



A számítógépes görbe- és felületmodellezés néhány geometriai problémájának megoldása

Doktori (PhD) értekezés

KUNKLI ROLAND IMRE

TÉMAVEZETŐ: DR. HOFFMANN MIKLÓS

DEBRECENI EGYETEM
TERMÉSZETTUDOMÁNYI DOKTORI TANÁCS
INFORMATIKAI TUDOMÁNYOK DOKTORI ISKOLA
DEBRECEN, 2014.

Ezen értekezést a Debreceni Egyetem Természettudományi Doktori Tanács Informatikai Tudományok Doktori Iskola *Diszkrét matematika, képfeldolgozás és komputergeometria* programja keretében készítettem a Debreceni Egyetem természettudományi doktori (PhD) fokozatának elnyerése céljából.

Debrecen, 2014. szeptember 15.

.....
Kunkli Roland Imre
jelölt

Tanúsítom, hogy Kunkli Roland Imre doktorjelölt 2009–2012 között a fent megnevezett Doktori Iskola *Diszkrét matematika, képfeldolgozás és komputergeometria* programjának keretében irányításommal végezte munkáját. Az értekezésben foglalt eredményekhez a jelölt önálló alkotó tevékenységével meghatározóan hozzájárult. Az értekezés elfogadását javasolom.

Debrecen, 2014. szeptember 15.

.....
Dr. Hoffmann Miklós
témavezető

A számítógépes görbe- és felületmodellezés néhány geometriai problémájának megoldása

Értekezés a doktori (Ph.D.) fokozat megszerzése érdekében az informatika
tudományágban

Írta: Kunkli Roland Imre okleveles matematika-ábrázoló geometria szakos tanár,
okleveles informatikatanár

Készült a Debreceni Egyetem Informatikai Tudományok doktori iskolája
(Diszkrét matematika, képfeldolgozás és komputergeometria programja) keretében

Témavezető: Dr. Hoffmann Miklós

A doktori szigorlati bizottság:

elnök: Dr. Sztrik János
tagok: Dr. Hajdu András
Dr. Nagy Péter Tibor

A doktori szigorlat időpontja: 2012. december 12.

Az értekezés bírálói:

Dr.
Dr.

A bírálóbizottság:

elnök: Dr.
tagok: Dr.
Dr.
Dr.
Dr.

Az értekezés védésének időpontja: 20

Köszönetnyilvánítás

Ezúton szeretnék köszönetet mondani mindazoknak a személyeknek és intézményeknek, akik és amelyek segítettek ennek az értekezésnek a létrejöttét¹.

Szeretném megköszönni dr. Szabó József Tanár úrnak, hogy bevezetett az ábrázoló geometria világába, hangsúlyt fektetve annak a számítógépi grafikában való sokrétű alkalmazhatóságára. Elsők között ismertette fel velem, hogy a tudomány kezdetben távolinak tűnő világában elérhető távolságban is akadnak megoldásra váró problémák. Gyakorlatias és megoldásorientált szemléletmódja mindig követendő példaként fog előttem állni.

Hálásan köszönöm témavezetőmnek, dr. Hoffmann Miklósnak a belém fektetett bizalmat, s hogy tanácsaival és iránymutatásaival folyamatosan segítette szakmai fejlődésemet, minden tekintetben rengeteget tanulhattam tőle a közös munka évei alatt.

Hálával tartozom a Debreceni Egyetem Informatikai Tudományok Doktori Iskolájának, hogy lehetőséget nyújtott PhD tanulmányaim elvégzésre.

Ezúton is köszönöm kollégáimnak a biztatást, a bizalmat és a támogatást.

Továbbá szeretnék köszönetet mondani páromnak és családomnak a sok-sok türelemért és támogatásért, amit a dolgozat elkészülte alatt tőlük kaphattam.

¹A dolgozat készítése a TÁMOP 4.2.4.A/2-11-1-2012-0001 Nemzeti Kiválóság Program című kiemelt projekt keretében zajlott. A projekt az Európai Unió támogatásával, az Európai Szociális Alap társfinanszírozásával valósul meg.

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés	1
2. A felhasznált matematikai háttér	3
2.1. A dolgozatban alkalmazott görbetípusok	3
2.2. Klasszikus geometriai eszközök	7
2.2.1. Az Apollóniusz-feladat és megoldása	7
2.2.2. Izooptikus görbék	9
2.2.3. Görbesereg burkolójának meghatározása	10
2.2.4. Polaritás	11
3. „Skinning”	15
3.1. Az alapprobléma	15
3.1.1. A probléma egy lehetséges precízebb leírása	16
3.2. Előzmények	18
3.2.1. Ciklográfián alapuló megközelítés	19
3.2.2. Iteratív módszer	20
3.3. Saját módszerek és azok eredményei	23
3.3.1. Az érintési pontok lokalizációja	23
3.3.2. Az érintési pontok szeparációja	28
3.3.3. Az érintővektorok meghatározása	30
3.3.4. A megoldást jelentő burkológörbék konstrukciója	32
3.3.5. A módszer gömbökre történő kiterjesztése	35
3.4. Implementációs megfontolások	44
3.5. Saját eredmények biarc görbékkel	45
3.5.1. Motiváció	45
3.5.2. Biarc interpolációs ívek osztályozása	47
3.5.3. A θ -ra vonatkozó feltételek	50
3.5.4. Összegzés	56
4. Szabadformájú görbék izooptikusai	57
4.1. Történeti áttekintés és az alapprobléma	57
4.2. Kvadratikus Bézier-görbe izooptikus görbéje	58
4.3. Izooptikus származtatása látókörívekkel	62

4.4. A kutatás új eredményei	62
4.5. A burkolók burkolójának kiszámítási módja	66
5. Összefoglalás	73
6 Summary	75
Irodalomjegyzék	77
A. A saját <i>skin</i> előállító algoritmus térbeli kimenetei	85
B. Publikációs jegyzék	87

1. Bevezetés

A számítógéppel segített geometriai tervezés (Computer Aided Geometric Design) már több, mint fél évszázada teszi lehetővé a mérnökök számára, hogy az informatika lehetőségeit kihasználva legyenek képesek egy-egy új objektum létrehozására, megtervezésére, többek között szabadformájú görbéket és felületeket felhasználva. A számítógép segítségével nemcsak megjeleníthetjük a létrehozni kívánt formákat és alakzatokat a monitoron, hanem azok matematikailag precíz leírása és megadása révén a létrehozott alakzatok pontosan reprodukálhatók, a gyártási folyamat automatizálása, például az egyes elemek robotokkal történő előállítására enélkül nem volna lehetséges.

Természetes, hogy a tervezési folyamat megkönnyítése érdekében állandó igény és fejlődés figyelhető meg arra vonatkozóan, hogy a tervezők által használható eszközkészlet minél széleskörűbb lehetőségeket biztosítson, így juthattunk el a kezdetekben használt Hermite-ívektől a napjainkban széles körben használt NURBS görbékig és felületekig. De manapság is folyamatosan kerülnek elő olyan új típusú görbék, melyek segítségével az eddig csak nehezen kivitelezhető feladatok könnyebben, egyszerűbben megoldhatóvá válhatnak. A szakterület egyik alapművében részletesen olvashatunk erről a dinamikus fejlődésről [15].

A tervezés megkönnyítése érdekében célként jelenik meg olyan technikák kifejlesztése is, melyekkel a hagyományosan használt, pontalapú interpolációs technikák mellett összetettebb geometriai alakzatok (görbék, gömbök) alapján származtathatunk új objektumokat [54, 61].

Kutatásunk során elsőként a fenti célokat szolgáló, körök és gömbök beburkolása által származtatható görbe, illetve felület létrehozásán dolgoztunk. Az előállított módszerünkkel több szempontból is sikerült a meglévő eredményeken túlmutatnunk.

A számítógéppel segített geometriai tervezés területén végzett kutatások másik nagy családjának célja, hogy a meglévő eszközök mélyebb elméleti analízise révén feltárjon olyan tulajdonságokat és összefüggéseket, melyek szintén segíthetik a már ismert objektumokkal

való precízebb és hatékonyabb munkavégzést. Gondolhatunk itt az egy adott ponton való áthaladás biztosítására tetszőleges görbe- vagy felülettípus esetén [22].

A terület ezen részéhez kapcsolódó kutatási tevékenységem során pedig klasszikus differenciálgeometriai tulajdonságokat vizsgálhattam szabadformájú görbék egy bizonyos osztályára vonatkozóan, a kapott, Bézier-görbék izooptikusaira vonatkozó eredményeink elvi jelentőségük mellett gyakorlati szempontból is nagyon hasznosnak bizonyultak.

A dolgozat első részében részletesen bemutatom a felhasznált matematikai eszközöket, majd az előzmények részletes ismertetése után következik a terminológiában „*skinning*”-nek nevezett témakörben elért eredményeink értékelő bemutatása, ismertetésüket függelékként elhelyezett kimenetek is segítik. Szintén ehhez a témához kapcsolható problémára megoldást nyújtó számítások kerültek az ezt követő fejezetbe, végül az izooptikusok terén végzett kutatómunkánk új eredményei kerülnek közlésre.

2. A felhasznált matematikai háttér

Ebben a fejezetben összefoglalásra kerülnek azok a matematikai és geometriai eszközök, illetve ismeretek, amelyek a dolgozatban közölt eredmények megszületését nagyban elősegítették, illetve kiindulási alapként szolgáltak.

2.1. A dolgozatban alkalmazott görbetípusok

A számítógéppel segített geometriai modellezés területén standardnak számító görbe- és felülettípusok átfogó szakirodalommal rendelkeznek mind hazai, mind nemzetközi viszonylatban [22, 14, 15, 21, 42, 46]. Az alábbiakban szeretném röviden ismertetni azokat a fontosabb elemeket, amelyek előkerülnek a dolgozatban.

2.1. Definíció (Hermite-ív). *Legyen adott a \mathbf{p}_0 és \mathbf{p}_1 pont, továbbá a \mathbf{t}_0 és \mathbf{t}_1 vektor, melyekre $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \mathbf{t}_0, \mathbf{t}_1 \in \mathbb{R}^\delta, \delta \geq 2$. Ekkor az*

$$\mathbf{a}(u) = \mathbf{p}_0(2u^3 - 3u^2 - 1) + \mathbf{p}_1(-2u^3 + 3u^2) + \mathbf{t}_0(u^3 - 2u^2 + u) + \mathbf{t}_1(u^3 - u^2)$$
$$u \in [0, 1]$$

görbét a $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \mathbf{t}_0$ és \mathbf{t}_1 geometriai adatok által definiált Hermite-ívnek nevezzük.

Az így konstruált görbe rendelkezik a következő tulajdonságokkal:

$$\mathbf{a}(0) = \mathbf{p}_0, \quad \mathbf{a}(1) = \mathbf{p}_1, \quad \dot{\mathbf{a}}(0) = \mathbf{t}_0, \quad \dot{\mathbf{a}}(1) = \mathbf{t}_1,$$

azaz kezdő- és végpontja rendre \mathbf{p}_0 és \mathbf{p}_1 , illetve kezdő- és végpontbeli érintővektora rendre \mathbf{t}_0 és \mathbf{t}_1 .

2.2. Definíció (Bernstein-polinom). *A*

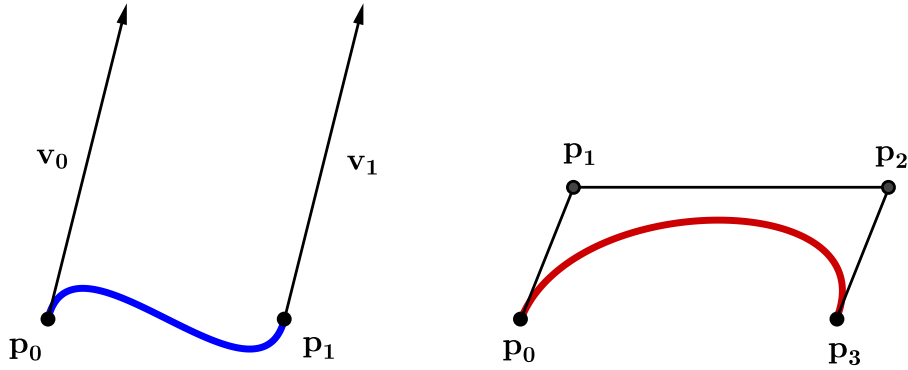
$$B_i^n(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i}, \quad (i = 0, 1, \dots, n)$$

módon definiált polinomot az i -edik n -edfokú Bernstein-polinomnak nevezzük, továbbá $B_0^0(t) \equiv 1$, illetve $B_i^n(t) \equiv 0$, ha $i > n$ vagy $i < 0$.

2.3. Definíció (Bézier-görbe). Legyenek adottak a $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n \in \mathbb{R}^\delta$ pontok, ahol $n \in \mathbb{N}$ és $\delta \geq 2$. Ekkor a

$$\mathbf{b}(u) = \sum_{i=0}^n B_i^n(t) \mathbf{p}_i, u \in [0, 1]$$

módon definiált görbét Bézier-görbének nevezzük. A $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n$ pontokat a görbe kontrollpontjainak nevezzük, az általuk meghatározott poligon a görbe kontrollpoligonja.



1. ábra. Bal oldalon az Hermite-ívre, míg jobb oldalon a Bézier-görbére láthatunk egy példát.

2.4. Definíció (folytonos kapcsolódás). Legyen adott a

$$\mathbf{g}_1 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^\delta \quad \text{és a} \quad \mathbf{g}_2 : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^\delta$$

görbe, ahol $\delta \geq 2$. Legyen továbbá $u_0 \in [a, b]$ és $v_0 \in [c, d]$. Ha

$$\left(\frac{d^i \mathbf{g}_1}{du^i} \right)_{u_0} = \left(\frac{d^i \mathbf{g}_2}{dv^i} \right)_{v_0}, (i = 0, 1, \dots, n)$$

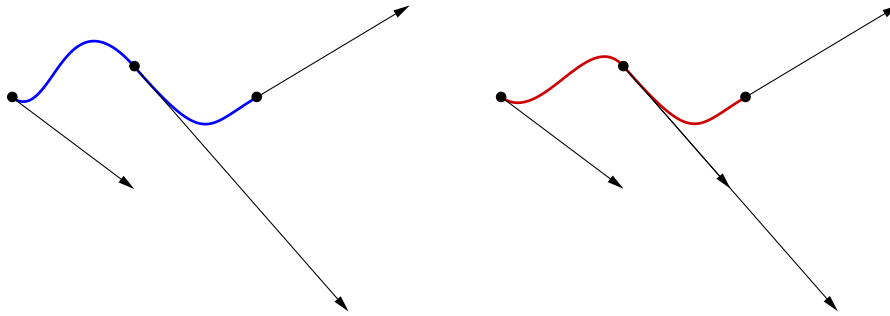
teljesül, akkor azt mondjuk, hogy a \mathbf{g}_1 görbe az u_0 paraméterértékű pontjában a paraméter szerint n -edrendben folytonosan kapcsolódik a

g_2 görbéhez annak v_0 paraméterértékhez tartozó pontjában. Az ilyen típusú kapcsolódást C^n -nel jelöljük. Ha a C^0 folytonos csatlakozás fennáll, továbbá

$$\dot{\mathbf{g}}_1(u_0) = \lambda \dot{\mathbf{g}}_2(v_0), \lambda \neq 0, \lambda \in \mathbb{R}$$

is teljesül, akkor G^1 folytonos csatlakozásról beszélünk.

A G^1 folytonos csatlakozás tehát tulajdonképpen azt jelenti, hogy a csatlakozási pontban a görbék érintőegyenese megegyezik. C^1 és G^1 folytonos csatlakoztatásra láthatunk példát a 2. ábrán.



2. ábra. Példa C^1 (kék), illetve G^1 (piros) folytonosan csatlakozó Hermite-ívekre.

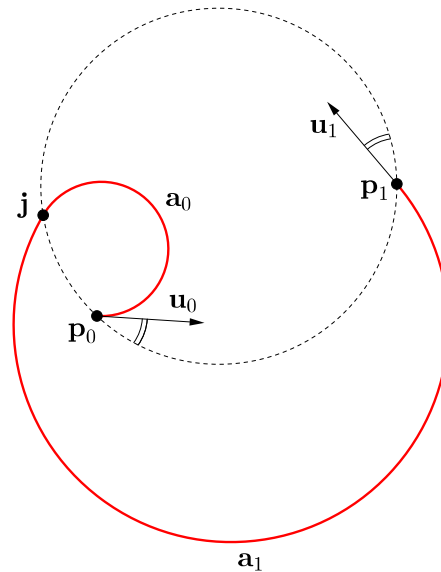
2.5. Definíció (biarc interpoláció). Legyenek adottak a \mathbf{p}_0 és \mathbf{p}_1 pontok, valamint az ezekben a pontokban értelmezett \mathbf{u}_0 és \mathbf{u}_1 egységnyi hosszúságú érintővektorok. Azt mondjuk, hogy az a_0 és a_1 körívek megadott geometriai adatok által meghatározott biarc interpolációs ívet alkotnak, ha rendelkeznek egy közös \mathbf{j} végponttal, továbbá teljesülnek a következő feltételek:

- a_0 végpontjai \mathbf{p}_0 és \mathbf{j} , és \mathbf{p}_0 -beli, \mathbf{p}_0 -tól \mathbf{j} irányába tartó paraméterezéséhez tartozó érintővektorának iránya \mathbf{u}_0 irányával megegyező.

- a_1 végpontjai \mathbf{j} és \mathbf{p}_1 , és \mathbf{p}_1 -beli, \mathbf{j} -től \mathbf{p}_1 irányába tartó paraméterezéséhez tartozó érintővektorának iránya \mathbf{u}_1 irányával megegyező.
- A két körív közös érintő egységvektorral rendelkezik a \mathbf{j} pontban, ha a_0 esetében a \mathbf{p}_0 -tól \mathbf{j} -ig, míg a_1 esetében a \mathbf{j} -től \mathbf{p}_1 -ig tartó paraméterezést tekintjük.

Šír és munkatársai cikkükben [52] szemléletes bizonyítást adnak a következő tételre:

2.1. Tétel. *A \mathbf{p}_0 , \mathbf{p}_1 , \mathbf{u}_0 , \mathbf{u}_1 geometriai adatok által meghatározott biarc interpolációs ívek \mathbf{j} csatlakozási pontja minden esetben egy olyan körön helyezkedik el, amely illeszkedik a \mathbf{p}_0 és a \mathbf{p}_1 pontra, továbbá \mathbf{u}_0 -lal és \mathbf{u}_1 -gyel bezárt irányított szöge egymással egyenlő.*



3. ábra. Adott geometriai adatokhoz tartozó biarc interpolációs ív és a lehetséges csatlakozási pontok mértani helye.

A dolgozatban tehát ezeket az alapvető görbetípusokat használjuk fel.

2.2. Klasszikus geometriai eszközök

Az alapvető görbetípusokon túl több klasszikus geometriai eredményt is felhasználtunk a kutatás során, ezeket szeretném röviden bemutatni ebben az alfejezetben.

2.2.1. Az Apollóniusz-feladat és megoldása

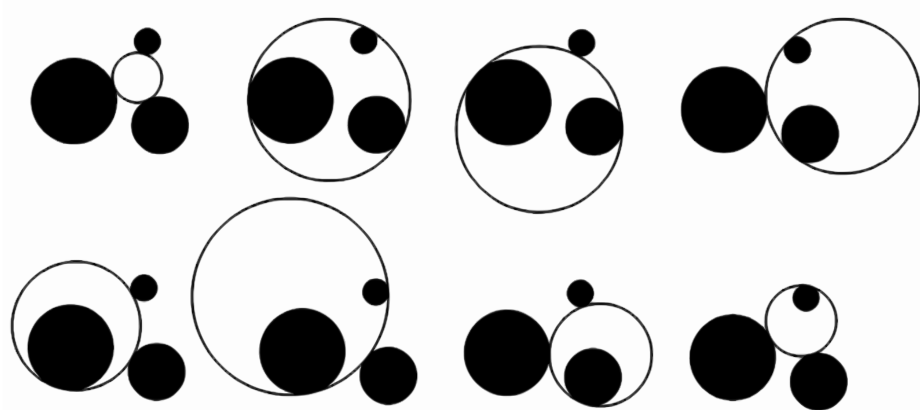
Apollóniusz jól ismert problémája, hogy három egy síkra illeszkedő kör esetén meg kell határozni az összes olyan kört, amely mindhármat érinti. A feladat nagyon könnyen megfogalmazható és megérthető, a megoldása viszont korántsem triviális. Többfajta megoldási mód is ismert, most ezekből szeretnék bemutatni néhányat.

2.2.1.1. Algebrai megoldási mód Talán a legegyszerűbbnek titulálható megoldás az, ha a problémát jól kezelhető másodfokú egyenletrendszerre vezetjük vissza. Legyen a három megadott kör középpontja rendre $O_1(x_1, y_1)$, $O_2(x_2, y_2)$ és $O_3(x_3, y_3)$, sugaruk r_1 , r_2 és r_3 . Ha a keresett érintőkör középpontját $O(x, y)$ jelöli, sugarát pedig r , akkor az alábbi, az új és a régi körök középpontjának távolságaira felírható egyenletrendszer megoldásával meghatározhatjuk a keresett kört definiáló három ismeretlent (x, y, r) .

$$\begin{cases} (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = (r - s_1 r_1)^2 \\ (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 = (r - s_2 r_2)^2 \\ (x - x_3)^2 + (y - y_3)^2 = (r - s_3 r_3)^2 \end{cases}$$

s_1 , s_2 és s_3 értékét tetszőlegesen választhatjuk egymástól függetlenül (-1) -nek vagy 1 -nek aszerint, hogy az adott egyenletben külső vagy belső érintkezést kívánunk meg. A lehetőségek számából érezhetjük, hogy általános esetben nyolc megoldást kaphatunk (lásd 4. ábra).

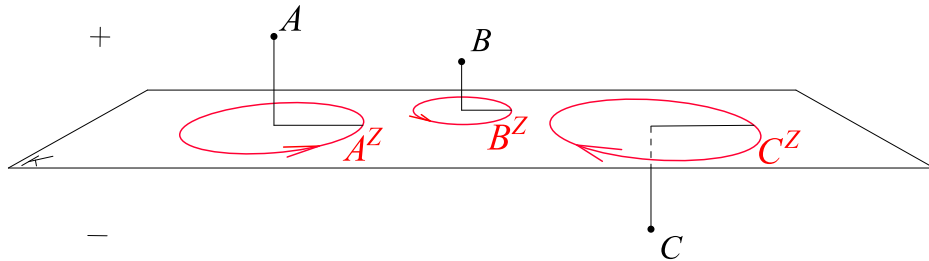
2.2.1.2. Ciklografikus módszer A probléma ismert általánosításait (kör helyett pontot vagy egyenest is tekinthetünk) is kezelni képes megoldási módot a *ciklográfia* módszerei [25, 2] szolgáltatnak, amely



4. ábra. Az Apollóniusz-feladat megoldásai [16].

a nemlineáris leképezések egy speciális fajtája. A tér pontjai és a képsíknak választott sík irányított körei, más néven ciklusai között létesít egy kölcsönösen egyértelmű megfeleltetést. Tekintsük a tér egy tetszőleges K síkját, melyet a továbbiakban képsíknak nevezünk. K a teret két féltérre bontja, egyiket negatív, másikat pozitív féltérnek nevezzük. A ciklográfiában a tér egy tetszőleges pontjának az a síkbeli ciklus felel meg, melynek középpontja a tekintett pont képsíkra eső merőleges vetülete, irányítása pedig aszerint pozitív (óramutató járásával ellentétes) vagy negatív (óramutató járásával megegyező), hogy a képsík által meghatározott két féltér közül a pozitívban helyezkedik el vagy a negatívban (lásd 5. ábra). Képsíknak pontjai nulla sugarú ciklusként kezelendők. Minden ciklusra és a neki megfelelő térbeli pontra egy 45° -os félnyílásszögű forgáskúpot lehet illeszteni, melyeket *C-kúpok*nak nevezünk.

Az Apollóniusz-feladat megoldásait megkaphatjuk, ha a három kör síkját képsíknak tekintjük, továbbá a három kör mindegyikéhez egy-egy irányítást rendelve, azokból ciklusokat képzünk. Az így kapott három ciklushoz tartozó C-kúpok közös pontjai olyan tulajdonságúak, hogy ciklografikus képek érintőciklusai a tekintett ciklusoknak, így irányítás nélkül tekintve azokat az eredeti három kör mindegyikét érin-



5. ábra. A ciklográfia a tér és a képsík ciklusai között létesít kölcsönösen egyértelmű megfeleltetést.

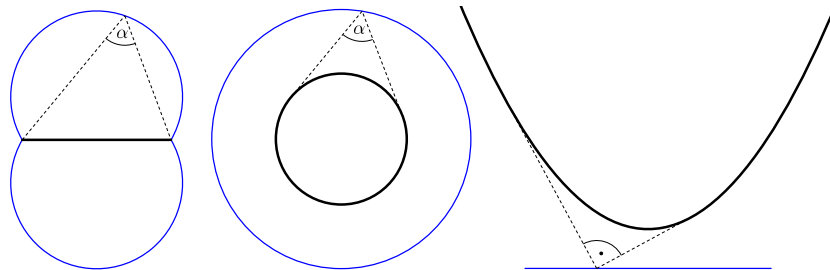
tő köröket kaphatunk. Az irányításokat tekintve a ciklussá alakításakor nyolc esetet különböztethetünk meg, hiszen minden ciklus esetén két lehetőség közül választhatunk. Azonban minden esethez található egy másik, amely ugyanazokat a megoldásköröket (és nem ciklusokat) szolgáltatja. Mivel egy adott irányítás felvétele után általános esetben két megoldás kapható, a teljes megoldást természetesen itt is nyolc kör fogja alkotni.

2.2.2. Izooptikus görbék

Az izooptikus a geometria régóta számon tartott fogalmai közé tartozik, s a következőt jelenti:

2.6. Definíció. *Adott görbe izooptikus görbájén azon pontok halmazát értjük, melyekből a görbe megadott szög alatt látszik.*

Már elemi tanulmányaink során is találkozhatunk a problémával, amikor a látókörívvel ismerkedünk. A fenti definíció alapján nyilvánvaló, hogy szakasz izooptikusát a látóköríveinek uniója jelenti, kör esetében egy újabb kört kapunk eredményül, míg tetszőleges parabolát tekintve annak vezéregyenese lesz a derékszöghöz tartozó izooptikus görbe (lásd 6. ábra).



6. ábra. Néhány klasszikus izooptikus görbe. Az alapgörbék fekete, izooptikusuk kék színnel feltüntetve.

2.2.3. Görbesereg burkolójának meghatározása

Különböző geometriai problémák megoldása során számos alkalommal lehet szükség arra, hogy egy implicit vagy paraméteres formában megadott görbesereg burkológörbét analitikusan meghatározzuk. A feladatnak létezik jól ismert megoldási módja [5, 24], azonban a számolás kivitelezhetősége nagy mértékben függ a kiindulási alapként szolgáló görbeseregtől, annak bonyolultságától. Egyszerűbb esetben (pl. szakaszszereg) egyszerű számolással eredményhez jutunk, míg bonyolultabb esetekben sokszor csak haladottabb ismeretek segítségével van esélyünk előállítani a kívánt burkológörbét, ám ekkor sem garantált feltétlenül a siker. A következőkben mindkét fent jelzett megadási forma esetében szeretném ismertetni az általános megoldás lépéseit Dan Kalman munkái nyomán [23, 24].

Először tekintsük az

$$F(x, y, p) = 0$$

implicit egyenlettel megadott görbesereget. Esetünkben p jelzi azt a futóparamétert, melynek változtatásával a sereg újabb tagját definiáló egyenlet állítható elő.

Ebben az esetben az

$$\begin{aligned} F(x, y, p) &= 0 \\ \frac{\partial F}{\partial p}(x, y, p) &= 0 \end{aligned}$$

egyenletrendszerből p kiküszöbölésével olyan egyenletet kaphatunk, melyben csak x és y szerepel, s ez éppen a keresett burkológörbét fogja leírni.

Nagyon sokszor azonban inkább paraméteres formában ismerjük azt a görbesereget, melynek esetében a problémát megoldani kívánjuk. Vizsgáljuk meg, ebben az esetben mi a teendő. Legyen tehát adott az

$$\begin{aligned} x &= f(t, p) \\ y &= g(t, p) \end{aligned}$$

görbesereg, ahol p szintén az előbbieken is említett futóparamétert jelöli. p rögzítésével tehát ebben az esetben is a sereg egyik tagját kaphatjuk meg, a jól ismert koordinátafüggvényes előállításban. Ebben az esetben az

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial x}{\partial p} \\ \frac{\partial y}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial p} \end{vmatrix} = 0$$

egyenletet hívjuk segítségül ahhoz, hogy kiküszöböljük t -t a sereget definiáló rendszerből. Ha a fenti determinánst tartalmazó egyenletből kiindulva sikerül elérnünk, hogy kifejezzük t -t p valamilyen függvényeként $t = T(p)$ módon, akkor

$$x = f(T(p), p) \quad \text{és} \quad y = g(T(p), p)$$

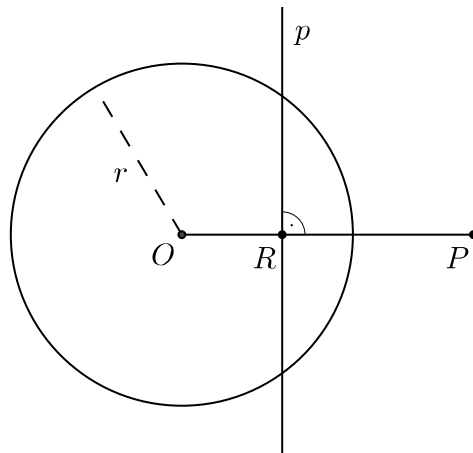
éppen a keresett görbe koordinátafüggvényei lesznek.

2.2.4. Polaritás

Többek között körök és gömbök érintőegyeneseinek hatékony meghatározását teszi lehetővé, ha tisztában vagyunk a *pólus*, *poláris*,

illetve *polársík* fogalmakkal, melyeket az alábbiakban Strommer Gyula *Geometria* című könyve [55] alapján ismertetünk. A témáról szintén részletes leírást találhatunk Bácsó Sándor, Papp Ildikó és Szabó József *Projektív geometria* című jegyzetében [3].

2.7. Definíció (Körre vonatkozó polaritás). *Tekintsünk egy O középpontú és r sugarú kört. Vegyünk föl egy tetszőleges, O -tól különböző P pontot, majd az OP félegyenesen határozzuk meg azt az R pontot, amelyre $d(OP) \cdot d(OR) = r^2$ teljesül (ahol d -vel a szokásos euklideszi távolságfüggvényt jelöltük). Az R ponton keresztül az OP félegyenesre merőleges p egyenest a P pont polárisának, a P pontot pedig a p egyenes pólusának nevezzük.*



7. ábra. Körre vonatkozó polaritás.

Ahogy egy sík pontjai és egyenesei között egy ebben a síkban fekvő kör megfeleltetést létesít, úgy a tér pontjai és síkjai között is teremthetünk egy olyan kapcsolatot, hogy minden pontnak egy síkot, valamint minden síknak egy pontot feleltetünk meg.

2.8. Definíció (Gömbre vonatkozó polaritás). *Tekintsünk egy O középpontú és r sugarú gömböt. Vegyünk föl egy tetszőleges, O -tól*

különböző P pontot, majd az OP félegyenesen határozzuk meg azt az R pontot, melyre $d(OP) \cdot d(OR) = r^2$ teljesül (ahol d -vel a szokásos euklideszi távolságfüggvényt jelöltük). Az R ponton keresztül az OP félegyenesre merőleges π síkot a P pont polársíkjának, a P pontot pedig a π sík pólusának nevezzük.

2.2.4.1. Polaritás és homogén koordináták Tekintsünk egy $O(o_x, o_y)$ középpontú r sugarú kört, melyet nevezzünk k -nak. A kör

$$(x - o_x)^2 + (y - o_y)^2 = r^2$$

egyenlete homogén koordinátákra átvérve a következő alakra hozható:

$$x_1^2 + x_2^2 + (o_x^2 + o_y^2 - r^2) x_3^2 - 2o_x x_1 x_3 - 2o_y x_2 x_3 = 0.$$

Legyen adott egy P pont, illetve P k körre vonatkozó polárisa, mely egyenest nevezzük p -nek. Legyen ismert P és p homogén koordinátáikkal, azaz $P[P_{x_1}, P_{x_2}, P_{x_3}]$ és $p[p_{x_1}, p_{x_2}, p_{x_3}]$. Ekkor a kör homogén koordinátás egyenletéből könnyen felírhatjuk annak mátrixát, így P és p koordinátáiból képzett oszlopvektorok felhasználásával igaz az alábbi egyenlőség:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -o_x \\ 0 & 1 & -o_y \\ -o_x & -o_y & o_x^2 + o_y^2 - r^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_{x_1} \\ P_{x_2} \\ P_{x_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{x_1} \\ p_{x_2} \\ p_{x_3} \end{pmatrix}.$$

A fenti összefüggés alapján könnyen kiszámolhatjuk egy adott pont megadott körre vonatkozó polárisát, illetve adott egyenes pólusát is.

Gömb esetén teljesen analóg számítással adódik egy pont adott gömbhöz számolt polársíkja, ebben az esetben természetesen 4×4 -es mátrixszal kell dolgoznunk. Tehát a $Q[Q_{x_1}, Q_{x_2}, Q_{x_3}, Q_{x_4}]$ pont $K(k_x, k_y, k_z)$ középpontú s sugarú gömbre vonatkozó $q[q_{x_1}, q_{x_2}, q_{x_3}, q_{x_4}]$ polárisára a következő kiszámítási módot kapjuk:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -k_x \\ 0 & 1 & 0 & -k_y \\ 0 & 0 & 1 & -k_z \\ -k_x & -k_y & -k_z & k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 - r^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_{x_1} \\ Q_{x_2} \\ Q_{x_3} \\ Q_{x_4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_{x_1} \\ q_{x_2} \\ q_{x_3} \\ q_{x_4} \end{pmatrix}.$$

3. „Skinning”

3.1. Az alapprobléma

A geometriai adatok interpolációja központi fontosságú a számítógépes geometriai tervezésben. Amennyiben ezek az adatok pontok, számtalan, ma már szinte standardnak számító módszer közül választhatunk [21, 14, 42], és folyamatosan születnek eredmények az ilyen típusú interpoláló görbék alakváltoztatási lehetőségeinek feltárását illetően is [57, 58, 39, 19]. Viszont abban az esetben, ha például körökről vagy gömbökről van szó, már korántsem ez a helyzet.

Napjainkban egyre inkább igény mutatkozik arra, hogy az interpoláció fogalmát valamilyen formában kiterjesszük más típusú geometriai objektumok esetére is, említhetjük itt a kört, vagy akár a gömböt is. Ilyen interpolációs módszereket alkotva lehetőségünk nyílna csőszerű struktúrák egyszerűbb tervezésére, lefedési problémák hatékony megoldására vagy molekulamodellizációs feladatok megkönnyítésére, természetesen ez utóbbi esetben már három dimenzióban értelmezve a problémát [13, 6]. Ez az igény egészen újnak számító publikációkban is tetten érhető, orvosi képfeldolgozásban történő felhasználás, konkrétan érmodellezési problémák kapcsán [62, 53, 54]. A számítógépes animációkészítésben is találkozhatunk hasonló eszközzel, különböző karakterek létrehozásakor egy vázszerkezet megadása után származtathatjuk az azt beburkoló felületet [51].

Mivel egy viszonylag új területről van szó, a szakmai terminológia kis kiegészítésre szorul. Angol szóhasználatban körök esetén gyakran olvasni „*2D ball skinning*”-ről, melynek során lényegében olyan görbepár megtalálása a cél, melyek a tekintett köröket rendre érintik egy-egy pontban, továbbá a görbéktől elvárjuk, hogy kellően *simák* legyenek, vizuálisan kielégítő eredményt szolgáltatassanak. A probléma nyilván matematikailag precízebb megfogalmazásért kiált, azonban ez irányú kutatásaink megkezdéséig ez még nemzetközi szinten sem állt rendelkezésre. Sok esetben jobb híján a megjelenést jól leírni képes geometriai tulajdonságok alapján hoznak létre energiafüggvé-

nyeket, melyek lokális vagy globális minimumhelyének megtalálása a cél. Azonban ezeknek az energiafüggvényeknek a kialakítása sokszor csak többszöri kísérletezések után, szubjektív döntések eredményeként adódik [53, 54].

Ahogy az említésre került, a feladat térbe is kiterjeszthető, amikor gömbsorozat esetén keresünk olyan felületet, mely a gömböket rendre érinti egy-egy adott gömbön futó görbe mentén. A térbeli eset motiválta például a magyar terminológiában használatos „bőrözés” elnevezést is. Megítélésem szerint a „burkológörbe”, illetve „burkolófelület” elnevezés is jól érzékelteti, milyen tulajdonságú objektumokat keresünk, még akkor is, ha a differenciálgeometriában ez a fogalom már használatban van.

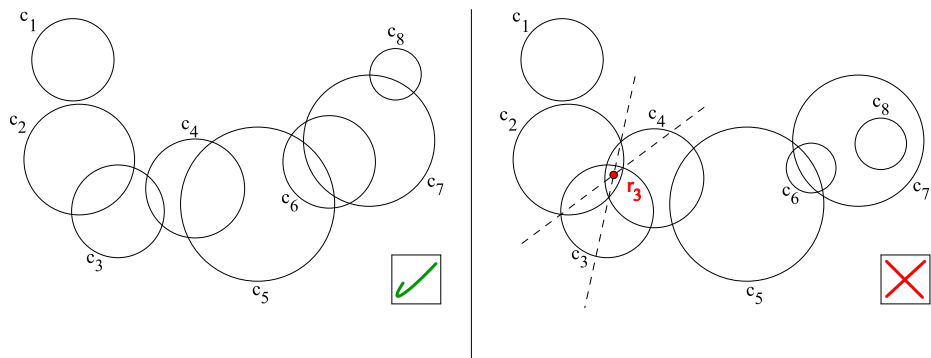
Az említett „skinning”, azaz „bőrözés”-nek nevezett technika eredményeként előálló görbékre és felületekre szintén „burkológörbe”, illetve „burkolófelület” névvel fogok esetenként utalni a dolgozatban, ahol ez nem okoz félreértést, a következetesség megtartása mellett.

Cikkünkben [30] precíz leírást adtunk arra nézve, milyen tulajdonságú körsorozatot fogadunk el érvényes inputként a probléma szempontjából, továbbá felvázoltuk azokat a feltételeket, amelyeket elvárunk a megoldást szolgáltató görbétől. Ahhoz, hogy a témában fellelhető eddigi eredmények hiányosságaira rávilágíthassunk, az alábbiakban ezen általunk publikált feltételeket közöljük [30].

3.1.1. A probléma egy lehetséges precízebb leírása

Mint azt említettük, a probléma pontos megfogalmazása korántsem egyszerű feladat, a hasonló témában eddig mások által publikált cikkekben nem található erre nézve semmilyen pontos definíció, ezekre a munkákra később térünk ki. Továbbá fontos megjegyezni, hogy nem minden körsorozat tekinthető alkalmas inputnak a feladat szempontjából.

Azzal a céllal, hogy ezeket a hiányosságokat pótoljuk, definiáltuk, milyen körsorozatokat tekinthetünk a feladat szempontjából megengedettnek, illetve milyen feltételeket szabhatunk a keresett görbepárra



8. ábra. A bal oldali ábrán egy feltételeinknek megfelelő, míg a jobb oldalin egy azoknak több szempontból is ellentmondó bemenetet láthatunk.

vonatkozóan [30]:

3.1. Definíció. *Körök egy $C = \{c_1, c_2, c_3, \dots, c_n\}$ ($n \in \mathbb{N}$) sorozatát feladatunk szempontjából megengedett bemenetnek mondjuk, ha teljesíti a következő feltételeket (d_i jelöli a c_i kör által meghatározott körlapot).*

- $d_i \not\subset \bigcup_{j=1, j \neq i}^n d_j, \quad i \in \{1, 2, \dots, n\}$
- $d_i \cap d_j = \emptyset, \quad i, j \in \{1, 2, \dots, n\}, j \notin \{i-2, i-1, i, i+1, i+2\}$
- ha $d_{i-1} \cap d_{i+1} \neq \emptyset$, akkor $d_{i-1} \cap d_{i+1} \subset d_i$

Fentiekből az is következik, hogy

$$\mathbf{r}_i \notin \bigcup_{j=i-1}^{i+1} d_j, \quad i = 2, \dots, n-1$$

ahol \mathbf{r}_i jelöli a három szomszédos kör (c_{i-1}, c_i, c_{i+1}) hatványpontját. A 8. ábrán két bemeneten vizsgálhatjuk meg a feltételek teljesülését.

Annak eldöntése, hogy egy megadott körsorozat teljesíti-e a fenti feltételeket, csupán elemi számításokon alapuló, egyszerű feladat. A

hatványpont kiszámítása esetén például Monge egy klasszikus tételéből tudjuk [12], hogy három kör esetén rajta mindhárom páronként vett hatványvonalnak át kell haladnia. A hatványvonalak pedig a körök egyenleteiből páronként egy-egy kivonással könnyen megkaphatók, így ezek ismerete után egyetlen metszési feladattá redukálódik a hatványpont meghatározása.

Most pedig következzenek a görbepártól elvárt tulajdonságok:

3.2. Definíció. *Adott $C = \{c_1, c_2, c_3, \dots, c_n\}$ körsorozat esetén kettő darab, legalább G^1 -folytonos görbét keresünk (jelöljük ezeket $\mathbf{s}(t)$ -vel, illetve $\bar{\mathbf{s}}(t)$ -vel, ahol $t \in [a, b]$), melyek rendelkeznek a következő tulajdonságokkal. A feltételeknek megfelelő görbepárt *skin*-nek nevezzük.*

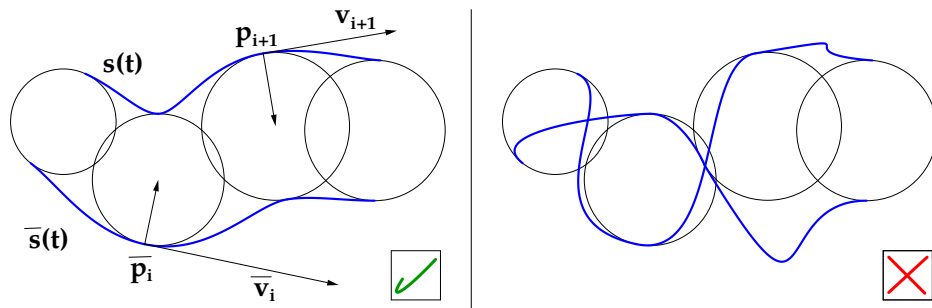
- Minden c_i kör esetén ($i = 1, \dots, n$) létezik olyan $\mathbf{p}_i \in c_i$ pont, melyre egyrészt igaz, hogy \mathbf{s} -nek is pontja, továbbá ebben a pontban a tekintett görbe, illetve kör érintőegyenese megegyezik. Analóg módon létezik $\bar{\mathbf{p}}_i \in c_i$ pont, mely pontja $\bar{\mathbf{s}}$ -nek is.
- Az \mathbf{s} görbe \mathbf{p}_i pontbeli érintővektorát jelöljük \mathbf{v}_i -vel. Ettől a vektortól elvárjuk, hogy amennyiben óramutató járásával ellentétes irányú elforgatottját tekintjük, akkor a $\mathbf{c}_i - \mathbf{p}_i$ vektorral egyirányú vektort kapjunk. Analóg módon $\bar{\mathbf{s}}$ érintővektorai esetében ez a forgatási irány óramutató járásával megegyező.

- $\mathbf{p}_i \notin \bigcup_{j=1, j \neq i}^n d_j$, and $\bar{\mathbf{p}}_i \notin \bigcup_{j=1, j \neq i}^n d_j$, $i \in \{1, 2, \dots, n\}$

A 9. ábrán szintén megtekinthetünk egy elfogadható és egy feltételinknek nem megfelelő kimenetet, kékkel jelöltük a *skin* névvel definiált görbepárt.

3.2. Előzmények

A probléma első látásra nagyon közeli kapcsolatot mutat azzal, amikor egy- vagy kétparaméteres görbesereg esetében keressük annak klasszikus értelemben (lásd 2.2.3. alfejezet) vett burkológörbét. A megoldás



9. ábra. A jobb oldali ábrán láthatók olyan jellegzetes helyzetek, amelyet el kívánunk kerülni a feltételek megadásával.

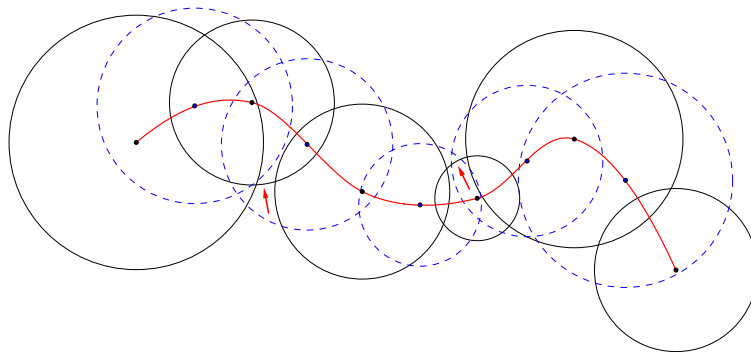
ilyen esetben jól ismert [63, 5, 24], és a feladat térbe is kiterjeszthető, paraméteresen felírható gömbsorozat burkolójaként kaphatjuk például az angol terminológia szerint „*canal surfaces*”-ként említett csőfelületeket, melyekkel Gaspard Monge foglalkozott [36] először. Az általunk konstruált 3.2. definícióban szereplő első feltételre tekinthetünk akár úgy is, mint a klasszikus értelemben vett burkoló tulajdonság diszkrét értelemben vett megfelelőjére, de esetünkben a jól ismert megoldások korántsem alkalmazhatóak ugyanolyan hatásfokkal.

A számítások vonatkozásában jelentős előrelépést jelentett a témában Josef Hoschek doktori értekezése [20]. Azóta számos, javarészt közelítő módszereken alapuló, burkolók konstrukciójával foglalkozó közlemény jelent meg. Ezekről bővebben Farin könyvében [15] olvashatunk. Kör- illetve gömbsorozat esetében Peternellnek és Pottmannnak egzakt módon sikerült racionális burkolót előállítaniuk [41], később hasonló eredmények születtek a ciklográfia felhasználásával is.

3.2.1. Ciklográfián alapuló megközelítés

Peternell cikkében [40] a problémát úgy közelíti meg, hogy az adott körsorozat tagjainak megfeleltetett térbeli pontokra azokat interpoláló görbét illeszt, majd a körsorozat burkolóját úgy keresi, mint a térgörbe által meghatározott C-kúpok sorozatának és a képsíknak a metszetét.

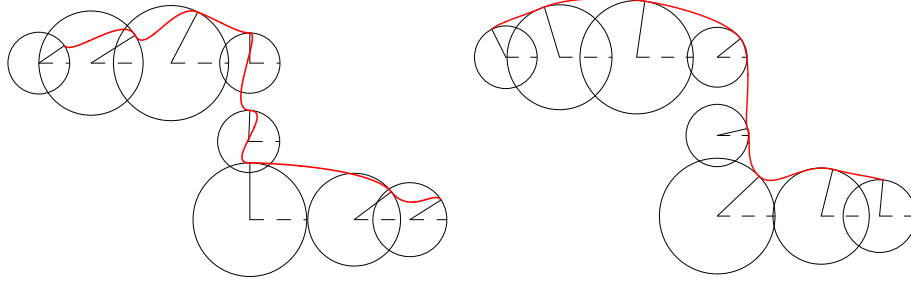
Hasonló elgondolással tekinthetünk gömböket és azoknak megfelelő pontokat egyvel magasabb dimenzióban. Bővebb információt ez utóbbi megközelítésről Kruithof munkájában találhatunk [27]. A megközelítés felhasználásával megpróbálhatnánk egy megadott körsorozatunkat egy egyparaméteres körsorozat részalmazává alakítani úgy, hogy tekintjük a hozzájuk tartozó térbeli pontokat [40], és ezeket akár a klasszikus módok egyikén interpoláljuk. Így az eredeti körsorozatot alkotó körök középpontja és sugara a paraméter függvényében kerülne felírásra. Ezáltal az előbbi technikákkal konstruált burkolótól azt várhatnánk, hogy az eredeti sorozatnak is burkolója lesz. Ezzel a megoldási móddal azonban gondok adódhatnak, mert az interpoláció nyomán nyert paraméteres körsorozat már nem feltétlenül fog eleget tenni a 3.1-es definícióban foglaltaknak, tehát nem kapunk a probléma szempontjából alkalmasnak mondott sorozatot, ahogy azt a 10. ábrán is láthatjuk.



10. ábra. A Peternell-féle megközelítés alkalmazásának problematikája. A piros nyíllal jelzett ívek esetében az újonnan konstruált körök ellehetetlenítik az elvárt érintkezést.

3.2.2. Iteratív módszer

Slabaugh és munkatársai cikkükben [53] iteratív módon közelítik meg a problémát, az általunk is vizsgált diszkrét esetből indulnak



11. ábra. Az ábra jobb oldalán Slabaugh kimenete látható a bal oldali, alkalmasan választott kezdőpozíció esetén.

ki. Legyen adott a körsorozat, ahol az i . kör középpontját és sugarát jelölje \mathbf{c}_i és r_i . Az egymás után következő i . és $i+1$. körökhöz Hermite-íveket definiálnak, melyek $\mathbf{p}_i, \mathbf{p}_{i+1}$ érintési pontjai és ezekben a $\mathbf{t}_i, \mathbf{t}_{i+1}$ érintővektorai az iteráció során nyerik el végleges helyzetüket. Az iteráció egy előre definiált energiafüggvényt minimalizál, változóként pedig minden egyes körnél az érintési pontokhoz mutató sugár és a vízszintes (x tengely által meghatározott) irány által bezárt α_i szög szerepel, azaz

$$\mathbf{p}_i = \mathbf{c}_i + \begin{bmatrix} r_i \cos \alpha_i \\ r_i \sin \alpha_i \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{t}_i = \begin{bmatrix} -k_i \sin \alpha_i \\ k_i \cos \alpha_i \end{bmatrix},$$

ahol k_i valamilyen előre definiált konstans, az eljárásban a két egymás után következő kör középpontja közötti távolság fele.

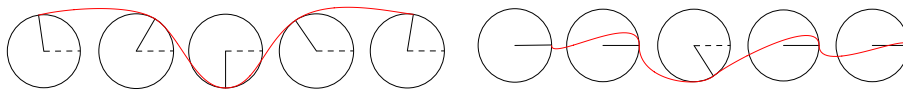
A módszer legtöbbször kielégítő eredményt ad akkor, ha a körsorozatban nincsenek hirtelen változások, akár a körök helyzetét, akár a sugarukat tekintve, erre láthatunk példát a 11. ábrán. De ilyenkor is megoldatlan probléma a jó inicializálás, azaz az iterációban szereplő α_i szögek jó kiinduló értékeinek megadása.

Ezek természetesen nagyban befolyásolják a végeredményt, rossz kiindulási értékekkel akár egészen egyszerű körsorozatokhoz is problémás kimenetet szolgáltat az eljárás. A 12. ábrán rendre ugyanazon körsorozatot láthatjuk a kezdeti értékekkel megadva, majd mellette az iteráció segítségével nyert megoldásokat. A második esetben nyilvánvalóan rossz kimenetet ad a módszer, tehát az ember keze igencsak meg van kötve, nem elég a körsorozatot elemeivel rendre megadni, így a módszer egyáltalán nem vagy csak nagyon szélsőséges esetekben automatizálható.

Fontos kiemelni, hogy az eljárás nincs tekintettel arra sem, hogy a végeredményként generált érintési pontok ne essenek más körök által meghatározott körlapokra, továbbá a szerzők által teremtett feltételek mellett nem bizonyított a konvergencia ténye sem a gradiens módszerrel [1] megtalálni kívánt minimumhely esetében.

Az iterációk száma átlagosan 100 körül mozog, a 11. ábrán látható kimenet elkészítéséhez a bal oldali kezdőpozíció mellett egy egymagos, 3 GHz-es processzorral rendelkező személyi számítógépnek 143 ms-ra volt szüksége. Ebből az adatból is nyilvánvaló, hogy a módszer valós időben történő modellezési feladatokra (különösen kliens oldalon, felhasználók által általánosan elérhető teljesítményt feltételezve) kifejezetten alkalmatlan.

Slabaugh és munkatársai a módszerüket térbeli esetre is kiterjesztették [54], gömbsorozat esetén kerestek hasonló megfontolások figyelembevételével burkolófelületet. Mind a síkbeli, mind a térbeli esetre vonatkozó kutatásaik fő motivációját egy érmodellezésre szánt alkalmazásuk [47] továbbfejlesztése jelentette. A módszer sajnos ekkor



12. ábra. Az ábra jobb oldalán Slabaugh kimenete látható a bal oldali, alkalmatlanul választott kezdőpozíció esetén.

sem képes a síkban is megjelenő problémák kezelésére, továbbá csak főkörök mentén érintheti az eredményként előálló felület az egyes gömböket, ami nagymértékű korlátozást jelent a lehetséges inputok tekintetében.

3.3. Saját módszerek és azok eredményei

A továbbiakban szeretném bemutatni a témában elért saját, a 3.1-es és a 3.2-es definíció kimondásán túli önálló eredményeinket.

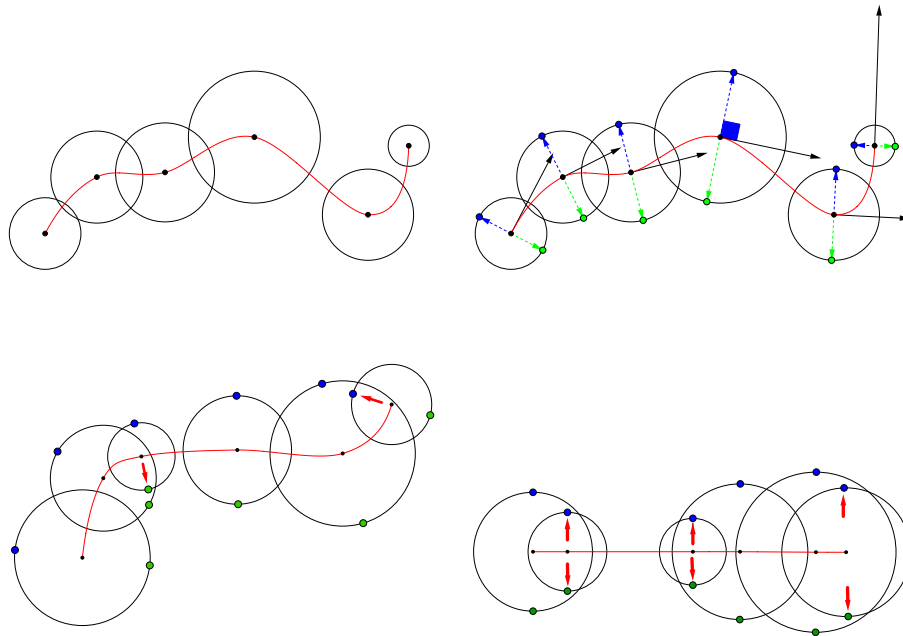
3.3.1. Az érintési pontok lokalizációja

Ebben az alfejezetben szeretném bemutatni azokat a módszereket, amelyek saját ötleteken alapuló megoldási lehetőségként előkerültek az érintési pontok lehetséges elhelyezése kapcsán [28]. Az alfejezet végén részletesen bemutatásra kerül az a módszer is, amely a legjobb megoldást szolgáltatotta, s ami egy későbbi cikkünkbe megoldási módként bekerült [30].

3.3.1.1. Síkgörbe-interpolációs technika Miután egy bemeneti sorozatot a feladatunk szempontjából a 3.1-es definíció alapján alkalmazni ítéltünk, megkezdődhet az első, kiemelten fontos részprobléma megoldása, azaz, hogy az egyes körök esetében hol helyezzük el azokat az érintési pontokat, melyek mentén az eredményt adó G^1 folytonos görbe azokat érinteni fogja.

Kutatómunkánk során először a legkézenfekvőbb ötletet vizsgáltuk meg, mégpedig azt, hogy tekintsünk egy valamely standard módszerrel származtatott, a körsorozat köreinek középpontjait interpoláló görbét, majd ezen görbe középpontbeli érintővektorait forgassuk el $\pm 90^\circ$ -kal. Az elforgatott vektorokkal így egy-egy pontot kijelölhetünk az egyes körökön, melyeket megfelelő érintési pontoknak gondolhatnánk (lásd 13. ábra).

A módszer hátránya, hogy nem garantálja, hogy az egyes leendő érintési pontok minden további kör által meghatározott körlapon

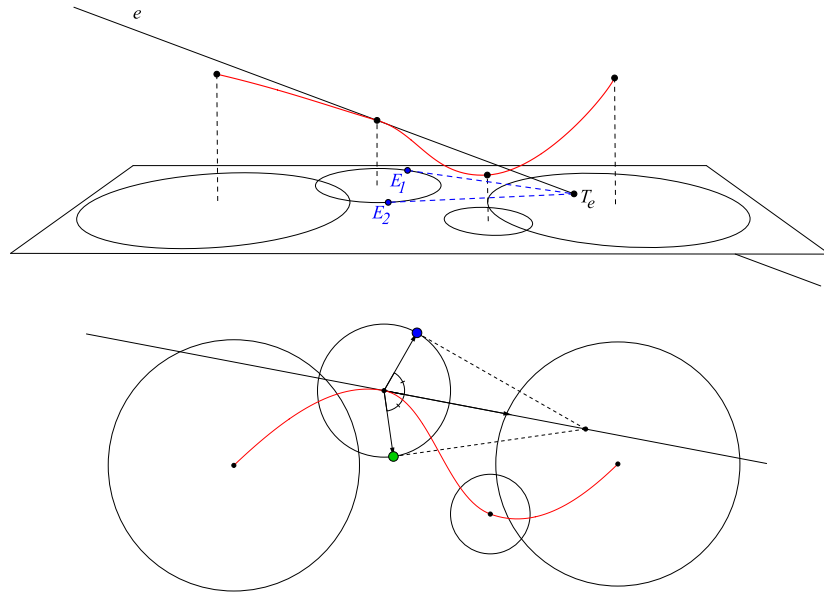


13. ábra. A síkgörbe-interpolációs technika (fent) annak hibáival (lent).

kívül essenek, ahogy elvárjuk a 3.2-es definícióban. Ezt orvosolandó megpróbáltuk más technikát használva megközelíteni a problémát.

3.3.1.2. Térgörbe-interpolációs technika Több, a fentebb említett síkgörbén alapuló technikánál felmerülő hiányosságra megoldást nyújt az a módszer, amely térgörbeillesztésre támaszkodik. Az ötlet lényege, hogy a körök síkját képsíkként kezelve definiálunk egy ciklografikus leképezést, a körsorozatra pedig irányított ciklusok sorozataként tekintünk. Majd konstruálunk egy, a ciklusok ősképeit interpoláló szplájn görbét. Ezt követően egy adott körön a következőképpen lokalizálunk érintési pontokat. Tekintsük az illesztett térgörbe adott kör által meghatározott ciklushoz tartozó pontjában annak érintőegyenest, majd ezen egyenesnek a körök síkjával vett dőléspontját.

Amennyiben a dőféspont a tekintett körön kívül helyezkedik el, onnan a körhöz két érintőegyenes húzható, melyek körrel vett közös pontjait tekintjük érintési pontoknak (lásd 14. ábra).

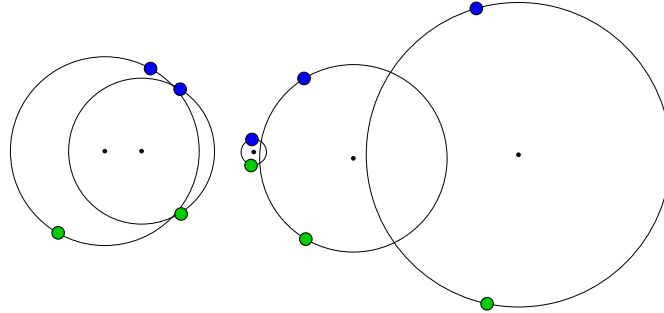


14. ábra. A térgörbe-interpolációs technika térbeli szemléltetése (fent) és eredménye a képsíkban (lent).

A felhasználandó interpoláló görbe előállításához több módszer is ismeretes [14], munkám során a Bessel-érintőkön alapuló Catmull-Rom-szplájnnal dolgoztam.

Az eljárás jobbnak tekinthető a síkgörbével vezérelt módszernél abból a szempontból, hogy kollinearisan elhelyezkedő középpontokkal rendelkező körsorozat esetében képes használható érintési pontokat generálni akkor is, amikor az elsőként tekintett eljárás nem (lásd 13. ábra). A megfelelő eredményt adó érintési pontokat láthatjuk a 15. ábrán.

A módszer publikálása [28] után született meg az elfogadott körsorozatról alkotott és a keresett megoldást leíró 3.1-es és 3.2-es definíció.



15. ábra. Az új technika jobb eredményt adhat kollineáris középpontok esetén.

Bár az algoritmus sok esetben jobb eredményt adhat, mint az elsőként említett eljárás, ez sem képes minden elfogadott esetben olyan kimenet előállítására, amelyet felhasználva a 3.2-es definíciónak megfelelő görbepárt konstruálhatunk. Emiatt további kutatások voltak szükségesek, s így sikerült rátalálnunk a végleges megoldást adó új módszerre, melyet a következő paragrafus mutat be [30] alapján.

3.3.1.3. Az Apollóniusz-problémán alapuló technika Annak garantálása, hogy a konstruált érintési pontok megfelelő helyre kerüljenek, korántsem egyszerű feladat. Olyan módszerre volt szükségünk, amely kellő súllyal tekint egy adott körön keresett érintési pontok esetében a tekintett kör szomszédaira is. A megfelelő konstrukcióhoz az Apollóniusz-feladat megoldásán keresztül jutottunk el. Mint azt a 2. fejezetben ismertettük, az általános feladat során három megadott körhöz keresünk azok mindegyikét érintő újabb köröket. Erre a nagy múltra visszatekintő problémára adott megoldással lehetőségünk van a feladatunk szempontjából megfelelő érintési pontok lokalizálására a sorozat köztes – azaz két szomszédos elemmel rendelkező – köreinek esetében.

A három alapkör és a megoldást jelentő érintőkörök elhelyezkedésére vonatkozóan egy klasszikus eredmény szerint [37] az alábbi feltételek közül pontosan egy teljesül:

- Pontosán két olyan érintőkör létezik, amelyeket kívülről érint a megadott körök mindegyike.
- Pontosán két olyan érintőkör létezik, amelyeket belülről érint a megadott körök mindegyike.
- Pontosán egy olyan érintőkör létezik, amelyet kívülről érint a megadott körök mindegyike és egy olyan, amelyet belülről.

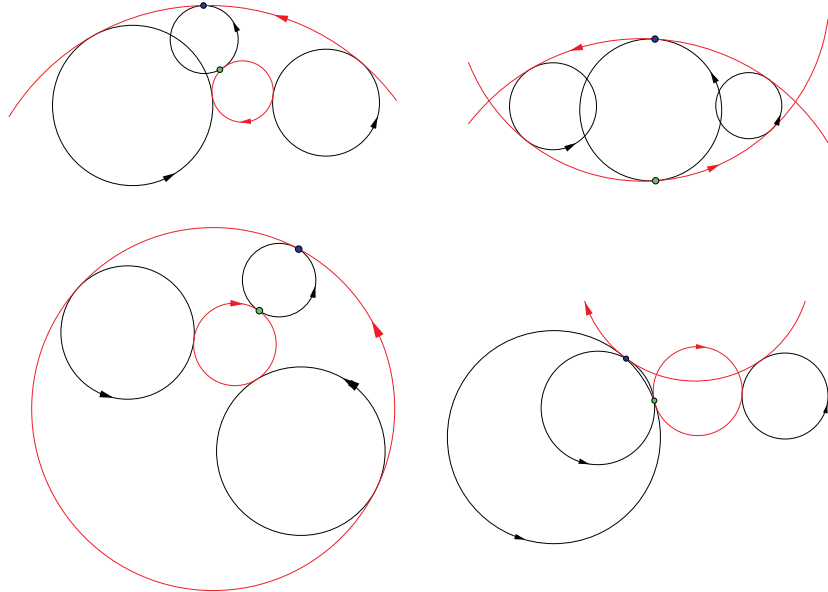
A továbbiakban a 3.1-es definíció jelöléseit használjuk, így például egy c_i körre köztes körként tekintünk, ha $i \notin \{1, n\}$.

Ahogy a 2.2.1.2. paragrafusban már említettük, ezek a fent említett érintőkörök az alapkörökkel közös érintési pontjaikkal együtt előállíthatók az ún. ciklografikus módszer segítségével. Könnyen látható, hogy amennyiben egy köztes körből (melyen éppen az érintési pontokat keressük) és a szomszédaiból azonosan irányított ciklusokat hozunk létre, úgy a ciklografikus megoldási mód nyomán nyert két kör éppen olyan tulajdonságú, hogy eleget tesz a fenti feltételek valamelyikének. A köztes kör ezen megoldáskörökkel vett közös pontjai alkalmas \mathbf{p}_i és $\bar{\mathbf{p}}_i$ érintési pontnak bizonyulhatnak a c_i köztes körön, erről árulkodik a 16. ábra.

Mivel az ábrán látott minden esetben teljesül a fentebb felsorolt feltételek valamelyike, ezért könnyen belátható, hogy a jelölt, köztes körön elhelyezkedő érintési pontok soha nem kerülhetnek a szomszédos körök által meghatározott körlapokra, vagyis a módszer által szolgáltatott érintési pontok eleget tesznek a 3.2-es definíció harmadik feltételének.

Több módszer is ismeretes ezeknek az érintési pontoknak az előállítására, illetve számítására [25, 8]. Továbbá Krames könyvében [25] bizonyított, hogy ezek a pontok és a három kör közös hatványpontja minden esetben kollineáris ponthármaszt alkot (lásd 17. ábra).

Nagyon speciális esetben, amikor a három kör középpontja kollineáris ponthármaszt alkot, sugaraik pedig megegyeznek, egyszerűen a mindhárom kört érintő közös érintőegyeneselek középső körrel vett közös pontjai szolgáltatják a burkolóhoz szükséges érintési pontokat.



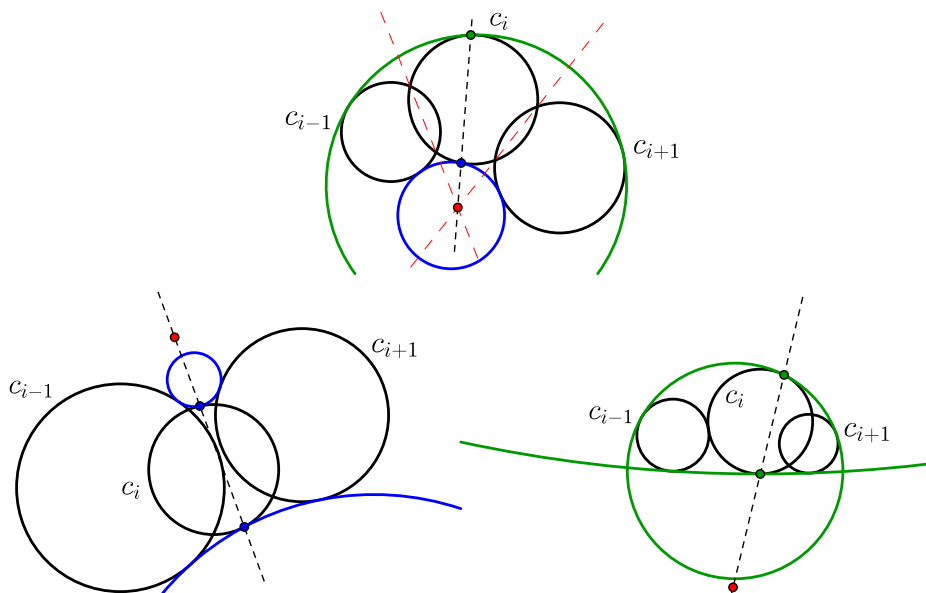
16. ábra. Azonos irányítású ciklusokkal nyert érintési pontok. A módszer mindig helyes kimenetet ad a feltételeinknek megfelelő körsorozatok esetén.

Miután előállítottuk minden köztes körön a leendő érintési pontokat, a sorozat első és utolsó tagján a szomszédjukkal vett közös külső érintőegyeneseik segítségével definiálhatunk hasonló célból pontokat.

A fent említett módszerekkel tehát minden körön tudunk definiálni két pontot, melyek leendő érintési pontként fognak szerepelni. Azonban a szétválasztásuk még nem megoldott, ezt a problémát járjuk körül a következő alfejezetben.

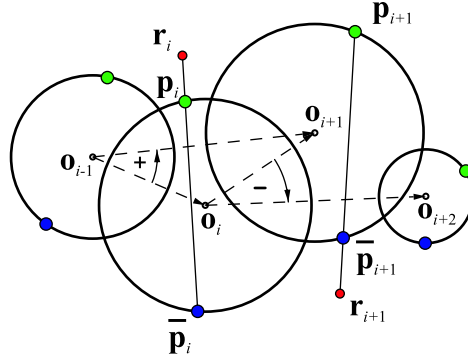
3.3.2. Az érintési pontok szeparációja

A rendelkezésünkre álló érintési pontokat két csoportra kell osztanunk aszerint, hogy melyek fognak a 3.2-es definícióban s -sel, illetve \bar{s} -vel jelölt görbe alappontjaiként szolgálni. A gördülékenyebb tárgyalhatóság végett nevezzük egyszerűen „*bal oldali*” pontoknak s alappontjait



17. ábra. Az érintési pontok és a közös hatványpont kollinearitása. Az említett speciális Apollóniusz-feladat megoldásai kékkel, illetve zölddel vannak jelölve aszerint, hogy külső vagy belső érintésről van-e szó.

(a 3.2-es definícióban \mathbf{p}_i -ként jelölt pontokról van szó), míg „*jobb oldali*” pontokként $\bar{\mathbf{s}}$ alappontjaira fogunk hivatkozni. A ciklografikus konstrukcióból a kollinearitáson túl az is egyértelműen következik, hogy az előzőekben leírt módon konstruált érintési pontok, valamint a c_{i-1} , c_i , c_{i+1} körök hatványpontjai úgy helyezkednek el, hogy a hatványpont soha nem lehet a két érintési pont között, azaz utóbbiak távolsága mindig kisebb, mint a hatványponttól mért távolságuk összege (lásd 17. ábra). Jelölje \mathbf{o}_i a c_i kör középpontját ($i \in \{1, 2, \dots, n\}$). Előbbi felismerésen alapulva a kapott érintési pontok a következőképpen választhatók szét $i \notin \{1, n\}$ esetén. Ha a $\overrightarrow{\mathbf{o}_{i-1}\mathbf{o}_i}$ vektor elforgatható óramutató járásával ellentétes irányban 180° -nál kisebb szögben úgy, hogy iránya a $\overrightarrow{\mathbf{o}_{i-1}\mathbf{o}_{i+1}}$ irányával megegyező legyen, akkor az \mathbf{r}_i hatványponthoz közelebb eső érintési pontot soroljuk a „*bal oldali*”



18. ábra. Az érintési pontok két csoportra osztása, zölddel a „bal oldali”, kékkel a „jobb oldali” pontokat jelöltük. \mathbf{p}_i mint közelebbi, \mathbf{p}_{i+1} mint távolabbi pont kerül ugyanabba a halmazba a 3.3.2. alfejezetben leírtak alapján.

pontokat tartalmazó csoportba, azaz jelöljük \mathbf{p}_i -vel. Ha az előző feltétel óramutató járásával ellentétes forgatási irány esetén teljesül, úgy a hatványponthoz közelebbi pontot a „jobb oldali” pontokat tartalmazó csoportba soroljuk, azaz $\bar{\mathbf{p}}_i$ -vel jelöljük. Kiemelt figyelmet szükséges fordítanunk a körsorozatunk első és utolsó elemére, ebben a két esetben rendre az $\overrightarrow{\mathbf{o}_1\mathbf{o}_2}$ és a $\overrightarrow{\mathbf{o}_1\mathbf{p}_2}$ vektor viszonyát, valamint az $\overrightarrow{\mathbf{o}_{n-1}\mathbf{o}_n}$ és a $\overrightarrow{\mathbf{o}_{n-1}\bar{\mathbf{p}}_n}$ vektor viszonyát kell vizsgálnunk az előzőek szerint. A szétválasztás megértésében nyújt segítséget a 18. ábra.

Ahhoz, hogy a különböző csoportba sorolt pontokat interpoláljuk, érintővektorokat definiálunk minden egyes pontban, ezt a lépést mutatja be a következő alfejezet.

3.3.3. Az érintővektorok meghatározása

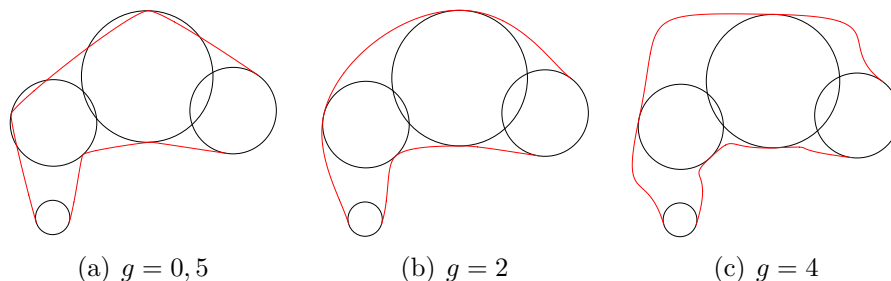
Az alapötletünk az volt, hogy a kapott, immáron két csoportra osztott érintési pontok figyelembevételével, azokban megfelelő érintővektorok definiálása után minden pontpár között a tekintett geometriai adatok alapján Hermite-ívet (lásd 2.1-es definíció) vezetünk. Ezáltal ugyanis egy hatásos és jól ismert technikára alapozva kaphatjuk meg az elvárt

tulajdonságú, magát a *skin*-t meghatározó G^1 folytonos görbét.

Az érintővektorok irányának megadása nem okoz különösebb problémát, hiszen az egyes csoportok esetében csak arra van szükség, hogy az érintési pontokból a körök középpontjába mutató vektorokat elforgassuk, a \mathbf{p}_i pontok esetében 90° -kal, a $\bar{\mathbf{p}}_i$ pontok esetén pedig -90° -kal.

Sokkal nehezebb feladat azonban a vektorok hosszának meghatározása. Slabaugh módszerében egyszerűen a szomszédos körök középpontjainak távolságát használja fel (konkrétan felezi azt) az adott körhöz tartozó érintési pontokban tekintett érintővektorok hosszának meghatározására. Ez a módszer kielégítő eredményt adhat, ha a körsorozat szomszédos köreinek sugarát tekintve, illetve azok középpontjai között mért távolságokat figyelve nem tapasztalunk szignifikáns különbségeket, drasztikusan kiugró értékeket. Egy ilyen helyzetet láthattunk a 3.2.2. alfejezetben a 11. ábrán. Azonban ez az eljárás ettől jelentősen különböző, általunk elfogadottnak tekintett körsorozatok esetén már nem feltétlenül képes egy adott kör és annak környezetének kellő érzékenységgel való figyelembevételére. Továbbá Slabaugh cikkében a szerzők C^1 folytonos görbét konstruálnak végeredményként, vagyis egy adott körön lévő érintési pontba érkező és az onnan kiinduló görbeszegmens érintési pontbeli érintővektorának hossza megegyezik. Ez azonban hátráltató tényező lehet például olyankor, ha egy adott kör esetén egyik szomszédja hozzá közel, míg a másik tőle távol helyezkedik el. Ilyen esetben indokolt lehet, hogy eltérő hosszúságú érintővektorokkal dolgozzunk, elkerülve ezzel például az indokolatlan önmetszéses eseteket.

Emiatt is éreztük úgy, hogy érdekesebb G^1 folytonos görbét keresnünk, hiszen így a körsorozat elemeire, azok egymáshoz képest történő elhelyezkedésére sokkal inkább érzékeny módszer alkotható. Ennek biztosítása érdekében úgy döntöttünk, hogy felhasználjuk a körök hatványvonalát, mely a körök sugarairól és azok középpontjának távolságáról egyaránt hordoz nagyon nagy mennyiségű információt. Két egymást követő kör és a \mathbf{p}_i , \mathbf{p}_{i+1} érintési pontok esetén számoljuk tehát ki a pontoknak a körök hatványvonalától mért távolságát.



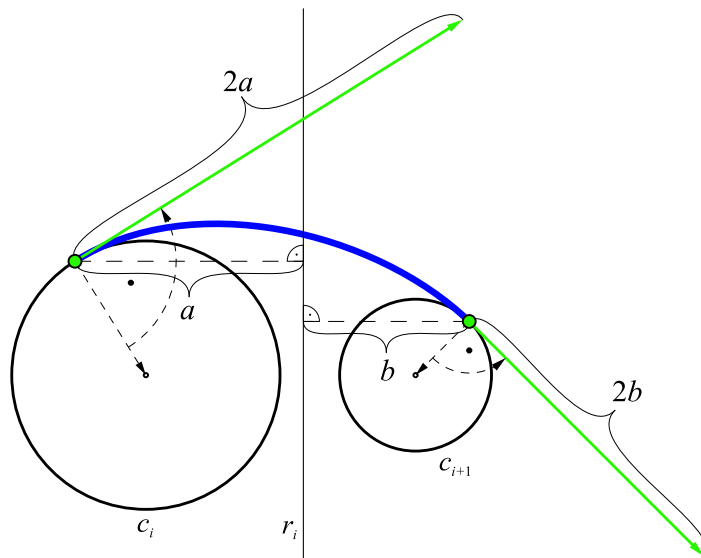
19. ábra. A hatványvonaltól vett távolsággal megszorzott g konstans hatása a *skin* alakjára.

Az előbbiekben leírt módon származtatható érintő egységvektorokat pedig megszorozzuk ezen kiszámolt távolságok skalárszorosásával. Ez a skalár tekinthető úgy, mint egy, a görbe egészének alakjára hatással lévő paraméter, hasonlóan ahhoz a skalárhoz, mely a Slabaugh által használt energiafüggvényben került felhasználásra a görbület és az ívhossz alapján számolt energiafüggvények szerzők által jónak vélt lineáris kombinációjának megállapításakor ($k = 0, 9$) [53]. Tapasztalataink azt mutatták, hogy ezen általunk g -vel jelölt értéket 2-nek választva kapható a legtermészetesebb alak (lásd 19. ábra), emiatt ez az érték kerül felhasználásra a dolgozat további részében is. A 20. ábrán láthatjuk a konstrukciót magyarázó ábrát.

A c_{i+1} kör érintési pontjából kiinduló következő Hermite-ív kezdőpontbeli érintővektora már a pont c_{i+2} -től való távolságának figyelembevételével kerül kiszámításra, így kapunk eredményként G^1 folytonos görbét. Természetesen a „*jobb oldali*” görbe esetén is erre a megfontolásra alapozunk, a következő alfejezetben ezen elvek alapján közöljük a teljes burkológörbepár konstrukcióját.

3.3.4. A megoldást jelentő burkológörbék konstrukciója

Miután képessé váltunk arra, hogy tetszőlegesen választott szomszédos alapkörök esetén közöttük burkológörbét konstruáljunk, a



20. ábra. Két érintési pont közötti Hermite-ív meghatározása. Az érintővektorok hossza az érintési pontok hatványvonalától mért távolságának kétszerese.

végző megoldást jelentő görbepár előállítására klasszikus interpolációs feladattá redukálódik, adott \mathbf{p}_i pontok és az ezekben értelmezett \mathbf{v}_i érintővektorok, illetve adott $\bar{\mathbf{p}}_i$ pontok és az ezekben értelmezett $\bar{\mathbf{v}}_i$ érintővektorok esetén.

A 3.3.3. alfejezet elején felvázolt ötlet alapján csupán annyit kell tennünk, hogy a 2.1-es definíció szerint rendre előállítjuk a $\mathbf{p}_i, \mathbf{p}_{i+1}$ pontok és a $\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_{i+1}$ vektorok által meghatározott Hermite-íveket ($i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$), megkapva ezzel a „bal oldalnak” nevezett \mathbf{s} görbét eredményül adó G^1 folytonos Hermite-szplájnt. Ehhez teljesen analóg módon állítható elő a $\bar{\mathbf{s}}$ görbe is, így tehát hozzájuthatunk a teljes megoldást jelentő görbepárig. A görbék Hermite-szplájn mivoltuk miatt nagyon könnyen felparaméterezhetők a $[0, n-1]$ paramétertartomány felhasználásával.

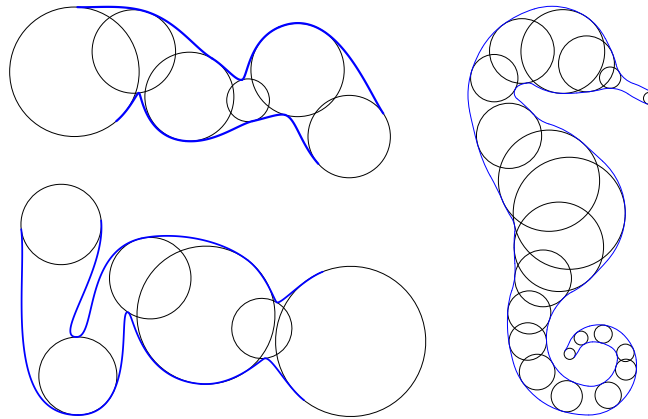
Meg kell jegyeznünk, hogy a folyamat ezen pontján már erősen

veszít jelentőségéből az a tény, hogy az említett geometriai adatokat körök egy sorozatából nyertük, emiatt fontos kihangsúlyozni, hogy az általunk választott, G^1 folytonos megoldást eredményező Hermite-interpolációs technika helyett más módszerek is hasonlóan jó megoldást szolgáltathatnak.

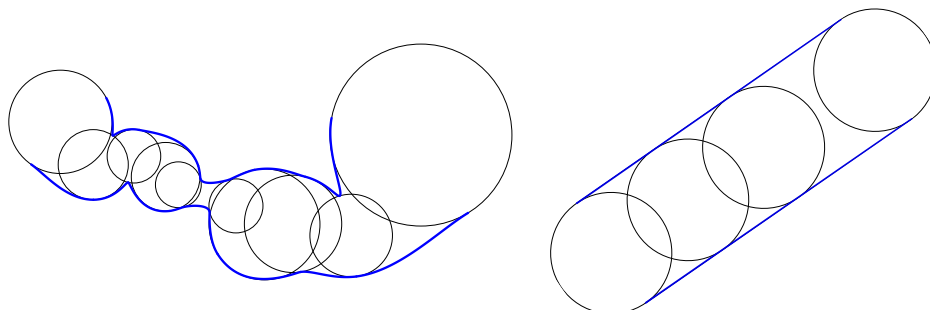
A 21. és a 22. ábrán különböző körsorozatok esetén találjuk a saját algoritmusunk néhány kimenetét.

Fontosnak tartottuk összevetni eredményeinket a Slabaugh cikkében közölt megoldásokkal is. A 23. ábrán látható ez az összehasonlítás, igyekeztünk olyan példát keresni, melyen jól szemrevételezhető a korábbi módszer hiányossága és az, hogyan képes az új, saját algoritmusunk szemünk által is érzékelhetően szebb kimenet előállítására.

Bár Slabaugh módszerénél energiafüggvény-minimalizálás történik a görbület és az ívhossz figyelembevételével, a függvény definiálása vélhetően tapasztalati tényezőkön alapul. Újra szeretnénk kiemelni, hogy megítélésünk szerint nem csökkent módszerünk értékén a fixen választott 2 konstans alkalmazása az érintővektorok beállításakor, hiszen mi is ugyanúgy tapasztalati úton jutottunk ehhez az értékhez, mint az említett cikk [53] szerzői a $k = 0,9$ -es konstans választásakor.



21. ábra. A saját burkológörbe-kereső algoritmussal nyert kimeneteink, különböző bemeneti körsorozatok esetén.



22. ábra. A saját burkológörbe-kereső algoritmussal nyert kimeneteink, szélsőséges helyzetű körsorozatok esetén. Megfigyelhetjük, hogy a módszer helyes kimenet előállítására képes.

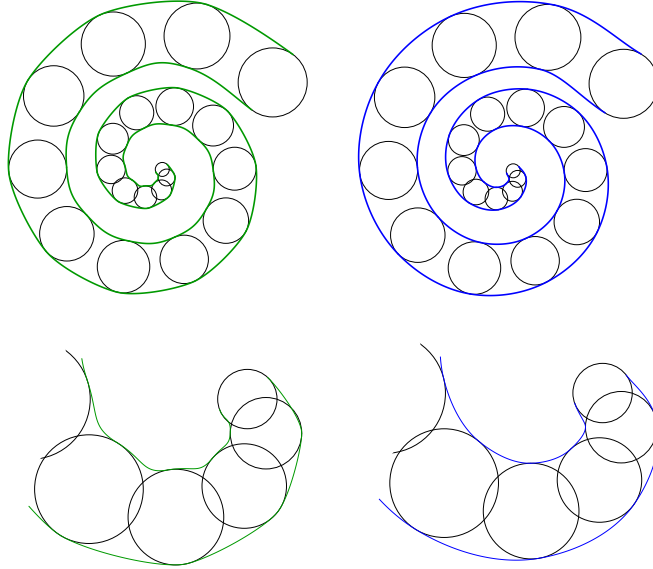
Tornai Róbert cikkében [60] egzakt módon mérhető, ún. „*simasági*” jellemzők alapján hasonlította össze a két módszert és arra a következtetésre jutott, hogy a mi megoldásunk jobb eredményt ad.

3.3.5. A módszer gömbökre történő kiterjesztése

Amint már említettük, a tárgyalt problémakör magasabb dimenzióban is általánosítható [54], ezért célunkként tűztük ki, hogy mi is megkísérljük síkbeli eredményeinket felhasználni ahhoz, hogy gömbsorozatok esetén találjunk az eddig ismerteknél hatékonyabb burkolófelület-kereső algoritmust. A keresett felület a kétdimenziós esetben leírtakhoz hasonló tulajdonságokkal fog rendelkezni.

Az eredmények ismertetéséhez először ismét pontosan meg kell fogalmazzuk, milyen gömbsorozatot tekintünk megengedettnek a problémát illetően. Az alábbi definíciót szintén közöltük 2010-ben megjelent cikkünkben [30].

3.3. Definíció. *Gömbök egy $S = \{s_1, s_2, s_3, \dots, s_n\}$ ($n \in \mathbb{N}$) sorozatát feladatunk szempontjából megengedett bemenetnek mondjuk, ha teljesíti a következő feltételeket. (g_i jelölje az s_i gömb által meghatározott gömbtestet.)*



23. ábra. A Slabaugh-féle [53] (balra), illetve a saját algoritmusunkkal kapott kimenet (jobbra) azonos körsorozat esetén. Fontos megfigyelni az ábra alján látható kinagyított részleteket.

- $g_i \not\subset \bigcup_{j=1, j \neq i}^n g_j, \quad i \in \{1, 2, \dots, n\}$
- $g_i \cap g_j = \emptyset, \quad i, j \in \{1, 2, \dots, n\}, j \notin \{i-2, i-1, i, i+1, i+2\}$
- ha $g_{i-1} \cap g_{i+1} \neq \emptyset$, akkor $g_{i-1} \cap g_{i+1} \subset g_i$

Ezt követően definiálnunk kell azt is, milyen tulajdonságokkal bíró felületet is keresünk pontosan, mit értünk esetünkben *skin*, azaz burkolófelület alatt.

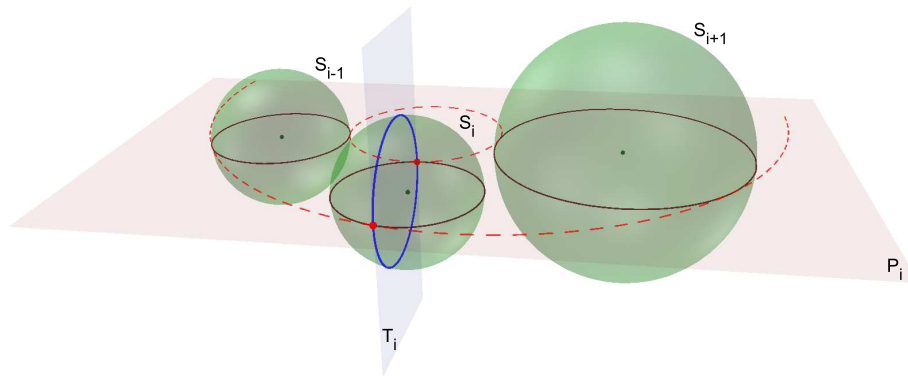
3.4. Definíció. *Gömbök egy $S = \{s_1, s_2, s_3, \dots, s_n\}$ ($n \in \mathbb{N}$), az előző 3.3-es definíció értelmében elfogadható sorozata esetén olyan G^1 -folytonos $\hat{s}(\phi, t)$ $\phi \in [0, 2\pi], t \in [a, b]$ burkolófelületet keresünk, amely teljesíti a következő feltételeket:*

- $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$ esetén létezik olyan \hat{s} paramétervonalaként előálló \tilde{c}_i érintőkör, hogy az \hat{s} burkolófelület és az s_i gömb közös érintősíkkal rendelkezik \tilde{c}_i minden pontjában.
- $\tilde{c}_i \not\subset \bigcup_{j=1, j \neq i}^n g_j$, $i \in \{1, 2, \dots, n\}$

Fontos tehát kiemelnünk, hogy a definíció második részében leírtak alapján minden aktuálisan tekintett gömbre illeszkedő érintőkörnek a további gömbök által meghatározott gömbtesteken kívül kell elhelyezkednie, ez a mi értelmezésünk szerint tekintett burkolófelület irányába az egyik legalapvetőbb elvárás. A definíciók kimondása után következő lépések nagyon hasonlóak azokhoz, amiket már síkban is alkalmaztunk.

3.3.5.1. Az érintőkörök lokalizációja Mindenekelőtt meg kell határoznunk a 3.4-es definícióban említett \tilde{c}_i érintőköröket, ezek középpontját és sugarát jelölje rendre $\tilde{\mathbf{o}}_i$ és \tilde{r}_i , $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Ehhez a lépéshez felhasználhatjuk a síkbeli probléma esetében kapott megoldást. Tekintsünk egy tetszőleges s_i gömböt, melyre $i \notin \{1, n\}$, azaz először azt a módszert fogjuk ismertetni, amivel a közbenső gömböket kezelhetjük (lásd 24. ábra). Tekintsük az s_i , s_{i+1} , s_{i-1} gömbök középpontjai (ezeket rendre jelölje \mathbf{o}_i , \mathbf{o}_{i+1} és \mathbf{o}_{i-1}) által meghatározott P_i síkot. Az említett három gömböt ezzel a síkkal elmeteszve három koplánáris körhöz juthatunk. A 3.3.1.3. paragrafusban már tárgyalt síkbeli, Apollóniusz-körökön alapuló módszer segítségével hívásával az s_i gömbön kapott metszetkörön definiálhatunk két pontot. Könnyen belátható, hogy egyértelműen létezik olyan T_i sík ($i \notin \{1, n\}$), mely illeszkedik erre a két pontra, továbbá merőleges a P_i síkra. s_i ezen T_i síkkal vett metszete alkalmas arra, hogy a később előálló burkolófelületünkhöz \tilde{c}_i érintőkörként szolgáljon. Fontos megjegyeznünk, hogy általában a módszerrel kapott érintési kör nem főköre az s_i gömbnek.

Ezzel a módszerrel tehát minden olyan gömb esetében meg tudtunk határozni egy érintési kört, amelynek két szomszédja van. Amiatt, hogy az érintési köröket a síkbeli problémára való visszavezetésből kapott



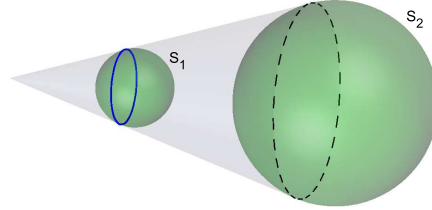
24. ábra. Érintési kör meghatározása az s_i gömbön, ahol $i \notin \{1, n\}$, továbbá $T_i \perp P_i$, ahol T_i a \tilde{c}_i érintőkör síkja és P_i a gömbök középpontjára illeszkedő sík. Szaggatott vonallal feltüntetve a P_i -re vonatkozó Apollóniusz-féle probléma megoldásait láthatjuk.

érintési pontok alapján állítottuk elő, és a gömbsorozat megengedett volta garantálja ezen pontok létezését és megfelelő elhelyezkedését, a fentiek szerint leírt módon származtatott \tilde{c}_i érintési körök mindig léteznek és teljesítik a 3.4-es definícióban leírtakat.

Egyébként maga az Apollóniusz-féle probléma is általánosítható három dimenzióban, amikor három gömbhöz keresünk olyan gömböket, melyek mindegyik megadottat érintik. Adott bemenet esetén az ilyen tulajdonságú gömbök 2.2.3. alfejezetben leírtak szerinti értelmezés alapján három dimenzióra általánosított burkolófelületét *Dupin-ciklidnek* hívjuk, ez a felület széles körben használt a számítógépes geometriai modellezésben [15, 44, 45]. Az általunk konstruált érintőkör esetünkben megegyezik azzal a körrel, mely mentén a tekintett s_{i-1} , s_i és s_{i+1} gömbök szerint értelmezett Dupin-ciklid érinti s_i -t.

A sorozat első, illetve utolsó gömbjén más módszerrel határozzuk meg az érintési köröket. Tekintsük az első és a második gömb közös külső érintőkúpját és ennek a kúpnak az első gömbbel vett közös

részét, illetve járjunk el hasonlóan az utolsó gömbre vonatkozó érintőkör esetében is az azt megelőző gömb segítségével. A konstrukciót szemlélteti a 25. ábra. A síkbeli konstrukcióból egyenesen következik,



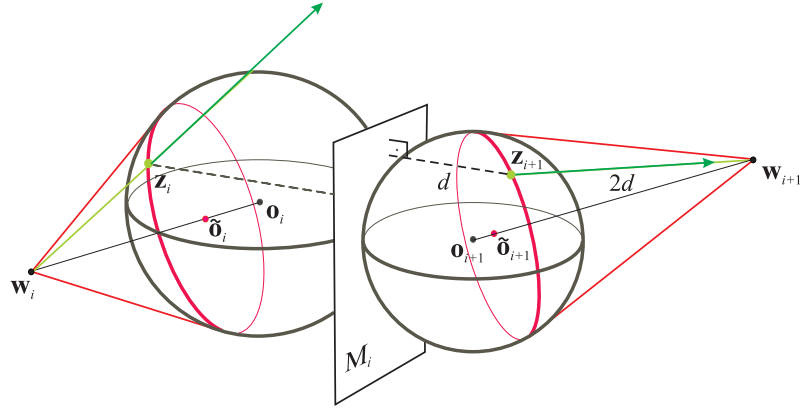
25. ábra. s_1 , azaz az első gömb érintőkörének létrehozása.

hogy az ötlet minden megengedett esetben kivitelezhető.

3.3.5.2. Az utolsó lépés, a burkolófelület előállítása Most, hogy rendelkezünk érintőkörrel minden gömb esetén ($\tilde{\mathbf{o}}_i$ középpontú és \tilde{r}_i sugarú), hozzáláthatunk a síkbeli ötlet alapján a burkolófelület származtatásához. Páronként végighaladva a gömbsorozat tagjain, közöttük külön felületelemeket definiálunk, biztosítva azt, hogy ezek a darabok egymáshoz G^1 folytonosan csatlakozzanak. A felületet az érintőkörökön egymásnak megfeleltetett pontokat interpoláló Hermite-ívek uniójaként fogjuk származtatni.

Most megmutatjuk, hogyan állítjuk elő a leendő $\hat{\mathbf{s}}_i$ burkolófelület-darabot az s_i gömb \tilde{c}_i érintőköre és az s_{i+1} gömb \tilde{c}_{i+1} érintőköre között. A 3.4-es definíciónak eleget téve a \tilde{c}_i nem lesz más, mint a felületdarab $\hat{\mathbf{s}}(\phi, 0)$ ($\phi \in [0, 2\pi]$), míg \tilde{c}_{i+1} ugyanannak az elemnek $\hat{\mathbf{s}}(\phi, 1)$ ($\phi \in [0, 2\pi]$) paramétervonalára. Először minden egymást követő \tilde{c}_i és \tilde{c}_{i+1} ($i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$) érintőkörön definiálnunk kell egy kezdőpontot, nevezzük ezeket rendre \mathbf{z}_i -nek és \mathbf{z}_{i+1} -nek, továbbá megállapodhatunk abban, hogy $\mathbf{z}_i = \hat{\mathbf{s}}(0, 0)$ és $\mathbf{z}_{i+1} = \hat{\mathbf{s}}(0, 1)$. Ezután elforgatva ezen pontokat egy $\phi_0 \in [0, 2\pi]$ szöggel az érintőkörök mentén, szintén egymásnak megfeleltethető $\mathbf{z}_i(\phi_0) = \hat{\mathbf{s}}_i(\phi_0, 0)$ és $\mathbf{z}_{i+1}(\phi_0) = \hat{\mathbf{s}}_i(\phi_0, 1)$ pontokat határozhatunk meg. Ezen pontpárok

mint kezdő- és végpontok felhasználásával fogunk Hermite-íveket előállítani, melyek uniójaként áll majd elő a végső felületdarab. Egy-egy ív konstrukciójánál az adott pontban tekintendő érintővektor hossza a síkbeli esetben használt ötlet alapján itt a pont két gömb hatványsíkjától vett távolságától lesz függővé téve. Egy \tilde{c}_i érintőkör mentén létrehozott érintővektor az érintőkör adott pontjából az s_i gömb \tilde{c}_i körre vonatkozó pólusába mutató vektor skalárszorosaként kell előálljon, a pólust jelöljük \mathbf{w}_i -vel ($i \in \{1, 2, \dots, n\}$). Többek között ezt figyelhetjük meg a 26. ábrán.



26. ábra. Az érintőkörök meghatározása térbeli esetben, hatványsíkoktól való távolságot vizsgálva.

Az indokolatlan torzulások elkerülése érdekében az egymásnak megfelelő kiindulási pontok (\mathbf{z}_i) meghatározásához segítségül hívunk egy olyan rögzített \mathbb{R}^3 -beli \mathbf{e} vektort, mely nem párhuzamos egyetlen $\mathbf{w}_i - \tilde{\mathbf{o}}_i$ vektorral sem ($i \in \{1, 2, \dots, n\}$). Ha teljesíti a feltételt, az egyszerűség kedvéért választhatjuk a $\mathbf{e} = (\mathbf{w}_i - \tilde{\mathbf{o}}_i) \times (\mathbf{w}_{i+1} - \tilde{\mathbf{o}}_{i+1})$ vektort is.

Legyenek $m: \mathbb{R} \rightarrow \{-1, 1\}$ és $p: \{s_i\} \rightarrow \{-1, 1\}$ az alábbiak szerint definiált függvények:

$$m(x) = \begin{cases} -1 & \text{ha } x < 0, \\ 1 & \text{egyébként} \end{cases}$$

$$p(s_i) = \begin{cases} m \left(\left\langle \frac{\mathbf{w}_i - \mathbf{o}_i}{\|\mathbf{w}_i - \mathbf{o}_i\|}, \frac{\mathbf{o}_{i+1} - \mathbf{o}_i}{\|\mathbf{o}_{i+1} - \mathbf{o}_i\|} \right\rangle \right) & \text{ha } i \neq n, \\ m \left(\left\langle \frac{\mathbf{w}_i - \mathbf{o}_i}{\|\mathbf{w}_i - \mathbf{o}_i\|}, \frac{\mathbf{o}_i - \mathbf{o}_{i-1}}{\|\mathbf{o}_i - \mathbf{o}_{i-1}\|} \right\rangle \right) & \text{egyébként} \end{cases}$$

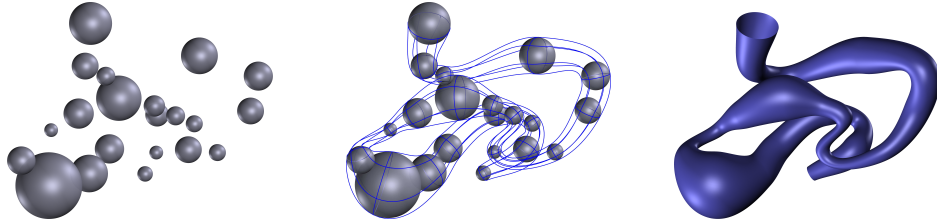
ahol \langle, \rangle a vektorok skaláris szorzatát jelöli. Ezen függvények segítségével képesek vagyunk pontosan felírni a már említett \mathbf{z}_i kezdőpontokat:

$$\mathbf{z}_i = \tilde{\mathbf{o}}_i + \tilde{r}_i \cdot \frac{\mathbf{e} \times (p(s_i) \cdot (\mathbf{w}_i - \tilde{\mathbf{o}}_i))}{\|\mathbf{e} \times (p(s_i) \cdot (\mathbf{w}_i - \tilde{\mathbf{o}}_i))\|} \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Az érintőkörökön további egymásnak megfelelő pontpárokat határozhatunk meg azáltal, hogy a definiált \mathbf{z}_i pontokat adott $\phi \in [0, 2\pi]$ szögben elforgatjuk a $\tilde{\mathbf{o}}_i$ ponton áthaladó, $p(s_i) \cdot (\mathbf{w}_i - \tilde{\mathbf{o}}_i)$ irányvektorú egyenes körül. Jelöljük M_i -vel a szomszédos s_i és s_{i+1} gömbök hatványsíkját, ahol $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$. A burkolófelületünk $n-1$ darab alkotóelemből fog összeállni, az i . az alábbiak szerint definiálható:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{s}}_i(\phi, t) &= H_0^3(t) \mathbf{z}_i(\phi) + H_1^3(t) \mathbf{z}_{i+1}(\phi) + \\ &H_2^3(t) \cdot p(s_i) \cdot 2 \cdot d(M_i, \mathbf{z}_i(\phi)) \cdot \frac{\mathbf{w}_i - \mathbf{z}_i(\phi)}{\|\mathbf{w}_i - \mathbf{z}_i(\phi)\|} + \\ &H_3^3(t) \cdot p(s_{i+1}) \cdot 2 \cdot d(M_i, \mathbf{z}_{i+1}(\phi)) \cdot \frac{\mathbf{w}_{i+1} - \mathbf{z}_{i+1}(\phi)}{\|\mathbf{w}_{i+1} - \mathbf{z}_{i+1}(\phi)\|} \end{aligned}$$

$$t \in [0, 1], \phi \in [0, 2\pi], i = 1, \dots, n-1,$$

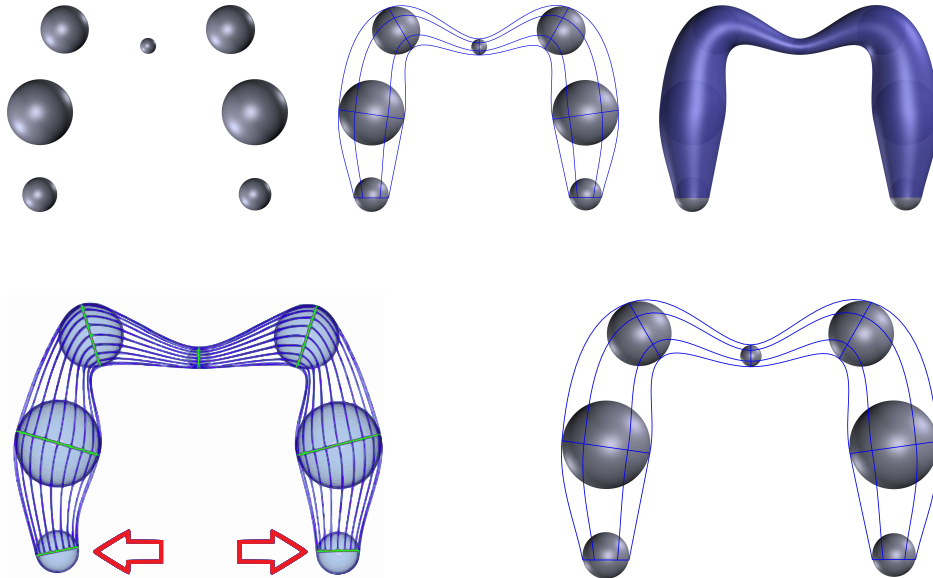


27. ábra. Az ábrán egy összetett adathalmazt és annak saját algoritmusunkkal előállított burkolóját láthatjuk. A gömbök középpontjai nem illeszkednek egy síkra.

ahol d az euklideszi távolságfüggvényt, illetve H_i^3 a 2.1-es definícióban tárgyalt harmadfokú Hermite-polinomokat jelöli.

Saját algoritmusunk kimenetét láthatjuk a 27. ábrán, a konstrukciót végigkövethetjük a kezdősorozat megadásától a végső megoldás előállításáig.

A térbeli esetben is fontosnak tartottuk összevetni eredményeinket a már eddig ismert módszerekkel. Slabaugh-nak és munkatársainak az eredményeit ítéltük meg a gyakorlatban megjelenő problémák esetén a leghasználhatóbbnak, így az összevetést is az ő algoritmusukkal tesszük meg. Hiszen a mi célunk is egy, a mérnöki és tervezői gyakorlatban könnyen és általánosan használható eszköz fejlesztése volt.



28. ábra. Újabb példa a saját algoritmusunk eredményére térbeli esetben (fent). Ez a gömbsorozat Slabaugh-nak és munkatársainak a munkájában is fel volt használva [54], alul az összevetést láthatjuk. Esetünkben az ottani eredménnyel (bal) ellentétben mindig szimmetrikus felületet kapunk (jobb).

Az egyik legfontosabb különbség, hogy módszerünk minden megengedett esetben megfelelő érintési kört generál, melynek nincs a környező gömbtestekbe eső része, ez Slabaugh eredményére nem mondható el, nem garantálja ezt semmi. Az iteratív módszerrel csak közelítünk egy határhelyzetet bizonyos pontosságig, már ha egyáltalán létezik ez a határhelyzet. Többek között emiatt is figyelhető meg az, hogy az algoritmusuk nem képes szimmetrikus kimenetekre még olyan esetekben sem, amikor ez egyértelműen elvárható lenne, míg a mi módszerünkben használt eszközökből ez egyszerűen következik. Erről tanúskodik a 28. ábra.

A saját algoritmusunk további, szemléletes kimeneteit láthatjuk az A. függelékben.

3.3.5.3. Összefoglalás Elmondhatjuk, hogy sikerült olyan módszert találnunk a definiált problémára, amely számos ponton jobb megoldást adhat az ismert módszereknél. Elsőként adtunk pontos definíciót arra vonatkozóan, mit nevezünk a probléma szempontjából megengedett inputnak, s milyen tulajdonságokkal rendelkező görbe, illetve felület előállítására törekszünk. Az általunk definiált burkológörbe, illetve -felület esetén alkalmasnak mondható sorozat esetén garantáljuk, hogy az érintési pontok, illetve az érintőkörök mindig kívül esnek a sorozat többi eleme által meghatározott körlapon, térbeli esetben gömbtesten. Emiatt képesek vagyunk olyan sorozatok esetén is jó megoldást adni, amelyeket más módszerek nem tudnak már kezelni. A konstruktív és ábrázoló geometria klasszikus eszközeinek használata következtében egy robusztus és hatékony algoritmust állítottunk elő, amely hathatós segítséget jelenthet a valós idejű számítógépes tervezésben. (Az iteratív módszerek hátránya sok esetben, hogy erre nincs lehetőségünk.) Slabaugh munkájában energiafüggvények alkalmas minimalizálásával éri el eredményeit, de ki kell hangsúlyoznunk, hogy esetében egyáltalán nem garantálható, hogy a keresett határérték létezik, továbbá maga az energiafüggvény egy, az ebben a dolgozatban is említett konstanstól igen erősen függ, ennek választása bizonyára tapasztalati úton történhetett. Az általunk használt 2-es szorzó a

hatványvonalaktól, illetve hatványsíkoktól való távolságokat illetően szintén egy tapasztalati úton kapott érték, melynek használatát az előbb vázoltak miatt nem tartjuk ahhoz képest kevésbé megalapozottnak. Azonban terveink között szerepel, hogy tovább finomítsuk eredményeinket, megfelelő energiafüggvények minimalizálásával.

Továbbá szeretnénk kiemelni, hogy bár a mi módszerünk csak G^1 folytonosságot garantál a Slabaugh és munkatársai által publikált C^1 folytonos csatlakoztatást biztosító módszerrel szemben, de a saját megközelítésünk a bemeneti adatok sokkal szélesebb körét képes hatékonyan kezelni, továbbá az egy adott érintési pontba befutó, illetve onnan kifutó érintővektorok egy egyszerű átlagolásával nagyon egyszerűen áttérhetünk C^1 folytonosságra is, amennyiben a bemeneti adatokat úgy ítéljük meg, hogy erre lehetőséget adnak, azaz kellően hasonló kapcsolat áll fent egy adott kör esetén annak szomszédaival mind a középpontok távolságát, mind a sugarak arányát tekintve.

Módszerünk kétségkívül egyik legnehezebb momentuma az érintési pontok, illetve érintőkörök megfelelő elhelyezése. Ahogy már említettük, ezt követően egyéb típusú görbék és felületek alapjául is szolgálhatnak ezek az objektumok, ami ennek a kutatásnak egy lehetséges további irányát jelenti. Érdekes kérdésként merülhet fel továbbá, hogy hogyan lehetne megvalósítani a módszerünkkel kapott felületek egymáshoz csatlakoztatását.

3.4. Implementációs megfontolások

Ahhoz, hogy az elgondolásainkat le tudjuk ellenőrizni, illetve az eredményeinket meg tudjuk jeleníteni, szükség volt a kigondolt algoritmusok implementációjára. Ezért a kutatómunkával párhuzamosan dolgoztunk a megjelenítésért felelős szoftver fejlesztésén is. Munkánk során az *OpenGL* [50] nyílt programkönyvtárat hívtuk segítségül, hiszen népszerű, hatékony, ingyenesen hozzáférhető és platformfüggetlen megoldást jelent. Használatával azt szerettük volna biztosítani, hogy az elkészült szoftver hordozható és időtálló legyen, felkészülve az esetleges későbbi, újabb fejlesztési irányokra.

A 2.2.4.1. paragrafusban ismertetett mátrixműveletek implementálása hatékonyan segítette a számítások gyorsítását, azok univerzális felhasználhatóságát. A pólusok, poláris egyenesek vagy polársíkok előállításai kulcsfontosságú elemei a módszerünket megvalósító algoritmusnak, ezért kitüntetett figyelmet igényelnek. Az Apollóniusz-feladat ciklografikus megoldásakor [25, 2] szintén fontos szerepet kapnak ezek a szerkesztések, így ebben az esetben is kihasználhatjuk a mátrixműveletekből származó előnyöket.

Ahhoz, hogy a publikációkhoz megfelelő minőségű vektorgrafikus formátumú kimeneteket készíthessünk, eredményeinket *Asymptote* [18] nyelven is implementáltuk. A nyelv segítségével többek között *.eps* kimenet is előállítható a renderelt objektumokról. Ha a tervezési folyamat során az aktuális felületről vagy görbepárról szeretnénk vektorgrafikus kimenetet előállítani, a szoftver erre automatikus lehetőségeket biztosít. Így tehát tetszőleges méretben ugyanúgy jó minőségben lesz vizsgálható a konstruált kimenetünk, ami a digitális formátumban is megjelenő folyóiratcikkek esetében sokszor nagyon fontos lehet.

3.5. Saját eredmények biarc görbékkel

3.5.1. Motiváció

Ahogy említettük, egyéb típusú görbét is használhatnánk a burkoló görbepár előállítására az érintési pontok és érintővektorok meghatározását követően, nem csak Hermite-íveket. Ezt a választást több tényező is befolyásolhatja, az egyik ilyen például lehet az, hogy konkrétan milyen célra fogjuk használni a szoftvert azon túl, hogy mint számítógépes geometriai modellezésben használható lehetséges eszközként tekintünk rá. Egy ilyen felhasználási terület lehet például az egyre nagyobb népszerűsége szert tevő CNC technológia [26]. A CNC gépek egyik legfontosabb tulajdonsága, hogy pusztán egyenesek és körívek mentén képesek megmunkálni a kívánt felületet, éppen ezért hasznos lehet egy olyan interpolációs eszköz, amely körsorozatokat megadását követően automatikusan képes például olyan burkoló görbepár



29. ábra. CNC géppel konstruált minta.²

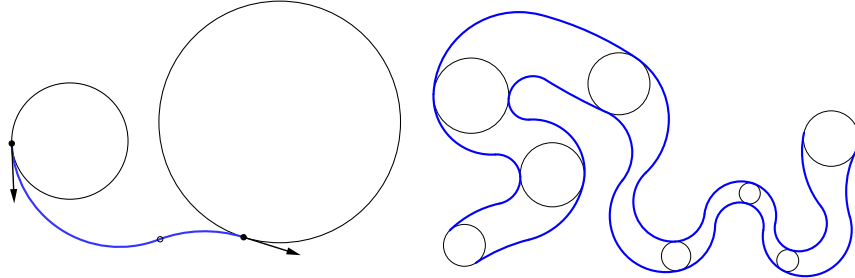
meghatározására, mely maga is csak körívekből áll, természetesen megfelelő szintű folytonos kapcsolódást feltételezve.

Az előző fejezetben közölt eredményeink elérését követően megkezdtük annak vizsgálatát, hogyan volna lehetséges az interpolációt a fentebb vázolt elv alapján ún. biarc interpolációs ívekkel megoldani (lásd 2.5-ös definíció) úgy, hogy a körsorozat szomszédos elemeit egy-egy biarc interpolációs ív kösse egymással össze (lásd 30. ábra).

A 30. ábrán látott helyzethez hasonló elérése a célunk, egyik fontos szempont lehet tehát az elvárásainkat illetően, hogy két kör között az interpolációt megvalósító, csatlakozó körívek ne metszenek bele a körökbe. Több, a geometriai adatainknak (érintési pontok és érintő egységvektorok) megfelelő interpoláló megoldás létezik, ha a metszésre és magára az alapfeladatunkra nem vagyunk tekintettel. Nekünk ezek közül kell a probléma szempontjából megfelelőbbet találni, azaz egyrészt eleget tenni az előzőekben oly sokszor említett, burkoló görbepárra vonatkozó feltételeknek, másrészt ezt kiegészítve a metszést is kerülni, amennyiben ez lehetséges.

Választ szeretnénk volna kapni arra a kérdésre, hogy hogyan kerül-

¹<http://pimg.tradeindia.com/01667798/b/1/CNC-Cutting-Machine.jpg>
letöltés időpontja: 2014. június 20.



30. ábra. Két kört érintő biarc interpolációs ív (balra) és kizárólagos felhasználásukkal nyert burkológörbék (jobbra).

hetjük el a körök esetében, hogy az őket összekötő biarc-interpolációs ívek azokba belemetsszenek. Az eredményeket [29] alapján ismertetem.

3.5.2. Biarc interpolációs ívek osztályozása

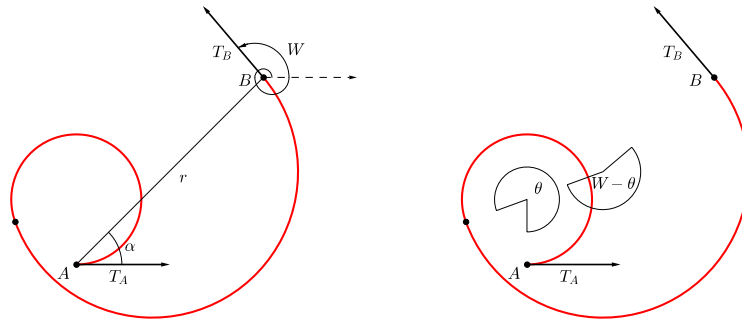
Ha két körívet G^1 folytonosan csatlakoztatunk egymáshoz, ún. biarc ívet kapunk. A biarc ívekről kiterjedt irodalom áll rendelkezésünkre, már 1937-ben született egy folyóiratcikk [48], melyben először került említésre ez a görbetípus. Továbbá természetesen létrehozhatunk ilyen ívek – megfelelő folytonossági megfontolások mellett történő – egymáshoz kapcsolásával ún. biarc görbéket is [4], továbbá fontos azt is megemlítenünk, hogy több olyan módszer is ismert, melyek segítségével egy előre rögzített görbét approximálhatunk biarc görbékkel [43]. Látszik tehát, hogy a biarc ívek rendszeresen megjelennek a szakirodalomban, használatukkal sok modellezési feladat leegyszerűsíthető, ez mind szoftverfejlesztési szempontból, mind a bizonyos feladatokhoz választott célhardver kapcsán fontos tényező lehet. Meek és Walton egy nagyon mély elemzésnek vetette alá ezt a görbetípust és ismertették ezek osztályozását [34].

A szerzők egy-egy ívet biarc interpolációs ívként származtatnak, és többek között a definiáló geometriai adatok alapján végzik el

az osztályozást. Viszont a 2.5-ös definícióban említett adatok még nem egyértelműsítenek egy ilyen görbét, ha ezt el szeretnénk érni, akkor meg kell adnunk egy W (akár 2π -nél nagyobb) szöget, ami a definícióban szereplő két érintővektor egymással bezárt, egyfajta speciális előjeles szögét jelenti.

Természetesen a metszés problémáját leegyszerűsíthetjük abban az értelemben, hogy elegendő csupán két kört vizsgálnunk. A 31. ábrán láthatjuk a definiáló geometriai adatokat két kör esetén, illetve fel-tüntetünk további jelöléseket a problémára vonatkozóan, így például a kulcsfontosságú W szöget, melyre már az előbbieken is kitértünk Meek és Walton fontos cikkét említve. Az ábrát szemlélve megfogalmazhatjuk a kérdést a következőképpen. Hogyan határozzuk meg a θ szöget úgy, hogy a metszést elkerüljük a körök és az interpolációs ív között?

Természetesen a fő cél az, hogy megvizsgáljuk az összes fenti cikkben [34] említett családot és mindegyik esetében meghatározzuk a metszés elkerüléséhez szükséges feltételeket. Azonban munkámban a cikkben említett 1.3-as esetet vettem először górcső alá, ahol



(a) Biarc interpolációs ív, annak definiáló geometriai adataival. r A és B távolságát jelöli.

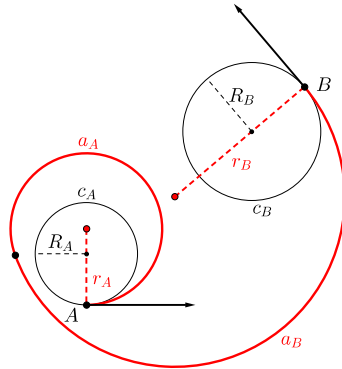
(b) A körívekhez tartozó szögek összege mindig W -vel egyenlő.

31. ábra. Biarc interpolációs ív és definiálói adatai.

a 31. ábrán látott jelöléseket használva $r_A, r_B, \theta, W - \theta > 0$ teljesül, továbbá

$$\begin{aligned} 2\pi &< W < 4\pi, \\ 2\pi + 2\alpha &< W < 3\pi + \alpha, \\ -2\pi + W &< \theta < 4\pi - W + 2\alpha. \end{aligned}$$

Meek és Walton cikkükben pozitív és negatív sugarú köríveket említenek, emiatt nekünk is követnünk kell ezt a konvenciót az alapkörök vonatkozásában is. Feltehetjük, hogy mindkét alapkörünk sugara pozitív, mivel az érintési pontokban választott érintő egységvektoraink közös irányválasztását tekintve nem rendelkezünk megkötéssel a burkolási feladatból következően, azaz a körökre mindig tekinthetünk úgy, hogy az érintő egységvektorok „*bal oldalán*” helyezkednek el, azaz a hozzájuk tartozó végpontból a tekintett kör középpontjába mutató vektor az érintő egységvektor óramutató járásával ellentétes irányban történő elforgatásával nyert vektor nemnegatív skalárszorosa. Könnyen belátható, hogy a c_A kör és az a_A körív között elkerülhető a metszés, amennyiben $r_A > R_A$ teljesül. Hasonlóan láthatjuk be, hogy $r_B > R_B$ teljesülésével biztosítható, hogy elkerüljük a metszést a_B és c_B között. A körök elhelyezését és az említett sugarak viszonyát láthatjuk a 32. ábrán. Lássuk, mit jelent ez a két előbbi feltétel a



32. ábra. Az alapkörök megállapodás szerinti elhelyezése.

kérdéses θ szögre vonatkozóan.

3.5.3. A θ -ra vonatkozó feltételek

3.5.3.1. $r_A > R_A$ Először tehát vizsgáljuk meg, milyen megszorítások adódnak a θ szögre vonatkozóan, amennyiben az A -val indexelt körre és körívre vonatkozó $r_A > R_A$ feltételből indulunk ki.

Meek és Walton cikkében [34] foglaltakból tudhatjuk, hogy a biarc interpolációs ív A -val indexelt részének sugarára igaz a következő egyenlőség:

$$r_A = \frac{r \cdot \sin\left(\frac{W+\theta}{2} - \alpha\right)}{2 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{W}{2}\right)} = r \cdot \frac{\sin\left(\frac{W}{2} - \alpha + \frac{\theta}{2}\right)}{2 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{W}{2}\right)}.$$

A képletben előforduló szögekre és szögfüggvényértékekre vonatkozóan a kezdeti feltételeinket is felhasználva kaphatjuk az alábbi összefüggéseket:

$$0 < \theta < 2\pi \Rightarrow \sin\frac{\theta}{2} > 0, \quad 2\pi < W < 4\pi \Rightarrow \sin\frac{W}{2} < 0, \quad 0 < \frac{\theta}{2} < \pi,$$

$$2\pi + 2\alpha < W < 3\pi + \alpha \Rightarrow \pi < \frac{W}{2} - \alpha < 2\pi \Rightarrow \sin\left(\frac{W}{2} - \alpha\right) < 0.$$

Célunk a θ -ra vonatkozó feltételek megadása, néhány átalakítással és a fenti összefüggések figyelembevételével kaphatjuk a következő egyenlőtlenséget:

$$\begin{aligned} r_A &> R_A \\ \frac{r \cdot \sin\left(\frac{W+\theta}{2} - \alpha\right)}{2 \sin\frac{\theta}{2} \sin\frac{W}{2}} &> R_A \\ \frac{\sin\left(\left(\frac{W}{2} - \alpha\right) + \frac{\theta}{2}\right)}{\sin\frac{\theta}{2}} &< \frac{2R_A \sin\frac{W}{2}}{r} \\ \frac{\sin\left(\frac{W}{2} - \alpha\right) \cdot \cos\frac{\theta}{2} + \cos\left(\frac{W}{2} - \alpha\right) \sin\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}} &< \frac{2R_A \sin\frac{W}{2}}{r} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin\left(\frac{W}{2} - \alpha\right) \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} &< \frac{2R_A \sin \frac{W}{2}}{r} - \cos\left(\frac{W}{2} - \alpha\right) \\ \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} &> \frac{\frac{2R_A \sin(\frac{W}{2})}{r} - \cos\left(\frac{W}{2} - \alpha\right)}{\sin\left(\frac{W}{2} - \alpha\right)} \end{aligned}$$

Az egyszerűbb kezelhetőség kedvéért vezessük be a következő jelölést:

$$K \doteq \frac{\frac{2R_A \sin(\frac{W}{2})}{r} - \cos\left(\frac{W}{2} - \alpha\right)}{\sin\left(\frac{W}{2} - \alpha\right)}.$$

Hajtsunk végre K szerint egy esetszétválasztást:

1. $K > 0$ esetén a következő feltételt kaphatjuk:

$$\operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} = K \quad \Rightarrow \quad \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} = \frac{1}{K} \quad \Rightarrow \quad \theta = 2 \operatorname{arctg} \frac{1}{K}$$

$$\boxed{0 < \theta < 2 \operatorname{arctg} \frac{1}{K}}$$

2. $K < 0$ esetén pedig az alábbi összefüggés adódik:

$$\frac{\theta}{2} = \operatorname{arctg} \frac{1}{K} + \pi \quad \Rightarrow \quad \theta = 2 \operatorname{arctg} \frac{1}{K} + 2\pi$$

$$\boxed{0 < \theta < 2 \operatorname{arctg} \frac{1}{K} + 2\pi}$$

3. Végül $K = 0$ esetén egy nagyon egyszerű feltételt kaphatunk:

$$\boxed{0 < \theta < \pi}.$$

3.5.3.2. $r_B > R_B$ Most pedig következzen a 3.5.3.1. paragrafusban leírtakhoz hasonló módon annak vizsgálata, milyen feltételt adhatunk a θ szögre vonatkozóan, ha a B -vel indexelt körre, illetve körívre vonatkozó $r_B > R_B$ a kiindulási alapunk.

Meek és Walton cikkéből [34] az előző esethez hasonlóan tehát ismert, hogy

$$r_B = r \cdot \frac{\sin\left(\alpha - \frac{\theta}{2}\right)}{2 \sin\left(\frac{W-\theta}{2}\right) \sin \frac{W}{2}},$$

továbbá

$$\begin{aligned} W - 2\pi < \theta < W &\Rightarrow \frac{W}{2} - \pi < \frac{\theta}{2} < \frac{W}{2} \Rightarrow \\ \Rightarrow 0 < \frac{W}{2} - \frac{\theta}{2} < \pi &\Rightarrow \sin\left(\frac{W}{2} - \frac{\theta}{2}\right) > 0. \end{aligned}$$

A fentiek figyelembevételével a következőt kaphatjuk:

$$\begin{aligned} r \cdot \frac{\sin\left(\alpha - \frac{\theta}{2}\right)}{2 \sin\left(\frac{W-\theta}{2}\right) \sin \frac{W}{2}} &> R_B \\ \frac{\sin\left(\alpha - \frac{\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{W}{2} - \frac{\theta}{2}\right)} &< \frac{2R_B \sin \frac{W}{2}}{r} \\ \frac{\sin \alpha \cos \frac{\theta}{2} - \cos \alpha \sin \frac{\theta}{2}}{\sin \frac{W}{2} \cos \frac{\theta}{2} - \cos \frac{W}{2} \sin \frac{\theta}{2}} &< \frac{2R_B \sin \frac{W}{2}}{r} \end{aligned}$$

Amennyiben bevezetjük az $X_B \doteq \frac{2R_B \sin \frac{W}{2}}{r}$ jelölést, egyenlőtlenségünk

$$\sin \alpha \cos \frac{\theta}{2} - \cos \alpha \sin \frac{\theta}{2} < X_B \sin \frac{W}{2} \cos \frac{\theta}{2} - X_B \cos \frac{W}{2} \sin \frac{\theta}{2} \quad (1)$$

alakban írható fel.

A θ -ra vonatkozó feltételeket az előző esethez hasonlóan esetszétválasztások segítségével kaphatjuk meg:

1. Tegyük fel, hogy $\cos \frac{\theta}{2} > 0$ ($\Leftrightarrow 0 < \theta < \pi$), ekkor (1) az alábbiak szerint alakítható:

$$\sin \alpha - \cos \alpha \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} < X_B \sin \frac{W}{2} - X_B \cos \frac{W}{2} \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}$$

$$\operatorname{tg} \frac{\theta}{2} \left(X_B \cos \frac{W}{2} - \cos \alpha \right) < X_B \sin \frac{W}{2} - \sin \alpha. \quad (2)$$

- (i) Ha $X_B \cos \frac{W}{2} - \cos \alpha > 0$, akkor (2) átalakításával kapjuk, hogy

$$\operatorname{tg} \frac{\theta}{2} < \frac{X_B \sin \frac{W}{2} - \sin \alpha}{X_B \cos \frac{W}{2} - \cos \alpha}$$

Ezt a szintet követően már csak egyetlen újabb esetszétválasztással kell élnünk:

- (a) Ha $X_B \sin \frac{W}{2} - \sin \alpha \geq 0$, akkor $0 < \frac{\theta}{2} < \frac{\pi}{2}$ miatt az alábbi formában foglalhatjuk össze az adódó feltételünket:

$$0 < \theta < 2 \operatorname{arctg} \frac{X_B \sin \frac{W}{2} - \sin \alpha}{X_B \cos \frac{W}{2} - \cos \alpha}$$

- (b) Míg $X_B \sin \frac{W}{2} - \sin \alpha < 0$ teljesülése esetén $\operatorname{tg} \frac{\theta}{2} \not< 0$ miatt ellentmondáshoz jutunk, hiszen feltevésünk szerint $0 < \frac{\theta}{2} < \frac{\pi}{2}$.

- (ii) Ha $X_B \cos \frac{W}{2} - \cos \alpha < 0$, akkor (2) az alábbi alakra hozható:

$$\operatorname{tg} \frac{\theta}{2} > \frac{X_B \sin \frac{W}{2} - \sin \alpha}{X_B \cos \frac{W}{2} - \cos \alpha}$$

- (a) Így a $X_B \sin \frac{W}{2} - \sin \alpha \leq 0$ esetén adódó feltétel az alábbi:

$$2 \operatorname{arctg} \frac{X_B \sin \frac{W}{2} - \sin \alpha}{X_B \cos \frac{W}{2} - \cos \alpha} < \theta < \pi.$$

(b) Míg $X_B \sin \frac{W}{2} - \sin \alpha > 0$ teljesülésekor

$$\boxed{0 < \theta < \pi}$$

adódik.

(iii) Ha $X_B \cos \frac{W}{2} - \cos \alpha = 0$, akkor (2) a következőre egyszerűsödik:

$$0 < X_B \sin \frac{W}{2} - \sin \alpha$$

(a) Ez $X_B \sin \frac{W}{2} - \sin \alpha > 0$ esetén értelemszerűen az alábbi feltételt jelenti, bármely feltételezett intervallumban lévő θ jó megoldást jelent:

$$\boxed{0 < \theta < \pi}.$$

(b) Ha azonban $X_B \sin \frac{W}{2} - \sin \alpha \leq 0$, ellentmondáshoz jutunk.

A fentiekben megvizsgáltuk, milyen összefüggéseket nyerhetünk θ -ra vonatkozóan, ha feltevésünk szerint $\cos \frac{\theta}{2} > 0$. Most nézzük meg a másik esetet.

2. Ezúttal tegyük fel, hogy $\cos \frac{\theta}{2} < 0$ teljesül (amiből következik, hogy $\pi < \theta < 2\pi$). Ekkor (1) a következő alakra hozható:

$$\operatorname{tg} \frac{\theta}{2} \left(X_B \cos \frac{W}{2} - \cos \alpha \right) > X_B \sin \frac{W}{2} - \sin \alpha \quad (3)$$

(i) Amennyiben $X_B \cos \frac{W}{2} - \cos \alpha > 0$ teljesül, úgy

$$\operatorname{tg} \frac{\theta}{2} > \frac{X_B \sin \frac{W}{2} - \sin \alpha}{X_B \cos \frac{W}{2} - \cos \alpha}$$

adódik.

(a) Ebben az esetben nyilvánvaló, hogy amennyiben

$$X_B \sin \frac{W}{2} - \sin \alpha \geq 0,$$

ellentmondáshoz jutunk.

- (b) Ha $X_B \sin \frac{W}{2} - \sin \alpha < 0$, akkor viszont a következő feltételt kaphatjuk:

$$\boxed{2 \operatorname{arctg} \frac{X_B \sin \frac{W}{2} - \sin \alpha}{X_B \cos \frac{W}{2} - \cos \alpha} + 2\pi < \theta < 2\pi.}$$

- (ii) Ha $X_B \cos \frac{W}{2} - \cos \alpha < 0$, akkor (3) az alábbiak szerint alakítható:

$$\operatorname{tg} \frac{\theta}{2} < \frac{X_B \sin \frac{W}{2} - \sin \alpha}{X_B \cos \frac{W}{2} - \cos \alpha}.$$

- (a) Ha a számláló negatív, azaz $X_B \sin \frac{W}{2} - \sin \alpha \leq 0$, akkor a feltétel:

$$\boxed{\pi < \theta < 2\pi}.$$

- (b) Ha a tört számlálója pozitív, azaz $X_B \sin \frac{W}{2} - \sin \alpha > 0$, úgy:

$$\boxed{\pi < \theta < 2 \operatorname{arctg} \frac{X_B \sin \frac{W}{2} - \sin \alpha}{X_B \cos \frac{W}{2} - \cos \alpha} + 2\pi.}$$

- (iii) Ha $X_B \cos \frac{W}{2} - \cos \alpha = 0$, akkor (3) a következőre egyszerűsödik:

$$0 > X_B \sin \frac{W}{2} - \sin \alpha$$

- (a) Ez $X_B \sin \frac{W}{2} - \sin \alpha < 0$ esetén értelemszerűen az alábbi feltételt jelenti, bármely feltételezett intervallumban lévő θ jó megoldást jelent:

$$\boxed{0\pi < \theta < 2\pi}.$$

- (b) Ha azonban $X_B \sin \frac{W}{2} - \sin \alpha \geq 0$, ellentmondáshoz jutunk.

3. Utolsó esetenként még szükséges említést tennünk arról, milyen esetek engedik meg, hogy θ értékül π -t vagy 3π -t válasszunk. Ekkor tehát a (1)-es egyenlőtlenséget tekintve $\frac{\pi}{2} = 0$, ami két feltételt kell jelentsen, egyrészt a $\theta = \pi$, másrészt a $\theta = 3\pi$ egyenlőség vonatkozásában.

- Ha $\cos \alpha > \frac{R_B}{r} \sin W$, akkor a $\theta = \frac{\pi}{2}$ választás megengedett.
- Ha $\cos \alpha < \frac{R_B}{r} \sin W$, akkor a $\theta = 3\pi$ választás megengedett.

Amint a fentiekben láthattuk, minden lehetséges esetet sikerült leírni és megvizsgálni. A megadott bemeneti adatok alapján megállapítható, hogy milyen feltételeknek kell teljesülniük a θ szögre vonatkozóan ahhoz, hogy elkerüljük a metszéseket a körívek és a velük közös ponttal (melyben az érintőegyenesük is közös) rendelkező körök esetén. Ezeknek a feltételeknek természetesen egy időben kell teljesülniük, így a kapott intervallumok metszetét kell tekintenünk a végeredmény megadásakor az egyes esetekben.

3.5.4. Összegzés

A kapott eredményekkel együtt a már említett cikkben [34] szereplő összes eset vizsgálatával elérhető, hogy mindegyikben feltételt szabhatunk a metszés elkerülése érdekében, ezzel egy fontos kiindulási alapot teremtve a körívekkel történő burkolás megvalósításához. Az elért részeredmények ezt képesek nagyban elősegíteni.

Továbbá érdekes lehet annak a vizsgálat is, hogy hogyan lehetünk képesek elkerülni a_A és c_B , valamint a_B és c_A metszését (lásd 32. ábra). Ennek garantálása természetesen további, hasonló vizsgálatokat igényel.

4. Szabadformájú görbék izooptikusai

Ahogy a 2.6-os definícióban is olvashattuk, adott $\mathbf{s}(t)$ ($t \in [a, b]$) síkgörbe izooptikus görbájén azon pontok mértani helyét értjük, melyekből a görbe egy megadott szög alatt látszik.

Mint azt a 2.2.2. alfejezetben említettük, az izooptikusok jól ismeretek és kiterjedt irodalommal rendelkeznek, különösen így van ez az olyan klasszikus görbéink esetében, mint például a kúpszeletek [33].

Az izooptikusok meghatározására több módszer is ismeretes. Mint azt látni fogjuk, nagyon sok esetben megoldáshoz juthatunk, ha az adott paraméteres görbe tartófüggvényét hívjuk segítségül, vagy közvetlenül a definíción alapuló számításokra alapozunk. Azonban ezek az említett számítások sokszor még egyszerűbb görbetípusok esetében is majdhogynem kezelhetetlenül bonyolulttá válhatnak.

Kutatásunk során azt a fő célt tűztük ki magunk elé, hogy képesek legyünk meghatározni a számítógépes geometriai tervezésben igen gyakran használt görbetípusok izooptikusait is. A következő fejezetben részletesebben kifejtésre kerülnek a témában elért eddigi eredmények és a kutatás fő motivációja.

4.1. Történeti áttekintés és az alapprobléma

Bármely $\mathbf{s}(t)$ $t \in [a, b]$ konvex síkgörbe esetében összegyűjthetjük azokat a pontokat, melyekből a görbe egy rögzített α szög alatt látszik. Ezek pontosan azok a pontok, melyekben a görbe érintőegyenesei egymással α szöget zárnak be. Ezen pontok mértani helyét hívjuk az \mathbf{s} görbe α szöghöz tartozó izooptikus görbájének.

Adott görbe izooptikusának meghatározásával már több évszázada foglalkozik a tudomány, habár a szó első ízben Taylor munkájában [59] jelenik meg. Ahogy már többször említettük, jól ismert eredmények állnak rendelkezésünkre a klasszikus görbéink esetében. Különösen igaz ez a kúpszeletekre, például a parabolára, melynek izooptikusa általában hiperbola, vagy az $\alpha = \pi/2$ speciális esetben annak directrixé, ez utóbbi esetben ortooptikus görbéről beszélünk [33, 32]. Ezen klasszi-

kus eredmények összefoglalását egészen új munkákban is részletesen megtalálhatjuk [38, 17]. Napjainkban a hiperbolikus sík izooptikusai is kutatás tárgyát képezik [10].

Egy sokkal elméletibb megközelítést találunk a problémára Cieślak munkájában [7], ahol konvex görbék bizonyos családja esetében azok tartófüggvényeit felhasználva juthatunk megoldáshoz. Ezen általános leírás további tulajdonságai, valamint görbék speciális osztályaihoz számolt izooptikusok szintén fellelhetők a szakirodalomban [7, 35, 56].

Azonban számos olyan görbetípust ismerünk, melyek nem tartoznak az előbb említettek közé, és világszerte alkalmazzák őket a számítógéppel segített geometriai tervezésben. Ilyen görbék például a B-szplajn vagy NURBS görbék, továbbá fontos megjegyeznünk, hogy a mindenki által jól ismert Bézier-görbék is még mindig számos tervezőszoftver eszközkészletének részét képezik, egyszerű felépítésük és könnyű módosíthatóságuknak köszönhetően.

Munkánk során azt a fő célt tűztük ki, hogy képesek legyünk leírni és meghatározni egy megadott Bézier-görbe izooptikus görbéit. A következő alfejezetben bemutatásra kerül egy közvetlenül a definícióra alapozó, a görbe érintőegyeneseinek vizsgálatát felhasználó kiszámítási mód, és részletesen rávilágítunk ezen módszer korlátaira. Az elemzés a 2013-ban közölt cikkünk alapján történik [31].

4.2. Kvadratikus Bézier-görbe izooptikus görbéje

Ebben az alfejezetben bemutatjuk, hogyan számíthatjuk ki közvetlenül a definíció alapján egy kvadratikus Bézier-görbe izooptikus görbéjét. Ez alatt a számítás alatt azon metszéspontok meghatározását értjük, melyek egymással megadott α szöget bezáró érintőegyeneseik metszéséből származnak.

A 2.3-as definícióból következik, hogy kvadratikus esetben a Bézier-görbe az alábbi módon adható meg:

$$\mathbf{s}(t) = \sum_{k=0}^2 B_k(t) \mathbf{p}_k \quad t \in [0, 1],$$

ahol $B_i(t)$ szokásos módon a Bernstein polinomokat, míg \mathbf{p}_i a kontrollpontokat jelöli. Jól ismert, hogy a fent leírt görbe minden esetben egy parabolaívet határoz meg [42], továbbá azt is tudjuk a fentebb említett, klasszikus görbetípusok esetében ismert tulajdonságokból, hogy ezen görbe izooptikus görbéjének szükségszerűen hiperbolaívnek kell lennie. A számolás egyszerűbb formában való közölhetősége érdekében a továbbiakban tegyük fel, hogy a tekintett kvadratikuss Bézier-görbék kontrollpontjai rendre $\mathbf{p}_0(1, 0)$, $\mathbf{p}_1(x, y)$, $\mathbf{p}_2(-1, 0)$. Tetszőleges Bézier-görbe esetén meghatározhatunk olyan affin transzformációt, mely az adott görbe megfelelő kontrollpontjait az előbb említett három pontba viszi át. Ilyen módon tehát a $\mathbf{s}(t)(s_x(t), s_y(t))$ Bézier-görbék koordinátafüggvényei az alábbi egyszerű formában írhatók fel:

$$s_x(t) = 1 - 2t + 2t(1 - t) \quad s_y(t) = 2t(1 - t)y \quad t \in [0, 1].$$

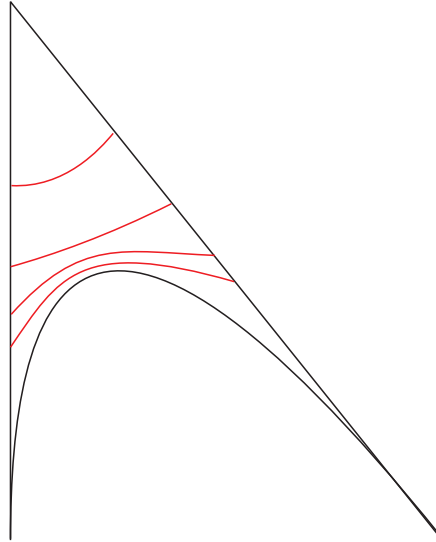
A görbe deriváltjából, majd egy érintőegyenésének egyenletéből egyszerűen meghatározható az a másik érintőegyenes, mely vele a kívánt α szöget zárja be. Némi számolás után adódik, hogy a fenti Bézier-görbe α szöghöz tartozó $\mathbf{s}^\alpha(t)(s_x^\alpha(t), s_y^\alpha(t))$ izooptikus görbéjének koordinátafüggvényei az alábbi módon írhatók fel:

$$\begin{aligned} s_x^\alpha(t) &= \frac{1}{2} \frac{4yt(t-1)(x \cos \alpha - y \sin \alpha) + \sin \alpha(x^2 - y^2 + 1)}{x \sin \alpha - y \cos \alpha + \sin \alpha(2t-1)(x^2 + y^2)} + \\ &+ \frac{1}{2} \frac{(2t-1)(x \sin \alpha(x^2 + y^2 + 1) + 2y \cos \alpha)}{x \sin \alpha - y \cos \alpha + \sin \alpha(2t-1)(x^2 + y^2)} \\ s_y^\alpha(t) &= \frac{1}{2} \frac{4yt(x \sin \alpha + y \cos \alpha)(t-1)}{x \sin \alpha - y \cos \alpha + \sin \alpha(2t-1)(x^2 + y^2)} + \\ &+ \frac{1}{2} \frac{y(\sin \alpha(x^2 + y^2)(2t-1) + \sin \alpha(2t + 2x - 1))}{x \sin \alpha - y \cos \alpha + \sin \alpha(2t-1)(x^2 + y^2)}, \end{aligned}$$

ahol $t \in [0, t^\alpha]$ az alábbi jelölés figyelembevételével.

$$t^\alpha = \frac{1}{2} \frac{2y \cos \alpha + \sin \alpha(x^2 + y^2 + 1)}{x \sin \alpha + y \cos \alpha + \sin \alpha(x^2 + y^2)}$$

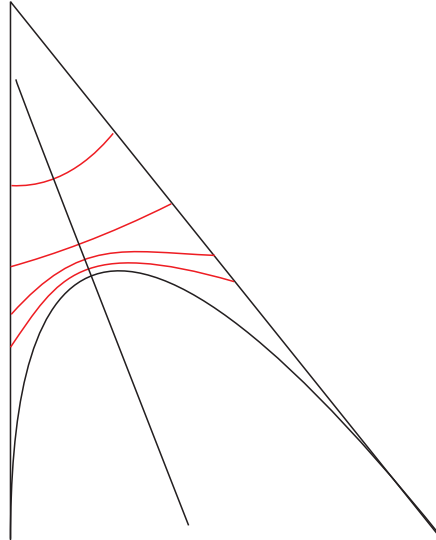
Néhány ilyen izooptikus görbét (hiperbolaívket) láthatunk a 33. ábrán különböző α szögek esetén.



33. ábra. Kvadratikus Bézier-görbe izooptikus görbéi megadott α szög esetén. $\alpha = \frac{3\pi}{4}, \frac{2\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}$.

Könnyű bizonyítani, hogy ezen izooptikusként előálló hiperbolaívек valós tengelyei egybeesnek a parabolaívet leíró Bézier-görbe tengelyével, ahogy azt a 34. ábrán is megfigyelhetjük.

Ahogy azt a fenti esetben tapasztalhattuk, a közvetlenül a definícióból történő meghatározás még ebben az egyszerű esetben is igencsak komplikáltnak mutatkozott. Magasabb rendű Bézier-görbék esetében a számítás komplexitása tovább növekszik. Kubikus Bézier-görbék esetén fejlett komputeralgebrai rendszerek is csak hosszú másodpercek után képesek a számolás eredményének megjelenítésére, az eredmény maga pedig rendkívül bonyolult. Magasabb rendet választva azt tapasztalhatjuk, hogy a számolás egy átlagos PC képességeire alapozva erőforráshiányra hivatkozva egyszerűen leáll. Fontos megjegyezni, hogy a probléma megoldásának elősegítése érdekében megpróbáltuk használni a debreceni és a pécsi szuperszámítógépet, melyekhez az NIIF



34. ábra. Az izooptikusok tengelyei (hiperbolaívek) és a Bézier-görbe (parabolaív) tengelye egybeesnek.

Intézet³ biztosított hozzáférést. Eredményt sajnos így sem sikerült elérnünk, a számolások váratlanul hosszas futás után leálltak, pedig erőforrás-probléma már nem állt fenn sem a memória, sem a processzorteljesítmény kapcsán.

A következő alfejezetben egy másik megközelítési mód alkalmazási lehetőségeit vizsgáljuk meg, a továbbiakban pedig kimondunk két tételt is az új módszer használhatóságának alátámasztása érdekében, ezeket természetesen bizonyítjuk is.

Habár néhány eredmény tetszőleges görbékre is érvényes, a továbbiakban konvex Bézier-görbét feltételezünk, megállapításaink ezekre vonatkoznak.

Az alább közzétett önálló eredményeink szintén 2013-ban kerültek publikálásra [31].

³Nemzeti Információs Infrastruktúra Fejlesztési Intézet (<http://www.niifi.hu>, elérés ideje: 2013. június 1.)

4.3. Izooptikus származtatása látókörivekkel

Elemi geometriai ismereteinkből jól tudjuk, hogy adott $\overline{\mathbf{ab}}$ szakasz esetén azon \mathbf{p} pontok, melyekre az $\angle(\mathbf{apb})$ szög egyenlő egy adott szöggel, két köríven helyezkednek el. Lényegében a látókörivek az adott $\overline{\mathbf{ab}}$ szakasz izooptikus görbéi.

Tekintsünk egy α szöget, továbbá egy tetszőleges fokszámú konvex $\mathbf{s}(t)$ $t \in [1, 0]$ Bézier-görbét. Legyen adott továbbá a görbe egy $\mathbf{s}(t_0)$ pontja. Ha ilyen feltételek mellett tekintjük a görbe $\mathbf{s}(t_0)\mathbf{s}(t)$ húrjait, majd ezen húrok α szöghöz tartozó látóköriveit, akkor körívek egy egyparaméteres családját kaphatjuk meg. Mivel a Bézier-görbénket konvexnek tételeztük fel, az egy adott húr esetén konstruálható látókörivek közül azon (adott szakasz által indukált) félsíkba esőkkel fogunk foglalkozni, melyekre igaz, hogy létezik olyan látószögérték, mely esetén a látóköriív teljes egészében a Bézier-görbe és a kontrollpoligon által meghatározott síkidomra esik. Előbbi leírással a „*kontrollpoligon irányába tartó*”, ún. „*külső*” látókörivekre szeretnénk utalni, egy ilyen ív pontjaiként szerepel például \mathbf{p} és \mathbf{q} a 35. ábrán.

Ezen említett körívek egyikének szükségszerűen tartalmaznia kell egy olyan pontot, mely a Bézier-görbe α szöghöz tartozó izooptikus görbéjének is pontja. A görbe $\mathbf{s}(t_0)$ pontjában vett érintőegyenese és a $\mathbf{s}(t)$ pontokban tekintett érintőegyenese egyike α szögben metszik egymást, emiatt az ezen két említett pont összekötésével nyert húr körül értelmezett látóköriívnek tartalmaznia kell a két érintőegyenese metszéspontját.

Az alábbiakban bizonyítással együtt kimondunk egy tételt, mely szerint a fent említett pontban a látóköriív és az izooptikus görbe közös érintőegyenessel is rendelkezik, míg a többi látóköriív közül egynek sincs közös pontja az izooptikus görbével.

4.4. A kutatás új eredményei

4.1. Tétel. *Tekintsünk egy α szöget, továbbá legyen adott egy konvex, tetszőleges fokszámú $\mathbf{s}(t)$ $t \in [0, 1]$ Bézier-görbe, valamint annak egy tetszőleges t_0 paraméterhez tartozó $\mathbf{s}(t_0)$ pontja. Ekkor az α szöghöz*

tartozó, $\overline{\mathbf{s}(t_0)\mathbf{s}(t)}$ görbehúrok fölé írt látókörvéknek vagy nincs közös pontja a Bézier-görbe α szöghöz tartozó izooptikus görbéjével, vagy pontosan egy közös pontja van azzal, mely pontban a görbe izooptikusának és a látókörívnek az érintőegyenese egymással megegyezik.

4.1. Bizonyítás. A bizonyításhoz először tekintsük azt az esetet, amikor egy tekintett $\overline{\mathbf{s}(t_0)\mathbf{s}(t_1)}$ húrra igaz, hogy a végpontjaiban vett érintőegyeneseik egymással α -tól különböző szöget zárnak be. Indirekt tegyük fel, hogy az ezen húr fölé írt α szöghöz tartozó látókörvéknek van egy közös \mathbf{p} pontja a Bézier-görbe izooptikus görbéjével.

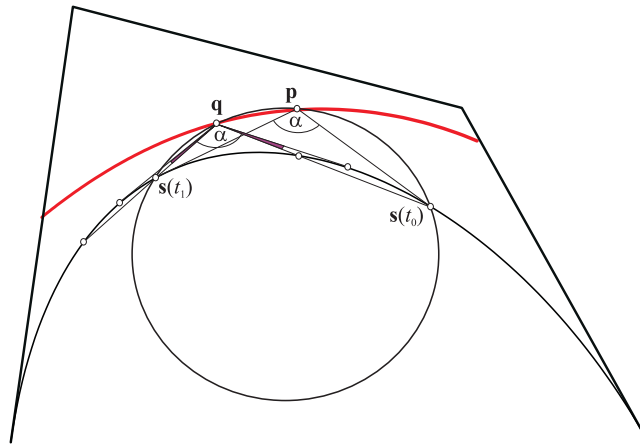
Ekkor $\angle(\mathbf{s}(t_0)\mathbf{ps}(t_1)) = \alpha$, viszont a $\overline{\mathbf{ps}(t_0)}$ és $\overline{\mathbf{ps}(t_1)}$ szakaszok egyenesei nem érintői a Bézier-görbének, metszik azt. A görbe komplex volta miatt a \mathbf{p} pontból a Bézier-görbéhez húzott érintőegyeneseiknek α -nál nagyobb szögben kell metszeniük egymást, ami ellentmond annak a ténynek, miszerint \mathbf{p} az α -hoz tartozó izooptikus görbe egy pontja. Emiatt az izooptikus görbének és a látókörvéknek nem lehet közös pontja ebben az esetben.

Most pedig tekintsük azt az esetet, amikor a $\overline{\mathbf{s}(t_0)\mathbf{s}(t_1)}$ húr olyan, hogy a végpontjaiban tekintett érintőegyeneseik α szögben metszik egymást. Ebben az esetben azonnal következik, hogy ezen érintőegyeneseik \mathbf{p} -vel jelölt metszéspontja a Bézier-görbe α -hoz tartozó izooptikus görbéjére is illeszkedik, illetve értelemszerűen az α -hoz tartozó látókörvéknek is pontja lesz.

Tegyük fel, hogy a látókörvék és az izooptikus görbének az előbb említett \mathbf{p} ponton kívül még egy közös pontja van, amit jelöljünk most \mathbf{q} -val. Mivel \mathbf{q} az α -hoz tartozó izooptikus görbére illeszkedik, az ebből a pontból a Bézier-görbéhez húzott érintőegyeneseik α szögben metszik egymást.

Továbbá \mathbf{q} illeszkedik az α -hoz tartozó, $\overline{\mathbf{s}(t_0)\mathbf{s}(t_1)}$ húr fölé írt látókörvére is, emiatt a $\overline{\mathbf{qs}(t_0)}$ és $\overline{\mathbf{qs}(t_1)}$ szakaszok egyeneseinek egymást α szögben kell metszeniük. Ezek az egyenesek nem érintőegyenesei a Bézier-görbének, hanem metszik azt, emiatt nem metszhetik egymást ugyanabban a szögben, mint az ugyanabból a \mathbf{q} pontból a Bézier-görbéhez húzott érintőegyeneseik. Tehát ellentmondásra jutottunk (lásd 35. ábra).

Tehát tévesnek bizonyult feltevésünkkel ellentétben az α -hoz tartozó látóörívnek és az ugyanehhez a szöghöz tartozó izooptikus görbének pontosan egy közös pontja van, és értelemszerűen (ez közvetlenül a kör tulajdonságaiból egyszerűen adódik) ebben a pontban ezen görbék érintőegyenese is közös.

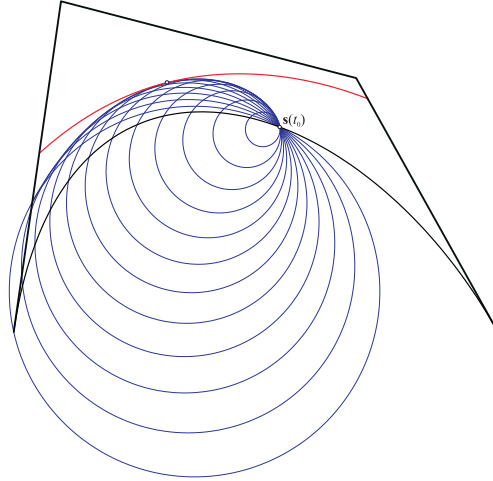


35. ábra. A látóörívnek nem lehet két közös pontja az izooptikus görbével. Ehhez a \mathbf{q} pontból húzott érintőegyeneseinek és a $\overline{\mathbf{q}\mathbf{s}(t_0)}$ és $\overline{\mathbf{q}\mathbf{s}(t_1)}$ szakaszok egyeneseseinek is egyaránt α szögben kellene metszeniük egymást.

A bizonyítás azt is magával vonja, hogy adott α szög esetén minden húrra vonatkozóan pontosan egy olyan, az adott szöghöz tartozó látóörív létezik, melynek egy közös pontja, illetve érintőegyenese van az adott szöghöz tartozó izooptikus görbével.

Ezen említett látóörívek egy egyparaméteres görbesereget alkotnak, melynek burkolójára kimondható a következő tétel.

4.2. Tétel. Az α szöghöz tartozó, a Bézier-görbe $\overline{\mathbf{s}(t_0)\mathbf{s}(t)}$ húrjai fölé írt látóörívek burkológörbéjének pontosan egy közös pontja van a Bézier-görbe α -hoz tartozó izooptikus görbéjével, mely pontban az érintőegyeneseik is megegyezik (lásd 36. ábra).



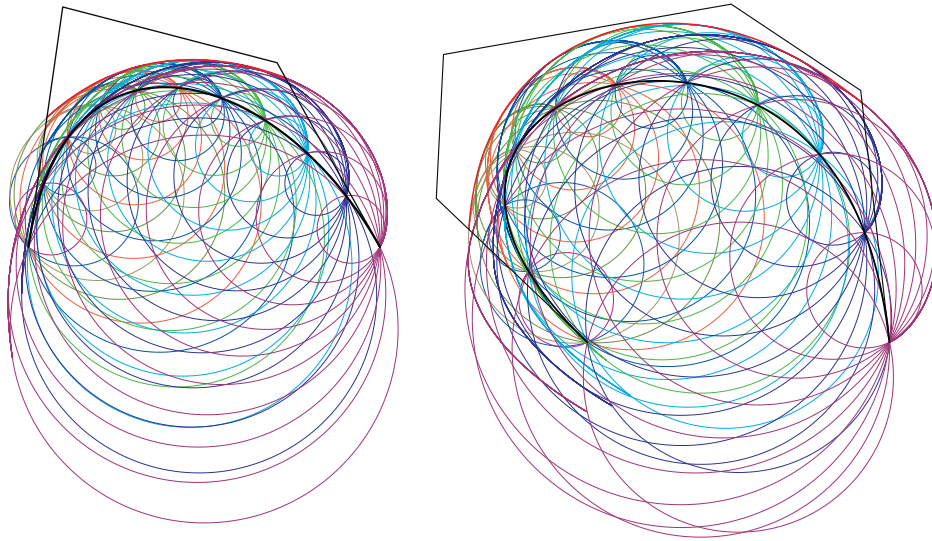
36. ábra. A 4.2-es tétel szemléltetése. Az izooptikust pirossal, a látó-körívcsereget és azok burkolóját kézzel jelöltük.

4.2. Bizonyítás. *Ahogy azt láttuk, az egyparaméteres görbesereget alkotó látókörivek közül pontosan egy körívnek van közös pontja és érintőegyenese az izooptikus görbével.*

A Bézier-görbénk konvex volta miatt a görbesereg minden ezen kívüli tagja szükségszerűen az izooptikus görbe egy oldalán helyezkedik el, ezért ezek a körívek nem metszhetik az izooptikus görbét. De ha a körívek az izooptikus görbe egyik oldalán vannak, a görbesereg burkolójának is ugyanezen az oldalon kell lennie, emiatt nem lehet az izooptikus görbével egynél több közös pontja. Mivel a burkoló mindig a látókörivek egyparaméteres görbeserege és a Bézier-görbe között kell, hogy elhelyezkedjen, az egyetlen, izooptikus görbét érintő látóköri érintési pontjában a látókörivekből alkotott görbesereg burkolója is érinteni fogja az izooptikus görbét.

A tételek kimondása után egy olyan következményt fogalmazhatunk meg, amely egy merőben új utat kínál az izooptikus görbe származtatására.

4.1. Következmény. Mivel a Bézier-görbe minden $\mathbf{s}(t_0)$ pontja alapján generálható egy látóörívekből álló egyparaméteres görbecsalád, illetve annak burkológörbéje, a Bézier-görbe izooptikus görbéje előállítható ezen említett burkológörbék burkolójaként is (lásd 37. ábra).



37. ábra. Az α szöghöz tartozó látóörívek alkotta egyparaméteres görbesereg burkolójának burkolójaként előálló izooptikus görbe (piros színnel). Balra egy kubikus esetet, míg jobbra egy ötödfokú esetet figyelhetünk meg.

4.5. A burkolók burkolójának kiszámítási módja

Görbesereg burkolójának meghatározása sokszor nem könnyű feladat. Kiszámítható komputeralgebrai módszereket felhasználva (pl. Gröbner-bázisok), de sokszor előfordul, hogy az egzakt számítások helyett különböző approximációs technikákat használnak a cél elérése érdekében [49].

Mi kutatásunk során először a 2.2.3. alfejezetben leírt technikát hívtuk segítségül a látóörívek alkotta görbeseregek burkolóinak meghatározására, hiszen mindenképp előtt ezek előállítására szükséges. A Bézier-görbe egy adott $\mathbf{s}(t_0)$ pontját tekintve a kérdéses hűrok fölé írt látóörívek körei megadhatók $\mathbf{c}(t)$ -vel jelölt középpontjukkal, illetve a továbbiakban $r(t)$ -vel jelölt sugarukkal. Az egy adott α szöghöz tartozó, adott szakasz köré írt látóörívek jól ismert szerkesztési módja alapján adódik, hogy az $\overline{\mathbf{s}(t_0)\mathbf{s}(t)}$ szakaszok köré írt látóörívek középpontjai előállíthatók az aktuálisan tekintett $\mathbf{s}(t)$ pontból két transzformáció, egy forgatás és egy középpontos hasonlóság egymás utáni végrehajtásával az alábbiak szerint.

Forgassuk el az $\mathbf{s}(t)$ pontot az $\mathbf{s}(t_0)$ pont körül $\gamma = \pi/2 - \alpha$ szöggel, ha $\alpha \leq \pi/2$ vagy $\gamma = \alpha - \pi/2$ szöggel, ha $\alpha > \pi/2$. Ezután alkalmazzunk az új pontra egy középpontos hasonlósági transzformációt $\mathbf{s}(t_0)$ középponttal, a hasonlóság arányául válasszuk a kör sugarából és az $\overline{\mathbf{s}(t_0)\mathbf{s}(t)}$ húr hosszából képzett hányadost, ami $\sin \gamma/2$.

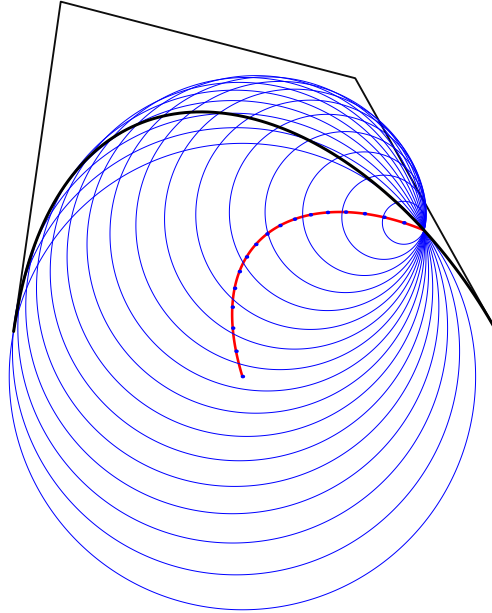
Ilyen módon előállíthatjuk tehát a látóörívek köreinek $\mathbf{c}(t)$ középpontjait. A Bézier-görbék affin invariáns tulajdonsága miatt a $\mathbf{c}(t)$ görbe, mely az eredeti Bézier-görbéből egy forgatás és egy középpontos hasonlósági transzformáció egymás után végrehajtásával állt elő, szintén Bézier-görbe (lásd 38. ábra). A t paramétertől függő sugarakat a $r(t) = \sqrt{(\mathbf{c}(t) - \mathbf{s}(t_0))^2}$ függvény segítségével állíthatjuk elő.

Egy-egy ilyen látóörívekből álló görbecsaládot megadhatunk annak implicit egyenletével a következőképpen:

$$f(x, y, t) = (x - \mathbf{s}_x(t))^2 + (y - \mathbf{s}_y(t))^2 - (\mathbf{c}_x(t) - \mathbf{s}_x(t_0))^2 - (\mathbf{c}_y(t) - \mathbf{s}_y(t_0))^2 = 0,$$

ahol x and y jelöli a kurrens vektor előállításáért felelős koordináta-függvényeket. Fontos megjegyezni, hogy ez egy polinomiális egyenlet.

Ahogy azt a 2.2.3. alfejezetben részleteiben is említettük, differenciálgeometriából jól ismert, hogy a burkoló implicit egyenletét könnyen



38. ábra. Az α szöghöz tartozó látókörivek középpontjainak mértani helye az eredeti görbéből egy forgatással és egy középpontos hasonlósági transzformációval előállítható.

megkaphatjuk, ha kiküszöböljük t -t az alábbi egyenletrendszerből.

$$\begin{aligned} f(x, y, t) &= 0 \\ \frac{\partial f(x, y, t)}{\partial t} &= 0 \end{aligned}$$

A pontos egyenlet megkapható olyan komputeralgebrai módszerek segítségével, mint például a Gröbner-bázisok használata [11, 9]. Egy másik lehetőségként viszont kiszámolhatjuk az egyes burkolókat a látókörivekből álló görbeseregek paraméteres egyenleteiből. Az α szöghöz tartozó, az $\mathbf{s}(t)(s_x(t), s_y(t))$ Bézier-görbe $\mathbf{s}(t_0)(s_x(t_0), s_y(t_0))$ pontján keresztül haladó látókörivekből álló

$$\mathbf{f}(u, t)(f_x(u, t), f_y(u, t))$$

görcbesereget leírhatjuk a következőképpen:

$$f_x(u, t) = \frac{1}{2}((s_y(t) - s_y(t_0)) \cot(\alpha) + s_x(t) + s_x(t_0)) + \frac{D \cos(u)}{2 \sin(\alpha)}$$

$$f_y(u, t) = \frac{1}{2}((s_x(t_0) - s_x(t)) \cot(\alpha) + s_y(t) + s_y(t_0)) + \frac{D \sin(u)}{2 \sin(\alpha)},$$

ahol t a seregparaméter ($t \in [0, 1]$), u az egyes körök paraméterezéséért felel ($u \in [0, 2\pi]$), továbbá

$$D \doteq \sqrt{(s_y(t_0) - s_y(t))^2 + (s_x(t_0) - s_x(t))^2}$$

$$H \doteq (s_y(t_0) - s_y(t))(-s'_y(t)) + (s_x(t_0) - s_x(t))(-s'_x(t)).$$

Az egyes parciális deriváltak az alábbi módon számíthatók.

$$\frac{\partial f_x(u, t)}{\partial u} = \frac{D(-\sin(u))}{2 \sin(\alpha)}$$

$$\frac{\partial f_y(u, t)}{\partial u} = \frac{D \cos(u)}{2 \sin(\alpha)}$$

$$\frac{\partial f_x(u, t)}{\partial t} = \frac{1}{2}(s'_y(t) \cot(\alpha) + s'_x(t)) + \frac{H \cos(u)}{D \cdot 2 \sin(\alpha)}$$

$$\frac{\partial f_y(u, t)}{\partial t} = \frac{1}{2}(-s'_x(t) \cot(\alpha) + s'_y(t)) + \frac{H \sin(u)}{D \cdot 2 \sin(\alpha)}$$

Ahhoz, hogy megkapjuk a burkolót, ki kell fejeznünk u -t az alábbi egyenletből

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f_x}{\partial u} & \frac{\partial f_x}{\partial t} \\ \frac{\partial f_y}{\partial u} & \frac{\partial f_y}{\partial t} \end{vmatrix} = 0.$$

A determináns a következőképpen fejezhető ki:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} \frac{\partial f_x}{\partial u} & \frac{\partial f_x}{\partial t} \\ \frac{\partial f_y}{\partial u} & \frac{\partial f_y}{\partial t} \end{vmatrix} &= -\frac{D \sin(u)}{4 \sin(\alpha)} (-s'_x(t) \cot(\alpha) + s'_y(t)) - \frac{H \sin^2(u)}{4 \sin^2(\alpha)} - \\ &\quad -\frac{D \cos(u)}{4 \sin(\alpha)} (s'_y(t) \cot(\alpha) + s'_x(t)) - \frac{H \cos^2(u)}{4 \sin^2(\alpha)} = \\ &= -\frac{D}{4 \sin(\alpha)} ((-s'_x(t) \cot(\alpha) + s'_y(t)) \sin(u) + \\ &\quad + (s'_y(t) \cot(\alpha) + s'_x(t)) \cos(u)) - \frac{H}{4 \sin^2(\alpha)} \end{aligned}$$

Az

$$\begin{aligned} A &\doteq -\frac{D}{4 \sin(\alpha)} (-s'_x(t) \cot(\alpha) + s'_y(t)) \\ B &\doteq -\frac{D}{4 \sin(\alpha)} (s'_y(t) \cot(\alpha) + s'_x(t)) \\ C &\doteq -\frac{H}{4 \sin^2(\alpha)} \end{aligned}$$

jelöléseket bevezetve az u paraméter az alábbiak szerint fejezhető ki.

Ha $A \geq 0$, akkor

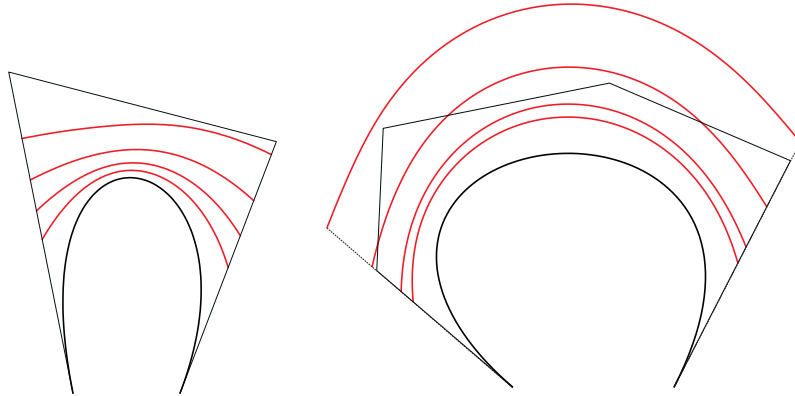
$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} \frac{\partial f_x}{\partial u} & \frac{\partial f_x}{\partial t} \\ \frac{\partial f_y}{\partial u} & \frac{\partial f_y}{\partial t} \end{vmatrix} &= 0 \\ A \sin(u) + B \cos(u) + C &= 0 \\ \sqrt{A^2 + B^2} \sin\left(u + \arcsin\left(\frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}}\right)\right) + C &= 0 \\ -\arcsin\left(\frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}}\right) - \arcsin\left(\frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2}}\right) &= u \end{aligned}$$

míg $A < 0$ esetén

$$\begin{aligned} \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial f_x}{\partial u} & \frac{\partial f_x}{\partial t} \\ \frac{\partial f_y}{\partial u} & \frac{\partial f_y}{\partial t} \end{array} \right| &= 0 \\ A \sin(u) + B \cos(u) + C &= 0 \\ \sqrt{A^2 + B^2} \sin \left(u + \pi - \arcsin \left(\frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right) \right) + C &= 0 \\ \arcsin \left(\frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right) - \arcsin \left(\frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right) - \pi &= u. \end{aligned}$$

adódik.

Behelyettesítve az így kapott u -t $f(u, t)$ -be megkaphatjuk az egyes látókörivékből álló görbeseregek burkolóinak egyenletét. Ezen számítások után ezen burkolók burkolójának kiszámítása teljesen analóg módon történhet a fentebb leírtakhoz, azonban a kapott görbék egyenleteinek komplexitása okából kifolyólag ez a végső burkoló általános esetben szintén csak közelítő módszert használva kapható meg. A számítások eredménye látható a 39. ábrán.



39. ábra. Kubikus és ötödfokú Bézier-görbe izooptikus görbéi megadott α szögre vonatkozóan. $\alpha = 60^\circ, 80^\circ, 100^\circ, 120^\circ$.

Sikerült tehát bebizonyítanunk néhány Bézier-görbék izooptikusaira vonatkozó összefüggést, melyek geometriai jelentőségükön túl ismeretük által hathatós segítséget jelenthetnek a későbbiekben tetszőleges szabadformájú görbe izooptikusainak analízisében is, hiszen a fenti, burkológörbékkel kapcsolatos eredmények nagyon könnyen általánosíthatók egyéb, a számítógépes geometriai modellezésben gyakran használt görbetípusok esetében is, ilyenek például a B-szplájn és a NURBS görbék.

5. Összefoglalás

A PhD disszertációban részletesen bemutatásra kerülnek azok a módszereink és eredményeink, amelyek néhány, a számítógéppel segített tervezésben aktuális problémára adott válaszként születtek meg.

Megfigyelhető, hogy egyre több olyan módszer és algoritmus jelenik meg a területen, amely lehetővé teszi a tervezők számára, hogy a standardnak számító interpolációs módszerek mellett (hagyományosan kontrollpont alapú technikák) akár bonyolultabb geometriai objektumok alapján legyenek képesek újakat származtatni, előállítani. Az angol terminológia által csak „*skinning*”-nek nevezett módszer során például megadott objektumokat beburkoló felületek előállítása a cél.

2010-ben publikált munkánkban [30] egy ilyen beburkolást, ún. *bőrözést* megvalósító algoritmust fejlesztettünk ki, először kör-, majd gömbsorozatokat alapul véve. Miután pontos definíciót adtunk arra nézve, hogy milyen sorozatokat fogadunk el bemenetként, illetve milyen objektumokat keresünk, sikerült megalkotnunk egy olyan módszert, amely az eddig ismert eredményeknél [40, 53, 54] több szempontból is jobb megoldást képes szolgáltatni, technikánk az eddig ismert módszerekkel ellentétben a bemeneti adatok megadásán túli felhasználói interakciót egyáltalán nem igényel, továbbá valós idejű tervezhetőséget biztosít. A módszer ígéretesnek mutatkozott arra, hogy az abban használt Hermite-íveket más típusú görbékre cseréljük, ezzel megteremtve az újabb előnyök biztosíthatóságát. 2011-ben az egymáshoz folytonosan kapcsolt körív párokkal, ún. *biarc* ívekkel való helyettesíthetőséget vizsgáltam meg [29]. A munka nyomán megszületett egy részletes feltételrendszer, mely jó alapul szolgálhat a további vizsgálatokhoz. Segítségével bizonyos esetekben megkonstruálható a használt Hermite-szplájnokhoz hasonló tulajdonságú *biarc* görbe, a vizsgálat a Meek és Walton által publikált részletes analízisre [34] támaszkodott.

A számítógépes geometriai tervezés egy másik fontos területén is értünk el eredményeket. Fontos kérdés, hogy a már ismert alap-

eszközökről minél szerteágazóbb ismeretekkel rendelkezünk, azok minél több geometriai tulajdonságával tisztában legyünk. Hiszen ezáltal specifikus problémákat lehetünk képesek megoldani, gondoljunk csak ismét egy egyszerű interpolációs feladatra, amikor egy adott ponton szeretnénk átvezetni egy görbét vagy egy felületet. Ilyen jellegű problémának tekinthető a szabadformájú görbék izooptikusainak a vizsgálata. Ezen görbék bázisfüggvényei hamar nagyon nehezen kezelhetővé válnak, ha a probléma definíció szerinti megközelítésével akarunk segítségükkel megoldást kapni, még komoly komputeralgebrai rendszerek sem képesek sok esetben megoldani ezt a problémát.

2013-ban publikált cikkünkben [31] egy új utat mutattunk a Bézier-görbék izooptikusainak származtatására, munkánkban több tételt is kimondtunk és bizonyítottunk, amik merőben új ismereteket jelentenek ezzel a görbetípussal kapcsolatban.

6 Summary

In this PhD dissertation we present our results, which can help to solve some actual problems of Computer Aided Geometric Design.

Interpolation of geometric data sets is of central importance in CAGD. If geometric data consists of points, then we have several, now standard methods to interpolate them [14, 42, 21]. If, however, the data set consists of other types of objects (e.g. circles), interpolation is transferred to skinning, that is construction of a curve or surface which touches each of the objects and somehow bounds the given data. Since this is a largely ill-posed problem, constraints have to be defined for the data set as well as for the desired solution.

At the beginning of the dissertation we address the problem of skinning of a sequence of circles or spheres, we present our results published in [30].

We describe formally what type of input is admissible for us and what type of output we are searching for, these definitions were not available in the literature at the beginning of our research.

Then we present a new way to construct skinning circles and surfaces. In our definition of skin, as a natural condition, the touching points/circles must be out of other circles/spheres. By this definition of skin our method works for a larger class of data sets than the method of Slabaugh [53, 54], and it is proved that for any admissible configuration the skin always exists, however it does not minimize energy function and has only G^1 continuity. Applying classical tools from constructive geometry, our method is robust and fast with real-time computing speed. Even if one may wish to numerically minimize energy functions such as in Slabaugh's work, the presented skin can be applied as initialization of the iterative process, avoiding trivial faults, local minima and consuming computation. Our technique provides a curve or surface which can be modified in real time, and the shape is sensitive for the change of radii and positions of the data set as well. Since the crucial point of the algorithm is to find suitable touching points or touching circles, and it is independent of the current

interpolation method, extension of the algorithm using other types of curves and surfaces can be a future direction of research.

Based on this idea in the next part of the dissertation we analyze the problem of using biarc curves for 2D skinning. With biarc curves we can describe shapes which can be processed by CNC machines. We give several conditions to avoid intersection by constructing a biarc from a special family [34] for two circles. These results [29] can be a powerful starting point for a more extensive analysis of the problem.

In CAGD it is also very important to know the geometric properties of the existing modeling tools as much as possible. The isoptic curve of a given curve has been studied for centuries, there are well-known results for classical curves, especially for conics. Our purpose was to describe the isoptics of those curves which are still frequently used in geometric modeling – the Bézier curves. For low degree Bézier curves the direct computation is possible, but already for degree 4 or 5 the formulas are getting too complicated even for computer algebra systems.

In the last part of the dissertation we provide a new way to solve the problem, proving some geometric relations of the curve and their isoptics, and computing the isoptics as the envelope of envelopes of families of isoptic circles over the chords of the curve. These results have also been published in 2013 [31].

Irodalomjegyzék

- [1] M. Avriel: *Nonlinear Programming: Analysis and Methods*. Dover Books on Computer Science sorozat. 2003, Dover Publications.
- [2] Bácsó Sándor – Papp Ildikó: Ciklográfia példatár. <http://googl/CSHsG1>, 2006. Elérés időpontja: 2014. szeptember 10.
- [3] Bácsó Sándor – Papp Ildikó – Szabó József: *Projektív geometria*. Debrecen, 2006, Kossuth Egyetemi Kiadó.
- [4] K.M. Bolton: Biarc curves. *Computer-Aided Design*, 7. évf. (1975) 2. sz., 89–92. p.
- [5] J.W. Bruce – P.J. Giblin: *Curves and Singularities: A Geometrical Introduction to Singularity Theory*. 1992, Cambridge University Press.
- [6] H.-L. Cheng – X. Shi: Quality mesh generation for molecular skin surfaces using restricted union of balls. *Computational Geometry*, 42. évf. (2009) 3. sz., 196–206. p.
- [7] W. Cieślak – A. Miernowski – M. Mozgawa: Isoptics of a closed strictly convex curve. In *Global Differential Geometry and Global Analysis*. Lecture Notes in Mathematics sorozat, 1481. köt. 1991, Springer, 28–35. p.
- [8] G.W. Coakley: Analytical solutions of the ten problems in the tangencies of circles and also of the fifteen problems in the tangencies of spheres. *The Mathematical Monthly*, 2. évf. (1860), 116–126. p.
- [9] D. Cox – J. Little – D. O’Shea: *Ideals, Varieties, and Algorithms: An Introduction to Computational Algebraic Geometry and Commutative Algebra*. 2. kiad. 2006, Springer.

- [10] G. Csima–J. Szirmai: Isoptic curves in the hyperbolic plane. *Studies of the University of Žilina Mathematical Series*, 24. évf. (2010), 15–22. p.
- [11] J.H. Davenport–Y. Siret–E. Tournier: *Computer Algebra: Systems and Algorithms for Algebraic Computation*. 1988, Academic Press.
- [12] H. Dörrie: *100 Great Problems of Elementary Mathematics*. 1965, Dover Publications.
- [13] H. Edelsbrunner: Deformable smooth surface design. *Discrete and Computational Geometry*, 21. évf. (1999) 1. sz., 87–115. p.
- [14] G. Farin: *Curves and Surfaces for CAGD*. 5. kiad. 2001, Morgan Kaufmann.
- [15] G. Farin–J. Hoschek–M.-S. Kim: *Handbook of Computer Aided Geometric Design*. 2002, North Holland.
- [16] D. Gisch–J.M. Ribando: Apollonius’ Problem: A Study of Solutions and Their Connections. *American Journal of Undergraduate Research*, 3. évf. (2004) 1. sz., 15–26. p.
- [17] G. Glaeser–H.-P. Schröcker: *Handbook of Geometric Programming Using Open Geometry GL*. 2002, Springer.
- [18] Andy Hammerlindl–John Bowman–Tom Prince: Asymptote: the Vector Graphics Language. <http://asymptote.sourceforge.net/>. Elérés időpontja: 2013. november 15.
- [19] M. Hoffmann–I. Juhász: On interpolation by spline curves with shape parameters. In *Advances in Geometric Modeling and Processing*. Lecture Notes in Computer Science sorozat, 4975. köt. 2008, Springer, 205–214. p.
- [20] J. Hoschek: *Zur Ermittlung von Hüllgebilden in der Kinematik*. PhD értekezés (Technische Hochschule Darmstadt). 1964.

- [21] J. Hoschek – D. Lasser: *Fundamentals of Computer Aided Geometric Design*. 1997, CRC Press.
- [22] Juhász Imre: *Görbék és felületek modellezése*. 2011, Kelet-Magyarországi Informatikai Tananyag Tárház.
- [23] D. Kalman: Families of curves and their envelopes. www.dankalman.net/ume/env/methods.pdf. Elérés időpontja: 2013. március 31.
- [24] D. Kalman: *Uncommon Mathematical Excursions: Polynomia and Related Realms*. 2008, The Mathematical Association of America.
- [25] J.L. Krames: *Die Zyklographie*. Vorlesungen über Darstellende Geometrie sorozat, 2. köt. 1929, Deuticke.
- [26] Stephen F Krar – Arthur Gill: *CNC: Technology and Programming*. 1990, Gregg Division, McGraw-Hill.
- [27] N. Kruithof – G. Vegter: Envelope surfaces. In *Proceedings of the Annual Symposium on Computational Geometry 2006* (konferenciaanyag). 2006, 411–420. p.
- [28] R. Kunkli: Localization of touching points for interpolation of discrete circles. *Annales Mathematicae et Informaticae*, 36. évf. (2009) 1. sz., 103–110. p.
- [29] R. Kunkli: Biarc analysis for skinning of circles. *Annales Mathematicae et Informaticae*, 38. évf. (2011) 1. sz., 87–93. p.
- [30] R. Kunkli – M. Hoffmann: Skinning of circles and spheres. *Computer Aided Geometric Design*, 27. évf. (2010) 8. sz., 611–621. p.
- [31] R. Kunkli – I. Papp – M. Hoffmann: Isoptics of Bézier curves. *Computer Aided Geometric Design*, 30. évf. (2013) 1. sz., 78–84. p.

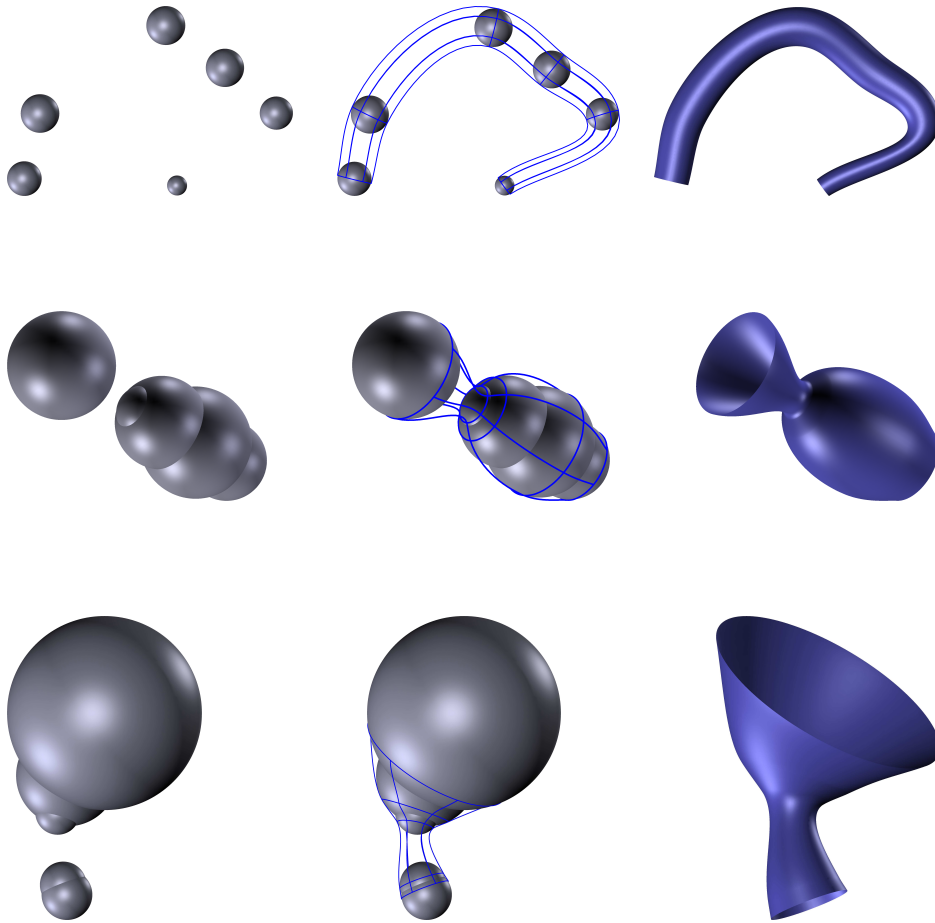
- [32] J.D. Lawrence: *A Catalog of Special Plane Curves*. 1972, Dover Publications.
- [33] G. Loria: *Spezielle algebraische und transzendente ebene Kurven: Theorie und Geschichte*. 2. köt. 1911, B. G. Teubner.
- [34] D.S. Meek–D.J. Walton: The family of biarcs that matches planar, two-point G^1 Hermite data. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 212. évf. (2008) 1. sz., 31–45. p.
- [35] A. Miernowski–W. Mozgawa: Isoptics of pairs of nested closed strictly convex curves and Crofton-type formulas. *Beitrage zur Algebra und Geometrie*, 42. évf. (2001) 1. sz., 281–288. p.
- [36] G. Monge: *Application de l'analyse à la Géométrie*. 1850, Bachelier.
- [37] R.F. Muirhead: On the number and of the solutions of the Apollonius contact problem. In *Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society* (konferenciaanyag), 14. köt. 1895, Edinburgh Mathematical Society, 135–147. p.
- [38] B. Odehnal: Equioptic curves of conic sections. *Journal for Geometry and Graphics*, 14. évf. (2010) 1. sz., 29–43. p.
- [39] Y.-J. Pan–G.-J. Wang: Convexity-preserving interpolation of trigonometric polynomial curves with a shape parameter. *Journal of Zhejiang University SCIENCE A*, 8. évf. (2007) 8. sz., 1199–1209. p.
- [40] M. Peternell–B. Odehnal–M.L. Sampoli: On quadratic two-parameter families of spheres and their envelopes. *Computer Aided Geometric Design*, 25. évf. (2008) 4-5. sz., 342–355. p.
- [41] M. Peternell–H. Pottmann: A Laguerre geometric approach to rational offsets. *Computer Aided Geometric Design*, 15. évf. (1998) 3. sz., 223–249. p.

- [42] L. Piegl–W. Tiller: *The NURBS Book*. Monographs in Visual Communication sorozat. 2. kiad. 1996, Springer.
- [43] L.A. Piegl–W. Tiller: Biarc approximation of NURBS curves. *Computer-Aided Design*, 34. évf. (2001) 11. sz., 807–814. p.
- [44] M.J. Pratt: Cyclides in computer aided geometric design. *Computer Aided Geometric Design*, 7. évf. (1990) 1-4. sz., 221–242. p.
- [45] M.J. Pratt: Cyclides in computer aided geometric design II. *Computer Aided Geometric Design*, 12. évf. (1995) 2. sz., 131–152. p.
- [46] H. Prautzsch–W. Boehm–M. Paluszny: *Bézier and B-Spline Techniques*. 2002, Springer.
- [47] B. Rossignac, J. Whited–G. Slabaugh–T. Fang–G. Unal: Pearling: 3d interactive extraction of tubular structures from volumetric images. In *MICCAI Workshop: Interaction in Medical Image Analysis and Visualization* (konferenciaanyag). 2007.
- [48] G. Sandel: Zur Geometrie der Korbboegen. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, 17. évf. (1937) 5. sz., 301–302. p.
- [49] T. Schulz–B. Jüttler: Envelope computation in the plane by approximate implicitization. *Applicable Algebra in Engineering, Communications and Computing*, 22. évf. (2011) 4. sz., 265–288. p.
- [50] D. Shreiner–G. Sellers–J.M. Kessenich–B.M. Licea-Kane: *OpenGL Programming Guide: The Official Guide to Learning OpenGL, Version 4.3 (8th Edition)*. 2013, Addison-Wesley Professional.
- [51] K. Singh–E. Kokkevis: Skinning characters using surface oriented free-form deformations. *Graphics Interface*, 2000., 35–42. p.

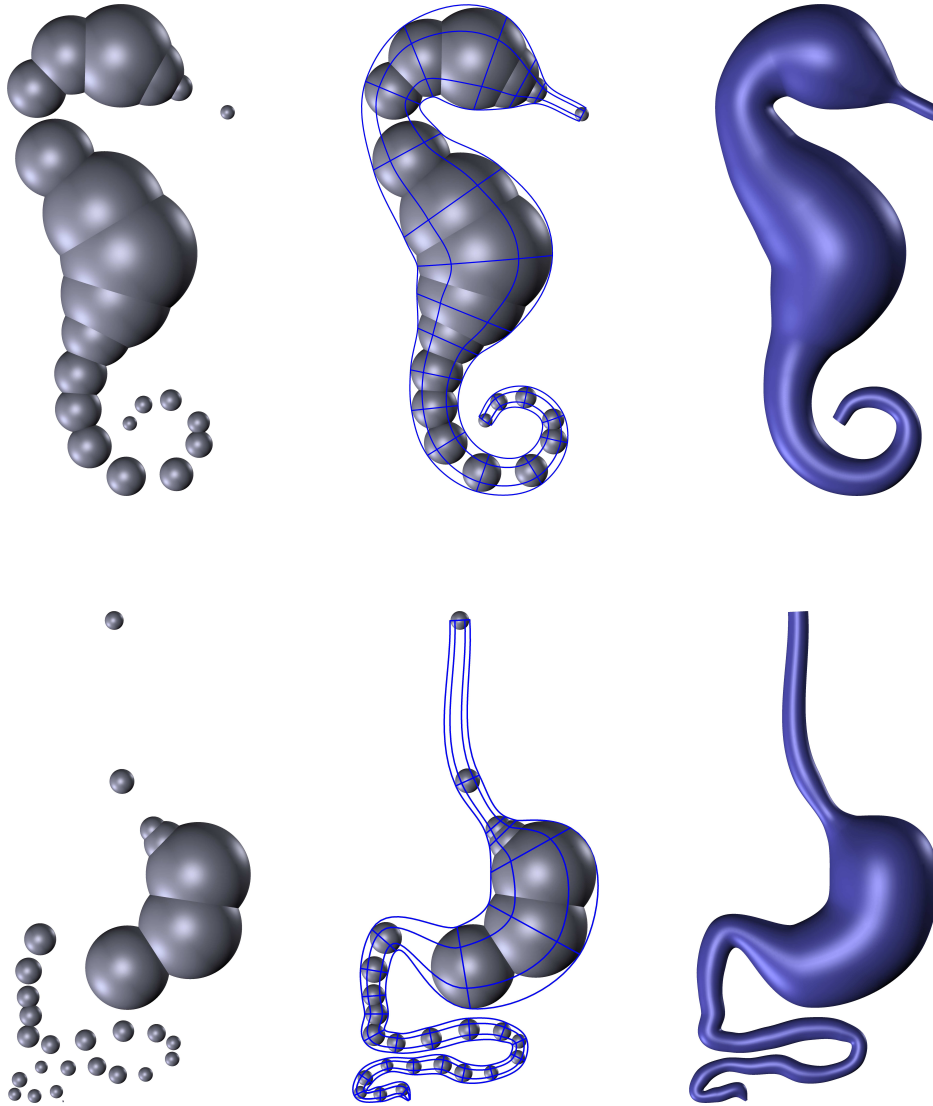
- [52] Z. Šír – R. Feichtinger – B. Jüttler: Approximating Curves and their Offsets using Biarcs and Pythagorean Hodograph Quintics. *Computer Aided Design*, 36. évf. (2006), 608–618. p.
- [53] G. Slabaugh – G. Unal – T. Fang – J. Rossignac – B. Whited: Variational skinning of an ordered set of discrete 2D balls. In *Advances in Geometric Modeling and Processing*. Lecture Notes in Computer Science sorozat, 4975. köt. 2008, Springer, 450–461. p.
- [54] G. Slabaugh – B. Whited – J. Rossignac – T. Fang – G. Unal: 3D ball skinning using PDEs for generation of smooth tubular surfaces. *Computer-Aided Design*, 42. évf. (2010) 1. sz., 18–26. p.
- [55] Strommer Gyula: *Geometria*. 1988, Nemzeti Tankönyvkiadó.
- [56] D. Szałkowski: Isoptics of open rosettes. *Annales Universitatis Mariae Curie-Skłodowska*, A59. évf. (2005), 119–128. p.
- [57] C.-L. Tai – B.A. Barsky – K.-F. Loe: An interpolation method with weight and relaxation parameters. *Curve and Surface Fitting: Saint-Malo*, 1999. évf. (2000), 393–402. p.
- [58] C.-L. Tai – G.-J. Wang: Interpolation with slackness and continuity control and convexity-preservation using singular blending. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 172. évf. (2004) 2. sz., 337–361. p.
- [59] C. Taylor: Note on a theory of orthoptic and isoptic loci. In *Proceedings of the Royal Society of London* (konferenciaanyag), 37. köt. 1884, Royal Society of London, 138–141. p.
- [60] R. Tornai: Measurement of visual smoothness of blending curves. *Annales Mathematicae et Informaticae*, 40. évf. (2012), 155–160. p.

- [61] T. Várady – P. Salvi – A. Rockwood: Transfinite surface interpolation with interior control. *Graphical Models*, 74. évf. (2012), 311–320. p.
- [62] B. Whited – J. Rossignac – G. Slabaugh – T. Fang – G. Unal: Pearling: 3D interactive extraction of tubular structures from volumetric images. *Interaction in Medical Image Analysis and Visualization*, 2007.
- [63] R.C. Yates: *Curves and Their Properties*. 1974, National Council of Teachers of Mathematics.

A. A saját *skin* előállító algoritmus térbeli kimenetei



40. ábra. A saját fejlesztésű, gömbök burkolását megvalósító módszerünk néhány kimenete. A második és harmadik esetben érdemes megfigyelni, milyen alakváltozásokat valósíthatunk meg kis sugarú gömbök közbeékelésével.



41. ábra. A saját fejlesztésű, gömbök burkolását megvalósító módszerünk további kimenetei. A módszer animációs karakterek is előállíthatók, illetve orvosi felhasználhatóságára látunk példát az alsó ábrákon.

B. Publikációs jegyzék

Referált folyóiratcikkek

- [F1] R. Kunkli: Localization of touching points for interpolation of discrete circles. *Annales Mathematicae et Informaticae*, 36. évf. (2009) 1. sz., 103–110. p.
- [F2] R. Kunkli–M. Hoffmann: Skinning of circles and spheres. *Computer Aided Geometric Design*, 27. évf. (2010) 8. sz., 611–621. p.
- [F3] R. Kunkli: Biarc analysis for skinning of circles. *Annales Mathematicae et Informaticae*, 38. évf. (2011) 1. sz., 87–93. p.
- [F4] R. Kunkli–I. Papp–M. Hoffmann: Isoptics of Bézier curves. *Computer Aided Geometric Design*, 30. évf. (2013) 1. sz., 78–84. p.
- [F5] J. Szabó–R. Kunkli: The Generalization of Szabó’s Theorem for Rectangular Cuboids and an Application. *Journal for Geometry and Graphics*, 17. évf. (2013) 2. sz., 213–222. p.
- [F6] F. Nagy–R. Kunkli: Method for computing angle constrained isoptic curves for surfaces. *Annales Mathematicae et Informaticae*, 42. évf. (2013), 65–70. p.
- [F7] K. Bana–K. Kruppa–R. Kunkli–M. Hoffmann: Kspheres - an efficient algorithm for joining skinning surfaces. *Computer Aided Geometric Design*, 2014. DOI: 10.1016/j.cagd.2014.08.003.

Konferenciakötetben megjelent cikkek

- [K1] R. Kunkli – M. Hoffmann: Kör- és gömbsorozatok interpolációja. In L. Szirmay-Kalos – G. Renner (szerk.): *VI. Magyar Számítógépes Grafika és Geometria Konferencia, Budapest, 2014. február 21–22.* (konferenciaanyag). 2012, Neumann János Számítógéptudományi Társaság, 145–149. p.
- [K2] K. Kruppa – K. Bana – R. Kunkli – M. Hoffmann: Creating connection between skinning surfaces. In L. Szirmay-Kalos – G. Renner (szerk.): *VII. Magyar Számítógépes Grafika és Geometria Konferencia, Budapest, 2014. február 19–20.* (konferenciaanyag). 2014, Neumann János Számítógéptudományi Társaság, 46–51. p.

További konferencia-előadások

- [E1] R. Kunkli – M. Hoffmann: Skinning of circles using biarcs. 8th International Conference on Applied Informatics (ICAI 2010), Eger, Magyarország, 2010. január.
- [E2] R. Kunkli: Skinning of circles using biarcs. The 7th Conference of PhD Students in Computer Science (CSCS 2010), Szeged, Magyarország, 2010. június.
- [E3] R. Kunkli – M. Hoffmann: Skinning of spheres. 2nd Croatian Conference on Geometry and Graphics (CCGG 2010), Šibenik, Horvátország, 2010. szeptember.
- [E4] R. Kunkli – M. Hoffmann: Skinning of circles by biarcs. Conference on Geometry – Theory and Applications (CGTA 2011), Vorau, Ausztria, 2011. június.
- [E5] R. Kunkli – I. Papp – M. Hoffmann: Iso-optics of Bézier curves. 1st International Conference on Applied Geometry and Graphics (GeoGra 2012), Budapest, Magyarország, 2012. január.

- [E6] R. Kunkli–I. Papp–M. Hoffmann: Isoptics of free-form curves. 16th Scientific-Professional Colloquium on Geometry and Graphics, Baška, Horvátország, 2012. szeptember.
- [E7] R. Kunkli: Skinning of Spheres using Biarcs. Conference on Geometry – Theory and Applications (CGTA 2013), Ljubljana, Szlovénia, 2013. június.
- [E8] J. Szabó–R. Kunkli: The generalization of Szabó’s Theorem for rectangular cuboids with an example application. 17th Scientific-Professional Colloquium on Geometry and Graphics, Rastoke, Horvátország, 2013. szeptember.