletrendszert kell megoldanunk:

$$A^T \cdot A \cdot x = A^T \cdot f,$$

ahol

$$A = \begin{pmatrix} 1^0 & 1^1 & 2^0 \\ 2^0 & 2^1 & 2^1 \\ 3^0 & 3^1 & 2^2 \\ 4^0 & 4^1 & 2^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 8 \\ 1 & 4 & 16 \end{pmatrix}.$$

Az x vektor az ismeretlen paramétereket tartalmazó oszlopvektor:

$$x = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}.$$

Az f vektor az adott pontok y koordinátáit tartalmazó oszlopvektor:

$$f = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 10 \\ 15 \end{pmatrix}.$$

Az A mátrix transzponáltja:

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 8 & 16 \end{pmatrix}.$$

Az $A^T \cdot A$ mátrix:

$$A^T \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 8 & 16 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 8 \\ 1 & 4 & 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 10 & 30 \\ 10 & 30 & 98 \\ 30 & 98 & 340 \end{pmatrix}.$$

Az $A^T \cdot f$ mátrix:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 8 & 16 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 10 \\ 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 31 \\ 101 \\ 342 \end{pmatrix}.$$

A megoldandó lineáris egyenletrendszer tehát:

$$\begin{aligned} 4a + 10b + 30c &= 31 \\ 10a + 30b + 98c &= 101 \\ 30a + 98b + 340c &= 343. \end{aligned}$$

Az egyenletrendszer kibővített mátrixa:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 4 & 10 & 30 & 31 \\ 10 & 30 & 98 & 101 \\ 30 & 98 & 340 & 342 \end{array}\right).$$

A második sort és a harmadik sor is szorozzuk 2-vel:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 4 & 10 & 30 & 31 \\ 20 & 60 & 196 & 202 \\ 60 & 196 & 680 & 684 \end{array}\right).$$

Az első sor -5-szörösét adjuk hozzá a második sorhoz és az első sor -15-szörösét adjuk hozzá a harmadik sorhoz:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 4 & 10 & 30 & 31 \\ 0 & 10 & 46 & 47 \\ 0 & 46 & 230 & 219 \end{array}\right).$$

DUPress

A harmadik sort szorozzuk 5-tel:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 4 & 10 & 30 & 31 \\ 0 & 10 & 46 & 47 \\ 0 & 230 & 1150 & 1095 \end{array}\right).$$

A második sor -23-szorosát adjuk hozzá a harmadik sorhoz:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 4 & 10 & 30 & 31 \\ 0 & 10 & 46 & 47 \\ 0 & 0 & 92 & 14 \end{array}\right).$$

Az utolsó sorból a $92c = 14$ egyenlethez jutunk, amiből azt kapjuk, hogy

$$c = \frac{7}{46}.$$

A második sornak megfelelő egyenlet:

$$10b + 46c = 47 \qquad \Rightarrow \qquad 10b + 7 = 47 \qquad \Rightarrow \qquad b = 4.$$

Felhasználva a kapott eredményeket a Gauss-elimináció után kapott mátrix első sorának megfelelő egyenlet:

$$4a + 10 \cdot 4 + 30 \cdot \frac{7}{46} = 31.$$

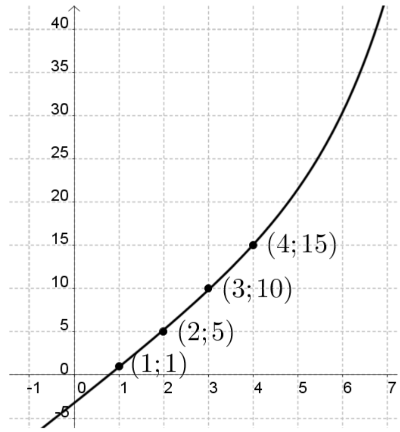
Az egyenlet átalakítása után

$$4a = -9 - \frac{105}{23} \qquad \Rightarrow \qquad 4a = -\frac{312}{23}$$

adódik, így $a = -\frac{78}{23}$. A paraméterek meghatározása után azt kaptuk, hogy a g függvény:

$$g(x) = -\frac{78}{23} + 4x + \frac{7}{46} \cdot 2^x.$$

A g függvény grafikonja és az adott pontok:



15.5. **Feladat.** Adjuk meg az $(1;2)$, $(2;5)$, $(3;10)$, $(4;14)$ pontokat a „négyzetes” hibafüggvény szerint legjobban közelítő

$$g(x) = a + b \cdot x + c \cdot x^2$$

függvény ismeretlen paramétereit!

Megoldás:

Az $g(x)$ függvény az x^0, az x^1 és az x^2 függvények lineáris kombinációjából állítható elő. A Gauss-féle normál egyenletrendszert kell megoldanunk:

$$A^T \cdot A \cdot x = A^T \cdot f,$$

ahol

$$A = \begin{pmatrix} 1^0 & 1^1 & 1^2 \\ 2^0 & 2^1 & 2^2 \\ 3^0 & 3^1 & 3^2 \\ 4^0 & 4^1 & 4^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & 4 & 16 \end{pmatrix}.$$

Az x vektor az ismeretlen paramétereket tartalmazó oszlopvektor:

$$x = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}.$$

Az f vektor az adott pontok y koordinátáit tartalmazó oszlopvektor:

$$f = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 10 \\ 14 \end{pmatrix}.$$

Az A mátrix transzponáltja:

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \end{pmatrix}.$$

Az $A^T \cdot A$ mátrix:

$$A^T \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & 4 & 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 10 & 30 \\ 10 & 30 & 100 \\ 30 & 100 & 354 \end{pmatrix}.$$

Az $A^T \cdot f$ mátrix:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 10 \\ 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 31 \\ 98 \\ 336 \end{pmatrix}.$$

A megoldandó lineáris egyenletrendszer tehát:

$$\begin{aligned} 4a + \ \ 10b + \ \ 30c &= \ \ 31 \\ 10a + \ \ 30b + 100c &= \ \ 98 \\ 30a + 100b + 354c &= 336. \end{aligned}$$

Az egyenletrendszer kibővített mátrixa:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 4 & 10 & 30 & 31 \\ 10 & 30 & 100 & 98 \\ 30 & 100 & 354 & 336 \end{array}\right).$$

A második és a harmadik sort szorozzuk 2-vel:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 4 & 10 & 30 & 31 \\ 20 & 60 & 200 & 196 \\ 60 & 200 & 708 & 672 \end{array}\right).$$

Az első sor -5-szörösét adjuk hozzá a második sorhoz és az első sor -15-szörösét adjuk hozzá a harmadik sorhoz:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 4 & 10 & 30 & 31 \\ 0 & 10 & 50 & 41 \\ 0 & 50 & 258 & 207 \end{array}\right).$$

A második sor -5-szörösét adjuk hozzá a harmadik sorhoz:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 10 & 30 & 31 \\ 0 & 10 & 50 & 41 \\ 0 & 0 & 8 & 2 \end{array}\right).$$

Az utolsó sorból a $8c = 2$ egyenlethez jutunk, amiből azt kapjuk, hogy $c = \frac{1}{4}$. Az második sornak megfelelő egyenlet:

$$10b + 12,5 = 41 \qquad \Rightarrow \qquad b = \frac{57}{20}.$$

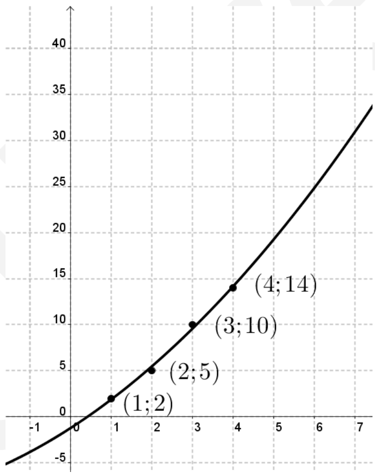
Az első sornak megfelelő egyenlet:

$$4a + \frac{57}{2} + \frac{15}{2} = 31 \qquad \Rightarrow \qquad a = -\frac{5}{4}.$$

A paraméterek meghatározása után azt kaptuk, hogy a g függvény:

$$g(x) = \frac{1}{4}x^2 + \frac{57}{20}x - \frac{5}{4}.$$

A függvény grafikonja és az adott pontok:



16. Lineáris leképezések

16.1. **Feladat.** Lineáris-e az $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$f(x_1; x_2) = (3x_1 + 2x_2; x_1 - x_2)$$

leképezés?

<u>**Megoldás**</u>:

A linearitáshoz meg kell vizsgálnunk, hogy a leképzés additív és homogén-e. Legyen $x = (x_1; x_2) \in \mathbb{R}^2$, $y = (y_1; y_2) \in \mathbb{R}^2$, $c \in \mathbb{R}$. Ekkor egyrészt

$$\begin{aligned} f(x+y) &= f\big((x_1; x_2) + (y_1; y_2)\big) = f(x_1 + y_1; x_2 + y_2) = \\ &= \big(3 \cdot (x_1 + y_1) + 2 \cdot (x_2 + y_2); x_1 + y_1 - (x_2 + y_2)\big) = \\ &= (3x_1 + 3y_1 + 2x_2 + 2y_2; x_1 + y_1 - x_2 - y_2), \end{aligned}$$

másrészt

$$\begin{aligned} f(x) + f(y) = f(x_1; x_2) + f(y_1; y_2) &= (3x_1 + 2y_1; x_1 - y_1) + \\ &+ (3x_2 + 2y_2; x_2 - y_2) = \\ &= (3x_1 + 2y_1 + 3x_2 + 2y_2; x_1 - y_1 + x_2 - y_2) = \\ &= (3x_1 + 3y_1 + 2x_2 + 2y_2; x_1 + y_1 - x_2 - y_2). \end{aligned}$$

Azt kaptuk tehát, hogy

$$f(x+y) = f(x) + f(y),$$

így f additív. A homogenitás vizsgálatához meghatározzuk az $f(c \cdot x)$ és a $c \cdot f(x)$ értékeket:

$$\begin{aligned} f(c \cdot x) &= f\big(c \cdot (x_1; x_2)\big) = f(c \cdot x_1; c \cdot x_2) = \\ &= (3c \cdot x_1 + 2c \cdot x_2, c \cdot x_1 - c \cdot x_2), \end{aligned}$$

másrészt

$$c \cdot f(x) = c \cdot (3x_1 + 2x_2; x_1 - x_2) = (3c \cdot x_1 + 2c \cdot x_2; c \cdot x_1 - c \cdot x_2),$$

így azt kaptuk, hogy

$$f(c \cdot x) = c \cdot f(x),$$

azaz f homogén. Mivel f additív és homogén, ezért lineáris.

DUPress

16.2. **Feladat.** Lineáris-e az $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$f(x_1; x_2) = (x_1 + x_2; {x_1}^2)$$

leképezés?

Megoldás:

Legyen $x = (x_1; x_2) \in \mathbb{R}^2$, $c \in \mathbb{R}$. Ekkor

$$f(c \cdot x) = f\big(c \cdot (x_1; x_2)\big) = f(c \cdot x_1; c \cdot x_2) = (c \cdot x_1 + c \cdot x_2; c^2 \cdot x_1^2),$$

másrészt

$$c \cdot f(x) = c \cdot (x_1 + x_2; x_1^2) = (c \cdot x_1 + c \cdot x_2, c \cdot x_1^2),$$

így

$$f(c \cdot x) \neq c \cdot f(x),$$

tehát f nem homogén, így nem lineáris.

16.3. **Feladat.** Lineáris-e az $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$f(x_1; x_2) = (x_1 \cdot x_2; x_1)$$

leképezés?

Megoldás:

Legyen $x = (x_1; x_2) \in \mathbb{R}^2$, $c \in \mathbb{R}$. Ekkor

$$f(c \cdot x) = f\big(c \cdot (x_1; x_2)\big) = f(c \cdot x_1; c \cdot x_2) = \\ = (c \cdot x_1 \cdot c \cdot x_2; c \cdot x_1) = (c^2 \cdot x_1 \cdot x_2; c \cdot x_1),$$

másrészt

$$c \cdot f(x) = c \cdot (x_1 \cdot x_2; x_1) = (c \cdot x_1 \cdot x_2, c \cdot x_1),$$

így

$$f(c \cdot x) \neq c \cdot f(x),$$

tehát f nem homogén, így nem lineáris.

16.4. **Feladat.** Mutassuk meg, hogy ha az $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ leképezés lineáris, akkor szükségképpen $f(0) = 0$, azaz minden lineáris leképezés a zérusvektorhoz a zérusvektort rendeli hozzá.

Megoldás:

Ha f lineáris, akkor additív, így minden $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^2$ esetén

$$f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2).$$

Legyen $x_1 = x_2 = 0$. Ekkor

$$f(0+0) = f(0) + f(0),$$

azaz

$$f(0) = 2f(0),$$

így $f(0) = 0$.

16.5. **Feladat.** Lineáris-e az $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$f(x_1; x_2) = (x_1 + x_2 + 1; x_1 - x_2)$$

leképezés?

Megoldás:

Mivel

$$f(0) = (1; 0) \neq (0; 0),$$

ezért a zérusvektor képe nem a zérusvektor, így az előző feladatban igazolt állítás szerint f nem lineáris.

16.6. **Feladat.** Tekintsük az $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$,

$$f(x_1; x_2) = (2x_1 + 3x_2; x_1 - x_2)$$

lineáris leképezést!

a) Adjuk meg f természetes bázisra vonatkozó mátrixát!
b) Az f mátrixa segítségével számoljuk ki az $f(3; 2)$ értéket!
c) Adjuk meg a lineáris leképezés magterét!
d) Határozzuk meg f defektusát!
e) Adjuk meg az f leképezés rangját!
f) Szimmetrikus-e az f leképezés?
g) Invertálható-e az f leképezés?
h) Amennyiben f invertálható, úgy adjuk meg az inverz leképezés mátrixát!

Megoldás:

a) Az f leképezés természetes bázisra vonatkozó mátrixának felírásához először kiszámoljuk a természetes bázisvektorokon a függvényértékeket:

$$f(1; 0) = (2 \cdot 1 + 3 \cdot 0; 1 - 0) = (2; 1)$$
$$f(0; 1) = (2 \cdot 0 + 3 \cdot 1; 0 - 1) = (3; -1).$$

Ezt felhasználva f mátrixa:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

b) Az $f(3;2)$ függvényértéket megkaphatjuk úgy, ha az f mátrixával balról megszorozzuk a $(3;2)$ vektort, mint oszlopvektort:

$$f(3;2) = A \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

c) A lineáris leképezés magtere azon vektorok halmaza, amelyeknek a képe a zérusvektor, azaz a

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 &= 0 \\ x_1 - x_2 &= 0 \end{aligned}$$

egyenletrendszer megoldását alkotó számpárok. Ha a második sor kétszeresét kivonjuk az első sorból, akkor azt kapjuk, hogy $5x_2 = 0$, ami azt jelenti, hogy $x_2 = 0$. Ezt visszahelyettesítve például az $x_1 - x_2 = 0$ egyenletbe azt kapjuk, hogy $x_1 = 0$. Tehát a magtér:

$$\ker(f) = \{(0;0)\}.$$

d) A defektus a magtér dimenziója, ami jelen esetben

$$\operatorname{def}(f) = \dim \ker(f) = 0.$$

e) A nullitás és rang tétel szerint:

$$\operatorname{def}(f) + \operatorname{rang}(f) = \dim \mathbb{R}^2.$$

Mivel jelen esetben $\operatorname{def}(f) = 0$ és $\dim \mathbb{R}^2 = 2$, ezért a leképzés rangja: 2.

f) Mivel az A mátrix transzponáltja:

$$A^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \neq A,$$

ezért az A mátrix nem szimmetrikus, így az f leképezés nem szimmetrikus.

g) Mivel az A mátrix determinánsa:

$$\det \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = -2 - 3 = -5 \neq 0,$$

ezért a leképezés invertálható.

h) Az inverz leképezés mátrixa:

$$A^{-1} = -\frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

DUPress

16.7. **Feladat.** Az $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ lineáris leképezésről azt tudjuk, hogy egyrészt $f(1;2) = (4;5)$, másrészt $f(2;1) = (5;4)$. Adjuk meg a lineáris leképezés mátrixát!

Megoldás:

Legyen a keresett mátrix

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Mivel $f(1;2) = (4;5)$, ezért

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Ha elvégezzük a mátrixszal való szorzást, akkor azt kapjuk, hogy

$$\begin{pmatrix} a_{11} + 2a_{12} \\ a_{21} + 2a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Tehát az

$$\begin{aligned} a_{11} + 2a_{12} &= 4 \\ a_{21} + 2a_{22} &= 5 \end{aligned}$$

egyenletrendszerhez jutunk.
Mivel $f(2;1) = (5;4)$, ezért

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Ha elvégezzük a mátrixszal való szorzást, akkor azt kapjuk, hogy

$$\begin{pmatrix} 2a_{11} + a_{12} \\ 2a_{21} + a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Tehát az

$$\begin{aligned} 2a_{11} + a_{12} &= 5 \\ 2a_{21} + a_{22} &= 4 \end{aligned}$$

egyenletrendszerhez jutunk.
Azt kaptuk tehát, hogy

$$\begin{aligned} a_{11} + 2a_{12} &= 4 \\ a_{21} + 2a_{22} &= 5 \\ 2a_{11} + a_{12} &= 5 \\ 2a_{21} + a_{22} &= 4. \end{aligned}$$

DUPress

Az első egyenlet kétszeresét kivonjuk a harmadik egyenletből, akkor azt kapjuk, hogy $a_{12} = 1$. Ezt visszahelyettesítve az első egyenletbe $a_{11} = 2$ adódik. Ha a második egyenlet kétszeresét kivonjuk a negyedik egyenletből, akkor $a_{22} = 2$ adódik. Ezt visszahelyettesítve a negyedik egyenletbe $a_{21} = 1$ adódik. A lineáris leképezés mátrixa tehát:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

16.8. **Feladat.** Tekintsük az $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$,

$$f(x_1; x_2) = (x_1 + 2x_2; x_1 - x_2)$$

és a $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$,

$$g(x_1; x_2) = (2x_1 + 3x_2; x_2 - x_1)$$

lineáris leképezéseket!

a) Adjuk meg f természetes bázisra vonatkozó mátrixát!
b) Adjuk meg g természetes bázisra vonatkozó mátrixát!
c) Határozzuk meg az $f + g$ leképezés mátrixát!
d) Határozzuk meg az $f - g$ leképezés mátrixát!
e) Határozzuk meg a $2f$ leképezés mátrixát!
f) Adjuk meg az $f \circ g$ leképezés mátrixát!
g) Szimmetrikus-e az $f \circ g$ leképezés?

Megoldás:

a) Az f leképezés természetes bázisra vonatkozó mátrixának felírásához először kiszámoljuk a természetes bázisvektorokon a függvényértékeket:

$$f(1; 0) = (1 + 2 \cdot 0; 1 - 0) = (1; 1)$$
$$f(0; 1) = (0 + 2 \cdot 1; 0 - 1) = (2; -1).$$

Ezt felhasználva f mátrixa:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

b) A g leképezés természetes bázisra vonatkozó mátrixának felírásához először kiszámoljuk a természetes bázisvektorokon a függvényértékeket:

$$g(1; 0) = (2; -1)$$
$$g(0; 1) = (3; 1).$$

Ezt felhasználva g mátrixa:

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

c) Az $f + g$ leképezés mátrixa:

$$A + B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

d) Az $f - g$ leképezés mátrixa:

$$A - B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

e) A $2f$ mátrixa:

$$2A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

f) Az $f \circ g$ leképezés mátrixa:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

g) Az $f \circ g$ leképezés mátrixa:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Mivel

$$(A \cdot B)^T = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \neq A \cdot B,$$

ezért $A \cdot B$ nem szimmetrikus mátrix, így $f \circ g$ nem szimmetrikus leképezés.

16.9. **Feladat.** Jelentse az f leképezés a síkon az $y = x$ egyenletű egyenesre való tükrözést. Legyen továbbá g az origó körüli $90°$-kal való forgatás mátrixa. Adjuk meg az $g \circ f$ leképezés mátrixát!

Megoldás:

Az $y = x$ egyenesre való tükrözés esetén

$$f(1;0) = (0;1)$$
$$f(0;1) = (1;0),$$

így az f leképezés mátrixa:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Az origó körüli $90°$-kal való forgatás esetén

$$f(1;0) = (0;1)$$
$$f(0;1) = (-1;0),$$

így a g leképezés mátrixa:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

A $g \circ f$ leképezés mátrixa

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

ami éppen az y-tengelyre való tükrözés mátrixa.

16.10. **Feladat.** Jelentse f a sík y-tengelyre való tükrözésének mátrixát!

a) Írjuk föl a lineáris leképezés (természetes bázisra vonatkozó) mátrixát!
b) Írjuk föl a lineáris leképzés karakterisztikus polinomját!
c) Írjuk föl a lineáris leképzés karakterisztikus egyenletét!
d) Határozzuk meg a lineáris leképezés sajátértékeit!
e) Határozzuk a különböző sajátértékekhez tartozó sajátvektorokat!

Megoldás:

a) A lineáris leképezés mátrixát úgy kapjuk meg, hogy kiszámoljuk a bázisvektorokon felvett függvényértékeket és a kapott vektorokból, mint oszlopvektorokból mátrixot képezünk. Mivel

$$f(1;0) = (-1;0)$$

és

$$f(0;1) = (0;1),$$

ezért a lineáris leképezés természetes bázisra vonatkozó mátrixa:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

b) A karakterisztikus polinom a $\det(A - \lambda E_2)$ polinom. Behelyettesítve az A mátrixot és az E_2 egységmátrixot, azt kapjuk, hogy

$$\det \begin{pmatrix} -1-\lambda & 0 \\ 0 & 1-\lambda \end{pmatrix}.$$

A determinánst kiszámolva, majd elvégzve a zárójelfelbontásokat a

$$(-1-\lambda)\cdot(1-\lambda)=\lambda^2-1$$

polinomot kapjuk.

c) A karakterisztikus egyenlet a

$$\det(A-\lambda E_2)=0$$

összefüggés, ami jelen esetben a

$$\lambda^2-1=0$$

m ásodfokú egyenlet.

d) A sajátértékek a karakterisztikus egyenlet gyökei, így meg kell oldanunk a

$$\lambda^2-1=0$$

egyenletet, amiből $\lambda_1=1$, $\lambda_2=-1$ adódik.

e) A $\lambda_1=1$ sajátértékhez tartozó sajátvektorok meghatározásához első lépésben felírjuk az $A-\lambda E_2$ mátrixot:

$$A-1\cdot E_2=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}.$$

A sajátértékeket a

$$\begin{pmatrix}-2 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$$

egyenletrendszer megoldása adja. Vegyük észre, hogy az alapmátrix második sora csupa nulla elemekből áll, így az elhagyható, mert nincs információtartalma. Tehát a megoldandó lineáris egyenletrendszer $-2x_1=0$, amiből $x_1=0$. Az x_2 ismeretlent szabad paraméternek választhatjuk. Legyen

$$x_2=t\in\mathbb{R}\setminus\{0\}.$$

A $t=0$ értéket azért zárjuk ki a megoldások közül, mert akkor $x_2=0$ és $x_1=0$ lenne, ami azt jelentené, hogy a sajátvektor zérusvektor, amit definíció szerint nem engedünk meg. Tehát a $\lambda_1=1$ sajátértékhez tartozó összes sajátvektorok halmaza, azaz a sajátaltér:

$$S_{\lambda_1}=\left\{\begin{pmatrix}0\\ t\end{pmatrix}\,\middle|\, t\in\mathbb{R}\setminus\{0\}\right\}=\left\{t\cdot\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}\,\middle|\, t\in\mathbb{R}\setminus\{0\}\right\}.$$

DUPress

Meghatározzuk a $\lambda_2 = -1$ sajátértékhez tartozó sajátvektorokat:

$$A - (-1) \cdot E = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Tehát a sajátvektorokat a

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

egyenletrendszer megoldása adja. Vegyük észre, hogy az alapmátrix második sora csupa nulla elemből áll, így az elhagyható, mivel nincs információtartalma. Tehát a megoldandó lineáris egyenletrendszer $2x_2 = 0$, amiből $x_2 = 0$ adódik. Az x_1 ismeretlent tetszőlegesnek választjuk. Legyen

$$x_1 = t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Tehát a $\lambda_2 = -1$ sajátértékhez tartozó összes sajátvektorok halmaza:

$$S_{\lambda_2} = \left\{ \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix} \,\middle|\, t \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \right\}.$$

16.11. **Feladat.** Tekintsük az alábbi mátrixszal adott valós tér fölötti lineáris transzformációt:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 4 & -8 \\ -6 & 8 & -14 \\ -3 & 3 & -5 \end{pmatrix}.$$

a) Írjuk föl a lineáris leképzés karakterisztikus polinomját!

b) Írjuk föl a lineáris leképzés karakterisztikus egyenletét!

c) Határozzuk meg a lineáris leképezés sajátértékeit!

d) Határozzuk meg a különböző sajátértékekhez tartozó sajátvektorokat!

Megoldás:

a) A lineáris leképzés karakterisztikus polinomja:

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda E_3) = \det \begin{pmatrix} -2-\lambda & 4 & -8 \\ -6 & 8-\lambda & -14 \\ -3 & 3 & -5-\lambda \end{pmatrix} = \\ &= (-2-\lambda) \cdot (8-\lambda) \cdot (-5-\lambda) + \\ &+ 168 + 144 - 24 \cdot (8-\lambda) + \\ &+ 42 \cdot (-2-\lambda) + 24 \cdot (-5-\lambda) = \\ &= -\lambda^3 + \lambda^2 + 4\lambda - 4. \end{aligned}$$

b) A lineáris leképzés karakterisztikus egyenlete:

$$-\lambda^3 + \lambda^2 + 4\lambda - 4 = 0.$$

c) A sajátértékek a karakterisztikus egyenlet gyökei, azaz a

$$-\lambda^3 + \lambda^2 + 4\lambda - 4 = 0.$$

egyenlet megoldásai. Az első két tagból emeljünk ki λ^2-et, a második két tagból pedig 4-et, majd alakítsuk szorzattá az egyenlet bal oldalát:

$$\begin{aligned} -\lambda^3 + \lambda^2 + 4\lambda - 4 &= 0 \\ \lambda^2 \cdot (1-\lambda) + 4 \cdot (\lambda - 1) &= 0 \\ (\lambda - 1) \cdot (4 - \lambda^2) &= 0. \end{aligned}$$

Egy szorzat csak úgy lehet nulla, ha valamelyik tényezője nulla, így az egyenlet megoldásai, azaz a sajátértékek $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = -2$.

d) A λ sajátértékhez tartozó sajátvektorok azok az $x \neq 0$ vektorok, amelyekre $Ax = \lambda x$ teljesül. Ezt átrendezve $(A - \lambda E_3) \cdot x = 0$ adódik. Először meghatározzuk a $\lambda_1 = 1$ sajátértékhez tartozó sajátvektorokat. Ekkor

$$A - 1 \cdot E_3 = \begin{pmatrix} -2 & 4 & -8 \\ -6 & 8 & -14 \\ -3 & 3 & -5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = $$
$$= \begin{pmatrix} -3 & 4 & -8 \\ -6 & 7 & -14 \\ -3 & 3 & -6 \end{pmatrix},$$

így meg kell oldanunk a

$$\begin{pmatrix} -3 & 4 & -8 \\ -6 & 7 & -14 \\ -3 & 3 & -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

egyenletrendszert. A kapott mátrixban az első sor -2-szeresét adjuk hozzá a második sorhoz és az első sor -1-szeresét adjuk hozzá a harmadik sorhoz. Ezután a második sor -1-szeresét adjuk hozzá a harmadik sorhoz:

$$\begin{pmatrix} -3 & 4 & -8 \\ -6 & 7 & -14 \\ -3 & 3 & -6 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -3 & 4 & -8 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -3 & 4 & -8 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

DUPress

A Gauss-elimináció után kapott mátrixból az alábbi egyenletrendszerhez jutunk:

$$\begin{aligned} 3x_1 + 4x_2 - 8x_3 &= 0 \\ - x_2 + 2x_3 &= 0. \end{aligned}$$

Legyen $x_3 = t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Ekkor $x_2 = 2t$. Ezeket az első egyenletbe behelyettesítve $-3x_1 + 8t - 8t = 0$, azaz $x_1 = 0$. Tehát a $\lambda_1 = 1$ sajátértékhez tartozó összes sajátvektorok halmaza:

$$S_{\lambda_1} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 2t \\ t \end{pmatrix} \middle| t \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \right\} = \left\{ t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| t \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \right\}.$$

Most meghatározzuk a $\lambda_2 = 2$ sajátértékhez tartozó sajátvektorokat. Behelyettesítve a megfelelő adatokat azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} A - 2 \cdot E_3 &= \begin{pmatrix} -2 & 4 & -8 \\ -6 & 8 & -14 \\ -3 & 3 & -5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} -4 & 4 & -8 \\ -6 & 6 & -14 \\ -3 & 3 & -7 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Tehát meg kell oldanunk a

$$\begin{pmatrix} -4 & 4 & -8 \\ -6 & 6 & -14 \\ -3 & 3 & -7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

egyenletrendszert. Az egyenletrendszert Gauss-eliminációval oldjuk meg. Első lépésben az első sort osszuk el -4-gyel, majd az első sor 6-szorosát adjuk hozzá a második sorhoz és az első sor 3-szorosát adjuk hozzá a harmadik sorhoz:

$$\begin{pmatrix} -4 & 4 & -8 \\ -6 & 6 & -14 \\ -3 & 3 & -7 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -6 & 6 & -14 \\ -3 & 3 & -7 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Végezetül a második sor $-1/2$-szeresét adjuk hozzá a harmadik sorhoz. Ekkor azt kapjuk, hogy

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

A megoldandó lineáris egyenletrendszer tehát:

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + 2x_3 &= 0 \\ - 2x_3 &= 0. \end{aligned}$$

A második egyenletből $x_3 = 0$ adódik. Ezt behelyettesítve az első egyenletbe azt kapjuk, hogy $x_1 = x_2$. Legyen $x_2 = t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Ekkor $x_1 = t$. Tehát a $\lambda_2 = 2$ sajátértékhez tartozó összes sajátvektorok halmaza:

$$S_{\lambda_2} = \left\{ \begin{pmatrix} t \\ t \\ 0 \end{pmatrix} \middle| \, t \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \right\} = \left\{ t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \middle| \, t \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \right\}.$$

Most meghatározzuk a $\lambda_3 = -2$ sajátértékhez tartozó sajátvektorokat. Ekkor

$$\begin{aligned} A + 3 \cdot E_3 &= \begin{pmatrix} -2 & 4 & -8 \\ -6 & 8 & -14 \\ -3 & 3 & -5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 4 & -8 \\ -6 & 10 & -14 \\ -3 & 3 & -3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Tehát meg kell oldanunk a

$$\begin{pmatrix} 0 & 4 & -8 \\ -6 & 10 & -14 \\ -3 & 3 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

egyenletrendszert. Az egyenletrendszert Gauss-eliminációval oldjuk meg. Első lépésben a kapott mátrix harmadik sorát osszuk el -3-al, és cseréljük fel az első és harmadik sort:

$$\begin{pmatrix} 0 & 4 & -8 \\ -6 & 10 & -14 \\ -3 & 3 & -3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & -8 \\ -6 & 10 & -14 \end{pmatrix}.$$

Ezután az első sor 6-szorosát adjuk hozzá a harmadik sorhoz, majd a második sor -1-szeresét adjuk hozzá a harmadik sorhoz:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & -8 \\ 0 & 4 & -8 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Tehát a megoldandó egyenletrendszer:

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 &= 0 \\ 4x_2 - 8x_3 &= 0. \end{aligned}$$

A második egyenletből $x_2 = 2x_3$ adódik. Legyen $x_3 = t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Ekkor $x_2 = 2t$. Az első egyenletből $x_1 = t$ adódik. Tehát a $\lambda_3 = -2$ sajátértékhez tartozó összes sajátvektorok halmaza:

$$S_{\lambda_3} = \left\{ \begin{pmatrix} t \\ 2t \\ t \end{pmatrix} \,\middle|\, t \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \right\} = \left\{ t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \,\middle|\, t \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \right\}.$$

16.12. **Feladat.** Tekintsük az $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$,

$$f(x_1; x_2) = (2x_1 + 3x_2; 4x_2)$$

lineáris leképezést!

a) Adjuk meg f természetes bázisra vonatkozó mátrixát!

b) Határozzuk meg f sajátértékeit!

c) Adjuk meg a sajátvektorokat!

d) Mutassuk meg, hogy diagonalizálható a leképezés!

e) A diagonálmátrix segítségével adjuk meg az f^3 leképezés mátrixát! (Itt f^3 alatt az $f = f \circ f \circ f$ leképezést értjük.)

<u>**Megoldás**</u>:

a) A leképezés természetes bázisra vonatkozó mátrixa:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

b) A karakterisztikus egyenlet

$$\det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 0 & 4-\lambda \end{pmatrix} = 0.$$

A determinánst kiszámolva azt kapjuk, hogy

$$(2-\lambda) \cdot (4-\lambda) = 0.$$

Az egyenlet megoldásai a sajátértékei a leképezés sajátértékei: $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 4$.

DUPress

c) A $\lambda_1 = 2$ sajátértékhez tartozó sajátvekorok:

$$S_{\lambda_1} = \left\{ \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix} \,\middle|\, t \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \right\} = \left\{ t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \,\middle|\, t \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \right\}.$$

A $\lambda_2 = 4$ sajátértékhez tartozó sajátvekorok:

$$S_{\lambda_2} = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{3}{2}t \\ t \end{pmatrix} \,\middle|\, t \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \right\} = \left\{ t \cdot \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \,\middle|\, t \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \right\} =$$
$$= \left\{ t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \,\middle|\, t \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \right\}.$$

d) Mivel a sajátvektorokból álló

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

mátrix determinánsa

$$\det S = \det \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 2 \neq 0,$$

ezért létezik a sajátvektorokból álló bázis.

e) Mivel S a sajátvektorokból álló bázis, ezért

$$S^{-1} \cdot A \cdot S$$

olyan diagonálmátrix, amelynek főátlójában a sajátértékek állnak, azaz

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Mivel

$$S^{-1} \cdot A \cdot S = D,$$

ezért S-sel balról és S^{-1}-gyel jobbról szorozva azt kapjuk, hogy

$$A = S \cdot D \cdot S^{-1},$$

így

$$\begin{aligned} A^3 &= (S \cdot D \cdot S^{-1})^3 = \\ &= S \cdot D \cdot S^{-1} \cdot S \cdot D \cdot S^{-1} \cdot S \cdot D \cdot S^{-1} = \\ &= S \cdot D^3 \cdot S^{-1}, \end{aligned}$$

ami könnyen számolható, hiszen D diagonálmátrix, amelynek a hatványai olyan diagonálmátrixok, melyek főátlójában rendre a D mátrix főátlójában

DUPress

lévő elemeinek hatványai szerepelnek.
Mivel

$$S^{-1} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

a fentiek figyelembe vételével azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} A^3 &= S \cdot D^3 \cdot S^{-1} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2^3 & 0 \\ 0 & 4^3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 64 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 8 & 84 \\ 0 & 64 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

16.13. **Feladat.** Tekintsük a téren azt az f leképezést, amely minden vektorhoz hozzárendeli annak az xy síkra való merőleges vetületét!

a) Határozzuk meg a leképezést megadó függvényt!

b) Igazoljuk, hogy a leképezés lineáris!

c) Adjuk meg a leképezés (természetes bázisra) vonatkozó mátrixát!

d) Határozzuk meg a leképezés magterét!

e) Határozzuk meg a leképezés képterét!

f) Határozzuk meg a leképezés defektusát!

g) Határozzuk meg a leképezés rangját!

h) Szimmetrikus-e a leképezés?

i) Invertálható-e a leképezés?

j) Ortogonális-e a leképezés?

k) Adjuk meg a $2f$ leképezés mátrixát!

l) Adjuk meg az $f \circ f$ leképezés mátrixát!

m) Adjuk meg a leképzés karakterisztikus polinomját!

n) Írjuk fel a leképzés karakterisztikus egyenletét!

o) Határozzuk meg a sajátértékeket!

p) Határozzuk meg a sajátvektorokat!

q) Diagonálizálható-e a leképezés?

<u>**Megoldás**</u>:

a) Az xy síkra való merőleges vetítés során egy vektor első két koordinátája nem változik, a harmadik koordinátája pedig 0 lesz. Tehát a leképzés:

$$f(x_1; x_2; x_3) = (x_1; x_2; 0).$$

b) Legyen $x = (x_1; x_2; x_3) \in \mathbb{R}^3$ és $y = (y_1; y_2; y_3) \in \mathbb{R}^3$. Ekkor:

$$(x_1; x_2; x_3) + (y_1; y_2; y_3) = (x_1 + y_1; x_2 + y_2; x_3 + y_3),$$

így

$$f(x + y) = f(x_1 + y_1; x_2 + y_2; x_3 + y_3) = (x_1 + y_1; x_2 + y_2; 0).$$

Másrészt:

$$\begin{aligned} f(x) + f(y) = f(x_1; x_2; x_3) + f(y_1; y_2; y_3) = \\ = (x_1; x_2; 0) + (y_1; y_2; 0) = (x_1 + y_1; x_2 + y_2; 0), \end{aligned}$$

így azt kaptuk, hogy

$$f(x + y) = f(x) + f(y),$$

tehát f addítív. Ha c egy tetszőleges valós szám, akkor

$$c \cdot (x_1; x_2; x_3) = (c \cdot x_1; c \cdot x_2; c \cdot x_3),$$

így

$$f(c \cdot x) = f(c \cdot x_1; c \cdot x_2; c \cdot x_3) = (c \cdot x_1; c \cdot x_2; 0).$$

Másrészt:

$$c \cdot f(x) = c \cdot (x_1; x_2; 0) = (c \cdot x_1; c \cdot x_2; 0),$$

tehát f homogén. Mivel f additív és homogén, ezért lineáris.

c) Mivel

$$\begin{aligned} f(1; 0; 0) &= (1; 0; 0) \\ f(0; 1; 0) &= (0; 1; 0) \\ f(0; 0; 1) &= (0; 0; 0), \end{aligned}$$

ezért a leképezés mátrixa:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

d) Az

$$(x_1; x_2; 0) = (0; 0; 0)$$

egyenletből azt kapjuk, hogy $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ és x_3 tetszőleges valós szám, ezért a leképezés magtere:

$$\mathrm{Ker}(f) = \{(0; 0; t) \in \mathbb{R}^3 \,|\, t \in \mathbb{R}\}.$$

e) A leképzés képtere:

$$\mathrm{Im}(f) = \{(x_1; x_2; 0) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}.$$

f) A leképzés defektusa:

$$\mathrm{def}(f) = \dim \mathrm{Ker}(f) = 1.$$

g) A nullitás és rang tétel szerint

$$\dim \mathbb{R}^3 = \mathrm{def}(f) + \mathrm{rang}(f),$$

így

$$3 = 1 + \mathrm{rang}(f),$$

tehát a leképzés rangja:

$$\mathrm{rang}(f) = 2.$$

h) Mivel

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A,$$

ezért a leképezés szimmetrikus.

i) Mivel

$$\det A = 0,$$

ezért leképezés nem invertálható.

j) Mivel

$$A \cdot A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq E_3,$$

ezért a leképezés nem ortogonális.

DUPress

k) A $2f$ leképezés mátrixa:

$$2A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

l) Mivel $A = A^T$, ezért $A^2 = A \cdot A^T$, így $f^2 = f \circ f$ mátrixa:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

m) A karakterisztikus polinom:

$$\det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} = -(1-\lambda)^2 \cdot \lambda.$$

n) A karakterisztikus egyenlet:

$$\det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} = 0,$$

így

$$-(1-\lambda)^2 \cdot \lambda = 0.$$

o) A sajátértékek a karakterisztikus egyenlet gyökei, így $\lambda_1 = 1$ és $\lambda_2 = 0$.

p) A $\lambda_1 = 1$ sajátértékhez tartozó sajátvektorok meghatározásához tekintsük először az

$$A - 1 \cdot E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

mátrixot. A sajátvektor meghatározásához meg kell oldanunk az

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

egyenletrendszert, amire azt kapjuk, hogy $x_3 = 0$, x_1 és x_2 teszőleges, egyszerre nem zérus valós számok, így a sajátaltér:

$$S_{\lambda_1} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ t \\ u \end{pmatrix} \middle| t, u \in \mathbb{R}, t \cdot u \neq 0\} \right\} =$$

$$= \left\{ t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| t, u \in \mathbb{R}, t \cdot u \neq 0 \right\}.$$

A $\lambda_1 = 0$ sajátértékhez tartozó sajátvektorok meghatározásához tekintsük először az

$$A - 0 \cdot E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

mátrixot. A sajátvektor meghatározásához meg kell oldanunk az

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

egyenletrendszert, amire azt kapjuk, hogy $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ és x_3 teszőleges, nem zérus valós szám. A sajátaltér tehát:

$$S_{\lambda_2} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ t \end{pmatrix} \middle| t \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \right\} = \left\{ t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \middle| t \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \right\}.$$

q) A leképezés diagonalizálható, mert a $\lambda_1 = 1$ sajátérték algebrai multiplicitása és geometriai multiplicitása is 2, valamint a $\lambda_1 = 0$ sajátérték algebrai multiplicitása és geometriai multiplicitása is 1, így minden sajátérték algebrai és geometriai multiplicitása megegyezik. Megjegyezzük, hogy a mátrix diagonális volt, így nyilvánvalóan diagonalizálható.

16.14. **Feladat.** Bizonyítsuk be a $\cos 2\alpha$ és $\sin 2\alpha$ addíciós képletét a forgásmátrix felhasználásával!

<u>**Megoldás**</u>:

Az origó körüli pozitív irányú 2α szöggel való forgatás mátrixa:

$$\begin{pmatrix} \cos 2\alpha & -\sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & \cos 2\alpha \end{pmatrix}.$$

Másrészt az origó körüli pozitív irányú 2α szöggel való forgatás felfogható úgy is, hogy egymás után kétszer hajtjuk végre az origó körüli pozitív irányú α szöggel való forgatást. Ekkor a leképezés mátrixa:

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

A mátrixszorzást elvégezve azt kapjuk, hogy

$$\begin{pmatrix} \cos^2\alpha - \sin^2\alpha & \cos\alpha\cdot\sin\alpha + \sin\alpha\cdot\cos\alpha \\ \cos\alpha\cdot\sin\alpha + \sin\alpha\cdot\cos\alpha & \cos^2\alpha - \sin^2\alpha \end{pmatrix}.$$

Az összevonás elvégzése után

$$\begin{pmatrix} \cos^2\alpha - \sin^2\alpha & 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha \\ 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha & \cos^2\alpha - \sin^2\alpha \end{pmatrix}$$

adódik. Azt kaptuk tehát, hogy

$$\begin{pmatrix} \cos 2\alpha & -\sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & \cos 2\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos^2\alpha - \sin^2\alpha & 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha \\ 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha & \cos^2\alpha - \sin^2\alpha \end{pmatrix}.$$

Két mátrix pontosan akkor egyenlő, ha a megfelelő elemeik egyenlőek, amiből

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$
$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha$$

adódik.

16.15. **Feladat.** Bizonyítsuk be a $\cos(\alpha+\beta)$ és $\sin(\alpha+\beta)$ addíciós képletét a forgásmátrix felhasználásával!

Megoldás:

Az origó körüli pozitív irányú α szöggel való forgatás mátrixa:

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

Az origó körüli pozitív irányú β szöggel való forgatás mátrixa:

$$\begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix}.$$

Az origó körüli pozitív irányú $\alpha+\beta$ szöggel való forgatás mátrixa:

$$\begin{pmatrix} \cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{pmatrix}.$$

Ugyanakkor az $\alpha + \beta$ szöggel való forgatás felfogható úgy is, hogy először forgatunk β szöggel, majd az elforgatott alakzatot α szöggel, így az $\alpha + \beta$ szöggel való forgatás mátrixa:

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix}.$$

Elvégezve a szorzásokat

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha\cdot\cos\beta - \sin\alpha\cdot\sin\beta & -\cos\alpha\cdot\sin\beta - \sin\alpha\cdot\cos\beta \\ \sin\alpha\cdot\cos\beta + \cos\alpha\cdot\sin\beta & -\sin\alpha\cdot\sin\beta + \cos\alpha\cdot\cos\beta \end{pmatrix}$$

adódik.

Azt kaptuk tehát, hogy

$$\begin{pmatrix} \cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} \cos\alpha\cdot\cos\beta - \sin\alpha\cdot\sin\beta & -\cos\alpha\cdot\sin\beta - \sin\alpha\cdot\cos\beta \\ \sin\alpha\cdot\cos\beta + \cos\alpha\cdot\sin\beta & -\sin\alpha\cdot\sin\beta + \cos\alpha\cdot\cos\beta \end{pmatrix}.$$

Két mátrix pontosan akkor egyenlő, ha a megfelelő elemeik egyenlőek, amiből

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta - \sin\alpha\cdot\sin\beta$$
$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cdot\cos\beta + \cos\alpha\cdot\sin\beta$$

adódik.

16.16. **Feladat.** Egy f lineáris transzformáció mátrixa:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Adjuk meg a $P = (0;0)$, $Q = (6;0)$, $R = (6;3)$, $S = (0;3)$ pontok által meghatározott téglalapnak az f transzformáció hatására keletkezett képét. Rajzoljuk fel az alakzatokat!

Megoldás:

Az egyes pontok képei kiszámolhatóak úgy, hogy a pontoknak megfelelő helyvektorok képeit számoljuk ki. A $P = (0;0)$ pont képe:

$$P' = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

A $Q = (6;0)$ pont képe:

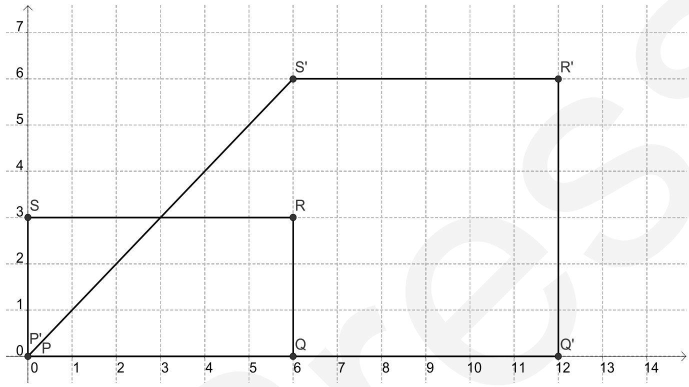
$$Q' = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

A $R = (6;3)$ pont képe:

$$R' = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Az $S = (0;3)$ pont képe:

$$S' = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \end{pmatrix}.$$



16.17. **Feladat.** Bizonyítsuk be, hogy ha λ sajátértéke az A mátrixnak, akkor λ^2 sajátértéke az A^2 mátrixnak.

Megoldás:

Ha λ sajátértéke az A mátrixnak és $x \neq 0$ a λ sajátértékhez tartozó sajátvektor, akkor

$$A \cdot x = \lambda \cdot x.$$

Szorozzuk az egyenlet mindkét oldalát balról az A mátrixszal:

$$A^2 \cdot x = A \cdot \lambda \cdot x.$$

Mivel $A \cdot \lambda = \lambda \cdot A$, ezért

$$A^2 \cdot x = \lambda \cdot A \cdot x.$$

Ugyanakkor $A \cdot x = \lambda \cdot x$, így

$$A^2 \cdot x = \lambda \cdot \lambda \cdot x,$$

tehát

$$A^2 \cdot x = \lambda^2 \cdot x,$$

ami azt jelenti, hogy az A^2 mátrixnak λ^2 sajátértéke.

16.18. **Feladat.** Bizonyítsuk be, hogy ha λ sajátértéke az A invertálható mátrixnak, akkor $\frac{1}{\lambda}$ sajátértéke az A^{-1} mátrixnak.

Megoldás:

Ha λ sajátértéke az A mátrixnak és $x \neq 0$ a λ sajátértékhez tartozó sajátvektor, akkor

$$A \cdot x = \lambda \cdot x.$$

Szorozzuk az egyenlet mindkét oldalát balról az A^{-1} mátrixszal:

$$A^{-1} \cdot A \cdot x = A^{-1} \cdot \lambda \cdot x.$$

Mivel $A^{-1} \cdot A = E$ és $E \cdot x = x$, ezért

$$x = \lambda \cdot A^{-1} \cdot x.$$

Szorozzuk az egyenlet mindkét oldalát az $\frac{1}{\lambda}$ valós számmal:

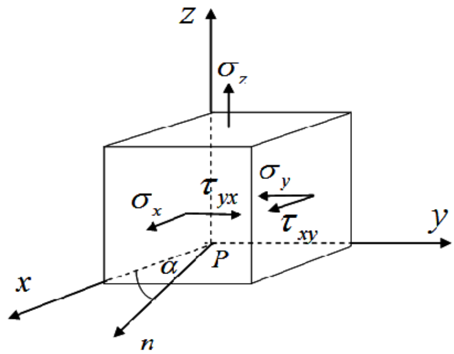
$$\frac{1}{\lambda} \cdot x = A^{-1} \cdot x,$$

ami azt jelenti, hogy az A^{-1} mátrixnak az $\frac{1}{\lambda}$ sajátértéke.
Megjegyezzük, hogy az $\frac{1}{\lambda}$ biztosan létezik, mert az A mátrix invertálható, így a 0 nem lehet sajátértéke, tehát $\lambda \neq 0$.

DUPress

17. Feszültségi mátrix

17.1. **Feladat.** Egy szerkezet valamely P pontjához tartozó feszültségállapotot az alábbi ábrán látható elemi hasábon bejelölt feszültségi adatok jellemzik:



Az ábrán szereplő adatok az alábbiak:

$$\sigma_x = 50\,[\mathrm{MPa}];\ \sigma_y = -30\,[\mathrm{MPa}];\ \sigma_z = 25\,[\mathrm{MPa}];$$
$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = 30\,[\mathrm{MPa}];\ \alpha = 30^\circ.$$

a) Adjuk meg az x tengelyhez α szöggel hajló, xz-síkban fekvő n normális egységvektor koordinátáit!
b) Adjuk meg a feszültségi mátrixot a P pontban!
c) Határozzuk meg az n vektor által irányított felületelemhez tartozó ρ_n feszültségvektort!
d) Határozzuk meg az n vektor által irányított felületelemhez tartozó normálfeszültség értékét!
e) Számoljuk ki a csúsztatófeszültség nagyságát!
f) Határozzuk meg a főfeszültségek nagyságát!
g) Adjuk meg a feszültségi főirányokat!

Megoldás:

a) A normális egységvektor koordinátái:

$$n_x = \cos\alpha = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2};$$
$$n_z = -\sin\alpha = -\sin 30^\circ = -\frac{1}{2}.$$

Nyilván $n_y = 0$, így a keresett normális egységvektor:

$$n = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 \\ -0,5 \end{pmatrix}.$$

b) A feszültségi mátrix a P pontban:

$$T = \begin{pmatrix} 50 & 30 & 0 \\ 30 & -30 & 0 \\ 0 & 0 & 25 \end{pmatrix} \text{ [MPa]}.$$

c) Az n vektor által irányított felületelemhez tartozó ρ_n feszültségvektor:

$$\rho_n = T \cdot n = \begin{pmatrix} 50 & 30 & 0 \\ 30 & -30 & 0 \\ 0 & 0 & 25 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 \\ -0,5 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 25 \cdot \sqrt{3} \\ 15 \cdot \sqrt{3} \\ 25 \cdot (-0,5) \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 43,3 \\ 25,98 \\ -12,5 \end{pmatrix} \text{ [MPa]}.$$

Ezt felhasználva azt kapjuk, hogy

$$|\rho_n| = \sqrt{(43,3)^2 + (25,98)^2 + (-12,5)^2} \approx 52,02 \text{ [MPa]}.$$

d) Mivel $\sigma_n = n \bullet \rho_n$, ezért

$$\sigma_n \approx \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 \\ -0,5 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 43,3 \\ 25,98 \\ -12,5 \end{pmatrix} \approx 43,75 \text{ [MPa]}.$$

A normálfeszültség tehát $43,75$ [MPa].

e) Mivel

$$|\rho_n| = \sqrt{\sigma_n^2 + \tau_n^2},$$

ezért a csúsztatófeszültség:

$$\tau_n = \sqrt{\rho_n^2 - \sigma_n^2} \approx 28,14 \text{ [MPa]}.$$

DUPress

f) A főfeszültségek a feszültségi mátrix sajátértékei, amiket a karakterisztikus egyenlet megoldásával kapunk meg. Tehát meg kell oldanunk a

$$\det(T - \sigma \cdot E) = 0$$

egyenletet. Behelyettesítve a T mátrixot és az E egységmátrixot azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} |T - \sigma \cdot E| &= \det \left[\begin{pmatrix} 50 & 30 & 0 \\ 30 & -30 & 0 \\ 0 & 0 & 25 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & \sigma & 0 \\ 0 & 0 & \sigma \end{pmatrix} \right] = \\ &= \det \begin{pmatrix} 50-\sigma & 30 & 0 \\ 30 & -30-\sigma & 0 \\ 0 & 0 & 25-\sigma \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

A kapott determinánst kiszámolhatjuk például a harmadik sor szerinti kifejtéssel. Ekkor azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} |T - \sigma \cdot E| &= (25-\sigma) \cdot (-1)^{3+3} \cdot \big[(50-\sigma) \cdot (-30-\sigma) - 900\big] = \\ &= (25-\sigma) \cdot (\sigma^2 - 20 \cdot \sigma - 2.400). \end{aligned}$$

A főfeszültségek tehát a

$$(25-\sigma) \cdot (\sigma^2 - 20 \cdot \sigma - 2.400) = 0$$

egyenlet megoldásai. Egy szorzat úgy lehet zérus, ha valamelyik tényezője zérus, így $\sigma = 25\,[\mathrm{MPa}]$ vagy

$$\sigma^2 - 20 \cdot \sigma - 2.400 = 0.$$

A másodfokú egyenlet megoldóképlete alapján

$$\sigma_{1,2} = \frac{20 \pm \sqrt{400 + 9.600}}{2} = \frac{20 \pm 100}{2},$$

így $\sigma = 60\,[\mathrm{MPa}]$, illetve $\sigma = -40\,[\mathrm{MPa}]$. Indexezzük az alábbi módon a főfeszültségeket:

$$\sigma_1 = 60\,[\mathrm{MPa}];\ \sigma_2 = 25\,[\mathrm{MPa}];\ \sigma_3 = -40\,[\mathrm{MPa}].$$

g) Az egyes főfeszültségekhez tartozó főirányokat a

$$(T - \sigma \cdot E) \cdot n = 0$$

homogén lineáris egyenletrendszer megoldásaként kapjuk. Behelyettesítve a $\sigma_1 = 60\,[\mathrm{MPa}]$ értéket az

$$\begin{pmatrix} -10 & 30 & 0 \\ 30 & -90 & 0 \\ 0 & 0 & -35 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

egyenletrendszerhez jutunk. Az egyenleteket részletesen kiírva azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} -10n_x + 30n_y &= 0 \\ 30n_x - 90n_y &= 0 \\ -35n_z &= 0 \end{aligned}$$

Az utolsó egyenletből $n_z = 0$ adódik. Az első és második egyenletek ekvivalensek egymással, így közülük az egyik egyenlet elhagyható. Az n_x és n_y ismeretlenek között az $n_x = 3n_y$ kapcsolatokat kapjuk. A könnyebb áttekinthetőség kedvéért legyen például $n_y = t$, ahol $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tetszőleges. Ekkor $n_x = 3t$. Az n vektornak egységvektornak kell lenni, így teljesülnie kell, hogy

$$\sqrt{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2} = 1,$$

azaz

$$\sqrt{9t^2 + t^2} = 1 \qquad \Rightarrow \qquad \sqrt{10} \cdot t = 1 \qquad \Rightarrow \qquad t = \frac{1}{\sqrt{10}}.$$

Tehát a σ_1 főfeszültséghez tartozó főirány:

$$n_1 = \begin{pmatrix} \dfrac{3}{\sqrt{10}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{10}} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

A $\sigma_2 = 25\,[\mathrm{MPa}]$ értékű főfeszültség esetén az alábbi lineáris egyenletrendszerhez jutunk:

$$\begin{pmatrix} 25 & 30 & 0 \\ 30 & -55 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Az egyenleteket részletesen kiírva azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} 25n_x + 30n_y &= 0 \\ 30n_x - 55n_y &= 0. \end{aligned}$$

Ekkor $n_z = t$ adódik, ahol $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tetszőleges. Továbbá $n_x = 0$ és $n_y = 0$. Az n vektornak egységvektornak kell lenni, így teljesülnie kell, hogy

$$\sqrt{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2} = 1,$$

azaz $t = 1$. Tehát a σ_2 főfeszültséghez tartozó főirány:

$$n_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

A $\sigma_3 = -40\,[\mathrm{MPa}]$ értékű főfeszültség esetén az alábbi lineáris egyenletrendszerhez jutunk:

$$\begin{pmatrix} 90 & 30 & 0 \\ 30 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 65 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Az egyenleteket részletesen kiírva azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} 90n_x + 30n_y &= 0 \\ 30n_x + 10n_y &= 0 \\ 65n_z &= 0. \end{aligned}$$

Az utolsó egyenletből $n_z = 0$ adódik. Az első és második egyenletek ekvivalensek egymással, így közülük az egyik egyenlet elhagyható. Az n_x és n_y ismeretlenek között az $n_y = -3n_x$ összefüggést kapjuk. A könnyebb áttekinthetőség miatt legyen például $n_x = t$, ahol $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tetszőleges. Ezt az első vagy második egyenletbe behelyettesítve azt kapjuk, hogy $n_y = -3t$. Annak is teljesülni kell továbbá, hogy az n vektornak egységvektornak kell lenni, így fenn áll a

$$\sqrt{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2} = 1,$$

összefüggés, azaz

$$\sqrt{9t^2 + t^2} = 1 \qquad \Rightarrow \qquad \sqrt{10} \cdot t = 1 \qquad \Rightarrow \qquad t = \frac{1}{\sqrt{10}}.$$

Tehát a σ_3 főfeszültséghez tartozó főirány:

$$n_3 = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{10}} \\ -\dfrac{3}{\sqrt{10}} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

17.2. **Feladat.** Egy test egy P pontjában a feszültségi mátrix:

$$T = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -10 \\ 0 & 20 & 0 \\ -10 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

A tekintett pontra illeszkedő felületelem normális egységvektora:

$$n = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \dfrac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

a) Határozzuk meg az n vektor által irányított felületelemhez tartozó ρ_n feszültségvektort!

b) Határozzuk meg az n vektor által irányított felületelemhez tartozó normálfeszültség értékét!

c) Számoljuk ki a csúsztatófeszültség nagyságát!

d) Határozzuk meg a főfeszültségek nagyságát!

e) Adjuk meg a feszültségi főirányokat!

Megoldás:

a) Az n vektor által irányított felületelemhez tartozó ρ_n feszültségvektor:

$$\rho_n = T \cdot n = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -10 \\ 0 & 20 & 0 \\ -10 & 0 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{5}{2} \\ 10 \cdot \sqrt{2} \\ -\frac{5}{2} \end{pmatrix} . \,[\mathrm{MPa}].$$

Ezt felhasználva azt kapjuk, hogy

$$|\rho_n| = \sqrt{\left(-\frac{5}{2}\right)^2 + \left(10 \cdot \sqrt{2}\right)^2 + \left(-\frac{5}{2}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{25}{4} + 100 \cdot 2 + \frac{25}{4}} \approx 14,58\,[\mathrm{MPa}].$$

b) Mivel $\sigma_n = n \bullet \rho_n$, ezért

$$\sigma_n \approx \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} -\frac{5}{2} \\ 10 \cdot \sqrt{2} \\ -\frac{5}{2} \end{pmatrix} = -\frac{5}{4} + 10 - \frac{5}{4} = 7,5\,[\mathrm{MPa}].$$

A normálfeszültség tehát $7,5\,[\mathrm{MPa}]$.

c) Mivel

$$|\rho_n| = \sqrt{\sigma_n^2 + \tau_n^2},$$

ezért a csúsztatófeszültség:

$$\tau_n = \sqrt{\rho_n^2 - \sigma_n^2} = \sqrt{14,58^2 - 7,5^2} = \sqrt{212,5 - 56,25} =$$

$$= \sqrt{156,25} \approx 12,5\,[\mathrm{MPa}].$$

d) A főfeszültségek a feszültségi mátrix sajátértékei, amiket a karakterisztikus egyenlet megoldásával kapunk meg. Tehát meg kell oldanunk a

$$\det(T - \sigma \cdot E) = 0$$

DUPress

egyenletet. Behelyettesítve a T mátrixot és az E egységmátrixot azt kapjuk, hogy

$$\det(T-\sigma\cdot E)=\det\left[\begin{pmatrix}5&0&-10\\0&20&0\\-10&0&5\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\sigma&0&0\\0&\sigma&0\\0&0&\sigma\end{pmatrix}\right]=$$
$$=\det\begin{pmatrix}5-\sigma&0&-10\\0&20-\sigma&0\\-10&0&5-\sigma\end{pmatrix}.$$

A kapott determinánst kiszámolhatjuk például a második sor szerinti kifejtéssel. Ekkor azt kapjuk, hogy

$$\det(T-\sigma\cdot E)=(20-\sigma)\cdot(-1)^{2+2}\cdot\left[(5-\sigma)^2-100\right]=$$
$$=(20-\sigma)\cdot\left[(5-\sigma)^2-100\right].$$

A főfeszültségek tehát a

$$(20-\sigma)\cdot\left[(5-\sigma)^2-100\right]=0$$

egyenlet megoldásai. Egy szorzat úgy lehet zérus, ha valamelyik tényezője zérus, így $\sigma=20\,[\mathrm{MPa}]$ vagy $(5-\sigma)^2-100=0$. Az utóbbi egyenletből azt kapjuk, hogy

$$5-\sigma=10$$

vagy

$$5-\sigma=-10.$$

Az előbbiből $\sigma=-5\,[\mathrm{MPa}]$, az utóbbiból $\sigma=15\,[\mathrm{MPa}]$. Indexezzük az alábbi módon a főfeszültségeket:

$$\sigma_1=20\,[\mathrm{MPa}];\ \sigma_2=15\,[\mathrm{MPa}];\ \sigma_3=-5\,[\mathrm{MPa}].$$

e) Az egyes főfeszültségekhez tartozó főirányokat a

$$(T-\sigma\cdot E)\cdot n=0$$

homogén lineáris egyenletrendszer megoldásaként kapjuk. Behelyettesítve a $\sigma_1=20\,[\mathrm{MPa}]$ értéket az

$$\begin{pmatrix}-15&0&-10\\0&0&0\\-10&0&-15\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}n_x\\n_y\\n_z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

egyenletrendszerhez jutunk. A második sor minden eleme zérus, így az elhagyható. Az egyenleteket részletesen kiírva azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} -15n_x - 10n_z &= 0 \\ -10n_x - 15n_z &= 0. \end{aligned}$$

Az első és második egyenletet is -5-tel elosztva azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} 3n_x + 2n_z &= 0 \\ 2n_x + 3n_z &= 0. \end{aligned}$$

Az első egyenlet -2-szeresét adjuk hozzá a második egyenlet 3-szorosához. Ekkor azt kapjuk, hogy

$$5n_z = 0 \qquad \Rightarrow \qquad n_z = 0.$$

Ezt behelyettesítve az első egyenletbe $n_x = 0$ adódik. Az n_y értékét tetszőlegesnek választhatjuk, így legyen $n_y = t$, ahol $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Egységnyi hosszúságú sajátvektort keresünk, ezért teljesülni kell annak, hogy

$$\sqrt{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2} = 1,$$

azaz

$$\sqrt{t^2} = 1 \qquad \Rightarrow \qquad t = 1.$$

Tehát a σ_1 főfeszültséghez tartozó főirány:

$$n_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

A $\sigma_2 = 15\,[\mathrm{MPa}]$ értékű főfeszültség esetén az alábbi lineáris egyenletrendszerhez jutunk:

$$\begin{pmatrix} -10 & 0 & -10 \\ 0 & -5 & 0 \\ -10 & 0 & -10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Az első és utolsó egyenlet megegyezik, így közülük az egyik elhagyható. A megmaradt egyenleteket részletesen kiírva azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} -10n_x - 10n_z &= 0 \\ -5n_y &= 0. \end{aligned}$$

A második egyenletből $n_y = 0$ adódik. Az első egyenletből azt kapjuk, hogy $n_x = -n_z$. Legyen $n_z = t$, ahol $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tetszőleges. Ekkor

$n_x = -t$. Az n vektornak egységvektornak kell lenni, így teljesülnie kell, hogy

$$\sqrt{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2} = 1,$$

amiből azt kapjuk, hogy

$$\sqrt{(-t)^2 + t^2} = 1 \qquad \Rightarrow \qquad t = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Tehát a σ_2 főfeszültséghez tartozó főirány:

$$n_2 = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}.$$

A $\sigma_3 = -5\,[\mathrm{MPa}]$ értékű főfeszültség esetén az alábbi lineáris egyenletrendszerhez jutunk:

$$\begin{pmatrix} 10 & 0 & -10 \\ 0 & 25 & 0 \\ -10 & 0 & 10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Az első és harmadik egyenlet megegyezik, így közülük az egyik elhagyható. A megmaradt egyenleteket részletesen kiírva azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} 10n_x - 10n_z &= 0 \\ 25n_y &= 0. \end{aligned}$$

Az utolsó egyenletből $n_y = 0$ adódik. Az első egyenletből azt kapjuk, hogy $n_x = n_z$. Legyen például $n_x = t$, ahol $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tetszőleges. Ezt az első vagy második egyenletbe behelyettesítve azt kapjuk, hogy $n_z = t$. Annak is teljesülni kell továbbá, hogy az n vektornak egységvektornak kell lenni, így fenn áll a

$$\sqrt{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2} = 1,$$

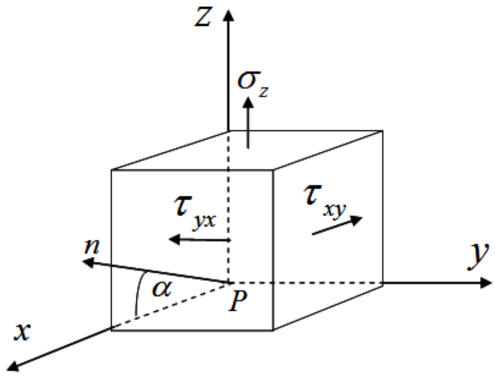
összefüggés, azaz

$$\sqrt{t^2 + t^2} = 1 \qquad \Rightarrow \qquad t = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Tehát a σ_3 főfeszültséghez tartozó főirány:

$$n_3 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}.$$

17.3. **Feladat.** Egy szerkezet valamely P pontjához tartozó feszültségállapotot az ábrán látható elemi hasábon bejelölt feszültségi adatok jellemzik.



Az ábrán szereplő adatok az alábbiak:

$$\sigma_z = 45\,[\text{MPa}];\ \tau_{xy} = \tau_{yx} = -30\,[\text{MPa}];\ \alpha = 30°.$$

Az n vektor az xz-síkban van.

a) Adjuk meg az ábrán bejelölt n normális egységvektor koordinátáit!
b) Írjuk fel a feszültségi mátrixot a P pontban!
c) Határozzuk meg az n vektor által irányított felületelemhez tartozó ρ_n feszültségvektort!
d) Határozzuk meg az n vektor által irányított felületelemhez tartozó normálfeszültség nagyságát!
e) Határozzuk meg az n vektor által irányított felületelemhez tartozó csúsztatófeszültségek nagyságát!
f) Határozzuk meg a főfeszültségek nagyságát!

Megoldás:

a) A normális egységvektor koordinátái:

$$n_x = \cos\alpha = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2};$$
$$n_z = \sin\alpha = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}.$$

Mivel $n_y = 0$, így a keresett normális egységvektor:

$$n = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 \\ 0,5 \end{pmatrix}.$$

b) A feszültségi mátrix a P pontban:

$$T = \begin{pmatrix} 0 & -30 & 0 \\ -30 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 45 \end{pmatrix} [\mathrm{MPa}].$$

c) Az n vektor által irányított felületelemhez tartozó ρ_n feszültségvektor:

$$\rho_n = T \cdot n = \begin{pmatrix} 0 & -30 & 0 \\ -30 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 45 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 \\ 0,5 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 0 \\ -15 \cdot \sqrt{3} \\ 22,5 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0 \\ -25,98 \\ 22,5 \end{pmatrix} [\mathrm{MPa}].$$

d) A normálfeszültség nagysága:

$$\sigma_n \approx 11,25\,[\mathrm{MPa}].$$

e) A csúszatófeszültség nagysága:

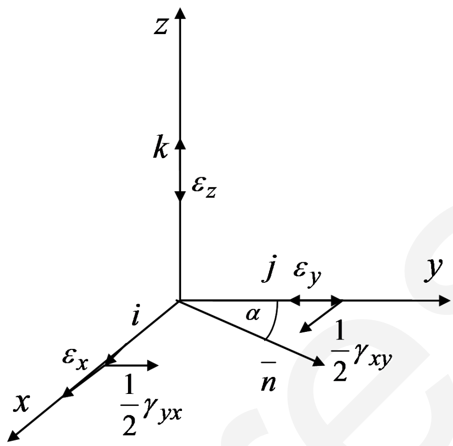
$$\tau_n \approx 32,48\,[\mathrm{MPa}].$$

f) A főfeszültségek a feszültségi mátrix sajátértékei:

$$\sigma_1 = 45\,[\mathrm{MPa}];\ \sigma_2 = 30\,[\mathrm{MPa}];\ \sigma_3 = -30\,[\mathrm{MPa}].$$

18. Alakváltozási mátrix

18.1. **Feladat.** Egy acélszerkezet valamely P pontjához tartozó alakváltozási állapotot az alábbi ábra szemlélteti:



Az ábrán szereplő adatok az alábbiak:

$$\varepsilon_x = 2,58 \cdot 10^{-4}; \quad \varepsilon_y = -2,62 \cdot 10^{-4}; \quad \varepsilon_z = -0,954 \cdot 10^{-4};$$

$$\gamma_{xy} = 3,9 \cdot 10^{-4}; \quad \alpha = 30^\circ; \quad Y = 2 \cdot 10^{11}\,[\mathrm{Pa}]; \quad \nu = 0,3.$$

a) Adjuk meg az y tengelyhez α szöggel hajló, yz síkban fekvő n egységvektor koordinátáit!
b) Írjuk fel az alakváltozási mátrixot a P pontban!
c) Adjuk meg az n irányhoz tartozó alakváltozási vektort!
d) Határozzuk meg az n irányú α_n fajlagos nyúlást!
e) Adjuk meg az i és j egységvektorok egymás felé fordulásának szögét!
f) Határozzuk meg a főnyúlások nagyságát!
g) Adjuk meg az alakváltozási főirányokat!
h) Számoljuk ki a csúsztató rugalmassági modulus értékét!
i) Adjuk meg a feszültségi mátrixot a P pontban!

Megoldás:

a) Mivel az egységvektor az yz síkban fekszik, ezért $n_x = 0$. A keresett vektor második koordinátája:

$$n_y = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

A keresett vektor harmadik koordinátája:

$$n_z = -\sin 30^\circ = -0,5.$$

Tehát a keresett egységvektor:

$$n = \begin{pmatrix} 0 \\ \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ -0,5 \end{pmatrix}.$$

b) Az alakváltozási mátrix a P pontban:

$$A = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & \dfrac{1}{2}\cdot\gamma_{xy} & \dfrac{1}{2}\cdot\gamma_{xz} \\ \dfrac{1}{2}\cdot\gamma_{yx} & \varepsilon_y & \dfrac{1}{2}\cdot\gamma_{yz} \\ \dfrac{1}{2}\cdot\gamma_{zx} & \dfrac{1}{2}\cdot\gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2,58 & 1,95 & 0 \\ 1,95 & -2,62 & 0 \\ 0 & 0 & -0,95 \end{pmatrix} \cdot 10^{-4}.$$

c) Az n irányhoz tartozó alakváltozási vektor:

$$\alpha_n = A \cdot n = \begin{pmatrix} 2,58 & 1,95 & 0 \\ 1,95 & -2,62 & 0 \\ 0 & 0 & -0,95 \end{pmatrix} \cdot 10^{-4} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ -0,5 \end{pmatrix} \approx$$

$$\approx \begin{pmatrix} 1,69 \\ -2,27 \\ 0,48 \end{pmatrix} \cdot 10^{-4}.$$

d) A fajlagos nyúlás értéke:

$$\varepsilon_n = n \bullet \alpha_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -0,5 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1,69 \\ -2,27 \\ -0,48 \end{pmatrix} \cdot 10^{-4} \approx -1,73 \cdot 10^{-4}.$$

e) Az i és j egységvektorok egymás felé fordulásának szöge:

$$\frac{1}{2}\cdot\gamma_{yx}=\frac{1}{2}\cdot\gamma_{xy}=j^T\cdot A\cdot i=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\end{pmatrix}\cdot$$
$$\cdot\begin{pmatrix}2,58 & 1,95 & 0\\ 1,95 & -2,62 & 0\\ 0 & 0 & -0,95\end{pmatrix}\cdot 10^{-4}\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=$$
$$=1,95\cdot 10^{-4}.$$

f) A főnyúlások az alakváltozási mátrix sajátértékei, amelyeket az

$$|A-\varepsilon\cdot E|=0$$

karakterisztikus egyenlet megoldásával kapunk meg. A karakterisztikus polinom:

$$|A-\varepsilon\cdot E|=$$
$$=\det\left[\begin{pmatrix}2,58 & 1,95 & 0\\ 1,95 & -2,62 & 0\\ 0 & 0 & -0,95\end{pmatrix}\cdot 10^{-4}-\begin{pmatrix}\varepsilon & 0 & 0\\ 0 & \varepsilon & 0\\ 0 & 0 & \varepsilon\end{pmatrix}\right]=$$
$$=\det\begin{pmatrix}2,58\cdot 10^{-4}-\varepsilon & 1,95\cdot 10^{-4} & 0\\ 1,95\cdot 10^{-4} & -2,62\cdot 10^{-4}-\varepsilon & 0\\ 0 & 0 & -0,95\cdot 10^{-4}-\varepsilon\end{pmatrix}.$$

A kapott determinánst például a harmadik sora szerint kifejtve azt kapjuk, hogy

$$(-0,95\cdot 10^{-4}-\varepsilon)\cdot(\varepsilon^2-0,04\cdot 10^{-4}\cdot\varepsilon-10,56\cdot 10^{-8}).$$

A megoldandó egyenlet tehát:

$$(-0,95\cdot 10^{-4}-\varepsilon)\cdot(\varepsilon^2-0,04\cdot 10^{-4}\cdot\varepsilon-10,56\cdot 10^{-8})=0.$$

Egy szorzat csak akkor lehet zérus, ha valamelyik tényezője zérus, így a sajátértékek

$$\varepsilon_1\approx\ \ 3,23\cdot 10^{-4}$$
$$\varepsilon_2\approx -0,95\cdot 10^{-4}$$
$$\varepsilon_3\approx -3,27\cdot 10^{-4}.$$

g) Az egyes főnyúlásokhoz tartozó alakváltozási főirányokat az

$$(A-\varepsilon_i\cdot E)\cdot n=0\qquad (i=1,2,3)$$

homogén lineáris egyenletrendszer megoldásaként kapjuk. Behelyettesítve az $\varepsilon_1 = 3,23 \cdot 10^{-4}$ értéket az

$$\begin{pmatrix} -0,65 & 1,95 & 0 \\ 1,95 & -5,85 & 0 \\ 0 & 0 & -2,28 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

egyenletrendszerhez jutunk. Az egyenleteket részletesen kiírva azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} -0,65n_x + 1,95n_y &= 0 \\ 1,95n_x - 5,85n_y &= 0 \\ -2,28n_z &= 0 \end{aligned}$$

Az utolsó egyenletből $n_z = 0$ adódik. Az első és második egyenletek ekvivalensek egymással, így az egyik egyenlet elhagyható. Az n_x és n_y ismeretlenek között az $n_x = 3n_y$ összefüggést kapjuk. A jelölések egyszerűsítése miatt legyen például $n_y = t$, ahol $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tetszőleges. Ekkor $n_x = 3t$. Az n vektornak egységvektornak kell lenni, így teljesülnie kell, hogy

$$\sqrt{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2} = 1,$$

azaz

$$\sqrt{9t^2 + t^2} = 1 \qquad \Rightarrow \qquad \sqrt{10} \cdot t = 1 \qquad \Rightarrow \qquad t = \frac{1}{\sqrt{10}}.$$

Tehát a ε_1 főnyúláshoz tartozó alakváltozási főirány

$$n_1 = \begin{pmatrix} \dfrac{3}{\sqrt{10}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{10}} \\ 0 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0,95 \\ 0,32 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Az $\varepsilon_2 = -0,95 \cdot 10^{-4}$ értékű főnyúlás esetén az alábbi lineáris egyenletrendszerhez jutunk:

$$\begin{pmatrix} 3,53 & 1,95 & 0 \\ 1,95 & -1,67 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Az egyenleteket részletesen kiírva azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} 3,53n_x + 1,95n_y &= 0 \\ 1,95n_x - 1,67n_y &= 0 \end{aligned}$$

Ekkor az n_z ismeretlenre nem kaptunk semmilyen „megkötést", így az tetszőleges zérustól különböző értékét felvehet, azaz legyen $n_z = t$, ahol $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tetszőleges. Továbbá $n_x = 0$ és $n_y = 0$. Az n vektornak egységvektornak kell lenni, így teljesülnie kell, hogy

$$\sqrt{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2} = 1,$$

azaz $t = 1$. Tehát a ε_2 főfeszültséghez tartozó főirány:

$$n_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

A $\varepsilon_3 = -3,27 \cdot 10^{-4}$ értékű főnyúlás esetén az alábbi lineáris egyenletrendszerhez jutunk:

$$\begin{pmatrix} 5,85 & 1,95 & 0 \\ 1,95 & 0,65 & 0 \\ 0 & 0 & 4,22 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Az egyenleteket részletesen kiírva azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} 5,85n_x + 1,95n_y &= 0 \\ 1,95n_x + 0,65n_y &= 0 \\ 4,22n_z &= 0 \end{aligned}$$

Az utolsó egyenletből $n_z = 0$ adódik. Az első és második egyenletek ekvivalensek egymással, így közülük az egyik egyenlet elhagyható. Az n_x és n_y ismeretlenek között az $n_y = -3n_x$ összefüggést kapjuk. Az egyszerűbb felírás kedvéért legyen például $n_x = t$, ahol $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tetszőleges. Ekkor $n_y = -3t$. Mivel n egységvektor, ezért

$$\sqrt{9t^2 + t^2} = 1.$$

Ebből meghatározhatjuk a t értékét:

$$\sqrt{10} \cdot t = 1 \qquad \Rightarrow \qquad t = \frac{1}{\sqrt{10}}.$$

Ezt felhasználva a ε_3 főfeszültséghez tartozó főirány

$$n_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{10}} \\ -\frac{3}{\sqrt{10}} \\ 0 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0,32 \\ -0,95 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

h) A csúsztató rugalmassági modulus értéke:

$$G = \frac{Y}{2\cdot(1+\nu)} = \frac{2\cdot 10^{11}}{2,6} \approx 0,77\cdot 10^{11}\ [\mathrm{Pa}].$$

i) A feszültségi mátrix és alakváltozási mátrix között az alábbi kapcsolat adható meg:

$$T = 2G\cdot\left(A + \frac{\nu}{1-2\nu}\cdot A_I\cdot E\right),$$

ahol az A_I paraméter értéke:

$$A_I = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = 0,91\cdot 10^{-4}.$$

A feszültségi mátrix a P pontban:

$$T = 2Y\cdot\left(A + \frac{\nu}{1-2\nu}\cdot A_I\cdot E\right).$$

Az adatok behelyettsítése után azt kapjuk, hogy

$$T = 1,54\cdot 10^{11}\cdot$$
$$\cdot\left[\begin{pmatrix} 2,58 & 1,95 & 0\\ 1,95 & -2,62 & 0\\ 0 & 0 & -0,95\end{pmatrix}\cdot 10^{-4} + 0,75\cdot 0,91\cdot 10^{-4}\cdot E\right]$$

Felhasználva, hogy E a 3×3-as egységmátrix azt kapjuk, hogy

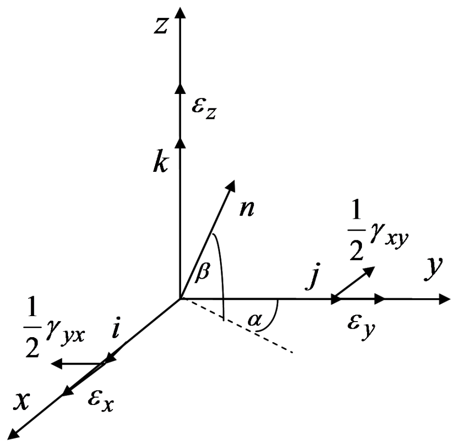
$$T = 1,54\cdot 10^{11}\cdot\left[\begin{pmatrix} 2,58 & 1,95 & 0\\ 1,95 & -2,62 & 0\\ 0 & 0 & -0,95\end{pmatrix}\cdot 10^{-4} + \right.$$
$$\left. + \, 0,6825\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\cdot 10^{-4}\right]$$

Elvégezve az elemi számolásokat

$$T = \begin{pmatrix} 3,2625 & 1,95 & 0\\ 1,95 & -1,9375 & 0\\ 0 & 0 & -0,2675\end{pmatrix}\cdot 1,54\cdot 10^{7} =$$
$$= \begin{pmatrix} 5,02425 & 3,003 & 0\\ 3,003 & -2,98375 & 0\\ 0 & 0 & -0,41195\end{pmatrix}\cdot 10^{7}.$$

adódik.

18.2. **Feladat.** Egy acélszerkezet valamely P pontjához tartozó alakváltozási állapotot az alábbi ábra szemlélteti:



Az ábrán szereplő adatok az alábbiak:

$$\varepsilon_x = 8,38 \cdot 10^{-5}; \quad \varepsilon_y = 1,88 \cdot 10^{-5}; \quad \varepsilon_z = 0,25 \cdot 10^{-5};$$
$$\gamma_{xy} = -19,5 \cdot 10^{-5}; \quad \alpha = 30^\circ; \quad \beta = 60^\circ; \quad E = 2 \cdot 10^{11} \text{ [Pa]};$$
$$\nu = 0,3.$$

a) Adjuk meg az ábrán látható n egységvektor koordinátáit!

b) Írjuk fel az alakváltozási mátrixot a P pontban!

c) Adjuk meg az n irányhoz tartozó alakváltozási vektort!

d) Határozzuk meg az n irányú α_n fajlagos nyúlást!

e) Adjuk meg az i és j egységvektorok egymás felé fordulásának szögét!

Megoldás:

a) A normális egységvektor:

$$n \approx \begin{pmatrix} 0,25 \\ 0,43 \\ 0,87 \end{pmatrix}.$$

b) Az alakváltozási mátrix a P pontban:

$$A = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8,38 & -9,75 & 0 \\ -9,75 & 1,88 & 0 \\ 0 & 0 & 0,25 \end{pmatrix} \cdot 10^{-5}.$$

c) Az n irányhoz tartozó alakváltozási vektor:

$$\alpha_n = A \cdot n = \begin{pmatrix} 8,38 & -9,75 & 0 \\ -9,75 & 1,88 & 0 \\ 0 & 0 & 0,25 \end{pmatrix} \cdot 10^{-5} \cdot \begin{pmatrix} 0,25 \\ 0,43 \\ 0,87 \end{pmatrix} \approx$$

$$\approx \begin{pmatrix} -2,1 \\ -1,63 \\ 0,22 \end{pmatrix} \cdot 10^{-5}.$$

d) A fajlagos nyúlás értéke

$$\varepsilon_n = n \bullet \alpha_n = \begin{pmatrix} 0,25 \\ 0,43 \\ 0,87 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} -2,1 \\ -1,63 \\ 0,22 \end{pmatrix} \cdot 10^{-5} \approx -1,03 \cdot 10^{-5}.$$

e) Az i és j egységvektorok egymás felé fordulásának szöge:

$$\frac{1}{2} \cdot \gamma_{yx} = \frac{1}{2} \cdot \gamma_{xy} = j^T \cdot A \cdot i =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8,38 & -9,75 & 0 \\ -9,75 & 1,88 & 0 \\ 0 & 0 & 0,25 \end{pmatrix} \cdot 10^{-5} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$= -9,75 \cdot 10^{-5}.$$

DUPress

19. Kvadratikus függvények

19.1. **Feladat.** Írjuk fel a

$$Q(x_1; x_2) = 5x_1^2 + 8x_1x_2 - 4x_2^2$$

kvadratikus függvény mátrixát!

Megoldás:

A kvadratikus függvény mátrixa:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}.$$

19.2. **Feladat.** Írjuk fel a

$$Q(x_1; x_2; x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 8x_1x_3$$

kvadratikus függvény mátrixát!

Megoldás:

A kvadratikus függvény mátrixa:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

19.3. **Feladat.** Írjuk fel a

$$Q(x_1; x_2; x_3; x_4) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + 2x_1x_2 + 4x_2x_4$$

kvadratikus függvény mátrixát!

Megoldás:

A kvadratikus függvény mátrixa:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

19.4. **Feladat.** Tekintsük a

$$Q(x_1; x_2) = 2x_1^2 + 4x_1x_2 - x_2^2$$

kvadratikus függvényt!

a) Írjuk fel a kvadratikus függvény mátrixát!
b) Írjuk fel a kvadratikus függvényt $x^T \cdot A \cdot x$ alakban!
c) Számoljuk ki a kvadratikus függvény mátrixának sajátértékeit!
d) Határozzuk meg a kvadratikus függvény bal felső sarok minor determinánsait!
e) Határozzuk meg a Q mátrixának definitségét kétféleképpen: egyrészt a sajátértékek segítségével, másrészt pedig a bal felső sarok minor determinánsokból következtessünk a mátrix definitségére!

Megoldás:

a) A kvadratikus függvény mátrixa:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

b) Vezessük be az

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

jelölést. Ekkor

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 2x_1^2 + 4x_1x_2 - x_2^2.$$

c) A sajátértékek a karakterisztikus egyenlet gyökei, azaz a

$$\det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 2 \\ 2 & -1-\lambda \end{pmatrix} = 0$$

egyenlet megoldásai. Ha kiszámoljuk a determinánst, akkor azt kapjuk, hogy

$$(2-\lambda) \cdot (-1-\lambda) - 4 = 0.$$

A zárójelek felbontása és az összevonás után

$$\lambda^2 - \lambda - 6 = 0$$

adódik. A másodfokú egyenlet megoldóképletét alkalmazva azt kapjuk, hogy

$$\lambda_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2},$$

amiből $\lambda_1 = 3$, illetve $\lambda_2 = -2$ adódik.

d) A bal felső sarok minor determinánsok:

$$D_1 = \det(2) = 2,$$

illetve

$$D_2 = \det\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = -2 - 4 = -6.$$

e) Mivel a mátrix bal felső sarok determinánsaira azt kaptuk, hogy D_1 pozitív és D_2 negatív, ezért a mátrix indefinit.
Mivel az A mátrixnak pozitív és negatív sajátértéke is van, ezért a mátrix indefinit.

19.5. **Feladat.** Tekinstük a

$$Q(x_1; x_2) = x_1^2 + 4x_1x_2 + x_2^2$$

kvadratikus függvényt!

a) Írjuk fel a kvadratikus függvény mátrixát!

b) Írjuk fel a kvadratikus függvényt $x^T \cdot A \cdot x$ alakban!

c) Számoljuk ki a kvadratikus függvény mátrixának sajátértékeit!

d) Határozzuk meg a kvadratikus függvény bal felső sarok minor determinánsait!

e) Határozzuk meg a Q mátrixának definitségét kétféleképpen: egyrészt a sajátértékek segítségével, másrészt pedig a bal felső sarok minor determinánsokból következtessünk a mátrix definitségére!

<u>**Megoldás**</u>:

a) A kvadratikus függvény mátrixa:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

b) Vezessük be az

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

jelölést. Ekkor

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_1^2 + 4x_1x_2 + x_2^2.$$

c) A sajátértékek a karakterisztikus egyenlet gyökei, azaz a

$$\det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{pmatrix} = 0$$

egyenlet megoldásai. Ha kiszámoljuk a determinánst, akkor azt kapjuk, hogy

$$(1-\lambda)\cdot(1-\lambda) - 4 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad (1-\lambda)^2 = 4,$$

amiből $\lambda_1 = -1$, illetve $\lambda_2 = 3$ adódik.

d) A bal felső sarok minor determinánsok:

$$D_1 = \det(1) = 1,$$

illetve

$$D_2 = \det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = 1 - 4 = -3.$$

e) Mivel a mátrix bal felső sarok determinánsaira azt kaptuk, hogy D_1 pozitív és D_2 negatív, ezért a mátrix indefinit.
Mivel az A mátrixnak pozitív és negatív sajátértéke is van, ezért a mátrix indefinit.

19.6. **Feladat.** Tekintsük a

$$Q(x_1; x_2; x_3) = 9x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 + 6x_1x_2$$

kvadratikus függvényt!

a) Írjuk fel a kvadratikus függvény mátrixát!

b) Írjuk fel a kvadratikus függvényt $x^T \cdot A \cdot x$ alakban!

c) Számoljuk ki a kvadratikus függvény mátrixának sajátértékeit!

d) Határozzuk meg a kvadratikus függvény bal felső sarok minor determinánsait!

e) Határozzuk meg a Q mátrixának definitségét kétféleképpen: egyrészt a sajátértékek segítségével, másrészt pedig a bal felső sarok minor determinánsokból következtessünk a mátrix definitségére!

Megoldás:

a) A kvadratikus függvény mátrixa:

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

b) Vezessük be az

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

jelölést. Ekkor

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 9 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 9x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 + 6x_1x_2.$$

c) A sajátértékek a karakterisztikus egyenlet gyökei, azaz a

$$\det \begin{pmatrix} 9-\lambda & 3 & 0 \\ 3 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} = 0$$

egyenlet megoldásai. Ha kiszámoljuk a determinánst, akkor azt kapjuk, hogy

$$(1-\lambda) \cdot \big((9-\lambda) \cdot (2-\lambda) - 9\big) = 0.$$

Ekkor

$$1 - \lambda = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \lambda_1 = 1.$$

A $(9-\lambda) \cdot (2-\lambda) - 9 = 0$ egyenletből a zárójelek felbontása és összevonás után

$$\lambda^2 - 11\lambda + 9 = 0$$

adódik. A másodfokú egyenlet megoldóképletével azt kapjuk, hogy

$$\lambda_{2,3} = \frac{11 \pm \sqrt{121 - 36}}{2},$$

így $\lambda_2 = \frac{11+\sqrt{85}}{2}$, illetve $\lambda_3 = \frac{11-\sqrt{85}}{2}$.

d) Az A mátrix első bal felső sarok minor determinánsa:

$$D_1 = \det(9) = 9,$$

a második sarok minor determinánsa:

$$D_2 = \det \begin{pmatrix} 9 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = 18 - 9 = 9,$$

a harmadik sarok minor determinánsa:

$$\det \begin{pmatrix} 9 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 18 - 9 = 9.$$

DUPress

e) Mivel a kvadratikus függvény mátrixának minden bal felső sarok determinánsa pozitív, ezért a mátrix és így a kvadratikus függvény pozitív definit. Mivel az A mátrix minden sajátértéke pozitív, ezért a mátrix pozitív definit.

19.7. **Feladat.** Tekinstük a

$$Q(x_1; x_2; x_3) = -2x_1^2 - 9x_2^2 - 2x_3^2 + 8x_1x_2$$

kvadratikus függvényt!

a) Írjuk fel a kvadratikus függvény mátrixát!
b) Írjuk fel a kvadratikus függvényt $x^T \cdot A \cdot x$ alakban!
c) Számoljuk ki a kvadratikus függvény mátrixának sajátértékeit!
d) Határozzuk meg a kvadratikus függvény bal felső sarok minor determinánsait!
e) Határozzuk meg a Q mátrixának definitségét kétféleképpen: egyrészt a sajátértékek segítségével, másrészt pedig a bal felső sarok minor determinánsokból következtessünk a mátrix definitségére!

Megoldás:

a) A kvadratikus függvény mátrixa:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 0 \\ 4 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

b) Vezessük be az

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

jelölést. Ekkor

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 4 & 0 \\ 4 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} =$$
$$= -2x_1^2 - 9x_2^2 - 2x_3^2 + 8x_1x_2.$$

c) A sajátértékek a karakterisztikus egyenlet gyökei, azaz a

$$\det \begin{pmatrix} -2-\lambda & 4 & 0 \\ 4 & -9-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -2-\lambda \end{pmatrix} = 0$$

egyenlet megoldásai. Ha kiszámoljuk a determinánst, akkor azt kapjuk, hogy

$$(-2-\lambda)\cdot\big((-2-\lambda)\cdot(-9-\lambda)-16\big)=0.$$

Ekkor

$$-2-\lambda=0 \qquad \Rightarrow \qquad \lambda_1=-2.$$

A $(-2-\lambda)\cdot(-9-\lambda)-16=0$ egyenletből a zárójelek felbontása és összevonás után

$$\lambda^2+11\lambda+2=0$$

adódik. A másodfokú egyenlet megoldóképletével azt kapjuk, hogy

$$\lambda_{1,2}=\frac{-11\pm\sqrt{121-8}}{2},$$

így $\lambda_2=\frac{-11+\sqrt{113}}{2}$, illetve $\lambda_2=\frac{-11-\sqrt{113}}{2}$.

d) Az A mátrix első bal felső sarok minor determinánsa:

$$D_1=\det(-2)=-2,$$

a második sarok minor determinánsa:

$$D_2=\begin{pmatrix}-2 & 4\\ 4 & -9\end{pmatrix}=18-16=2,$$

a harmadik sarok minor determinánsa:

$$D_3=\det\begin{pmatrix}-2 & 4 & 0\\ 4 & -9 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{pmatrix}=-4.$$

e) Mivel a kvadratikus függvény mátrixa bal felső sarok determinánsai pozitív, negatív, pozitív előjelűek, ezért a mátrix és így a kvadratikus függvény negatív definit.
Mivel az A mátrix minden sajátértéke negatív, ezért a mátrix negatív definit.

19.8. **Feladat.** Hozzuk kanonikus alakra a

$$Q(x_1;x_2)=2x_1^2+6x_1x_2+2x_2^2$$

kvadratikus függvényt!

Megoldás:

A kvadratikus függvény mátrixa:

$$A=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 3 & 2\end{pmatrix}.$$

Vezessük be az

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

jelölést. Ekkor

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 2x_1^2 + 6x_1x_2 + 2x_2^2.$$

Az A mátrix sajátértékei a karakterisztikus egyenletének gyökei, azaz a

$$\det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 3 & 2-\lambda \end{pmatrix} = 0$$

egyenlet megoldásai. Ha kiszámoljuk a determinánst, akkor azt kapjuk, hogy

$$(2-\lambda)^2 - 9 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad (2-\lambda)^2 = 9,$$

amiből $\lambda_1 = -1$, illetve $\lambda_2 = 5$ adódik.
A $\lambda_1 = -1$ sajátértékhez tartozó sajátvektorok meghatározásához első lépésben felírjuk az $A - \lambda E_2$ mátrixot:

$$A + E_2 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

A sajátvektorokat a

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

egyenletrendszer megoldása adja. Vegyük észre, hogy az alapmátrix második sora megegyezik az első sorral, így az elhagyható, mert nincs új információtartalma. Tehát a megoldandó lineáris egyenletrendszer

$$3x_1 + 3x_2 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x_1 + x_2 = 0.$$

Az egyik ismeretlent szabad paraméternek választhatjuk. Legyen

$$x_2 = t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

A $t = 0$ értéket azért zárjuk ki a megoldások közül, mert akkor $x_2 = 0$ és $x_1 = 0$ lenne, ami azt jelentené, hogy a sajátvektor zérusvektor, amit definíció szerint nem engedünk meg. Tehát a $\lambda_1 = -1$ sajátértékhez tartozó összes sajátvektorok halmaza, azaz a sajátaltér:

$$S_{\lambda_1} = \left\{ \begin{pmatrix} -t \\ t \end{pmatrix} \middle| \, t \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \right\} = \left\{ t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \, t \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \right\}.$$

A $\lambda_1 = -1$ sajátértékhez tartozó egységnyi hosszúságú sajátvektor:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

A $\lambda_2 = 5$ sajátértékhez tartozó sajátvektorok meghatározásához első lépésben felírjuk az $A - \lambda E_2$ mátrixot:

$$A - 5E_2 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}.$$

A sajátértékeket a

$$\begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

egyenletrendszer megoldása adja. Vegyük észre, hogy az alapmátrix második sora megegyezik az első sor -1-szeresével, így az elhagyható, mert nincs új információtartalma. Tehát a megoldandó lineáris egyenletrendszer

$$-3x_1 + 3x_2 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x_1 + x_2 = 0.$$

Az egyik ismeretlent szabad paraméternek választhatjuk. Legyen

$$x_2 = t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

A $t = 0$ értéket azért zárjuk ki a megoldások közül, mert akkor $x_2 = 0$ és $x_1 = 0$ lenne, ami azt jelentené, hogy a sajátvektor zérusvektor, amit definíció szerint nem engedünk meg. Tehát a $\lambda_2 = 5$ sajátértékhez tartozó összes sajátvektorok halmaza, azaz a sajátaltér:

$$S_{\lambda_2} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \, t \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \right\} = \left\{ t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \, t \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \right\}.$$

A $\lambda_2 = 5$ sajátértékhez tartozó egységnyi hosszúságú sajátvektor:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Az A mátrix diagonalizálható, mert minden sajátértéknek az algebrai és geometriai multiplicitása megegyezik. A diagonálmátrix:

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix},$$

a diagonalizáló mátrix:

$$S = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Az S mátrix ortogonális, mert

$$S^T = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

így

$$S^T \cdot S = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E_2.$$

A kvadratikus forma kanonikus alakja az

$$x = S \cdot y$$

transzformáció után:

$$y^T \cdot D \cdot y = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = -y_1^2 + 5y_2^2.$$

20. Másodrendű görbék

20.1. **Feladat.** Ábrázoljuk a

$$3x_1^2 - 4x_1x_2 + 3x_2^2 = 1$$

egyenletű másodrendű görbét!

Megoldás:

A

$$Q(x_1; x_2) = 3x_1^2 - 4x_1x_2 + 3x_2^2$$

kvadratikus függvény mátrixa:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Mivel az A mátrix determinánsa

$$\det A = \det \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = 9 - 4 = 5 > 0,$$

ezért a görbe ellipszis lesz.
Vezessük be az

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

jelölést. Ekkor

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 3x_1^2 - 4x_1x_2 + 3x_2^2.$$

Az A mátrix sajátértékei a karakterisztikus egyenletének gyökei, azaz a

$$\det \begin{pmatrix} 3-\lambda & -2 \\ -2 & 3-\lambda \end{pmatrix} = 0$$

egyenlet megoldásai. Ha kiszámoljuk a determinánst, akkor azt kapjuk, hogy

$$(3-\lambda)^2 - 4 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad (3-\lambda)^2 = 4,$$

amiből $\lambda_1 = 1$, illetve $\lambda_2 = 5$ adódik.
A $\lambda_1 = 1$ sajátértékhez tartozó sajátvektorok meghatározásához első lépésben felírjuk az $A - \lambda E_2$ mátrixot:

$$A - E_2 = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

A sajátvektorokat a

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

egyenletrendszer megoldása adja. Vegyük észre, hogy az alapmátrix második sora megegyezik az első sor -1-szeresével, így az elhagyható, mert nincs új információtartalma. Tehát a megoldandó lineáris egyenletrendszer

$$2x_1 - 2x_2 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x_1 - x_2 = 0.$$

Az egyik ismeretlent szabad paraméternek választhatjuk. Legyen

$$x_2 = t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

A $t = 0$ értéket azért zárjuk ki a megoldások közül, mert akkor a sajátvektor zérusvektor lenne, amit definíció szerint nem engedünk meg. Tehát a $\lambda_1 = 1$ sajátértékhez tartozó összes sajátvektorok halmaza, azaz a sajátaltér:

$$S_{\lambda_1} = \left\{ \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix} \middle| \, t \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \right\} = \left\{ t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \, t \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \right\}.$$

A $\lambda_1 = 1$ sajátértélhez tartozó egységnyi hosszúságú sajátvektor:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

A $\lambda_2 = 5$ sajátértékhez tartozó sajátvektorok meghatározásához első lépésben felírjuk az $A - \lambda E_2$ mátrixot:

$$A - 5E_2 = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

A sajátvektorokat a

$$\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

egyenletrendszer megoldása adja. Vegyük észre, hogy az alapmátrix második sora megegyezik az első sorral, így az elhagyható, mert nincs új információtartalma. Tehát a megoldandó lineáris egyenletrendszer

$$-2x_1 - 2x_2 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x_1 + x_2 = 0.$$

Az egyik ismeretlent szabad paraméternek választhatjuk. Legyen

$$x_2 = t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

DUPress

A $t = 0$ értéket azért zárjuk ki a megoldások közül, mert akkor a sajátvektor zérusvektor lenne, amit definíció szerint nem engedünk meg. Tehát a $\lambda_2 = 5$ sajátértékhez tartozó összes sajátvektorok halmaza, azaz a sajátaltér:

$$S_{\lambda_2} = \left\{ \begin{pmatrix} -t \\ t \end{pmatrix} \,\middle|\, t \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \right\} = \left\{ t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \,\middle|\, t \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \right\}.$$

A $\lambda_2 = 5$ sajátértélhez tartozó egységnyi hosszúságú sajátvektor:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Az A mátrix diagonalizálható, mert minden sajátértéknek az algebrai és geometriai multiplicitása megegyezik. A diagonálmátrix:

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix},$$

a diagonalizáló mátrix:

$$S = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Az S mátrix ortogonális, mert

$$S^T = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},$$

így

$$S^T \cdot S = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E_2.$$

A kvadratikus forma kanonikus alakja az

$$x = S \cdot y$$

transzformáció után:

$$y^T \cdot D \cdot y = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = y_1^2 + 5y_2^2.$$

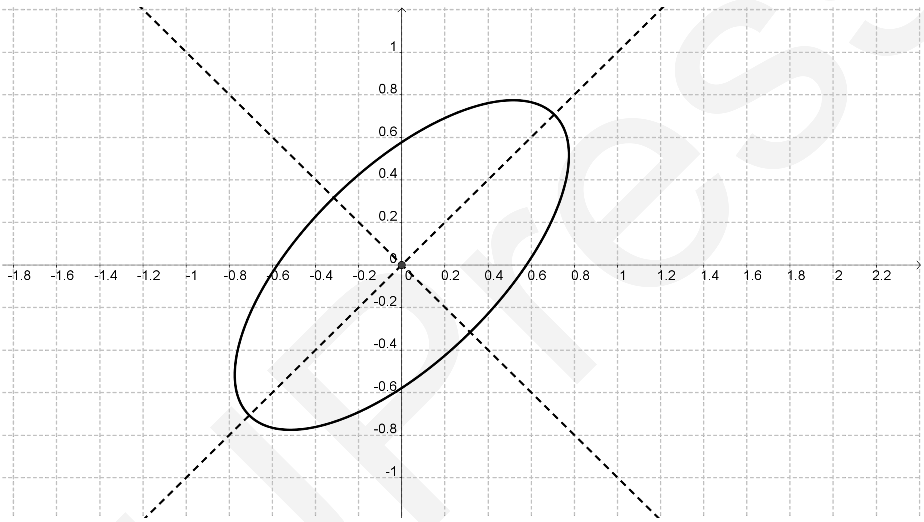
Tehát a másodrendű görbe kanonikus alakja

$$y_1^2 + 5y_2^2 = 1.$$

Átalakítva azt kapjuk, hogy

$$y_1^2 + \frac{y_2^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2} = 1.$$

Azt kaptuk tehát, hogy az ellipszis kis féltengelyének hossza $\frac{1}{\sqrt{5}}$, a nagy féltengelyének hossza 1. Az ellipszis középpontja az origó és a tengelyeinek irányvektorai a sajátvektorokból olvashatók le, így $(1;1)$ és $(-1;1)$. Tehát az ellipszis:



20.2. **Feladat.** Ábrázoljuk a

$$x_1^2 + 8x_1x_2 + x_2^2 = 1$$

egyenletű másodrendű görbét!

<u>**Megoldás**</u>:

A

$$Q(x_1;x_2) = x_1^2 + 8x_1x_2 + x_2^2$$

kvadratikus függvény mátrixa:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

DUPress

Mivel az A mátrix determinánsa:

$$\det A = \det \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} = 1 - 16 = -15 < 0,$$

ezért a görbe hiperbola lesz.
Vezessük be az

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

jelölést. Ekkor

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_1^2 + 8x_1x_2 + x_2^2.$$

Az A mátrix sajátértékei a karakterisztikus egyenletének gyökei, azaz a

$$\det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 4 \\ 4 & 1-\lambda \end{pmatrix} = 0$$

egyenlet megoldásai. Ha kiszámoljuk a determinánst, akkor azt kapjuk, hogy

$$(1-\lambda)^2 - 16 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad (1-\lambda)^2 = 16,$$

amiből $\lambda_1 = 5$, illetve $\lambda_2 = -3$ adódik.
A $\lambda_1 = 5$ sajátértékhez tartozó sajátvektorok meghatározásához első lépésben felírjuk az $A - \lambda E_2$ mátrixot:

$$A - 5E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}.$$

A sajátvektorokat a

$$\begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

egyenletrendszer megoldása adja. Vegyük észre, hogy az alapmátrix második sora megegyezik az első sor -1-szeresével, így az elhagyható, mert nincs új információtartalma. Tehát a megoldandó lineáris egyenletrendszer

$$-4x_1 + x_2 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x_1 - x_2 = 0.$$

Az egyik ismeretlent szabad paraméternek választhatjuk. Legyen

$$x_2 = t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

A $t = 0$ értéket azért zárjuk ki a megoldások közül, mert akkor a sajátvektor zérusvektor lenne, amit definíció szerint nem engedünk meg. Tehát a $\lambda_1 = 1$ sajátértékhez tartozó összes sajátvektorok halmaza, azaz a sajátaltér:

$$S_{\lambda_1} = \left\{ \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix} \middle| t \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \right\} = \left\{ t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| t \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \right\}.$$

A $\lambda_1 = 5$ sajátértélhez tartozó egységnyi hosszúságú sajátvektor:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

A $\lambda_2 = -3$ sajátértékhez tartozó sajátvektorok meghatározásához első lépésben felírjuk az $A - \lambda E_2$ mátrixot:

$$A + 3E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}.$$

A sajátvektorokat a

$$\begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

egyenletrendszer megoldása adja. Vegyük észre, hogy az alapmátrix második sora megegyezik az első sorral, így az elhagyható, mert nincs új információtartalma. Tehát a megoldandó lineáris egyenletrendszer

$$4x_1 + 4x_2 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x_1 + x_2 = 0.$$

Az egyik ismeretlent szabad paraméternek választhatjuk. Legyen

$$x_2 = t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

A $t = 0$ értéket azért zárjuk ki a megoldások közül, mert akkor a sajátvektor zérusvektor lenne, amit definíció szerint nem engedünk meg. Tehát a $\lambda_2 = -3$ sajátértékhez tartozó összes sajátvektorok halmaza, azaz a sajátaltér:

$$S_{\lambda_2} = \left\{ \begin{pmatrix} -t \\ t \end{pmatrix} \middle| t \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \right\} = \left\{ t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| t \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \right\}.$$

A $\lambda_2 = -3$ sajátértélhez tartozó egységnyi hosszúságú sajátvektor:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

DUPress

Az A mátrix diagonalizálható, mert minden sajátértéknek az algebrai és geometriai multiplicitása megegyezik. A diagonálmátrix:

$$D = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix},$$

a diagonalizáló mátrix:

$$S = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Az S mátrix ortogonális, mert

$$S^T = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},$$

így

$$S^T \cdot S = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E_2.$$

A kvadratikus forma kanonikus alakja az

$$x = S \cdot y$$

transzformáció után:

$$y^T \cdot D \cdot y = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = 5y_1^2 - 3y_2^2.$$

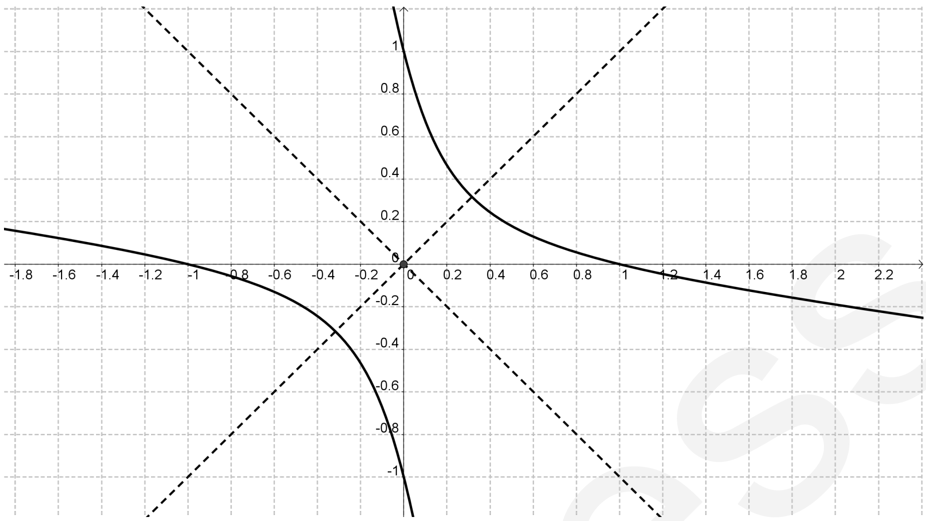
Tehát a másodrendű görbe kanonikus alakja

$$5y_1^2 - 3y_2^2 = 1.$$

Átalakítva azt kapjuk, hogy

$$\frac{y_1^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2} - \frac{y_2^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2} = 1.$$

A hiperbola középpontja az origó és a tengelyeinek irányvektorai a sajátvektorokból olvashatók le, így $(1;1)$ és $(-1;1)$. Tehát a hiperbola:



20.3. **Feladat.** Ábrázoljuk a

$$-8x_2^2 - 6x_1x_2 - 6x_1 + 2x_2 = 1$$

egyenletű másodrendű görbét!

Megoldás:

A

$$Q(x_1; x_2) = -8x_2^2 - 6x_1x_2$$

kvadratikus függvény mátrixa:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & -8 \end{pmatrix}.$$

Vezessük be az

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix};\ K = \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \end{pmatrix}$$

jelölést. Ekkor

$$\begin{aligned} & x^T \cdot A \cdot x + K^T \cdot x = \\ & = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \\ & = -8x_2^2 - 6x_1x_2. \end{aligned}$$

DUPress

Az A mátrix sajátértékei a karakterisztikus egyenletének gyökei, azaz a

$$\det \begin{pmatrix} -\lambda & -3 \\ -3 & -8-\lambda \end{pmatrix} = 0$$

egyenlet megoldásai. Ha kiszámoljuk a determinánst, akkor azt kapjuk, hogy

$$\lambda \cdot (-8-\lambda) - 9 = 0.$$

A zárójel felbontása utána a

$$\lambda^2 + 8\lambda - 9 = 0$$

másodfokú egyenlethez jutunk. A megoldóképlet alkalmazásával

$$\lambda_{1,2} = \frac{-8 \pm \sqrt{64+36}}{2} = \frac{-8 \pm 10}{2}$$

adódik, amiből azt kapjuk, hogy a sajátértékek $\lambda_1 = 1$, illetve $\lambda_2 = -9$.
A $\lambda_1 = 1$ sajátértékhez tartozó sajátvektorok meghatározásához első lépésben felírjuk az $A - \lambda E_2$ mátrixot:

$$A - 1E_2 = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & -8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -3 & -9 \end{pmatrix}.$$

A sajátvektorokat a

$$\begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -3 & -9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

egyenletrendszer megoldása adja. Vegyük észre, hogy az alapmátrix második sora megegyezik az első sor 3-szorosával, így az elhagyható, mert nincs új információtartalma. Tehát a megoldandó lineáris egyenletrendszer

$$-x_1 - 3x_2 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x_1 + 3x_2 = 0.$$

Az egyik ismeretlent szabad paraméternek választhatjuk. Legyen

$$x_2 = t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

A $t = 0$ értéket azért zárjuk ki a megoldások közül, mert akkor a sajátvektor zérusvektor lenne, amit definíció szerint nem engedünk meg. Tehát a $\lambda_1 = 1$ sajátértékhez tartozó összes sajátvektorok halmaza, azaz a sajátaltér:

$$S_{\lambda_1} = \left\{ \begin{pmatrix} -3t \\ t \end{pmatrix} \middle| \, t \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \right\} = \left\{ t \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \, t \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \right\}.$$

A $\lambda_1 = 1$ sajátértélhez tartozó egységnyi hosszúságú sajátvektor:

$$\frac{1}{\sqrt{10}} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

A $\lambda_2 = -9$ sajátértékhez tartozó sajátvektorok meghatározásához első lépésben felírjuk az $A - \lambda E_2$ mátrixot:

$$A + 9E_2 = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & -8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

A sajátvektorokat a

$$\begin{pmatrix} 9 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

egyenletrendszer megoldása adja. Vegyük észre, hogy az alapmátrix első sora megegyezik a második sor -3-szorosával, így az elhagyható, mert nincs új információtartalma. Tehát a megoldandó lineáris egyenletrendszer

$$-3x_1 + x_2 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x_2 = 3x_1.$$

Az egyik ismeretlent szabad paraméternek választhatjuk. Legyen

$$x_1 = t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

A $t = 0$ értéket azért zárjuk ki a megoldások közül, mert akkor a sajátvektor zérusvektor lenne, amit definíció szerint nem engedünk meg. Tehát a $\lambda_2 = -9$ sajátértékhez tartozó összes sajátvektorok halmaza, azaz a sajátaltér:

$$S_{\lambda_2} = \left\{ \begin{pmatrix} t \\ 3t \end{pmatrix} \middle| \, t \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \right\} = \left\{ t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \middle| \, t \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \right\}.$$

A $\lambda_2 = -9$ sajátértélhez tartozó egységnyi hosszúságú sajátvektor:

$$\frac{1}{\sqrt{10}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Az A mátrix diagonalizálható, mert minden sajátértéknek az algebrai és geometriai multiplicitása megegyezik. A diagonálmátrix:

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -9 \end{pmatrix},$$

a diagonalizáló mátrix:

$$S = \frac{1}{\sqrt{10}} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Az S mátrix ortogonális, mert

$$S^T = \frac{1}{\sqrt{10}} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix},$$

így

$$S^T \cdot S = \frac{1}{\sqrt{10}} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{10}} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{10} \cdot \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E_2.$$

A másodrendű görbe alakja az

$$x = S \cdot y$$

transzformáció után:

$$y^T \cdot D \cdot y + K \cdot S \cdot y = 1$$

A megfelelő adatok behelyettesítését követően

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix} -6 & 2 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{10}} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = 1.$$

adódik. Mivel

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = y_1^2 - 9y_2^2$$

és

$$\begin{pmatrix} -6 & 2 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{10}} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{10}} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 20 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{20}{\sqrt{10}} \cdot y_1 = 2\sqrt{10} y_1$$

miatt azt kapjuk, hogy a másodrendű görbe egyenlete:

$$y_1^2 - 9y_2^2 + 2\sqrt{10} y_1 = 1.$$

Ezt átalakítva

$$(y_1 + \sqrt{10})^2 - 10 - 9y_2^2 = 1$$

adódik. Vezessük be a $z_1 = y_1 + \sqrt{10}$ és a $z_2 = y_2$ jelölést. Ekkor a másodrendű görbe kanonikus alakja

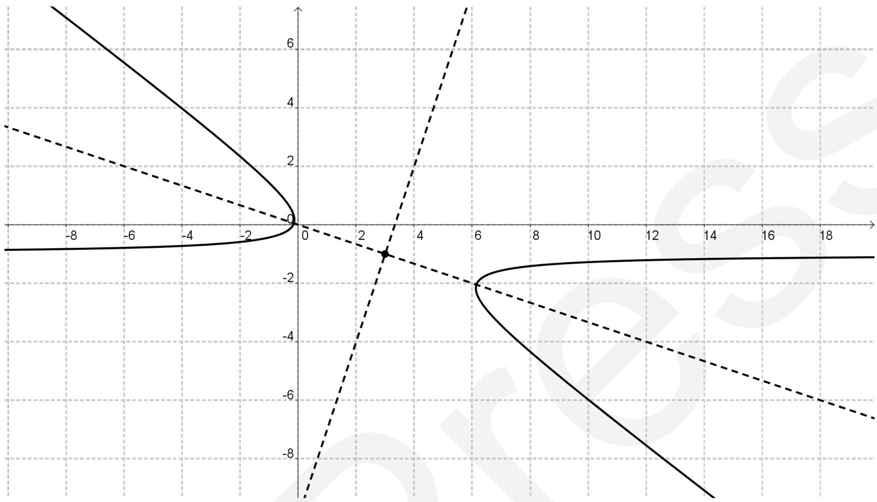
$$z_1^2 - 9z_2^2 = 11 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{z_1^2}{(\sqrt{11})^2} - \frac{z_2^2}{\left(\frac{\sqrt{11}}{3}\right)^2} = 1.$$

DUPress

Azt kaptuk tehát, hogy a másodrendű görbe hiperbola, amelynek középpontja

$$\frac{1}{\sqrt{10}} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sqrt{10} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix},$$

a tengelyeinek irányvektorai a sajátvektorokból olvashatók le, így $(1;3)$ és $(-3;1)$. Tehát a hiperbola:



DUPress

21. Rekurzív sorozatok mátrixokkal

21.1. **Feladat.** Tekintsük az

$$a_0 = 5;$$
$$a_1 = 7;$$
$$a_n = 3a_{n-2} + 2a_{n-1} \ (n > 1)$$

rekurzív sorozatot! Adjuk meg zárt alakban a sorozat n-edik tagját! Határozzuk meg a sorozat harmadik és negyedik tagját!

Megoldás:

Mivel

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ 3a_0 + 2a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix},$$

ezért az

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

jelölést bevezetve azt kapjuk, hogy

$$\begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = A^n \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix}.$$

A következőkben diagonalizáljuk az A mátrixot.
Az A mátrix sajátértékei a karakterisztikus egyenletének gyökei, azaz a

$$\det \begin{pmatrix} 0 - \lambda & 1 \\ 3 & 2 - \lambda \end{pmatrix} = 0$$

egyenlet megoldásai. Ha kiszámoljuk a determinánst, akkor azt kapjuk, hogy

$$(-\lambda) \cdot (2 - \lambda) - 3 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0,$$

amiből a másodfokú egyenlet megoldóképletével azt kapjuk, hogy

$$\lambda_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 12}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2},$$

így $\lambda_1 = 3$, illetve $\lambda_2 = -1$ adódik.
A $\lambda_1 = 3$ sajátértékhez tartozó sajátvektorok meghatározásához első lépésben felírjuk az $A - \lambda E_2$ mátrixot:

$$A - 3E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

DUPress

A sajátvektorokat a

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

egyenletrendszer megoldása adja. Vegyük észre, hogy az alapmátrix második sora megegyezik az első sor -1-szeresével, így az elhagyható, mert nincs új információtartalma. Tehát a megoldandó lineáris egyenletrendszer

$$-3x_1 + x_2 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x_2 = 3x_1.$$

Az egyik ismeretlent szabad paraméternek választhatjuk. Legyen

$$x_1 = t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

A $t = 0$ értéket azért zárjuk ki a megoldások közül, mert akkor x_2 és x_1 is zérus lenne, ami azt jelentené, hogy a sajátvektor zérusvektor, amit definíció szerint nem engedünk meg. Tehát a $\lambda_1 = 3$ sajátértékhez tartozó összes sajátvektorok halmaza, azaz a sajátaltér:

$$S_{\lambda_1} = \left\{ \begin{pmatrix} t \\ 3t \end{pmatrix} \,\middle|\, t \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \right\} = \left\{ t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \,\middle|\, t \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \right\}.$$

A $\lambda_2 = -1$ sajátértékhez tartozó sajátvektorok meghatározásához első lépésben felírjuk az $A - \lambda E_2$ mátrixot:

$$A + E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

A sajátértékeket a

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

egyenletrendszer megoldása adja. Vegyük észre, hogy az alapmátrix első és második sora megegyezik, így az egyik elhagyható. Tehát a megoldandó lineáris egyenletrendszer

$$x_1 + x_2 = 0.$$

Az egyik ismeretlent szabad paraméternek választhatjuk. Legyen

$$x_2 = t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

A $t = 0$ értéket azért zárjuk ki a megoldások közül, mert akkor $x_2 = 0$ és $x_1 = 0$ lenne, ami azt jelentené, hogy a sajátvektor zérusvektor, amit definíció szerint nem engedünk meg. Tehát a $\lambda_2 = -1$ sajátértékhez tartozó összes sajátvektorok halmaza, azaz a sajátaltér:

$$S_{\lambda_2} = \left\{ \begin{pmatrix} -t \\ t \end{pmatrix} \,\middle|\, t \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \right\} = \left\{ t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \,\middle|\, t \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \right\}.$$

Az A mátrix diagonalizálható, mert minden sajátértéknek az algebrai és geometriai multiplicitása megegyezik.
A diagonálmátrix:

$$D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

a diagonalizáló mátrix:

$$S = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Mivel

$$S^{-1} \cdot A \cdot S = D,$$

ezért

$$A = S \cdot D \cdot S^{-1}.$$

Ezt felhasználva

$$A^n = \left(S \cdot D \cdot S^{-1}\right)^n = S \cdot D \cdot S^{-1} \cdot S \cdot D \cdot S^{-1} \cdot \ldots \cdot S \cdot D \cdot S^{-1} = \\ = S \cdot D^n \cdot S^{-1}$$

adódik. Mivel az S mátrix inverze

$$S^{-1} = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},$$

ezért

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^n \cdot \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Diagonális mátrix hatványa olyan diagonális mátrix, melynek főátlóbeli elemei a mátrix főátlóbeli elemeinek hatványai, így

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3^n & 0 \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ha elvégezzük az első két mátrix szorzatát, akkor azt kapjuk, hogy

$$A^n = \begin{pmatrix} 3^n & -1 \cdot (-1)^n \\ 3 \cdot 3^n & (-1)^n \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \\ = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 3^n & (-1)^{n+1} \\ 3^{n+1} & (-1)^n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Elvégezzük a mátrixok szorzását:

$$\frac{1}{4}\cdot\begin{pmatrix} 3^n-3\cdot(-1)^{n+1} & 3^n+(-1)^{n+1} \\ 3^{n+1}-3\cdot(-1)^n & 3^{n+1}+(-1)^n \end{pmatrix}.$$

A kapott eredményt felhasználva azt kapjuk, hogy

$$\begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = A^n\cdot\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} =$$
$$=\frac{1}{4}\cdot\begin{pmatrix} 3^n-3\cdot(-1)^{n+1} & 3^n+(-1)^{n+1} \\ 3^{n+1}-3\cdot(-1)^n & 3^{n+1}+(-1)^n \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix} =$$
$$=\frac{1}{4}\cdot\begin{pmatrix} 12\cdot 3^n-8\cdot(-1)^{n+1} \\ 12\cdot 3^{n+1}-8\cdot(-1)^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\cdot 3^n-2\cdot(-1)^{n+1} \\ 3\cdot 3^{n+1}-2\cdot(-1)^n \end{pmatrix}.$$

Azt kaptuk tehát, hogy

$$a_n = 3\cdot 3^n + 2\cdot(-1)^n.$$

A sorozat harmadik tagja:

$$a_3 = 3\cdot 3^3 + 2\cdot(-1)^3 = 81 - 2 = 79.$$

A sorozat negyedik tagja:

$$a_4 = 3\cdot 3^4 + 2\cdot(-1)^4 = 243 + 2 = 245.$$

21.2. **Feladat.** Tekintsük az

$$a_0 = 4;$$
$$a_1 = 5;$$
$$a_n = -2a_{n-2} + 3a_{n-1}\ (n > 1)$$

rekurzív sorozatot! Adjuk meg zárt alakban a sorozat n-edik tagját! Számoljuk ki a sorozat hatodik és tizedik elemét! Tagja-e a sorozatnak az 515?

Megoldás:

Mivel

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ -2a_0+3a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix},$$

ezért az

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

jelölést bevezetve azt kapjuk, hogy

$$\begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = A^n\cdot\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix}.$$

A következőkben diagonalizáljuk az A mátrixot.
Az A mátrix sajátértékei a karakterisztikus egyenletének gyökei, azaz a

$$\det\begin{pmatrix} 0-\lambda & 1 \\ -2 & 3-\lambda \end{pmatrix} = 0$$

egyenlet megoldásai. Ha kiszámoljuk a determinánst, akkor azt kapjuk, hogy

$$(-\lambda)\cdot(3-\lambda)+2=0 \qquad \Rightarrow \qquad \lambda^2-3\lambda+2=0,$$

amiből a másodfokú egyenlet megoldóképletével azt kapjuk, hogy

$$\lambda_{1,2} = \frac{3\pm\sqrt{9-8}}{2} = \frac{3\pm 1}{2},$$

így $\lambda_1 = 2$, illetve $\lambda_2 = 1$ adódik.
A $\lambda_1 = 2$ sajátértékhez tartozó sajátvektorok meghatározásához első lépésben felírjuk az $A-\lambda E_2$ mátrixot:

$$A-2E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

A sajátvektorokat a

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

egyenletrendszer megoldása adja. Vegyük észre, hogy az alapmátrix első és második sora megegyezik, így az egyik sor elhagyható, mert nincs új információtartalma. Tehát a megoldandó lineáris egyenletrendszer

$$-2x_1+x_2=0 \qquad \Rightarrow \qquad x_2=2x_1.$$

Az egyik ismeretlent szabad paraméternek választhatjuk. Legyen

$$x_1 = t \in \mathbb{R}\setminus\{0\}.$$

A $t=0$ értéket azért zárjuk ki a megoldások közül, mert akkor x_2 és x_1 is zérus lenne, ami azt jelentené, hogy a sajátvektor zérusvektor, amit definíció szerint nem engedünk meg. Tehát a $\lambda_1 = 3$ sajátértékhez tartozó összes sajátvektorok halmaza, azaz a sajátaltér:

$$S_{\lambda_1} = \left\{ \begin{pmatrix} t \\ 2t \end{pmatrix} \,\middle|\, t\in\mathbb{R}\setminus\{0\} \right\} = \left\{ t\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \,\middle|\, t\in\mathbb{R}\setminus\{0\} \right\}.$$

A $\lambda_2 = 1$ sajátértékhez tartozó sajátvektorok meghatározásához első lépésben felírjuk az $A - \lambda E_2$ mátrixot:

$$A - E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

A sajátértékeket a

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

egyenletrendszer megoldása adja. Vegyük észre, hogy az alapmátrix második sora megegyezik az első 2-szeresével, így az egyik sor elhagyható. Tehát a megoldandó lineáris egyenletrendszer

$$-x_1 + x_2 = 0.$$

Az egyik ismeretlent szabad paraméternek választhatjuk. Legyen

$$x_2 = t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

A $t = 0$ értéket azért zárjuk ki a megoldások közül, mert akkor x_1 és x_2 is zérus lenne, ami azt jelentené, hogy a sajátvektor zérusvektor, amit definíció szerint nem engedünk meg. Tehát a $\lambda_2 = 1$ sajátértékhez tartozó összes sajátvektorok halmaza, azaz a sajátaltér:

$$S_{\lambda_2} = \left\{ \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix} \,\middle|\, t \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \right\} = \left\{ t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \,\middle|\, t \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \right\}.$$

Az A mátrix diagonalizálható, mert minden sajátértéknek az algebrai és geometriai multiplicitása megegyezik.
A diagonálmátrix:

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

a diagonalizáló mátrix:

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Mivel

$$S^{-1} \cdot A \cdot S = D,$$

ezért

$$A = S \cdot D \cdot S^{-1}.$$

Ezt felhasználva

$$A^n = \left(S \cdot D \cdot S^{-1}\right)^n = S \cdot D \cdot S^{-1} \cdot S \cdot D \cdot S^{-1} \cdot \ldots \cdot S \cdot D \cdot S^{-1} = \\ = S \cdot D^n \cdot S^{-1}$$

adódik. Mivel az S mátrix inverze

$$S^{-1} = \frac{1}{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix},$$

ezért

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Diagonális mátrix hatványa olyan diagonális mátrix, melynek főátlóbeli elemei a mátrix főátlóbeli elemeinek hatványai, így

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 1^n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ha elvégezzük a mátrixszorzásokat, akkor azt kapjuk, hogy

$$A^n = \begin{pmatrix} 2^n & 1 \\ 2 \cdot 2^n & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} -2^n + 2 & 2^n - 1 \\ -2 \cdot 2^n + 2 & 2 \cdot 2^n - 1 \end{pmatrix}.$$

A kapott eredményt felhasználva azt kapjuk, hogy

$$\begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = A^n \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} -2^n + 2 & 2^n - 1 \\ -2 \cdot 2^n + 2 & 2 \cdot 2^n - 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} -4 \cdot 2^n + 8 + 5 \cdot 2^n - 5 \\ -8 \cdot 2^n + 8 + 10 \cdot 2^n - 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^n + 3 \\ 2 \cdot 2^n + 3 \end{pmatrix}.$$

Azt kaptuk tehát, hogy

$$a_n = 2^n + 3.$$

A sorozat hatodik tagja:

$$a_6 = 2^6 + 3 = 64 + 3 = 67.$$

A sorozat tizedik tagja:

$$a_{10} = 2^{10} + 3 = 1\,024 + 3 = 1\,027.$$

Ahhoz, hogy eldöntsük, tagja-e a sorzatnak az 515 meg kell vizsgálnunk, hogy létezik-e olyan n természetes szám, amelyre $a_n = 515$ teljesül. Mivel $a_n = 2^n + 3$, ezért az

$$515 = 2^n + 3$$

egyenlet megoldását keressük a természetes számok halmazán. Az egyenlet átrendezésével

$$2^n = 512$$

adódik, amiből azt kapjuk, hogy $n = 9$, így a sorozatnak tagja az 515, egészen pontosan a kilencedik tagja.

DUPress

22. Polinomok stabilitása

22.1. **Feladat.** Vizsgáljuk meg, hogy a

$$P(\lambda) = \lambda^2 + 5\lambda + 6$$

polinom stabil-e? Oldjuk meg a feladatot definíció szerint, valamint a Routh-Hurwitz kritérium felhasználásával!

<u>**Megoldás**</u>:

Definíció szerint a

$$P(\lambda) = a_n \cdot \lambda^n + a_{n-1} \cdot \lambda^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot \lambda + a_0$$

polinom stabil, ha

$$\operatorname{Re} \lambda_i \leq 0 \qquad (i = 1, \ldots, n),$$

ahol λ_i $(i = 1, \ldots, n)$ a polinom gyökei.
Jelen esetben a

$$\lambda^2 + 5\lambda + 6 = 0$$

egyenlet megoldásai:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} = \frac{-5 \pm 1}{2},$$

így $\lambda_1 = -3$, valamint $\lambda_2 = -2$. Mivel a sajátértékek negatívak, definíció szerint ezért a polinom stabil.
A Routh-Hurwitz kritérium szerint a fenti polinom pontosan akkor stabil, ha az alábbi két feltétel teljesül:

$$\frac{a_0}{a_n} > 0; \quad \frac{a_1}{a_n} > 0; \ldots; \frac{a_{n-1}}{a_n} > 0$$

és a polinom együtthatóiból képzett

$$H = \begin{pmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_n & a_{n-2} & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a_3 & a_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a_4 & a_2 & a_0 \end{pmatrix}$$

Hurwitz-mátrix pozitív definit.
Jelen esetben minden együttható pozitív, így az első feltétel teljesül.
A Hurwitz mátrix:

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Az első bal felső sarok minor determináns:

$$D_1 = \det(5) = 5.$$

A második bal felső sarok minor determináns:

$$D_2 = \det \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 5 \cdot 1 - 0 = 5.$$

Azt kaptuk tehát, hogy minden bal felső sarok minor determináns pozitív, tehát a mátrix pozitív definit. Következésképpen teljesül a Routh-Hurwitz kritérium, tehát a polinom stabil.

22.2. **Feladat.** Vizsgáljuk meg, hogy a

$$P(\lambda) = 5\lambda^3 + 2\lambda^2 + 3\lambda + 1$$

polinom stabil-e?

Megoldás:

A Hurwitz-mátrix:

$$\begin{pmatrix} a_2 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_1 & 0 \\ 0 & a_2 & a_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 5 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Az első bal felső sarok minor determináns:

$$D_1 = \det(2) = 2.$$

A második bal felső sarok minor determináns:

$$D_2 = \det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} = 2 \cdot 2 - 5 \cdot 1 = 6 - 5 = 1.$$

A harmadik bal felső sarok minor determináns:

$$D_3 = \det \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 5 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} = 1.$$

Azt kaptuk tehát, hogy minden bal felső sarok minor determináns pozitív, tehát a mátrix pozitív definit. Mivel az is teljesül, hogy a polinom minden együtthatója pozitív, ezért a polinom stabil.

DUPress

22.3. **Feladat.** Vizsgáljuk meg, hogy a

$$P(\lambda) = 4\lambda^5 + 12\lambda^4 + 25\lambda^3 + 30\lambda^2 + \lambda + 1$$

polinom stabil-e?

Megoldás:

A Hurwitz-mátrix:

$$\begin{pmatrix} a_4 & a_2 & a_0 & 0 & 0 \\ a_5 & a_3 & a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_4 & a_2 & a_0 & 0 \\ 0 & a_5 & a_3 & a_1 & 0 \\ 0 & 0 & a_4 & a_2 & a_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 30 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 25 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 30 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 25 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 12 & 30 & 1 \end{pmatrix}.$$

Az első bal felső sarok minor determináns:

$$D_1 = \det(12) = 12.$$

A második bal felső sarok minor determináns:

$$D_2 = \det \begin{pmatrix} 12 & 30 \\ 4 & 25 \end{pmatrix} = 12 \cdot 25 - 4 \cdot 30 = 180.$$

A harmadik bal felső sarok minor determináns:

$$D_3 = \det \begin{pmatrix} 12 & 30 & 1 \\ 4 & 25 & 1 \\ 0 & 12 & 30 \end{pmatrix}.$$

A determinánst a harmadik sor szerinti kifejtéssel számoljuk:

$$D_3 = (-1)^5 \cdot 12 \cdot \begin{pmatrix} 12 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} + (-1)^6 \cdot 30 \cdot \begin{pmatrix} 12 & 30 \\ 4 & 25 \end{pmatrix} =$$
$$= -12 \cdot 8 + 30 \cdot 180 = 5\,304.$$

A negyedik bal felső sarok minor determináns:

$$D_4 = \det \begin{pmatrix} 12 & 30 & 1 & 0 \\ 4 & 25 & 1 & 0 \\ 0 & 12 & 30 & 1 \\ 0 & 4 & 25 & 1 \end{pmatrix}.$$

A determinánst a negyedik oszlop szerinti kifejtéssel számoljuk:

$$D_4 = 1 \cdot (-1)^7 \cdot \det \begin{pmatrix} 12 & 30 & 1 \\ 4 & 25 & 1 \\ 0 & 4 & 25 \end{pmatrix} + 1 \cdot (-1)^8 \cdot \det \begin{pmatrix} 12 & 30 & 1 \\ 4 & 25 & 1 \\ 0 & 12 & 30 \end{pmatrix}.$$

DUPress

A kapott harmadrendű determinánsok közül az elsőt a harmadik sora szerinti kifejtéssel számoljuk:

$$\det\begin{pmatrix} 12 & 30 & 1 \\ 4 & 25 & 1 \\ 0 & 4 & 25 \end{pmatrix} = 4\cdot(-1)^5\cdot\det\begin{pmatrix} 12 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} +$$
$$+ 25\cdot(-1)^6\cdot\det\begin{pmatrix} 12 & 30 \\ 4 & 25 \end{pmatrix} =$$
$$= -4\cdot 8 + 25\cdot 180 = 4\,468.$$

Ekkor azt kapjuk, hogy

$$D_4 = -4\,468 + 5\,304 = 836$$

Az ötödik bal felső sarok minor determinás

$$\det\begin{pmatrix} 12 & 30 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 25 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 30 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 25 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 12 & 30 & 1 \end{pmatrix} = 836,$$

ugyanis ha a determinánst az ötödik oszlopa szerinti kifejtéssel számoljuk, akkor azt kapjuk, hogy $D_5 = D_4$.
Azt kaptuk tehát, hogy minden bal felső sarok minor determináns pozitív, tehát a mátrix pozitív definit. Mivel az is teljesül, hogy a polinom minden együtthatója pozitív, ezért a polinom stabil.

22.4. **Feladat.** Vizsgáljuk meg, hogy a

$$P(\lambda) = \lambda^3 + \lambda^2 + 2\lambda + 3$$

polinom stabil-e?

Megoldás:

A Hurwitz-mátrix:

$$\begin{pmatrix} a_2 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_1 & 0 \\ 0 & a_2 & a_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Az első bal felső sarok minor determináns:

$$D_1 = \det(1) = 1.$$

A második bal felső sarok minor determináns:

$$D_2 = \det \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 1 \cdot 2 - 3 \cdot 1 = -1.$$

A harmadik bal felső sarok minor determináns:

$$D_3 = \det \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} = 3 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = -3.$$

Azt kaptuk, hogy nem minden bal felső sarok minor determináns pozitív, tehát a mátrix nem pozitív definit, így nem tejesül a Hurwitz-kritérium, tehát a polinom nem stabil.

22.5. **Feladat.** Vizsgáljuk meg, hogy a

$$P(\lambda) = (\lambda+1)^3 + 3 \cdot (\lambda+1)^2 + 5\lambda \cdot (\lambda+1)$$

polinom stabil-e?

<u>**Megoldás**</u>:

Felhasználva, hogy

$$(\lambda+1)^3 = \lambda^3 + 3\lambda^2 + 3\lambda + 1,$$

továbbá

$$(\lambda+1)^2 = \lambda^2 + 2\lambda + 1,$$

azt kapjuk, hogy

$$P(\lambda) = \lambda^3 + 3\lambda^2 + 3\lambda + 1 + 3\lambda^2 + \\ + 6\lambda + 3 + 5\lambda^2 + 5\lambda.$$

Az összevonás után a

$$\lambda^3 + 11\lambda^2 + 14\lambda + 4$$

polinomhoz jutunk. A Hurwitz-mátrix:

$$\begin{pmatrix} a_2 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_1 & 0 \\ 0 & a_2 & a_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 4 & 0 \\ 1 & 14 & 0 \\ 0 & 11 & 4 \end{pmatrix}.$$

Az első bal felső sarok minor determináns:

$$D_1 = \det(11) = 11.$$

A második bal felső sarok minor determináns:

$$D_2 = \det \begin{pmatrix} 11 & 4 \\ 1 & 14 \end{pmatrix} = 11 \cdot 14 - 4 \cdot 1 = 154 - 4 = 150.$$

A harmadik bal felső sarok minor determináns:

$$D_3 = \det\begin{pmatrix} 11 & 4 & 0 \\ 1 & 14 & 0 \\ 0 & 11 & 4 \end{pmatrix} = 4 \cdot \det\begin{pmatrix} 11 & 4 \\ 1 & 14 \end{pmatrix} = 4 \cdot 150 = 600.$$

Azt kaptuk tehát, hogy minden bal felső sarok minor determináns pozitív, tehát a mátrix pozitív definit. Mivel az is teljesül, hogy a polinom minden együtthatója pozitív, ezért a polinom stabil.

23. Sztochasztikus- és átmenetmátrixok

23.1. **Feladat.** Sztochasztikus-e az

$$A = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,8 \\ 0,8 & 0,2 \end{pmatrix}$$

mátrix?

Megoldás:

Mivel a mátrix egy oszlopában lévő elemeinek összege 1, ezért a mátrix sztochasztikus.

23.2. **Feladat.** Határozzuk meg az a, b és c valós számokat úgy, hogy az

$$A = \begin{pmatrix} 0,3 & b & 0,1 \\ a & 0,4 & 0,2 \\ 0,4 & 0,5 & c \end{pmatrix}$$

mátrix sztochasztikus legyen!

Megoldás:

Mivel a mátrix egy oszlopában lévő elemeinek összege 1 kell, hogy legyen, ezért

$$0,3 + a + 0,4 = 1 \qquad \Rightarrow \qquad a = 0,3,$$

másrészt

$$b + 0,4 + 0,5 = 1 \qquad \Rightarrow \qquad b = 0,1,$$

továbbá

$$0,1 + 0,2 + c = 1 \qquad \Rightarrow \qquad c = 0,7.$$

23.3. **Feladat.** Duplán sztochasztikus-e az

$$A = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,7 \\ 0,7 & 0,3 \end{pmatrix}$$

mátrix?

Megoldás:

Mivel a mátrix egy oszlopában és egy sorában lévő elemeinek összege is 1, ezért a mátrix sztochasztikus.

DUPress

23.4. **Feladat.** Határozzuk meg az a, b és c valós számokat úgy, hogy az

$$A = \begin{pmatrix} 0,2 & b & 0,1 \\ a & 0,5 & 0,4 \\ 0,3 & 0,2 & c \end{pmatrix}.$$

mátrix duplán sztochasztikus legyen!

Megoldás:

Mivel a mátrix egy oszlopában és egy sorában lévő elemeinek összege 1 kell, hogy legyen, ezért az első sorra és első oszlopra, valamint a második sorra és a második oszlopra, végül a harmadik sorra és a harmadik oszlopra felírva az előbb említett feltételt azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} 0,3+b &= 0,5+a \\ 0,9+a &= 0,7+b \\ 0,5+c &= 1. \end{aligned}$$

Az utolsó egyenletből azt kapjuk, hogy $c = 0,5$. Rendezve az első és második egyenletet

$$\begin{aligned} b-a &= 0,2 \\ a-b &= -0,2 \end{aligned}$$

adódik. A két egyenlet ekvivalens egymással, így például b értéke tetszőlegesnek választható és

$$a = b - 0,2.$$

23.5. **Feladat.** Határozzuk meg az a, b, c és d valós számokat úgy, hogy az

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

mátrix duplán sztochasztikus legyen!

Megoldás:

Mivel a mátrix egy oszlopában és egy sorában lévő elemeinek összege 1 kell, hogy legyen, ezért az első sorra és első oszlopra, valamint a második sorra és a

DUPress

második oszlopra felírva az előbb említett feltételt azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} a+b&=1\\ a+c&=1\\ b+d&=1\\ c+d&=1 \end{aligned}$$

. A kapott egyenletrendszer lineáris, amelynek a kibővített mátrixa:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Az első sor (-1)-szeresét adjuk hozzá a második sorhoz:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

A második sort adjuk hozzá a harmadik sorhoz:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

A harmadik sor (-1)-szeresét adjuk hozzá a negyedik sorhoz:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Tehát az utolsó sor elhagyható:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Az utolsó sornak megfelelő egyenletből azt kapjuk, hogy

$$c+d=1 \qquad \Rightarrow \qquad d=1-c.$$

A második sornak megfelelő egyenletből

$$b-c=0 \qquad \Rightarrow \qquad b=c$$

DUPress

adódik. Az első sornak megfelelő egyenletből

$$a + b = 1 \qquad \Rightarrow \qquad b = 1 - a$$

adódik. Tehát:

$$b = 1 - a, \quad c = 1 - a, \quad d = 1 - c = 1 - (1 - a) = a.$$

Tehát a mátrix az alábbi alakú lesz:

$$A = \begin{pmatrix} a & 1-a \\ 1-a & a \end{pmatrix},$$

ahol $a \in [0; 1]$ tetszőleges.

23.6. **Feladat.** Átmenetmátrix-e az

$$A = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,8 \\ 0,8 & 0,2 \end{pmatrix}$$

mátrix?

Megoldás:

Mivel a mátrix egy sorában lévő elemeinek összege 1 és az elemek nem-negatívak, ezért a mátrix átmenetmátrix.

23.7. **Feladat.** Egy városban az esetek 90%-ában napsütéses napok után napsütéses napok következnek, és az esetek 80%-ában felhős napok után felhős napok következnek. Ezt felhasználva adjuk meg a város időjárását modellező Markov-lánc átmenetvalószínűség mátrixát!

Megoldás:

Az átmenetvalószínűség mátrix:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} \text{napos} & \text{esős} \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{napos} \\ \text{esős} \end{array} & \begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 \\ 0,2 & 0,8 \end{pmatrix} \end{array}.$$

23.8. **Feladat.** Egy üzemben két fajta kólát gyártanak. Ha valamely személy az A típusú kólát vette, akkor 90% valószínűséggel legközelebb is A típusút fog venni. Ha valaki B típusú kólát vett, akkor 80% valószínűséggel legközelebb is B típusú kólát fog venni.

a) Tegyük fel, hogy a vizsgált személy jelenleg B típusú kólát vett. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a mostantól számított második vásárláskor A típusú kólát fog venni?

b) Mennyi annak a valószínűsége, hogy ha valaki A kólát vásárol kezdetben, akkor a harmadik vásárláskor is „hű” marad a termékhez?

<u>**Megoldás**:</u>

a) Az átmenetvalószínűség mátrix:

$$P = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} A & B \end{array} \\ \begin{array}{c} A \\ B \end{array} & \begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 \\ 0,2 & 0,8 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Mivel

$$P^2 = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 \\ 0,2 & 0,8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 \\ 0,2 & 0,8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,83 & 0,17 \\ 0,34 & 0,66 \end{pmatrix}.$$

ezért $0,34 = 34\%$ annak a valószínűsége, hogy valaki a második vásárlás után B típusú kóláról az A típusúra fog váltani.

b) Mivel

$$P^3 = P^2 \cdot P = \begin{pmatrix} 0,83 & 0,17 \\ 0,34 & 0,66 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 \\ 0,2 & 0,8 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 0,781 & 0,219 \\ 0,438 & 0,562 \end{pmatrix},$$

ezért $0,781$, azaz $78,1\%$ a valószínűsége, hogy az A terméket vásároló a harmadik vásárláskor is „hű” marad az A termékhez.

23.9. **Feladat.** Egy terméket egy adott hónapban két márkanév alatt forgalmaznak. Jelöljük ezeket A-val és B-vel. A terméket összesen 1 000-en vásárolták meg 2017. novemberben. Az A gyártó által forgalmazott terméket 700-an, a B gyártó által forgalmazott terméket 300-an vásárolták meg. Egy piackutatás során felmérést készítettek arra vonatkozóan, hogy a vásárolt termékkel elégedettek voltak-e a vevők. Az A gyártó termékét megvásárlók 60%-a azt nyilatkozta, hogy a következő hónapban is az A gyártótól fog vásárolni, míg 40%-uk a B gyártó termékeit fogja használni. A B gyártó esetén a megkérdezettek 80%-a a következő hónapban is a B márkájú terméket fogja megvásárolni, míg a 20%-uk átpártol az A márkájú termékhez.

a) Írjuk fel az átmenetvalószínűségek mátrixát!

b) Határozzuk meg decemberben a piaci részesedést!

c) Hogyan alakul a piaci részesedés a következő 6 hónapban?

d) Igazoljuk, hogy az egyensúlyi eloszlás $\left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right)$, azaz az $\left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right)$ vektor fixpontja az átmenetvalószínűségek mátrixának.

<u>**Megoldás**</u>:

a) Az átmenetvalószínűségek mátrixa:

$$P = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,4 \\ 0,2 & 0,8 \end{pmatrix}.$$

b) Mivel az A márkájú terméket a megkérdezettek 70%-a, a B gyártójú terméket a megkérdezettek 30%-a vásárolta meg novemberben, ezért a kezdeti eloszlás

$$p_0 = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,3 \end{pmatrix}.$$

A decemberi piaci részesedés:

$$p_1 = p_0 \cdot P = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,6 & 0,4 \\ 0,2 & 0,8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,48 & 0,52 \end{pmatrix}.$$

Tehát decemberben a piaci részesedés:

$$\begin{pmatrix} 0,48 & 0,52 \end{pmatrix}.$$

c) Januárban a piaci részesedés:

$$p_0 \cdot P^2 = \begin{pmatrix} 0,392 & 0,608 \end{pmatrix}.$$

Februárban a piaci részesedés:

$$p_0 \cdot P^3 = \begin{pmatrix} 0,357 & 0,643 \end{pmatrix}.$$

Márciusban a piaci részesedés:

$$p_0 \cdot P^4 = \begin{pmatrix} 0,343 & 0,657 \end{pmatrix}.$$

Áprilisban a piaci részesedés:

$$p_0 \cdot P^5 = \begin{pmatrix} 0,337 & 0,663 \end{pmatrix}.$$

Májusban a piaci részesedés:

$$p_0 \cdot P^6 = \begin{pmatrix} 0,335 & 0,665 \end{pmatrix}.$$

d) Az $\left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right)$ valóban fixpont, mert

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,6 & 0,4 \\ 0,2 & 0,8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

Ez egyben azt is jelenti, hogy

$$\lim_{n\to\infty} p_0 \cdot P^n = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix},$$

így azt kaptuk, hogy hosszútávon a vásárlók $\frac{1}{3}$ része az A márkát, $\frac{2}{3}$ részük a B márkát fogja vásárolni.

23.10. **Feladat.** Egy üzemben két fajta sampont gyártanak. Ha valamely személy az A típusú sampont vette, akkor 80% valószínűséggel legközelebb is A típusút fog venni. Ha valaki B típusú sampont vett, akkor 75% valószínűséggel legközelebb is B típusú sampont fog venni. Modellezzük Markov-láncként a leírt folyamatot!

a) Írjuk fel az átmenetvalószínűségi mátrixot!

b) Igazoljuk, hogy a Markov-lánc ergodikus!

c) Tegyük fel, hogy a vizsgált személy jelenleg A típusú sampont vett. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a mostantól számított második vásárláskor is A típusú sampont fog venni?

d) Mennyi annak a valószínűsége, hogy ha valaki A sampont vásárol kezdetben, akkor a harmadik vásárláskor is „hű" marad a termékhez?

e) Adjuk meg a stacionárius eloszlást!

f) Határozzuk meg az átlagos visszatérési időket!

g) Határozzuk meg az átlagos elérési időket!

Megoldás:

a) Az átmenetvalószínűségi mátrix:

$$P = \begin{array}{c} \\ A \\ B \end{array} \!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cc} A & \;\;B \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,3 & 0,7 \end{pmatrix} \end{array}.$$

b) Az A és B állapotok visszatérőek, kommunikálnak egymással és aperiodikusak, így a Markov-lánc ergodikus.

c) Mivel

$$P^2 = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,3 & 0,7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,3 & 0,7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,3 \\ 0,45 & 0,55 \end{pmatrix}.$$

ezért $0,7 = 70\%$ annak a valószínűsége, hogy valaki a második vásárlás után az A típusú samponhoz „hű" marad.

d) Mivel

$$P^3 = P^2 \cdot P = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,3 \\ 0,45 & 0,55 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,3 & 0,7 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 0,65 & 0,35 \\ 0,525 & 0,475 \end{pmatrix},$$

ezért $0,65$, azaz 65% a valószínűsége, hogy az A terméket vásároló a harmadik vásárláskor is „hű” marad az A termékhez.

e) A stacionárius eloszlást a

$$\begin{pmatrix} \pi_1 & \pi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi_1 & \pi_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,3 & 0,7 \end{pmatrix}.$$

és a $\pi_1 + \pi_2 = 1$ egyenletekből álló egyenletrendszer megoldása adja. Elvégezve a mátrixszorzásokat azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} 0,8\pi_1 + 0,3\pi_2 &= \pi_1 \\ 0,2\pi_1 + 0,7\pi_2 &= \pi_2 \\ \pi_1 + \pi_2 &= 1. \end{aligned}$$

Az egyenleteket átrendezve a

$$\begin{aligned} -0,2\pi_1 + 0,3\pi_2 &= 0 \\ 0,2\pi_1 - 0,3\pi_2 &= 0 \\ \pi_1 + \pi_2 &= 1. \end{aligned}$$

egyenletrendszerhez jutunk. Vegyük észre, hogy az első és a második egyenlet ugyanaz, így közülük az egyik elhagyható. Tehát az

$$\begin{aligned} 0,2\pi_1 - 0,3\pi_2 &= 0 \\ \pi_1 + \pi_2 &= 1. \end{aligned}$$

egyenletrendszert kell megoldani. Az első egyenletből azt kapjuk, hogy

$$\pi_1 = 1,5\pi_2.$$

Ezt behelyettesítve a második egyenletbe

$$2,5\pi_2 = 1 \qquad \Rightarrow \qquad \pi_2 = 0,4$$

adódik, amiből azt kapjuk, hogy

$$\pi_1 = 1,5 \cdot 0,4 = 0,6.$$

A stacionárius eloszlás tehát

$$\pi = (0,6; 0,4)\,,$$

ami azt jelenti, hogy

$$\lim_{n\to\infty} P^n = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,4 \\ 0,6 & 0,4 \end{pmatrix}.$$

Hosszú távon tehát azt kapjuk, hogy az A terméket a vásárlók 60%-a, a B terméket a vásárlók 40%-a fogja választani.

f) Az átlagos visszatérési idők:

$$m_{11} = \frac{1}{0,6} = \frac{10}{3} \approx 3,3;$$
$$m_{22} = \frac{1}{0,4} = \frac{10}{4} = 2,5.$$

g) Az átlagos elérési időket az

$$m_{12} = 1 + p_{11} \cdot m_{12}$$
$$m_{21} = 1 + p_{22} \cdot m_{21}.$$

egyenletrendszer megoldása adja. Behelyettesítve a megfelelő adatokat azt kapjuk, hogy

$$m_{12} = 1 + 0,8 \cdot m_{12}$$
$$m_{21} = 1 + 0,7 \cdot m_{21}.$$

Az első egyenletből azt kapjuk, hogy

$$m_{12} = 5,$$

míg a második egyenletből

$$m_{21} = \frac{10}{3}$$

adódik. A kapott eredmény azt jelent, hogy egy olyan személy, aki először az A típusú sampont vásárolta, átlagosan 5 doboz ilyen sampont fog megvenni, mielőtt a B típusú sampon vásárlására térne át.

23.11. **Feladat.** Egy részvény ára mindig 10 dollár vagy 20 dollár. Ha a részvény ára ma 10 dollár, akkor $0,8$ valószínűséggel holnap is 10 dollárba fog kerülni. Ha ma 20 dollárba kerül, akkor $0,9$ a valószínűsége, hogy holnap is 20 dollárba fog kerülni. Modellezzük Markov-láncként a leírtakat!

a) Írjuk fel az átmenetvalószínűségi mátrixot!

b) Igazoljuk, hogy a Markov-lánc ergodikus!

c) Tegyük fel, hogy a részvény ára ma 10 dollár. Mennyi annak a valószínűsége, hogy 2 nap múlva is 10 dollár lesz az ára?

d) Tegyük fel, hogy a részvény ára ma 10 dollár. Mennyi annak a valószínűsége, hogy 3 nap múlva is 10 dollár lesz az ára?

e) Tegyük fel, hogy a részvény ára ma 10 dollár. Mennyi annak a valószínűsége, hogy 4 nap múlva is 10 dollár lesz az ára?

f) Adjuk meg a stacionárius eloszlást!

g) Határozzuk meg az átlagos visszatérési időket!

h) Határozzuk meg az átlagos elérési időket!

i) Mennyi lesz hosszú távon a részvény átlagos ára?

Megoldás:

a) Az átmenetvalószínűségi mátrix:

$$P = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} 10 & 20 \end{array} \\ \begin{array}{c} 10 \\ 20 \end{array} & \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,1 & 0,9 \end{pmatrix} \end{array}.$$

b) Az egyes állapotok visszatérőek, kommunikálnak egymással és aperiodikusak, így a Markov-lánc ergodikus.

c) Mivel

$$P^2 = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,1 & 0,9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,1 & 0,9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,66 & 0,34 \\ 0,17 & 0,83 \end{pmatrix}.$$

ezért $0,66 = 66\%$ annak a valószínűsége, hogy az első nap 10 dollárba kerülő részvény a második nap is 10 dollárba fog kerülni.

d) Mivel

$$P^3 = P^2 \cdot P = \begin{pmatrix} 0,66 & 0,34 \\ 0,17 & 0,83 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,3 & 0,7 \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} 0,562 & 0,438 \\ 0,219 & 0,781 \end{pmatrix},$$

ezért $0,562$, azaz 56% a valószínűsége, hogy a harmadik napon is 10 dollárba fog kerülni a részvény.

e) Mivel

$$P^4 = P^3 \cdot P = \begin{pmatrix} 0,562 & 0,438 \\ 0,219 & 0,781 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,3 & 0,7 \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} 0,493 & 0,507 \\ 0,253 & 0,747 \end{pmatrix},$$

ezért $0,493$, azaz $49,3\%$ a valószínűsége, hogy a harmadik napon is 10 dollárba fog kerülni a részvény.

DUPress

f) A stacionárius eloszlást a

$$\begin{pmatrix} \pi_1 & \pi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi_1 & \pi_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,1 & 0,9 \end{pmatrix}.$$

és a $\pi_1 + \pi_2 = 1$ egyenletekből álló egyenletrendszer megoldása adja. Elvégezve a mátrixszorzásokat azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} 0,8\pi_1 + 0,1\pi_2 &= \pi_1 \\ 0,2\pi_1 + 0,9\pi_2 &= \pi_2 \\ \pi_1 + \pi_2 &= 1. \end{aligned}$$

Az egyenleteket átrendezve a

$$\begin{aligned} -0,2\pi_1 + 0,1\pi_2 &= 0 \\ 0,2\pi_1 - 0,1\pi_2 &= 0 \\ \pi_1 + \pi_2 &= 1. \end{aligned}$$

egyenletrendszerhez jutunk. Vegyük észre, hogy az első és a második egyenlet ugyanaz, így közülük az egyik elhagyható. Tehát az

$$\begin{aligned} 0,2\pi_1 - 0,1\pi_2 &= 0 \\ \pi_1 + \pi_2 &= 1. \end{aligned}$$

egyenletrendszert kell megoldani. Az első egyenletből azt kapjuk, hogy

$$\pi_2 = 2\pi_1.$$

Ezt behelyettesítve a második egyenletbe

$$3\pi_1 = 1 \qquad \Rightarrow \qquad \pi_1 = \frac{1}{3}$$

adódik, amiből azt kapjuk, hogy

$$\pi_2 = 2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

A stacionárius eloszlás tehát

$$\pi = \left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right),$$

ami azt jelenti, hogy

$$\lim_{n\to\infty} P^n = \left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right).$$

g) Az átlagos visszatérési idők:

$$m_{11} = \frac{1}{\frac{1}{3}} = 3;$$
$$m_{22} = \frac{1}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2} = 1,5.$$

h) Az átlagos elérési időket az

$$m_{12} = 1 + p_{11} \cdot m_{12}$$
$$m_{21} = 1 + p_{22} \cdot m_{21}.$$

egyenletrendszer megoldása adja. Behelyettesítve a megfelelő adatokat azt kapjuk, hogy

$$m_{12} = 1 + 0,8 \cdot m_{12}$$
$$m_{21} = 1 + 0,9 \cdot m_{21}.$$

Az első egyenletből azt kapjuk, hogy

$$m_{12} = 5,$$

míg a második egyenletből

$$m_{21} = 10$$

adódik.

i) Hosszú távon a részvény átlagos ára

$$10 \cdot \frac{1}{3} + 20 \cdot \frac{2}{3} = \frac{50}{3} \approx 16,6$$

dollár lesz.

DUPress

24. Populációk modellezése Leslie-mátrixokkal

24.1. **Feladat.** Egy adott halfajta egyedei legfeljebb 3 évig élnek és 3 korcsoportba osztjuk őket. Egy nőstény hal átlagosan 100 olyan ikrát rak, amely megéli az első életévét. Az egyéves halak 5%-a éli meg a második életévét. A kétéves halak 20%-a éli meg a harmadik életévet. A vizsgált halfajták az első két évben még nem szaporodóképesek. Kézdetben, a halak telepítésekor minden korcsoportban 1 000 nőstény hal volt.

a) Írjuk fel a populáció Leslie-féle modelljét!
b) Adjuk meg a populáció Leslie-mátrixát!
c) Határozzuk meg, hogy a telepítés után 1 évvel melyik korcsoportban hány egyed lesz?
d) Határozzuk meg, hogy a telepítés után 2 évvel melyik korcsoportban hány egyed lesz?
e) Határozzuk meg, hogy a telepítés után 3 évvel melyik korcsoportban hány egyed lesz?
f) Nő vagy csökken a stabil korcsoport eloszlású populáció?
g) A modell alapján megállapítható-e hosszú távon a korcsoporteloszlás?

Megoldás:

a) Az egyes korcsoportokat jelölje rendre $x_1(t)$, $x_2(t)$ és $x_3(t)$. A szaporodási ráták $b_1 = 0$, $b_2 = 0$ és $b_3 = 100$. A túlélési ráták: $p_1 = 0,05$ és $p_2 = 0,2$. A matematikai modell:

$$\begin{aligned} x_1(t+1) &= b_1 \cdot x_1(t) + b_2 \cdot x_2(t) + b_3 \cdot x_3(3) \\ x_2(t+1) &= p_1 \cdot x_1(t) \\ x_3(t+1) &= p_2 \cdot x_2(t). \end{aligned}$$

Az adatok behelyettesítése után azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} x_1(t+1) &= 100 \cdot x_3(3) \\ x_2(t+1) &= 0,05 \cdot x_1(t) \\ x_3(t+1) &= 0,2 \cdot x_2(t). \end{aligned}$$

b) A populáció Leslie-mátrixa:

$$L = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ p_1 & 0 & 0 \\ 0 & p_2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 100 \\ 0,05 & 0 & 0 \\ 0 & 0,2 & 0 \end{pmatrix}.$$

A korcsoportvektor:

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix}.$$

Ezt felhasználva a matematikai modell az

$$x(t+1) = L \cdot x(t)$$

tömörebb formában írható fel.

c) A telepítés után 1 évvel az egyes korcsoportokban

$$L \cdot \begin{pmatrix} 1\,000 \\ 1\,000 \\ 1\,000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 100 \\ 0,05 & 0 & 0 \\ 0 & 0,2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1\,000 \\ 1\,000 \\ 1\,000 \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} 2\,000\,000 \\ 50 \\ 20 \end{pmatrix}$$

egyed lesz az egyes korcsoportokban.

d) A telepítés után 2 évvel

$$L^2 \cdot \begin{pmatrix} 1\,000 \\ 1\,000 \\ 1\,000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 100 \\ 0,05 & 0 & 0 \\ 0 & 0,2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2\,000\,000 \\ 50 \\ 20 \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} 2\,000 \\ 100\,000 \\ 10 \end{pmatrix}$$

egyed lesz az egyes korcsoportokban.

e) A telepítés után 3 évvel

$$L^3 \cdot \begin{pmatrix} 1\,000 \\ 1\,000 \\ 1\,000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 100 \\ 0,05 & 0 & 0 \\ 0 & 0,2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2\,000 \\ 100\,000 \\ 10 \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} 1\,000 \\ 100 \\ 20\,000 \end{pmatrix}$$

egyed lesz az egyes korcsoportokban.

f) A Leslie-mátrix sajátértékeit a karakterisztikus egyenlet megoldásai adják:

$$\det(L - \lambda \cdot E) = 0.$$

A karakterisztikus polinom:

$$\det \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 100 \\ 0,05 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0,2 & -\lambda \end{pmatrix} = -\lambda^3 + 1,$$

így a $-\lambda^3 + 1 = 0$ egyenletet kell megoldanunk:

$$-\lambda^3 + 1 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \lambda = 1,$$

így a Leslie-mátrixnak egyetlen sajátértéke van: $\lambda = 1$. Ez azt jelenti, hogy a vizsgált populáció egyensúlyi helyzetben van.

g) Hosszú távon a populáció korcsoporteloszlását a sajátvektorok adják meg. Ehhez a

$$\begin{aligned} -x_1 + 100x_3 &= 0 \\ 0,05x_1 - x_2 &= 0 \\ 0,2x_2 - x_3 &= 0 \end{aligned}$$

egyenletet kell megoldanunk. Az egyenletrendszer alapmátrixa

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 100 \\ 0,05 & -1 & 0 \\ 0 & 0,2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Az első sor $0,05$-szeresét adjuk hozzá a második sorhoz:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 100 \\ 0 & -1 & 5 \\ 0 & 0,2 & -1 \end{pmatrix}.$$

A második sor $0,2$-szeresét adjuk hozzá a harmadik sorhoz:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 100 \\ 0 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

A Gauss-elimináció után kapott egyenletrendszer:

$$\begin{aligned} -x + 100z &= 0 \\ -y + 5z &= 0. \end{aligned}$$

Mivel az alapmátrix rangja 2, és az ismeretlenek száma 3, ezért az egyik ismeretlent szabad paraméternek választjuk. Legyen $z = t$, ahol $t \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$.

Ekkor a második egyenletből azt kapjuk, hogy $y = 5t$. Az első egyenletből $x = 100t$ adódik. A sajátaltér tehát:

$$S_\lambda = \left\{ \begin{pmatrix} 100t \\ 5t \\ t \end{pmatrix} \middle| t \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \right\} = \left\{ t \cdot \begin{pmatrix} 100 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| t \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \right\}.$$

Tehát a stabil korcsoporteloszlású populáció korcsoporteloszlása hosszú távon: 100 : 5 : 1.

24.2. **Feladat.** Egy adott populáció legfeljebb 3 évig élnek és 3 korcsoportba osztjuk őket. Egy nőstény egy átlagosan 50 olyan tojást rak, amely megéli az első életévét. Az egyéves egyed 10%-a éli meg a második életévét. A kétéves egyed 30%-a éli meg a harmadik életévet. A vizsgált egyedek az első két évben még nem szaporodóképesek.

a) Írjuk fel a populáció Leslie-féle modelljét!
b) Adjuk meg a populáció Leslie-mátrixát!
c) A stabil korcsoport eloszlású populáció nő vagy csökken az idő függvényében?

Megoldás:

a) Az egyes korcsoportokat jelölje rendre $x_1(t)$, $x_2(t)$ és $x_3(t)$. A szaporodási ráták $b_1 = 0$, $b_2 = 0$ és $b_3 = 50$. A túlélési ráták: $p_1 = 0,1$ és $p_2 = 0,3$. A matematikai modell:

$$\begin{aligned} x_1(t+1) &= b_1 \cdot x_1(t) + b_2 \cdot x_2(t) + b_3 \cdot x_3(3) \\ x_2(t+1) &= p_1 \cdot x_1(t) \\ x_3(t+1) &= p_2 \cdot x_2(t). \end{aligned}$$

Az adatok behelyettesítése után azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} x_1(t+1) &= 50 \cdot x_3(3) \\ x_2(t+1) &= 0,1 \cdot x_1(t) \\ x_3(t+1) &= 0,3 \cdot x_2(t). \end{aligned}$$

b) A populáció Leslie-mátrixa:

$$L = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ p_1 & 0 & 0 \\ 0 & p_2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 50 \\ 0,05 & 0 & 0 \\ 0 & 0,2 & 0 \end{pmatrix}.$$

A korcsoportvektor:

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix}.$$

Ezt felhasználva a matematikai modell az

$$x(t+1) = L \cdot x(t)$$

tömörebb formában írható fel.

c) A Leslie-mátrix sajátértékeit a karakterisztikus egyenlet megoldásai adják:

$$\det(L - \lambda \cdot E) = 0.$$

A karakterisztikus polinom:

$$\det \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 50 \\ 0,1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0,2 & -\lambda \end{pmatrix} = -\lambda^3 + 1,5,$$

így a $-\lambda^3 + 1,5 = 0$ egyenletet kell megoldanunk:

$$-\lambda^3 + 1,5 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \lambda = \sqrt[3]{1,5} > 1,$$

így a Leslie-mátrixnak egyetlen sajátértéke van: $\lambda = \sqrt[3]{1,5}$. Mivel $\lambda > 1$, ezért a populáció egyedszáma növekedni fog.

DUPress

Irodalomjegyzék

[1] Babcsányi István – Gyurmánczi János – Szabó Lajos – Wettl Ferenc, *Matematika feladatgyűjtemény I.*, Műegyetemi Kiadó, 2009.

[2] Bárd Ágnes – Frigyesi Miklós – Lukács Judit – Major Éva – Székely Péter – Vancsó Ödön, *Készüljünk az érettségire matematikából emelt szinten (feladatgyűjtemény)*, Műszaki Kiadó, 2006.

[3] Bartha Gábor – Bogdán Zoltán – Duró Lajosné dr. – Gyapjas Ferencné – Hack Frigyes – dr. Kántor Sándorné – dr. Korányi Erzsébet, *Matematika feladatgyűjtemény II.*, Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 2000.

[4] Bárczy Barnabás, *Differenciálszámítás*, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1994.

[5] Benkő Pálné – Diószegi Ferencné – Serény György, *Matematika feladattár II*, Műegyetemi Kiadó, 2002.

[6] Bíró Fatime – Vincze Szilvia, *A gazdasági matematika alapjai*, Debreceni Egyetemi Kiadó, 2010.

[7] Bogya Norbert: Leontief-féle input-output modell, Szegedi Egyetem, http://www.math.u-szeged.hu/ nbogya/linalgk1011II/leontief.pdf

[8] Császár Ákosné, *Matematika I/1*, Műegyetemi Kiadó, 2003.

[9] Csikós Pajor Gizella – Péics Hajnalka, *Analízis elméleti összefoglaló és példatár*, Bolyai Farkas Alapítvány, Zenta, 2010.

[10] Denkinger Géza – Gyurkó Lajos, *Analízis gyakorlatok*, Nemzeti Tankönyvkiadó, 1987.

[11] Farkas István, *Differenciálszámítás gyakorlati jegyzet*, Debreceni Egyetem, 2005.

[12] Freud Róbert, *Lineáris algebra*, ELTE Eötvös Kiadó, 2014.

[13] Gábos Adél – Halmos Mária, *Készüljünk az érettségire matematikából közép-, emelt szinten*, Műszaki Könyvkiadó, 2005.

[14] Gáspár Csaba, *Lineáris algebra és többváltozós függvények*, Széchenyi István Egyetem, 2012.

[15] Dr. Gerőcs László – Juhász István – Orosz Gyula – Paróczay József – Számadó László – Szászné Dr. Simon Judit, *Matematika emelt szintű tananyag*, Nemzedékek Tudása Tankönyvkiadó, 2013.

[16] Gilbert János – Sólyom András – Kocsányi László, *Fizika mérnököknek I-II*, Egyetemi Tankönyv, Műegyetemi Kiadó, 1999.

[17] J. Harcet – L. Heinrichs – P. M. Seiler – M. T. Skoumal, *Mathematics Higher Level*, Oxford University Press, 2012.

[18] Horváth Eszter – Inges János – Nagyné Pálmai Piroska – Róka Sándor – Tassy Gergely, *Tehetséggondozás a matematikában*,
http://users.itk.ppke.hu/ adorjan/matematika/list.html, 2011.

[19] Jakus G. – Kis M. – Magyar T. – Zombori N., *Analízis példatár*, Budapest, 2014.

[20] Kalinszky Sánor – Kuruczné Kovács Márta – Szilágyi György, *Szilárdságtan*, Nemzeti Tankönyvkiadó, 2000.

[21] Kézi Csaba Gábor, *Differenciálszámítás és alkalmazásai*, Debreceni Egyetemi Kiadó, 2016.

[22] Kézi Csaba Gábor, *Differenciálszámítás és alkalmazásai feladatgyűjtemény*, Debreceni Egyetemi Kiadó, 2016.

[23] Kézi Csaba Gábor, *Bevezetés a magasabb szintű matematikába és alkalmazásaiba*, Debreceni Egyetemi Kiadó, 2017.

[24] Kézi Csaba Gábor, *Bevezetés a magasabb szintű matematikába és alkalmazásaiba feladatgyűjtemény*, Debreceni Egyetemi Kiadó, 2017.

[25] Király Balázs, *Analízis (gyakorlat támogató jegyzet)*, elektronikus oktatási segédanyag, http://tamop412a.ttk.pte.hu/files/analizis.pdf, 2011.

[26] Kozák Imre – Szeidl György, *Fejezetek a szilárdságtanból*, elektronikus jegyzet, $http : //www.mech.uni - miskolc.hu/\ bertoti/docs/FSz.pdf$, 2012.

[27] Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapok, 1996. január, 51. oldal, 2869. fizika feladat, http://db.komal.hu/KomalHU/felhivatkoz.phtml?id=41005

[28] Nagyné Kondor Rita – Szíki Gusztáv Áron, *Matematika eszközök mérnöki alkalmazásokban*, Egyetemi jegyzet, Debreceni Egyetem, 2011.

[29] Kossa Attila, *Főfeszültségek számítása*, BME, Műszaki Mechanika Tanszék, elektronikus oktatásai segédanyag, 2012.

[30] Kovács József – Takács Gábor – Takács Miklós, *Analízis*, Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 1986.

[31] Kovács István – Trembeczki Csaba, *Sokszínű matematika feladatgyűjtemény, az analízis elemei, 11 – 12 emelt szint*, Mozaik Kiadó, Szeged, 2011.

[32] Kupán Pál, *Lineáris algebra jegyzet*, elektronikus jegyzet, 2017.

[33] Leitold Adrien, *Lineáris algebra példatár mérnök informatikusoknak*, Typotex, 2011.

[34] Lengyel Csilla Mária, *Szélsőérték-feladatok különböző megoldási módszerei*, ELTE, szakdolgozat, 2012.

[35] Lial M. L. – Greenwell R. N. – Ritchey N. P., *Calculus with applications*, Pearson, 2012.

[36] Mendelson E., *3000 solved problems in calculus*, McGraw-Hill Companies, 1988.

[37] Nagy Tamás, *Vektorok és mátrixok*, Miskolci Egyetem, elektronikus jegyzet, 2012.

[38] Nagyné Kondor Rita – Szíki Gusztáv, *The experience of teaching engineering mathematics*, Economica **4**, 19-23, 2011.

[39] Nagyné Kondor Rita – Szíki Gusztáv, *Engineering applications in the teaching of mathematics II.*, Debreceni műszaki közlemények, 57-60, 2013.

[40] Nándori Frigyes – Szirbik Sándor, *Statika oktatási segédlet a Gépészmérnöki és Informatikai Kar Bsc levelezős hallgatói részére*, Mechanikai Tanszék, Miskolc-Egyetemváros, 2008.

[41] Obádovics J. Gyula, *Lineáris algebra példákkal*, Scolar Kiadó, 2001.

[42] Obádovics J. Gyula – Szarka Zoltán, *Felsőbb matematika*, Scolar Kiadó, 1999.

[43] Pintér Lajos, *Analízis I*, Typotex, 1998.

[44] Rosser M., *Basic mathematics for economists*, Routledge, 2003.

[45] Salamon Júlia, *Markov-láncok*, elektronikus segédanyag, http://www.emte.siculorum.ro/ salamonjulia/, 2017.

[46] Sikolya Eszter, *Analízis jegyzet Matematikatanári Szakosok részére*, elektronikus jegyzet, tankonyvtar.ttk.bme.hu, 2013.

[47] Simon Anita, *Az analízis néhány közgazdaságtani alkalmazása*, szakdolgozat, Eötvös Loránd Tudományegyetem, Természettudományi Kar, 2009.

[48] Jude Thaddeus Socrates, *A portrait of linear algebra*, Kendall Hunt Publishing Company, 2016.

[49] Szentelekiné Dr. Páles Ilona, *Analízis példatár*, Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 2011.

[50] Székely Károly, *Romániai matematikai érettségi mintafeladatok*, elektronikus tananyag, $http : //szekelykaroly.ro/fileok/d_mt2_sii_005_lm.pdf$, 2009.

[51] Stewart J., *Calculus*, Brooks/Cole, 2012.

[52] Szíki Gusztáv Áron – Nagyné Kondor Rita – Kézi Csaba Gábor, *Matematikai eszközök mérnöki alkalmazásokban*, Debreceni Egyetemi Kiadó, 2017.

[53] Tan S. T., *Applied Calculus for the Managerial, Life and Social Sciences*, Brooks/Cole, 1999.

[54] Tasi Gyula, *Matematikai kémia*, JATEPress, 2017.

[55] Thomas G. B. – Weir M. D. – Hass J. – Giordano F. R., *Thomas féle kalkulus I. kötet*, Typotex, Budapest, 2008.

[56] Vincze Szilvia, *Gazdasági matematika II.*, elektronikus segédanyag, http://docs.wixstatic.com, 2017.

[57] Vincze Szilvia, *Matematika II.*, elektronikus segédanyag, http://docs.wixstatic.com, 2017.

[58] Wayne L. Winstone, *Operációkutatás*, Aula Kiadó, 2003

[59] Wettl Ferenc, *Lineáris algebra*, elektronikus segédanyag, http://tankonyvtar.ttk.bme.hu/pdf/14.pdf, 2011.

[60] Wettl Ferenc, *A lineáris algebra alkalmazásai*, elektronikus segédanyag, http://www.tankonyvtar.hu/hu/tartalom/tamop412A/2011-0064.html, 2014.

DUPress

DUPress

Tartalomjegyzék

DUPress