

1. Bevezetés, témaválasztás indoklása

1.1. A témaválasztás indoklása

A dolgozat a kisiskolások hosszúság és kerület fogalmának alakulásáról, alakításáról szól. Kisiskolás korban fontos matematikai, ezen belül geometriai fogalmakat készítünk elő, alapozunk meg. A hosszúság- és kerületfogalom a mindennapi életben és más tudományterületeken való alkalmazása nagy fontossággal bír. Ezeknek a fogalmaknak a tanulásához biztos mennyiségfogalomra van szükség, hogy eligazodjanak a különbözőfajta mértékegységek és váltószámaik között.

A biztos hosszúságfogalom, a becslési készség jó szintje egyik fontos eleme a térszemlélet fejlesztésének is.

A témakör épülése szempontjából nem tekinthetünk el a nyelvi kommunikációs vonatkozások vizsgálatától sem. A témához kapcsolódó fogalmak épülésének vizsgálata mellett a tanításának, taníthatóságának módszereivel is foglalkoztunk.

1.2. Geometriatanításunk problémái

A geometria tanítás egyes esetekben még mindig a görög geometria felépítési módját követi, amely a mennyiség tanításától jut el az alakzatok geometriájáig.

Véleményünk szerint a méretes geometria tanításánál kettős úton kellene haladni. Egyrészt a méréseknek egyfajta történeti bevezetését kellene követni, másrészt ezzel párhuzamosan is, de ezt megelőzően is többet kellene foglalkozni az alakzatokkal. Ez a két vonal például a síkidomok kerületének, területének mérésénél találkozna.

2. A kutatás

A kutatásunk műfaja úgynevezett természetes kísérlet, mivel természetes élethelyzetekben, illetve a gyermek természetes tevékenységének folyamatában (játék, tanulás, munka) végeztük azt. A célszerűen kiválasztott természetes szituációban, gondosan kontrollált feltételek mellett olyan pedagógiai helyzetet teremtettünk, olyan oktatási módszert alkalmaztunk, amellyel a kísérletben részt vevő tanulók tantárgyi tudásszintjét egy meghatározott színvonalra kívántuk fejleszteni, és folyamatosan nyomon követtük ezeknek a teljesítményre kifejtett hatását.

2.1. A kutatás témája

A kutatás azt vizsgálta, hogy az alkalmazott módszerek milyen minőségben segítik elő a hosszúság és a kerület fogalmának előkészítését és kialakítását.

A vizsgálódást az alábbi problémakörökben végeztük:

- régi magyar hosszúságegységek és szabványegységek megismerése, ezekkel becslések, mérések végzése;
- a térbeliséget kifejező szavak értelmezése, alkalmazása;
- háromszögek, téglalapok és négyzetek alkotása, fogalmának alakítása;
- a kerületfogalom megalapozása.

2.2. A kutatás célja

A hosszúság és kerület fogalmának kialakítása során előforduló problémák, hiányosságok feltárása, és ezek korrigálására egy módszer kidolgozása.

2.3. A kutatás hipotézisei

Feltételezésünk szerint a hosszúság fogalmának kialakulását, a mérésfogalom értését, a mértékegység és mérőszám közötti kapcsolat elsajátítását, valamint a hosszúságmérés más tudományokban és a mindennapi életben való alkalmazását elősegítik:

- a tanulók szűkebb és tágabb környezetében történő becslések, mérések végzése összeméréssel, különféle természetes és szabványmértékegységekkel, változatos munkaformában;
- a hosszúsággal kapcsolatos nyelvi ismeretek fejlesztése, tudatosítása.

A kerület fogalmának kialakulását elősegítik:

- nyitott és zárt törött és görbe vonalak hosszának meghatározásai;
- háromszögek, téglalapok, négyzetek alkotása konkrét tevékenységekkel;
- a sokszögek oldalai hosszának és azok összegének meghatározása, amellyel azt hangsúlyozzuk, hogy a kerület hosszúságjellegű mennyiség;
- valamint a kerület kiszámításának többféle módon való lejegyzése.

2.4. Kutatási kérdés

A környezetünkben való becslésekkel, mérésekkel, nyitott és zárt töröttvonalak rajzolásával és hosszuk meghatározásával, sikerül-e a gyerekeket kellőképpen motiválni a témakör tanulására, valamint kellő tevékenységgel támogatva a kerületfogalmat meg tudjuk-e alapozni megfelelően?

3. A kutatás témájának történeti áttekintése

3.1. A hosszúságmérés történeti áttekintése

A mérés gondolata maga valószínűleg egyidős az emberiséggel. Kezdetben ezek eszközei a környezetben található tárgyakhoz (kövek, magvak, levelek), az ember testrészeihez (láb, könyök, tenyér stb.), a test teljesítőképességéhez (az 1 nap alatt megtehető út, majd az egy nap alatt megművelhető földterület) kötődtek. Legkorábbi a hosszúságmérés lehetett.

A mérések az élet számos területén, a különböző tudományágakban, így a matematikában is megjelennek. Az egyes mennyiségek méréséhez kapcsolódó egységek, a szabványmértékegységek kialakulása hosszú folyamat eredménye.

A méter ma érvényben levő definícióját Bay Zoltán a következőképpen adta meg: 1 méter az a távolság, amelyet a fény vákuumban $1/299\,792\,458$ s alatt tesz meg.

3.2. A fejlesztőkísérlet tartalmához szükséges történelmi áttekintés

- A méterrendszer bevezetését megelőző korabeli tankönyvek, elméleti és gyakorlati útmutatásainak áttekintése – a teljesség igénye nélkül. Ezek esetleges alkalmazása a kísérleti tanításnál.
- Régi magyar hosszúság-mértékegységek és térbeliséget kifejező szavak alkalmazásának gyakorisága a magyar népmesékben. Ezek alkalmazása a fogalomalkotás folyamatában.

4. A kutatás témájának matematikai vonatkozásai

4.1. A hosszúságmérés metrikus megközelítése

A Hilbert-féle téren értelmeztük a távolságfogalmat, megadtuk ezek axiómáit, melyekhez hozzákapsoltuk a vonalzó axiómát. Ennek

segítségével definiáltuk a „között van” relációt, s adtuk meg annak tulajdonságait.

4.2. Töröttvonalak hosszúsága

4.3. Görbe vonalak hosszúsága

A törött- és görbe vonalak hosszúságának meghatározása fontos eleme a dolgozatnak.

4.4. Sokszögek, síkidomok kerülete

A síkidom, a sokszög, a háromszög, téglalap és négyzet definícióját adtuk meg, továbbá olyan definíciókat és tételeket, melyek a dolgozat témájának matematikai megalapozása szempontjából fontos.

4.5. Izometriák

A sík és a tér leképezései során vizsgálhatjuk a hosszúságállandóságot.

4.6. Hosszúságokon értelmezett műveletek

Freudenthal a „Mi a hosszúság” kérdést nyitott mondatá alakította, azaz „... az ... hosszúsága” mondatot használja. Ezzel ezt az egyszerű kérdést függvényszimbólumokká alakította, s a mennyiségekkel végzett műveleteket is a függvények körében végzett műveletekkel definiálja.

5. A kutatáshoz kapcsolódó didaktikai háttérismeretek, pedagógiai és pszichológiai elméletek

Ez a fejezet a nemzetközi és hazai tanítás, matematikatanítás megújítására törekvő pedagógusok elméletének értékelésével foglalkozik. Az elméleteikből ismertettek részek szorosan kapcsolódnak a kutatás témájához.

5.1. Nemzetközi törekvések

Ebben a fejezetben elsősorban a realiztikus matematikatanítás és konstruktivista pedagógia legfontosabb jegyeit emeltük ki.

5.2. Magyar reformerek a matematika megújításáért

Ebben a részben Apáczai Csere János, Maróthi György, Bolyai Farkas, Gallai Tibor, Péter Rózsa, Dienes Zoltán és Varga Tamás munkásságára történt utalás.

5.3. A magyar matematikatanítás fejlődésének néhány fontos állomása

Ebben elsősorban az oktatási rendszerek, a tantervek változásait és a változtatás okait vizsgáltuk.

- Ratio Educationis;
- Trefort-féle tanterv;
- Wlassics-féle tanterv;
- Komplex matematikatanítási kísérlet;
- NAT.

5.4. A dolgozat témájához kapcsolódó pszichológiai elméletek

Piaget több művében foglalkozott a gyermeki gondolkodás tanulmányozásával, a gondolkodás szintjeinek elemzésével. Vizsgálatai kimutatták, hogy az értelmi fejlődés szakaszos jellegű. Munkánkhoz nagy segítséget nyújtott az észlelési konstanciákra és műveleti megőrzésekre vonatkozó megállapításai.

A Bruner-féle reprezentáció elmélet szerint elsősorban olyan alapelvekre kell koncentrálni, amelyek feltárják a valóság és a matematika belső világának kapcsolatát, és lehetővé teszik azok magyarázatát.

A fogalomalkotás folyamatának algoritmusát többek között Skemp elméletére támaszkodva terveztük.

A geometriai gondolkodás fejlődésének szintjeit Van Hiele dolgozta ki, ez az öt fokozatú elméleti modell, segít megérteni a geometriai fogalomalkotás sajátos folyamatát.

5.5. Nyelvi problémák a matematika, a hosszúságmérés tanításánál

A hosszúságmérés tanításánál nehézséget jelent az is, hogy iskolába lépéskor óriási különbségek lehetnek az egyes gyerekeknél a nyelvhasználat szintjében. Nagy előnnyel kezdik azok tanulók a „tudományos” munkát, akik nyelvileg fejlettebb környezetből indulnak az iskolába, ők szavakkal is ki tudják fejezni magukat. Fontos részét képezi a dolgozatnak a hosszúsághoz kapcsolódó térbeli kifejezések használatához, a becslések végzéséhez és a megoldások indoklásához szükséges nyelvi szint vizsgálata, s az ehhez szükséges elméleti vonatkozások áttekintése.

6. A kísérlet tantervi, tantárgyi háttere

A kísérleti munkánk tervezésénél figyelembe vettük a NAT által kiemelt fejlesztési feladatokat. Vizsgáltuk a NAT fejlesztési területeinek

kapcsolódását a hosszúság és kerület fogalmának kialakításához, a tanításánál alkalmazott tevékenységek végzéséhez.

6.1. A NAT matematika műveltségterület követelményeinek érvényesülése a fejlesztésben

A tanulóknak jól kell tájékozódniuk a térben és a *világ mennyiségi viszonyaiban*.

Fontos a *tapasztalatszerzés*.

A tanulók *emlékezetére* támaszkodva felidéztek a foglalkozások történéseit, az ott tapasztaltak alapján következtetéseket fogalmaztak meg, melynek során saját *gondolkodásukat* is felülvizsgálták.

Az ismereteik rendezésére, a mérésekhez célszerű táblázatokat használni.

Nagy hangsúlyt kapott az *ismeretek alkalmazása*, amihez ötleteikkel a tanulók is hozzájárultak.

A becslült és a mért adatok *összevetésével*, a gyerekek végiggondolhatták tévedéseik okait, s közösen keresték a *probléma megoldását*.

Az alkotó képességük és kreativitásuk érvényesült a szívószalakból való háromszögek és négyszögek készítésénél.

A köznapi nyelv és a szaknyelv kapcsolatának folyamatos alakítása, a térbeliséget kifejező szavak jelentésének vizsgálatával jól kivitelezhető.

A hosszúságmérések végzése során fontos az *együttműködés*.

A hosszúság és kerületmérés mindennapi alkalmazásáról való beszélgetések újabb és újabb problémák keresésére, megvitatására *motiválták* a gyerekeket.

6.2. A kerettantervek irányelvei a hosszúságmérésnél és a kerületfogalom alakításánál

A vizsgált kerettantervek egységesnek bizonyultak a célok, feladatok megjelölésében.

Mindhárom kerettanterv kicsit másképpen kívánja megvalósítani a NAT által megfogalmazott célokat, fejlesztési feladatokat.

Az OM elég nagyvonalúan fogalmazza meg a tananyagot, több szabadságot adva ezzel a helyi tanterveknek és tanmeneteknek.

A Mozaik kerettanterve a síkidomok vizsgálatát, azok kerületének meghatározását szinte csak a téglalapra és a négyzetre szűkíti le.

Az Országos Közoktatási Intézet tanterve nagyon részletesen megadja a tevékenységi és munkaformákat. Sokkal lassúbb tempót ír elő az első két osztályban, a harmadik és negyedik osztályban viszont több összefüggésre

és kapcsolatra világít rá, mint az előző kettő. Hangsúlyozza a hosszúságjellegű szavak ismeretének fontosságát a hosszúságmérésnél.

6.3. A téma cross-culliculáris kapcsolatainak lehetőségei

Fontosnak tartottuk a téma cross-culliculáris aspektusainak bemutatását is. Áttekintettük, hogy a hosszúság- és kerületfogalom milyen szinten és milyen mélységben kapcsolódik más műveltségterületek NAT által megfogalmazott fejlesztési feladataihoz.

7. A kutatás hátterének bemutatása

A kísérleti oktatásban részt vett osztály és iskola bemutatása.

8. A kutatás tartalma

A kutatási folyamatát három főreszből állt: a kutatás tervezése előtti mérés; maga a kutatási terv; a kísérleti tanítás

8.1. A kutatás előzményei

A kutatás előtti mérőlap a régi magyar mértékegységek, a szabványmértékegységek és azok közötti összefüggéseket vizsgálta. A mérőlapot két iskola egy-egy negyedik osztálya töltötte ki. Ezeknek a mérőlapoknak az eredményessége befolyásolta, az iskolaválasztást és a kísérleti tanítás tervezését.

8.2. A kísérleti munka tervezése

A kísérleti tanítást hat ciklusra terveztük, az első ciklus, - első osztály második félévében – foglalkozásai a tanítási órák terhére történtek, de második osztálytól kezdve a délutáni napköziben tartottuk azokat.

A hat ciklusban való tanítást ugyanabban az osztályban végeztük, első osztálytól negyedik osztályig követtük nyomon a gyerekeknél a hosszúság- és kerületfogalom, a mérési, becslési készség szintjének és a térbeliséget kifejező szavak használatának alakulását.

8.3. A kísérlet első ciklusa

A ciklusban az alábbi tevékenységeket végeztük el:

- régi magyar hosszúság-mértékegységek megismerése mese-olvasással: a rőf, az öl és az arasz;
- a hosszúság szabványmértékegységeinek bevezetése: méter, deciméter, centiméter;

- o becslések, mérési gyakorlatok végzése alkalmi és szabványegységekkel.

A ciklus végén egy mérőlap segítségével ellenőriztük az elsajátított ismeretek szintjét, értékeltük a munkánk eredményességét.

8.4. A kísérlet második ciklusa

A ciklus foglalkozásainak megkezdése előtt egy tesztet töltöttek ki a gyerekek, melynek értékelés alapján az alábbi tevékenységeket terveztük, végeztük el:

- o új mértékegységként a hüvelyket, és a képzelet fejlettebb szintjét igénylő mérföldet vezettük be;
- o becsléseket, méréseket végeztünk a gyerekek tágabb környezetében;
- o töröttvonalak rajzolása, hosszuk meghatározása;
- o görbe vonalak hosszának meghatározása cérnával, madzaggal, vonalzóval;
- o téglalapok, négyzetek alkotása kötelekből a tanteremben és az iskolaudvaron, a kerületfogalom előkészítése;
- o a téglalap ismertető jegyeinek felfedeztetése beszélgetések során.

A második ciklusban tartott foglalkozások eredményességét egy tesztlap kitöltésével vizsgáltuk.

8.5. A kísérlet harmadik ciklusa

Az áprilisban kitöltött tesztlap értékelése alapján az alábbi tevékenységeket terveztük és végeztük el:

- o csoportos és páros interjúk keretében a diagnosztizáló tesztlap kitöltésénél elkövetett hibák megbeszélése, a hiányosságok pótlása;
- o becslések, mérések végzése a tanulók szűkebb és tágabb környezetében;
- o töröttvonalak rajzolása szóbeli és írásbeli utasítások alapján, hosszuk meghatározása;
- o háromszögek, négyzetek és téglalapok alkotása szívószálakból;
- o sokszögek oldali hosszának és azok összegének meghatározása.

Ebben a ciklusban a gyerekek párokban vagy csoportokban dolgoztak a mérések végzésénél és az alkotásoknál is.

8.6. A kísérlet negyedik ciklusa

A 2005. november 11-én kitöltött tesztlap ellenőrzése után, annak értékelését megbeszéltük a gyerekekkel.

Ezek alapján az alábbi tevékenységeket terveztük és végeztük el:

- becslések, mérések végzésére továbbiakban is nagy hangsúlyt fektettünk, mivel a tesztlap kitöltésénél ezekben a kérdésekben hibáztak legtöbbször a gyerekek;
- töröttvonalak rajzolása írásbeli utasítások alapján;
- téglalapok területének meghatározása többféle módon;
- téglalapok alkotása különböző sokszögek átdarabolásával;
- a hosszúság kifejezéséhez kapcsolódó térbeliséget kifejező szavak értelmezése.

A ciklusban elsajátított ismeretek szintjét feladatlapok kitöltésével ellenőriztük, ezek kitöltésénél tapasztaltakat frontális keretben megvitattuk.

8.7. A kísérlet ötödik ciklusa

Ezt a ciklust is egy teszt kitöltésével kezdtük, kíváncsiak voltunk, hogy tudnak-e a gyerekek mondatokhoz hosszúságjellegű szavakat találni. Ennek eredményeként ebben a ciklusban az alábbiakra helyeztük a hangsúlyt:

- térbeliséget kifejező szavak, kifejezések alkalmazása szűkebb és tágabb környezetünkben;
- a négyzet és téglalap területének többféle meghatározása, annak szimbólumokkal történő lejegyzése;
- nagyobb, magasabb objektumok becslése.

A ciklus eredményességét több feladatlappal is ellenőriztük, hogy egyszerre ne terheljük túl a gyerekeket.

8.8. A kísérlet hatodik ciklusa

A 2006. őszi foglalkozásokon már csak egy-két hiányosságot pótolunk, elsősorban a tanult fogalmak alkalmazására helyeztük a hangsúlyt:

- a különböző térbeliséget kifejező szavak és a hosszúság-mértékegységek alkalmazása más tudományterületeken;
- távolságok, magasságok, hosszúságok stb. becslése, mérése a valóságban, térképen és kép alapján;
- a téglalap és a négyzet területének meghatározása képlettel.

A ciklusok eredményességét két mérőlap kitöltésének értékelése alapján vizsgáltuk.

9. A fejlesztő kísérlet eredményességének elemzése, hipotézisvizsgálat

Megállapítottuk, hogy

- a csoportos és páros méréseknek hatására a tanulók becslési készsége sokat fejlődött a négy év során;
- a sok mérés és becslés, a mérés eredményeinek közös megvitatása, elemzése ellenére sem alakult ki a tanulók nagy részénél a hosszabb és a magasabb tárgyak reális becslése;
- a gyerekek ismerete a hosszúság-mértékegységek körében jó szintűnek mondható, melyet a feladatlapok értékelései is alátámasztanak;
- a tárgyak térbeliségét kifejező szavak matematikai és kifejezések matematikai és hétköznapi értelmezésénél, azoknak a becsléseknél való használatában is fejlődés tapasztalható;
- a töröttvonalak rajzolásánál a harmadik ciklus végére szinte alig akadt olyan tanuló, akinek gondja volt az irányokkal;
- a töröttvonalak hosszának meghatározásánál egyre többen használták a vonalzót még akkor is, ha négyzethálón adtuk meg az alakzatokat;
- a vonalzó, mint mérőeszköz használata sokat javult a páros foglalkozások során, csupán egy-két gyerek felejtette el, hogy a mérésnél nem a vonalzó szélétől vagy az egységétől kell a kezdeni a mérést;
- a szívószálakból való alkotásoknál a négyzet és téglalap és a háromszög több tulajdonságát felfedezték a gyerekek;
- a sokszögek kerületének meghatározását a tesztlapok kitöltésének értékelése alapján jó szintűnek tekinthetjük, amelyre a továbbiakban is lehet építeni.

A fentiek alapján úgy véljük, hogy a hipotézisünk reális volt, s a kutatási kérdésre is pozitív választ adhatunk. A válasz tükröződik az elért eredményekben.

10. Konklúzió

A kísérleti tanításnál tapasztaltak alapján néhány fontos megállapítást tettünk:

- A tanulóknak már iskolába lépés előtt jelentős mennyiségű ismereteik vannak az anyagi tárgyak nagyságáról, ezek közötti kapcsolatokról, amelyeket eredményesen be lehet kapcsolni az oktatásba.
- A rádióban, tévében, otthon, az utcán, az iskolában, a mesékben számos olyan kifejezéssel találkozhatnak a tanulók, amelyek a tárgyak

alakjára, helyzetére, tulajdonságaira, egymáshoz való viszonyaikra vonatkoznak. Ezzel sok geometriai szakkifejezést sajátíthatnak el, bár sokszor nem egészen értik ezek jelentését, vagy pedig hamis fogalmuk alakul ki róluk. Az iskolában a tanár dolga, hogy a gyerekek már meglévő geometriai fogalmait helyes tartalommal töltsse meg.

- A tanulók mérési készségének fejlesztésére irányuló tananyag tervezése során gondoskodni kell arról, hogy kialakítsuk a geometriai mennyiség fogalmát, s ezt az ismeretet használjuk fel a szám fogalmának, a számokkal való műveletek tulajdonságainak tanulása során. Mindezeket szorosan hozzá kell kapcsolni az alakzatok tanításához.
- Fontos, hogy a tanulók különböző mérőeszközökkel ismerkedjenek meg, és jártasságot szerezzenek azok használatában.
- A méréshez kapcsolódó ismeretek tanítása során törekedni kell arra, hogy az itt szerzett tudás alkalmazható legyen az oktatás más területein.
- A gyerekek becslési készségének fejlesztése folyamatos feladat, különösen nagy jelentősége van a mindennapi életben és a térszemlélet fejlesztésében.
- A tanulók nagy része még második osztályban is elég nehezen tud egyszerű mértékváltásokat végezni. Pl. minden gyerek tudta, hogy $1 \text{ m} = 10 \text{ dm}$, de amikor 5 métert kellett kifejezni deciméterekben, elég sok gyereknek volt gondja. Csak azokat az átváltásokat végzik könnyen, amelyeket korábbi tevékenységeik során megtapasztaltak. Első osztályban átváltások végzésére még nagyon kevés gyerek érett, de még a másodikosoknak is nehézséget okoz a mértékegység és a mérőszám fordított arányú változásának megértése.
- Több szóbeli indoklásra, beszélgetésre van szükség a tanítás folyamán, hogy az esetleges hibák, fogalmi pontatlanságok időben kiderüljenek.

1. Introduction, reasons for the choice of subject

1.1. Reasons for the choice of subject

In the thesis the development and the establishment of the concept of length and perimeter are put forward.

For young learners essential mathematical concepts including geometrical concepts are introduced and their basis is laid down. The use of the concept of length and perimeter both in everyday life and in various fields of science is of great importance. In order to acquire these concepts definite concepts of quantities are needed so that learners could sort out the various units of measurements and their transformation into other units. When establishing the concept of length we also relied on the children's knowledge gained earlier and their level of knowledge has been continually tested. Prior to the introduction of concepts the level of constancy of quantity was examined.

The reliable concept of length and the proper skill of estimation are integral part of the development of space perception.

In terms of the subject matter, the linguistic and the communication aspects should also be taken into consideration.

As well as examining the establishment of concepts related to the subject matter, the methods of teaching were also dealt with.

1.2. Problems in teaching geometry

Teaching geometry in a way is still patterned after Greek geometry, starting with quantities and finally getting to the geometry of shapes.

In my opinion two approaches should be adopted in teaching geometry where sizes are relevant. A kind of historical introduction to measurements could be combined with teaching of shapes. These two approaches could meet when measuring the perimeter and the surface of plane figures.

2. Research

Our research can be called a natural experiment, since it was carried out in natural situations and in the everyday activities of children such as games, learning and working. In natural situations selected appropriately under carefully controlled conditions we created the pedagogical situation and applied the method of teaching which enhanced the level of knowledge of the learners in the experiment to a defined degree, and there was a continuous follow-up of the effect on the learners' achievement

2.1. Research topic

In our research it was investigated in what ways the methods applied contributed to the preparation and formation of the concept of length and perimeter in the following topics:

- old Hungarian units of measurement of length and standards, and estimations and measurements with them;
- interpretation and use of words relating to spatiality;
- creating triangles, rectangles and squares and the formation of their concepts;
- laying the ground of the concept of perimeter.

2.2. The objective of research

The objective was to reveal problems and deficiencies in the process of the formation of the concept of length and perimeter and to elaborate methods to correct them.

2.3 Hypotheses

We assume that the formation of the concept of length, understanding the concept of measurement, the relationship between units of measurement and index number as well as the application of measuring length in other fields of science and everyday life can be assisted by:

- estimation in learners immediate and wider surrounding, measurements by comparison, by means of natural and standard units, and in various activities;
- developing learners' linguistic awareness in terms of length.

The formation of the concept of perimeter can be assisted by:

- determining the length of open and closed broken and curved lines;
- producing triangles, rectangles and squares through concrete activities;
- determining the length of the sides of polygons and their sums, focusing on the fact that the perimeter is an amount of length;
- taking notes of counting the perimeter in various ways.

2.4 Research question

Can we properly motivate children to study the subject matter through estimations and measurements, drawing open and closed broken lines and

determining their length, and can we properly form the basis of the concept perimeter through a required amount of activities?

3. An overview of the historical background of the research topic

3.1. Historical background of measuring length

The idea of measuring probably dates back to the ancient history of mankind. At the very beginning objects from the immediate environment such as stones, seeds and leaves, parts of the human body like foot, elbow and palm etc. or the human ability (distance covered in one day, land cultivated in one day) were used as the means of measurement. Measuring length seems to be the most ancient.

Measurements have emerged in all walks of life, in various fields of science, including mathematics. The formation of units for measurement of various quantities and standard units is a result of a rather long process.

The current definition of metre was provided by Zoltán Bay as follows: one metre is the distance covered by light in vacuum during $1/299\,792\,458$ s.

3.2. Historical background required for the content of the developmental experiment

- An overview of the theoretical and practical guidelines of course books prior to the introduction of the metric system and their possible use in the experimental teaching.
- The frequency of old Hungarian units of measurements of length and spatiality in Hungarian folk tales and their use in the formation of concepts.

4. The mathematical implications of the research topic

4.1 The metric approach of measuring length

The concept of distance was interpreted on Hilbert's space and the axioms were given to which the ruler postulate was connected. By its means the relation „between” was defined and its characteristics were provided.

4.2. The length of broken lines

4.3. The length of curved lines

Determining the length of broken and curved lines is an essential part of the dissertation.

4.4. Perimeter of polygons and plane figures

The definition of plane figures, polygons, triangles, rectangles and squares was provided, moreover such definitions and theorems were given which are relevant for the mathematical basis of the dissertation.

4.5. Isometrics

The constancy of length was examined during the mapping of plane and space.

4.6. Operations with lengths.

Freudenthal made the question „What is length?” into an open sentence such as „the length of...is”. In this way this simple question was turned into symbols of functions and the operations with quantities were defined in terms of operations with functions.

5. Didactical, pedagogical and psychological theories relevant for the research

In this chapter the theories of educators aiming at renewing mathematics teaching both in Hungary and abroad are evaluated. The relevant parts of these theories presented in the chapter are closely related to the research topic.

5.1 Trends abroad

In this chapter primarily the outstanding features of realistic mathematics teaching and constructivist pedagogy are highlighted.

5.2. Achievement of Hungarian educators in reforming mathematics

In this chapter the achievements of János Apáczai Csere, György Maróthi, Farkas Bolyai, Tibor Gallai, Rózsa Péter, Zoltán Dienes and Tamás Varga are shown.

5.3. Milestones in the development of mathematics teaching in Hungary

Here we mainly focus on the changes and alterations in the education systems, curricula and the causes of the changes.

- Ratio Educationis;
- curriculum by Trefort;
- curriculum by Wlassics;
- complex mathematical teaching experiment;
- National Core Curriculum.

5.4. Psychological theories relevant for the subject matter

Piaget dealt with children's cognition and analysed the levels of thinking. According to his studies intellectual development takes place in stages. His findings on perception constancies and retaining operations are highly relevant for our subject matter.

According to Bruner's representation theory we should focus on principles which reveal the intrinsic connection between mathematics and the world and also give an account for it.

The algorithm of the formation of concepts was primarily based on Skemp's theory.

5.5. Linguistic problems in mathematics especially in measuring length

When teaching the measurement of length difficulties may arise from the fact that at school entry there can be huge differences in children's language use. Children who come from families which language-wise are more competent are in a favourable position when they start „science”. Thus, the study of the linguistic level required for the terms of space related to length, estimations, and giving reasons for their solutions and the relevant theoretical background are integral part of the thesis.

6. The background of the experiment in terms of the curriculum and subject

When designing experiment the requirements of the National Core Curriculum were also taken into consideration. It was also examined in what ways the developmental areas of the National Core Curriculum are linked with the formation of length and perimeter and the activities carried out in teaching.

6.1. The requirements of the field of education of mathematics of the National Core Curriculum and developmental teaching

Learners should be able to find their way in space and the relations of quantities in the world.

Gaining experience is also essential.

Relying on learners' memories we recalled the sessions, and on the basis of the experience they drew conclusions and they were also able to revise their thinking.

It is practical to use table for the arrangement of their knowledge and measurements.

Great emphasis was laid on the use of knowledge and children's own ideas also contributed to this process.

By means of comparing the estimated and measured data children were able to find out why they made mistakes and wanted to find the solution together.

Their creativity was outstanding when they made triangles and squares from straw.

The continuous monitoring of everyday language and technical terms can be properly carried out by means of checking the meaning of words expressing spatiality.

Co-operation was also considered important in measuring length.

Conversations about the everyday use of measuring length and perimeter were highly motivating for children to seek and discuss new problems.

6.2. The guidelines of the frame curricula on the formation of the concept of length and perimeter

The frame curricula seem to be standardised in setting up the objectives and requirements.

However all the frame curricula differ in the implementation of the objectives and developmental requirements?

The curriculum formulated by the Ministry of Education is rather large-scale providing more freedom for the local curricula and syllabi.

In the frame curriculum of the Mozaik Publisher the study of plane figures and the determination of their perimeter is restricted only for the rectangles and squares.

In the curriculum of the National Institute of Public Education the various types of activities are described in detail. The pace set for class one and two

is much slower, but a lot more interdependences and relationships are highlighted in class three and four than the other two curricula mentioned above. The awareness of words related to length is also emphasized in measuring length.

6.3. The cross-curricular aspects of the topic

The cross-curricular aspects of the topic are also presented and it was also shown at what level and to what extent the concept of length and perimeter is linked with other fields of education in the National Core Curriculum.

7. The background of the research

The educational environment, the school itself is briefly introduced and a short description of the learners participating in the experiment is provided.

8. The content of the research

The research consists of three main parts: measurement before planning the research, the research plan and the experimental teaching.

8.1. Antecedents of the research

The evaluation of the test papers prior to the research, which focused on the old Hungarian measurement units and the standard units and the relationship between them. The test papers were filled in by the learners of class 4 in two schools, whom their teachers considered to be pupils of average ability. The selection of school and the planning of the experimental teaching were based on the results of the test papers.

8.2. Planning of the experiment

The experimental teaching was divided into six stages and in the first stage the experimental teaching happened during the classes, but from class 2 they were held during the afternoon sessions.

Teaching in the course of six stages took place in the same class from class 1 to class 4 where the formation of the concept of length and perimeter, estimation skills and the use of terms expressing space were followed up.

8.3. Stage 1

- introduction to old Hungarian units of length based on Hungarian folk tales (fathom, arm, span, foot);
- standard units (meter, decimeter, centimeter);

- measurements, estimations.

8.4. Stage 2

- the introduction of inch and mile, which perhaps requires a higher level of imagination;
- estimations, measurements in the wider environment of children;
- determining the length of curved lines;
- making rectangles and squares from strings in the class and in the schoolyard.

8.5. Stage 3

- estimations and measurements;
- drawing broken lines according to verbal instructions and determining their length;
- creating triangles and squares and rectangles from straws;
- determining the length of the sides of polygons and also their sum.

8.6. Stage 4

- estimations and measurements;
- drawing broken lines according to verbal instructions;
- determining the perimeter of rectangles in various ways;
- creating rectangles by cutting various polygons;
- interpretation of words describing space, which can be used to express length.

8.7. Stage 5

- the use of words and terms describing space in our immediate and wider environment;
- determining the perimeter of squares and rectangles in various ways and taking notes of them by means of symbols;
- estimation of larger and taller objects.

8.8. Stage 6

- the use of words expressing spatiality and the units of measurement of length in other fields of science;
- estimation and measurement of distance, height and length in real life, maps and pictures;
- determining the perimeter of rectangle and square by formula;

- making learners aware of the connection between the units of measurement.

At the end of each stage learners' level of knowledge was evaluated by means of testing and interviews or group discussions.

9. The outcomes and the hypothesis of the developmental experiment were evaluated and the research question was answered

Finally we came to the conclusion that after the measurements

- in groups and pairs the learners' estimation skills have greatly improved during the four years of the teaching experiment;
- despite the large amount of measurement and estimation, the discussion and the analysis of the results of the measurements the majority of learners still were not able to estimate realistically long and high objects;
- children's awareness of units of length seemed to be good, which was also shown by the evaluations of the test papers;
- development can be observed in the use of words expressing spatiality both in mathematics and everyday life and also in their use of estimations;
- by the end of stage 3 hardly any learners had problems with directions when they were drawing broken lines;
- when determining the length of broken lines more and more learners used ruler even if the shapes were given on grid;
- the use of ruler as a means measurement has improved a lot in pair work, only one or two children forgot that measuring should start not from the edge of the ruler but from the unit of measurement;
- when creating polygons from straws children were able to discover several characteristics of squares, rectangles and triangles;
- according to the results of test papers the level of determining the perimeter of polygons was quite good and this is a sound basis to build on.

According to the above we believe that our hypothesis was realistic and a definite answer can be given to the research question, as the answer can be found in the outcomes.

10. Conclusions

The following conclusions of the experimental teaching can be formulated:

- Learners have a large amount of knowledge on the size of objects and the relationship between them even before admission to school, and this knowledge can be efficiently used in education.
- On the radio, in television, at home, in the streets, at school, in various tales children can come across several words which are related to the shape, position, characteristics and the interdependence of objects. In this way they can acquire several geometrical technical terms, even if sometimes they are not really aware of their meaning or can have misconceptions about them. At school it is up to the teacher to provide the proper content of the existing geometrical concepts.
- When designing course material for the development of learners' measurement skills we have to focus on the formation of the concept of geometric quantity and this knowledge can be used when children learn the concept of number and the operations with numbers. And all these should be closely related with the teaching of shapes.
- Children should use various means of measurement and acquire skills in their use.
- When teaching measurement efforts should be made to apply this knowledge in other fields of education.
- Developing the estimation skills of children should be a continuous task, which is of great importance in everyday life and in improving space perception.
- The majority of children even in class 2 have difficulties with transformations into various measurements. E.g. children know that $1\text{m} = 10\text{dm}$, however some of them had serious problems when they had to transform five metres into decimetres. They were able to carry out transformations in which they had gained experience earlier. In class 1 only few children are able to transform, and even in class 2 children can have difficulties in understanding the inverse proportion of the unit of measurement and the index number.
- Probably more verbal explanation and discussions are needed in the course of teaching so that the inadvertent mistakes and inaccuracies could be revealed in time.

PUBLIKÁCIÓK PUBLICATIONS

Referált folyóiratban, konferencia kiadványban megjelent idegen nyelvű publikációk:

- *Introduction of the concept of Length and Perimeter in Primary School.* Proceedings of the 57th Conference of the International Commission for the Study and Improvement of Mathematics Education, Università Degli Studi di Palermo, 2005, (math.unipa.it/~grim/cieaem/cieaem_proceedings.htm)
- *Once upon a Time ... The role of old Hungarian measurements in the teaching of mathematics in lower primary classes* Proceedings of 3rd Conference on the History of Mathematics & Teaching of Mathematics, Special issue of OCTOGON Mathematical Magazine, 2005 (p. 137 - 141)
- *High or Low, Deep or Shallow, Wide or Narrow? Estimation by Young Learners.* Proceedings of the 58th Conference of the International Commission for the Study and Improvement of Mathematics Education, University of West Bohemia, Plzen, 2006, (p. 88-93)
- *How Deep is Children's Knowledge?* Proceedings of the 59th Conference of the International Commission for the Study and Improvement of Mathematics Education, Varga Tamás Foundation, Budapest, 2007, (p. 102-107)
- *Learning and Knowledge: The results, lessons and consequences of a development experiment on establishing the concept of length and perimeter.* Teaching Mathematics and Computer Science, 5/1 (2007), (p.119-145)

Nem referált folyóiratban, konferencia kiadványban megjelent publikációk:

- *A mérés fogalmának alakulása 7-11 éves korban.* Apáczai Csere János Tanítóképző Főiskola Évkönyve, Győr 2002. (p. 302-310.)
- *Mathematics through Children's Literature.* Children's Literature in Language Teaching, Trezor Kiadó, Budapest, 2004. (p.227-234.)
- *A mérések tanításának gyakorlati vonatkozásai, kapcsolata a mindennapi élettel.* Gyermekközpontú pedagógiák tanulmánykötet, KFRTKF Debrecen, 2007. (p. 75-85.)

Előadások nemzetközi konferencián:

- *The establishment and development of mathematical concepts at the ages of 6-10.* YERME Summer School, Klagenfurt, 2002.
- *A mérés fogalmának alakulása* First Central-European PhD Conference on Mathematics didactics. Komarno, Slovak Republic, 24-25 January 2003.
- *The connection between knowledge in real life and knowledge gained at school, through the teaching of measurement* Varga Tamás Módszertani Napok, Budapest, 2003.
- *Once upon a Time ... The Role of Old Hungarian Measurements in the Teaching of Mathematics in Lower Primary Classes.* History of Mathematics and Teaching of Mathematics harmadik nemzetközi matematikatörténeti konferencia 2004.
- *A terület fogalmának előkészítése az általános iskola második osztályában.* A II. Felvidéki Matematikai Szakmódszertani Doktorandusz Konferencia, Rév-Komárom, Szlovákia, 2004.
- *Introduction of the concept of Length and Perimeter in Primary School.* CIEAEM 57 2005. Piazza Armerina, Italy
- *Tanulás és tudás: Egy fejlesztő kísérlet eredményei, tanulságai és következményei a hosszúság és területfogalom kialakításában.* III. Közép-Európai Matematika Szakmódszertani Doktorandusz Konferencia, Rév-Komárom, Szlovákia 2005.
- *High or Low, Deep or Shallow, Wide or Narrow? Estimation by Young Learners* CIEAEM 58. 2006. Srní, Csehország.
- *How Deep is Children's Knowledge? CIEAEM 59 Congress Changes in Society.* Dobogókő, 2007.

Előadások hazai konferenciákon

- *A mérés fogalmának alakulása 7-11 éves korban.* Apáczai Napok Nemzetközi Tudományos Konferencia. Győr 2002 ..
- *A terület fogalmának előkészítése.* Tudományos Felolvasóülés, Debrecen, KFRTKF, 2003.
- *Régi magyar hosszúság-mértékegységek a mesében és szerepiük a matematika tanításában.* Tudományos Felolvasóülés Debrecen, KFRTKF, 2004.
- *Math through Children's Literature.* „**Children Literature in Language Teaching**” konferencia, Budapest, ELTE TÓFK, 2004.

- *A mesék szerepe a matematika tanításában.* „**Az Európai Unió és a modern társadalom**” Győr, Apáczai Napok 2004.
- *Hány öl hosszú az iskola kerítése?* Tudomány Napja alkalmából rendezett Tudományos Felolvasóülés, Debrecen, KFRTKF, 2005
- *Se vége, se hossza ...* VI. Országos Neveléstudományi Konferencia, Budapest 2006.
- *A hosszúság-mértékegységek alakulása Magyarországon, a méter bevezetése. A reformkorban használt mértékegységeink.* „170 éves a Parainézis” Tudományos Konferencia KFRTKF Debrecen, 2007. *A tevékenység szerepe a kerületfogalom előkészítésénél és kialakításánál.* VII. Országos Neveléstudományi Konferencia, Budapest, 2007.