

**1949**

# **MATEMATIKAI KOMPETENCIÁK FEJLESZTÉSE IKT ESZKÖZÖKKEL**

Egyetemi doktori (PhD) értekezés

*Szerző:* Jakab Enikő

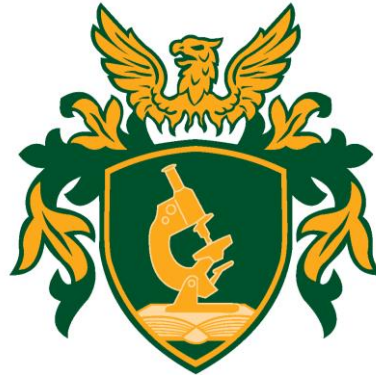
*Témavezető:* Dr. Vásárhelyi Éva

Debreceni Egyetem

Természettudományi és Informatikai Doktori Tanács

Matematika- és Számítástudományok Doktori Iskola

Debrecen, 2022



1949

# MATEMATIKAI KOMPETENCIÁK FEJLESZTÉSE IKT ESZKÖZÖKKEL

Egyetemi doktori (PhD) értekezés

*Szerző:* Jakab Enikő

*Témavezető:* Dr. Vásárhelyi Éva

Debreceni Egyetem

Természettudományi és Informatikai Doktori Tanács

Matematika- és Számítástudományok Doktori Iskola

Debrecen, 2022

*Ezen értekezést a Debreceni Egyetem Természettudományi Doktori Tanács Matematika- és Számítástudományok Doktori Iskola Matematika-didaktika programja keretében készítettem a Debreceni Egyetem természettudományi doktori (PhD) fokozatának elnyerése céljából.*

*Nyilatkozom arról, hogy a tézisekben leírt eredmények nem képezik más PhD disszertáció részét.*

*Debrecen, 2022. ....*

.....  
*Jakab Enikő  
jelölt*

*Tanúsítom, hogy Jakab Enikő doktorjelölt 2016 – 2022 között a fent megnevezett Doktori Iskola Matematika-didaktika programjának keretében irányításommal végezte munkáját. Az értekezésben foglalt eredményekhez a jelölt önálló alkotó tevékenységével meghatározóan hozzájárult. Nyilatkozom továbbá arról, hogy a tézisekben leírt eredmények nem képezik más PhD disszertáció részét.*

*Az értekezés elfogadását javasolom.*

*Debrecen, 2022. ....*

.....  
*Dr. Vásárhelyi Éva  
témavezető*

# MATEMATIKAI KOMPETENCIÁK FEJLESZTÉSE IKT ESZKÖZÖKKEL

Értekezés a doktori (PhD) fokozat megszerzése érdekében  
a matematika és számítástudományok tudományágban

Írta: Jakab Enikő okleveles matematika és informatika szakos tanár

Készült a Debreceni Egyetem Matematika- és Számítástudományok  
Doktori Iskolája (Matematika-didaktika programja) keretében

Témavezető: Dr. Vásárhelyi Éva

Az értekezés bírálói:

Dr. ....

Dr. ....

Dr. ....

A bírálóbizottság:

elnök: Dr. ....

tagok: Dr. ....

Dr. ....

Dr. ....

Dr. ....

Az értekezés védésének időpontja: 2022. ....

# Tartalomjegyzék

1. Bevezetés.....	9
1.1. A témaválasztás indoklása .....	10
1.2. Kutatási kérdések és a kutatás hipotézisei .....	13
2. A kutatás elméleti háttere .....	16
2.1. Informatikai eszközök a tanárok, illetve a diákok kezében .....	16
2.2. GeoGebra munkalapok elemzésének és értékelésének matematikai és didaktikai szempontjai.....	19
2.3. Az előhívásos tanulási módszer .....	22
2.4. A feladatlapok szerepe a matematikatanulásban .....	25
2.5. Az európai kulcskompetenciák és a matematikatanulás kapcsolata .....	29
2.5.1. Európai Unió kulcskompetenciák .....	30
2.5.2. Kompetenciamotiváció .....	33
2.5.3. Matematikai kompetenciarendszerek .....	40
3. Az empirikus kutatás előkészítése.....	43
3.1. Útkeresés: A tanulói teljesítmény értékelésének módjai .....	44
3.2. Útkeresés: Térélmény GeoGebra animációkkal .....	45
3.3. Útkeresés: Interaktivitás a feladatmegoldásban GeoGebra munkalappal 3D-s nézetben.....	47
3.4. Útkeresés: Lineáris építkezés Csúszkarendszerrel.....	49
3.5. Útkeresés: Problémamegoldás GeoGebra 3D támogatással és azonnali visszajelzéssel.....	56
4. Az empirikus kutatás .....	62
4.1. A kísérletek körülményei, „független változói” .....	64
4.2. A kísérletek bemutatása .....	73
4.2.1. Előhívásos vs. hagyományos tanulási módszer a matematika órán, egy tanítási kísérlet .....	74

4.2.1.1. Az előhívásos vs. hagyományos tanítási kísérletben felhasznált eszközök és módszerek bemutatása.....	75
4.2.1.2. Az előhívásos vs. hagyományos tanítási kísérlet eredményei .....	79
4.2.2. Az előhívásos és az IKT támogatású tanulási módszer a matematika órán.....	87
4.2.2.1. Az előhívásos és az IKT-s tanítási kísérletben felhasznált eszközök és módszerek bemutatása.....	89
4.2.2.2. Az előhívásos és az IKT-s osztályok eredményei .....	96
4.2.3. IKT eszközökkel támogatott vs. hagyományos tanítási módszer.....	111
4.2.3.1. Az IKT vs. hagyományos tanítási kísérletben felhasznált eszközök és módszerek bemutatása.....	113
4.2.3.2. Az IKT vs. hagyományos tanítási kísérlet eredményei ..	118
4.2.3.3. Az IKT-s osztály eszközhasználati szokásai (kérdőív és válaszok)	128
4.3. Az IKT támogatás és az előhívásos tanulási módszer összeegyeztethetősége .....	134
5. A hipotézisek és a kutatás eredményei.....	141
6. Kitekintés, diszkusszió .....	143
6.1. A kényszerű átállás digitalizált oktatásra.....	143
6.2. Az előhívásos módszer beillesztése a tanulási folyamatba.....	144
6.3. IKT eszközök a jelenléti oktatásban .....	145
7. Összefoglalás.....	148
8. Summary .....	153
9. Irodalomjegyzék.....	159
Felhasznált irodalom .....	159
Internetes források.....	167
Tankönyvek, feladatgyűjtemény.....	168

Jogszabályok .....	168
Ábrajegyzék .....	169
Függelék .....	172
1. A tanítási kísérletek ismeretanyagának alapja a kárpátaljai (ukrajnai) tanterv és tankönyvek vonatkozásában.....	172
2. Feladatlap: Műveletek racionális számokkal .....	175
3. Az előhívásos vs. hagyományos tanítási kísérlet tesztjeinek eredményei.....	176
4. Diákmunka-1.....	178
5. Diákmunka-2.....	179
6. Feladatlap: Merőleges és párhuzamos egyenesek, a koordinátasík.....	180
7. Az IKT-s vs. előhívásos tanítási kísérlet tesztjeinek eredményei .	182
8. Diákmunka-3.....	185
9. Diákmunka-4.....	187
10. Órai feladatlap: Téglatest, Kocka. Párhuzamos és merőleges síkok .....	189
11. Feladatlap: Elemi geometriai alakzatok és tulajdonságaik .....	191
12. Feladatlap: Egyenesek kölcsönös helyzete a síkon.....	193
13. Az IKT-s vs. hagyományos tanítási kísérlet tesztjeinek eredményei .....	195
14. Diákmunka-6.....	197
15. Diákmunka-7.....	198
16. Az IKT-s osztály eszközhasználati szokásait vizsgáló kérdőív ..	200

## Köszönetnyilvánítás

Köszönöm témavezetőmnek, Dr. Vásárhelyi Éva tanárnőnek, hogy doktoranduszi éveimet végig támogatta, kitartó türelmével, szeretetével és bizalmával mindig segített az előrehaladásban, valamint értékes tanácsaival és javaslataival hozzájárult munkám elkészítéséhez.

Köszönettel tartozom a Debreceni Egyetemnek, mert támogatják a határon túli magyarok kvalifikációs törekvéseit, különösen a módszertanosokét. Köszönettel tartozom az ösztöndíjas támogatásért, a rugalmas időbeosztás lehetővé tételéért, valamint a MIDK költségeinek finanszírozásáért. A képzésnek, a tanulásnak egy nagyon fontos része az évenként megrendezett MIDK konferencia. Továbbá szeretném megköszönni, hogy örömmel fogadták és támogatták a Magyarországon kívüli tanulmányi utamat, amely az intézményes és személyes kapcsolatokon keresztül vált lehetővé.

Köszönet illeti a Matematika- és Számítástudományok Doktori Iskola tanárait a tanulmányaim alatt nyújtott szakmai támogatásukért.

Köszönöm a Beregszászi Bethlen Gábor Líceum vezetőségének, hogy lehetővé tették és támogatták a kutatásomat, továbbá az iskola mindazon diákjainak, akik közreműködtek a kísérletek során.

Hálával tartozom szüleimnek és vőlegényemnek szeretetükért, türelmükért és kitartó támogatásukért.

## 1. BEVEZETÉS

A matematikai fogalmak, ismeretek, eljárások több absztrakciós szint bejárásával épülnek be a matematikai ismeretrendszerbe. A módszertanilag és matematikai szempontból megalapozott eszközhasználat, az absztrakciós szintnek megfelelő külső reprezentáció segítheti a fogalmak fejlődését (Ambrus, 1999). Ugyanakkor a tanulási-tanítási folyamat célja a tartós, hosszútávon fennmaradó tudás biztosítása is.

Matematika és informatika tanárként természetes, hogy elsősorban az IKT eszközök között kerestem a hatékony tanulás-támogatáshoz módszertani célkitűzéseimnek megfelelő segítséget.

Az oktatás minden fázisához kerestem a megfelelő IKT támogatást

- a tanítás *megtervezéséhez*, a tanár előkészítő munkájához (óravázlat, prezentáció, animáció, munkalapok és feladatlapok készítése);
- a tanórák *lebonyolításához*, a frontális tanítás támogatásához (multi-médiás elemek összehangolása), kiscsoportos tanulás szinkronizálásához, a partnern munka irányításához, illetve gép-tanuló kapcsolat tananyagának közvetítéséhez;
- a tanulási folyamat hatékonyságának *értékeléshez* egyaránt.

A kutatás célja a matematikatanítás módszereinek bővítése, fejlesztése Kárpátalján. A kárpátaljai magyar nyelvű matematikatanítás helyzete kevésbé ismert akár a hazai, akár a külföldi szakirodalomban.<sup>1</sup> A dolgozat elsősorban a Kárpátalján elérhető IKT eszközök, valamint az aktuális magyarországi kutatáshoz kapcsolódó, előhívásos tanulási módszer bevezethetőségét vizsgálja, hogy jó gyakorlatot teremtsen és megoldást nyújtson az új igényeknek megfelelő matematikatanításhoz.

---

<sup>1</sup> A kevés összehasonlító irodalomhoz tartozik Fried és Veres 2017, 2018.

Az 1. fejezetben indoklom a témaválasztást, ismertetem a kutatási kérdéseket és a hipotéziseket. A 2. fejezetben áttekintem a témához kapcsolódó elméleteket. A 3. fejezetben beszámolok az elméleti kutatásom néhány eredményéről. A 4. fejezetben ismertetem az empirikus kutatást. Az 5. fejezetben összevetem a kutatási eredményeket a hipotézisekkel. A 6. fejezetben említék néhány további kutatási szempontot. Végül a függelékben bemutatok néhány felhasznált segédeszközt, adattáblát és tanulói produkciót.

### **1.1. A témaválasztás indoklása**

Minden országban, mindenfajta társadalmi berendezkedésben – különös tekintettel a kárpátaljai magyar diákok anyanyelven való képzésében – döntő kérdés, hogy mire nevel, mit és hogyan tanít az iskola, a pedagógus (Czeglédy, 2010, 8.o.). Az oktatás tartalmát és keretrendszerét meghatározzák a központi tantervi követelmények. A tananyagelrendezés, a hangsúlyok elhelyezése, az alkalmazott módszertani megoldások és a felhasznált eszközök kiválasztása a tanár dolga és felelőssége. Mint kisebbséget tanító magyar anyanyelvű tanár nagyon fontosnak tartom, hogy a tanítványaim a szakmai tudáson túl nyelvismeretüket és szövegértésüket is fejlesszék és megismerjék azokat a lehetőségeket, amelyek segítenek az egész életen át tartó önálló tanulásban.

A tanórai szóhasználatra Kárpátalján jobban kell figyelni, mint Budapesten vagy Debrecenben, mert a matematika órai magyar beszéd kihatással van a diákok köznyelvi szóhasználatára is. Sikeresek csak a tantestület összefogásával lehetünk, hiszen a többi tanár nyelvi igényessége befolyásolja a matematikaórai fogékonyságot is.

Fontos, hogy tanítványaim ne maradjanak törvényszerűen alul a magyar-magyar összehasonlításban, mert ez negatívan befolyásolja a

nemzeti identitást is. Ugyancsak negatív hatású lehet, ha a magyar hovatartozás miatt választott iskolában anyanyelvből vagy szövegértés miatt matematikából kap rossz jegyet a tanuló.

Munkahelyemen matematikát és informatikát is tanítottam a kárpátaljai magyar diákoknak, és igyekeztem a matematikatanítást támogató informatikai eszközöket, programokat, alkalmazásokat használni és a diákokkal is megismertetni. Kezdetől tudatosan vizsgáltam a két tárgy kapcsolatát, igyekeztem egységesebb szemléletet közvetíteni, hiszen többször előfordult, hogy tanítványaim a matematikában is használt számos fogalommal, tevékenységgel, gondolkodásmóddal informatika órán találkoztak először, ugyanakkor a matematika tantárgy is előkészít ismereteket, fogalmakat, eljárásokat az informatika számára.

A modern elektronikai eszközök (táblagép, okostelefon, stb.) a gyerekek körében nagyon népszerűek, a többségük ügyesen bánik ezekkel az eszközökkel. Kézenfekvő tehát, hogy ezeket a népszerű eszközöket bevonjuk a tanulási-tanítási folyamatba.

A kezdeti célkitűzés szerint érintőképernyős eszközön, táblagépen szerettünk volna dolgozni a diákokkal, de a meglehetősen rossz anyagi helyzetben levő Kárpátaljai iskolában sem pályázattal, sem önerőből nem tudtuk biztosítani az eszközt. Ezért egy kicsit módosítani kellett a kutatási irányt. Olyan eszközöket, módszereket kellett keresni, amelyek a kisebbségi magyar nyelvű oktatásban hozzáférhetőek. Ugyanakkor a közvetlen érintés előnyeiről nem állt szándékunkban lemondani, így a kutatási tervet az interaktív tábla és a személyi számítógép által biztosított lehetőségekre építettük.<sup>2</sup>

---

<sup>2</sup> Amint ezekről a 2016., 2017. és a 2018. évi Varga Tamás Módszertani Napokon, illetve MIDK-on beszámoltam (Jakab 2016, 2017a, 2017b, 2018).

Meggyőződésem, hogy az IKT eszközök a tanórákat színesebbé, változatosabbá teszik, hatékonyabbá tehetik az oktatást, s a tanárszerep pozitív változását is elősegítik. Bár a kevesebb sokszor többet ad. Balla (2018) szerint „csak annyi technikát használjunk, ami feltétlenül szükséges, *de annyit igen*”. Már nem annak örülünk, hogy van mit bekapcsolni, hanem olyat szeretnénk bekapcsolni, amire megéri az időt ráfordítani és szervesen beépül a tananyagba.

A megismert IKT eszközök révén a diákok olyan, a mindennapi életben felhasználható, gyakorlati tudásra tehetnek szert, amelyet felhasználhatnak ismeretszerzésre, együttműködésre, képességeik fejlesztésére.

Tudjuk, hogy az iskola sikeres elvégeztével nem zárul le a tanulás. Akár az adott szakma gyakorlásához szükséges ismeretek megváltozása, akár pályamódosítás miatt újra és újra „iskolapadba kerülnek” az emberek, ezért a diákokat gyakorlatilag élethosszig tartó tanulásra kell felkészíteni, így a tanulás tanítása, a helyes tanulási módszerek elsajátítása, szokások kialakítása legalább olyan fontos, mint a tartalom.

## 1.2. Kutatási kérdések és a kutatás hipotézisei

### Kutatási kérdések

Kutatásunkban azt vizsgáltuk, hogy az egyre bővülő IKT eszközök használata milyen új és eddig még kiaknázatlan módon járulhat hozzá a matematika eredményesebb tanításához és ez mennyire illeszthető a kárpátaljai gyakorlatba. Megvizsgáltuk a módszer „mellékhatásait” és módszertani megoldást kerestünk a kompenzálásra. Ebből kiindulva az alábbi kérdésekre kerestük a választ:

- 1.a Hatékonyabbá tehető-e a matematikatanulási folyamat alkalmasan választott és módszertanilag megalapozottan alkalmazott IKT eszközök segítségével?
- 1.b Milyen változásokkal jár a tanulási szokásokat, a gondolkodást, a személyiségfejlődést illetően a tanítási módszer megváltoztatása?<sup>3</sup>
- 1.c Harmonikusan illeszthetők-e egymáshoz az IKT és a hagyományos szemléltető eszközök, modellek?
- 1.d Mennyire zavaró a digitalizált tartalom „tökéletlensége”?

Az utóbbi időben többet tudunk az egyénben végbemenő tanulási folyamatról. Ma már tudjuk, hogy az ismétléses tanulás, elsősorban a rövidtávú emlékezést támogatja, a tartós tudás pedig a jól ütemezett, többszöri előhívás segítségével szerezhető meg (Wheeler & Roediger, 1992; Bernáth & Vásárhelyi, 2018).

- 2.a Hogyan illeszthető be a matematika tanítás során a mindennapi munkarendbe az előhívásos tanulási módszer egy kárpátaljai magyar általános iskolában és milyen a hatása?
- 2.b Nem borítja-e fel az időmérleget az ütemezett előhívás módszere?

---

<sup>3</sup> A fiziológiai hatást eszköz és szakértelem hiányában nem áll módomban vizsgálni, de nem is egyetlen tanítási kísérlet alatt eldönthető a kérdés.

## A kutatás hipotézisei

Kutatásaimat a koronavírus elterjedése előtt végeztem, így a hipotéziseim is a tanár szándéka szerint megválasztott mennyiségű IKT összetevővel végzett oktatás hatékonyságára vonatkoznak.<sup>4</sup>

Ugyanazon tanterv és lényegében azonos tananyag, valamint egyenlő óraszám mellett vizsgáltam a fokozott IKT támogatású, illetve az előhívásos tanulási módszer hatását. Összevettem az IKT-hagyományos, az előhívásos-hagyományos, illetve az IKT-előhívásos módszerrel tanuló osztályok matematikatanulásának eredményességét.

### 1. hipotézis

Az eszköz- és programismeret elsajátítására fordított idő és energia nemcsak a digitális kompetenciát fejleszti, hanem

- A) a tanári magyarázatban alkalmazott fokozott IKT támogatással tanuló osztály, és az „egy diák-egy gép” formációban tanuló osztály is legalább olyan eredményesen sajátítja el a matematika tananyagot, mint a hagyományos módszerrel tanulók;
- B) az IKT-s osztály viszonya a matematika órához és a matematika tanulásához pozitívan változik.

### 2. hipotézis

Az előhívásos tanulási módszer szerint tanuló osztály tudása mennyiségben legalább olyan megbízható, mint

- A) a hagyományos módszer szerint tanulóké;
- B) a fokozott IKT támogatással tanulóké;
- C) a hagyományos tanulási módszerrel tanuló 7. osztályos magyarországi tanulóké.

---

<sup>4</sup> Amikor ezt a kutatást elkezdtem, akkor még nem sejtettem, hogy (felkészületlenül és kényszerből) ilyen hirtelen és átfogóan átkerül az oktatás a digitális platformokra. Erre a helyzetre más kutatási kérdéseket és más hipotéziseket fogalmaztam volna meg.

### **3. hipotézis**

Az előhívásos tanulási módszer alkalmazásával felépített fogalmak tartósabban beépülnek a tudáshálóba. A tudásszint közép- és hosszútávon az előhívásos tanulási módszer javára változik.

#### *A hipotézisek és a kutatási kérdések kapcsolata*

Az 1. hipotézis a fokozott IKT támogatással (a tanári magyarázatban alkalmazott, egy diák-egy gép formációban) és a hagyományos eszközökkel tanulók teljesítményének összehasonlítására, valamint az IKT-s osztály attitűdjének vizsgálatára (1.a, 1.c, 1.d kutatási kérdés) vonatkozik. A 2. hipotézis az előhívásos és a hagyományos tanulási módszerrel, valamint a fokozott IKT támogatású és az előhívásos tanulási módszerrel dolgozó osztályok eredményességének összehasonlítására (1.a, 1.c, 1.d, 2.a és 2.b kutatási kérdések) vonatkozik. A 3. hipotézis az előhívásos tanulási módszerrel dolgozó osztály matematika tanulása hosszútávú hatékonyságára (2.a, 2.b, kutatási kérdések) vonatkozik.

## 2. A KUTATÁS ELMÉLETI HÁTTERE

Kárpátaljai matematika-informatika szakos magyar nyelven oktató tanárként egyaránt fontosnak tartom a nyelvi, a technológiai, valamint a matematikai kompetenciák fejlesztését.

Oktatóim (Kántor Sándorné, Kocsis I., Kovács Z., Kozma L., Herendiné Kónya E., Lajkó K., Maksa Gy., Muzsnay Z., Vásárhelyi É.) igyekeztek megismertetni a magyarországi matematikaoktatás hagyományaival, valamint felhívták a figyelmet, hogy a magyarországi, a kárpátaljai köznyelvi, valamint a matematikai szóhasználat több esetben külön válik. A szövegértés és szövegértelmezés tanítása terén újabb feladatot jelent a három nyelvi szint különbségeiből adódó zavaró hatások kiküszöbölése. (Bár a különbség sokszor nem egyértelmű, de legalább tudatosan utánanézek.)

### 2.1. Informatikai eszközök a tanárok, illetve a diákok kezében

Vásárhelyi (2002, 31. old.) szerint animáció, szimuláció segítségével

- a nehezen észrevehető kapcsolatok hangsúlyozhatók;
- a nehezen elképzelhető dolgok megmutathatók;
- megoldható a nézőpontváltás és a figyelem irányítása;
- visszaadható a mozgás;
- a közbülső lépések megmutatása által a dinamikus átmenet megfigyelhető.

Wiske (2000, idézi Kétyi, 2016, 70. o.) szerint egy IKT eszköz hasznosságának feltétele az oktatásban hogy

- az eszköznek pedagógiai értéket kell képviselnie;
- anyagilag hozzáférhetőnek kell lennie;
- használatával módszertani változásnak kell bekövetkeznie.

Évről évre sokat fejlődnek az IKT eszközök és számos új eszköz is válik hozzáférhetővé, továbbá bővül a különböző eszközök közötti kommunikáció lehetősége és az egyes eszközökön futtatható programok közelednek a platformfüggetlen állapothoz.

A teljesség igénye nélkül említek néhány – a tanításban betöltött szerep szerint – fontosabb eszközt.

*Interaktív tábla.* Elsősorban a frontális tanítást segíti, de arra is alkalmas, hogy a tanulók „belenyúljanak” az óra menetébe (bevonódás).

Az interaktív tábla lehetővé teszi, hogy megmutassuk a tanulóknak a tanári eszköz képernyőjét és érintőképernyőként használjuk. A hátulról vetítős vagy a felülről megvilágított interaktív táblák nagy előnye a projektor-tanári gép vagy írásvetítő eszközökkel szemben a takarás kiküszöbölése.

Az egyre bővülő dinamikus, interaktív programok birtokában ez óriási nyitás a multimédiás tanegységek (Videótanár, Sulinova, Geomatech, Okosdoboz, Okostankönyv, Socrative, Kahoot, Redmenta, Edubase, Online Test Pad, HotPotatoes), illetve az ilyenek elkészítését segítő szoftverek (PowerPoint, Excel, Cabri geometria 2D, 3D, Cinderella, GeoGebra, Adobe Access, Adobe Photoshop, Euklides, Prezi, ...) irányába. Mindezek megosztását és további források elérését lehetővé teszi tanár és diák számára egyaránt az internet.

A Smart Notebook szoftver megismerésével olyan eszköz birtokába jutottam, amellyel vezérelni tudtam az iskolámban fellelhető interaktív táblákat. Ez azért fontos, mert a beépített eszközeivel az óra folyamán is létrehozhatunk új anyagokat vagy módosíthatjuk az előre elkészített alkalmazásokat. Ezeket későbbi felhasználásra el is menthetjük (táblakép, videófelvétel). A látvány formázásának hasznos eszköze a „screen shade” és „spotlight”.

Az interaktív tábla használatával mindegyik munkaformát és a tanulás bármely fázisát hatékonyan támogathatjuk. Az egyéni, páros, illetve csoportmunkához is találhatunk olyan digitális applikációkat, melyek elősegíthetik a tanulók bevonódását. Több kutató szerint (Simon, 2006; Námesztovszki, 2009) különösen hatékony az aktív tábla használata a kisebb csoportok intenzív bevonására épülő munkamódszer esetén.

Az interaktív tábla segítségével a tanár mobilitása megnő, több helyről is vezérelheti a folyamatot, elkerülheti a kitakarást.

Még nem próbáltam, de szándékozom kipróbálni a mobil eszközzel megosztható beépített szoftveres tartalom (Barcsánszky, 2013) alkalmazását.

Az interaktív tábla segítségével „hibrid” prezentáció hozható létre, a „konzerv” magyarázat kiegészíthető aktuális elemekkel, a tanár a helyszínen rajzol, ír (Molnár és Muhari, 2007, 100.o.).

A hagyományos táblai szemléltetéssel szemben az interaktív tábla előnye, hogy pontos és dinamikus. A szoftver használata a program ismeretén túl bizonyos szintű kezűgyességet is igényel (Csiba, 2019, 130.o.), de például az egyenes végtelen lesz és nem hajlik be, vagy a párhuzamos egyenesek nem lesznek metszők, amit görgetéssel érzékeltetni lehet.

Az interaktív tábla a játékosítással ötvözve a digitális játékokhoz hasonlóan fokozottan bevonó és benntartó hatású. Azon túl, hogy esztétikus, szórakoztató, érdekes része a matematika órának fejleszti a koncentrációt, a logikai készséget, a mérlegelést, a finommotorikus mozgást (Barbarics és tsi., 2019).

*Okostelefon, Táblagép.* A táblagépek és okostelefonok szintén sokrétűen felhasználhatók a tanulási-tanítási folyamatban. Több helyen a tanórát zavaró elemként említik az okostelefont. A függés kialakulásától féltik a diákokat, „még a tanórák alatt sem tudja nélkülözni”, illetve puskázási lehetőségként veszik számításba, „telefonos segítséget kér”. A negatívumok mellett azonban ne feledkezzünk el a tanulási folyamatot támogató funkciókról. Mobilabbak, mint a PC, kivetítő, aktív tábla, laptop, mozgás közben is használhatók, ugyanakkor az aktív tábla számos funkciójával rendelkeznek. A tanulást, az időbeosztást, a tananyagok elérhetőségét segítő szolgáltatáson túl a matematikaoktatásába közvetlenül is bekapcsolható speciális programok segítségével. A normál konfiguráció is felkínál számos logikai játékot.

A táblagépek iskolai alkalmazhatósága, alkalmazása nem újkeletű, amit mutat az a tény, hogy egyre növekvő azon szoftverek száma, amit speciálisan táblagépekre, annak iskolai alkalmazására fejlesztettek (Molnár, 2007, 6.o.).

A táblagépek nagy előnye, hogy nagyobb mobilitást tesznek lehetővé, toll alapú beviteli képességük által a hagyományos papír-toll kapcsolat is jelen van (Duma és Monda, 2012, 22.o.). A táblagépek képe kivetíthető, így a pedagógus a tanteremben járkálva írhat a képernyőre, vagy vezérelheti diákjai eszközt is. Ezáltal az osztálytársak egymás manipulációit is láthatják.

Az IKT olyan mélyen beépült a mindennapi életünkbe, hogy külön kutatási irányok vizsgálják az általa okozott változások pozitív, illetve negatív hatásait. Prensky (2001) szerint az IKT használati szokások alapján generációkat lehet elkülöníteni. Digitális bevándorlók tanítják a digitális bennszülötteket. A köztük fennálló különbségek lényegiek és eltérő tapasztalatokból származnak. Prensky (2001) felhívja a figyelmet Dr. Bruce D. Berry a Baylor College of Medicine professzorának véleményére, amely szerint „Az eltérő tapasztalatok eltérő agyi felépítést eredményeznek.” [...] „diákjaink agya – annak hatására, hogy másképpen nőttek fel – fizikailag megváltozott, eltér a miénktől. Attól függetlenül, hogy ez szó szerint véve igaz-e vagy nem, biztosan állíthatjuk, hogy a gondolkodásmódjuk megváltozott.” (Prensky, 2001)

## **2.2. GeoGebra munkalapok elemzésének és értékelésének matematikai és didaktikai szempontjai**

A nagyon sokoldalú dinamikus geometriai programcsomag megismerésében nagy segítségemre volt a magyar nyelvű leírás, a Geomatech projekt gazdag feladatanyaga és tájékoztatói, valamint a Kovács Zoltán tanár úr által tartott PhD-s szeminárium. Itt ismertem meg a GeoGebra munkalapok (és más interaktív feladatlapon) értékeléséhez használt szempontrendszert (Kovács és tsi., 2019; Jakab, 2017b, 2021). Azért választottam ezt az értékelőlapot, mert

kitér az általam fontosnak tartott szempontokra és könnyen elkészíthető a feladatlap minősítése. Ezt a szempontrendszert használtam miközben az oktatási kísérleteimhez segédanyagokat kerestem, illetve készítettem. Mielőtt ilyen szisztematikusan vizsgáltam a feladatlapokat, jártam úgy, hogy igényes forrásból származó, tetszetős anyag valamilyen szempontból mégsem illett az én osztályaim tanulási folyamatába (nyelvezet, feltételezett előismeret). Az értékelési szempontok a következők:

*I. Matematikai helyesség* (Kivételek, speciális esetek kezelése, szaknyelv helyes használata, jelölések.)

Érdeemes megvizsgálni egy dinamikus munkalapot aszerint, hogy az matematikailag helyesen kezeli-e a kivételes és speciális eseteket, helyesek-e a jelölések, illetve a szaknyelv használatának helyességét. Arra is vigyázni kell, hogy a matematikai szabatoság a tanulók életkorának és absztrakciós szintjének megfelelő legyen. A GeoGebrának vannak eszközei arra, hogy ugyanazt a munkalapot más-más matematikai szabatosággal készítsük el. Például egy átdarabolási feladatot megfogalmazhatunk úgy, hogy „csak” kirakni kell az új formát, vagy úgy, hogy bizonyítani is kell a hézag és átfedés nélküli elrendezést.

*II. Didaktikai helyesség* (Milyen didaktikai célt szolgál, és hogyan? Segíti-e az aktív tanulást? Egyértelmű-e a használat?)

A munkalap dinamikus volta ne legyen öncél, legyen megállapítható a hozzáadott érték.

A munkalap legyen mértéktartó, ne tartalmazzon néhány (3-4) kérdésnél, feladatnál, utasításnál többet.

Legyen egyértelmű a munkalap célja, a használat módja, mi mozgatható, mire kell válaszolni?

Legyen egyszerű, bárki számára könnyen kezelhető a felület.

*III. Kinézet (Zavaró momentumok „zaj”, olvashatóság, takarás, közelség, első megjelenés.)*

Megnyitáskor legyen minden fontos információ olvasható. Nincsenek-e olyan objektumok takarásban, amelyeket látni kell munka közben? Nem kerülnek-e objektumok az interaktivitást szolgáló elemek (csúszkák, jelölőnégyzetek) változtatásakor takarásba? Megfelelő-e a betűméret, kifer-e a munkalap egy képernyőre? (Ez azért fontos, mert a görgetés nézőpontváltást igényel, eltereli a figyelmet az esetleg már megtalált összefüggésekről.) Az összetartozó dolgok kerüljenek egymáshoz közel.

Legyen átlátható a szerkezet. (Hol van kérdés, feladat? Hol üzen a program? Milyen beviteli lehetőség van? Hogyan kell azokat használni? Látszik-e, hogy mikor megoldott egy feladat?)

Ne legyen olyan dekoratív elem (pl. háttérkép, hangeffektus, zene), amely nem illeszkedik a matematikai tartalomhoz és csak elvonja a figyelmet.

*IV. Az interaktivitás jellege (támogató, bevonzó, zavaró)*

A feladatlap engedjen meg annyi interaktivitást, amennyit csak lehet.

Legyenek mozgathatók a munkalapon azok az elemek, amelyek dinamikus hatása elősegíti a szemléltetést, a problémamegoldást. A többi legyen rögzített, ne legyen mozgatható, ami meghatározza a struktúrát. Például érdemes fixálni a csúszkákat és a szövegmezőt. Ez különösen fontos lehet, ha a programot interaktív táblán használjuk, hiszen a tolleszközzel vagy a kezünkkel nem tudunk olyan pontosan „kattintani”, mint az egérrel.

*V. A nyelv használata (Cím, szöveg, személyesség)*

A szöveg legyen tömör, világos, szólítsa meg a célközönséget

- a feladat kitűzésében;
- a tennivalók, lehetőségek leírásában (beviteli mező kezelése);
- a kérdések megfogalmazásában.

A feladatlapon túlmutató, hosszabb szöveget célszerű egy kiinduló weboldalra tenni, vagy papíron kiosztani.

VI. *Egyéb fontos szempontok* (Pl. a szerző kreativitása, a feladatlap eredetisége, a diákok kreativitását mennyire szólítja meg), amelyek közül néhány megfontolandó lehet más informatikai eszköz használatakor is.

### **Módszertani szempontok a hagyományos és digitális eszközök kapcsolatához**

A digitális eszközök által nem leváltani, hanem kiegészíteni akarjuk a jól bevált hagyományos eszközöket.

Az interaktív GeoGebra munkalapokhoz papíralapú feladatlapokat is használtam azért, hogy a megszerzett tapasztalatok és felfedezett tulajdonságok a gép kikapcsolásával ne vesszenek el. Az animációból rögzített egy-egy jellegzetes ábra sok tanuló számára az alkalmazás (applet) megnyitása nélkül is ösztönző az önálló munkához. Ha azonban a tanulónak szüksége van a mozgóképre, akkor az appletet megnyitva megfigyelheti azt.

### **2.3. Az előhívásos tanulási módszer**

A tanulási-tanítási folyamat egyik legfőbb célja a tartós tudás. Sokan az információ tartós megőrzését ismétléssel próbálják elérni, mert azt tapasztalják, hogy meglepő gyorsasággal és mennyiségben felejtünk. Az ismétlés (pl. újabb átolvasás) valóban segít mindaddig, amíg olyan tudás felidézéséről van szó, amelynek az alappillérei még épek.

Az oktatási intézményekben sok tanár úgy tartja, hogy a számonkérésre (tesztelésre, feleltetésre, dolgozatírásra, vizsgára) csak azért van szükség, hogy osztályzatot adjunk, ezért felesleges időtöltésnek gondolják.

Arisztotelész óta próbálják a kutatók igazolni és elfogadtatni, hogy *az ismeretek előhívása* nem kárba veszett idő, hanem *a tanulás eszköze is lehet*. Eszerint a felfogás szerint a teljesítmény-visszajelzés a tanulási-tanítási

folyamat része, mert a diák és a tanár számára egyaránt megmutatja, hogy a tanulók mennyire sikeresen sajátították el a tanultakat. Bár az ellenőrzésre, értékelésre szolgáló eljárások fontos reflexiót jelentenek, mégis a tanulási folyamat peremére szorulva, elkülönülten mennek végbe.

A XIX. század óta ismét megerősödött az előhívás (felidézés, tesztelés) híveinek tábora.

Ebbinghaus (1885), Abbott (1909) és Gates (1917) szerint *az ütemezett felidézés fejleszti a memóriát.*

Tulving (1985) nevéhez fűződik *az információ jelenlétének és elérhetőségének, előhívhatóságának relatív függetlenségére* vonatkozó vizsgálat. A kutatás háttérében az áll, hogy egy időben több információt fogadunk be, mint amennyit később egyszerre képesek vagyunk előhívni. Egy adott ismeret, illetve eljárás reprezentációja azokat a környezeti elemeket is tartalmazza, amelyek között a tanulás megvalósult. Tehát, ha a tanulás és az előhívás ugyanabban a kontextusban valósul meg (akár érzelmi, akár fizikai állapotra gondolunk), akkor lényegesen jobb előhívási teljesítményhez vezet. Sokszor segíthetjük az előhívást ezeknek az epizodikus elemeknek a felidézésével.

Loftus (1979) szerint *az előhívás aktiválja és meg is változtatja az információt.* A jól időzített előhívás (pl. óra végi) megakadályozza a téves információ rögzítését, korrigálja azt, vagy annak helyét a tudáshálóban. A tanár azokra a momentumokra irányíthatja a diák figyelmét, amelyek fontosabbak az ő strukturált tudása alapján (feltételek, kivételek, lényeges tulajdonságok).

Roediger et al. (2006) laboratóriumi körülmények között, egyetemi hallgatók körében angol szöveg tanulása közben megmutatták, hogy *a jól ütemezett előhívás csökkenti a felejtést, konzerválja az emléknymok elérési útvonalát.*

Kang et al. (2007) szerint *a többszöri előhívás jobb hosszútávú előhívási teljesítményt eredményez.* Felhívták a figyelmet *az előhívás (a tesztelés)*

*körülményeinek hatására* is. Az előhívási hatás feleletválasztós és rövid kifejtős kérdéseknél egyaránt kimutatható. Az eredmény kicsit változott aszerint, hogy korrigálták-e a tanulási szakaszban a tévesen felidézett ismeretet. Visszajelzéssel a rövid kifejtős kérdés, visszajelzés nélkül a feleletválasztós teszt bizonyult hatékonyabbnak.

*Az előhívás a tudás mennyiségére és minőségére is hat, az így szerzett tudás könnyebben átvihető más területekre* (Butler, 2010; Smith & Karpicke, 2014; van Eersel et al., 2016).

Ahhoz, hogy az előhívás, a tesztelés teljes jogú része legyen a tanulási folyamatnak szemléletváltásra van szükség mind a tanárok, mind a diákok részéről. Az előhívásos módszer hatékony alkalmazásához megfelelő időbeli ütemezés és a tudásháló építését segítő kérdések, feladatok szükségesek. Változtatni kell a tanári hozzáálláson, ne azt kutassuk, amit nem tud a diák, hanem azt igyekezzünk tartóssá tenni, amit tud a diák.

A diáknak meg kell értenie, hogy az előhívás nem „számonkérés”, hanem segítség. Ez csak akkor hiteles, ha stresszmentes a légkör és a diáknak joga van a tévedéshez.

*Az előhívásos tanulás pozitív hatását az idegen szavak, szövegek tanulásától kimutatták a térképen való tájékozódásnál, valamint orvostanhallgatók biológia tanulásánál* (Carpenter & Pashler, 2007; Kromann et al., 2009; Zaromb & Roediger, 2010; Rowland, 2014; Adesope et al., 2017).

*A tesztelési hatást különböző korosztályokban* óvodás és iskola-előkészítő gyerekeknél, általános iskola alsó és felső tagozatán, gimnáziumban, egyetemisták és idősebbek körében *is vizsgálták.* (Dunlosky et al, 2013).

*Az előhívási hatás idegrendszeri hátterének vizsgálatát Magyarországon* a BME Kognitív Tudományi Tanszékén idegennyelv tanulás témakörében funkcionális mágneses rezonancia (fMRI) segítségével Racsmány Mihály és

tsi. végezték. Ez a magyar kutatócsoport idegen nyelv elsajátítását vizsgálva, laboratóriumi körülmények között megmutatta, hogy *a többszöri előhívás lelassítja a felejtés ütemét* (Keresztes et al., 2014). Az előhívásos módszerrel tanulóknál rövidtávon kisebb intenzitású, de tartósan megmaradó agyi aktivitás volt észlelhető. Az ismétléses módszerrel tanulóknál pedig közvetlenül a tanulás után volt nagyobb az agyi aktivitás, de ez kb. egy hét alatt megfordult.

*Az előhívásos módszernek a matematika tanulására való hatását a mindennapi tanulási-tanítási gyakorlatban az ELTE Matematikai Tanuláseméleti Pszichológiai Kutatócsoport tagjai Szabó Csaba vezetésével végeznek kísérleteket:*

- elemi geometriából a Teleki Blanka Közgazdasági Szakgimnáziumban és a Városmajori Gimnázium 9. osztályos diákjaival ,
- térgeometriából a Teleki Blanka Közgazdasági Szakgimnázium 12. osztályos diákjaival (Szabó & Szeibert, 2018),
- számelméletből az ELTE TTK matematika szakos tanárjelölteknek Algebra és Számelmélet kurzusa keretében (Bernáth et al., 2018),
- nem szakirányú felsőoktatási matematika kurzuson Dékány Éva doktorandusz próbálta ki a módszert a Gödöllői Szent István Egyetemen a menedzser szakosok számára tartott Műszaki Gazdasági Matematika tárgyból (Dékány, 2019).

#### **2.4. A feladatlapok szerepe a matematikatanulásban**

Az utóbbi időben a korszerűbb eszközök megjelenése az oktatási módszerek reformját vonta maga után. Ezek a technikák megkönnyítik a feladatlapok készítését és egyszerűvé teszik azok megosztását, így ma már egyre nagyobb számban vannak jelen a tanulási-tanítási folyamatban. Ezt a felföldülést fokozta a járvány következtében történő távoktatásra való átállás, ami nagymértékben igényli a teljesítmény mérésénél a feladatlapok alkalmazását. Itt kell megemlíteni, hogy a mások által online közzé tett feladatlap

bár könnyen hozzáférhető, nem biztos, hogy az adott tananyagfeldolgozáshoz illeszkedik (például Magyarországon a nulla természetes szám, Ukrajnában pedig nem). Az önálló tanulást segítő eszközök és módszerek között rangos hely jut a multimédiás feladatlapoknak. Ezzel egyidőben megnő a feladatlapok szakmai és módszertani minőségével kapcsolatos elvárás (Jakab 2017b, 2021).

Az IKT alkalmazása miatt kezdettől foglalkoztatott, hogy hogyan őrizhetjük meg a tanóra tapasztalatait, hogyan érhetjük el, hogy a képernyő kikapcsolásával ne vesszenek el a tanulságok se a diákok, se a tanár számára. Az interaktív feladatlapok többségének az a hiányossága, hogy nincs mögöttük adatbáziskezelő, és így a tanárnak nehezebb a tanulók teljesítményét áttekinteni.

A papíralapú feladatlapok bevezetése mellett döntöttem, mert ezek alkalmazása több szempontból is célszerűnek látszott:

- Jegyzőkönyvszerűen dokumentálja a tanulók tevékenységét (akár értékeléssel, akár értékelés nélkül követhető a tanulók előrehaladása).
- A feladatlap szerkezete és tartalma irányítja, terelgeti a diákokat, mert segít kiemelni a lényeges részeket és mintát ad a jegyzetelésre terjedelem és mélység szempontjából is.
- Kiegészíti az IKT támogatással lezajlott tanítási folyamatot (ha a papíralapú és az IKT-s feladatlap össze van egymással hangolva, akkor rögzíteni lehet a papíralapú feladatlapon a képernyőn szerzett tanulságokat). A papíralapú feladatlapon rögzített jegyzet megmarad a digitális óra után is, ami segíti az otthoni felkészülést.

A tudáspróba típusú feladatlapokat úgy igyekeztem összeállítani, hogy ne az álljon a középpontban, hogy mit nem tud a diák, hanem a meglevő és az újonnan szerzett tudás együttes alkalmazására teremtsen lehetőséget. Ez támogatja a differenciált teljesítmény-visszajelzést, a tudásháló építését a pozitív megerősítés által (Vásárhelyi, 2008).

A feladatlap *a diák számára* saját munkatempót tesz lehetővé, önállóságot teremt (akár a mélységet, akár a terjedelmet illetően).

A feladatlapok önálló feldolgozásával a diák szókinccse, köznapi és szaknyelvi szövegértési kompetenciája is fejlődik, ami a kisebbségi magyaroknál a nemzeti kultúra megőrzésének része. Több alkalommal kellett szerkesztenem a magyarországi tankönyvekből, weboldalakról átvett feladatokat. A diákjaim szókinccséhez igazítottam, hogy kevesebb szövegértési nehézségük legyen, és ne érezzék úgy, hogy az ő általuk (helyesen) használt megfogalmazás „nem illik a matematika órára”. Például kijavítjuk a „kétszer több” kifejezést, ha a diák „kétszer annyit” ért alatta, mert ez matematikai hibához vezethet, hiszen nem biztos, hogy egy szám kétszerese több, mint maga a szám. Ugyanakkor nem javítjuk azt a szóhasználatot, hogy a kérdésre adott „válasz” „feleletként” szerepel, bár megemlítjük a különbséget.

A feladatlap az óra menetét a *tanár számára* áttekinthetővé, megismételhetővé és korrigálhatóvá teszi. A tanár kiolvashatja a feladatlapból, hogy mit kell (egyéni és csoportosan) kijavítani, mire kell visszatérni (akár a következő órán). Továbbá a feladatlapból kiolvashatók a didaktikai célok és a feldolgozás mélysége.

A feladatlap *a kutató számára* információban gazdag jegyzőkönyv, akár diagnosztikai mérés alapja is lehet (Csapó 1997, Vári 2003).

A feladatlap segítségével koordinálhatjuk az időbeosztást (időzárás interaktív feladatlapok). Emellett az interaktív feladatlapok azonnali (vagy gyors) kiértékelése, az egyéni visszajelzés segíti a tanuló saját tanulási teljesítményének nyomonkövetését.

A feladatlap tartalmazhat rásegítő kérdést, magyarázatot, emlékeztetőt, ellenőrzésre szolgáló végeredményt. A megoldást azoknak is érdemes elolvasni, akik meg tudták oldani a feladatot, mert megerősíti őket az elgondolásukban.

Emellett láthatják, hogy mennyire részletesen kell a megoldást leírni.

A feladatlap *számomra* egyrészt az előhívás eszköze, másrészt a kísérlet dokumentációja. A feladatlapból kiolvashattam a diákok és az osztály teljesítményét feladatonként és összegezve is. Következtethettem a saját munkám eredményességére és pótlendő mozzanataira.

A feladatlapok oktatási folyamatban való alkalmazásának előnyei mellett meg kell említenünk a hátrányait is. Egyrészt, a feladatlap megtervezése, értékelése és a visszajelzés több időt vesz igénybe és elvonhatja a tanár figyelmét más, fontos pedagógiai feladatoktól. Másrészt, ha egyhangú feladattípusból áll a feladatlap, akkor egyoldalúvá (felismerővé, aktuális tudás nélkül is megoldhatóvá) teszi a feladatokat. Amióta tudatosan keresem a feladattípusokat, gyermekkorom egyszerű „számtanpéldáit” nagyon változatos formában láttam viszont: sorbarakás, lyukas szöveg, keresztrejtvény, párosítás, egy jó válaszos feleletválasztós, több jó válaszos feleletválasztós, rövid szöveges válasz, kifejtős feladat...

A technika és kiszolgáló platformok fejlődése ellenére egyenlőtlen helyzetben van a matematika a többi tárgyhoz képest. Számos szövegszerkesztő nem támogatja a matematikai szimbólumok bevitelét, így kénytelenek vagyunk a képleteket képként beilleszteni vagy visszatérni a programozás elején használt képletidegen írásmódra. Nem kérdezhetünk olyat, amiben képletet kell beírni, mert nem várható el az általános iskolás diáktól, hogy az összes platform beviteli szabályait megtanulja. Még ha meg is tanulja, nem biztos, hogy a feladat szerkesztője is ugyanazt a szintaktikát várja el. Amennyiben kompromisszumot kötünk, akkor éppen a matematikai kompetenciák ellen dolgozunk, például a kontextusba illő „sinα” helyett az A, B, C, D betűk valamelyike a válasz. Ezzel nem csak az a baj, hogy mialatt a válasz eljut a megtalálástól a bevitelig, addig el is

veszhet, hanem az is, hogy nem a „ $\sin\alpha$ ” marad meg az emlékezetében a kérdésre adott válaszként, hanem mondjuk a „C”, és akkor is „C”-t válaszol, ha a program véletlenszerűen megváltoztatta a felkínált válaszok sorrendjét. Az óraimon gyakran tapasztaltam ilyen figyelemeltolódást.

Feladatlapkészítésre magyar nyelvű programokat használtam (Redmenta, GeoGebra worksheet, LearningApps). Magam szövegszerkesztővel és grafikus szerkesztővel készítettem tudáspróba típusú gyakorló feladatlapokat vagy már meglevőket alakítottam át (Okos Doboz, NKP okostankönyv, Mozaik Kiadó, MathPlayGround).

A három kísérlet során körülbelül 20 digitális feladatlapot, 40 animációt, minimum 400 papíralapú feladatlapot állítottam össze és javítottam ki. Ehhez jön még körülbelül 300 darab házi feladat, amelyeket kivetítve közösen javítottunk ki. Nem minden feladatlapot osztályoztam, volt amit csak átnéztem, kijavítottam, de osztályzatot nem adtam rá. A GeoGebra feladatlapokat általában szemléltetésre használtam. A 2D-s feladatlapok egy része az önálló felfedezést és a gyakorlást szolgálta, másik része demonstrációs jellegű, ezek egy részét papíron is kiosztottam. A kutatásom elméleti része a GeoGebra 3D megjelenítésével kapcsolatos fejlesztés (Jakab, 2020b).

## **2.5. Az európai kulcskompetenciák és a matematikatanulás kapcsolata**

Ukrajna nem Európai uniós ország, de szeretné a kapcsolatait szorosabbra fűzni az Európai Unióval, ezért feladataim közé tartozik az európai kulcskompetenciák közvetítése a magyar kisebbség számára, egyfajta hidat képezni a magyar kisebbség és az európai normák között.

Akármilyen szegény egy ország, akármilyen keveset fordít az oktatásra, a matematikaoktatásra mégis érdemes fordítani, mert azáltal az összes kulcskompetenciát fejlesztem, miközben elvégzem a matematikatanítás feladatait.

Többféle kompetenciarendszer létezik, amelyek célrendszere, kidolgozottsága is eltérő. Az egyik meghatározó rendszer az európai kulcskompetenciák rendszere, amely központi célkitűzésként az egész életen át tartó tanulást fogalmazza meg. A matematikatanítás eredményességét a magyarországi kompetenciamérésnél is használt SULINOVA, illetve PISA kompetenciarendszerek segítségével vizsgáltam. Differenciált fejlesztéshez részletesebb kompetenciaösszetevőket kellett figyelembe vennem (Czeglédy, 2010).

### **2.5.1. Európai Uniós kulcskompetenciák**

„Az Európai Unióban kulcskompetenciákon azokat az ismereteket, készségeket és az ezek alapját alkotó képességeket és attitűdöket értjük, amelyek birtokában az Unió polgárai egyrészt gyorsan alkalmazkodhatnak a modern világ felgyorsult változásaihoz, másrészt a változások irányát és tartalmát cselekvően befolyásolhatják. A tudásalapú társadalomban felértékelődik az egyén tanulási képessége, mert az emberi cselekvőképesség az élethosszig tartó tanulás folyamatában formálódik” (NAT 2012, 45.o.).

Az EU-referenciakeret az alábbi „kulcskompetenciákat határozza meg:

1. Az anyanyelven folytatott kommunikáció;
2. Az idegen nyelveken folytatott kommunikáció;
3. Matematikai kompetencia és alapvető kompetenciák a természet- és műszaki tudomány terén;
4. Digitális kompetencia;
5. A tanulás elsajátítása;
6. Szociális és állampolgári kompetenciák;
7. Kezdeményezőképeség és vállalkozói kompetencia, valamint
8. Kulturális tudatosság és kifejezőképeség.”

(Az Európai Parlament és a Tanács ajánlása, 2006, 13.o.)

A nemzeti kultúra megőrzésében és a matematikában egyaránt fontos szerepe van a pontos nyelvhasználatnak, ezért – nyelvi kisebbségi osztályokat tanítva – matematika órán is nagyobb gondot fordítok a nyelvi szabatsosságra. Teszem ezt egyrészt azért, hogy a fogalom tiszta legyen, hiszen ha nem megfelelő magyarsággal magyarázom el a fogalmakat, akkor a matematika sem lesz a diák sajátja. Később pedig a nem tisztázott szóhasználat félreértéshez vezethet. Egyrészt fontos a szókincs, másrészt a szövegértés, valamint a diák mindennapjaival való összekapcsolás, hogy ne maradjon a matematika órán az, amit ott tanultunk, hanem köze legyen a diák életéhez.

Ezért fontos az egyeztetett szóhasználat, az egységes magyar nyelv a magyar órán, a földrajz órán, a matematika órán vagy bármely más tantárgy keretén belül. Arra törekszünk, hogy az iskolázott magyar fiatal az utca szintjénél emeltebb nyelvi réteghez tartozzon, olyan szinten beszélje a nyelvet, amely már tudományos gondolatok közlésére is alkalmas, de még mindenki számára érthető legyen.

A kárpátaljai magyarok és a magyarországi diákok együtt versenyztetése nehéz feladat elé állít, mivel a magyarországi versenyeken a feladatokat nyelvi kompetencia szempontjából is igényesen fogalmazzák meg. A magyar-magyar versenyeken vannak olyan feladatok, ahol legalább annyi a szövegértési és szövegértelmezési összetevő, mint a matematikai kompetencia. Ugyanazt a matematikai kérdést kevésbé komplex nyelvi formában is meg lehet fogalmazni.

A mai többnyelvű társadalomban az idegen nyelvi kommunikáció fontossága miatt nem maradhat el az idegen nyelvi fejlesztés a matematika órán sem. A saját tanítási gyakorlatomban is igyekszem a matematika segítségével támogatni diákjaim idegen nyelvi kommunikációját. Az ismeretek átadása mellett a szakkifejezéseket beírjuk ukránul is, így államnyelvi szókincsük is bővül. Azokon a tanítási órákon, amikor a diákok valamely programmal

dolgoznak az órán, az ismeretek alkalmazása mellett idegen nyelvi kommunikációjuk is fejlődik, mivel egyes alkalmazások angol nyelvűek. A mindennapi feladatok elvégzésében is támogatják egymást a diákok, így saját és diák-társaik idegen nyelvi ismereteit is fejlesztik, mindemellett fejlődik az együttműködő képességük is, ami a szociális és állampolgári kompetencia része is.

A matematikai kompetenciák (gondolkodási módszerek, probléma-megoldási stratégiák, kritikus érvelés, ...) egyre nagyobb szerepet kapnak a mindennapi életben. Minden órán törekszem arra, hogy a diákjaim felismerjék a matematika fontosságát, hasznosságát, szépségét. Felismertetni azokat a matematikai tudáselemeket, melyeket a mindennapi problémák megoldásához felhasználhatnak.

Az óráimon előkerülnek olyan feladatok, ahol a matematika változatos és sokszínű alkalmazhatósága megmutatható. (Számos hétköznapi szituáció leírása ugyanarra az egyenletre vezet, egy halmazábrához sokféle történet társítható.) Olyan helyzeteket is megbeszélünk, amelyekben nincs jó vagy rossz válasz, szubjektív véleményt alkothatnak a diákok, emellett kiemelik a többféle választás lehetőségét. Ezek a megbeszélések szemléltetik, hogy a diáktársak válasza pusztán azért, mert más, mint az övé nem rosszabb annál, vagy épp fordítva. Néha sokáig tart mire megegyezésre jutnak.

Mindeközben gondolkodásfejlesztő, önbizalom növelő, ismeretbővítő, empátianövelő és vitakultúra fejlesztő beszélgetések zajlanak.

Hitem és szándékom szerint egyszerre fejlődik a matematikáról való kommunikáció, a digitális kultúra, a mindennapi élettel való kapcsolat, a szövegértés és kommunikáció is.

A közoktatásban alkalmazott IKT-s technológiák potenciális lehetőséget nyújthatnak a diák digitális kompetenciájának fejlesztésére. A különböző alkalmazások használata során megjelenő döntési helyzetek kifejezetten

segítenek fejleszteni a logikus, kritikus és a problémamegoldó gondolkodást, emellett segíthetik a lemaradó diákokat.

A tanulási folyamat során igyekszem a diákok tanulási szokásait is helyes irányba terelni (időbeosztás, kitartás, feladattartás), hiszen egész életükben tanulni kell. Támogatom az önálló tanulást, segítek a tankönyv és egyéb segédeszközök használatában (keresés az interneten, információszűrés). Az IKT eszközhasználat felzárkózott a nélkülözhetetlen általános alapkészségek (írás, olvasás, számolás) mellé.

A matematikai problémamegoldás közben a diák olyan jártasságot is szerez, amely a mindennapi problémák, döntési szituációk kezelésében is segít (vállalkozói kompetencia).

Igyekeztem megmutatni, hogy a matematika órán a legtöbb kulcskompetencia fejleszthető. A szaktantárgyi órákon a nem speciális kompetenciák komplex fejlesztése történik, mivel azok egymásra épülő, egymást kiegészítő készségek, képességek és attitűdök rendszere. Ez azért fontos, mert a valós életben is komplex módon kell alkalmazni az elsajátított kompetenciákat. Többségük fejlesztése nem közvetlen módon történik (nem megbeszéljük a gyerekekkel, hogy most az anyanyelvi kompetenciád akarom növelni), hanem a változatos feladatok, problémák megoldása közben fejlődik.

A különböző kompetenciák fejlesztése a tanórákon és a mindennapi élettel való összekapcsolása megmutatja a diáknak, hogy a matematika órán megszerzett kompetenciák az őt körülvevő világban is alkalmasak problémamegoldásra.

### **2.5.2. Kompetenciamotiváció**

White (1959, 1963) szerint globális belső motiváció, hogy a személy hatékonyan kezelje a környezetét, melynek eredményeképpen megéli a növekedés élményét.

A kompetencia szó jelenthet illetékességet és szakértelmet is. A kompetenciafejlesztés ezért számunkra azt jelenti, hogy tudatosítani akarjuk a diákban, hogy azzal az ismerettel, jártassággal, készséggel, amire éppen szert tett milyen területen vált szakértővé, azaz hol vállalhatja magára az illetékességet. A *kompetenciamotivációt* úgy értelmezzük, hogy az egyén akarjon szakértő lenni és rendelkezzen hajlandósággal szakértelmének demonstrálásában. Hogyan lehet ezt elérni?

### **A kompetenciamotiváció komponensei**

Az alábbiakban közölt komponensek Herber és Vásárhelyi (2006) gondolataira alapszik.

*Énhatékonyság tudat.* Bandura (1994) szerint az észlelt énhatékonyság az egyén meggyőződése arról, hogy képes a kitűzött célok eléréséhez szükséges teljesítményszintet nyújtani. Az énhatékonyság tudat befolyásolja a tevékenységválasztást és a viselkedési készletet, az erőfeszítést és a kitartást. Kihatással van a személy önértékelésére, valamint a felkészültségének és alkalmasságának megítélésére is.

Az énhatékonyság megítélése különböző forrásokból származik. Egy ilyen erőforrás a személyes tapasztalat. A siker megélése egy tevékenység eredményes elvégzésekor pozitívan hat az énhatékonyságra, míg a kudarcélmény és szorongás negatívan befolyásolja azt. Bár ez nem közvetlen következmény, mivel a nehézségek leküzdésével ellenállóbbak leszünk a kudarcélménnyel szemben, így megtanuljuk kezelni azt. Az énhatékonyságot befolyásolja még a kompetens személyek megfigyelése, valamint a társas meggyőzés és az egyén bizonyos fiziológiai és érzelmi állapota is (Bandura, 1994). A társaközösség támogatása megerősítést ad. Az egyén felelősségkihelyezési beállítottsága (attribúciós típusa) módosítja az énhatékonyság tudatot, azaz hogy mennyire a saját életkörülményeinek

alakítója, vagy éppen a körülmények „áldozata”. A tanár, a szülő, a nevelő, szóval a referenciaszemély hitelessége kudarc esetén is pozitív hatású.

Azok a személyek, akik alacsony énhatékonyság tudattal rendelkeznek kevésbé elkötelezettek a célok iránt, a tevékenységekbe is kevésbé képesek belefeledkezni. Ha nehéz feladattal találkoznak, gyakran fenyegetettségnak élik meg, így hamar feladják. Egy feladat esetén a lehetséges negatív kimenetelre, a megoldás elé gördülő akadályokra, személyes adottságaik hiányosságaira koncentrálnak. Ha akadályba ütköznek, meghátrálnak, csökkentik erőfeszítéseiket. Alacsonyabb az önértékelésük, hajlamosabbak a stresszre és a depresszióra. Ezzel szemben azok az emberek, akik magas énhatékonyság tudattal jellemezhetők képesek elmélyülni egy feladatban, tevékenységben, valódi érdeklődést mutatnak azok iránt. Kihívást jelentő célokat is képesek maguk elé tűzni és elköteleződnek az általuk kitűzött célok mellett. Ha nehéz problémahelyzettel találkoznak, hajlamosak azt kihívásnak, megoldandó problémának értékelni. Ha kudarcot vallanak egy feladat megoldásában, akkor úgy értékelik, hogy nem tettek elég erőfeszítést vagy rajtuk kívül álló okkal magyarázzák a sikertelenséget. Általában úgy ítélik meg a helyzetet, hogy lehet rajta változtatni, és erre törekszenek is. Önbizalmuk magasabb, ugyanolyan adottságok mellett nagyobb teljesítményre képesek, mint az alacsonyabb énhatékonyság-tudatú társaik, kevésbé hajlamosak a stresszre és a depresszióra (Herber és Vásárhelyi, 2006).

*Optimális kihívás.* A kompetenciamotiváció csak akkor kapcsolódik be és fejlődik, ha a feladatoknak *optimális* kihívása van, amelyek leküzdésével az önkép növekszik (Herber és Vásárhelyi, 2006). Sem a túl könnyű, sem a túl nehéz feladat nem biztosítja a kompetenciagyarapodás élményét. Ha a tanuló nem érzékeli a folyamat közben kompetenciájának gyarapodását, javulását, nem érez elsajátítást, akkor nem lesz motivált a tevékenység

folytatására (Józsa, 2002). A tanórára kiválasztott matematikai feladatok nehézségénél is figyelni kell erre a szempontra.

A különböző játékok (akár számítógépes), vetélkedők és egyéb tevékenységek a nehezedő feladatok (szintek) által optimális kihívást jelentenek, így biztosíthatják a kompetenciafejlődést is. A feladatok nehézségi fokát közepesen nehéz szintről érdemes indítani és úgy célszerű kialakítani, hogy analóg modellt adjon egy adott problémamegoldási stratégiára.

*Belső motiváció.* Az optimális kihívást jelentő tevékenységekben elért sikerek nem csak az énhatékonyság érzését és ezen keresztül a kompetenciamotivációt erősítik, hanem a belső motivációt is.

Aki kompetensnek érzi magát, az adott területen sokkal inkább belülről motivált, mint az a társa, aki kevesebb szakértelmet és énhatékonyságot érez, és fordítva (Herber és Vásárhelyi, 2006). Továbbá az a személy, aki belülről motivált nagyobb érdeklődést, teljesítményt, produktivitást és kitartást tanúsít, mint az az egyén, aki külsőleg (valamilyen dicséretet, jutalmat vár el) irányított (Anderson et al., 1976; Deci és Ryan, 1985). A külső jutalmazás „szétveri”, csökkenti a belső motivációt, mert a tanuló nem az örömeért fog bizonyos tevékenységet megtenni, hanem a külső jutalomért. Ezzel szemben a tényszerű visszacsatolás, valamint az igényelt és azonnali támogatás növelheti a belső motivációt. Az egyéni képességekhez igazított feladatok is segítenek átélni a tevékenységben lelt örömet.

*A felfedezés vágya, kíváncsiság.* Az emberi kíváncsiság, épp úgy, mint a belső motiváció, befolyásolja a viselkedés hatékonyságát feladathelyzetekben. Bruner (1974) szerint a kíváncsiság a belső motiváció mintapéldája.

Az új és ismert tudáselemek megfelelő kombinálásával aktiválhatjuk a kíváncsiságot, a felfedezés vágyát. A természetes és a felkeltett kíváncsiság együtteséből újabb fejlődési lehetőség származik.

A kíváncsiság és az ismeretlentől való félelem párharcára döntő befolyással van a problémamegoldásban való jártasság, a problémamegoldási stratégiák ismerete és kreatív alkalmazása (Barbarics és tsi., 2019, 44.o.).

A közepes nehézségű kihívások felvállalásának tendenciája kapcsolja össze a kíváncsiságot a kompetenciamotivációval (Herber és Vásárhelyi, 2006). Az IKT-s eszközökkel támogatott szemléltetés (multimédiás anyag) felkeltheti az érdeklődést és fokozhatja a teljesítménykésztetést.

*Felelősségkihelyezés.* A pedagógus teljesítmény visszajelzése hatással van a diák attribúciós rendszerének kialakulására.

A felelősségkihelyezés jelentős abból a szempontból, hogy az okokat külső vagy belső, állandó vagy ideiglenes, módosítható vagy módosíthatatlan jellegűnek minősíti az egyén (Weiner, 1985). Ha az egyén el tudja különíteni a befolyásolható és befolyásolhatatlan dolgokat egymástól, a siker és a kudarc magyarázatát differenciáltan osztja fel belső és külső felelősség szempontjából.

Ez a modell lehetőséget ad a diák viselkedésének értelmezésére, és hozzáértő kezelésére. Figyelnünk kell arra, hogy a sorozatos kudarcélmények eredménye ne legyen a tanult tehetetlenség, amikor is a diák már akkor sem tesz lépéseket a problémamegoldására, amikor arra elvileg képes lenne.

*Önrendelkezés motiváció.* Ryan és Deci (2000) szerint az önrendelkezés a személyiség fejlődés alapvető szükséglete, amely befolyásolja az egyén belső motivációját. Szerintük az autonómiára való törekvés (a kompetencia és a kapcsolati igényekkel együtt) olyan alapvető motívum, amely pozitív hatással van az egyén megelégedettségére. Egy és ugyanazon tevékenység lehet jobban vagy kevésbé motiváló, ha az egyén saját törekvéseként vagy külső szabályozó hatásaként éli meg (Barbarics et al., 2019, 44.o.). Herber (1994) szerint az önrendelkezési motiváció csökken, ha az egyén cselekedeteiben külső ellenőrzés alatt áll (még akkor is, ha az segítség).

Az önrendelkezés előmozdításával a diákok iskolai teljesítménye is fejleszthető. Grolnick és Ryan (1987) szerint az autonómiát támogató oktatási környezet növeli a diák hajlandóságát a téma mélyreható feldolgozására, ezáltal magasabb szintű kompetenciára tesz szert.

*Önbecsülés és énkép.* Az emberek általában csak olyan tevékenységet vállalnak fel, ami kedvez a pozitív önképnek. Az iskolában gyakran kerül olyan helyzetbe a diák, amely veszélyezteti az önképet. Ilyenkor önvédelmi mechanizmusok lépnek életbe, mint például az „ördögi kör”: egy diák őszintén próbál jó teljesítményt nyújtani, saját magához képest tényleg fejlődik, de az osztálytársaihoz képest lemarad. Annak érdekében, hogy megvédje az önbecsülését, a tanuló felhagy az igyekezettel, így fenn tudja tartani magában az illúziót, hogy komolyabb erőfeszítéssel jobb lehetne. Miközben védi az önképét, romlik a teljesítménye, negatív értékelést kap a tanártól, ezúttal nem csak a teljesítmény miatt, hanem a lustaságért is. Így lesz az igyekvő, lassabban fejlődő tanulóból egyszerre buta és lusta is. Ez az átlag természete, az egyéni haladás dacára az átlag alatt lehet.

*Teljesítménymotiváció.* A teljesítményre irányuló motivációs elméletek számos motívumot vizsgáltak. Az elmúlt két évtizedben Kuhl (2000) a személyiség és a környezet kölcsönhatásaiként vizsgálta a motivációt és a személyiséget formáló fő motívumcsoportok egyikeként írta le a teljesítménymotivációt. Kuhl a motivációs állapotot dinamikusan és nem statikusan kezeli (2001). Ebben a szellemben állított össze egy projektív tesztet<sup>5</sup> a motivációs állapot feltérképezésére (2003), amelyet pedagógiai célra Vásárhelyi Éva alkalmazott először Magyarországon. Vásárhelyi kidolgozta a motivációs állapot domináns jegyeinek megfelelő javaslatokat a pedagógiai instrukciókra (Vásárhelyi, 2008).

---

<sup>5</sup> OMT-Operant Motive Test (Kuhl, 1999)

A teljesítmény motívumcsoport 5 szintje:

1. *Öröm egy tevékenységben, kíváncsiság.* Ez a „flow” élmény (Csíkszentmihályi, 2001), amikor a tanulót magával ragadja a probléma. Őt hagyhatjuk dolgozni, a tevékenysége önjutalmazó. A pedagógus segítsége ott lehet szükséges, hogy ne váljon magányossá, bekapcsolódjon a közös munkába.
2. *Elismerés-motiváltság.* A tanuló a tőle elvárt teljesítményre törekszik, a külső tényezők szabályozzák. Ilyenkor a pozitív teljesítményértékelés adja az elégedettség érzését. Fontos a formai feltételek egyértelmű megjelölése.
3. *Szembenézés a problémával.* Tudatában van a nehézségeknek és számol a kockázattal. A kudarc esetén is pozitív önértékelés jellemzi. A pedagógus ott segíthet, hogy helyreállítsa a siker reményét és vigyáz, hogy ne vállalja túl magát a diák.
4. *Nem adja fel, helyt akar állni.* Ezen a szinten feltételezett mechanizmus a tervezés, áldozatvállalás, kitartás. A tanuló igyekszik kerülni a kudarchoz kapcsolódó nyomást, a siker elérése érdekében tesz erőfeszítést. Fontos, hogy a pedagógus már a feladat kitűzésekor feltárja annak nehézségeit és biztassa támogatásáról a nehézségek leküzdésben.
5. *Tanácsstalanság, félelem* jellemzi ezt a szintet. Ez a tanult tehetetlenség, amikor már nem lát reményt a sikerre. Ilyenkor kompetens személy segítségére van szükség. Fontos, hogy a tanári segítséget ne a kiszolgáltatottság érzésével, hanem közvetett módon élje meg.

A legfontosabb, amit a motiváció érdekében tehetünk az érdeklődés felkeltése és annak fenntartása. Fontos a folyamatos és személyre szóló teljesítmény visszajelzés. „Mindaz, amiben jól haladunk előre, leköti érdeklődésünket, viszont az olyan tevékenység, amelyben nem érjük el a kompetencia valamilyen fokát, általánosságban csak nehezen vált ki tartós érdeklődést” (Bruner, 1974).

### 2.5.3. Matematikai kompetenciarendszerek

A különböző matematikai kompetenciarendszerek közül a PISA felmérés matematikai kompetenciarendszerét választottam, mert nemzetközi viszonylatban érdemes vizsgálni, hogy mit lehet adni a kárpátjai magyar diákoknak, hogy ne szakadjanak le a magyarországi kortársaiktól. A PISA<sup>6</sup> kompetenciarendszere javításhoz készült, javítási útmutató épül rá, ezért viszonylag kevés átfedés van benne.

A háromévenkénti felméréssorozatot az OECD<sup>7</sup> indította el 2000-ben, melyben három műveltségterületen (matematika, természettudományok és szövegértés) vizsgálják a 15 éves tanulók jártasságának szintjét, ezek közül egy mindig hangsúlyosabb szerepet kap. Az általam vizsgált 2012-es felmérés középpontjában az alkalmazott matematikai alpműveltség állt.

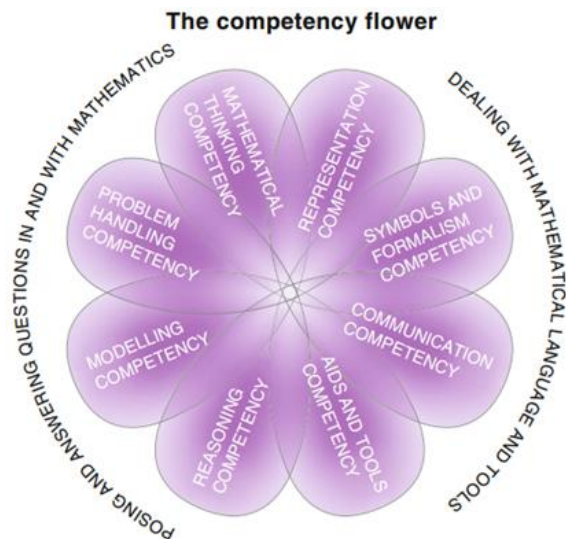
Az OECD (2010) 2012-es PISA keretrendszerében az alábbi meghatározást adja a matematikai műveltség fogalmára: „A matematikai műveltség az egyén azon képessége, hogy a matematikát különféle összefüggésekben megfogalmazza, alkalmazza és értelmezze. Magában foglalja a matematikai érvelést és matematikai fogalmak, eljárások, tények és eszközök használatát a jelenségek leírására, magyarázatára és előrejelzésére. Segíti az egyéneket a matematika világban betöltött szerepének felismerésében, valamint a konstruktív, elkötelezett és reflektív polgárok által megalapozott ítéletek és döntések meghozatalában.” Ennek alapján a következő matematikai képességeket határozták meg (Balácsi és tsi., 2013): kommunikáció, matematizálás, ábrázolás, indoklás és érvelés, stratégia, szimbólumok, formális és szaknyelv és műveletek alkalmazása, matematikai eszközök használata.

---

<sup>6</sup> PISA (Programme for International Student Assessment — Nemzetközi Tanulói Teljesítménymérés Program)

<sup>7</sup> OECD (Organisation for Economic Cooperation and Development — Gazdasági Együttműködési és Fejlesztési Szervezet)

Azt a gondolatot, hogy mindig más matematikai kompetencia kerülhet előtérbe jól fejezi ki az alábbi forgásszimmetrikus virág, mely tartalmazza a nyolc matematikai kompetenciát (1. ábra).



1. ábra. *Mathematical Competencies and PISA*

A matematikai kompetenciák a PISA (2012) matematikai keretrendszerében (Niss, 1999):

1. *A matematikai gondolkodás* (a magyar tanítási gyakorlatban ezek a gondolkodási módszerek) kompetenciája magában foglalja a matematikai kérdések megfogalmazását és megértését; azt az ismeretet, hogy egy fogalomnak terjedelme, egy szabálynak érvényességi köre van, amely bizonyos feltételek mellett bővíthető (kiterjesztés, általánosítás). (Pólya, 1977)

2. *A matematikai problémamegoldás* lépéseinek, stratégiáinak, szerepeinek ismerete és alkalmazása mellett a saját gondolatok felülvizsgálata is szükséges (Pólya, 1967-1968).

3. *A matematikai modellezés* kompetenciája a modellezés lépéseinek ismeretét és alkalmazását jelenti (változatos kontextusban felvetődő kérdések át- illetve megfogalmazása, modellben dolgozni, az eredmény összevetése az eredeti kérdéssel).

4. *A matematikai érvelés, bizonyítás* a magyarázat, sejtés, indoklás, igazolás fokozatainak és módszereinek ismeretét és alkalmazását jelenti.

5. *A matematikai ábrázolások alkalmazása* a fogalmak különböző reprezentációnak ismerete és használata (ábrák, diagramok, adatsorok, ...), valamint az ábrázolási módok közötti kapcsolat megértése és ennek alapján a célszerű ábrázolási mód megválasztása.

6. *A matematika szimbólumaival és a formai elemeivel dolgozni* ugyanakkor a szimbólumokkal és formai elemekkel megkapott eredményt a köznyelv szerint értelmezni.

7. *A matematikai kommunikáció* a szakkifejezések helyes használata, szabatos nyelvi formák alkalmazása a páros, illetve teammunkában, valamint üzleti partnerrel, baráttal, ismerőssel való beszélgetésben.

8. *Eljárások és eszközök szabályszerű használata* (körző, vonalzó, kalkulátor, digitális eszközök és alkalmazások), az eszközhasználatból eredő korlátok ismerete, az eredmény kritikus értelmezése.

A magyarországi matematikatanulás nemzetközileg elismert. Ezt bizonyítják a versenyeken elért sikerek és a kiemelkedő tudósok (Lovász László professzor a matematika Nobel díjnak számító Abel díjban részesült). Ugyanakkor az a kritika fogalmazható meg, hogy túlságosan a matematikára koncentrálnak. A gyakorlatorientált problémamegoldó készség mérésére irányuló nemzetközi felmérések komoly figyelmeztetést jelentettek. Ennek nyomán a kompetenciák fejlesztésére nagyobb hangsúly került. Kialakult az országos kompetenciamérés módszere és adatbankja (Oktatási Hivatal, kompetenciamérés 2001-2021).

### **3. AZ EMPIRIKUS KUTATÁS ELŐKÉSZÍTÉSE**

Az elméleti kutatás központi eleme a meglevő tanulmányok, kutatási eredmények, valamint a téma szempontjából releváns tananyagok felkutatása, áttekintése és fejlesztése. A publikált anyagok (Vásárhelyi, 2002, 2007, 2013; Hohenwarter et al., 2008; Korenova, 2014; Herendiné-Konya, 2015; Kovács, 2019; Lavicza és tsi., 2020; Geomatech, ...) tanulmányozásán túl konzultáltam a téma szakértőivel, valamint konferenciákon beszámoltam a saját eredményeimről (Jakab, 2016, 2017a, 2017b, 2018, 2019, 2020a, 2021) és meghallgattam mások eredményeit.

Kerestem azokat a matematika tanórai tevékenységeket, amelyek egyes fázisai IKT eszközökkel támogathatók (számítógép, interaktív tábla, internet). Igyekeztem áttekinteni az egyre jobban terjedő érintőképernyős eszközök (okos telefon, táblagép...) hatását a tanulási szokásokra. Megvizsgáltam az ilyen célú oktatási segédanyagokat és a hozzájuk tartozó didaktikai értékeléseket a kárpátaljai alkalmazhatóság szempontjából.

Diákként és tanárként is sok tapasztalatot szereztem azáltal, hogy Magyarországon tanultam és tanítottam a doktori képzés alatt. A jó módszereket igyekeztem átültetni a gyakorlatba. Voltak olyan feladatok, megoldások, amelyek változtatás nélkül átvehetőek, mert belefért a mindennapi gyakorlatba és volt, amire rá kellett készülni és bizonyos kiszolgálóegységeket meg kellett ismerni.

Tartalmi, módszertani és IKT oldalról nézve is a Debreceni tartózkodásom alatt a legfontosabb dolog, amit elsajátítottam, hogyan lehet a szakmai tartalom megsértése nélkül kis lépésekre bontani a problémamegoldást (Jakab, 2020b).

Az előadások és szemináriumok is hozzájárultak ahhoz, hogy megismerjem a tanórán alkalmazható IKT eszközöket és kutatási módszereket, illetve azok alkalmazásait.

A kutatásom szempontjából külön személyre szóló szolgáltatása volt a doktori programnak, hogy Kovács Zoltán éppen a GeoGebráról tartott doktori kurzust. Ezen a kurzuson ismerkedtem az elemző szempontokkal és néztem tanári, profi szemmel a GeoGebra-ra. Nem annak örülünk, amit a GeoGebra tud, hanem azt nézzük meg, hogy tudja-e a GeoGebra azt, amire az órán szükségünk van (Kovács, 2019; Jakab 2017b, 2021) és ebből a szempontból más követelményrendszer érvényes a tanítási órák során közösen feldolgozott munkalapokra, mint a tanulók számára közzétett egyéni vagy páros munkára szánt feladatlagra. Ha pedig önálló munkára szánt munkalapról van szó, amelynek feldolgozásánál nincs jelen a tanár, akkor további instrukciókat is tartalmaznia kell (segítség, visszajelzés).

Ugyancsak a Debreceni Egyetemnek köszönhetem, hogy megismerkedtem Korenova Lillával és az ő szakmai vezetésével a CEEPUS keretében tett rövid tanulmányúton megfigyelhettem a jó gyakorlatokat a szlovákiai magyar nyelvű iskolákban.

A témavezetőmtől tanultak közül kiemelném a feladatelemzést. Ő különös hangsúlyt helyezett arra, hogy a tanulási-tanítási folyamat tervezésekor megvizsgáljuk a feladat megoldásához szükséges kognitív és technikai feltételek meglétét.

Az elméleti háttérrel való ismerkedésből kiemelem azokat, amelyek megalapozzák a tanítási kísérleteimet.

### **3.1. Útkeresés: A tanulói teljesítmény értékelésének módjai**

Ugyancsak Magyarországon tapasztaltam, hogy a tanulási folyamat hatékonyságáról realisabb kép kapható, ha egy feladat megoldásában a tanulói teljesítményt nem csupán a javítási útmutatókban megszokott végeredmény-centrikus módon minősítjük. Az egyes, például frissen tanult kognitív stratégiák alkalmazására való törekvés akkor is megmutatkozhat,

ha rossz az eredmény. Az éppen vizsgált kognitív stratégiák szempontjából is értékelhető a tanuló munkája. Ilyen értékelésre láttam példát a magyarországi kompetenciamérés dokumentumaiban és Téglási Ilona PhD disszertációjában is (Oktatási Hivatal, 2007; Téglási, 2015). A két értékelés közötti különbség a racionális számok között végzett műveletek szabályainak elsajátítását vizsgálva különösen jól látszik az én vizsgálataimban. Ha például egy nagyobb abszolútértékű, tizedes tört alakban megadott negatív számhoz kell hozzáadni egy kisebb abszolútértékű vegyes szám alakban megadott pozitív számot. A megoldáskor aktiválandó kognitív stratégiák:

a) Abszolútértékek nagyság szerinti összehasonlítása

Ha az egészrész alapján nem tudunk dönteni, akkor összehasonlítható alakra kell transzformálni a számokat. A közöséges tört alakok esetében az egyenlő számlálót vagy az egyenlő nevezőt részesítjük előnyben. A tizedes tört és vegyes szám összehasonlításához át kell írni tizedes tört alakba, ami nem mindig könnyű feladat.

b) Az összehasonlítás alapján meghatározzuk az eredmény előjelét.

c) Kivonjuk a nagyobb abszolútértékűből a kisebb abszolútértékűt.

d) Előjelet adunk a különbségnek.

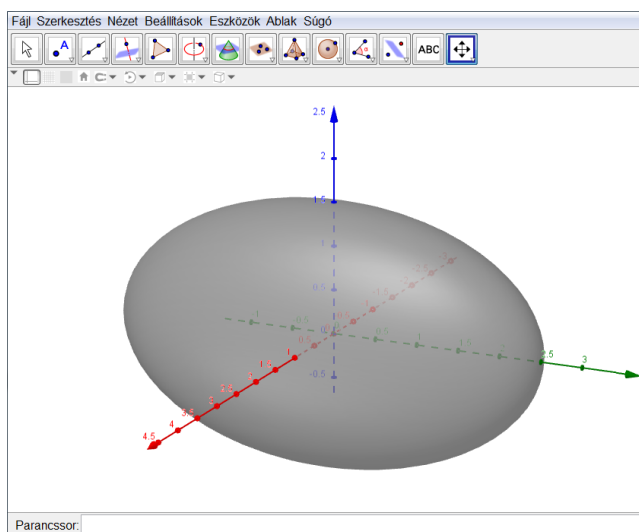
Értékeléskor, pontozáskor nem a tudás, hanem a tananyag-elsajátítási folyamat szempontjából érdemes honorálni, ha a diák megteszi azokat a lépéseket, amelyek az összehasonlításhoz kellene (még ha nem is jó az eredmény).

Kutatói szempontból azzal az előnnyel jár a módszer, hogy megosztja velünk a diák a bizonytalan próbálkozásait.

### **3.2. Útkeresés: Térélmény GeoGebra animációkkal**

A matematikai fogalmak, ismeretek, eljárások beépülését a matematikai kompetenciarendszerbe az absztrakciós szintnek megfelelő külső reprezentációkkal segíthetjük (Ambrus, 1999). Tanár és diák egyaránt hajlamos ennek az összhangnak a megbontására. A diák túl hamar elengedi

az eszközt, mert (talán éppen az eszköznek köszönhetően) „minden világos” számára. A tanár is örül a „sikereknek” és szintet vált. A Geogebra 3D segíthet abban, hogy legalább virtuálisan visszahozza az alacsonyabb szintű reprezentációt (Bruner, 1968). Például: a szimbolikus síkon megadott  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$  egyenletű ellipszoid megadható ikonikusan (2.ábra) vagy 3D animációval virtuálisan, ami a konkrét manipulatív reprezentációra emlékeztet (Jakab, 2020b). A tanár kezében látható konkrét rögbi (rugby) labdához képest az animáció előnye, hogy a tanuló különböző nézőpontból is láthatja az objektumot.



2. ábra. Ellipszoid ikonikus reprezentációja. (Jakab, 2020b, URL: <https://ggbm.at/t4sru8f2>)

Sőt olyan látványt is mutathatunk, ami konkrét tárgyi modell segítségével nehezen vagy egyáltalán nem sikerülhet (például egy test belsejében levő üreg vizsgálata, Jakab 2020b).

A könyvbeli statikus képek, illetve a térhatású ábrák, valamint a táblai rajzok közös vonása, hogy a tanuló akkor látja azt, amit vizualizálni szeretnénk, ha rendelkezik a látvány feldolgozásához szükséges motivációval és előzetes

tapasztalattal (csak az látja a deltoidot sárkányidomnak, aki röptetett már sárkányt). Ezzel szemben tudományosan bizonyított tény (Wertheimer, 1912; Koffka, 1935; Köhler, 1959;), hogy a tér- és mozgásélmény a szemlélő akaratától függetlenül kiváltható, a mozgás folyamatáról készült statikus képek megfelelő tempóban való bemutatásával. A geometriai programok 3D-s szolgáltatásaival készült axonometrikus vagy perspektivikus kép – bármilyen gyönyörű is – csak egy 2D-s statikus kép marad mindaddig, amíg a dinamikus szolgáltatás által meg nem mozgatjuk (döntés és elfordítás). Tehát a térélmény kialakulásában fontos szerepe van a dinamikus szolgáltatásnak, az alkalmasan megmozgatott 3D-s nézetnek. „Az álló és a mozgó kép látványa közötti különbség minden szemlélőre komoly benyomást tesz. Olyanok számára is létrejön a térélmény, akik a statikus képen nem igazodtak el” (Vásárhelyi, 2018).

### **3.3. Útkeresés: Interaktivitás a feladatmegoldásban GeoGebra munkalappal 3D-s nézetben.**

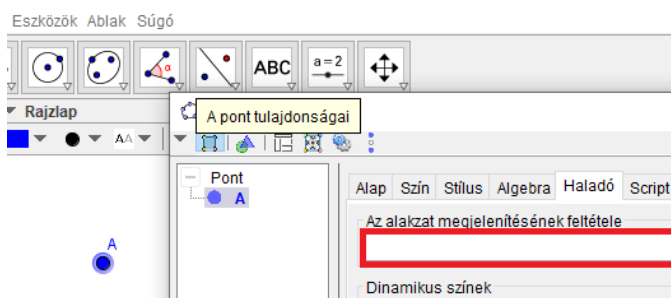
Témavezetőmmel olyan megoldásokat kerestünk, amelyek a GeoGebra szolgáltatásai között szerepelnek ugyan, de a 3D-s nézetben egy kis leleménnyel lehet csak használni azokat (Vásárhelyi, 2013). Ilyen szolgáltatás például a Beviteli mező, a Csúszka, a Jelölőnégyzet, ...

Ezeknek a 3D-s nézetben való alkalmazását konkrét munkalapokhoz kapcsolódva mutatom be. Ha alkalmazni akarjuk ezeket a szolgáltatásokat, akkor gondolnunk kell arra, hogy a 2D ablakból egy kis részt meg kell tartani, mert ezeket a vezérlőket csak ott tudjuk elhelyezni. (Fix hely.) A 2D-s csíkot pedig érdemes „megtisztítani”, hogy ne jelenjenek meg rajta zavaró részletek (zaj, olvashatóság, takarás szempontja). Ezt elérhetjük például a rajzlap mozgásával, a kétdimenziós koordinátatengelyek és a rács kikapcsolásával, de úgy is eljárhatunk, hogy a 3D-s alakzatok tulajdonságainak beállításakor a *Haladó* beállításoknál kikapcsoljuk a *Rajzlap* nézetet



A feladatok megoldásának (esetleg elágazó) gondolatmenetét az objektumok feltételes megjelenítése által igyekeztem követni. Az előzetes megfontolások fontos eleme, hogy a folyamat során egyszer láthatóvá váló objektum nem zavarja-e később a látványt. (A végleges megjelenés a logikai változóra adott egyirányú feltétellel, az időleges megjelenés kétoldali feltétellel állítható be.)

Ebben nagyon fontos szerepet játszanak a logikai változó értékét valamely (szöveg, rajzi vagy vezérlő) objektummal összekötő parancsok (*Tulajdonságok*, *Haladó*, *Az alakzat megjelenítésének feltétele*).



3. ábra. Az objektum láthatóságának beállítása.

Az objektum látható, ha annak logikai értéke igaz, illetve nem látható, ha értéke hamis. A logikai érték beállítására alkalmas például a Jelölőnégyzet, a Csúszka, vagy valamely jól megválasztott objektum létezésének szabályozása. Didaktikai szempontból fontosnak tartom, hogy a feladatlapon legyen bizonyos átjárhatóság, állandóság, a kezelőfelület működése hamar kiismerhető legyen (mértéktartás, egyértelmű-e a használat, első megjelenés). A Csúszkát lineáris építkezéshez, a Jelölőnégyzetet pedig egy adott fázisban megjeleníthető látványelemek egyedi szabályozására használtam. Összetettebb feladatnál kombináltuk a Jelölőnégyzetet és a Csúszkát. A Csúszka adott értékénél vagy értékeinél jelenik meg a Jelölőnégyzet, vagy egy Jelölőnégyzettel éppen egy Csúszkát kapcsolunk be.

### 3.4. Útkeresés: Lineáris építkezés Csúszkarendszerrel

A Csúszkarendszer felépítését és működését egy magyarországi 7. osztályos matematika tankönyv egyik feladatához kapcsolódva mutatom be (1. Példa).

**1. Példa:** (Gedeon et. al., 2005, 119.o.)

Van 60 darab 1 cm oldalú kis kockánk (egységkocka), tömör téglatestet akarunk belőlük építeni.

- Hány különböző tömör téglatest építhető ezekből az egységkockákból, ha az építéshez mind a 60 darabot fel kell használni?
- Mekkora az egyes téglatestek felszíne?
- Hogyan változik a felszín és a térfogat, ha egy egységkockát elveszünk?

*A megoldáshoz szükséges gondolatmenetokről*

A kis kocka éle a hosszúság, lapja a terület, térfogata pedig a térfogat mérésének egysége, ezért nevezzük egységkockának.

Az a) rész megoldásához észre kell venni, hogy pontosan azok a 60 darab egységkockából felépített téglatestek, amelyek méretei (hosszúság, szélesség, magasság) egész számok és szorzatuk 60. Így az egyes téglatestek oldalélének hosszát a 60 háromtényezős szorzatainak megkeresésével kapjuk. Mivel  $60 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$ , az oldalhosszakot lexikografikusan elrendezve szisztematikusan felsorolhatjuk a különböző téglatesteket. (Két téglatest különbözik, ha különböző számhármass szerepel benne.) Megállapítható, hogy tíz féle téglatest készíthető (1.táblázat) hatvan darab egységkockából.

<i>a</i>	1	1	1	1	1	1	2	2	2	3
<i>b</i>	1	2	3	4	5	6	2	3	5	4
<i>c</i>	60	30	20	15	12	10	15	10	6	5

*1. táblázat: A 60 darab egységkockából felépíthető téglatestek*

A b) kérdés megválaszolásához leszámolhatjuk a téglatest felületén lévő egységnégyzeteket vagy kiszámítjuk az oldallapok területének összegét.

A c) kérdés összetett, észre kell venni, hogy a felszín változását befolyásolja, hogy melyik téglatestet vizsgáljuk, és hogy honnan vesszük el az egységkockát.

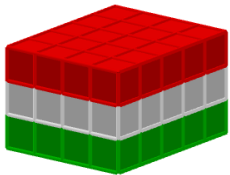
### A megoldás támogatása GeoGebra 3D munkalappal

A 3D-s nézet forgatása ikont használva az alakzatok több oldalról is megfigyelhetővé válnak, létrejön a térélmény. Mivel a Csúszka, Jelölőnégyzet, Beviteli mező, Gomb 2D-s objektumok, csak úgy tudjuk 3D-s objektumra alkalmazni ha először a 3D-s ablakra kattintunk.

A virtuális háromdimenziós alakzat vizsgálatával a felhasználó megtapasztalhatja azt a meglepő tényt, hogy miközben az egységkocka elvételével a térfogat csökken, a felszín csökkenhet, változatlan maradhat, vagy nőhet. A GeoGebra munkalap egy kiválasztott,  $4 \times 5 \times 3$ -as téglatest létrehozását, illetve az egyes fázisokban a feladat szempontjából való vizsgálatát teszi lehetővé, mely az alábbi linken érhető el: <https://www.geogebra.org/m/kwfpue3y>.

A megfigyelések rögzítését papíralapú feladatlappal támogattam (2. táblázat). Amelyik diáknak nincs szüksége dinamikus geometriai szemléltetésre, az közvetlenül megoldhatja a feladatot.

	Az elvett kocka			
	sarokkocka	él belseje	lap belseje	test belseje
A felülethez tartozó lapok száma	3	2	1	0
A felszabaduló lapok száma	$6 - 3 = 3$	$6 - 2 = 4$	$6 - 1 = 5$	$6 - 0 = 6$
Változás értéke	0	+2	+4	+6

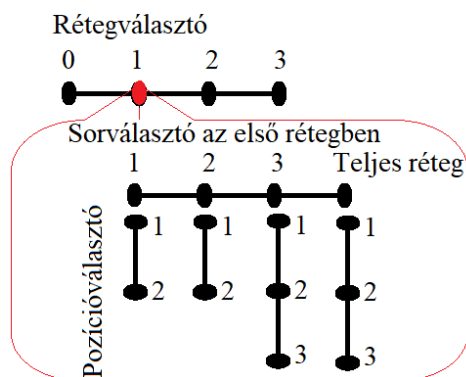


2. táblázat: Feladatlappal a c) részhez (Jakab, 2020b)

A virtuális téglatest részeinek láthatóvá tételét és elmozdítását, röviden a látványt, a felhasználó befolyásolhatja (didaktikai szempontok alapján leszűkített mértékben). A látvány beállításának technikai háttere a *Csúszkarendszer*.

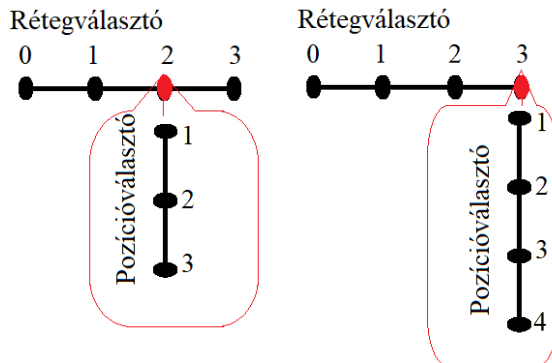
A GeoGebra munkalap vezérlőit úgy célszerű megválasztani, hogy a diákok figyelmét a jellegzetes pozíciókra (sarok, él belseje, lap belseje vagy test belseje) irányítsuk. (Korábban kipróbáltam a Jelölőnégyzetes és a Csúszkás vezérlést is. Hamar megmutatkozott, hogy ilyen összetett konstrukció jobban áttekinthető, ha a vezérlés lineáris.) Úgy gondoltam, hogy érdemes a felhasználó szabadságát annyiban korlátozni, hogy egyszerre csak egy kis kockát lehessen elmozdítani és a jellegzetes pozíciókra Csúszkával (lineáris elrendezéssel) irányítjuk a figyelmet.

Az első Csúszka segítségével lehet kiválasztani, hogy az alsó, a középső vagy a legfelső réteget akarjuk-e vizsgálni. Az első réteg kiválasztásakor megjelenik az első réteg láthatóságát szabályozó Csúszkarendszer (4. ábra). A sorválasztó Csúszka segítségével beállíthatjuk, hogy hány sort akarunk mutatni, a választásnak megfelelően egy újabb csúszka jelenik meg, amellyel kiválaszthatjuk, hogy melyik pozícióban levő kis kocka elmozdításának a hatását akarjuk megfigyelni.



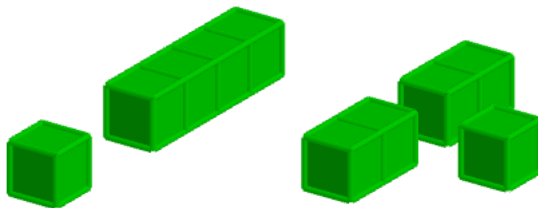
4. ábra. Kettős Csúszkarendszer az első réteg vizsgálatához.

A második és a harmadik réteget nem soronként építjük, hanem a teljes réteget tesszük rá. Ezért ha a rétegválasztót 2-re vagy 3-ra állítjuk, már csak azok a pozíciók választhatók, amelyek vizsgálata az előző réteg tanulmányozása során fontosnak bizonyult, vagy az új test szempontjából megkülönböztetendők (5. ábra).



5. ábra. A második és a harmadik réteg vezérlésének sematikus ábrája.

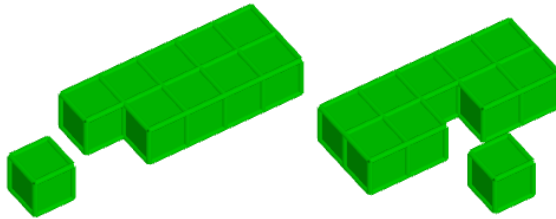
Az első réteg  $4 \times 5$  darab kiskockából áll. Ennek részletes vizsgálatára azért van szükség, hogy a felhasználó felismerje a feladat szempontjából egyenértékű és különböző pozíciókat. Az egy, két, három sorból, egy, két, és három rétegből álló téglatestek megfigyelése közben tapasztalatot gyűjthetnek a felszín változása szempontjából eltérően viselkedő kiskockákról. A kísérletezésnél kiindulásként egy egyetlen sorból álló  $1 \times 5 \times 1$ -es négyzetes oszlop végéről, illetve belsejéből (az ábrán középről) lehet elvenni egy kockát (6. ábra).



6. ábra. Az egysoros elrendezés szélső, illetve belső kockájának elmozdítása az interaktív feladatlapon

Ha egy sorból áll a konstrukció, akkor akárhonnan is veszünk el egy kockát, a térfogat és a felszín is csökken (kezdő kocka elvételével 5 darab eddig látható lapot elvettünk és csak 1 vált láthatóvá; a sor belsejéből elvett kocka esetén eltűnt 4 látható lap és 2 szabaddá vált). Meg kell gondolni, hogy a sorban az 1., 5., illetve a 2., 3., 4. helyen levő kockák elvétele egyaránt 4, illetve 2 négyzetlappal csökkenti a felszínt.

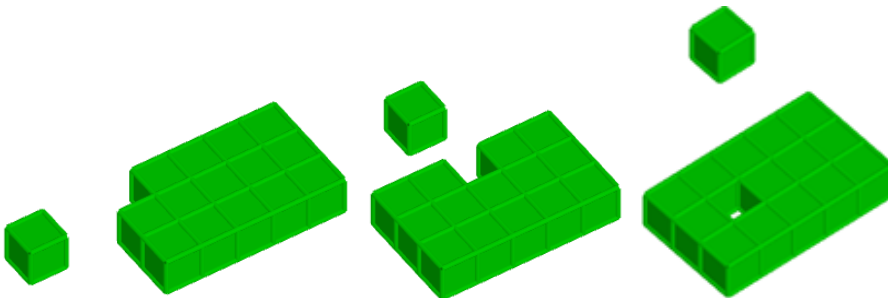
A második sor hozzávételével  $2 \times 5 \times 1$ -es téglatest sarok kockáit és az élek belsejében levő kockákat vizsgáljuk (7. ábra).



7. ábra. A felszín változásai kétsoros elrendezés esetén.

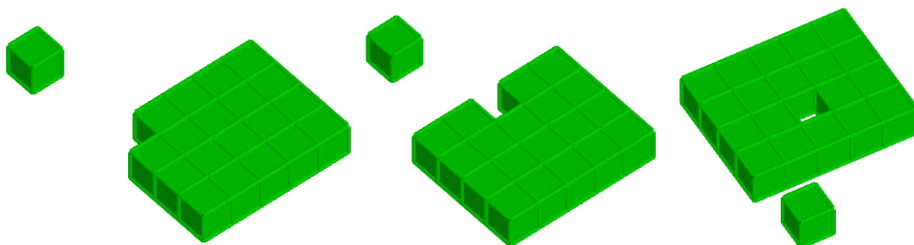
*Fontos megfigyelés:*

Új pozíció nem lépett fel, de egy kocka elvétele másként hat a felszínre, mint az egysoros esetben. A sarokkocka elmozdításakor  $(5 - 1)$  helyett  $(4 - 2)$ -vel csökken a felszín. Az él belsejében levő kocka elvételekor pedig  $(4 - 2)$  helyett  $(3 - 3) = 0$ , azaz nem változik a felszín.



8. ábra. Tipikus kockamozgatások az első réteg háromsoros részletében

A harmadik és a negyedik sor hozzávételével a  $3 \times 5 \times 1$ , illetve a  $4 \times 5 \times 1$ -es téglatestek vizsgálata után áttérhetünk a rétegek vizsgálatára. A negyedik sorral kialakul az első réteg, amit a Csúszka elnevezése is mutat.



9. ábra. Tipikus kockamozgatások a teljes (négy soros) első rétegben

*Fontos megfigyelés:*

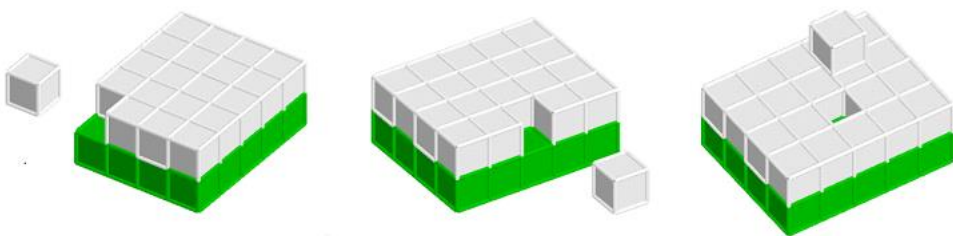
A harmadik és a negyedik sor hozzávételével a már vizsgált pozíciókban (sarok, él belső) levő kockák elmozgatásának hatása megváltozik és új pozíció is létrejön (réteg közepe).

A vizsgálat egyik fázisa lezárult és ez elég sok tapasztalatot nyújtott ahhoz, hogy érdemes legyen rögzíteni (kikapcsolás után is maradjon meg). A tapasztaltok rendszerezését megkönnyíthetjük egy előre elkészített táblázattal (3.táblázat).

elrendezés	kocka pozíciója	elvettünk	szabaddá vált	változás
egysoros	szélső	5	$6 - 5 = 1$	-4
	belső	4	$6 - 4 = 2$	-2
kétsoros	sarok	4	$6 - 4 = 2$	-2
	belső	3	$6 - 3 = 3$	0
háromsoros	sarok	4	$6 - 4 = 2$	-2
	él belseje	3	$6 - 3 = 3$	0
	lap belseje	2	$6 - 2 = 4$	+2

3. táblázat: Az egyrétegű elrendezés felszín változása

A kétrétegű téglatest vizsgálatakor csak a második rétegből veszünk el kiskockát és már nem bontjuk sorokra csak tipikus helyzetű kockák elmozdítását szemléltetjük. (A tipikus kockapozíciók már az első rétegből ismertek.)



10. ábra. A kétrétegű elrendezés sarok, illetve él és lap belső kockájának elmozdítása

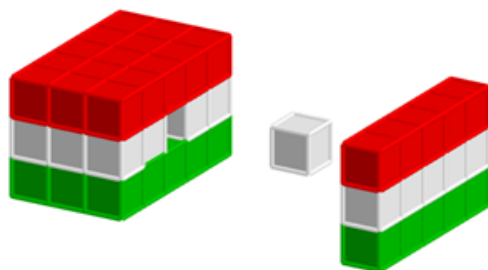
*Fontos megfigyelés:*

A sarokkocka elvétele nem befolyásolja, az élbelső elvétele 2 négyzettel növeli, a lapbelső elvétele pedig 4 négyzettel növeli a felszínt.

A harmadik réteg vizsgálatában újdonság, hogy a GeoGebra segítségével megmutatjuk azt, ami a valóságban nehezen vagy egyáltalán nem menne, a test belsejéből kivesszünk egy kis kockát úgy, hogy ne omoljon össze az „építmény”.

*Fontos megfigyelés:*

A három régi tipikus pozícióban levő kocka elvételének hatása változatlan és megjelent egy újabb pozíció, a test belsejében levő kocka.



*11. ábra. A háromrétegű elrendezés testen belüli kockájának elmozdítása.*

A munkalapon vagy papíralapú feladatlapon ellenőrizhetjük (előhívásos tanulás), hogy helyes-e a tanulók megfigyelése. Ha GeoGebra munkalapon dolgozunk, akkor nem kell más alkalmazást igénybe venni (Redmenta, stb.), mert maga a munkalap is alkalmassá tehető a *Beviteli mezőbe* beírt válaszok közvetlen kiértékelésére, szükség esetén segítség felkínálására. Bármilyen online értékelésű elektronikus tesztelési módot választunk, nagyon beszűkíti a kérdés típusát. A mostani feladattal kapcsolatban olyan kérdéseket fogalmaztunk meg, ami segít a diákoknak a válasz megfelelő formájának kiválasztásában. Néhány példa:

- Hány kocka tartozik az egyes típusokhoz (sarokkocka, élközép kocka, lapközép kocka)?
- Lehet-e elvenni egy kockát úgy, hogy csökkenjen a felszín?
- Mekkora lehet a legnagyobb felszínnövekedés, ha egy kockát veszünk el? (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 négyzetlapnyi)
- Milyen pozícióból lehet úgy elvenni egy kockát, hogy ne változzon a felszín? (**sarok**, élbelső, lapbelső, testbelső)

### 3.5 Útkeresés: Problémamegoldás GeoGebra 3D támogatással és azonnali visszajelzéssel<sup>8</sup>

#### 2. Példa: (2010\_8\_TMat2)

Egy négyzetes oszlop alakú ( $3 \times 3 \times 4$  centiméteres) sütemény tetejét és oldalát egyenletesen bekentük csokoládémázzal, majd szétvágtuk 1 cm élű kis kockákra.

- Hány gyereket tudunk megvendégelni, ha mindenkinek ugyanannyi kis kockát adunk és mindet szétosztjuk?
- Hány gyereket tudunk megvendégelni, ha mindenkinek ugyanannyi kis kockát adunk és mindet szétosztjuk, de tudjuk, hogy egyikük allergiás a csokira?
- Hány gyerek között tudjuk úgy elosztani az összes süteményt, hogy csokoládémázból és süteményből is egyenlően jusson mindenkinek?

*A megoldáshoz szükséges gondolatmenetéről*

Az igazságos szétosztáshoz meg kell állapítani a keletkező kis kockák számát (36) és annak mind a 9 osztóját (1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36).

A b) esetben azt kell észrevenni, hogy 3 kis kockának egyáltalán nincs csokoládés oldala (a sütemény alja nincs bekenve). Egy, kettő vagy három kockát kaphat az allergiás gyerek. Mivel 1, 2 és 3 is osztója 36-nak, így 36 gyerek 1-1, vagy 18 gyerek 2-2, vagy 12 gyerek 3-3 kis süteménykockát kaphat úgy, hogy mindenképpen legyen közte csokoládémentes adag.

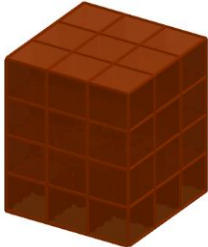
A c) esetben észre kell venni, hogy a csokoládés lapok területe összesen 57 egységnégyzetnyi, 9 a fedőlapon és 12-12 darab a 4 oldallapon (4. táblázat).

Mivel 36 darab süteményt és 57 csokis lapot kell igazságosan szétosztani, a két szempontból is igazságosan megvendégelhető gyerekek száma 36 és 57 közös osztója (1 vagy 3) lehet. Az nyilván megvalósítható, hogy 1 gyerek kapja az összes süteményt. A 3 gyerek közötti kétszeresen igazságos szétosztás megvalósíthatósága nem annyira nyilvánvaló. Az 5. táblázatban megadunk néhány duplán igazságos szétosztást 3 gyerek között.

---

<sup>8</sup> Ha 3D-s alakzatot akarunk *Beviteli mező* segítségével interaktívvá tenni, akkor a 2D ablakból is meg kell tartani egy részt a beviteli mező számára.

Csokis lapok egy kis kockán	A kis kocka helyzete	A kis kockák darabszáma	Csokis lapok összesen
0	Az oszlop belsejében és alul közepén	3	0
1	Fedőlap közepe, oldallap közepe és alja	$1 + 4 \cdot 3 = 13$	13
2	1-1 a fedőlap élein és 3-3 az oldaléleken	$4 + 4 \cdot 3 = 16$	32
3	A fedőlap 4 sarka	4	12
Összesen:		36	57



4. táblázat. A szeleteléskor keletkező egységkockák és csokis oldallapjainak száma

	1. gyerek		2. gyerek		3. gyerek	
0	3	0	0	0	0	0
1	3	3	5	5	5	5
2	2	4	7	14	7	14
3	4	12	0	0	0	0
	12	19	12	19	12	19





	1. gyerek		2. gyerek		3. gyerek	
3	0	0	0	0	0	0
2	2	5	5	6	6	
4	8	7	14	5	10	
3	9	0	0	1	3	
12	19	12	19	12	19	

	1. gyerek		2. gyerek		3. gyerek	
0	1	0	1	0	1	0
1	4	4	4	4	5	5
2	6	12	6	12	4	8
3	1	3	1	3	2	6
	12	19	12	19	12	19

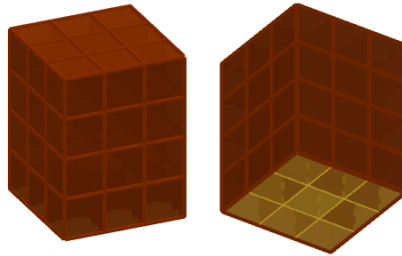
5. táblázat: Példák a duplán igazságos szétosztásra 3 gyerek között

GeoGebra támogatás megoldás közben (Jakab, 2020b)


A GeoGebra 3D-s munkalap linkje: <https://www.geogebra.org/m/py8dwsgh>

A szituáció érzékeltetéséhez 3D nézetben megjelenik egy megfelelően színezett  $3 \times 3 \times 4$ -es négyzetes oszlop. Ezt a *Sokszög*  ( $3 \times 3$ -as négyzet, illetve  $3 \times 4$ -es téglalap); a *Hasáb* ; az *Alakzat eltolása vektorral* ; valamint a *Tengely körüli térbeli forgatás*  parancsokkal valósítottam meg. Magát a hasábot egyszerűbben is lehet szerkeszteni, az alapsokszöget kell

a hasáb élével eltolni. Mivel külön-külön akartam színezni a hasáb lapjait, azokat is létre kellett hozni.



12. ábra. A négyzetes oszlop 3D-s ábrái.

A tanulók már ezzel a kezdetleges ábrával is tapasztalatot szerezhettek a 3D-s nézet forgatása  ikont használva. Észrevehetik például, hogy az egyik 3×3-as négyzetlapon (a hasáb alján) nincs csokimáz.

Annak eldöntéséhez, hogy a hasáb 3D-s ábrája elegendő szemléltetés-e, megkérdezzük a diákokat, hogy hány kiskockából áll a hasáb és hány négyzetcentiméternyi csokimáz van rajta. Ezt *Beviteli* mező parancs segítségével oldjuk meg. Ez egy előre meghatározható pozíciójú és méretű, aktív téglalap a 2D-s ablakban. Létrehozásakor meg kell adni a beviteli mező nevét (egyedi azonosító), illetve a hozzá csatolt szabad objektumot. A környezetét úgy alakítottam ki, hogy az ismert „tedd igazgá a mondatot” módon egy szám begépelésével tudjon válaszolni a diák. A begépelte számot az „Enter” gomb megnyomásával rögzíthetik. A beviteli mező mutatja a tanuló által begépelte értéket.


Kis kockák száma=

A háttérben a program összehasonlítja a begépelte számot (jelsorozatot) az előre megadott értékkel (értékekkel). Az összehasonlítás eredménye egy logikai változó igaz vagy hamis értéke. Az egyes értékekhez feltételelesen megjelenő szöveget kapcsolhatunk.

Kis kockák száma=  **Helyes!** Kis kockák száma=  **Nézd meg az ábrát!**

A Beviteli mezők szerint haladva fokról fokra megoldhatja a diák a feladatot 3D-s segítség nélkül is. De hibás válasz esetén a 3D-s ábrára irányítjuk a figyelmét.

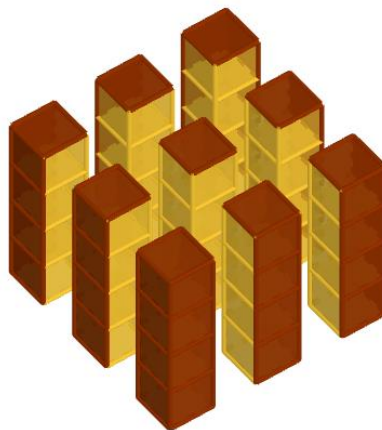
Az előző feladatban már bemutattuk a Csúszkarendszer előnyeit, de útmutatás, ellenőrző kérdés Jelölőnégyzethez is kapcsolható. A Jelölőnégyzet előnye a Csúszkával szemben, hogy a diák egyenként is szabályozni tudja a láthatóságot. Mivel ez a feladat logikailag és látványban is összetett, nem egyetlen objektum egyszerű láthatóságáról dönt a diák, hanem arról, hogy kér-e szemléltetést, például a függőleges szeletelésről.

A feladat szemléltetése az egységkockák elmozdítását is megkívánja, ezért nem elegendő egy  $3 \times 3 \times 4$ -es hasábot ábrázolni, hanem egységkockákból építkezünk, ezt a parancsot a  ikonra kattintva adhatjuk ki.

Az összes függőleges vágás egyszerre kapcsolódik be egy Jelölőnégyzet hatására.

Függőleges szeletelés

Gyakran már az is elegendő, ha csak a függőleges szeletelést látja és forgatja a diák.



13. ábra. A függőleges szeletelés eredménye.

Kis kockák száma=

Csokis lapok száma=

Független szeletelés

3 csokis oldalú kockák száma=

2 csokis oldalú kockák száma=

1 csokis oldalú kockák száma=

0 csokis oldalú kockák száma=

Beviteli mezők segítségével a 0, 1, 2, 3 csokis oldalú esetre külön-külön kérdezzük rá. A könnyűtől a nehezebb felé haladunk. Ha a diák jól válaszol, akkor tovább léphet.

3 csokis oldalú kockák száma=

**Helyes!**

Ha hibás a megoldás, akkor segítő *Jelölőnégyzet* jelenik meg, mellyel egy *Csúszkát* kapcsol be az azonos típusúak összeszámolásához, így megfigyelheti melyikből hány darab van.

3 csokis oldalú kockák száma=

**Nézd!**  3 csokis oldalúak elvétele



Hasonlóképpen járunk el a többi esetben is, kivéve a csokimentes esetet, azt már nem daraboljuk tovább.

Tanári bemutató esetén érdemes az adott eset vizsgálata közben szünetet tartani és leszámolási módszerek (pl. szimmetria) alkalmazására biztatni a diákokat.

Ha azt szeretnénk, hogy gyakorlásképpen számolja össze hány olyan kocka van, melynek legalább (legfeljebb) kettő csokis oldala van, akkor a csúszka logikai értékénél nagyobb (kisebb) egyenlő relációt kell beállítani.

Az önálló feldolgozásra szánt gyakorló munkalapok esetében beállíthatjuk, hogy az ellenőrzés a diák akaratából történjen. Például a Beviteli mezőt Jelölőnégyzettel kombinálhatjuk, így az ellenőrzés, segítség csak akkor jelenik meg, ha a diák akarja.

A GeoGebrának vannak eszközei arra is, hogy ugyanazt a munkalapot más-más matematikai szabotossággal készítsük el. Egy szakasz hosszát megmérhetjük vagy kiszámíthatjuk.

Összegezve: nem a GeoGebra program működését akartam bemutatni, hanem olyan nagyon hasznos lehetőségeket, amelyekhez alaposabb programismeret és módszertani meggondolás szükséges. A saját újításaim elsősorban abban az irányban eredményesek, hogy a GeoGebra dinamikus geometriai program 3D-s szolgáltatásait hogyan lehet az interaktív feladatlap vezérlő parancsaival összeegyeztetni, a problémamegoldás dinamikus folyamatának szervezése közben se kell lemondani a térbeli alakzatok szemléltetéséről. Központi szerepet kaptak a Csúszka és a Jelölőnégyzet, mint irányító, szervező eszközök, valamint az interaktivitást lehetővé tevő Beviteli mező. Ezek az eszközök lehetővé teszik, hogy a diák a saját tempója szerint haladva figyelhesse meg a jelenséget és eközben felfedezhesse a jellemzőket, összefüggéseket. A GeoGebra egyrészt segít abban, hogy a részfeladatokat feladatfürtté szervezzük, másrészt olyan látványelemek is előkerülnek, amelyek dinamikus geometria nélkül nehezen megmutathatók.

A GeoGebra 3D által nyújtott térélményt képernyőkivágásokkal megpróbáltuk ugyan érzékeltetni, de a felhőben elhelyezett dinamikus ábrák tényleges megfigyelése adja igazán vissza az elforgatott 3D-s konstrukció által kiváltott térélményt. (A felhőben való elhelyezés és linken keresztül való megosztás szintén a GeoGebra szolgáltatása.)

## 4. AZ EMPIRIKUS KUTATÁS

Három (IKT támogatásos, előhívásos, hagyományos) tanulási módszert hasonlítottam össze párosával, ennek megfelelően három tanítási kísérletet végeztem. A kísérletek színhelye egy kárpátaljai magyar tannyelvű iskola, a Beregszászi Bethlen Gábor Magyar Gimnázium<sup>9</sup> két párhuzamos osztálya.

### **A kísérleti módszerek hatékonyságának vizsgálatához használt mutatók**

A tanulási módszerek hatékonyságára és a kísérletre vonatkozó megállapításaimnak alapját a diákok tanulmányi eredményeinek, a feladatlapok (tesztek) pontszámának összehasonlítása alkotják.

A két osztály matematikai felkészültségének összehasonlításához, a *bemeneti méréshez* a diákok

- B1) hatodikos éveleji felmérő dolgozatra kapott osztályzatait<sup>10</sup>,
- B2) hatodikos első félévi matematika osztályzatait,
- B3) hetedikos éveleji felmérő dolgozatának érdemjegyeit használtam.

Mivel az osztályokat korábban is én tanítottam, ezek a mutatók több szempontból is megbízható adatok. Egyrészt ennek alapján megállapítható, hogy a két osztály lényegében egyforma szintről indul. Másrészt egy-egy osztály számára viszonyítási szintnek is használható a kísérlet végén.

A *kimeneti mérést* mindegyik esetben az azonos tartalmú és formájú dolgozatokra alapoztam. A két osztály matematikai előmenetelének összehasonlításához, a *kimeneti méréshez* a diákok

- K1) összegző dolgozatára<sup>11</sup> kapott pontszámait (március),
- K2) utótesztre kapott pontszámait (szeptember),
- K3) geometria dolgozatra kapott pontszámait (május),

---

<sup>9</sup> Jelenleg Beregszászi Bethlen Gábor Líceum a neve.

<sup>10</sup> Iskolánkban minden tanítási év elején – rövid ismétlés után – felmérő dolgozatot ír matematikából minden osztály.

<sup>11</sup> Az összegző dolgozat a kísérlet végén írt összefoglaló dolgozat a vizsgált témakörből.

K4) témazáró dolgozataikra kapott pontszámait (november, december), K5) valamint egy magyarországi 7. osztály közös geometria dolgozatának pontszámait használtam (május).

A kísérletek dokumentációját a kísérlet során kitöltött feladatlapok, a rögzített osztálytermi interakciók (képek, videók), valamint a diákok órai munkájának megfigyelésére támaszkodtam. Az elektronikus feladatlapokat a diákok tanórán kívül is megoldhatták volna, mégis az órán szántam rá időt, hogy lássam, mire mennek vele. Ez az eredményesség dokumentálásánál is jól jött, ha éppen nem volt az alkalmazás mögött adatbáziskezelő.

Adatfeldolgozáshoz az Excel (2016-os) program Analysis ToolPack programcsomagját használtam, ahol lehetséges volt két mintás t-próbával hasonlítottam össze a kísérleti és a kontroll osztály matematikai teljesítményét, ahol nem ott nem paraméteres összehasonlítást végeztem. További elemzésekhez leíró statisztikai mutatókat és eljárásokat alkalmaztam.

### **A tanítási kísérletben összehasonlított tanulási-tanítási módszerek**

Matematika informatika szakos tanárként az átlagosnál több IKT támogatás mellett tartom a matematika óráimat. Amikor a témavezetőmmel beszélgettünk az IKT hatásáról, nekem is az volt a benyomásom, hogy a gyönyörű prezentációk, a dinamikus geometria programok az ismételt tanulás irányába tolják a tanulási folyamatot. Ha több szempont szerint kell megfigyelni egy-egy animációt, akkor szívesen „játszadoztak” az alkalmazással és elfelejtkeztek a feladatlap kitöltéséről. („Majd kitöltöm, letöltöm, kinyomtatom, elolvasom.”) A jelenség okait és hatásait vizsgálva, kompenzációs lehetőségeit keresve témavezetőm felhívta a figyelmemet arra a kutatásra, amely előhívásos tanulási módszernek az emlékezet-támogató hatásával foglalkozik. Természetesnek látszott, hogy én is megvizsgáljam, hogy nem

magyar közoktatási rendszerben, de magyar nyelven tanuló diákok matematika tanulására érvényes-e az előhívásos tanulási módszer.

*Az első kísérletben* éppen a hagyományos és az előhívásos módszerrel tanuló diákok teljesítményét hasonlítottam össze. Az állt a vizsgálat középpontjában, hogy beilleszthető-e a matematika órák mindennapi munkarendjébe az előhívásos tanulási módszer, és ha igen, milyen hatékonysággal.

*A második kísérletben* két osztály teljesítményét vizsgáltam. Az egyik osztályban a tanári magyarázat, illetve a feladatmegoldás, gyakorlás az interaktív táblával alátámasztva történt, a másik osztály előhívásos módszerrel tanult.

Nemcsak a két osztály matematika tanulásának eredményességét volt alkalmam összehasonlítani, hanem az Ukrajnában tanuló magyar anyanyelvű és a Magyarországon tanuló diákokét is.

*A harmadik kísérletben* a hagyományos, illetve a fokozott IKT eszközökkel támogatott tanulási módszer hatékonyságát hasonlítottam össze.<sup>12</sup> Az IKT támogatású osztály egy diák-egy gép formációban dolgozott az órákon.

#### **4.1. A kísérletek körülményei, „független változói”**

##### **A matematikatanítás keretrendszere Magyarországon és Kárpátalján (Ukrajnában)**

A matematikatanulás, tanítás folyamatának azokat a fázisait kerestem, amelyek a számunkra hozzáférhető eszközökkel és programokkal (alkalmazásokkal) hatékonyan támogathatók. A tanórákon kívüli feladatok tervezésénél azt is figyelembe kellett venni, hogy a tanítványaim számítógépes (PC, laptop, táblagép) ellátottsága inkább gyengének mondható, jobb a helyzet az okostelefonok terén. Még ha van is a gyerek kezében eszköz, általában korlátozott az internethozzáférés. Úgy kellett megterveznem a feladatokat,

---

<sup>12</sup> Azért került harmadik helyre ez a kísérlet, hogy minden diák számítógéphez kerülhessen az IKT-s osztályból.

hogy az IKT támogatás az iskolán belül, többségében a tanórán történjen és a házi feladatokat hagyományos módszerrel készítették a tanulók. A házi feladatok ellenőrzése és javítása is „hagyományosan” történt (a kivetített mintamegoldás alapján). Ez a technikainak tűnő korlátozás jelentős részben megnehezítette az előhívásos tanulási módszerhez szükséges ütemezett előhívás figyelemmel kísérését, hiszen ez sem történhetett online adatbázis-kezelő segítségével.

Sok magyarországi ötlet, kezdeményezés, elektronikus tananyag hozzáférhető, de a feladatlapok, okostankönyv, okos doboz, videótanár, stb. anyagának *átvételével* óvatosan kellett bánni, voltaképp nem is lehet átvételről beszélni, hanem átültetésre volt szükség. Figyelembe kellett vennem a két ország közötti különbségeket az oktatásirányítás és a tanterv vonatkozásában. Ukrajnában szigorúbbak a tanterv és tanmenet előírásai.

A PhD tanulmányaimat Magyarországon folytatva új elveket és módszereket ismertem meg, és ezeket igyekeztem az általam kidolgozott (hagyományos és elektronikus) feladatlapokba beépíteni. Mivel a tervezett feladatlapokat egy magyarországi általános iskolában is ki akartam próbálni,<sup>13</sup> ebben a munkában arra kellett vigyáznom, hogy a feladatlapjaim a magyar iskolákban is alkalmazhatók legyenek.

Az oktatási kísérletek megtervezéséhez szükséges volt az ukrainai és magyarországi keretrendszer és a tankönyvek összehasonlítása. Az összehasonlítást megkönnyítette, hogy Ukrajnában és Magyarországon is három szinten valósul meg az oktatási követelmények szabályozása. A legfelsőbb szintű dokumentum az *Állami szabvány* (Державний стандарт, UA), illetve a NAT (Nemzeti alaptanterv, HU), amely az egyes műveltségi területekhez

---

<sup>13</sup> Erre lehetőségem is nyílt, egy budapesti általános iskolában Rózsahegyi Eszter tanárnő ki is próbálta.

tartozó fejlesztési feladatokat írja le. A szabályozás következő szintjét az ukrán Oktatási és Tudományos Minisztérium által meghatározott *Oktatási program* (Навчальна програма), illetve a NAT-ra épülő magyar keret-tantervek írják elő, melyek a tanulás-tanítás folyamatában megvalósítandó fejlesztési feladatok, valamint a teljesítéséhez szükséges tantervi előírásokat tartalmazzák évfolyamokra és tantárgyakra lebontva. (Nem elhanyagolható különbség, hogy Ukrajnában évenként, Magyarországon pedig kétévenként vannak az ellenőrzési pontok meghatározva.) Végül az intézmények helyi tantervei következnek. Ezen a szinten szerencsésnek mondhatom magam, mert az iskolavezetés elég sok dologban szabad kezet adott.

Ukrajnában a felső tagozatos matematikaioktatás két fő szakaszra oszlik: 5-6. osztály és 7-9. évfolyam. A matematikaoktatás az első szakaszban egyetlen, *Matematika* elnevezésű tantárgy keretében, a második szakaszban két tantárgyra bontva (*Algebra és Mértan*) zajlik.

Az 5.-6. osztályra vonatkozó ukrainai és magyarországi tanítási programokat 2012-ben adták ki, az ukrainai program 2017-es módosítása tartalmazza azokat a követelményeket, amelyek a tanítási kísérletben résztvevő tanulókra vonatkoznak. (Az említett kerettantervek mindkét országban jelentős módosításokon és fejlesztéseken mentek át a kísérletek óta eltelt idő alatt.)

Kárpátalján, az 5.-6. évfolyamon a matematika tantárgy alapóraszámja 140, mely félévenként heti 4 órát jelent.

A tananyag lényegében megegyezik a két országban, de a didaktikai célkitűzések eltérően vannak megfogalmazva. Például mindkét tanterv előírja a mérés, mértékegység, átváltások témakört, de az ukrán tanterv az ismeretek fejlesztését, gazdagítását, elmélyítését állítja középpontba, a magyar pedig a kompetenciafejlesztést, a tanulás tanulását.

Ukrajnai oktatási program tartalmi követelményei<sup>14</sup>:

- A számokkal, műveletekkel, szám- és betűkifejezésekkel, mennyiségekkel, mértékegységekkel, egyenletekkel, egyenlőtlenségekkel kapcsolatos ismeretek fejlesztése, gazdagítása és elmélyítése.
- A fogalmi apparátus, számítási algoritmusok, ábrázolási készségek és képességek kialakítása, illetve fejlesztése.
- A matematikai jelölésrendszer használatának és alkalmazásának fejlesztése.
- Síkbeli és térbeli alakzatok felismerése, rajzolása, valamint egyes geometriai alakzatok metrikus tulajdonságainak meghatározása, térszemlélet fejlesztése.
- Jártasság kialakítása adatok táblázatba rendezéséhez, szemléltetéséhez grafikonok és diagramok formájában, valamint elemzéséhez.
- Szöveges feladatok megoldása, matematikai modellek használata. Matematikai ismeretek gyakorlati alkalmazásának megmutatása, hétköznapi és gyakorlati problémák leírása matematikai alakban.
- Logikus gondolkodás, érvelési és cáfolási készségek fejlesztése.

Magyarországi kerettanterv tartalmi követelményei<sup>15</sup>:

- A megszerzett tudás és kompetenciák fejlesztése.
- A tanulás tanítása, emlékezet, figyelem, koncentráció, lényegkiemelés, stb. fejlesztése.
- Tudjon halmazokat jellemezni, szabályszerűségeket észrevenni, sejtéseket, állításokat megfogalmazni.
- Tudjon mértékegységeket átváltani, készség szinten számolni egész számokkal, és gyakorlott legyen a racionális számokkal való műveletek végzésében.

---

<sup>14</sup> М.І. Бурда, Б.В. Кудренко, О.Я. Біляніна, А.І. Азаренкова, О.І. Буковська, Т.С. Кіндюх, О.С. Лисенко, А.В. Милянник, Н.В. Панова, А.В. Паньков (2017). *Математика 5-9 класи. Навчальні програми для загальноосвітніх навчальних закладів.*

<sup>15</sup> *Matematika kerettanterv az általános iskola 5-8. évfolyamára.* A kerettantervek kiadásának és jóváhagyásának rendjéről szóló 51/2012. (XII. 21.) számú EMMI rendelet 2. melléklete

- A matematikai szaknyelv megfelelő használatának, a jelölésrendszer helyes alkalmazásának fejlesztése írásban és szóban egyaránt.
- Megfelelő szemléltető ábrák, diagramok, grafikonok készítése, értelmezése, elemzése és felhasználása.
- Egyszerű szöveges feladatok megoldásának néhány stratégiájának elsajátítása, gyakorlati problémák leírása matematikai alakban, a probléma megoldását elősegítő modellek alkotása, becslési és ellenőrzési képességek fejlesztése.
- A tájékozódás fejlesztése síkban és térben, egyszerű síkbeli és térbeli alakzatok felismerése.
- Az érvelés, a cáfolás, a vitakészség, a helyes kommunikáció fejlesztése.

A két ország 5.-6. osztályos kerettanterveiben előírt tantervi követelményekben jelentős átfedések vannak. Hasonló fejlesztési célokat tűz ki mindkét tanterv a 6. osztály végére elsajátítandó ismeretek, jártasságok, készségek terén. Mindkét kerettanterv alapját a számfogalom, valamint a számítási és ábrázolási készségek fejlesztése képezi. Lényeges különbségek vannak azonban a pedagógus választási lehetőségét, a tananyag elrendezését és a súlypontokat illetően.

Kárpátalján a tanítást jelentősen meghatározzák a tankönyvek. A tankönyv szerepe meghatározó, mivel a tanmenetnek szigorúan alkalmazkodni kell a tankönyvhöz. Ukrajnában az Oktatási és Tudományos Minisztérium által jóváhagyott tankönyveket használhatjuk. A Kárpátaljai magyar iskolák az ukrán tankönyvek magyar nyelvre lefordított változatából, vagy ukrán nyelvű könyvből tanítanak. Ezekből általában egy vagy két tankönyv van, szemben a magyarországi választékkal.

A kísérletekben résztvevő osztályok tankönyvei a következők voltak:

- Тарасенкова Н.А., Богатирьова І.М., Бочко О.П., Коломієць О.М., Сердюк З.О. Математика: Підручник для 6 класу загальноосвітніх навчальних закладів.—Ч: Букрек, 2014.

- Мерзляк А.Г., Полонський В.Б., Якір М.С. Геометрія: Підручник для 7 класу загальноосвітніх навч. закладів.–Львів:Світ, 2015.
- Matematika Tankönyv 7. osztály. OFI Újgenerációs Tankönyv, ISBN 978-963-682-820-2. Oktatókutató és Fejlesztő Intézet, 2015.

A 1. függelékben felsorolom az általam lefordított ukrán tanterv, és a magyar nyelvű ukrainai tankönyv alapján az 5.-6. osztály számára előírt tananyagot. A jobb összehasonlíthatóság kedvéért a Magyarországon használatos témakörök szerinti besorolást követtem.

Mindkét felépítés a permanencia elv szerint halad a szám- és művelet fogalom felépítésében, a számkörbővítésben. Ugyanakkor éppen ebben a tananyagrészen jelenik meg a legtöbb különbség a két ország tananyag-elrendezésében. Az egyik legszembetűnőbb különbség a negatív számok bevezetése. Magyarországon már alsó tagozaton sor kerül a negatív számok tárgyalására gyakorlati életből vett példákon keresztül (pl. hőmérő), míg Kárpátalján erre csak közvetlenül a racionális számok tárgyalása előtt, 6. osztályban kerül sor. Itt kell megjegyezni azt is, hogy Ukrajnában a 0-át nem sorolják a természetes számok közé.

Egy másik ilyen témakör a tizedes törtekkel végzett másodrendű műveletek (szorzás, osztás). Kárpátalján már 5. osztály végén foglalkoznak a tizedestörtekkel való szorzással és osztással, ezzel ellentétben a magyarországi tankönyvek szerint csak 6. osztály elején kerül bevezetésre.

A számfogalom kialakulásának története, a római számírás tárgyalása nem szerepel az ukrainai követelményekben, a vizsgált tankönyvben csak közvetve jelenik meg a „Tudj meg többet” rovatban<sup>16</sup>. A többi 5. osztályos ukrán matematika tankönyvben is a tananyagon kívül említik, ezért feltételezhetően nem kap nagy hangsúlyt.

---

<sup>16</sup> Bár a kártyákon és a régi analóg órákon jelen vannak a római számok, de kevesebb helyen, mint Magyarországon (helyezések, kerület, ...).

A táblázatban dőlt betűvel jelöltem azt a törzsanyagon kívüli részt (kitekintés, ismeretbővítő), amit általában tanítani szoktam.

Nemcsak a tananyag mennyiségében, hanem a feldolgozás mélységében is van különbség a két ország gyakorlatában. Például a merőleges és párhuzamos egyenesek szerkesztése, meg általában a szerkesztésekkel az ukrain tankönyvek csak 7. osztály végén foglalkoznak (és akkor sem kötelező tananyagként), míg Magyarországon már 6. osztályos diákok oldanak ilyen szerkesztési feladatokat.

A matematikatanulásban jelentős helyet foglal el a szöveges feladatok megoldása. Ez szolgálja a tanulók logikus gondolkodásának fejlesztését, a matematikai ismeretek gyakorlati alkalmazásának szemléltetését, a modellalkotást. Ilyen feladatok a tanítási programokban szereplő összes témában előfordulnak.

Itt kell megemlíteni, hogy bár az ukrán tanrend szerint a halmazok tanítása nem tartozik az általános iskolák 5-6. osztályos tananyagához, a gimnázium helyi tantervében azonban az 5. osztályos matematika tananyag a halmazokkal való ismerkedéssel indul, előtérbe kerül a halmazszemlélet fejlesztés az ismeretek halmazokra épülő felépítésén keresztül.

Magyarországon dominánsabbak a gondolkodási módszerek fejlesztését támogató tananyagok, így például korábban kerülnek tárgyalásra a halmazelméleti vagy a kombinatorikai témakörök, míg Kárpátalján az aritmetikai műveletek, algebrai kifejezések, a betűk használata, a képletek alkalmazása hangsúlyosabb.

Vannak olyan elemek a magyar matematikaoktatásban, amelyeket az ukrán törvények betartása mellett is be lehet illeszteni a tanmenetbe. Például a magyar gyakorlatból vettem át a negatív szám megismerésekor (játékpénz, adósság-cédula) és a velük végzett művelet végzésekor (adósság-kézpénz,

kisautó) használt modelleket. Azt gondoltam, hogy többféle modell alkalmazása helyesebb fogalomhoz vezet, és jobban kötődik a matematikai ismeret a diák mindennapjaihoz.

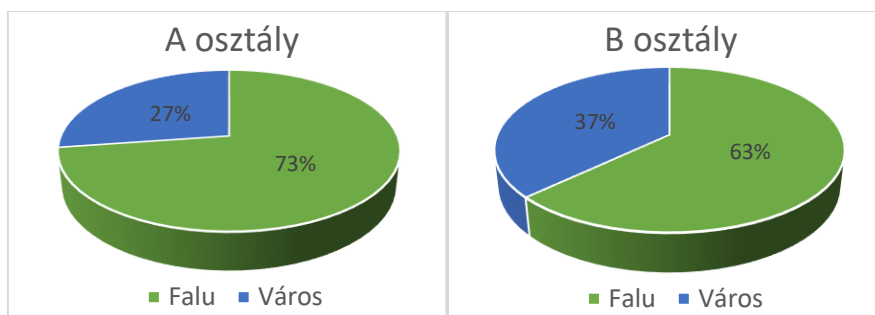
Kárpátalján az ukrán osztályozási rendszert használjuk, ahol az osztályzat 1-től 12-ig terjed, a 12-es a legjobb eredmény és a 4-es az elégséges osztályzat. Ennek átszámítását a Magyarországon használt hagyományos ötfokozatú skála szerint, a Felsőoktatási felvételi tájékoztató alapján, a 6. táblázat mutatja.

Százalékban	Ukrán értékelés	Minősítés	Felvi értékelés
8%	1	nem felelt meg	1
17%	2		
25%	3		2
33%	4		
42%	5	megfelelt	3
50%	6		
58%	7		
67%	8	jól megfelelt	4
75%	9		
83%	10	kiválóan megfelelt	5
92%	11		
100%	12		

6. táblázat. Az ukrainai és magyarországi osztályozási rendszer összehasonlítása

### A kísérlet alanyai

A vizsgálat a gimnázium két párhuzamos 2., illetve 3. osztályában folyt. Ez egy 7 osztályos gimnázium, amelybe felvételi eljárást követően kerülnek be a diákok. A tanulók beosztását a két párhuzamos (A és B) osztályba döntően a jelentkezők lakhelye határozza meg (az egy irányból utazók egy osztályba kerülnek). A felmérésben résztvevő diákok lakhelyének megoszlását a 14. ábra mutatja.



14. ábra. A felmérésben résztvevő diákok lakhelyének megoszlása.

A létszám osztályok és nemek szerinti megoszlását az 7. táblázat tartalmazza.

	Fiú	Lány	Létszám
A osztály	14	8	22
B osztály	15	12	27
Összesen:	29	20	49

7. táblázat. A kísérletben résztvevők osztályok és nemek szerinti megoszlása

A két osztályban igyekeztem mindent egyformán szervezni. A kísérletet megelőző évben is én tanítottam a matematikát mindkét osztályban, valamint a kísérlet során is én tanítottam őket. Így küszöböltem ki a személyi- és tanítási stílusból származó különbségeket és így nehezítettem meg a saját dolgomat is, mert különböző módon kellett a két osztályban tanítani. A kiválasztott osztályok egyike sem volt speciális képzési rendszerű. Egyik osztályban sem volt különleges elbánást igénylő tanuló.

A kísérletek a délelőtti iskolai foglalkozások keretében zajlottak, az osztály tanmenetéhez illeszkedő tartalommal. A két párhuzamos osztályban ugyanazt a tananyagot dolgoztuk fel megegyező tanmenettel, de más-más módszerrel. Az osztályok eredményessége közötti különbség (ha van ilyen) a matematikatanulási, tanítási módszerre vezethető vissza.

A tanítási kísérlet alatt a korábban említett tankönyveket használtuk az osztályokban (lásd 68. o.). A tankönyvhasználatot azért tartottam fontosnak, hogy a diákok egyéni akadályoztatás esetén tudjanak a tankönyv alapján velünk haladni.

A vizsgált három módszer (előhívásos, IKT támogatású, hagyományos) miatt ugyanaz az osztály hol kísérleti, hol kontroll szerepet töltött be. Az egész kísérlet alatt igyekeztem minden diákot kísérleti pozícióba hozni (a beosztástól függetlenül ugyanazon a feladatlapon dolgoztak, ugyanazokat a felmérőket írták). Az összehasonlítások során az egyik kísérletben az A osztály hagyományos módszerrel tanult és a B osztályban az – újra felfedezett – előhívásos tanulási módszert próbáltam ki. A másik kísérletben az A osztály kapott fokozott IKT támogatást és a B osztály tanult hagyományos módszerrel. Az IKT és az előhívásos módszer vizsgálatánál az A osztály kapott több IKT támogatást és a B osztály pedig előhívásos módszerrel tanult. A szereposztást befolyásolta, hogy a vizsgálati évben egyedül ezen az évfolyamon tanítottam párhuzamos osztályokat, s a két osztály közül az A osztály volt a kisebb létszámú, ami meghatározó volt az iskolai számítógépes labor befogadóképessége miatt.

#### **Az A és a B osztály felkészültségének összehasonlítása a kísérlet előtt**

- B1) A hatodik osztályos éveleji felmérő dolgozat alapján a két osztály között nincs számottevő különbség. A B osztály átlaga 7,57 az A osztályé pedig 7,64 (az eltérés 0,07, ami nincs 1%).
- B2) A hatodik évfolyamos első félévi matematika osztályzatok alapján a két osztály felkészültsége matematikából azonos. A B osztály átlaga 7,25 az A osztályé pedig 7,18 (az eltérés 0,07).
- B3) A hetedik osztályos éveleji felmérő dolgozat alapján a két osztály között nincs lényeges különbség sem hétköznapi, sem statisztikai értelemben (a kétmintás t-próba szerint a megegyezés valószínűsége  $p = 0,94$ ). Az A osztály átlaga 66,59%, a B osztályé pedig 67,20%.

#### **4.2. A kísérletek bemutatása**

A három kísérletet külön-külön mutatom be. Egy-egy kísérletnél röviden kitérek a kísérlet lefolyására, a felhasznált eszközök és módszerek bemutatására, valamint a kísérlet eredményeire.

#### 4.2.1. Előhívásos vs. hagyományos tanulási módszer a matematika órán, egy tanítási kísérlet

Két tanulási módszer hatékonyságát hasonlítottam össze. Az egyik az előhívásos vagy teszteléses tanulási módszer, amelynek során *ütemezett előhívással* támogatjuk az új ismeretek beépülését a tudáshálóba (lásd részletesebben 22. oldal). A másik, az úgynevezett *hagyományos módszer* azt jelenti, hogy ugyanúgy tanítom az osztályt, mint az előző évben, de az alkalmazott módszer, az előhívásos tanulási módszertől alapvetően abban különbözik, hogy a felejtés ellen ismétléssel, újratanulással küzdünk. Röviden ez az *ismétléses tanulási módszer*.

Az első, előhívásos vs. hagyományos kísérlet idején a diákok másodikos gimnazisták (12. életév) voltak.

A kísérlet 25 tanítási órában folyt, heti 4 órás bontásban, ebbe beleértendő két témazáró és egy összegző dolgozat is. A tananyag tanórák szerinti bontását tartalmazza a következő tanmenet (8. táblázat).

Óra	Téma
1.-6.	Racionális számok összeadása. Az összeadás tulajdonságai.
7.-12.	Racionális számok kivonása. Az kivonás tulajdonságai.
13.	Témazáró dolgozat: Különböző alakban megadott racionális számok összeadása és kivonása.
14.-18.	Racionális számok szorzása racionális számmal. A szorzás tulajdonságai.
19.-23.	Racionális számok osztása racionális számmal. Az osztás tulajdonságai.
24.	Témazáró dolgozat: Különböző alakban megadott racionális számok szorzása és osztása.
25.	Összegző dolgozat: A különböző alakban megadott racionális számok körében végzett négy művelet.

8. táblázat. Az első kísérlet tanmenete

A kísérlet folyamán a racionális számok körében végzett műveletek témakört dolgoztuk fel mindkét osztályban. Ez az anyagrészt a racionális

számok összeadását, kivonását, szorzását és osztását, valamint a műveletek elvégzésére vonatkozó szabályokat és a műveletek tulajdonságát tartalmazza.

A diákok ezt megelőzően tanulták a racionális számok írását, olvasását, összehasonlítását, ábrázolását a számegyenesen; a nemnegatív egész és tört számok közötti műveleteket; a számok ellentettjét és abszolútértékét.

#### **4.2.1.1. Az előhívásos vs. hagyományos tanítási kísérletben felhasznált eszközök és módszerek bemutatása**

Mivel nagyon sok közös eleme volt a két osztály tanulási-tanítási folyamatainak, ezért csak a különbségeket ismertetem elkülönítve.

Több szempontból is az volt a véleményem, hogy *a megszokott munkarend felborítása nélkül* alkalmazható az előhívásos tanulási módszer az iskolai matematikaoktatásban.

- Az óráimon eddig is jelen volt az előzetes teszt: „becsüld meg”, „tippeld meg”, „fogalmazd meg a sejtésedet”, ... Ezekben a „találgató” fázisokban nem lehet rossz választ adni (a rossz sejtésből is tanulunk).
- A rákérdezés, feleltetés, röpdolgozat a tanulási folyamat részévé tehető, hogy ne csupán mérje a tanulás eredményességét, hanem befolyásolja is azt.
- Az előhívás és a visszajelzés nem csak a sikerélmény, munkakedv miatt fontos, hanem – különösen a feleletválasztós teszteknel – az elraktározandó ismeret tartalmának és kapcsolatrendszerének kiigazítása szempontjából is.
- Nem tartom a saját tanítási stílusomtól távolinak azt, hogy egy látszat-ellenőrzés helyett (Értettétek? Rendben van?) valami olyat kérdezzek, vagy olyan feladatot tűzzek ki, ahol a válaszból kiderül, hogy célba érték-e a legfontosabb ismeretek, fogalmak, összefüggések, eljárások.

## A kísérleti osztály tanóráinak jellegzetességei

A kísérleti osztály diákjait az első órán tájékoztattam az óra végi számonkérésekről. Ezzel a céloom egyrészt az volt, hogy ne érje őket váratlanul, másrészt azt szerettem volna elérni, hogy ne hagyatkozzanak az ismételt tanulás lehetőségére, hanem használják ki az órát.

A kísérleti osztályban alkalmazott módszertani újítás az *előhívásos tanulási módszer* volt. Ez azt jelenti, hogy ütemezett előhívással támogatjuk az új tudáselem (ismeret, jártasság, készség) beépülését a tudáshálóba. Az ütemezett előhívás fázisai:

- *Első fázis, közvetlen előhívás.*

Ennek célja a félreértések tisztázása, a kapcsolatrendszer helyes bővítése. Ez közvetlenül az új anyag tanulása után az óra végén történt. Általában az órán elhangzott tananyaghoz kapcsolódó két feladatot adtam fel, egy elméleti és egy gyakorlati kérdést. Az előhívásnak ezt a fázisát, az óravégi közvetlen visszakérdezést „röpdolgozatnak” neveztük (lásd **Példa az óravégi tesztelésre**, 77. oldalon). Miután a diákok beadták a röpdolgozatokat megbeszéltük a válaszokat is, a következő óra elején pedig visszakapták a kijavított dolgozatokat. Ha a javítás során kiderült, hogy további tisztázni valók vannak, azt az óra elején megtettük.

Ahhoz, hogy komolyan vegyék a röpdolgozatokat, pontoztam és egy-egy témakör végén az órai munka értékeléseként az összpontszám alapján osztályzatot kaptak a diákok.

- *Második fázis, rövidtávú előhívás.*

A korai, de nem közvetlen előhívás a nemrég megtanult anyagnak a bővülő tudáshálóban való helyes elhelyezkedését támogatja. Rövidtávú előhívásnak számít például a hétvégére feladott házi feladat.

- *Harmadik fázis, középtávú előhívás.*

A nemrég tanult anyag alkalmazását, más tudásterületekkel való összekapcsolását segíti.

- *Negyedik fázis, hosszútávú előhívás.*

Az ütemezett előhívás negyedik lépcsője többrétű, időben és megvalósításban is változatos. Az évvégi ismétlés, a vizsgák, az érettségire, felvételigre való felkészülés is hosszútávú előhívás.

A mi kísérletünkben a dolgozat kérdései az aktuális anyag szempontjából rövid- és középtávú előhívást, más témaköröket felidéző feladatok szempontjából pedig hosszútávú előhívást jelentenek (spiralitás elve).

A két előhívásos kísérlet (előhívásos-hagyományos; előhívásos-IKT) utáni utóteszt például *késleltetett előhívás* volt.

### **Példa az óravégi tesztelésre**

Egy szokásos anyagrészen (racionális számok összeadásán) bemutatom, hogy milyen természetességgel lehet az előhívásos tanulási módszert beépíteni az órába. Tudni szerettem volna, hogy értik-e mi történik, ha egy adott számhoz egy negatív vagy egy pozitív számot adok. Még az óra vége előtt tisztázni akartam az esetleges tévedéseket, nehogy téves elképzelésekkel menjenek haza házi feladatot írni.

Jelen példában az elméleti kérdéshez „lyukas mondat” feladattípust választottam, hogy ne a megfogalmazásra kelljen vigyázni, hanem a lényegre koncentrálhassanak a diákok. A feladat lényege, hogy szavakban is meg kell fogalmazni az összeg változásait. Az órán szóban is megfogalmaztunk egy-egy szabályt, majd szóban és írásban is kipróbáltuk (kis számokkal), hogy érvényes-e.

1. Pótold a hiányzó szavakat úgy, hogy igaz állítást kapj!

- Pozitív szám hozzáadása növeli az összeget.
- Az összeg csökken, ha a 23-hoz negatív számot adunk.
- Negatív szám hozzáadása csökkenti az összeget.
- Az összeg nő, ha  $-47$ -hez pozitív számot adunk.

Az óravégi visszakerdezés második feladatában bemelegítésként az első sor feladványát hasonló értékekkel együtt megoldottuk: a csiga a 7. fokról indul, 2 fokot felmászik, a 9. fokra kerül, de 8-at lecsúszik, így a 1. fokra érkezik.

2. Figyeld meg a csiga mozgását (a táblázat vízszintes sorai) és egészítsd ki a táblázat hiányzó adatait a megfelelő számokkal!

Indul (fokról)	Felmászik (fokot)	Lecsúszik (fokot)	Érkezik (fokra)
8	1	6	3
-1	7	15	
-6		3	0
0	4		-2
	1	4	3

A feladat célirányos és visszafelé gondolkodást is igényel, valamint hiányos összeadást tartalmazó műveleteket tartalmaz az egész számokkal végzendő összeadás különböző eseteire.

Az előhívásos módszeren túl arra is alkalmas az óravégi röpdolgozat, hogy lássam a tisztázatlan részleteket, tudjam, mire kell a következő órán visszatérni. Ebben az esetben különösen nagy szerepe volt. Ugyanis a röpdolgozatot 27 diák írta meg, átlagosan 6 pontot értek el, ami 63%-os megoldottságot jelent. 13 diák 70% felett töltötte ki a feladatlapot, közülük 5 diák hibátlanul. Több diák számára is nehézséget okozott a 2. feladat, 3 tanuló nem értette meg a feladatot, 4 tanuló pedig csak az első sort töltötte ki helyesen. Az eredmények tükrében a következő órán visszatértünk rá.

Házi feladatként a liftes modell segítségével kis egész számokkal megfogalmazott összeadásokat és kivonásokat tűztem ki.

### A kontroll osztály tanóráinak jellegzetességei

A kontroll osztályban nem volt ütemezett előhívás, a tanulók maguktól hajlottak az ismétléses tanulásra (majd megnézem, majd kikeresem, stb.),

bár ugyanúgy tanítottam őket, mint a korábbi években. Az összehasonlításnál a különbségeket az előhívásos és nem előhívásos (ismételt) tanulási módszerek hatásának tulajdonítjuk.

A tananyag megismerése ugyanolyan módszerekkel, taneszközökkel és segédeszközökkel folyt, mint a kísérleti osztályban, de az óravégi ismétlés, összefoglalás tanári rendszerezéssel történt. Az új anyag feldolgozása után (2-3 óránként) tudáspróba típusú feladatlappal (részletesebben lásd a 25. o.) mértük a tananyag elsajátításának szintjét. A négy alpművelet feldolgozása után ugyanazt az összegző dolgozatot írta mindkét osztály.

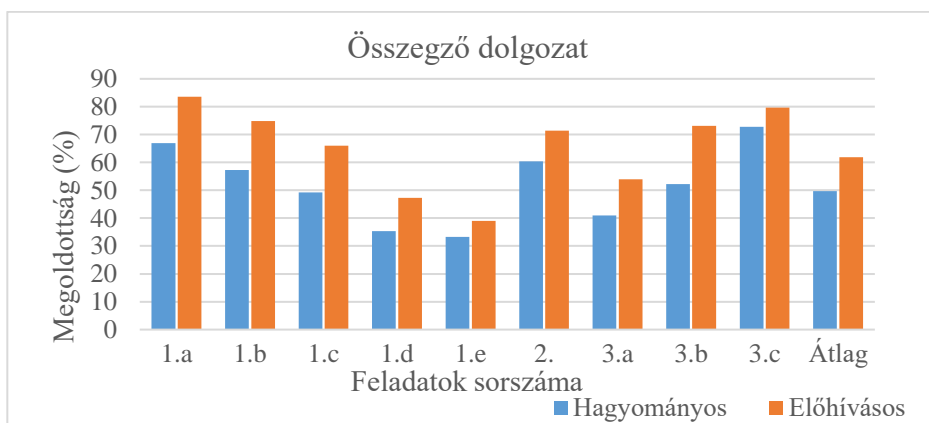
#### 4.2.1.2. Az előhívásos vs. hagyományos tanítási kísérlet eredményei

A módszer hatékonyságának vizsgálatához a K1) és K2) mutatókat használtam.

K1) Az osztályok teljesítményének összehasonlítása a tudásszintmérő feladatlappal megírt összegző dolgozat alapján (t-próbával).

A kísérlet befejezésekor mindkét osztály *ugyanazt a tudásszintmérő feladatlappal* írta. A dolgozat feladatainak megoldottságát százalékos megoszlásban az 15. ábra mutatja. Az elért teljesítmények feladatonként és diákonként a 3. függelékben található.

A feladatlappal kitöltésére 45 perc állt rendelkezésre. A feladatokat a magyarországi és ukrainai középiskolai tankönyvekből válogattam, részben átalakítva azokat. A dolgozat megtalálható a 2. függelékben.



15. ábra. Az összegző dolgozatban szereplő feladatok megoldottsága.

A grafikonról is látható, hogy a kísérleti osztály teljesítménye minden feladatnál jobb, mint a kontrollosztályé. A dolgozatok két mintás t-próba szerinti összehasonlítás alapján ez a különbség  $p = 0,049$ . A kísérlet hatását a Cohen-féle d-mutatóval jellemezve egy közepes kísérleti hatást fejez ki, értéke  $d = 0,59$ .

Az első feladatban a négy alpműveletet kértem számon más-más alaphalmaz fölött (1.a-1.e, lásd 9. táblázat).

1. Számítsd ki!

a)  $3,2 : (-0,8) + (-4,8) : 0,8 =$   
 $3,2 : (-0,8) = 32 : (-8) = -4$   
 $(-4,8) : 0,8 = -48 : 8 = -6$   
 $-4 + (-6) = -10$

b)  $-8,5 : (4,6 - 6,3) =$   
 $4,6 - 6,3 = -(6,3 - 4,6) = -1,7$   
 $-8,5 : (-1,7) = 85 : 17 = 5$

c)  $0,4 \cdot (-250) \cdot 5 \cdot (-0,2) =$   
 egy lehetséges megoldás:  
 $0,4 \cdot (-250) = -100$   
 $5 \cdot (-0,2) = -1$   
 $-100 \cdot (-1) = 100$

d)  $-0,65 - (-0,44) + (-1,23) + 8,1 =$   
 egyik lehetséges megoldás:  
 $-0,65 + 0,44 - 1,23 + 8,1 = (-0,65 - 1,23) + (0,44 + 8,1) =$   
 $= -1,88 + 8,54 = 8,54 - 1,88 = 6,66$

egy másik lehetséges megoldás:  
 $-0,65 - (-0,44) = -0,65 + 0,44 = -0,21$   
 $-0,21 + (-1,23) = -0,21 - 1,23 = -1,44$   
 $-1,44 + 8,1 = 8,1 - 1,44 = 6,66$

e)  $\left(4\frac{2}{3} - 4,8\right) : \left(\frac{5}{9} - \frac{1}{12}\right) =$   
 egy lehetséges megoldás:  
 $4\frac{2}{3} - 4,8 = 4\frac{2}{3} - 4\frac{8}{10} = 4\frac{20}{30} - 4\frac{24}{30} = -\frac{4}{30} = -\frac{2}{15}$   
 $\frac{5}{9} - \frac{1}{12} = \frac{20}{36} - \frac{3}{36} = \frac{17}{36}$   
 $-\frac{2}{15} : \frac{17}{36} = -\frac{2}{15} \cdot \frac{36}{17} = -\frac{24}{85}$

9. táblázat. Az 1. feladat néhány megoldása

Szembetűnő, hogy az 1.e példa mindkét osztály számára nehéz feladatnak bizonyult (kísérleti 39%, kontroll 33%). Ez arra enged következtetni, hogy a tanulók még nem gyakorolták be kellő módon a racionális számok különböző alakjaival végezett műveleteket. Ez a feladat volt a legösszetettebb a feladatsorban. A diákok harmada hozzá sem kezdett a feladathoz. Vélhetően a különböző nevezőjű törtek kivonása, közös nevező, osztás túl nehéz volt több diák számára.

A kontroll osztály számára nehéznek bizonyult az 1.d példa is (35%). Ez a feladat a kísérleti osztály számára is közepesen nehéz volt, de ők valamivel jobb eredményt értek el (47%). A mínusz jel (–) több szerepben is előfordul: negatív előjel, kivonás, ellentett, ami zavaró lehetett néhány diák számára. A tanulók megoldásaiból az látszik, hogy nem értik, hogy ugyanaz a kifejezés összegnek és különbségnek is tekinthető.

Az előjeles mennyiségek reprezentációjához számos modellt kipróbáltam a magyarországi és az ukrajnai tankönyvek alapján (előre – hátra, illetve le – fel haladás; hideg – meleg; lehülés – melegedés; adósság – vagyon). Ezek közül legkövetkezetesebben a függőleges irányú emelkedést-süllyedést kezelték a diákok, ezért a késleltetett visszakerdezés második feladatában is ezt a modellt használtam. A 2. feladat megoldását az 10. táblázat tartalmazza.

2. A Poszeidón tengeralattjáró –300 méteren lebeg, majd gyakorlás céljából négy egyenlő szakaszban a felszínre emelkedik. Milyen mélységeken fog tartózkodni az egyes emelkedési szakaszok után?

$$-300:4 = -75$$

$$1. \text{ szint. } -300 - (-75) = -225$$

$$2. \text{ szint. } -225 - (-75) = -150$$

$$3. \text{ szint. } -150 - (-75) = -75$$

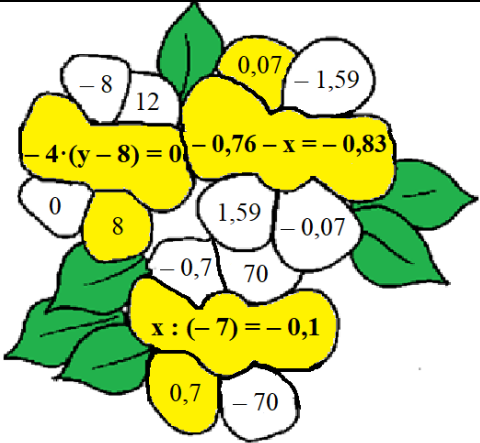
$$4. \text{ szint. } -75 - (-75) = 0$$

*10. táblázat. A 2. feladat megoldása*

Ebben a feladatban az értelmezés jelenthette a legnagyobb gondot mindkét osztály számára. Aki rákmódszerrel a felszíntől indult, az sikeresen megoldotta a feladatot. A kísérleti osztályból 4 diák, míg a kontroll osztályból

3 diák nem tudta meghatározni, hogy mekkorák a szakaszok. Több diáknak nehézséget okozott, hogy a negatív kiindulási szintből negatív számot vonjon ki az egyes emelkedési szint meghatározásához (kísérleti 26%, kontroll 41%). Ennek ellenére a feladat megoldottságából az is látszik, hogy ez egy közepesen nehéz feladat, amely optimális kihívás a jobb diákok számára.

A 3. feladatban a különböző előjelű tizedestörteket is tartalmazó elsőfokú egyismeretlenes egyenletek megoldását kértem számon (11. táblázat). Az a) és b) részfeladat szokásos egyenletmegoldás, míg a c) feladat feleletválasztós volt.

<p>a) <math>-5 \cdot (x - 7) = 27</math>  <math>(x - 7) = 27 : (-5)</math>  <math>x - 7 = -5,4</math>  <math>x = -5,4 + 7</math>  <math>x = 1,6</math></p> <p>Ellenőrzés:  <math>-5 \cdot (1,6 - 7) = -8 + 35 = 27</math></p>	<p>b) <math>x \cdot (-10) = 3,4</math>  <math>x = 3,4 : (-10)</math>  <math>x = -0,34</math></p> <p>Ellenőrzés:  <math>-0,34 \cdot (-10) = 3,4</math></p>
<p>c)</p> 	

11. táblázat. A 3. feladat megoldásai

A 3.b részfeladatban lett legnagyobb a különbség a két osztály teljesítményében (kísérleti 73%, kontroll 52%). A leggyakoribb hiba az „ekvivalens átalakításban” volt, valamint a 10-zel való osztás szabályának téves alkalmazása.

A kísérleti osztály az 1.a feladatban érte el a legjobb átlageredményt (83,6%) és ebben a feladatban lett az eltérés a legkisebb a két osztály között, a kontrollosztály 66,88%-ra teljesített.

A feladatok megoldottságát tekintve elmondható, hogy a kísérleti osztály minden feladatrészben jobb eredményt ért el (átlagosan 61,85 %), míg a kontrollosztály átlagosan 49,68 %-os teljesítményt nyújtott. A feladatsorban kimondottan nehéz (30% alatti megoldottságú) feladat nem volt. A kísérleti osztály számára az 1.a, 1.b, 2., 3.b és 3.c könnyű (70% fölötti megoldottságú) feladat volt, míg a kontroll osztálynál csak egy ilyen volt, a 3.c feladat. A többi közepesen nehéz feladat volt.

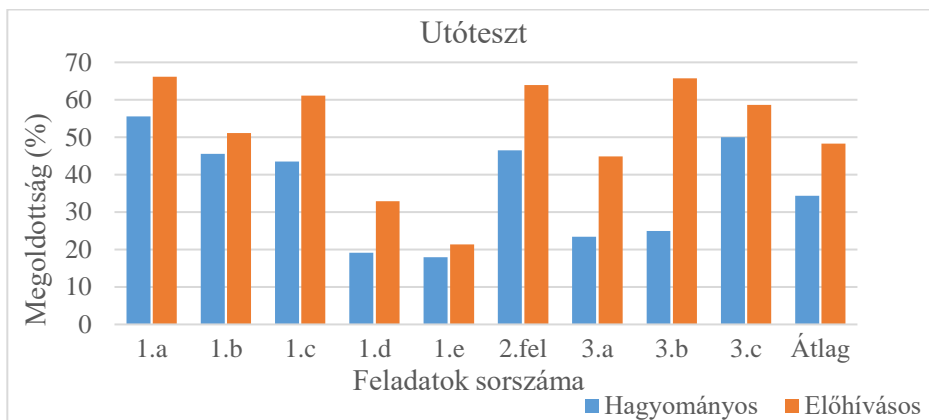
Meg kell jegyezni, hogy ebből a témából mindkét osztály gyengébb teljesítményt nyújtott, mint az az eddigi jegyeik alapján elvárható lett volna. Ennek egyik oka az lehetett, hogy a korábban tanult, de még nem biztosan elsajátított anyagot is alkalmazni kellett összetett feladatokban (törtekkel végzett műveletek, egyenletek megoldása). Viszonylag sok számolási hibát vétettek.

*Összességében megállapítható az összegző dolgozat minden feladatában jobban teljesített az előhívásos tanulási módszer szerint dolgozó osztály.*

K2) Összehasonlítás az utóteszt pontszáma alapján. A kísérlet befejezése után öt hónappal egy utóteszt alapján a teljesítmények összehasonlítása az osztályok között, illetve a saját korábbi eredményeikkel (t-próbával).

A két tanulási módszer hosszútávú hatását a kísérlet után öt hónappal írt utóteszt alapján hasonlítottuk össze, amelyre közvetlenül a nyári szünet után, a következő tanév szeptemberében került sor. Az utóteszt feladatai az összegző dolgozat feladataihoz hasonlóak voltak. Kiértékeléskor csak annak a 45 diáknak az eredményeit vettem számításba, akik mindkét dolgozatot megírták.

A feladatokra kapott pontszámok a 3. függelékben találhatóak. A következő grafikonon az utóteszt feladatainak megoldottságát ábrázoltuk.



16. ábra. Az utóteszt feladatainak megoldottsága.

A grafikon alapján látható, hogy az előhívásos módszer szerint tanuló diákok – korábbi teljesítményüktől függetlenül – minden részfeladatnál magasabb pontszámot értek el, mint a kontrollosztályba járók, a két mintás t-próba szerinti összehasonlítás alapján ez a különbség  $p = 0,047$ . A kísérleti hatás értéke  $d = 0,63$ . Az utóteszt eredményei alapján a kísérleti osztály diákjainál 13,54 %-os teljesítménycsökkenés, míg a kontrollosztályban az eleve alacsonyabb szintről nagyobb, 15,31 %-os csökkenés történt, tehát az olló tovább nyílt.

Utólag jó választásnak bizonyult a racionális számokkal végzett műveletek témakör az *előhívásos tanulási módszer* (lásd 22. oldal) előnyeinek megmutatásához.

*Megállapítható, hogy az előhívásos tanulási módszerrel tartósabb tudás szerezhető, a felejtés mértéke kisebb.*

### **Az előhívásos vs. hagyományos tanítási kísérlet további észrevételei**

(1) Az előhívásos tanulási módszer kezdetben enyhe ellenkezést váltott ki a diákokból azzal, hogy minden órán dolgozatot kell írni. Az elfogadást megkönnyítette az a tapasztalat, hogy

- egyszerűbben elintézhető a következő órai felkészülés;
  - az előhívás pozitív visszajelzésének hatására magabiztosabbak lettek;
  - megtanultak gyorsabban és pontosabban válaszolni a kérdésekre akkor is, ha a valós életből származó problémákról van szó.
- (2) Az előhívásos tanulási módszer egyéb *pozitívuma*, hogy javította a munkafegyelmet, hiszen a közvetlen előhívásra számítva vettek részt a diákok az órán.
- (3) Bebizonyosodott, hogy az előhívásos módszer nem csupán méri a tanulás eredményességét, hanem befolyásolja is azt. A teljesítmény kimutatható növekedése mellett jelentős az előhívásos módszer hatása a tanulási szokásokra, a saját tudásuk értékelésére (lásd a 83., illetve a 90. o.).
- (4) Az osztályok teljesítmény szerinti átrendeződése

Az egyéni változások vizsgálatához a diákokat tercilis segítségével gyenge (34% alatt), közepes (34-66 %) és jó (66% fölött) teljesítményű csoportokra osztottam<sup>17</sup>. Az 12. táblázat az egyes kategóriákat, illetve azok átrendeződését mutatja.

		gyenge (fő)	közepes (fő)	jó (fő)
Előmérés	kontroll	0	15	7
	kísérleti	3	17	8
Záróteszt	kontroll	4	13	5
	kísérleti	3	12	12
Utóteszt	kontroll	10	6	2
	kísérleti	7	11	9

12. táblázat. A két osztály teljesítményének átrendeződése.

Látható, hogy az előmérésnél mindkét osztályban voltak közepes- és jó kategóriába tartozó diákok. A kontroll osztályban kezdetben nem volt gyenge, de az utótesztben már tízen kerültek ebbe a kategóriába a közepesek és a jók rovására. A kísérleti osztályban is átrendeződtek a kategóriák, a közepesek rovására a jók száma nőtt, de a gyengék száma is.

<sup>17</sup> Nem osztályzatokat, hanem minősítést használok, mert az osztályozási rendszer Ukrajnában és Magyarországon eltérő.

Mindkét osztálynak voltak nehézségei, ami azt bizonyítja, hogy rögzös út vezet a racionális szám fogalmának kialakulása felé. A racionális számokkal végzett műveletek témaköre egyrészt azért nehezebb, mint az eddigié volt, mert nem egy egyszerű szabály alkalmazására van szükség, hanem még konkrét számok esetén is meg kell állapítani, hogy melyik szabály érvényes az adott műveletre (például a különböző előjelű racionális számok összeadásakor a nagyobb abszolútértékűből vonjuk ki a kisebb abszolútértékűt) és csak utána alkalmazhatja a kiválasztott szabályt. Emellett egy adott racionális szám sokféle alakban (tizedes tört, közösleges tört) jelenik meg, az osztás műveleti jele és a törtvonal váltakozik, ráadásul különböző előjelű számokra vonatkozik. Már a törtek egyszerűsítése és bővítése által képezett ekvivalencia osztályok sem mentek könnyen, de most még a (véges, vegyes, szakaszos) tizedes törtekkel is bővültek ezek az osztályok. Egy-egy feladat megoldásához a számokról és műveletekről felhalmozott összes tudását mozgósítani kell.

*Megállapítható, hogy a nehéz tananyag hatására mindkét osztályban növekedett a gyengébben teljesítő tanulók száma. Míg a hagyományos osztályban ez a jók és közepesek rovására történt, a kísérleti osztály inkább polarizálódott.*

- (5) A rövidtávú számonkérésben helyenként megmutatkozó jobb teljesítménytől eltekintve nem tapasztaltam olyan mozzanatot, amely a hagyományos módszer előnyét támasztotta volna alá. Ez várható volt, mert igyekeztem a hagyományos tanulási módszerbe úgy beilleszteni az előhívásos tanulást, hogy ne feszítse szét annak kereteit.
- (6) Ebben a kísérletben nem helyeztem a szokásosnál nagyobb hangsúlyt az IKT támogatásra, mert nem akartam, hogy összekeveredjenek a módszerek hatásai. (Persze az óra előkészítésére (pl.: feladatlap készítésre, szemléltetésre (kivetítő) használtam az informatikai eszközöket. Informatika szakosként talán nagyobb mértékben is, mint kollégáim szokták.)

Még több támogatást nyújthatna az IKT a tanulási-tanítási folyamat hatékonyságának növelésében akár hagyományos, akár digitalizált módon zajló tanulási folyamat mérésének, értékelésének, teljesítmény visszajelzésének digitális feldolgozásában. Például az ütemezett előhívás részeként adott házi feladatokat jobban a tanulási folyamat szolgálatába lehetne állítani, ha az egyes feladatok megoldását nem csak a diákok hasonlítanák össze a „hivatalos” megoldással, hanem a tanártól személyre szóló visszajelzést is kapnának (digitalizált feladatlap).

A javítással járó többletmunka megtérül, mert így a tanár az osztály szempontjából is át tudja tekinteni, hogy mennyire ért célba a mondani-valója és mire kell még visszatérnie.

Az első kísérlet tapasztalatai alapján a második kísérletben már igyekeztem élni ezzel a lehetőséggel, bár az igazi digitális feladatlapokra, illetve a megoldások elektronikus leadásában komoly akadály a diákok eszköz- és internetellátottságának egyenetlensége (a pandémia előtt ez a jelenleginél is nagyobb volt).

#### **4.2.2. Az előhívásos és az IKT támogatású tanulási módszer a matematika órán**

Korábbi osztályaimban már próbálkoztam célirányos IKT támogatással és úgy tapasztaltam – más kutatók is úgy vélekedtek –, hogy másként hallgatja az órát az a diák, aki tudja, hogy az óra után megkapja az előadás anyagát ppt., pdf. és egyéb IKT-s megoldások formájában. Hiszen ezek a segédanyagok a tanulás elhalasztása, az ismételt tanulás irányába terelik a diákokat.

A második kísérletben a matematikatanulási, tanítási folyamatának hatékonyságát vizsgálom az előhívásos módszerrel tanuló (B), illetve a fokozott IKT támogatással tanított (A) osztályokban.

Alkalmam adódott összehasonlítani az én két Ukrajnában tanuló magyar anyanyelvű osztályom és egy Magyarországon, budapesti általános iskolában tanuló osztály teljesítményét.

A magyarországi diákokkal egyrészt azért gondoltam összehasonlítani, hogy összevegyem, mennyit teljesítenek a tananyagból más osztályok, akik ezt tanulják. Másrészt a kárpátaljai magyar tanulók a magyarországi magyar gyerekekkel hasonlítják össze a teljesítményüket, éppen ezért teljesen természetes, hogy mi is ezt tesszük. Ugyanakkor a magyarországi általános 7. osztályban van az első olyan követelményszint, amit össze lehet hasonlítani a kárpátaljai második gimnáziumi osztállyal.

A második kísérletben ugyanazok a kárpátaljai diákok vettek részt, mint az első kísérletben (másodikos gimnazisták, 12. életév, 6. évfolyamosok), a magyarországi diákok az általános iskola 7. osztályába jártak, a matematikát emelt óraszámú tanulták (7 fiú, 7 lány).

A kísérlet időtartama 16 matematika tanóra volt, heti 4 órás bontásban. A tananyag tanórák szerinti bontását tartalmazza a következő tanmenet.

Óra	Téma
1.	Két egyenes kölcsönös helyzete a síkon. Merőleges és párhuzamos egyenesek.
2.	Merőleges és párhuzamos egyenesek rajzolása derékszögű vonalzóval.
3.	Feladatok megoldása feladatlapokkal.
4.	Pont és egyenes távolsága. Párhuzamos egyenesek távolsága.
5.	Feladatok megoldása feladatlapokkal.
6.	Téglalap, négyzet.
7.	Tételek, merőleges és párhuzamos síkok. Téglalest, kocka.
8.	Feladatok megoldása feladatlapokkal.
9.	Kitérő egyenesek.
10.	Helymeghatározás matematikaórán.
11.-12.	A koordináta-rendszer. A derékszögű koordináta-rendszer. Pontok ábrázolása a derékszögű koordináta-rendszer.
13.	Feladatok megoldása feladatlapokkal.
14.	Táblázatok, grafikonok készítése és olvasása.
15.	Feladatok megoldása feladatlapokkal.
16.	Témazáró dolgozat geometriából.

*13 táblázat. A második kísérlet tanmenete*

A tananyag középpontjában a merőleges és párhuzamos egyenesek, valamint a koordinátás tanulmányozása állt. A helyes fogalomalkotáshoz az előírt tananyagot szélesebb körben értelmeztük, a diákok életkori sajátosságait figyelembe véve bővítettük a korábbi és a későbbi évek tananyagából választott problémákkal.

A tanmenet szerinti óraszámot 4 órával növeltem a tananyag átcsoportosításával. Így foglalkozhattunk a párhuzamosság és merőlegesség fogalmának térbeli kiterjesztésével is. A 4 órát a következő anyagrésze fordítottam:

- Ponthalmazok távolsága (pont és egyenes, párhuzamos és metsző egyenesek távolsága);
- Téglalap és négyzet oldalai, mint a párhuzamosság és merőlegesség prototípusai a síkban;
- Párhuzamos és merőleges síkok. Téglatest és a kocka lapjai, mint a párhuzamosság és merőlegesség prototípusai a térben;
- Kitérő egyenesek.

Mint egymáshoz kapcsolódó és egymásra épülő alakzatok együttes megismerése, a velük kapcsolatos fogalmak párhuzamos fejlesztése révén szerettem volna, hogy a tanulók a mindennapi tapasztalataikhoz kapcsolódó, helyesen elrendezett képet, kapcsolatrendszert alakítsanak ki és jegyezzenek meg. Ezzel is segítve az új fogalmak beépítését a már meglévő tudáshálóba.

A magyarországi diákok a tanár, Rózsahegyi Eszter elmondása szerint a hasonló feldolgozásban tanulták a tananyagot.

#### **4.2.2.1. Az előhívásos és az IKT-s tanítási kísérletben felhasznált eszközök és módszerek bemutatása**

Mindkét osztály számára a tanulók életkorának, matematikai előismereteinek és a spirálitás elvének megfelelő munkalapokat állítottam össze. Egyrészt ezzel elősegítve a visszajelzést a részteljesítményekről, másrészt segítve a tanulók jegyzetelését, fejlesztve ezáltal az önálló feladatmegoldó

készségeiket is. Az órák után a feladatlapokat összegyűjtöttem, így folyamatosan figyelemmel tudtam kísérni az osztály és a diákok egyéni fejlődését is.

A tanórák során nem választottuk külön „az új anyag átadása, a gyakorlás, a számonkérés” fázisokat, hanem feladatorientáltan haladtunk a tananyaggal, a feladatok megoldása által szereztek a diákok új ismereteket. Ha közben mégis kiderült, hogy a feltételezett előismeret feledésbe merült, akkor azt megbeszéltük.

A papír alapú feladatlapon rögzíteni kellett az interaktív tábla (IKT-s osztály), illetve tanári magyarázat által szerzett (előhívásos osztály) tapasztalatokat. Mindkét osztályban törekedtem arra, hogy egy új fogalom bevezetésekor alkalmazásra is lássanak példát a diákok.

Mindkét osztályban volt óravégi összefoglalás. Az IKT-s osztályban a tanár foglalta össze az anyagot interaktív modulok segítségével, az előhívásos osztályban óravégi röpdolgozattal valósult meg a *közvetlen előhívás*.

### **Egy tanóra kétféle (IKT vs. előhívás) feldolgozásban**

Megpróbálom érzékeltetni, hogy mit jelentett számomra ugyanannak a tananyagnak két különböző módszer (IKT vs. előhívás) szerinti megvalósítása.

*Az óra témája: Téglatest, kocka. Párhuzamos és merőleges síkok.*

*Az óra célja: Geometriai fogalmak kiterjesztése három dimenzióra. Párhuzamosság és merőlegesség a térben. A téglatestek mélyebb megismerése.*

#### **Óravázlat**

A 16 órából álló tanítási egység 7. órája. Az órán feldolgozott tananyag újdonság az ukrainai tantervhez képest.

- 1) merőleges és párhuzamos egyenesek felismerése ábrán, a környezetben;
- 2) amit a kockáról és a téglatestről már tudunk;
- 3) párhuzamos és merőleges síkok a kockán és a téglatesten (modellen, dobókocka, gyufásdoboz);
- 4) párhuzamos és merőleges síkok a kockán és a téglatesten (megadott ábrákon);

- 5) párhuzamos és merőleges síkok a kockán és a téglatesten (saját ábrán);
- 6) két (végtelen) sík kölcsönös helyzete;
- 7) gyakorló feladatok megoldása közösen;
- 8) önálló feladatmegoldás – mindkét osztályban közös – feladatlapon.

### Jellegzetes különbségek a megvalósításban

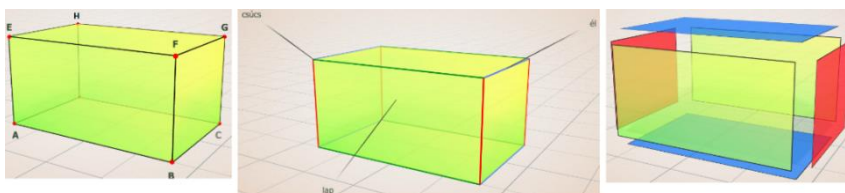
Az *IKT-s osztályban* az óra elején a párhuzamosság és merőlegesség ismétléséhez az 17. ábrán látható interaktív feladatot a diákokkal együtt oldottuk meg okostáblán.



17. ábra. Ismétlő feladat a párhuzamosság és merőlegesség témában.

A feladatban megadott ábrákat kellett szétválogatni aszerint, hogy tartalmaz-e párhuzamos vagy merőleges egyeneseket, illetve mindkettőt. Feladatmegoldás közben a diákok szavakkal is indokolták, mi alapján sorolták be egyik vagy másik kategóriába az alakzatot, és megbeszéltük, hogy azok valóban ráillenek-e a kiválasztott elemre.

Az új anyag feldolgozásához első lépésként összegyűjtöttük az eddigi ismereteiket a téglatestről és a kockáról. Ehhez felhasználtuk a Mozaik Kiadó interaktív 3D modelljét ([Téglatest](#), illetve [Kocka](#)). Irányított kérdésekkel frontális osztálymunkában beazonosítottuk és jellemeztük a téglatest alkotóelemeit. (A táblaképeket a 18. ábra képernyőkivágásai érzékeltetik.) Ezután a diákok kézhez kapták az órai feladatlapon (10. függelék).



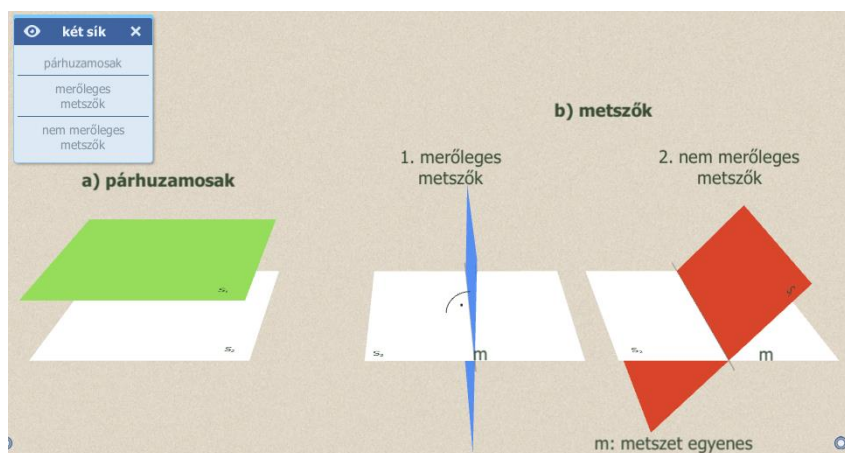
18. ábra. A [téglatest 3D](#) modelljének képernyőkivágásai.

A további vizsgálatokat a GeoGebra munkalap segítségével végeztük (<https://www.geogebra.org/m/jpeerwxb>). A síkok párhuzamosságát és merőlegességét a téglatest és a kocka szemközti, illetve szomszédos lapjaival demonstráltuk.

Miközben én a kocka lapjain bemutattam a párhuzamos és merőleges síkokat, a diákoknak önállóan kellett az 1. feladatban szereplő téglatest élvázis ábrájának felhasználásával leírni a párhuzamos és merőleges lapokat.

Az általánosítás felé haladva megvizsgáltuk a téglatest lapjaira illeszkedő síkokat az interaktív táblára kivetített SuliNet ábráinak (lásd [A téglatest síkjai](#)) felhasználásával. Végül a Mozaik Kiadó [3D modelljén](#) két (végtelen) síkkal szemléltettük a párhuzamosságot és merőlegességet (lásd 19. ábra).

A feladatlpra felírtuk a meghatározásokat szöveges megfogalmazással és szimbolikus jelöléssel ( $\parallel$ ,  $\perp$ ). Azt is megbeszéltük, hogy hány részre osztják az ábrán szereplő síkok a teret.



19. ábra. [Két sík kölcsönös helyzetét szemléltető 3D modelljének képernyőkivágásai](#).

A feladatlap 2. feladatában arra kértem a diákokat, hogy keressenek párhuzamos és merőleges síkokat a környezetükben (a tanteremben). A diákok párban dolgoztak, egy perc alatt kellett minél több példát feljegyezni a feladatlpra. Az idő leteltkor az első páros felolvasta, hogy miket gyűjtött össze. Amit többen is feljegyeztek azt jelölték a feladatlapon. Tovább folytatva a felolvasást eljutottunk odáig, hogy már nem volt mit megjelölni. Az nyert, akinek a legtöbb jelöletlen példája volt. Gyakori válaszok voltak: *plafon és padló, szemben lévő falak, szekrény oldalai, a matek könyv eleje és háta*. Minden diák megoldásában szerepelt a padló és a mennyezet (plafon), mint az Euklideszi sík egyik modellje. Ezt felhasználva azt a feladatot adtam a diákoknak, hogy határozzák meg: a tanteremnek hány párhuzamos és hány merőleges lappárja van.

A feladatlap 3. feladatában azt az utasítást kapták a diákok, hogy keressenek párhuzamos lapátlókat a megadott ábrákon. A téglalap és a négyzet vizsgálatok már beszéltünk az átló fogalmáról, mint a szemközti csúcsokat összekötő szakasz. Ezen az órán pedig bevezettük a *lapátló* és a *testátló* fogalmát, mint a téglatest oldallapjára illeszkedő és nem oldallapra illeszkedő átlók. Mielőtt a diákok önállóan megoldották volna ezt a feladatot, az NKP okos tankönyv feladatát (lásd [Lapátló, testátló](#)) közösen oldottuk meg interaktív táblán.

Az óra hátra lévő részében a diákok önállóan dolgoztak a feladatlapon, de közvetlen szomszédaikkal meg is beszélhették a problémát, illetve az eredményt. A munka alatt folyamatosan figyeltem a diákokat, és ahol szükséges volt, ott segitettem. Az 5. és még két ehhez kapcsolódó feladatot a Mozaik Kiadó feladattárából (lásd [Téglatest \(feladatok\)](#)) az interaktív táblánál oldották meg a diákok.

Utolsó feladatnak mindig egy nehezebb, összetettebb és több ötletet, gondolkodást igénylő feladatot tűztem ki, amit szorgalmi feladatnak szántam, akár órán, akár házi feladatként került rá sor.

*Az előhívásos osztályban* az óra elején különböző alakzatok vizsgálatával átismételtük az egyenesek párhuzamosságát és a merőlegességét. Kerestünk a tanteremben olyan tárgyakat, melyek tartalmazznak párhuzamos és/vagy merőleges egyeneseket, valamint a táblára rajzolt alakzatokról el kellett dönteni, hogy milyen helyzetűek az alkotóelemeik.

Az új anyag bevezetéséhez felelevenítettük a diákok eddigi ismereteit a kockáról és a téglatestről frontális osztálymunkában, kérdés-válasz formában. Ehhez tárgyakat, modelleket és hagyományos táblai rajzot használtunk. Ezután kiosztottam az órai feladatlapot, ami az IKT-s osztály feladatlapjával azonos és a 10. függelékben található.

A kocka lapjait, mint párhuzamos és merőleges síkokat hagyományos táblai rajzzal szemléltettem. Ez alapján kellett a diákoknak a 1. feladatban szereplő téglatest élvázis ábráján a megadott lappal párhuzamos és adott lapra merőleges síklapokat keresni.

Az általánosításhoz, valamint a sík végtelenségének szemléltetéséhez a szertári kocka oldallapjaira illesztett tankönyvvel, illetve nyomtatott ábrákkal illusztráltam. Végül két (végtelen) sík kölcsönös helyzetének vizsgálatához a feladatlapon szereplő ábrát használtuk, melyet kiegészítettünk a meghatározások szöveges megfogalmazásával és a párhuzamos, illetve a merőleges reláció matematikai jelölésével ( $\parallel$ ,  $\perp$ ) is. Azt is megbeszéltük, hogy hány részre osztják az ábrán szereplő síkok a teret.

A feladatlap 2. feladatát az IKT-s osztállyal megegyező módon, páros munkában dolgozták fel.

A feladatlap 3. feladatát szintén hagyományos táblai rajzzal szemléltettem. Ebben a feladatban a kocka és a téglatest élvázis ábráján kellett a diákoknak párhuzamos lapátlókat megadni. Az átló fogalma már ismert volt a diákok számára. A kocka élvázisán ábrázolva bevezettük a *lapátló* és *testátló* fogalmát, amit a diákoknak a téglatest élvázisán hasonló módon kellett bejelölni.

Az óra hátra lévő részében a diákok önállóan dolgoztak a feladatlapon, de közvetlen szomszédaikkal is összedolgozhattak. A munka alatt folyamatosan figyeltem a diákokat, és ahol szükséges volt, ott segítettem.

Az óravégi visszakerdezésben két feladat szerepelt (lásd 14. táblázat), az első a tanult fogalmak ismeretére, a második az alkalmazásra vonatkozott. Az 1. feladatban az órán tanult síklapokkal határolt testekre és a síkra vonatkozó állítások igaz-hamis voltáról kellett dönteni. A 2. feladatban egy téglatest élvázis ábráját kellett megvizsgálni és az állításokról eldönteni, melyik merőleges és melyik párhuzamos helyzetű.

1. Döntsd el az alábbi állításokról, hogy *igaz* (I) vagy *hamis* (H)!

Igaz

a) A kocka szemközti lapjai párhuzamosak.

Igaz

b) A kocka két lapja vagy párhuzamos, vagy merőleges.

Hamis

c) Két sík a teret oszthatja 5 részre.

Hamis

d) A kocka két szomszédos lapja párhuzamos.

Hamis

e) A kocka lapsíkjai a teret 9 részre osztják.

Hamis

f) A kocka lapsíkjai a teret 16 részre bontják.

Igaz

g) Két sík a teret oszthatja 3 részre.

Igaz

h) Ha egy síkban két egyenes nem metszi egymást, akkor párhuzamosak.

Hamis

i) A kocka szemközti lapjai merőlegesek.

Igaz

j) A kocka egy lapja a kocka 4 másik lapjára merőleges.

Igaz

k) A kocka két szomszédos lapja merőleges.

2. Az ábrán egy téglatest vázát látod! Döntsd el az alábbi állításokról melyik *merőleges* és melyik *párhuzamos* helyzetű.

a) a DC és HG él kölcsönös helyzete Párhuzamos

b) a CB és DC él kölcsönös helyzete Merőleges

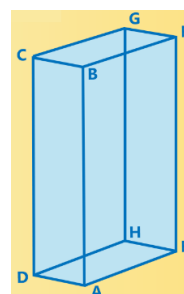
c) az FG és AD él kölcsönös helyzete Párhuzamos

d) az ABFE és DCGH lap kölcsönös helyzete Párhuzamos

e) az EFGH és DAEH lap kölcsönös helyzete Merőleges

f) az AE és CG él kölcsönös helyzete Párhuzamos

g) az DHGC és FBCG lap kölcsönös helyzete Merőleges



14. táblázat. A röpdolgozat feladatai az előhívásos osztályban.

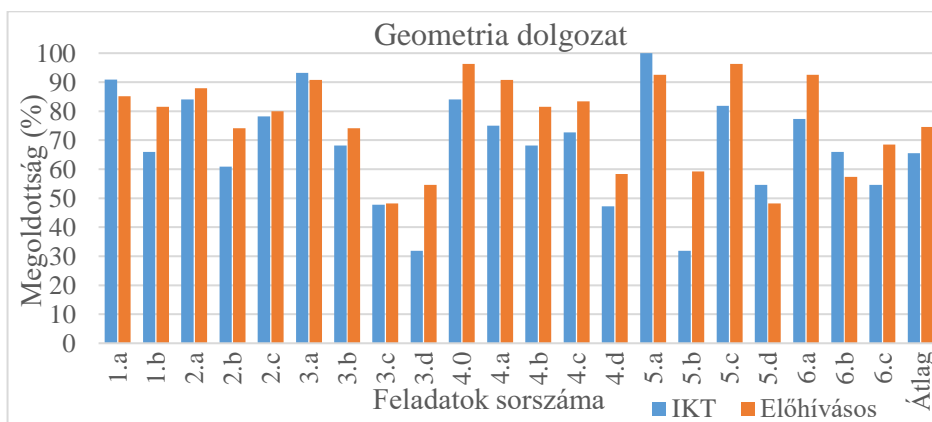
#### 4.2.2.2. Az előhívásos és az IKT-s osztályok eredményei

Az előhívásos és a fokozott IKT támogatású osztályok eredményességét egymáshoz, egy magyarországi osztályhoz és korábbi teljesítményükhöz hasonlítottam. A módszerek hatékonyságának vizsgálatához a K3) és K5) kimeneti mérések eredményeit használtam.

K3) Az előhívásos és a fokozott IKT támogatású osztályok teljesítményének összehasonlítása az egyforma, tudásszintmérő feladatlap pontszámai alapján, t-próbával történt.

A feladatlapok kitöltésére 45 perc állt rendelkezésre. A feladatokat a magyarországi és ukrainai középiskolai tankönyvekből válogattam. A dolgozat feladatsora megtalálható a 6. függelékben.

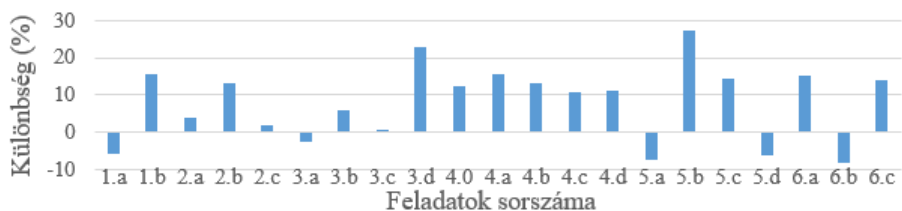
A feladatok megoldottságának százalékos eloszlásának osztályonkénti összehasonlítását az 20. ábra mutatja. Az elért pontszámok feladatonként és diákonként a 7. függelékben található.



20. ábra. A geometria dolgozatban szereplő feladatok megoldottsága.

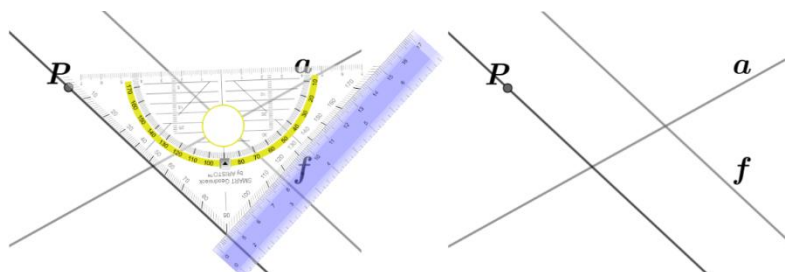
Az 20. ábráról leolvasható, hogy nincs nagy eltérés a két osztály teljesítménye között. (Homogén mintáról van szó, így kétmintás t-próbát végeztem, amely szerint a különbség nem szignifikáns,  $p = 0,15$ ).

A 20 íte mből öt olyan van (1.a, 3.a, 5.a, 5.d és 6.b), amelyben az IKT-s osztály eredménye jobb lett, mint az előhívásosé (a különbségeket lásd a 21. ábrán). Az elemzésben főként ezek magyarázatára térek ki.



21. ábra. A geometria dolgozatban szereplő feladatok megoldottságának különbsége feladatonként.

Az 1.a feladatrészben a párhuzamosságra vonatkozó több összekapcsolt feltételnek megfelelő egyenes megrajzolása volt a feladat vonalzócsúsztatással (adott ponton átmenő, párhuzamos, adott színű). A feladat megoldásához szükséges, hogy a diák készségszinten tudjon párhuzamost rajzolni. A feladatra adott válaszokból következtetni lehetett a megoldás gondolatmenetére (a próbálkozások, javítások nyomai a rajzlapon). A feladat megoldásához szükséges lépéseket az IKT-s osztály a 22. ábrán látható módon tanulta. A kép mindvégig tartalmazza a két vonalzót, csak a végeredmény megmutatásához vettem le.



22. ábra. Az 1.a feladatrész megoldásának szemléltetése Smartboardon.

A két módszer eredményessége közötti különbség magyarázatát abban látom, hogy az előhívásos osztályban alkalmazott hagyományos tanári vonalzó és a diákok vonalzója nagyon különböznek egymástól. A beazonosítást, az egyenes és derékszögű vonalzók szerepének megkülönböztetését nehezítette, hogy egyforma színű a két vonalzó. Az IKT-s osztályban az okostáblán bemutatott eljárás során jobban látható volt a mozdulatsor, egyértelműbb volt, hogy melyik vonalzó hová kerül, és mire

kell figyelni, amikor odaillesztjük. Ez a különbség különösen a párhuzamos húzásánál mutatkozott meg.

A 3. feladat a), b), c) feladatrészében nem volt lényeges különbség a két osztály eredménye között, az a) részben egy kicsit jobb lett az IKT-s osztály teljesítménye. Ebben a feladatban a manipulatív (pontok megkeresése az azonosításához), az ikonikus (bele is rajzolhat) és a szimbolikus (a megfelelő szakaszok betűkkel való azonosítása) reprezentációk használata is szükséges. A 3. feladat és megoldása a 15. táblázatban található.

<p>3. Add meg az ábrán látható téglatest azon éleit, amelyek</p> <p>a) az AD éllel párhuzamosak: <u>EH, FG, BC</u></p> <p>b) az AD élt metszik: <u>AE, HD, CD, AB</u></p> <p>c) az AD élhez kitérők: <u>EF, HG, FB, GC</u></p> <p>d) Nevezd meg a téglatest lapátloít alkotó szakaszokat végpontjaikkal: <u>AF, EB, FC, BG, HC, DG, ED, AH, AC, DB, EG, HF</u></p>	
--	--

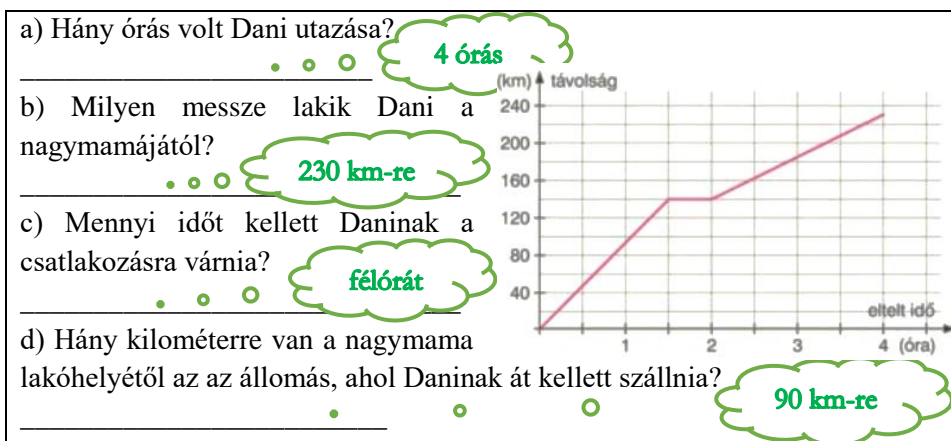
15. táblázat. Az 3. feladat és megoldása

Úgy vélem, hogy a konkrét-manipulatív szemléltetés egy összetett ábra értelmezésében eredményesebben segít, ezt támasztja alá az előhívásos osztálynak a 3.d feladatrészben elért viszonylag magas pontszáma.

Annak ellenére, hogy az 5. feladat összesített eredménye alapján az előhívásos osztály kb. 7%-kal jobb, ráadásul az 5.b részfeladatban mutatkozott a legnagyobb különbség az egész dolgozatra nézve, mégis az IKT-s osztály ért el jobb eredményt az a) és d) részfeladatokban.

Egy szituációhoz kötött grafikont kellett elemezni. Az a) és c) feladatrészben a vízszintes, míg a b) és d) feladatrészben a függőleges tengelyről kellett a megfelelő értékeket leolvasni. A pontozást a magyarországi kompetenciamérés módszere szerint végeztem. Az a) részfeladatban akkor is megadtam a pontot, ha a vonatozással és a pihenéssel töltött időt külön adta meg a tanuló. A d) feladatrészre adott válaszoknál azt is pontoztam, ha a b) részfeladatban megadott rossz válasszal helyesen számolt a diák.

A feladatot és megoldását az 16. táblázat tartalmazza.



16. táblázat. Az 5. feladat és megoldása

Az 5. feladat elemzése: Az a) részfeladatban a vizsgált osztályok tanulói sikeresen leolvasták a grafikonról a kért adatokat (IKT-s 100%, előhívásos 92,59%). A b) feladatrészben az IKT-s osztályban adott válaszokból látható, hogy mindenki megértette a feladatot és a megfelelő tengelyről olvasta le a távolságot és a lépésközöket is jól meghatározta, de 15 diák nem számolt azzal, hogy nem rácspontról van szó. Az eltérést az ábra pontatlanságának tekintette és egész számot adott meg. A feladatban az is zavaró lehetett, hogy az értéket általában az y tengelyről kell leolvasni, ennél a feladatnál pedig mindkét irányból való leolvasási kompetenciát mértük. Az IKT eszközökön nincs olyan nagy különbség a két tengely között, a koordináta-rendszer megjelenése tökéletesebb, mint a füzetben, feladatlapon vagy a könyvben, még akkor is, ha a könyvbéli koordináta-rendszer van kivetítve. Ennek következtében a kelletténél kevesebb figyelmet kap az egyes tengelyek felirata és beosztása. A c) részfeladatban a várakozás időtartamának leolvasása mindkét osztályban 80% feletti megoldottsággal könnyűnek bizonyult. Érdekes, hogy bár az időtengely mértékegysége órában volt feltüntetve, a diákok többsége mégis percben

adta meg a választ. A d) feladatrészben a hátralévő útszakasz meghatározásához nézőpontváltás, visszafelé következtetés szükséges. Itt az IKT-s osztály jobb eredményt ért el. Úgy tűnik, hogy az okos tábla használ a műveletek és a gondolatmenet megfordításának (rákmódszer).

A 6. feladatot és megoldását a 17. táblázat tartalmazza.

6. Lili egy baráti összejövetelre fánkot süt. Úgy tervezi, hogy mindenki három fánkot kap.

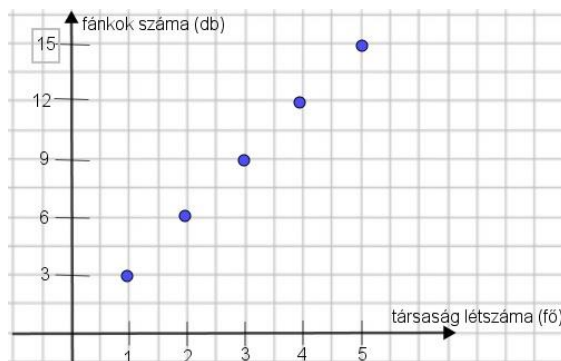
a) Hány darabot kell sütnie, ha a társaság 1, 2, 3, 4, 5 tagú? Válaszodat írd a táblázatba!

társaság létszáma	1	2	3	4	5
fánkok száma (db)	3	6	9	12	15

b) Milyen összefüggés van a társaság létszáma és a fánkok száma között?

**egyenes arányosság**

c) Ábrázold grafikonon az összetartozó értékeket!



17. táblázat. Az 6. feladat és megoldása

A 6. feladat b) részében is jobb lett az IKT-s osztály eredménye. Itt a feladatban szereplő mennyiségek közötti összefüggés szöveges megfogalmazását vártam a diákoktól. Az IKT jobban bátorítja a diákokat a gondolataik kifejezésére, az interaktív táblával támogatott környezetben a diákok aktívabban vettek részt az órai párbeszédekben, ami a válaszokban is megmutatkozik. Az előhívásos osztályban több diák is üresen hagyta ezt a feladatrészt.

A 6. feladat a) részben mindkét osztály megoldottsági mutatója magas, de mind az összetartozó mennyiségek megtalálása és azok táblázatos

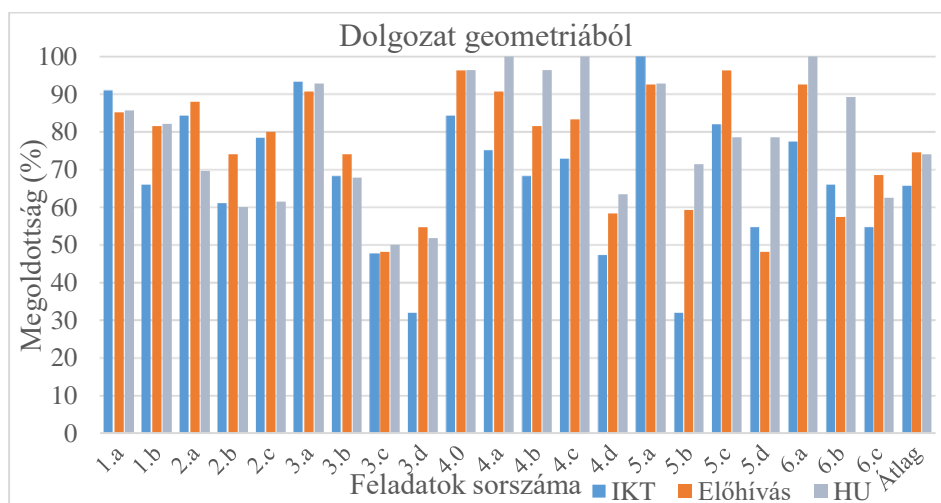
megadása (6.a), mind azok grafikonon való ábrázolása (6.c) az előhívásos osztályban sikeresebb volt. Ebből is látszik, hogy az IKT eszközök tanórai használata nem minden tanulási mozzanatra optimális, vagy nekem nem sikerült a legjobb alátámasztást megtalálni. Az IKT támogatásnak hátránya, hogy túl sok minden jelenik meg egyszerre, és ha a tanár határozza meg a haladási tempót és a látvány telítettségét, akkor nem alkalmazkodik a tananyag a fogalomfejlődés lépcsőjéhez.

Az IKT-s eszközökkel segített osztály dolgozatban elért átlaga 65,54%, az előhívásos tanulási módszerrel tanuló osztály átlaga 74,55%. A két kárpátaljai osztálynál az eltérés 9,01%, ami a kétmintás t-próba eredménye szerint nem szignifikáns eltérés, csak tendenciáról van szó.

*Megállapítható, hogy a feladatok többségénél az előhívásos tanulási módszer hatása kedvezőbb.*

K5) A kárpátaljai és a magyarországi diákok teljesítményének összehasonlítása.

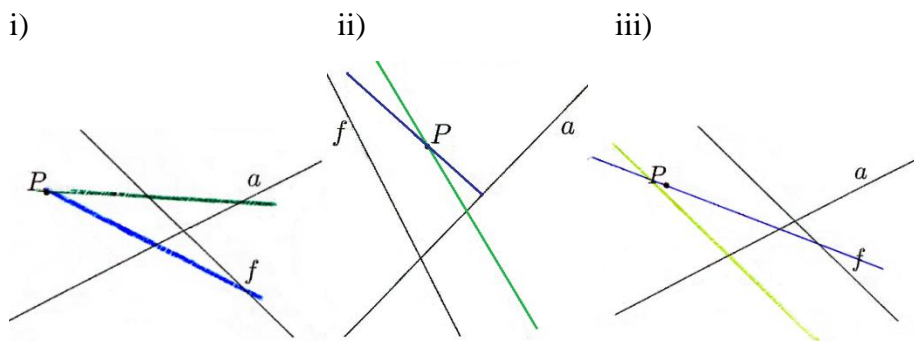
A kísérlet befejezéseként a két kárpátaljai osztály és egy magyarországi általános iskola 7. osztályosai *ugyanazt a dolgozatot* írták. A 23. ábra osztályonként és feladatonként szemlélteti a megoldottságot.



23. ábra. A dolgozatban szereplő feladatok megoldottsága

Meglepő, hogy viszonylag sok helyen együtt mozog az előhívásos módszerrel tanított 6. osztály és az emelt óraszámú 7. osztály teljesítménye.

Az 1.a feladatrésznél a 63 vizsgált diák közül mindenki elkezdte a megoldást, minden feladatlapon található rajzkezdemények.



24. ábra. Az 1.a feladatrész diákmegoldásai (1 feltétel teljesül).

A 24. ábrán három tipikus hibát mutatunk be:

- i) Az egyenes átmegy a P ponton, de nem párhuzamos egyik megadott egyenessel sem (magyarországi osztályból 1, az IKT-s osztályból 2, az előhívásos osztályból pedig 4 tanuló követte el ezt a hibát).
- ii) Az egyenes átmegy a P ponton, de pontatlanul van a „párhuzamos” rajzolva (ilyen hiba 1 IKT-s, 1 magyarországi és 3 előhívásos tanulónál jelent meg).
- iii) Az egyenes párhuzamos a megadott egyenessel, de nem megy át a P ponton (1 IKT-s, 1 előhívásos diák megoldásában figyelhető meg). A rajzokból látszik, hogy ismeri és tudja alkalmazni a párhuzamos rajzolásának lépéseit, de gyakorlatlan az eszközhasználat terén.

Ezek a tanulók ugyan elkezdték megoldani a feladatot, tudják is, hogy mit kellene csinálni, de ügyetlenül bánnak a vonalzóval. A magyarországi tanulók közül ketten nem a feladatban kitűzött egyenessel húztak párhuzamost. A többi diák hibátlanul oldotta meg a feladatot.

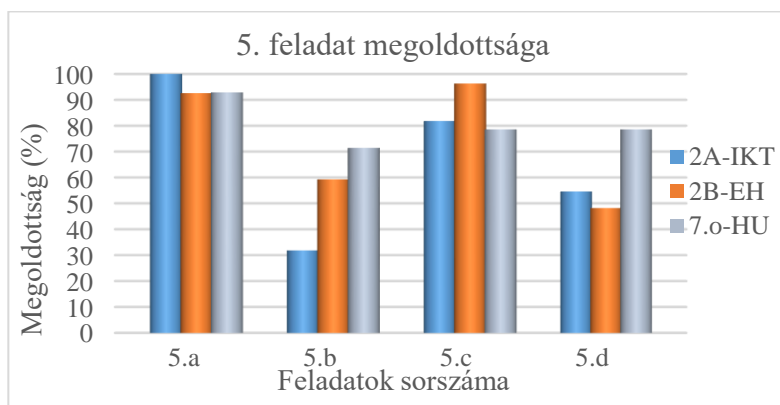
Az interaktív táblával segített tanulás-tanítás eredményességét támasztja alá az, hogy a hibátlan megoldások aránya (mindkét feltétel teljesül) az IKT-s osztályban nagyobb (82%), mint a másik két tanítási módszer esetén (előhívásos 70%, magyarországi 71%).

Egyértelműen jobb teljesítményt nyújtottak a 2. feladatban a kárpátaljai osztályok, különösen az előhívásos osztály.

A 3. feladat a)-c) feladatrészeiben együtt mozog a három osztály teljesítménye. Mindhárom osztály, különösen az IKT-s osztály számára, nehézséget jelentett a lapátlók leolvasása és szakaszokkal való megadása (3.d feladat, IKT-s 32%, előhívásos 55%, magyarországi 52%). Az IKT-s osztályból 7 diák, az előhívásos osztályból 9 diák, míg a magyarországi tanulók közül 5 hagyta üresen a feladatot.

Természetes, hogy a koordinátarendszerben biztonságosabban mozognak a 7. osztályosok (4. a-c feladat). Ahol már a kerület, terület is kérdés volt (4.d feladatrész), ott is közepesen nehéznek bizonyult a feladat.

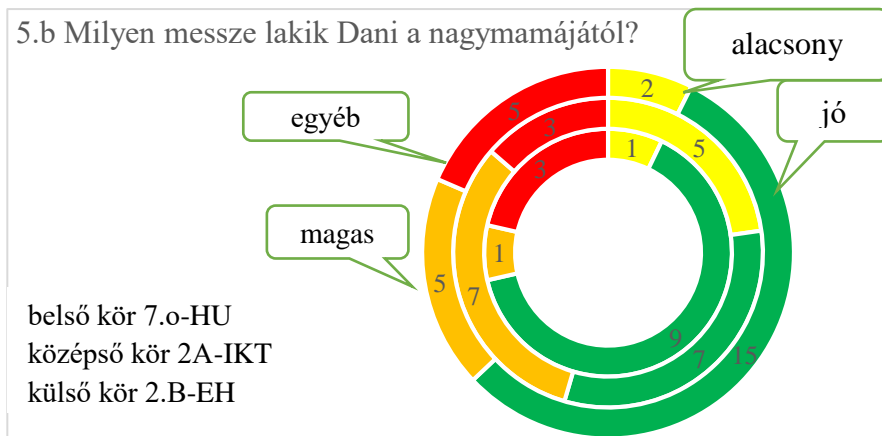
Az 5. feladat megoldottsági mutatóit mindhárom vizsgált osztályban a 25. ábra szemlélteti.



25. ábra. Az 5. feladat megoldottsága a vizsgált osztályokban.  
EH= előhívásos, IKT= IKT támogatott, HU= magyar diákok

A magyarországi osztály is ugyanolyan magas teljesítményt ért el az 5.a feladatrészben, mint a kárpátaljaiak (92,86%), közülük ketten időegységben adták meg a választ (véltetően nem jól értelmezték a feladatot).

Az 5.b részben adott helyes válaszok és az előforduló jellegzetes hibák eloszlását szemlélteti a 26. ábra.



26. ábra. Helyes válaszok és tipikus hibák eloszlása az 5.b feladatrészben.  
EH= előhívásos, IKT= IKT támogatott, HU= magyar diákok

Hibatípusok:

- helyes megoldás
- helyes lépésköz, de alacsonyabb érték leolvasása
- helyes lépésköz, de magasabb érték leolvasása
- egyéb (235, 225, 239 km)

A 25. ábrán látható, hogy az 5.d feladattípus (visszafelé gondolkodás) a magyarországi tanulók számára ismertebb, így a teljesítményük 15-20%-kal jobb, mint a kárpátaljai osztályoké.

A 6.b feladatrész szöveges leírást kér, ami láthatóan könnyebb a magyarországi diákok számára.

Összességében a kárpátaljai előhívásos 6. osztály eredménye nem rosszabb, mint a magyarországi hagyományos módszerrel tanított 7. osztályé. A két osztály között nem volt szignifikáns különbség.

*Megállapítható, hogy az osztályok nemcsak az összehasonlíthatóság szempontjából, hanem az eredményesség szempontjából is megegyeznek.*

A két kárpátaljai osztály teljesítmény szerinti átrendeződését a hatodik osztályos 2. félévi és 1. félévi matematika osztályzatainak összehasonlításával vizsgáltam.

Az egyéni változások elemzéséhez a diákokat tercilis segítségével gyenge (34% alatt), közepes (34-66 %) és jó (66% fölött) teljesítményű csoportokra osztottam. Az 18. táblázat az egyes kategóriákat, illetve azok átrendeződését mutatja.

		gyenge (fő)	közepes (fő)	jó (fő)
IKT-s osztály	1. félévi	0	15	7
	2. félévi	3	14	5
Előhívásos osztály	1. félévi	4	15	8
	2. félévi	1	18	8

*18. táblázat. A két osztály teljesítményének összehasonlító táblázata*

Látható, hogy kezdetben mindkét osztályban voltak közepes- és jó kategóriába tartozó diákok. Az IKT-s osztályban félévkor nem volt gyenge, de az év végére hárman kerültek ebbe a kategóriába a közepesek és a jók rovására. Az IKT olyan követelmények elé állította ezt a 3 gyereket, amit nem tudtak teljesíteni. Az IKT-s osztályban változatlanul jelen van az ismételt tanulás irányba való toródás.

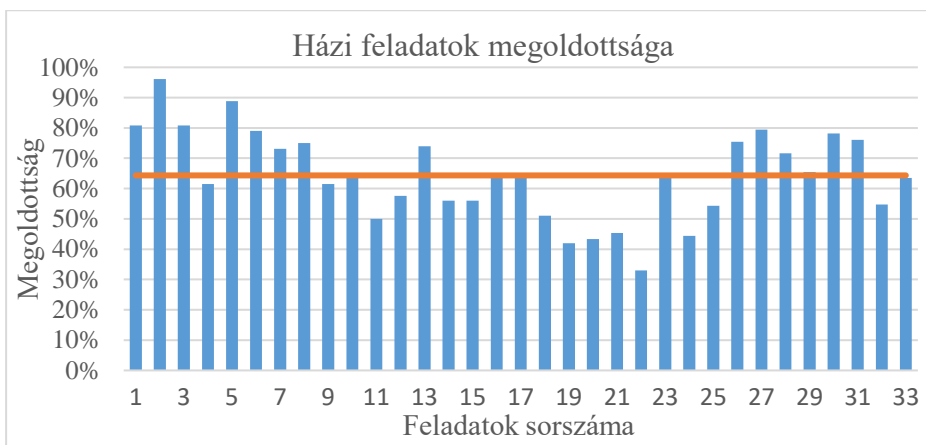
Az előhívásos osztályban is átrendeződtek a kategóriák. Az előhívásos tanulási módszer a gyengéknek segített, nőtt a közepesek száma, a jók száma változatlan maradt. A módszer a jóknak se nem ártott, se nem használt a teljesítmény szempontjából.

Az IKT-s osztály a tananyagot túl elsajátította az alkalmazott eszközök és programok használatát, ami az eredményekben nem tükröződő tudástöbbletet ad és ennek ellenére nem romlott szignifikánsan a tanulmányi eredményük.

Az előhívásos osztályban nem zavarta meg a matematika órai munkát és a teljesítő képességet az, hogy minden órán dolgotat kellett írni.

### **Az ütemezett előhívás második fázisa**

Az előhívásos tanulási módszer szerint tanuló osztály rendszeresen kapott beadandó házi feladatokat. Ezek megoldottságát a 27. ábra szemlélteti.



27. ábra. A beadott házi feladatok megoldottsága az előhívásos módszerrel tanuló osztályban.

A diákok teljesítménye a házi feladatok megoldása során átlagosan 64% volt, amit az ábrán a vízszintes szakasz szemléltet.

Legnehezebbnek bizonyult a 22. házi feladat, amit 33%-os megoldottsággal teljesített az osztály. A feladat b) részében egy szövegesen meghatározott alakzatot kellett felülnézetből és oldalnézetből ábrázolni. A felülnézet csak akkor segít az oldalnézet elkészítésében, ha beazonosítja a diák az egyes oszlopokat. Még így is a megszokottnál nagyobb képzelőerőt igényel a diákoktól, mert a felülnézetet általában nagyon speciális állásban (papírral párhuzamos oldallal) rajzolják a tanulók és ez előképzettség nélkül nagyon nehézé teszi a b) feladat megoldását, ez a feladatrész majdnem minden diáknak problémát jelentett.

Egy 2 méter oldalhosszúságú négyzet mindegyik csúcsában áll egy-egy oszlop. Két szemközti oszlop magassága egyenlő, mindkettő 4 méter magas. A másik két szemközti oszlop 1 méter, illetve 5 méter magas. A két-két szemközti oszlop teteje között kifeszítettek egy-egy kötelet.

a) Milyen helyzetű ez a két kötel?

**Felelet:** \_\_\_\_\_

b) Rajzold le felülről és oldalról a négy oszlopot és a két kifeszített kötelet!

**Kitérő**

28. ábra. A 22. házi feladat megoldása.

A 19. házi feladat megoldásában szintén átlag alatti, de valamivel jobb (42%-os) eredménnyel teljesített az osztály.

Egy 64 cm hosszú pálcát 8 cm hosszúságú darabokra kell felválni. A fűrészeléshez egyszerre több darabot is befoghatunk a satuba. Legkevesebb hány vágással tudnád megoldani a darabolást?

A vágások száma: 3

Rövid indoklás: Félbevágjuk a pálcát, a két 32 cm hosszú darabot egyszerre vágjuk félbe, harmadszorra pedig a négy darab 16 cm hosszú darabot ismét egyszerre vágjuk félbe.

29. ábra. 19. házi feladat megoldása.

A 8 darab előállítás indoklással

- 7 vágás: egyenként levág 8 cm-t;
- 6 vágás: egyszer egyszerre két darabot vág;
- 5 vágás: kétszer egyszerre két darabot vág vagy egyszerre hármat;
- 4 vágás: felez, összefogva negyedel, a negyedeket 1-3 vagy 2-2 összefogással felezi el;
- 3 vágás: felez, összefogva negyedel, összefogva nyolcadol.

A feladatra adott válaszok mindegyike hiányos, ha nem 3 a legkevesebb vágás. Mégis megkülönböztettem a pontozásban a magyarázattal és magyarázat nélkül adott válaszokat. Teljes megoldás csak az indoklással adott „3” vágás. A válaszok jellegét a 19. táblázatban foglaltam össze.

A 8 vágáshoz tartozó 5 válasz teljesen védhetetlen, hiszen 8 vágással minimum 9 darabot állítunk elő.

	8 vágás	6 vágás	4 vágás	3 vágás	üres
Válasz	5	1	4	4	5
Válasz magyarázattal, illetve indoklással	0	1	2	<b>3</b>	
Összesen:	5	2	6	7	5

19. táblázat. A 19. házi feladatra adott diákválaszok

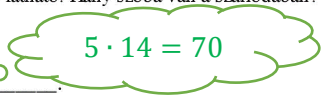
Látható, hogy mindössze 7 diák adott helyes választ a feladatra, és ebből 3 tanuló meg is tudta indokolni. A tanulók többsége megértette, hogy 8 darab 8 cm-es kis pálcára van szükség. Elő is állították, de a minimális vágásszámot nem találták meg. Azok, akik rájöttek, hogy a 7 szükséges vágásból többet egyszerre is el lehet végezni, azok már a problémamegoldás egyik stratégiai elemét megtalálták, de azt nem gondolták meg, hogy legjobban akkor járnak, ha feleznek, negyedelnek, nyolcadolnak és az összes egyforma darabot összefogják.

Ez a feladat a problémamegoldás kategóriába tartozik, ami nálunk egy átlag matematika órán ritkábban kerül elő, de szemmel láthatóan szükség van a problémamegoldási készség fejlesztésére. Ezért igyekeztem minden órán egy-két problémát, szöveges feladványt megoldani a diákokkal.

A 20. házi feladatban egy 3 oldalú hasáb összes kitérő élpárjának megadása volt a feladat, 43%-os megoldottsággal teljesítette az osztály. A tananyag szempontjából fontosabb részt lényegében mindenki megoldotta. 2 diák válasza nem volt értékelhető, a többi tanuló által megadott élpárok helyesek voltak, volt aki 10 élpárt adott meg, de senki sem találta meg mind a 12-t.

A 24. házi feladat a matematikai ismereteken túl szövegértési készséget is mér, 44%-os megoldottsággal sikerült az osztálynak teljesíteni. Az újonnan szerzett tudást, a tájékozódást egy elképzelt élethelyzetben kellett alkalmazni úgy, hogy az adatok szövegesen voltak megadva.

Egy Balaton-parti ötemeletes szálloda minden ablaka a vízre néz. A földszinten nincsenek szobák, és minden szobának egy ablaka van. Panni a 105-ös szoba, vagyis az első emelet ötödik ablakából, Matyi pedig az 510-es szoba, vagyis az ötödik emelet tizedik ablakából nézi a Balatont. A partról nézve Panni az épület bal oldalától az ötödik, Matyi pedig a jobb oldalától az ötödik ablakban látható. Hány szoba van a szállodában? A válasz előtt a megoldáshoz készítsd el a szálloda rajzát!


$$5 \cdot 14 = 70$$

A szobák száma: \_\_\_\_\_

30. ábra. A 24. házi feladat megoldása.

A feladatot 7-en üresen hagyták és további 5 diák eredménytelenül próbálkozott. A diákok megoldásait elemezve feltűnt, hogy több diák is 75-öt írt válaszként. Valószínűleg abból ered ez a hiba, hogy a kiindulási pontot is beszámították és így egy szobával többet kapott emeletenként.

A 21. házi feladatban olyan utasítások megadása volt a diákok feladata, hogy a két karunk egyenese párhuzamos, merőlegesen metsző és kitérő helyzetű legyen. Több esetben a megfogalmazás jelentett problémát, nem sikerült egyértelműre az utasítás, vagy körkörös leírást adtak. Néhány példa: „*ted[d] egyenesen a kezed, hogy párhuzamos legyen*”, „*Az egyik karod nyújtsd fel, a másik karod pedig derékszögben támaszd neki*”, „*Az egyik maradjon egyenesen másik[at] ted[d] le magad mellé*”. Ezekből látszik, hogy kétfajta gond is adódott, az egyik nyelvhasználati, a másik az egyértelmű utasítás fogalmának tisztázatlansága.

Hozzá voltak szokva a diákok a síkgeometriához és most elindultunk a térgeometria irányába. A síkgeometriához képest a leglényegesebb fogalmi bővítés a kitérő egyenes. Zavaró, hogy „elromlik a szabály”, ha két egyenes metszi egymást a rajzon, az nem jelenti azt, hogy a valóságban is van közös pontjuk. Ez az ábrázolásban és az ábrák olvasásában is nehézséget jelent.

A 11.-25. feladatok gyengébb megoldottságának oka lehet, hogy az elején komolyabban vették a házi feladatot, mostanra lankadt a munkakedvük, talán a kudarcok is hozzájárultak ehhez. Az elején könnyebbek is voltak a feladatok. Az érdekes új anyag hatására aztán a végén ismét nagyobb energiát fektettek bele, sikeresebben dolgoztak, pedig nem lettek könnyebbek a feladatok.

## **Az előhívásos és az IKT-s kísérlet további tapasztalatai**

Az előhívásos tanulási módszer lényege, hogy a tanár ütemezett előhívással segíti a megjegyzés, tárolás, előhívás fázisait. Az első fázisban az óra végén arra irányul a visszakerdezés, hogy megfelel-e a tanulók által elraktározott tananyag a fontossági sorrend szerint elrendezett fogalomrendszernek. A tanár egy szintre emeli az egyformán fontosakat akkor is, ha az órán nem kaptak egyenlő hangsúlyt. Előhívásos korrekció nélkül a tanulók fejében az időrendi sorrend, a ráfordított idő és energia, más epizódikus jelenség módosíthatja a kívánatos sorrendet. A helytelenül megjegyzett sorrend az ismétléses tanulással kevésbé korrigálható, mint közvetlen előhívással. Ismétléskor ugyanis ugyanazt a gondolatmenetet már nem veszi olyan komolyan, nem veszi észre a különbséget.

Az IKT-s osztályban munka közben többször tapasztaltam, hogy amíg a diákok látják az interaktív ábrát, addig sok mindent természetesnek látnak (sőt, ha rákérdezek, sok mindent észre is vesznek), képesek megoldani a feladatot. Kikapcsolás után azonban a közvetlen látványtól elszakítva, már nem tudják megismételni a gondolatmenetet, mivel a megfigyelés nem volt elég alapos és részletes vagy a jelenség volt túlságosan összetett.

Kétségtelenül könnyebb IKT eszközökkel látványos, szép órát tartani, könnyebb vigyázni rá, hogy a tanár ne takarja el a táblát. IKT nélkül jobban kell arra koncentrálni, hogy az IKT-val összemérhető látványt adjunk.

Törekedtem arra, hogy a tárgyalt mértani alakzatokhoz kapcsolódjanak az absztrakt fogalmak (párhuzamossági reláció, merőlegesség, kitérő), azonban az absztrahálás hosszú folyamat, ezért többször vissza kell nyúlnia a tárgyi tapasztalatokhoz, vagy legalábbis annak vizuális megjelenéséhez.

### 4.2.3. IKT eszközökkel támogatott vs. hagyományos tanítási módszer

*„A számítógép helyes alkalmazása nem időt, energiát von el, nem más ismeretet, műveltséget szorít ki, hanem többletet nyújt.” (Vásárhelyi, 2002)*

Amint a fenti idézetből is érezhető, számos szülő, oktató, nevelő félti a gyerekeket, hogy idejüket és energiájukat a számítógép előtt elvesztegetik, stb.

Kísérletemben a digitális eszközöket tudatosan alkalmazó tanulási-tanítási folyamat hatékonyságát hasonlítottam össze a hagyományos módszereket alkalmazó ugyancsak tudatos oktatás hatékonyságával.

A kísérlet során azt vizsgáltam, milyen hatékonysággal járulnak hozzá a vizsgált fogalmak fejlődéséhez a tudatosan alkalmazott IKT eszközök, amely egy előzetes tanítási kísérlet eredményeire támaszkodik (lásd 4.2.2. fejezet, 87. o.). Ezért is volt olyan fontos, hogy hamar kövessék egymást a kísérletek, nehogy túl sokat változzon a technika és a tananyag. (A kiszámíthatatlan és a leírhatatlan nagy változást szerencsére sikerült elkerülni.)

A vizsgálatban két harmadikos gimnáziumi osztály tanulói (7. évfolyam, 13. életév) vettek részt, akik a korábbi kísérletekben is voltak. Az iskolában, a vizsgált tanévben, az osztályok létszáma 18 és 28 fő volt. Kiértékeléskor csak annak a 38 főnek az eredményeit vettem figyelembe, akik mindhárom mérésben részt vettek. Ugyanakkor az A osztályban volt egy diák, aki bár részt vett a méréseken, de az azt megelőző oktatási kísérlet jelentős részén hiányzott, így az ő adatait szintén nem számítottam be. Így a megváltozott létszámú osztályokban a nemek szerinti megoszlás a következő képpen alakult:

	Fiú	Lány	Létszám
A osztály	8	6	14
B osztály	14	10	24
Összesen:	22	16	38

20. táblázat. A kísérletben résztvevő diákok létszáma.

A tanítási kísérletet a 2019-es tanév őszi félévében végeztük. A kísérlet időtartama 22 tanítási óra volt, heti 2 mértan órában. A tananyag tanórák szerinti bontását tartalmazza a következő tanmenet.

Óra	Téma
1.	Pont, egyenes és tulajdonságaik.
2.	A szakasz. A szakasz hossza. Két pont közötti távolság.
3.	Adott szakasz felezőmerőlegesének szerkesztése.
4.-5.	Félegyenes. Szög. A szögek fajtái. A szögek mérése és rajzolása.
6.	Feladatok megoldása.
7.	Szögmásolás. Szögfelező. Adott szög szögfelezőjének szerkesztése.
8.	Nevezetes szögek szerkesztése ( $30^\circ$ , $45^\circ$ , $60^\circ$ , $90^\circ$ ).
9.	Feladatok megoldása.
10.	Összefoglalás.
11.	Témazáró dolgozat.
12.	Mellék- és csúcsszögek tulajdonságai. Két egymást metsző egyenes által bezárt szög.
13.	Feladatok megoldása.
14.	Merőleges egyenesek és tulajdonságai. Pont és egyenes közötti távolság. Merőleges egyenesek szerkesztése.
15.	Feladatok megoldása.
16.	Párhuzamos egyenesek. Két párhuzamos egyenes közötti távolság. Párhuzamos egyenesek szerkesztése.
17.	Feladatok megoldása.
18.	Két egyenes párhuzamosságának ismertetőjelei.
19.	Két egyenes harmadikkal való metszésekor kialakult szögek és tulajdonságai.
20.	Feladatok megoldása.
21.	Összefoglalás.
22.	Témazáró dolgozat.

21. táblázat. A harmadik kísérlet tanmenete

A matematikatanítási, tanulási folyamatának hatékonyságát összehasonlító kutatásom során a 7. osztályos tananyag elemi geometria részének néhány témakörét dolgoztuk fel a tanítási órákon. A tanterv ehhez az anyagrészhöz sorolja a következőket: pont, vonal, egyenes, félegyenes, szakasz és tulajdonságaik; szög, szögek mérése, szögfelező; két pont távolsága; mellék- és csúcsszögek; merőleges és párhuzamos egyenesek,

azok tulajdonságai; pont és egyenes távolsága; két párhuzamos egyenes távolsága; két egyenes párhuzamosságának ismertetőjelei; két egyenes harmadikkal való metszésekor kialakult szögek tulajdonságai.

A kísérlet során alkalmazott tanmenetben a fent említett ismereteket kiegészítve beemeltem a tananyagok közé az olyan egyszerűbb euklideszi szerkesztéseket, mint: a szakaszfelezés, szögmásolás, szögfelezés, néhány nevezetes szög, illetve merőleges és párhuzamos egyenesek szerkesztése.

Ezt egyrészt azért tettem, mert bizonyos ismeretekkel már rendelkeztek a diákok és nem akartam, hogy háttérbe szoruljanak az alapvető manuális tevékenységek és a velük kapcsolatos szabályok, az alapszerkesztések ismerete. Másrészt a gondolkodásmód fejlesztését is fontosnak tartom. El kell tudni dönteni, hogy az adott tulajdonsággal rendelkező alakzat létezik-e, és ha igen, elérhető-e euklideszi szerkesztéssel. Adott feltételeknek megfelelő ábrák pontos szerkesztése a matematikai alkalmazásai és esztétikai szempontból is fontos (műszaki, technikai rajzolás és rajzolás). Emellett hozzájárulunk a pontos munkavégzés, az igényes szemlélet fejlesztéséhez, az eszközök megfelelő használatához. Az eszközhasználatban megmutatkozó készségek a későbbi munkát is segítik. Nem utolsó sorban egy-egy szerkesztés elvégzése sikerélményhez juttathatja a számításokban kevésbé ügyesebb tanulókat is. A feladat elvégzése egyben teljesítmény-visszajelzés is, a diák önmagával szembeni elvárása is fokozatosan fejleszthető.

#### **4.2.3.1. Az IKT vs. hagyományos tanítási kísérletben felhasznált eszközök és módszerek bemutatása**

A kontroll osztály órái a megszokott tanteremben, míg az kísérleti osztály órái vagy számítógépes tanteremben vagy interaktív táblás osztályban valósultak meg. Minden diáknak volt saját gépe a gyakorláshoz, feladatmegoldáshoz. Az új tananyag megbeszélése a kísérleti osztályban

IKT-s eszközök (főleg tanári) alkalmazásával történt. Továbbá mindkét osztályban munkalapokat használtunk. A feladatlapokat úgy állítottam össze, hogy mindkét osztályban ugyanazokat használhassam, mivel a feldolgozott tananyag megegyezett.

Az IKT-s osztályban a tananyag témaköreihez GeoGebra feladatlapokat használtam. Ezek egy része az önálló felfedeztetést szolgálták, másik része demonstrációs jellegű volt. A felhasznált munkalapokat vagy én fejlesztettem vagy az órához igazítottam. Emellett a tanórákon használtuk az NKP „okostankönyveit”, az Okos Doboz, a LearningApps és egyéb online elérhető interaktív feladatokat. Az órákon az IKT eszközök mellett a már bevált hagyományos eszközöket is használtam.

A tanulók előzetes ismereteinek szintjét egy felmérő dolgozattal mértük. A dolgozatot néhány ismétlő óra előzte meg. A tanítási kísérlet során az új anyag feldolgozása után tudáspróbával mértem a tananyag elsajátításának szintjét. Ennek eredményéhez igazítottam a gyakorlás során a szükséges kiegészítéseket, a korrekciót. A kísérlet során mindkét osztály két-két témazáró dolgozatot írt megegyező feladatokkal. A kimeneti dolgozatok megírása előtt a diákok nem kaptak direkt felkészítést. A mérő feladatlapok megtalálhatók a 11. és 12. függelékben.

A feladatlapok elkészítése során az ukrain Oktatási és Tudományos Minisztériuma általános iskolai, valamint a magyarországi Oktatáskutató és Fejlesztő Intézet felső tagozatos újgenerációs tankönyv feladatait vagy azok részben átdolgozott változatát használtam, illetve a Kárpátaljai Magyar Pedagógus szövetség módszertani segédleteiből merítettem.

A tanítási kísérlet során mindkét osztályban lényegi elem volt a körző és vonalzó használata, ami több diáknak is nehézséget okozott. Emellett a kísérleti osztályban az egér és billentyűzet használatát is készségi szinten vártuk el. A szükséges motorikus előfeltételekkel minden diák rendelkezett.

## **Egy tanóra kétféle (IKT vs. hagyományos) feldolgozásban**

Megpróbálom érzékeltetni, hogy mit jelentett számomra ugyanannak a tananyagnak két különböző módszer (IKT vs. hagyományos) szerinti megvalósítása.

*Az óra témája: Szög, szögfajták, szögek mérése és rajzolása.*

*Az óra célja: Szögtartomány, szögfajták, szögmérés. Az eszközök helyes használata. A megfigyelő és rendszerező képesség fejlesztése.*

A témát 2-2 tanóra keretében dolgoztuk fel, ebből azokat az órarészeket részletezem, ahol a feldolgozás módszere különbözött a két osztályban.

### **Jellegzetes különbségek a megvalósításban**

*Az IKT-s osztály* órái számítógépes tanteremben voltak megtartva, minden diák külön számítógépen dolgozott. Az új anyag tárgyalásakor a fogalmakat interaktív táblán statikus képekkel és dinamikus ábrákkal demonstráltam. A szög jelölésének módjait tárgyalva beszéltünk a görög ábécé matematikában leggyakrabban használt kisbetűiről is. Ennek gyakorlására egy rövid párosítós feladatot oldottak meg a diákok a számítógépen (lásd <https://learningapps.org/watch?v=pxj9wnj2v19>).

A szögfajták tanulásakor kivetítettem egy GeoGebra munkalapot (lásd <https://www.geogebra.org/m/nxxekpyj>). A munkalapot én szerkesztettem és megosztottam a diákokkal, így igény szerint, saját tempóban többször is megtekinthették. Az órai megbeszélés segített abban, hogy a diákok tudják, mit kell észrevenni. A szögek fajtáit összefoglaló segédletet táblázatban, nyomtatott formában is megkapták, amit beragasztottak a füzetükbe.

Az órákon felelevenítettük a szögmérésről tanultakat, a szögmérőn szereplő jelek jelentését és törekedtünk annak pontos használatára. A papír alapú feladatlap mellé néhány interaktív feladatot is adtam (Szögmérés). Tudjuk, hogy a kézzel rajzolt ábra és a sajátkezü mérés meggyőző erejét

nem pótolhatjuk. Viszont a sejtés megtalálásában és megfogalmazásában haszonnal alkalmazhatjuk a számítógépes megjelenítést. Változatosabb és esztétikusabb látványt mutathatunk be a képernyőn.

Teret engedve az órai játéknak, szórakozásnak a diákok a szög elhelyezkedését megtippelő online feladattal is foglalkoztak (Alien Angles). A játék hozzáadott értéke, hogy fejleszti a vizuális készséget, valamint gyakoroltatja az értékek leolvasását.

A szögmérés tárgyalásakor bevezetésre kerültek a foknál kisebb mértékegységek (szögperc, szögmásodperc). Ezt az időméréssel összekapcsolva, analóg módon tanultuk és használtuk. Az analóg órán a különböző sebességgel mozgó kis- és nagymutatók mozgásával kapcsolatos problémák megoldása a tehetséggondozásában is fontos szerepet játszik. (Például hány fokkal fordul el egy perc alatt, hányszor van fedésben,...) Ilyen feladattípusokat gyakoroltathatunk interaktív feladatlapon alkalmazásával. Az én kísérletemben például a fok-perc átváltásának gyakorlásához a „Hány óra van? 2” GeoGebra munkalapot használtuk. Az órai tapasztalatok azt mutatták, hogy a GeoGebra munkalap megkönnyítette a tanári magyarázat megértését, és segítette az összefüggések újrafelfedezését.

A tanulói önellenőrzést egy digitalizált tematikus memória játék segítette (lásd <https://learningapps.org/watch?v=pu1x3n2xt19>).

A fokok és a törtrész kapcsolatát az Okos Doboz egyik feladatának (Derékszög és egyenesszög) segítségével mélyítették el, gyakorolták a szavakkal, ábrákkal és matematikai szimbólumokkal megadott mennyiségek beazonosítását, összekapcsolását. A diákok eleinte nehezen boldogultak a feladattal, nem értették meg az utasításokat, de kis segítséggel már sikeresebbek voltak a megoldásban és jobban is élveztek a munkát.

A számítógépen végzett munka alatt folyamatosan figyeltem a diákokat, és ahol szükséges volt, ott segítettem. Fontosnak tartottam, hogy ők kérjenek segítséget, ezáltal abban is fejlődtek, hogy pontosan megfogalmazzák a problémáikat.

A *hagyományos osztályban* a tanári magyarázatot szemléltetésként táblai rajzokkal és tárgyi modellekkel egészítettem ki.

A szög jelölésére bevezettük a görög ábécé matematikában leggyakrabban használt kisbetűit is, hogy a szokásos jelölésre használt számok felszabaduljanak, jelentésük egyértelműbb legyen. Ennek gyakorlására „Keresd a párját” játékot játszottunk a táblára felírt mennyiségekkel, a diákok megnevezték azokat, vagy fordítva.

A szögek fajtáinak felsorolását kiegészítettük a  $180^\circ$ -nál nagyobb szögekkel. A kibővített összefoglaló táblázatot nyomtatott formában is kézbe adtam, így is segítve az egyéni munkát, az egyéni munkatempót.

Kérdés válasz (kérdve kifejtő) formában átismételtük a szögmérőhöz és a szögméréshez kapcsolódó ismereteket. A vonalzóval és a szögmérővel rajzolt ábrák egyrészt az ismeretek gyakorlati alkalmazását támogatták, másrészt hozzájárulnak a pontos és esztétikus munkavégzéshez úgy, hogy az eredmény önmagát minősíti.

Pihenésképp a szög nagyságát megtippelő feladatot játszottunk a táblán és később a füzetben is. Ez egyben fejleszti a vizuális készséget és a szögmérést is gyakoroltatja.

Az IKT-s osztályhoz hasonlóan bevezettük a szögperc és szögmásodperc fogalmakat, valamint a szögmérést az időméréssel párhuzamba állítva is tárgyaltuk. Elemeztük az analóg óra mutatóinak mozgását fokperc összefüggésben (pl. hány fokkal fordul el egy perc alatt).

Gyakorlás során az IKT-s osztállyal megegyező Okos Doboz feladatot adaptáltam papír alapú környezetbe. A feladat jó számolási készséget vizualitást, valamint a törtrészfogalom helyes kezelését igényli, az arányossági gondolkodás kompetenciáját is fejleszti. A diákok többsége néhány mintapélda megoldása után jól megoldotta a feladványokat.

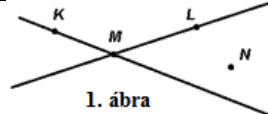
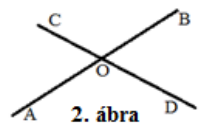
#### 4.2.3.2. Az IKT vs. hagyományos tanítási kísérlet eredményei

A módszer hatékonyságának vizsgálatához a K4) mutatót használtam.

K4) Az IKT-s és hagyományos osztályok teljesítményének összehasonlítása a témazáró dolgozatok alapján (t-próbával).

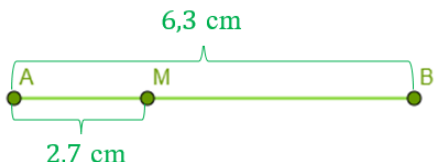
A 6. tanítási héten (11. tanítási órán) mindkét osztály egy 8 feladatból álló témazáró dolgozatot írt.

A dolgozat 1.-3. kérdése elméleti jellegű. Ezek a feladatok a 22. táblázatban láthatók, a megoldásokat zöld körök jelölik.

<p>1. Melyik pont illeszkedik mindkét egyenesre?(1. ábra)</p> <p>a) K, M pont    b) L, M pont    <b>c) M pont</b>    d) N pont</p> <p>2. Melyik félegyenes az OC félegyenes kiegészítő félegyenes? (2. ábra)</p> <p>a) OB    b) OA    c) OB és OA    <b>d) OD</b></p> <p>3. Az alábbiak közül melyik tompaszög?</p> <p>a) 10920'    <b>b) 5880'</b>    c) 4660'    d) 5400'</p>	 <p>1. ábra</p>  <p>2. ábra</p>
---	--

22. táblázat. Az 1.-3. feladat és megoldásai

A 4.-6. feladatokban a szakaszhozhoz kötődő számítási feladatok szerepeltek. A feladatokat és a megoldásokat az 23. táblázat tartalmazza.

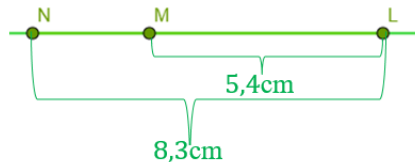
<p>4. Az <math>M</math> pont az <math>AB</math> szakasz egyik belső pontja.  <math>AB = 6,3</math> cm. <math>AM = 2,7</math> cm. Határozd meg a <math>BM</math> szakasz hosszát!</p>  <p><math>BM = 6,3 - 2,7 = 3,6</math> (cm)</p> <p>Válasz: a <math>BM</math> szakasz hossza 3,6 cm.</p>
--

5. Az  $M, N$  és  $L$  pontok egy egyenesen vannak.  $ML = 5,4$  cm.  $NL = 8,3$  cm.  
Határozd meg az  $MN$  szakasz hosszát! Hány megoldása van a feladatnak?

Két megoldás van aszerint, hogy az  $L$  pont elválasztja-e az  $M$  és  $N$  pontokat.  
Ha az  $L$  különböző oldalán van az  $M$  és  $N$  pont, akkor a hosszak összeadódnak, azaz  $MN = 5,4 + 8,3 = 13,7$  (cm)



Ha pedig az  $L$ -nek ugyanazon az oldalán van az  $M$  és  $N$ , akkor a hosszak különbsége lesz az  $M$  és  $N$  távolsága, azaz  $MN = 8,3 - 5,4 = 2,9$  (cm)



Válasz: két megoldás van,  $MN = 13,7$  cm, vagy  $MN = 2,9$  cm.

6.  $K$  és  $L$  pontok az  $AB$  szakaszra illeszkednek.  $AB = 50$  cm.  
 $AL = 40$  cm.  $KB = 19$  cm. Határozd meg a  $KL$  szakasz hosszát!

Többféle megoldási mód van, az egyik ismert stratégia, hogy az átfedést úgy kapjuk meg, hogy  $AL + KB - AB = 40 + 19 - 50 = 9$  (cm).

Egy másik megoldási mód szerint:

$AL + LB = 50$  és  $KB = 19$ , ezért  $L$  a  $K$  és  $B$  között van.



Innen három folytatás volt a tanulóknál:

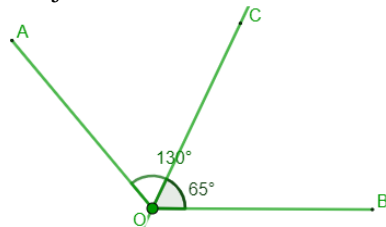
- $AB = AL + LB$ , azaz  $LB = 10$  (cm) és  
 $AB = AK + KB$ , azaz  $AK = 31$  (cm),  $KL = 50 - (31 + 10) = 9$  (cm)
- $AB = AL + LB$ , azaz  $LB = 10$  (cm) és  
 $KL = KB - LB = 19 - 10 = 9$  (cm)
- $AB = AK + KB$ , azaz  $AK = 31$  (cm) és  
 $KL = AL - AK = 40 - 31 = 9$  (cm)

Válasz: a  $KL$  szakasz hossza 9 cm.

23. táblázat. Az 4.-6. feladat és megoldásai

A 7. feladatban a szögfelező tulajdonságára tértünk ki, továbbá a  $180^\circ$ -os szögmérővel való mérés pontosságán volt a hangsúly. A feladat egyik változatát és annak megoldását az 24. táblázat tartalmazza. A másik változatban  $80^\circ$  volt a kiindulási szög.

7. Az  $AOB\angle = 130^\circ$ ,  $OC$  a szögfelezője. Hány fokos az  $AOC\angle$ ? Készíts pontos rajzot!



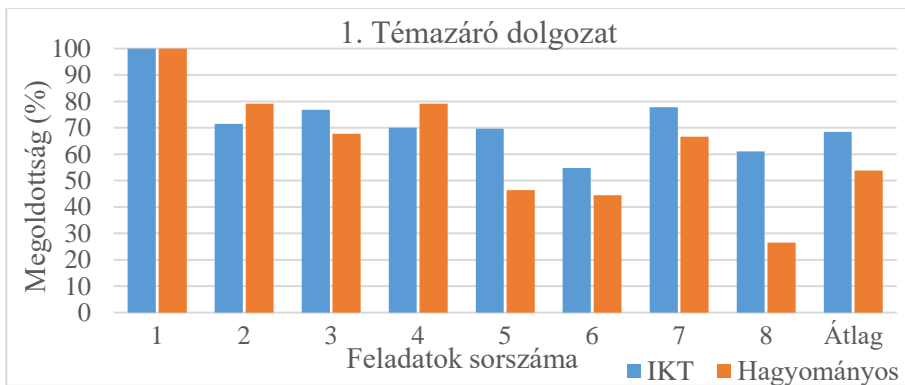
$$AOC\angle = AOB\angle : 2 = 130^\circ : 2 = 65^\circ$$

24. táblázat. A 7. feladat és megoldása

A 8. feladatban egy nevezetes szögből származtatható szög szerkesztését kellett elvégezni. Az elmúlt órákon több esetben oldottunk hasonló példát.

8. Szerkessz egy  $135^\circ$ -os szöget!

Az egyes feladatok megoldottságának osztályonkénti százalékos eloszlását a 31. ábra mutatja.



31. ábra. Az 1. témazáró dolgozatban szereplő feladatok megoldottsága

Az 1. feladatban mindkét osztály egyformán jól teljesített, az elért jó teljesítmény mutatja, hogy az új ismereteket elsajátították. A 2. feladat ábrája a hagyományos osztály számára megszokottabb, így ők egy kicsit jobban boldogultak vele. A 3. feladatban kombinálni kellett a fok-perc átváltást és a szög besorolására vonatkozó kritériumot. A feladat megoldottsága a kísérleti osztályban kissé magasabb (76,79%, 67,71%).

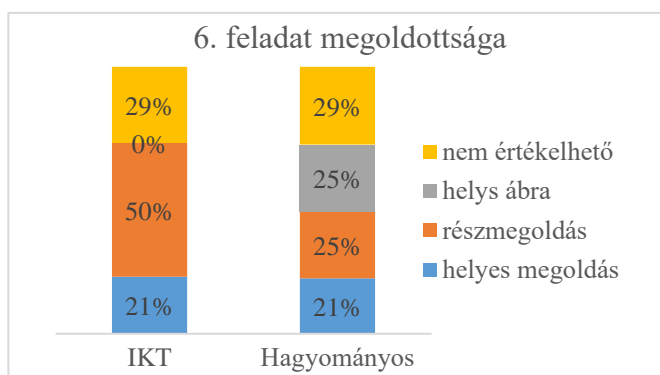
A 4. feladatban a hagyományos osztály teljesített jobban, de az eltérés nem számottevő (70%, 79%). Az 5. feladat megoldásában a fő nehézség,

hogy két olyan pont is van, amely megfelel a feltételeknek. Ez a hagyományos osztály teljesítményét visszafogta (IKT-s 70%, hagyományos 46%).

A számítógép alkalmazásának járulékos haszna, hogy természetessé válik a különböző megoldások keresése és összehasonlítása (Vásárhelyi, 2013). Ezt az 5. feladatra adott megoldások is jól tükrözik, hiszen a kísérleti osztályban minden diák el tudott indulni, mindenki szerzett pontot ebben a feladatban, és 4 diák volt (29%), aki hibátlanul megoldotta a feladatot. Ezzel szemben a kontroll osztály negyede (25%) hozzá sem kezdett a feladathoz és csak egy diák oldotta meg hibátlanul. Ebből arra következtethetünk, hogy az IKT-s osztályban a dinamikus ábrák, animációk, az alakzatok változtathatóságával láthatóvá tették, hogy a megoldások számát a feltételek változásától függően kell vizsgálni.

A 6. feladat nehézsége abban rejlik, hogy összetettebb a megszokottnál. Több megoldási mód is van, a keresett szakasz hossza többféle úton is meghatározható. Azzal lehet elrontani a megoldást, ha ezeket a módokat összekeverik.

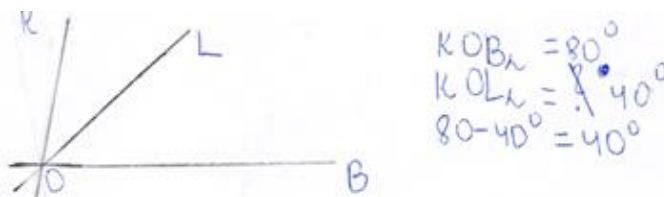
A megoldási tervtől a végeredményig rögzös út vezet, többen el is tévedtek az úton. A feladat megoldásában elért eredmények összehasonlítása osztályonként a 33. ábrán látható.



32. ábra. A 6. feladat megoldottsága az IKT-s és a hagyományos osztályban

A 7. feladat megoldottsága ismét 70% körüli, az IKT-s osztály kicsit jobban teljesített. Tipikus hibaként jelentkezett, hogy bár tudták, a szögfelező

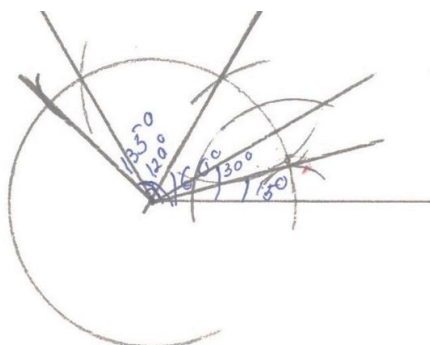
a szöget két egyenlő nagyságú részre osztja, mégsem tudták, hogy a szög felének a mértéke az eredeti mérték fele. Bár az egyik csoport hegyesszöget felezett és a másik tompaszöget, ez nem bizonyult jelentős különbségnek. A 34. ábrán látható diákmegoldás valószínűleg úgy született, hogy előbb próbálta elosztani két egyforma részre a szöget, de mivel rosszul rajzolt, áttért a szög és az azt  $80^\circ$ -ra kiegészítő rész nagyságának összehasonlítására.



33. ábra. Egy diák 7. feladatának megoldása

Bár a 7. feladatban „csak” megrajzolni kellett az adott szög szögfelezőjét, mégis többen inkább megszerkesztették azt (az IKT-s osztályban 43%, a hagyományos osztályban 58%). Ez félreértésből is eredhet, mert a rajzolás és szerkesztés még nem különül el számukra. Ráadásul a körzővel való szögfelező megszerkesztése frissen begyakorolt eljárás.

A 8. feladatban az IKT-s osztály teljesítménye 35%-al jobb lett, mint a kontroll osztályé. Az előzetes elképzelésünk szerint a megoldás a  $90^\circ$ -os szög szerkesztésére (szakaszfelező merőleges szerkesztéssel) épül, azonban mindkét osztályban akadtak olyan diákok, aki a  $60^\circ$ -os szög szerkesztéséből indult ki (lásd 34. ábra). (Az egyikből nem született megoldás.)



34. ábra. A 8. feladat diákmegoldása

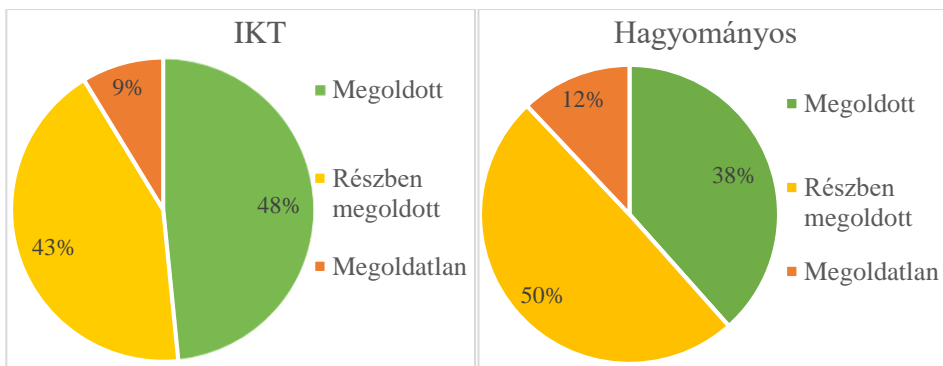
Az ábrán látható megoldás szerzője helyesen felezte és mérte fel a szögeket, jó eredményt kapott. Egyszerűbben célhoz érhetett volna a harmadik  $60^\circ$ -os szög negyedelésével közvetlenül a kívánt helyre szerkesztve a  $15^\circ$ -os szöget, ami egy szögmásolással kevesebb munkát és pontosabb rajzot adna.

A másik  $60^\circ$ -kal próbálkozó diák tevékenységét is pozitívnak értékeltük mind a kísérlet, mind a dolgozat szempontjából, noha nem jutott a megoldás végére, hiszen nem szokványos, de járható utat választott és a tanult tananyag egy részét helyesen alkalmazta.

Az egész dolgozatról elmondható, hogy az új anyagrészt megtanulták, most az eljárások begyakorlásánál, az elméleti rész gyakorlati alkalmazásánál tartunk. A legtöbb tennivaló a teljesszög felezésével, a  $90^\circ$  szerkesztésével van (lásd 8. feladat eredménye).

A 32. diagramról leolvasható, hogy az órára beiktatott technológiai eszközökkel való tanulás a 2. és 4. feladat kivételével lényegesen jobb eredményhez vezetett. Bár a 2. és 4. feladatnál a kontrollosztály egy kicsivel jobb eredményt ért el, mint a kísérleti, az átlag mégis szignifikáns különbséggel a kísérleti osztály fölényét mutatja ( $p = 0,044$ ). Az IKT-s osztály a nehezebb (6. és 8.) feladatokban is 50% felett teljesített. A kísérlet hatását a Cohen-féle  $d$ -mutatóval jellemezve ( $d = 0,70$ ) egy közepes kísérleti hatást fejez ki.

A feladatok megoldottságát elemezve, a megoldott és részben megoldott, valamint a megoldatlan feladatok arányát a két osztályban a 35. ábra szemlélteti. Részben megoldott minősítést adtam, ha a diák érdemileg hozzákezdett a feladathoz (pl. helyesen elkészített ábra, egy jó számítási művelet, stb.), illetve azokat is, ahol a diák mindössze számítási hibát vétett. Megoldatlan minősítést adtam, ha a diák hozzá sem kezdett vagy nem végzett érdemi lépéseket. A többi megoldás pedig megoldott minősítést kapott.

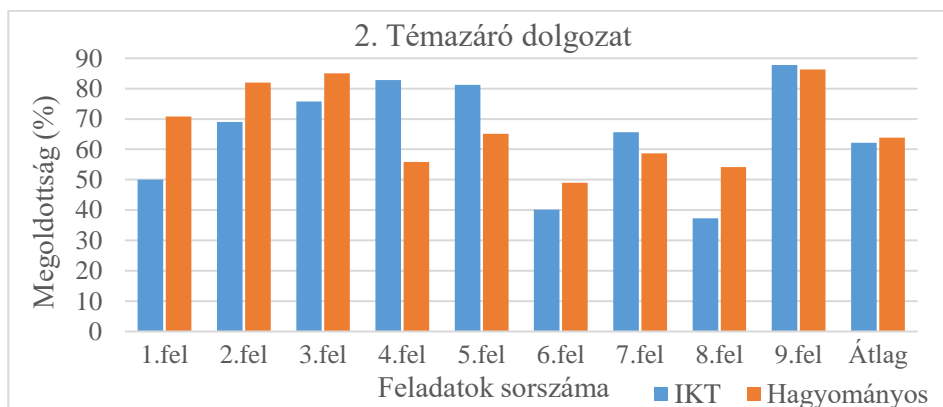


35. ábra. A megoldott, részben megoldott, valamint a megoldatlan feladatok aránya az 1. témazáró dolgozatban

Azt tapasztaltam, hogy a kísérleti osztály diákjai egy-egy nehezebb problémánál (pl. 6. és 8. feladat) többet próbálgattak, rajzolgattak, még ha látszólag céltalanul is. Ezzel szemben a kontroll osztályban, ha már az első lépésnél elakadtak, akkor feladták. Ez arra enged következtetni, hogy az IKT eszközökkel segített oktatás következtében a diákok bátrabban kísérleteznek.

A témazáró eredményei igazolták azt a feltevésünket, amely szerint a modern taneszközök alkalmazása az iskolai matematika órákon a vizsgált témakörben emeli az oktatás hatékonyságát.



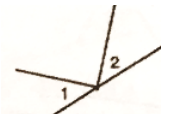
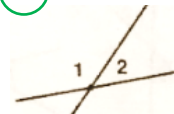
A tanítási kísérlet végén, a 22. tanítási órán mindkét osztály ugyanazt a 9 feladatból álló témazáró dolgozatot írta. A 1.-4. feladat feleletválasztós, az 5.-9. alkotó feladatok. A feladatok megoldottságát a 36. ábra szemlélteti.



36. ábra. A 2. témazáró dolgozatban szereplő feladatok megoldottsága

A tesztkérdéseknél az IKT-s osztály egy kicsit lemaradt a kontroll osztályhoz képest. Ennek egyik oka lehet, hogy az IKT-s diákok túl hamar elengedték a segédeszközt. (Talán éppen az eszköznek köszönhetően „minden világos” volt számukra. A tanár is örült a „sikernek” és szintet váltott.) Ezek a feladatok a 25. táblázatban láthatók, a megoldásokat zöld körök jelölik.

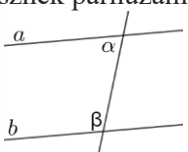
1. Az alábbi ábrák melyikén lesznek az 1-es és 2-es jelű szögek mellékszögek?

a)  b)  c)  d) 

2. Ha a csúcsszögek közül az egyik fokmértéke  $55^\circ$ , akkor a másik fokmértéke:

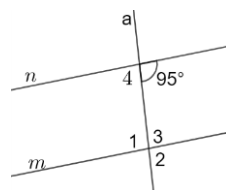
a)  $45^\circ$       b)  $125^\circ$       c)  $55^\circ$       d)  $35^\circ$

3. Az  $\alpha$  és  $\beta$  mely értékeinél lesznek párhuzamosak az  $a$  és  $b$  egyenesek?



a)  $\alpha = 50^\circ$ ,  $\beta = 130^\circ$       b)  $\alpha = 50^\circ$ ,  $\beta = 50^\circ$       c)  $\alpha = 135^\circ$ ,  $\beta = 50^\circ$       d)  $\alpha = 50^\circ$ ,  $\beta = 120^\circ$

4. Határozd meg az ábra adatai alapján az 1-es szög fokmértékét, ha  $n$  és  $m$  párhuzamos egyenesek, az  $a$  mindkettőt metsző egyenes!



a)  $95^\circ$       b)  $85^\circ$       c)  $105^\circ$       d)  $210^\circ$

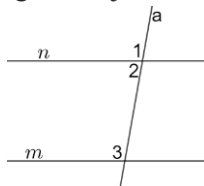
25. táblázat. Az 1.-4. feladat és megoldása

Ennek a dolgozatnak több kérdését abból a segédanyagból vettem, amelyet Kárpátalján a magyarul tanító matematika tanárok használnak. Sajnos a fogalmazás az élő beszédttől eltávolodott, ami megnehezíti a szövegértést. A feladat szerkezete sem a feleletválasztós formához igazodik.

Az IKT-s osztály több olyan feladatban ért el a kontroll osztályénál jobb eredményt, amelyek összetett tudást igényelnek. Az 5.-8. feladat és megoldásai a 26. táblázatban látható. A 6. és 8. feladat mindkét osztályban

igényesnek bizonyult. Összességében ez egy közepesen nehéz dolgozat volt mindkét osztály számára.

5. Az ábrán  $n$  és  $m$  egyenesek párhuzamosak, az  $a$  mindkettőt metsző egyenes,  $1\angle + 3\angle = 200^\circ$ . Határozd meg a 2-es jelű szög fokmértékét!



egy lehetséges megoldás: az 1-es és 3-as megfelelő szögek, így külön-külön  $100^\circ$ -sak. Az 1-es és 2-es mellékszögek, így a 2-es szög  $80^\circ$ .

6. Határozd meg két egyenes metszésekor keletkezett mellékszöveget, ha az egyik  $54^\circ$ -kal nagyobb a másikonál.

egy lehetséges megoldás: az egyik szög  $\alpha$ , a másik szög  $\alpha + 54^\circ$

$$\alpha + \alpha + 54^\circ = 180^\circ, 2\alpha = 180^\circ - 54^\circ = 126^\circ$$

$$\alpha = 126^\circ : 2 = 63^\circ$$

$$\alpha + 54^\circ = 63^\circ + 54^\circ = 117^\circ$$

Válasz: az egyik szög  $63^\circ$ , a másik szög  $117^\circ$ .

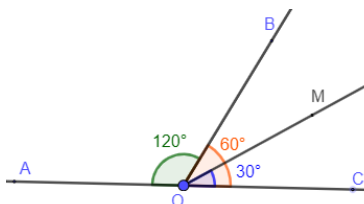
7. Az  $AOB$  és  $BOC$  szögek mellékszögek. Az  $OM$  félegyenes az  $BOC$  szög szögfelezője. Határozzátok meg az  $AOB$  szög fokmértékét, ha  $MOC \angle = 30^\circ$ . Készíts rajzot!

egy lehetséges megoldás:

$$AOB \angle + BOC \angle = 180^\circ$$

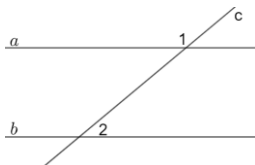
$$BOC \angle = 2 \cdot MOC \angle = 2 \cdot 30^\circ = 60^\circ$$

$$AOB \angle = 180^\circ - BOC \angle = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$$

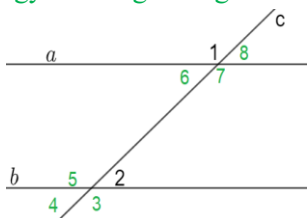


Válasz: az  $AOB \angle = 120^\circ$ .

8. Az ábrán  $a$  és  $b$  párhuzamos egyenesek,  $c$  pedig mindkettőt metsző egyenes,  $1\angle : 2\angle = 7 : 2$ . Számíts ki minden keletkezett szög nagyságát!



egy lehetséges megoldás:



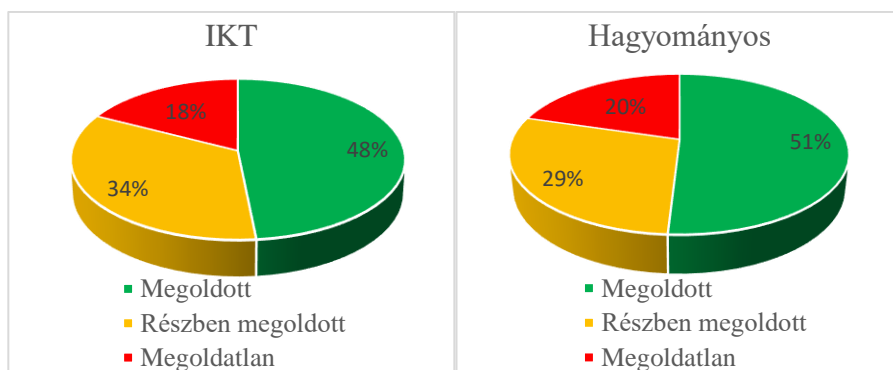
1-es és 7-es csúcsszögek, 2-es és 7-es társszögek. A  $7:2$  arány miatt a  $180^\circ$ -ot kilenc részre osztjuk, így a szögek  $7 \cdot 20^\circ$  és  $2 \cdot 20^\circ$ . Tehát  $1\angle = 7 \cdot 20^\circ = 140^\circ$ ,  $2\angle = 2 \cdot 20^\circ = 40^\circ$ .

1-es és 7-es, 5-ös és 3-as csúcsszögek, 7-es és 5-ös váltószögek, így  $1\angle = 7\angle = 5\angle = 3\angle = 140^\circ$

2-es és 4-es, 6-os és 8-as csúcsszögek, 4-es és 6-os megfelelő szögek, így  $2\angle = 4\angle = 6\angle = 8\angle = 40^\circ$

26. táblázat. A 6.-8. feladatok és megoldásaik

A megoldott és részben megoldott, valamint a megoldatlan feladatok arányát a két osztályban a 37. ábra szemlélteti.



37. ábra. A megoldott, részben megoldott, valamint a megoldatlan feladatok aránya az 2. témazáró dolgozatban

Mindkét osztályban volt 1-1 tanuló, aki hibátlanul megoldotta az egész feladatsort.

Meg kell említeni, hogy ebben a fázisban nem sikerült kellő számú és minőségű digitális tananyagot beilleszteni a tanítási gyakorlatba, így a jövőben ebben a témakörben érdemes az eszköztárat bővíteni megfelelő alkalmazásokkal.

A második témazáró dolgozat eredményeit látva azt mondhatjuk, hogy a két osztály a tantervi követelményeket közel azonos szinten teljesítette. Az alkalmazott statisztikai vizsgálatok szerint nincs jelentős különbség a

két osztály között ( $p = 0,81$ ). A kísérleti hatás értéke  $d = 0,07$ . Emellett, a második témazárón elért pontszámokat tekintve az IKT-s osztály szórása többet csökkent, mint a kontrollosztályé, ami arra enged következtetni, hogy az alkalmazott módszer hatására a diákok tudása közötti különbségek kisebbek (a gyengébben teljesítőknek segít a felzárkózásban), mint a hagyományos módszerrel tanulók esetében.

A diákok egyéni teljesítményéből látszik, az IKT-s osztály tanulói közül többen mutatnak teljesítménynövekedést (50% fölött), mint a kontroll-osztálynál. Ez arra enged következtetni, hogy az IKT-val támogatott tanulás pozitív hatással van az egyéni teljesítményre, és fokozta az érdeklődést (lásd 128. oldal).

Az IKT-s osztálynak a geometria tananyagán túl az eszközök és szoftverek használatával is meg kellett ismerkedni, ami az eredményekben nem tükröződő tudástöbbletet ad.

A szerkesztések tanulásakor a kontroll osztályban nehézségként jelentkezett, hogy a kész ábra birtokában nem tudták rekonstruálni a szerkesztés lépéseit. Nehezen tudták megállapítani, hogy milyen sorrendben következnek az egyes lépések egymás után. A kísérleti osztálynál a GeoGebra szoftver „szerkesztési lépések lejátszása” gomb használatával egyesével megtekinthetők a szerkesztés lépései, bármelyik lépésnél megállítható, visszajátszató és tetszés szerint újraindítható.

#### **4.2.3.3. Az IKT-s osztály eszközhasználati szokásai**

##### **(kérdőív és válaszok)**

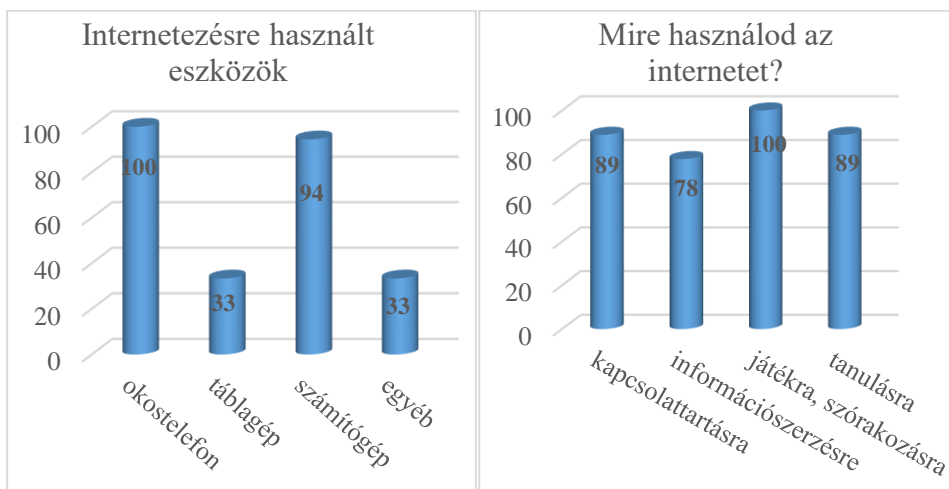
A diákok tanulási szokásait, IKT és egyéb segédeszközök használatát kérdőív segítségével mértem fel (lásd 16. függelék). A kérdőíveket a tanulók közvetlenül az oktatási kísérlet után töltötték ki és 12 kérdést

tartalmazott. A kérdőívet az IKT-s osztály diákjai töltötték ki, összesen 18 tanuló (7 lány, 11 fiú).

A kérdőív szerkezeti szempontból három részre tagolható. Az 1.-3. kérdés az internetezési szokásokra, a 4.-7. kérdések a számítógéppel segített matematika órai tapasztalatokra, a 8.-11. kérdések pedig az oktatás során használt IKT alkalmazásokra vonatkoznak.

Az osztályból minden diák használja otthon az internetet, leggyakrabban okostelefonon, laptopon vagy számítógépen.

A diákok 100%-a játéokra és szórakozásra, 89%-a kapcsolattartásra és tanulásra, 78%-a információszerezésre használja az internetet (lásd 38. ábra).



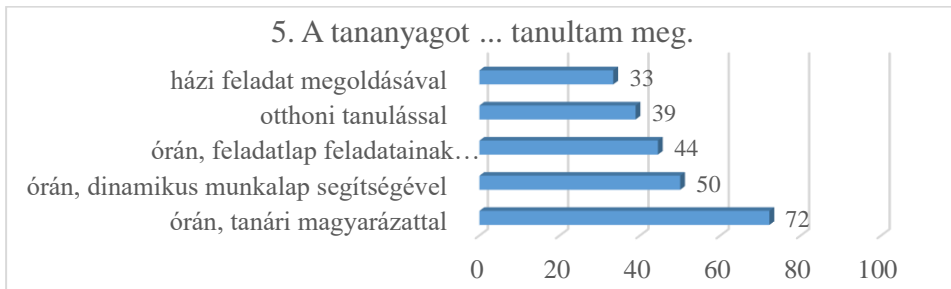
38. ábra. Az IKT-s osztály internethasználati szokásai

A megkérdezett diákok 61%-a megfogadta tanácsaimat az internet tanulást segítő funkcióiról és használja az internetet matematika-tanulásához iskolán kívül is.

Az osztály tanulói közül mindössze egy diák volt, aki nem örült a fokozott IKT használatnak, a többiek szívesen dolgoztak számítógépen a matematika órákon is.

A diákok jelentős része (72%) fontosnak tartja a tananyag elsajátításában az IKT-val alátámasztott tanári magyarázatot.

A dinamikus, illetve a papíralapú feladatlapok támogatását az ismeretszerzésben szinte mindenki fontosnak tartotta, az IKT-t 50%, a hagyományos feladatlapot 44% jelölte be (lásd 39. ábra).



39. ábra. A diákok véleménye a tananyag elsajátítását támogató módszerekről

A diákok szerint a tananyag érthetőbb és könnyebben elsajátítható az internetes segédletekkel.

A diákoknak átlagosan 30 percet vett igényben a következő órára való felkészülés, leggyakoribb válasz a 45 perc volt.

A 7. kérdésben arra kerestem a választ, mely segédletek mennyiben hasznosultak a felkészülés során: „Rendezd sorba, mi segített legjobban a felkészülésben?” (lásd 27. táblázat).

	Rangsorolás sorszáma					
	1.	2.	3.	4.	5.	6.
tankönyv	3	2	4	4	2	3
saját jegyzet	1	4	3	5	3	2
osztálytársak segítsége	3	2	0	1	6	6
feladatlapok	4	2	6	2	2	2
GeoGebra segédletek	1	5	3	2	3	4
internetes segédletek	6	3	2	4	2	1

27. táblázat. A tárgyi segédletek hatása a felkészülésben a kérdőív eredményei alapján

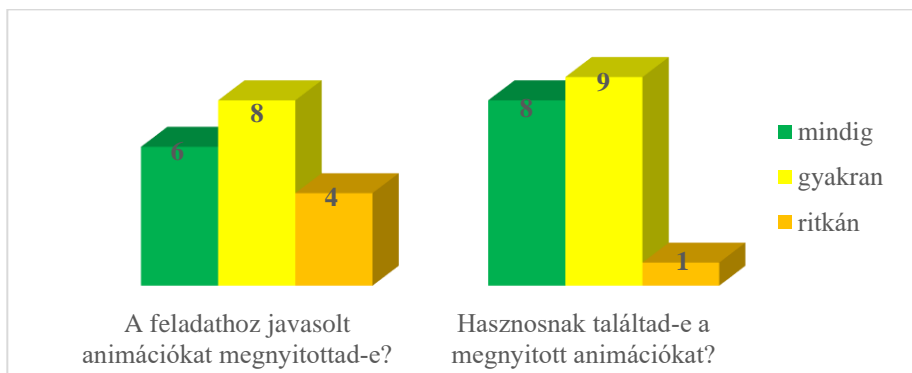
A táblázat alapján láthatjuk, hogy a diákok az internetes segédleteket tartják a segítség szempontjából legeredményesebbnek, ezt követték a feladatlapok és a tankönyv. Azzal a szándékkal készítettem a feladatlapokat, hogy minél hatékonyabb segítséget adjak, ez majdnem sikerült is, hiszen a második leghatékonyabb segédletnek tartják.

Az IKT-s osztály 89%-a a hagyományos számonkérési módszerekhez képest előnyben részesítette a Redmenta-s feladatlapokat. A diákok által kedvelt számonkérési formák közé tartozik még a papír alapú feladatlap és az írásbeli felelet. Legkevésbé a szóbeli felelést és a dolgozatírást kedvelték (lásd 28. táblázat).

	<b>Rangsorolás sorszáma</b>				
	<b>1.</b>	<b>2.</b>	<b>3.</b>	<b>4.</b>	<b>5.</b>
papír feladatlap	2	13	3	0	0
Redmenta feladatlap	16	0	2	0	0
szóbeli felelés	0	1	2	6	9
írásbeli felelet	0	3	10	5	0
dolgozatírás	0	1	1	7	9

28. táblázat. A számonkérés formái a kérdőív eredményei alapján

A diákok a feladathoz javasolt animációkat többségükben mindig, illetve gyakran megnyitották, azokat mindig, illetve gyakran hasznosnak találták, még aki ritkán nyitotta meg az is pozitívan nyilatkozott (lásd 40. ábra).



40. ábra. A felhasznált animációk minősítése a kérdőív eredményei alapján

A 11. kérdés arra vonatkozott, hogy a diákok véleménye szerint az oktatás során felhasznált IKT-s alkalmazások a matematikatanulás mely fázisát segítették legjobban. Az új anyagrészt feldolgozása során a PowerPoint bemutatókat és a GeoGebra animációkat, míg a gyakorlás és gyakorlati alkalmazások során az általam javasolt Okos Dobozos és LearningApps típusú feladatokat találták hasznosnak a tanulók. Ugyanakkor a tanultak

elmélyítésére a diákok a GeoGebra segédleteket is hasznos eszköznek találták. Az ismeretek ellenőrzésére a diákok egyértelműen a Redmentában készült tudáspróba típusú feladatlapokat tartják hasznosak, mivel azonnali értékelést és kiigazítást kaphatnak a válaszaikra.

A 12. kérdésben arról kérdeztem a diákokat, hogy mit visznek magukkal. Néhány tanulói vélemény:

- *Nekem tetszettek ezek az anyagok, volt olyan, ami nehéz volt, de a végére megértettem az összes témát.*
- *Nekem nagyon tetszett(ek) a számítógépes feladatok. Nagyon fáradtak voltunk. Sok tudást vittem magammal.*
- *Nagyon tetszett az, hogy számítógépen dolgoztunk. Szerettem a szög és szögfelező szerkesztését. Szerettem a gépen való feladatokat.*
- *Mivel sokkal érdekesebbek voltak számítógéppel az órák, ezért a tudás anyagok is jobban megmaradtak a fejemben.*

Úgy gondolom, hogy a kiválasztott eszközök és módszerek alkalmasak a kompetenciamotiváció és a teljesítménymotiváció fejlesztésére (részletesebben lásd 34. oldalon). Az eredmények alapján látható, hogy az alkalmasan megválasztott oktatóprogramok, animációk, tanórai, illetve egyéni célra készített interaktív feladatlapok segítségével a szívesen végzett számítógépes tevékenység a tanulás javára fordítható, pozitívan hat a diákokra kognitív, érzelmi szempontból egyaránt.

Sikerült megragadni és a tanulás szolgálatába állítani a diákok kíváncsiságát, felfedezés vágyát, a feladatlapok változatos feladataival sikerült bevonni a diákokat a tevékenységbe, a megélt sikerek erősítették az énhatékonyság érzését és a belső motivációt. A feladatlapok segítségével jelentős autonómiát is biztosíthattunk a diákoknak. Ugyanakkor az interaktív feladatlapok osztály - és egyéni szinten is azonnali teljesítmény-visszajelzést biztosított, ami kedvezett a megfelelő szint beállításának és a diákok reális önértékelésének.

A tananyag gyakorlására felhasznált tartalmak a tananyagon túlmenően is többféle kompetencia fejlesztéséhez hozzájárultak és ezt szórakoztató módon tették. A beszélgetések és a kérdőív válaszai szerint hasznosak voltak a felkészülésben.

### **Az IKT vs. hagyományos kísérlet további tapasztalatai**

A tanulók körülményeit és időbeosztását ismerve az iskolai tevékenység IKT támogatás szempontjából egyértelműen a személyi számítógép és az okostábla dominál, az otthoni tanulásban és szabadidőben a táblagép és az okos telefon. Az iskolai számítógépezés, különösen az egy diák-egy gép munkamódszer valóban felkelti a tanulók érdeklődését a számítógépes feladatok iránt. Igyekeztem olyan papíralapú feladatlapokat készíteni, amelyek akkor is emlékeztették a diákokat a számítógépen látott animációkra, amikor nem számítógépes környezetben dolgoztak.

Kognitív értelemben kevesebb pozitívum írható az IKT eszközökkel segített oktatás javára. Egyrészt a nagyon szép, kompakt ábra túlságosan hihető tulajdonságokat sugall és háttérbe szorul a bizonyítási igény. Másrészt, ami a képernyőn nyilvánvaló, de nem kap külön megerősítést, magyarázatot, az csak az epizodikus memóriába kerül (tudatos felhasználással előhívható ugyan az epizodikus memóriából), a munkamemóriából eltűnik a gép kikapcsolásakor és nem megy át a hosszútávú memóriába.

A kísérleteim során is beigazolódott, hogy fontos az egyensúly és a mértéktartás (97. o.). Az egymást segítő, harmonikus hatások (látvány és hang) irányítják a figyelmet, megkönnyítik a tanulást.

Érzelmileg a jól elkészített IKT gyönyörködteti a diákot és a tanárt is. Megtanítja a színek és a formák hatására, igényességre nevel. Míg az információ lehet túl sok is, ami megoszthatja, elvonhatja a diákok figyelmét, és ha nem vigyázunk, a tartalmilag és formailag összehangolatlan alkalmazások

leronthatják egymás hatását. Bár jó többféle érzékszervre hatni, de ez a hatás diszharmonikus is lehet (piros, szürke).

Az IKT eszközök segítségével kevesebb idő és energia ráfordítással érhető el és állandósítható a partneri légkör az órán egymás között és a tanárral (Mi és a Dolog). Ez a partnerség nem ritkán a normál tanterembe is átmegy. Ebben a légkörben érvényesül a tévedés joga, amit aztán kiigazítani is könnyebb. Dominál a segítő kritika, aminek az elfogadása nem rontja az énképet. A partneri interakcióban lehet, szabad, kell kérdezni és könnyebb a mondanivalót megfogalmazni.

Viselkedésforma szempontjából a diákok nyitottabbak, bátrabban kísérleteznek, nehezebb problémáknak is könnyebben nekikezdenek, akkor is, ha csak rész megoldásra van remény.

A tanári magyarázathoz használt szemléltető eszközök (prezentáció, GeoGebra animációk, stb.) a tapasztalatok szerint segítik a megértést, emellett érdekesebbé tették a frontális munkamódszert. A fogalomépítést jobban megalapozza a számítógépes tapasztalatszerzés.

Az IKT eszközök használatával a vizsgált geometriai alakzatok élmény jellegű, személyes felfedezése kerül előtérbe és ezáltal az alakzatok optikai jellemzői is nagyobb hangsúlyt kapnak.

A hagyományos tanítás során ott lett gyengébb a teljesítmény, ahol többet kell írni, számolni, rajzolni (nemesak észrevenni), ezért a jövőben több segítséget építünk a feladatlapokba. Az IKT-s órákon pedig törekedni kell arra, hogy többet dolgozzanak papíron.

#### **4.3. Az IKT támogatás és az előhívásos tanulási módszer összeegyeztethetősége**

Mivel a vizsgált két módszertani megoldás (az előhívásos tanulási módszer bevezetése és az IKT) különböző előnyökkel jár, érdemes kipróbálni,

hogy alkalmazhatók-e együtt, azaz nem rontja-e le egymás hatását a színes, érdekes, mozgalmas óravezetés és az előhívásos módszer. Azt gondolom, hogy a két módszer összeegyeztethető.

### **IKT segítségével könnyebben megvalósítható az előhívásos tanulás**

Választhatunk olyan IKT-s támogatást, ami jól segíti az óravégi és a késleltetett visszakérdezést.

Választhatunk olyan alkalmazást, amely segíti az azonnali visszajelzést és a diákteljesítmény áttekintését. Ilyen alkalmazások például a Redmenta (magyar), vagy a matematikai alkalmazásra jobban felkészített EduBase (magyar), az ukrán oktatáshoz készült Online Test Pad (orosz, ukrán), a már elkészített hagyományos papíralapú feladatlapok digitalizálásában és interaktívvá tételében segíthet a Liveworksheets (spanyol), stb. Az óravégi visszakérdezésnél azonnali visszajelzést kaphatnak a kérdések és a válaszok kivetítésével.

Az ütemezett (óravégi, egy-két napos és hosszabb idejű) előhívás második fázisa ugyanezekkel az eszközökkel támogatható, hiszen beállítható a feladatlap hozzáférési ideje, a kitöltések száma, a beküldési határidő. Mindez egy adatbáziskezelővel kiegészítve lehetővé teszi a teljesítmények áttekintését, az egyéni és csoportos teljesítmény követését, típushibák, illetve homályban maradt részletek megkeresését. A matematika tanárok feleltválasztós tesztekkel szembeni ellenérzését is sikerült csökkenteni, mivel a tanár által javítandó kifejtős válaszok beküldésére is lehetőség van.

### **Az előhívásos tanulás kompenzálhatja az IKT negatív hatását**

A hét éves tanítási tapasztalatom alapján úgy látom, hogy az egyre inkább felhasználóbarát IKT eszközök és alkalmazások nagyon jól aktiválják a diákokat (a tanár feladata, hogy ezt a felkeltett érdeklődést meg is tartsa). Ugyanakkor az élmény a tudás a képernyőn marad, kikapcsolás

után nem viszik magukkal. Felszólításra is kevesebbet jegyzetelnek, nem rögzítik felfedezéseiket, megfigyeléseiket még a feladatlapon sem. A kiadott, utólag is elérhető prezentációk ugyan tanulságos minták a jegyzetelésre, a lényeg kiemelésére, esztétikus elrendezésre, de a prezentáció ideje alatt felmentik a diákat az egyidejű együttműködés, megfigyelés, gondolkodás alól. Azt gondolják, hogy majd otthon átnézik. Az információ aktualitása a halogatással csökken, az elhalasztott feldolgozás közben, szükség esetén, nem kap a diák a társaktól és a tanártól segítséget.

Ezeket a negatív hatásokat úgy foglalhatjuk össze, hogy tolják a diákokat az ismételt tanulás irányába. Ezt a negatív hatást akartam kompenzálni az előhívásos tanulási módszer következetes alkalmazásával.

Ugyanakkor az IKT támogatás bevezetése nem halogatható, erre figyelmeztettek például a világméretű koronavírus járvány miatt bekövetkezett változások. A távolléti oktatás bevezetése a megszokott jelenléti tanítás helyett jelentős kihívás elé állította az intézményeket, a pedagógusokat, a diákokat, a szülőket és a szolgáltatókat egyaránt.

Számos tényező nem állt rendelkezésre sem eszközök, sem személyi feltételek terén, sem pedig szemlélet terén. Még a jól felszerelt háztartások számára is komoly szervezési feladat volt a home office-ban dolgozó felnőttek és több iskolás gyerek kiszolgálása. Egyik napról a másikra kellett több ország oktatási rendszerének, köztük a kárpátaljai/ukrajnai oktatás-irányításnak is, több éves lemaradásból felzárkózni a digitális oktatásban. Azokban az oktatási intézményekben, melyek már rendelkeztek valamilyen egységes keretrendszerrel könnyebb volt az átállás fizikai kivitelezése, szemben azokkal, ahol részben vagy teljesen ismeretlenek voltak a tanulásra alkalmas rendszerek vagy annak egyes funkciói. Éppen ezért a kezdetekkor sok iskolában, többek között a mi intézményünkben is, kiadott feladatokra

épülő távoktatási formában zajlott a tanítás. A tanárok írott, vagy videóanyagokat állítottak össze, melyeket egy közös felületen (pl. az iskola honlapján) tettek közzé a diákok számára, és előre megadott határidőkre kellett elvégezni és visszaküldeni (emailben vagy a közösségi médiák felületein keresztül) a diákoknak a teljesítendő feladatokat. A távolléti oktatás előnyei közt említendő, hogy mindenki saját magának oszthatta be az idejét, úgy ahogyan tudta és akarta. Hátránya, hogy többszörösen leterheli a tanárt (kivitelezés, javítás, különböző felületekre beérkező válaszok összegyűjtése és értékelése). A diák és a szülők számára elég nagy megterhelés volt, hogy különböző platformokról kellett összegyűjteni az információkat, a válaszokat az adott platform szabályai szerint visszaküldeni. Közvetlen interakcióra nem volt mód és nagyon megnövekedett a tanároknak küldött üzenetek száma.

A hosszan elhúzódó járványhelyzetben minden intézmény törekedett a számára megfelelő keretrendszer megtalálására és bevezetésére, hogy ezáltal biztosítani tudják a minőségi oktatást. Így történt meg az átállás (iskolánként változó tempóban). Viszonylag rövid idő alatt átalakult az osztálytermi személyes tanulás otthoni szobákban, virtuális tantermekben folyó óraszerű tanulás-tanítássá. A tanárok rendes órarend szerint dolgoztak, ami szintén rengeteg plusz munkát, felkészülést is jelentett számukra. A diákoknak az óra ideje alatt bejelentkezve kellett lennie, hogy ne maradjanak le. E sorok írásakor is számos intézményben, köztük a kárpátaljai intézményekben is, a kész helyzetet kezelik webes kontaktórákkal, feladatkiadással.

A kialakult helyzetre reagálva a különböző oktatást segítő rendszerek fejlesztői is a felhasználók segítségére siettek. A fejlesztők az oktatást segítő változtatásokat, részben új szolgáltatásokat vezettek be, hogy ne a pedagógusok ügyességén múljon a megfelelő használat.

A két legszélesebb körben elterjedt intézményi keretrendszerek a *Google Workplace* (korábban G-Suit) és a *Microsoft Office 365*. Alapvetően mindkettő egy felhőalapú platform, amelyet elsősorban vállalatoknak szántak, de meghatározó lépéseket tettek az oktatási verziók kialakításában is. Szabadon elérhetővé tették a rendszer által tartalmazott összes applikációt, rengeteg tárhelyet kínálva az oktatók és a hallgatók számára egyaránt.

A járvány hatására mindkét platform fejlesztői új funkciókkal egészítették ki a rendszerek applikációit, nőtt a szolgáltatások száma és javult a minősége is. Ilyen volt például a Microsoft Teams szoftverénél a valós idejű zajcsökkentés, az offline támogatás. Nagy előny a különválasztott chatablak. Mindkét rendszerrel fontos újítás a hagyományos tanórai jelentkezést helyettesítő „Rise up” funkció. A Google egyik azonnali újítása a „Fehértábla” szolgáltatás, amit meg lehet osztani a diákkal és interaktív beszélgetés alakulhat ki. Ezen kívül további újításokat is kiviteleztek.

Gyakori jelenség, hogy az intézménynél nem komplex rendszerek kerültek bevezetésre (például a G-Suit), hanem annak részeként szereplő applikációkat önálló egységként (Classroom) alkalmazzák, amelyek más filozófia szerint működnek. Ez még a gyakorlott számítógéphasználókat is (vagy talán őket még jobban) próbára teszi. Emellett számos webkommunikációs alkalmazást állítottak a tanulási-tanítási folyamat szolgálatába, mint például: *a Microsoft Teams, Google Meet, Discord, Skype, Zoom, eduMEET* és még sorolhatnánk.

A karantén időszak alatt számos gyakorlati kihívás keletkezett, melyek egy része máig nem megoldott. Ezek közé tartozik mind a diákok, mind a tanárok eszközellátottsága, eltérő digitális kompetenciája, programismerete. Az eltérő ellátottság infrastruktúra (internetkapcsolat, aktívtábla, stb), segédanyagok terén különböző utakra kényszerítette a pedagógusokat. Az

eredményesség ellen hatottak az objektív tudásmérés feltételének hiánya, a diákok érdektelensége, stb. Elég megterhelő az is, hogy napi szinten több órát ülnek az elektronikus eszközök előtt.

Az elektronikus eszközökkel segített oktatásra való átállás a szülőket is próbára tette. Főként az alsó tagozatos tanulók szüleit érinti. A felsőbb osztályokban nyomatékosítani kell a diákokban, hogy a távoktatás nem azonos az oktatási szünettel, ami igényli a szülők támogató és motiváló közreműködését is. A sikeres távoktatás még több önálló tanulást igényel a diákok részéről. A hatékonyság érdekében a tanár-diák-szülő közötti együttműködésre továbbra is nagy szükség van.

Bár sokan digitális oktatásnak nevezték és még nevezik most is a járvány miatt bevezetett online oktatást, azonban ez inkább nagyrészt csak a digitális eszközök által megvalósult távolléti oktatás. Mindazonáltal a kialakult járványhelyzet és annak következményei rávilágítottak arra, hogy a digitális eszközök oktatásban való alkalmazása mennyire fontos és szükségzerű. Először is, a járvány idején ezek az eszközök biztosították (és teszik lehetővé most is) a távoktatás kivitelezését. Emellett ezek az új technológiák tették lehetővé az egymással történő kapcsolattartást, valamint közszolgáltatásaink működése miatt is létfontosságúak.

Nem szabad megfeledkezni azonban a helyzetben rejlő lehetőségekről sem. Ennek pozitív hozadéka lehet a digitális eszközök nagyobb számban való alkalmazása a megszokott tanulási-tanítási folyamatban. A távoktatás keretében fölfedezett, megtanult készségek hozzájárulhatnak a modernebb és magasabb szintű oktatáshoz a visszatérés után. Már a távoktatási felületek használata is digitális kompetenciafejlesztő, mivel a mindennapi gyakorlatban felhasználható tudást biztosít. Mindenki a saját tapasztalataiból próbálta kihozni a legtöbbet, szemléletesebben tanítani az interneten

fellelhető segédanyagok és szemléltető eszközök segítségével, ez pedig remélhetőleg nem múlik el nyomtalanul, de ezek a hatások csak hosszú távon derül majd ki.

Véleményem szerint a távoktatás alatt nehezebb a diákokat rendszeres tanulásra fogni, ezért olyan módszerekkel kell oktatni, mellyel minél több fogalomcsíra kialakuljon, ami aztán egyedül is folytatható és ilyen formában hatékonyabb ismeretátadás várható egy-egy online óra által. Éppen ezért meggyőződésem, hogy az online órákon (távoktatás) még inkább szükség van az előhívásos módszerre, mert eleve hívogat az, hogy a telefont nyomkodja, az ablakon kinézzen, a barátjával játsszon, stb. Emellett a tananyag digitális eszközökkel támogatott szemléletes átadása motiváló hatású, így a két módszer együttes alkalmazásával sok kívánt ismeretet el tud sajátítani a diák.

## 5. A HIPOTÉZISEK ÉS A KUTATÁS EREDMÉNYEI

### 1. hipotézis

Az eszköz- és programismeret elsajátítására fordított idő és energia nemcsak a digitális kompetenciát fejleszti, hanem

- A) a tanári magyarázatban alkalmazott fokozott IKT támogatással tanuló osztály, és az „egy diák-egy gép” formációban tanuló osztály is legalább olyan eredményesen sajátítja el a matematika tananyagot, mint a hagyományos módszerrel tanuló;
- B) az IKT-s osztály viszonya a matematika órához és a matematika tanuláshoz pozitívan változik.

A hipotézis A) részének vizsgálatához egyrészt a *tanári magyarázat során fokozott mértékben alkalmazott IKT eszközök* segítségével, illetve az *előhívásos módszerrel* tanuló osztályok teljesítményét hasonlítottam össze a K3 kimeneti mérés alapján (101.o.). Másrészt az *egy diák-egy gép formáció* szerint tanuló, illetve a *hagyományos módszerrel* tanuló diákok teljesítményét a K4 kimeneti mérés alapján hasonlítottam össze (123.o.).

Az összehasonlítás alapján az *aktív tábla használatával támogatott* módszer szerint tanuló diákok néhány esetben olyan előnyre tettek szert, hogy az *előhívásos módszer* szerint tanuló diákok teljesítményénél is jobbat nyújtottak (1.a, 3.a, 5.a, 5.d, 6.b részfeladatokban, 96.o.). Sőt, a hagyományos eszközökkel tanuló egy évvel idősebb magyarországi osztály eredményét is felülmúlták a feladatok egyharmadában. Az *egy diák-egy gép formáció* szerint tanuló diákok több időt és energiát fektettek az eszközhasználat elsajátításba, mint a hagyományos módszerrel tanuló diákok, de meg is térült a befektetett energia, mert a feladatok nagyobb részében jobb lett az IKT-s osztály teljesítménye.

Az alkalmazott módszer hatására a diákok tudása közötti különbségek kisebbek (a gyengébben teljesítőknek segít a felzárkózásban), mint a hagyományos módszerrel tanulók esetében (részletesebben lásd a 128. o.).

A hipotézis B) részét támasztja alá, hogy az IKT-s osztály tanulói befogadták az alkalmazott eszközöket, nemcsak a matematika órai, hanem

tanórán kívüli tanulmányuk eszközévé is vált. Ugyanakkor megfigyeléseim alapján az IKT eszközökkel tanított diákok kitartóbban, bátrabban kísérleteztek (lásd 124. o.).

Az IKT-s osztály matematika órával kapcsolatos attitűdje az eszközhasználati szokásokat vizsgáló kérdőívre adott válaszok alapján, illetve a diákokkal folytatott személyes beszélgetések és megfigyelés alapján jellemezhető (amint a 132. oldalon részletesebben is olvasható).

Az alkalmasan megválasztott informatikai eszközök oktatásban történő alkalmazása, illetve a tanórai vagy egyéni tanulási célra készített interaktív feladatlapok segítségével sikerült a szívesen végzett számítógépes tevékenységet a tanulás javára fordítani, pozitívan hatott a diákok attitűdjére kognitív és érzelmi szempontból egyaránt. A tanulók jobban érdeklődnek a tananyag iránt.

## **2. hipotézis**

Az előhívásos tanulási módszer szerint tanuló osztály tudása mennyiségben legalább olyan megbízható, mint

- A) a hagyományos módszer szerint tanulóké;
- B) a fokozott IKT támogatással tanulóké;
- C) a hagyományos tanulási módszerrel tanuló 7. osztályos magyarországi tanulóké.

A tudásmennyiséget illetően beigazolódott a hipotézis, amint a K1 (előhívásos és hagyományos); a K3 (IKT és előhívásos), valamint a K5 (magyarországi hagyományos és kárpátaljai előhívásos) kimeneti mérések mutatják (83., 101. és a 104. oldalakon).

## **3. hipotézis**

Az előhívásos tanulási módszer alkalmazásával felépített fogalmak tartósabban beépülnek a tudáshálóba. A tudásszint közép- és hosszútávon az előhívásos tanulási módszer javára változik.

A mélyebb, tartósabb tudásra a K2 késleltetett kimeneti mérés alapján következtethetünk (részletesebben lásd 84.o.).

## 6. KITEKINTÉS, DISZKUSSZIÓ

*Legtöbbször úgy fedezzük fel, mi az, ami működik, ha megtudjuk, hogy mi nem működik; aki soha nem hibázott, az valószínűleg soha nem is jött rá semmire.*

*(Samuel Smiles)*

A kísérletek tapasztalatai alapján változtatni fogok a tanmeneten abban az értelemben, hogy a különböző előjelű számokkal végzett műveletekre egy kicsit több modellt, időt meg gyakorló feladatot szánok.

A feladatlap a várakozásnak megfelelően jól segítette a munkát, a tanulás minden fázisában jól lehet alkalmazni. A jövőben még több figyelmet fordítok arra, hogy egy feladat vagy feladatrészlet megoldásához szükséges kognitív stratégiák mindegyikére rámutasson a feladatlap. Emellett a meglévő feladatlapjaimat részben át fogom dolgozni interaktív feladatlappá.

### 6.1. A kényszerű átállás digitalizált oktatásra

E dolgozat írása közben éltük át Európa szerte azt a helyzetet, hogy a távolléti oktatás „rákényszerítette” az összes tanárt az IKT eszközök és az internet valamilyen szintű használatára. A távolléti oktatás nem valósulhatott volna meg az IKT eszközök alkalmazásával kapcsolatos kutatások és közzétett eredmények, tapasztalatok nélkül (Okos Doboz, Geomatech, LearningApps, SuliNova, Redmenta, Online Test Pad, Kahoot, Socrative, EduBase, ...). A pandémia idején hozzáférhetővé tették a digitalizált tananyagokat azok a kiadók, szerzők is, akik máskor feltételhez kötötték a felhasználását (Mozaik Kiadó, Matek Oázis, Wolfram Alpha, Okostankönyv, Liveworksheets, ...). Erre nagyon nagy szükség volt, mert a távolléti oktatásra végkép nem voltak felkészülve a pályán levő pedagógusok. Abból a szempontból is hiányos volt a felkészültség, hogy hogyan kell használni a közreadott tananyagokat és segédeszközöket, illetve abból a

szempontból is, hogy milyen elvek, kritériumok alapján érdemes elköteleződni egy-egy platform mellett. Ma már van annyi pedagógiai szakértelem a programfejlesztők birtokában is, hogy ne annak kelljen örülni, amit a program tud, hanem azt kelljen a programnak tudni, amire a pedagógiai folyamat adott fázisában (tartalom, kezelhetőség, látvány, kommunikáció szempontjából) szükség van (lásd 19., illetve 16. o.).

Célszerű lenne felmérni, hogy a kényszerű digitalizálásnak

- melyek a megtartandó összetevői (digitális napló, digitális kapcsolat-tartás a szülőkkel);
- melyek a kiküszöbölendő gyerekbetegségei (többféle eszköz, túl sokféle platform);
- milyen pozitív és negatív hatása van a tanárookra;
- milyen pozitív és negatív hatása van a diákokra?

Ez utóbbi témában Magyarországon már folyik kutatás (Rózsahegyi, 2020). Az egyik budapesti iskolában elkészült kiértékelés alapján a távolléti oktatás alatt számos pozitív változás is volt (több szabadidő, az online kapcsolat pontosabb és felelősségteljesebb kihasználása).

## **6.2. Az előhívásos módszer beillesztése a tanulási folyamatba**

A kísérleteim során tapasztalt pozitív hatások miatt őszintén és bátran merem javasolni matematika szakos kollégáimnak az előhívásos tanulási módszert. Annak ellenére hatásos volt a módszer, hogy nem sikerült mindig a kísérlet szempontjából legjobb kivitelezést megvalósítani. Van azonban az előhívásos módszer sikerének (és általában a tanulók bevonódásának) egy elengedhetetlen feltétele: *Nem azt akarjuk kideríteni, hogy mit nem tud a tanuló, hanem azt akarjuk tudatosítani, hogy mit tud.*

*Tantervi kötöttségek*

A matematikadidaktikában elfogadott nézet, hogy a fogalmakat a fogalomcsírából kiindulva építjük fel és fokozatosan illesztjük a tudáshálóba (a spirálitás elve szerint). A spirális felépítéshez jól illeszthető az előhívásos tanulási módszer.

A Kárpátalján érvényes tanügyi szabályozás nem elég rugalmas ahhoz, hogy egy tanár egyik napról a másikra új tanulási módszert vezessen be. A felépítést illetően komoly akadály, hogy a hagyományos tanmenet szerint nem matematikát, hanem algebrára és mértanra szétválasztott fogalmakat tanítunk. A tanterv a mértant sem egységes anyagként, hanem sík- és térgeometriára bontva kezeli. Ezek az elképzelések határozzák meg az egyetlen kötelező magyar nyelvű tankönyvet.

#### *Az előhívásos tanulást segítő digitális eszközök és módszerek*

A Redmenta és a hasonló feladatlapkészítő rendszerek elősegítik az előhívásra, tesztelésre fordított idő intenzívebb kihasználását. A hagyományos, papíralapú tesztlapok javításakor a diák maga hasonlította össze a saját eredményét az elvárt megoldással, az online kiértékelésű feladatlapok személyes visszajelzést, apró eltérések tudatosítását is lehetővé teszi. A digitális módszer a diák számára teljesítmény-visszajelzést biztosít, ugyanakkor az így keletkező adatbázis a tanár számára is megbízhatóan jelzi a tanulás hatékonyságát (feladatonkénti statisztikák, diagramok).

### **6.3. IKT eszközök a jelenléti oktatásban**

Kísérleteim alapján is beigazolódott, hogy az IKT eszközök a tanítás minden fázisában sokoldalúan alkalmazhatók *az érdeklődés felkeltésére, szemléltetésre, differenciálásra* akár ismeretátadásról, rendszerezésről, gyakorlásról, illetve számonkérésről és értékelésről van szó. A diákok a

programok segítségével olyan szituációkat is megismerhettek, kipróbálhattak, elemezhetek, amelyekre a hagyományos matematikaórán nem volt lehetőség (a tanári szerkesztés pontos megfigyelése).

Némelyik tananyaggal kapcsolatban nehézségbe ütközött megfelelő IKT támogatást találni. Ugyanakkor könnyebben tudok elemei geometriát tanítani IKT támogatással, mint hagyományosan. Érdekes volna megtudni, hogy mi múlik a tanár személyiségén és mi az adott tananyagon.

Valóban probléma, hogy a különböző platformok és eszközök nem ugyanazt az élményt adják (GeoGebra PC-n, illetve tableten), az egységesítésnek pedig anyagi akadály van. A diákok is szívesen készítenének a kísérlet során megismert animációkhoz hasonlókat. Ehhez persze jobban meg kell ismerni az adott programot. A kiemelkedő, sokoldalú programok (Redmenta, GeoGebra, ...) más tantárgyakban is hasznosak lennének, így érdemes lenne *tantestületi összefogással* néhányat kiválasztani, és azok használatát az informatika oktatás keretében tanítani.

Az a tudat, hogy a digitalizált tananyagok bármikor, bárhol elérhetők az ismétléses tanulás irányába terelheti a diákokat. Ez ütemezett előhívással kompenzálható. További kutatás szükséges annak eldöntéséhez, hogy a két módszer (IKT és előhívás) nem rontja-e le egymás hatását.

Az eredmények láttán megerősítve érzem magam a fokozott IKT támogatást illetően. A többi osztályomat is hasonló szellemben kívánom tanítani. A „kölcsonzött” anyagok használatával megtapasztaltam, hogy még az egyforma tanterv szerint haladó két osztályom igényei között is adódtak különbségek. Például a lakóhely szerinti osztályszervezésnél szükség lehet a nyelvi szintek igazítására a nyelvhasználati különbsége miatt. Ugyanakkor fontos az egységes standardizált módszerek, eljárások, megfogalmazások határok nélküli megismerése, amelyben a digitalizált (és

lektorált) tananyagok igen hasznos eszközök (Geomatech). Az általam elkészített anyagokat (ezekkel a tanulságokkal együtt) szeretném kollégáim rendelkezésére bocsájtani (például a Classroom segítségével).

Az interaktív alkalmazások hatékony felhasználásának feltétele, hogy a kezelése könnyen megtanulható legyen, áttekinthető legyen, hogy hol üzen a gép (lehetőleg konstans helyen). A kísérletek tanúsága szerint a Redmenta azért olyan népszerű, mert könnyű észrevenni, hogy hová és mit kell írni, illetve hol és mit válaszol.

A modern módszerek mellett (néha azok ellenére) meg kell őrizni a sokféleséget (fejszámolás, elképzelni fejben a lemeztést, kiegészítést).

Az IKT-val támogatott oktatás térhódítása ellen hat, hogy

- iskolánk a szaktantermeken kívül nem biztosít internet hozzáférést;
- az intézményben megtalálható interaktív táblák szoftverei elavultak;
- az óraelosztásból adódóan nehéz volt megszervezni, hogy a számítógépes szaktanteremben legyenek az órák.

Az IKT támogatással megvalósított aktív tanuláshoz elsősorban a wifi ellátottság hiányzik.

## 7. ÖSSZEFOGLALÁS

A magyarországi matematikatanítási hagyományok és a didaktika iránti érdeklődésem vezettek a doktori képzésbe, és mint matematika-informatika szakos tanár úgy gondoltam, hogy az IKT eszközök beiktatásával a matematikatanítás hatékonyságát javítani tudom.

### A kutatás rövid leírása

Kutatásomban a matematikatanulás, tanítás folyamatának egyes fázisaihoz olyan eszközöket, programokat és alkalmazásokat kerestem, illetve fejlesztettem (Jakab, 2020b), amelyekkel az adott fázis hatékonyan támogatható és a kisebbségi magyar nyelvű oktatásban hozzáférhető.

Az IKT felhasználhatóságát kutatva a témavezetőm és mások felhívták a figyelmemet arra, hogy az IKT használata veszélyes is tud lenni. Gondolhatunk itt például arra, hogy az IKT a tanulás pontosságát a matematikában szokásoshoz viszonyítva rontja, bizonyos felületességre szoktat. A negatív hatások kompenzálási lehetőségeként témavezetőm felhívta a figyelmemet az előhívásos tanulási módszerre (Jakab, 2020c). Ezáltal módosult a kutatási tervem, így alakult ki a három kísérlet.

Három tanulási módszert hasonlítottam össze párosával (IKT támogatásos, előhívásos, hagyományos), ennek megfelelően három tanítási kísérletet végeztem. A kísérletekben résztvevő két párhuzamos osztályban ugyanazt a tananyagot dolgoztuk fel megegyező tanmenettel, de más-más módszerrel.

*Az első kísérletben* éppen a hagyományos és az előhívásos módszerrel tanuló diákok teljesítményét hasonlítottam össze. A vizsgálat középpontjában az állt, hogy a matematika órák mindennapi munkarendjébe beilleszhető-e az előhívásos tanulási módszer, és ha igen, milyen hatékonysággal.

*A második kísérletben* két osztály teljesítményét vizsgáltam. Az egyik előhívásos módszerrel tanult, a másik osztályban a tanári magyarázatok szemléltetése fokozott IKT támogatással folyt, valamint a tanár-diák

interakciók jelentős részét az okos tábla bevonásával valósítottuk meg.

Ebben a kísérletben nemcsak az én két Ukrajnában tanuló magyar anyanyelvű osztályom matematika-tanulásának eredményességét volt alkalmam összehasonlítani egymással, hanem egy Magyarországon tanuló osztályéval is.

*A harmadik kísérletben* a hagyományos, illetve az IKT eszközökkel támogatott tanulási módszer hatékonyságát hasonlítottam össze. Az IKT támogatás itt az egy diák-egy gép formációban való tanulást jelentette.

### **A kutatás hipotézisei**

#### ***Első hipotézis:***

Az eszköz- és programismeret elsajátítására fordított idő és energia nemcsak a digitális kompetenciát fejleszti, hanem

A) a tanári magyarázatban alkalmazott fokozott IKT támogatással tanuló osztály, és az „egy diák-egy gép” formációban tanuló osztály is legalább olyan eredményesen sajátítja el a matematika tananyagot, mint hagyományos módszerrel tanuló;

B) az IKT-s osztály viszonya a matematika órához és a matematika tanulásához pozitívan változik.

#### ***Második hipotézis:***

Az előhívásos tanulási módszer szerint tanuló osztály tudása mennyiségben és minőségben is legalább olyan megbízható, mint

A) a hagyományos módszer szerint tanulóké;

B) a fokozott IKT támogatással tanulóké;

C) a hagyományos tanulási módszerrel tanuló 7. osztályos magyarországi tanulóké.

#### ***Harmadik hipotézis:***

Az előhívásos tanulási módszer alkalmazásával felépített fogalmak tartósabban beépülnek a tudáshálóba. A tudásszint közép- és hosszútávon az előhívásos tanulási módszer javára változik.

A hipotézisek igazolását, illetve elvetését az alábbi kimeneti mérésekre alapoztuk:

K1) Összegző dolgozat

K2) Utóteszt

K3) Geometria dolgozat

K4) Témazáró dolgozatok

K5) Geometria dolgozat egy magyarországi 7. osztályban

A kísérletek dokumentációját a kísérletek során kitöltött feladatlapok (összesen közel 100), a rögzített osztálytermi interakciók (képek, videók), kérdőívek, megfigyelések képezték. Az elektronikus feladatlapokat a diákok tanórán kívül is megoldhatták volna, mégis az órán szántam rá időt, hogy valódi diákteljesítmény és közvetlen visszajelzés legyen. Ez az eredményesség dokumentálásánál is hasznosnak bizonyult.

### **A kutatás fontosabb eredményei**

*Az első hipotézis A) részének teljesülését alátámasztó eredmények*

1) *A tanári magyarázatban alkalmazott fokozott IKT támogatás és részben az ebből következő tanulói bevonódás hatékonyabbá tette a tanulás-tanítás folyamatát (K3 kimeneti mérés). Az interaktív tábla használatának néhány esetben olyan komoly előnyt tulajdoníthatunk, hogy az IKT-s osztály teljesítménye bizonyos pontokon (táblai szerkesztés) az előhívásos módszer szerint tanuló, de hagyományos eszközökkel dolgozó diákokénál jobb lett.*

2) *Az egy diák-egy gép formáció szerint tanuló diákok eszköz- és programhasználatból adódó többletterhelés dacára legalább olyan jól (sőt az egyik dolgozat alapján helyenként jobban) teljesítették a tantárgy követelményeit és az egyéni teljesítményeket illetően, mint a hagyományos osztály (K4 kimeneti mérés). Ugyanakkor az IKT használata számos egyéb kompetenciát is fejlesztett. Nem okozott gondot a különböző*

számítógépes programok használata, gyorsan elsajátították a hatékony órai használathoz szükséges ismereteket. A tanulók párhuzamosan szereztek matematikai és programhasználati tapasztalatokat, ami az eredményekben közvetlenül nem tükröződő többlettudást eredményezett. A diákok ügyesebben találták meg a tananyag összefüggéseit és magasabb szinten teljesítettek új probléma megoldásakor is.

*Az első hipotézis B) részének teljesülését alátámasztó eredmények*

Az IKT-s osztály matematika órával kapcsolatos attitűd kérdőív tanúsága szerint az IKT eszközök alkalmazása kognitív és érzelmi szempontból egyaránt pozitívan hatott. Az IKT hatására a tanulók jobban érdeklődnek a tananyag iránt, szerintük a tananyag érthetőbb és könnyebben elsajátítható általa. Az egyébként is szívesen végzett számítógépes tevékenységet az interaktív segédletek által sikerült a tanulás javára fordítani.

*A második hipotézis A) részére vonatkozó eredmények*

A diákok a megfelelő szoftverekkel segített szemléltetés miatt könnyebben elfogadják a kimondott állításokat, de éppen az eszköz jelenléte miatt nem gondolják alaposan végig. Így a számítógép az ismételt tanulás irányába terelheti a diákot. Ezt kompenzálni kell, gondoskodni kell az adott tulajdonságok tudatosításáról, elmélyítéséről. A K1 kimeneti mérés alapján bebizonyosodott, hogy az előhívásos tanulási módszer szerint dolgozó osztály teljesítménye jobb lett, mint a hagyományos módszer szerint tanulóké, így nem volt felesleges a ráfordított idő.

*A második hipotézis B) részére vonatkozó eredmények*

Az előhívásos módszer csaknem kiegyenlítette az IKT használata által szerzett előnyt. Az előhívásos tanulási módszerrel dolgozó osztály eredménye kedvezőbb, mint a kontrollosztályé, azaz az előhívásos tanulás valóban javította a teljesítményt (K3 kimeneti mérés).

### *A második hipotézis C) részére vonatkozó eredmények*

Az előhívásos módszerrel tanuló kárpátaljai 6. osztály eredménye a közös dolgozatban nem rosszabb, mint a magyarországi hagyományos módszerrel tanított 7. osztályé. A két osztály között nem volt szignifikáns különbség (K5 kimeneti mérés).

### *A harmadik hipotézis teljesülését alátámasztó eredmény*

A mélyebb, tartósabb tudásra a K2 késleltetett kimeneti mérés alapján megállapítható, hogy az előhívásos tanulási módszerrel tartósabb tudás szerezhető.

A kísérletek tanulságaiból látható, hogy a kapott eredmények egyhangban vannak a témában írt kutatásokkal és kiegészíti ismeretünket a vizsgált kérdésekben.

### **További megjegyzések, észrevételek**

#### ***Külső váratlan hatások***

A járvány világszerte új szituációt teremtett, kihívásként érte az oktatás irányítóit, végrehajtóit és alanyait a távolléti oktatás. Minden mozzanat megvalósítása IKT-s lett, nem csak azok, melyeket eredetileg szándékoztunk. Célszerű megvizsgálni a kényszerű digitalizálás pozitív és negatív hatásait mind a tanárok, mind a diákok körében. Mérlegelni kell, hogy mi az, amit érdemes megtartani (pl. közös internetes platform, a közzétett digitális tananyagok szigorúbb kontrollja).

#### ***További kutatási kérdések***

Mindkét vizsgált tanítási módszerrel kapcsolatban pozitívak a tapasztalataim, bevezethető a minden reguláris oktatásba, de további kutatási feladat, hogy mennyire ötvözhető az előhívásos tanulási módszer és a fokozott IKT támogatás.

Az általam elkészített feladatlapokat szívesen átengedem kutatási célra más kollégáknak. Magam is tervezem a módszer kiterjesztését más tananyagokra és más korosztályokra is.

## 8. SUMMARY

My interest in Hungarian mathematical teaching traditions and didactics led me to start my doctorate course (PhD), and as a teacher of mathematics and informatics, I thought that I could improve the efficiency of mathematics teaching by introducing ICT tools.

### **Brief description of the research**

In my research, I sought and developed (Jakab, 2020b) tools and software (applications) with the use of which certain phases of the mathematics learning and teaching process can be effectively supported and that are available to us.

While researching the usability of ICT, my supervisor and others drew my attention to the potential dangers of using ICT tools. We can think here for instance, ICT might degrade the accuracy of learning, concerning to usual of mathematics, ICT prompts us to a certain degree of superficiality. For ways to compensate for the negative effects, my supervisor called my attention to the retrieval-enhanced learning method (Jakab, 2020c). Therefore, my research plan has changed, resulting in three experiments.

In my teaching experiments, I compared the efficiency in learning mathematics of the classes learning by ICT-supported, retrieval-enhanced or traditional methods, and accordingly, I conducted three teaching experiments. We worked according to the same curriculum and material in the two parallel classes participating in the experiments, only with different methods.

In *the first experiment*, I compared the performance of students learning using the traditional and retrieval-enhanced methods. The focus of the study was on whether the retrieval-enhanced learning method could be integrated into the daily routine of mathematics classes, and if so, how effectively.

During *the second experiment*, I examined the achievement of two classes. One class learned by retrieval-enhanced method and in the other class by ICT-support method. A significant part of teacher-student interaction was implemented with the involvement of a smartboard.

In this experiment, I had the opportunity to compare not only the mathematics learning success of my two Hungarian-speaking classes studying in Ukraine but also that of a class studying in Hungary.

In *the third experiment*, I compared the effectiveness of the traditional and ICT-supported learning method. ICT-supported here meant learning in a 'one student-one computer' environment.

### **Research Hypothesis**

#### ***The first hypothesis:***

The time and energy spent on acquiring tool and program knowledge not only develops digital competence but also

- A) the class with enhanced ICT support used in teacher explanation and the class learning in a 'one student-one computer' formation, master the mathematics curriculum at least as effectively as the class where the traditional method is used;
- B) the attitude of the ICT-supported class changes positively towards mathematics lessons and learning mathematics.

#### ***The second hypothesis:***

The knowledge of the class learning with the retrieval-enhanced learning method is at least as reliable in quantity and quality as

- A) the knowledge of the class using the traditional method;
- B) the knowledge of the class using increased ICT support;
- C) the knowledge of 7th formers studying with the traditional method in Hungary.

### ***The third hypothesis:***

Concepts built by using the retrieval-enhanced learning method are more permanently integrated into the knowledge web. The level of knowledge changes in favour of the retrieval-enhanced learning method in the medium and long term.

The hypotheses were supported or refuted based on the following output measurements:

- O1) summary test
- O2) final test
- O3) geometry test
- O4) end-of-topic tests
- O5) geometry test in a 7<sup>th</sup> grade in Hungary

The worksheets filled in during the experiments (nearly 100 in total), the recorded classroom interactions (pictures, videos), questionnaires, observations provided the documentation of the experiments. The students could have filled in the electronic worksheets outside the classroom; however, I preferred to have them filled out in the class to be authentic student performance and direct feedback. This also proved useful in the documentation of effectiveness.

### **Main results of the research**

#### *Results supporting the fulfilment of part A) of the first hypothesis*

- 1) The increased ICT support *used in teacher explanation* and the partly consequent student involvement made the teaching-learning process more efficient (K3 output measurement). In some cases, we can attribute such a significant advantage to the interactive whiteboard that the performance of the ICT-supported class (whiteboard editing) was better than that of the students learning with the retrieval-enhanced method but with traditional tools.

2) Despite the additional workload caused by the use of tools and programs, students working in the '*one computer-one student*' formation performed at least as well (or even better in some areas based on one of the papers) in terms of subject requirements and individual performance as the class in which the traditional method was used (K4 output measurement). At the same time, the use of ICT has developed several other competencies. The use of various computer programs caused no problem for the students, quickly acquiring the knowledge necessary for effective classroom use. Students gained experience in both mathematics and program use, resulting in additional knowledge not directly reflected in the results. Students were more adept at finding correlations in the curriculum and also demonstrated a higher level of problem-solving skills when a new problem arose.

*Results supporting the fulfilment of part B) of the first hypothesis*

According to the attitudinal questionnaires of the ICT-supported class regarding maths lessons, the use of ICT tools had a positive effect on cognitive, emotional and behavioural aspects. As a result of ICT, students became more interested in the curriculum, noting that the use of ICT makes the curriculum more understandable and easier to master.

*Results for part A of the second hypothesis*

Students accept statements more easily because of the illustration aided by the right software; however, they do not think them through properly because of the presence of the tool. In this way, the computer might steer the students in the direction of re-learning. It should be compensated by ensuring and deepening of specific properties. Based on the K1 output measurement, it was proved that the performance of the class working according to the retrieval-enhanced learning method was better than that of the students working according to the traditional method, accordingly no unnecessary time was spent.

### *Results for part B of the second hypothesis*

The retrieval-enhanced method almost equalizes the benefits of using ICT. The result of the class working with the retrieval-enhanced learning method is more favourable than that of the control class, meaning that the retrieval-enhanced learning method has improved performance. (K3 output measurement).

### *Results for part C of the second hypothesis*

Based on the same paper, the results of the 6<sup>th</sup> formers in Transcarpathia learning by the retrieval-enhanced method are not worse than those of the 7<sup>th</sup> graders in Hungary taught by the traditional method. There was no significant difference between the two classes (K5 output measurement).

### *The result supporting the fulfilment of the third hypothesis*

Based on the K2 delayed output measurement, it can be concluded that more lasting and deeper knowledge can be acquired with the retrieval-enhanced learning method.

From the experiments lessons learned it can be seen that the obtained results are in agreement with the research written on the subject and complement our knowledge of the examined issues.

## **Additional comments and remarks**

### *External unexpected effects*

The epidemic has created a new situation worldwide, with distance learning challenging all members of education. All areas had to be implemented with ICT, not just the ones we originally intended. It is useful to examine the positive and negative effects of forced digitization among both teachers and students. Consideration should be given to what is worth keeping (e.g. common internet platform, strict control of published digital learning materials).

### ***Further research questions***

My experiences with both of the examined teaching methods are positive. However, a further research task is to find out how to combine the retrieval-enhanced learning method with increased ICT support.

I gladly hand over the worksheets I have prepared to other colleagues for research purposes. As for me, I plan to extend the method to other materials and other age groups.

## 9. IRODALOMJEGYZÉK

### Felhasznált irodalom

- [1] Abbott, E. E. (1909). *On the analysis of the factors of recall in the learning process*. The Psychological Review: Monograph Supplements 11(1), 159–177.
- [2] Adesope, O. O., Trevisan, D. A. & Sundararajan, N. (2017). *Rethinking the use of tests: A meta-analysis of practice testing*. Review of Educational Research 87(3), 659–701.
- [3] Ambrus, A. (1999). *A konkrét és vizuális reprezentációk használatának szükségessége az iskolai matematikaoktatásban*. Matematikadidaktikai Fórum, ELTE TTK Matematikatanítási és Módszertani Központ, Budapest. URL: <http://mathdid.elte.hu/html/forumtartalom.html#art>
- [4] Anderson, R., Manoogian, S. T. & Reznick, J. S. (1976). *The undermining and enhancing of intrinsic motivation in preschool children*. Journal of Personality and Social Psychology 34(5), 915-922.
- [5] Balázsi, I., Ostorics, L., Szalay B., Szepesi I., Vadász Cs. (2013). *PISA 2012 Összefoglaló jelentés*. Oktatás Hivatal, Budapest, 19-20. URL: [http://www.oktatas.hu/pub\\_bin/dload/kozoktatas/nemzetkozi\\_meresek/pisa/pisa2012\\_osszefoglalo\\_jelentes.pdf](http://www.oktatas.hu/pub_bin/dload/kozoktatas/nemzetkozi_meresek/pisa/pisa2012_osszefoglalo_jelentes.pdf)
- [6] Balla, I. (2018). *Ha elkezdjük használni, az szétrobbantja az iskolát*. 2019. március 5. URL: [https://hvg.hu/kultura/20180303\\_digitalis\\_pedagogia\\_prievara\\_tibor\\_nadori\\_gergely](https://hvg.hu/kultura/20180303_digitalis_pedagogia_prievara_tibor_nadori_gergely)
- [7] Bandura, A. (1994). *Self-efficacy*. In: Ramachaudran, V. S. (ed.): Encyclopedia of human behavior. Academic Press 4., New York, 71-81.
- [8] Barbarics, M., Rózsahegyiné, V. É., Wintsche, G. (2019). *A játékok fejlesztő hatása*. Mindenki Iskolája, ELTE, Budapest.
- [9] Barcsánszky, P. (2013). *BETT Show 2013-beszámoló*. Oktatási Hivatal, 2020. augusztus 28. URL: [https://www.oktatas.hu/kozneveles/ikt\\_korkep/esettanulmanyok/bett\\_show\\_beszamolo](https://www.oktatas.hu/kozneveles/ikt_korkep/esettanulmanyok/bett_show_beszamolo)
- [10] Bernáth, L., Szabó, Cs., Muzsnay, A., Szeibert, J., & Zámbó, Cs. (2018). *Az előhívási hatás eredményessége a deduktív gondolkodást igénylő feladatok esetén*. ELTE TTK Módszertani Kari TDK, 2019. június 3. URL: <https://web.cs.elte.hu/~csaba/tdk/>
- [11] Bernáth, L., Vásárhelyi, É. (2018). *Örömteli és eredményes matematika tanulás*. Rátz László Vándorgyűlés, Győr. 2018. december 27. URL: <https://slideplayer.hu/slide/15218758/>

- [12] Bruner, J. S. (1968). *Az oktatás folyamata*. Tankönyvkiadó, Budapest.
- [13] Bruner, J. S. (1974). *Új utak az oktatás elméletéhez*. Gondolat, Budapest.
- [14] Butler, A. C. (2010). *Repeated testing produces superior transfer of learning relative to repeated studying*. *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory, and Cognition*, 36(5), 1118–1133. URL: <https://doi.org/10.1037/a0019902>
- [15] Carpenter, S. K. & Pashler, H. (2007). *Testing beyond words: Using tests to enhance visuospatial map learning*. *Psychonomic Bulletin & Review* 14(3), 474–478.
- [16] Csapó, B. (1997). *A tanulói teljesítmények értékelésének mérési módszerei*. In: Pöcze Gábor (szerk.) *A közoktatási intézmények tevékenységének tervezése és ellenőrzése*. OKI, Budapest, 97–111.
- [17] Csiba, P. (2019). *A matematika és ezen belül a geometria oktatásának a helyzete a Szlovákiai iskolarendszerben*. Habilitációs értekezés, Eszterházy Károly Egyetem (DOI: 10.15773/EKE.HABIL.2019.003.), Eger.
- [18] Csíkszentmihályi, M. (2001). *Flow–Az áramlat: a tökéletes élmény pszichológiája*. Akadémiai Kiadó, Budapest.
- [19] Czeglédy, I. (2010). *Kompetenciaalapú matematikaoktatás*. Eszterházy Károly Főiskola, TÁMOP Eger.
- [20] Deci, E. L. & Ryan, R. M. (1985). *Intrinsic motivation and selfdetermination in human behavior*. Plenum Press, New York.
- [21] Dékány, É. (2019). My first experience of applying recall method in university mathematics education. In E. Kónya & Gy. Szanyi (Eds.), *Report of Meeting Researches in Didactics of Mathematics and Computer Sciences February 1- 3 (Vol. 17, p. 110)*. Stúrovo, Slovakia: University of Debrecen. DOI: 10.5485/ TMCS.2019.R029
- [22] Duma, L. és Monda, E. (2012). *Táblagépek oktatási eszközként való bevezetésének lehetséges hatásai*. *Információs Társadalom* XII, 3. szám, 15–48. URL: <https://dx.doi.org/10.22503/infars.XII.2012.3.2>
- [23] Dunlosky J., Rawson, K.A., Marsh, E.J., Nathan, M.J. and Willingham, D.T. (2013). *Improving students' learning with effective learning techniques: Promising directions from cognitive and educational psychology*. *Psychological Science in the Public interest*, 14(1), 4–58.
- [24] Ebbinghaus, H. (1885). *Über das Gedächtnis. Untersuchungen zur experimentellen Psychologie*. Duncker & Humboldt, Leipzig.

- [25] Education Office (2010). *Mathematics worksheet for 8 form 'care of talent' variant 4 February 2010*. URL: [https://www.oktatas.hu/pub\\_bin/download/kozoktatas/beiskolazas/feladatsorok/2010ev\\_gimn/09oszt/MT2\\_8.pdf](https://www.oktatas.hu/pub_bin/download/kozoktatas/beiskolazas/feladatsorok/2010ev_gimn/09oszt/MT2_8.pdf)
- [26] Fried, K. & Veres, E. (2017). Suggestions for Hungarian after-school enrichment programs for talented pupils in the Transcarpathians. Mathematics Teaching and Education Centre, ELTE. URL: <http://mathdid.elte.hu/html/forumtartalom.html#vtn2017>
- [27] Fried, K. & Veres, E. (2018). *Our duties in talent management in the light of the results of the International Hungarian Mathematics Competition of 2017*. Teaching Mathematics and Computer Science 16 (1), 55-71.
- [28] Gates, A. I. (1917). *Recitation as a factor in memorizing*. The Science press, New York.
- [29] Gedeon, V., Paróczay, E., Számadó, L., Tamás, B., Wintsche, G. (2015). *Mathematics textbook 7. Experimental Textbook*. Institute for Educational Research and Development (ISBN 978-963-682-820-2), Budapest, Hungary, 119.
- [30] Grolnick, W. S. & Ryan, R. M. (1987). *Autonomy in children's learning: An experimental and individual difference investigation*. Journal of Personality and Social Psychology 52, 890-898.
- [31] Herber, H.-J. (1994). *Innere Differenzierung*. Unser Weg, 49, 121–131.
- [32] Herber, H.-J. & Vásárhelyi, É. (2006). *Competence motivation and competence acquisition: functional didactic options by inner differentiation and individualization*. Teaching Mathematics and Computer Science (ISSN: 1589-7389) 4 (1), 1-52.
- [33] Herendiné-Kónya, E. (2015). *The level of understanding geometric measurement*. In: CERME 9-Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education, hlm. 536-542.
- [34] Hohenwarter, M., Hohenwarter, J., Lavicza, Z., Kreis, Y. (2008). *Teaching and calculus with free dynamic mathematics software GeoGebra*. ICME11, Monterrey, Nuevo Leon, Mexico. URL: <https://www.researchgate.net/publication/228869636>
- [35] Jakab, E. (2016). *Az oktatás során alkalmazható médialehetőségek*. Matematikadidaktikai Fórum, ELTE TTK Matematikatanítási és Módszertani Központ, Budapest.

- [36] Jakab, E. (2017a). *Hol tartok a kutatásban? Síkidomok területe átdarabolással.* (en: Where am I in my research plan? The area of plain figures with the help of dissection.) In: Report of Meeting Researches in Didactics of Mathematics and Computer Sciences January 27-28, 2017 Budapest, Hungary. Teaching of Mathematics and Computer Science, 15(1-2). DOI: 10.5485/TMCS.2017.R027
- [37] Jakab, E. (2017b). *GeoGebra munkalapok értékelése.* Varga Tamás Módszertani Napok, 2017. november 10-11. Matematikadidaktikai Fórum, ELTE TTK Matematikatanítási és Módszertani Központ, Budapest.
- [38] Jakab, E. (2018). *Hol tartok a kutatásban? A téglatest és a kocka elemzése.* (Where do I go in research? Analysis of cuboid and cube.) In: Report of Meeting Researches in Didactics of Mathematics and Computer Sciences January 26-28, 2018 Hajdúszoboszló, Hungary. Teaching of Mathematics and Computer Science, 16(1). DOI: 10.5485/TMCS.2018.R028
- [39] Jakab, E. (2019). *Pap sem beszél kétszer, hallgassák meg egyszer! Előhívásos tanulás.* (en: Neither priest speak twice, listen to him once! Learning with help of recall (testing) method) In: Report of Meeting Researches in Didactics of Mathematics and Computer Sciences February 1-3, 2019 Stúrovo, Slovakia. Teaching of Mathematics and Computer Science, 17(1). DOI: 10.5485/TMCS.2019.R029
- [40] Jakab, E. (2020a). *Értékelés és értékelés közötti különbség.* (en: Difference between evaluation and evaluation. ) In: Report of Meeting Researches in Didactics of Mathematics and Computer Sciences January 24-26, 2020 Sárospatak, Hungary. Teaching of Mathematics and Computer Science, 17(2). DOI: 10.5485/TMCS.2019.R030
- [41] Jakab, E. (2020b). *It is worth turning on GeoGebra 3D.* In: Ambrus, G., Sjuts, J., Vancsó, Ö., Vásárhelyi, É. (eds.) *Komplexer Mathematikunterricht: Die Ideen von Tamás Varga in aktueller Sicht.* Münster, Németország: WTM Verlag für wissenschaftliche Texte und Medien, 221-234. URL: <https://doi.org/10.37626/GA9783959871648.0.13>
- [42] Jakab, E. (Якоб Еніке) (2020c). *Преваги навчання з використанням методу генерації (пригадування) матеріалу.* Науковий Вісник Ужгородського університету. Серія: «Педагогіка. соціальна робота», 2 (47), 218-225.

- /Enike Yakob:*The benefits of retrieval-enhanced learning*. Scientific Bulletin of Uzhhorod University. Series: Pedagogy Social Work (ISSN 2524-0609), 2 (47), 218-225./
- [43] Jakab, E. (2021). *IKT eszközökre alapozott matematikaoktatás*. In: Kanyári József és Fejős Sándor (szerk.) *A nemzeti összetartozás jegyében*. Ages Quod Agis Nonprofit Kft. (ISBN: 978-963-87010-1-5), Szeged, 227-243.
- [44] Józsa, K. (2002). *Az elsajátítási motiváció pedagógiai jelentősége*. Magyar Pedagógia 102(1), 79–104.
- [45] Kang, S. H. K., McDermott, K. B. & Roediger, H. L. (2007). *Test format and corrective feedback modify the effect of testing on long-term retention*. European Journal of Cognitive Psychology 19(4-5), 528–558.
- [46] Keresztes, A., Kaiser, D., Kovács, G. & Racsomány, M. (2014). *Testing promotes long-term learning via stabilizing activation patterns in a large network of brain areas*. Cerebral Cortex 24(11), 3025–3035.
- [47] Kétyi, A. (2016). *IKT-val támogatott módszerek hatékonysága felnőttek nyelvoktatásában*. PhD értekezés, Szegedi Tudományegyetem, 70-71.
- [48] Koffka, K. (1935). *Principles of Gestalt psychology*. Harcourt, Brace, New York.
- [49] Kovács, Z., Cole, Zs. (2019). *Wise Use Of GeoGebra Supported By An Evaluation Routine*. The Electronic Journal of Mathematics and Technology (ISSN 1933-2823) 13, 2., 136-144.
- [50] Korenova, L. (2014). *Blended learning in teaching mathematics at primary and secondary school*. APLIMAT: 13th Conference on Applied Mathematics, Bratislava, 206-213.
- [51] Kromann, C.B., Jensen, M.L. & Ringsted, C. (2009). *The effect of testing on skills learning*. Medical Education 43(1), 21–27.
- [52] Köhler, W. (1959). *Gestalt psychology today*. American Psychologist, 14(12), 727–734.
- [53] Kuhl, J. (1999). *Der operante multi-motiv-test (OMT): Manual [The Operant Multimotive Test (OMT): Manual]*. University of Osnabrück, Germany.
- [54] Kuhl, J. (2000). *A functional-design approach to motivation and self-regulation: The dynamics of personality systems and interactions*. In: Boekaerts M., Pintrich P. R., & Zeidner M. (Eds.), *Handbook of self-regulation*. Academic Press, 111–169.
- [55] Kuhl, J. (2001). *Motivation und Persönlichkeit. Interaktionen psychischer Systeme*. Göttingen: Hogrefe.

- [56] Kuhl, J., Scheffer, D. & Eichstaedt, J. (2003). *Der Operante Motiv-Test (OMT): Ein neuer Ansatz zur Messung impliziter Motive*. In: Rheinberg, F. & Stiensmeier-Pelster, J. (Hg), *Diagnostik von Motivation und Selbstkonzept*. Göttingen: Hogrefe, 129-149.
- [57] Loftus, E. (1979). *EyeWitness Testimony*. MA: Harvard University Press, Cambridge.
- [58] Lavicza, Z., Haas, B., & Kreis, Y. (2020). *Discovering Everyday Mathematical Situations Outside the Classroom with MathCityMap and GeoGebra 3D*. In: Ludwig, M., Jablonski, S., Caldeira, A., & Moura, A. (Eds.), *Research on Outdoor STEM Education in the digiTal Age: Proceedings of the ROSETA Online Conference 6*, 23–30. URL: <https://doi.org/10.37626/GA9783959871440.0.03>
- [59] Molnár, Gy. (2007). *Új ICT eszközök alkalmazása az iskolai gyakorlatban*. In: Korom Erzsébet (szerk.): *Kihívások a XXI. század iskolájában*. Koch Sándor Tudományos Ismeretterjesztő Társulat, Szeged, 101–124.
- [60] Molnár, A. & Muhari, Cs. (2007). *Interaktív szemléltetés az oktatásban*. In: *MultiMédia az Oktatásban 2007 Konferencia*. Budapesti Műszaki Főiskola, Budapest, 95-101. URL: [http://www.mmo.njszt.hu/Kiadvanyok/2007/cikkek/19\\_MolnarMuhari.pdf](http://www.mmo.njszt.hu/Kiadvanyok/2007/cikkek/19_MolnarMuhari.pdf)
- [61] Námesztovszki, Zs, (2009). *Interaktív tábla az oktatásban*. Regionális Tudományi Társaság, Szabadka, 44-46.
- [62] Niss, M. (1999). *Mathematical Competencies and the Learning of Mathematics: The Danish KOM Project*. IMFUFA, Roskilde University, Denmark. URL: <http://www.math.chalmers.se/Math/Grundutb/CTH/mve375/1112/docs/KOMkompetenser.pdf>
- [63] OECD (2000). *Measuring student knowledge and skills. The PISA 2000 assessment of reading, mathematical and scientific literacy*. Education and skills, OECD, Paris.
- [64] OECD (2010). *PISA 2012 mathematics framework*. URL: <https://www.oecd.org/pisa/pisaproducts/46961598.pdf>
- [65] Oktatási Hivatal (2007). *Az országos kompetenciamérés eredményei*. URL: <https://www.oktatas.hu/koznevelas/meresek/kompetenciameres/eredmenyek>
- [66] Oktatási Hivatal (2001-2021). *Kompetenciamérés*. URL: <https://www.oktatas.hu/koznevelas/meresek/kompetenciameres/feladatsorok>
- [67] Pólya, Gy. (1977). *A gondolkodás iskolája*. Gondolat, Budapest, 236-237.

- [68] Pólya, Gy. (1967-1968). *A problémamegoldás iskolája I-II*. Tankönyvkiadó, Budapest.
- [69] Prensky, M. (2001). *Digital Natives, Digital Immigrants Part I-II*. *Ont the Horizon*, 9(5,6), 1–6.
- [70] Roediger, H. L. & Karpicke, J. D. (2006). *Test-enhanced learning: Taking memory tests improves long-term retention*. *Psychological Science* 17, 249–255.
- [71] Rowland, C. A. (2014). *The effect of testing versus restudy on retention: A meta-analytic review of the testing effect*. *Psychological Bulletin* 140(6), 1432–1463. URL: <https://doi.org/10.1037/a0037559>
- [72] Rózsahegyi, E. (2020). *Online oktatás diákok számára*. URL: [https://docs.google.com/forms/d/1bYGMg7lMWLQvR9arwym\\_mToQSDoPS2utzjOdF3zId-E/viewform?ts=60d608c0&edit\\_requested=true](https://docs.google.com/forms/d/1bYGMg7lMWLQvR9arwym_mToQSDoPS2utzjOdF3zId-E/viewform?ts=60d608c0&edit_requested=true)
- [73] Ryan, R. M. & Deci, E. L. (2000). *Self-Determination Theory and the Facilitaion of Intrinsic Motivation, Social Development, and Well-Being*. *American Psychologist*, 55(1), 68-78.
- [74] Simon, T. (2006). *Interaktív táblák az oktatásban*. Sulinet, Hírmagazin, Pedagógia. 2016. szeptember 20. URL:<https://hirmagazin.sulinet.hu/hu/pedagogia/interaktiv-tablak-az-oktatasban>
- [75] Smith, M. A. & Karpicke, J. D. (2014). *Retrieval practice with short-answer, multiplechoice, and hybrid tests*. *Memory* 22(7), 784–802.
- [76] Szabó Cs. & Szeibert J. (2018). Efficiency of test-enhanced learning in teaching elementary geometry. In: E., Bergqvist, M., Österholm, C., Granberg, L., Sumpter (Eds.) *Proceedings Of the 42nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. University of Gothenburg, Sweden: PME 5, 296.
- [77] Téglási, I. (2015). *Matematikai kompetenciák vizsgálata, értékelése, fejlesztése a középiskolai matematikaoktatásban*. PhD disszertáció, Debreceni Egyetem Matematikai és Számítástudományok Doktori Iskola. URL: <http://hdl.handle.net/2437/228752>
- [78] Tulving, E. (1985). *Memory and consciousness*. *Canadian Psychology* 26 (1), 1-12.
- [79] van Eersel G. G, Verkoeijen P. P. J. L., Povilenaite, M. & Rikers R. (2016). *The Testing Effect and Far Transfer: The Role of Exposure to Key Information*. *Front. Psychol.* (Doi: 10.3389/fpsyg.2016.01977) 7:1977.

- [80] Vári, P. (2003). *PISA-vizsgálat 2000*. Műszaki Könyvkiadó, Budapest.
- [81] Vászárhelyi, É. (2002). *A számítógép a matematika oktatásában*. Matematika-kadidaktikai Fórum, ELTE TTK Matematikatanítási és Módszertani Központ, Budapest. URL: <http://mathdid.elte.hu/html/forumtartalom.html#art>
- [82] Vászárhelyi, É. (2007). A geometriai térszemlélet fejlesztése dinamikus geometriai programmal. URL: <https://drive.google.com/file/d/0B9KuvIKKTNQTd1VWVVhNSkctb1U/view?resourcekey=0-aJ4scsHfKo1FySwhoRIPFg>
- [83] Vászárhelyi, É. (2008). *Hintergrundstheorien des Unterrichtsmodells Innere Differenzierung*. Doktori értekezés, Salzburg.
- [84] Vászárhelyi, É., Koren, B. (2013). *Geometria tanároknak*. Elektronikus jegyzet. TÁMOP-4.1.2.B.2-13/1-2013-0007. URL: <http://mathdid.elte.hu/bootstrap/jegyzetek/tamop-geotantar.pdf>
- [85] Vászárhelyi, É. (2018). *Térbeli feladatok megoldása GeoGebrával*. Érintő, Elektronikus Matematikai Lapok, június.
- [86] Weiner, B. (1985). *An attributional theory of achievement motivation and emotion*. *Psychological Review* 92(4), 548–573.
- [87] Wertheimer, M. (1912). *Experimentelle Studien über das Sehen von Bewegung*. *Zeitschrift für Psychologie*, New York, 61, 161—265. [Experimental Studies on the See-ing of Motion. English translation in T. Shipley, ed., *Classics in Psychology*. Philosophical Library, New York, 1961]
- [88] Wheeler, M. A., Roediger, H. L. (1992). *Disparate effects of repeated testing: Reconciling Ballard's (1913) and Bartlett's (1932) results*. *Psychological Science*, 3(4), 240-245.
- [89] White, R. W. (1959). *Motivation reconsidered: The concept of competence*. *Psychological Review* 66, 297-333.
- [90] White, R. W. (1963). *Ego and reality in psychoanalytic theory*. *Psychological Issues* 3 (3, Whole No. 11), 1–210.
- [91] Wiske, S. (2000). *A new culture of teaching for the 21st century*. In: Gordon, D. T. (szerk.): *The digital classroom*. Cambridge, MD: The Harvard Education Letter, 69-77.
- [92] Zaromb, F. M. & Roediger, H. L. (2010). *The testing effect in free recall is associated with enhanced organizational processes*. *Memory & Cognition* 38(8), 995–1008.

## Internetes források

- [93] Mozaik Kiadó: Téglatest 3D modell. URL:  
[https://www.mozaweb.hu/Extra-3D\\_modell-Teglatest-38579](https://www.mozaweb.hu/Extra-3D_modell-Teglatest-38579)
- [94] Mozaik Kiadó: Térelemek kölcsönös helyzete. URL:  
[https://www.mozaweb.hu/Extra-3D\\_modell-Terelemek\\_kolcsonos\\_helyzete-147930](https://www.mozaweb.hu/Extra-3D_modell-Terelemek_kolcsonos_helyzete-147930)
- [95] NKP: Lapátló, testátló. URL:  
<https://www.nkp.hu/feladat/megjelenites/70933341>
- [96] GeoGebra munkalap: Párhuzamos és merőleges síkok kockán. URL:  
<https://www.geogebra.org/m/jpeerwxb>
- [97] SuliNet: A téglatest síkjai. URL:  
<https://tudasbazis.sulinet.hu/hu/matematika/matematika/matematika-5-osztaly/teglatest-felszine-sikban/a-teglatest-sikjai-es-kitero-egyenesei>
- [98] LearningApps: párosítós (szögjelölés, görög ábécé). URL:  
<https://learningapps.org/watch?v=pxj9wnj2v19>
- [99] GeoGebra munkalap: szögfajták. URL:  
<https://www.geogebra.org/m/nxxekpyj>
- [100] Mathplayground: Alien Angles. URL:  
<https://www.mathplayground.com/alienangles.html>
- [101] GeoGebra munkalap: Hány óra van?2. URL:  
<https://www.geogebra.org/m/JE54VItI#material/dkSI2wLq>
- [102] LearningApps: memória-párosítós szögek. URL:  
<https://learningapps.org/watch?v=pu1x3n2xt19>
- [103] Okos Doboz: „Derékszög és egyenesszög” szögmérés. URL:  
<https://www.okosdoboz.hu/feladatsor?id=708>
- [104] Mathplayground: Szögmérés. URL:  
<https://www.mathplayground.com/measuringangles.html>
- [105] Angle Estimator and Guess the Random Angle. URL:  
[https://www.internet4classrooms.com/skill\\_builders/geometry\\_math\\_fourth\\_4th\\_grade.htm](https://www.internet4classrooms.com/skill_builders/geometry_math_fourth_4th_grade.htm) (Sajnos az Adobe Flash Player megszüntetésével az oldal tartalma nem elérhető)
- [106] GeoGebra munkalap: Magyar Kocka. URL:  
<https://www.geogebra.org/m/kwfpue3y>
- [107] GeoGebra munkalap: Csokis Kocka. URL:  
<https://www.geogebra.org/m/py8dwsgh>

## **Tankönyvek, feladatgyűjtemény**

- [108] Мерзляк А.Г., Полонський В.Б., Якір М.С. (2015) *Геометрія: Підручник для 7 класу загальноосвітніх навчальних закладів.* – Львів: Світ.
- [109] Oktatási Hivatal (2015). *Matematika Tankönyv 7. osztály.* OFI Újgenerációs Tankönyv, ISBN 978-963-682-820-2. Oktatókutató és Fejlesztő Intézet.
- [110] Тарасенкова Н.А., Богатирьова І.М., Бочко О.П., Коломієць О.М., Сердюк З.О. (2013). *Математика: Підручник для 5 класу загальноосвітніх навчальних закладів.* – К: Видавничий дім «Освіта».
- [111] Тарасенкова Н.А., Богатирьова І.М., Бочко О.П., Коломієць О.М., Сердюк З.О. (2014). *Математика: Підручник для 6 класу загальноосвітніх навчальних закладів.* – Ч: Букрек.

## **Jogszabályok**

- [112] *Az Európai Parlament és a Tanács ajánlása (2006. december 18.) az egész életen át tartó tanuláshoz szükséges kulcskompetenciákról (2006/962/EK).* Az Európai Unió Hivatalos Lapja, L 394., 30.12.2006, 10-18. URL: <https://eur-lex.europa.eu/legal-content/HU/TXT/?uri=celex%3A32006H0962>
- [113] Бурда, М.І., Кудренко, Б.В., Білянiна, О.Я., Азаренкова, А.І., Буковська, О.І., Кiндюх, Т.С., Лисенко, О.С., Милянiк, А.В., Панова, Н.В., Паньков А.В. (2017). *Математика 5-9 класи. Навчальні програми для загальноосвітніх навчальних закладів*
- [114] *Matematika kerettanterv az általános iskola 5-8. évfolyamára.* A kerettantervek kiadásának és jóváhagyásának rendjéről szóló 51/2012. (XII. 21.) számú EMMI rendelet 2. melléklete
- [115] NAT (2012). II. rész: Kompetenciafejlesztés, műveltségközvetítés, tudásépítés. Új Pedagógiai Szemle, 2012/1-3, 45. URL: [upsz\\_2012\\_1-2-3\\_05.pdf \(gov.hu\)](https://www.gov.hu/upsz_2012_1-2-3_05.pdf)

## ÁBRAJEGYZÉK

1. ábra. *Mathematical Competencies and PISA*. Springer.

URL: [assessing-mathematical-literacy\\_springer.pdf](#) ..... 41

Képernyőkivágások:

GeoGebra

2. ábra. *Ellipsoid ikonikus reprezentációja*..... 46

3. ábra. *Az objektum láthatóságának beállítása* ..... 48

6. ábra. *Az egysoros elrendezés szélső, illetve belső kockájának elmozdítása az interaktív feladatlapon* ..... 52

7. ábra. *A felszín változásai kétsoros elrendezés esetén* ..... 53

8. ábra. *Tipikus kockamozgatások az első réteg háromsoros részletében*53

9. ábra. *Tipikus kockamozgatások a teljes (négy soros) első rétegben*53

10. ábra. *A kétrétegű elrendezés sarok, illetve él és lap belső kockájának elmozdítása* ..... 54

11. ábra. *A háromrétegű elrendezés testen belüli kockájának elmozdítása* ..... 55

12. ábra. *A négyzetes oszlop 3D-s ábrái* ..... 58

13. ábra. *A függőleges szeletelés eredménye* ..... 59

SMART

17. ábra. *Ismétlő feladat a párhuzamosság és merőlegesség témában*.. 91

22. ábra. *Az 1.a feladatrész megoldásának lépései Smartboardon, illetve krétás táblán* ..... 97

Mozaik Kiadó

18. ábra. *A téglatest 3D modelljének képernyőkivágásai*. URL: [https://www.mozaweb.hu/Extra-3D\\_modell-Teglatest-38579](https://www.mozaweb.hu/Extra-3D_modell-Teglatest-38579) ..... 92

19. ábra. *Két sík kölcsönös helyzetét szemléltető 3D modelljének képernyőkivágásai*. URL: [https://www.mozaweb.hu/Extra-3D\\_modell-Terelemek\\_kolcsonos\\_helyzete-147930](https://www.mozaweb.hu/Extra-3D_modell-Terelemek_kolcsonos_helyzete-147930) ..... 92

Saját ábra:

Paint

4. ábra. Kettős Csúszkarendszer az első réteg vizsgálatához. .... 51

5. ábra. A második és a harmadik réteg vezérlésének sematikus ábrája 52

Excel diagram

14. ábra. A felmérésben résztvevő diákok lakhelyének megoszlása... 72

15. ábra. Az összegző dolgozatban szereplő feladatok megoldottsága .... 79

16. ábra. Az utóteszt feladatainak megoldottsága..... 84

20. ábra. A geometria dolgozatban szereplő feladatok megoldottsága 96

21. ábra. A geometria dolgozatban szereplő feladatok megoldottságának  
különbsége feladatonként..... 97

23. ábra. A dolgozatban szereplő feladatok megoldottsága..... 101

25. ábra. Az 5. feladat megoldottsága a vizsgált osztályokban..... 103

26. ábra. Helyes válaszok és tipikus hibák eloszlása az 5.b feladat-  
részben ..... 104

27. ábra. A beadott házi feladatok megoldottsága az előhívásos módszerrel  
tanuló osztályban. .... 106

31. ábra. Az 1. témazáró dolgozat eredményeinek összehasonlítása a  
vizsgált osztályokban. .... 120

32. ábra. A 6. feladat megoldottsága az IKT-s és a hagyományos  
osztályban. .... 121

35. ábra. A megoldott, részben megoldott, valamint a megoldatlan  
feladatok aránya az 1. témazáró dolgozatban ..... 124

36. ábra. A 2. témazáró dolgozat eredményeinek összehasonlítása a  
vizsgált osztályokban. .... 124

37. ábra. A megoldott, részben megoldott, valamint a megoldatlan  
feladatok aránya az 2. témazáró dolgozatban ..... 127

38. ábra. Az IKT-s osztály internethasználati szokásai ..... 129

39. ábra. A diákok véleménye a tananyag elsajátítását támogató módszerekről.....	130
40. ábra. A felhasznált animációk minősítése a kérdőív eredményei alapján.....	131

Diák feladatlap képrészlet:

24. ábra. Az 1.a) feladatrészt diákmegoldásai (1 feltétel teljesül). ...	102
28. ábra. A 22. házi feladat megoldása.....	107
29. ábra. A 19. házi feladat megoldása.....	107
30. ábra. A 24. házi feladat megoldása.....	109
33. ábra. Egy diák 7. feladatának megoldása. ....	122
34. ábra. A 8. feladat diákmegoldása.....	122

# FÜGGELÉK

## 1. A tanítási kísérletek ismeretanyagának alapja a kárpátaljai (ukrajnai) tanterv és tankönyvek vonatkozásában

Tematikai egység / Ismeretek	Számтан, algebra
	Az ukrajnai oktatási program és tankönyv tartalmi egységei
Természetes számok	(5. oszt.) Természetesek számok. A nulla. Számjegy. Természetes számok tízes alapú számrendszerben. természetes számok írása és olvasása egymilliárdon belül; tízes számrendszer; a szám értéke, alaki érték, helyiérték, számjegy; számjegyek osztályokra bontása (egyesek, ezresek, milliók, milliárdok,...); <i>Kitekintés: római számírás; példák a tizenkettes és a hatvanas számrendszerekre;</i>
	(5. oszt.) Számegeyenes. számegeyenes, mint skálával ellátott félegeyenes értelmezése természetes számok körében; pozitív irány, egység, tartomány. (6. oszt.) Számegeyenes. pozitív és negatív irány, egység, tartomány; a szám, mint koordináta; számegeyenes felvétele.
	(5. oszt.) Műveletek természetes számokkal és azok tulajdonságai. Maradékos osztás. Természetes számok hatványozása (négyzet, köb). természetes számok összeadása, kivonása, szemléltetés számegeyenesen; természetes számok szorzása, osztása; szorzás, osztás 10-zel, 100-zal, 1000-rel; zárójel felbontása, kiemelés; műveletek sorrendje a kifejezésekben.
	(6. oszt.) A természetes számok osztói és többszörösei. Oszthatósági szabályok (2-vel, 3-mal, 5-tel, 9-cel, 10-zel, 100-zal). Prímszámok (törzsszámok) és összetett számok. Számok prímtényezősbontása. Legnagyobb közös osztó. Legkisebb közös többszörös (osztó, többszörös fogalma). <i>Kitekintés: 4-gyel, 8-cal, 25-tel, 125-tel, 1000-rel való oszthatóság szabálya.</i>
Egész számok	(6. oszt.) Pozitív és negatív számok. A nulla. Ellentett számok, a szám abszolútértéke. Egész számok.

Közönséges törtek	<p>(5. oszt.) Közönséges törtek. Valódi és áltört. A törtszám, mint két természetes szám hányadosa. Vegyes szám. Egyenlő nevezőjű törtek összehasonlítása, összeadása és kivonása. törtek fogalma; valódi és áltört megkülönböztetése; törtek írása és olvasása;</p> <p>(6. oszt.) A tört alaptulajdonsága. Törtek egyszerűsítése, bővítése. A tört legkisebb közös nevezője. Törtek összehasonlítása. Műveletek közönséges törtekkel: összeadása, kivonása, szorzása, osztása. Törtrész meghatározása. A szám meghatározása törtrésze alapján. Közönséges törtek tizedes tört alakja. A reciprok fogalma;</p>
Tizedes törtek	<p>(5. oszt.) Tizedes tört. Tizedes törtek írása, összehasonlítása. Számok kerekítése. Műveletek tizedes törtekkel: összeadás, kivonás, szorzás, osztás. vegyes szám átalakítása áltörtté és fordítva; természetes szám felírása áltörtté és fordítva; a szám törtrészenek meghatározása; a szám meghatározása törtrésze alapján;</p> <p>(6. oszt.) Véges és végtelen szakaszos tizedes törtek. Végtelen szakaszos tizedes tört közelítő értéke. végtelen szakaszos tizedes törtek írása, olvasása; véges és végtelen szakaszos tizedes törtek megkülönböztetése; törtek összehasonlítása.</p>
Racionális számok	<p>(6. oszt.) Racionális számok. Racionális számok összehasonlítása. Műveletek racionális számokkal: összeadás, kivonás, szorzás, osztás. A racionális számok összeadásának és szorzásának tulajdonságai.</p>
Kifejezések és egyenletek	<p>(5. oszt.) Számkifejezések. Betűkifejezések és képletek. Számegyenlőségek, számegyenlőtlenségek. Természetes számok összehasonlítása.</p> <p>(6. oszt.) Zárójelfelbontás. Kifejezések és azok egyszerűsítése. Egyenletek, mérlegelv. Az egyenletek alapvető tulajdonságai. pozitív és negatív számokat tartalmazó számkifejezések értékeinek kiszámítása; kifejezések felállítása; egyenletek megoldása, ellenőrzés visszahelyettesítéssel.</p>
Százalék. Számítási közép	<p>(5. oszt.) Százalék. Számítási közép. A mennyiségek átlagértéke. fogalmak megismerése; százalékalap, százaléérték, százalékláb értelmezése és megkülönböztetése.</p> <p>(6. oszt.) Százalékszámítás aránypárral. Aránypár felállítása százalékalap és százalékláb változás meghatározására változó százalékalap és százalékláb mellett. Kamatszámítás.</p>
Arányok és aránypárok	<p>(6. oszt.) Arány. Aránypár. Az arány alaptulajdonsága. Egyenes és fordított arányosság. Egy szám adott arányban való felosztása. Méretarány.</p>

	arány fogalma; példák arányos mennyiségekre; arányosságok megkülönböztetése;
<b>Függvények, az analízis elemei</b>	
Diagramok	(6. oszt.) Diagramok. Oszlop- és kördiagram (diagramok rajzolás, elemzése)
Koordináta sík	(6. oszt.) Koordináta sík. Mennyiségek közötti összefüggések ábrázolása grafikonnal. Descartes-féle derékszögű koordináta-rendszer; pont koordinátáinak leolvasása a koordinátasíkon; pont ábrázolása koordinátái szerint.
Grafikonok	(6. oszt.) Grafikonok. grafikonok ábrázolja és elemzése (távolság, idő, hőmérséklet, stb.); adatok leolvasására a grafikonról.
<b>Geometria</b>	
Síkmértan	(5. oszt.) Szakasz, félegyenes, egyenes, sík. A szakasz mérése síkbeli elemek felvétele és jelölése, mérése és kiszámítása; rajzolása
	(5. oszt.) Merőleges és párhuzamos egyenesek, merőlegesség, párhuzamosság fogalma; egyenesek rajzolása;
	(5. oszt.) Szög és mértékegysége. Szögek típusai. alakzat felismerése és megkülönböztetése; a szög fogalma; szögfajták megismerése; szög rajzolása, szögmérő használata; szög nagyságának felismerése, a szög mérése.
	(5. oszt.) Alakzatok. Téglalap. Négyzet. A téglalap és a négyzet területe és kerülete. Háromszög és kerülete. A háromszögek csoportosítása oldalai szerint, osztályozása szögek szerint. alakzatok felismerése és megkülönböztetése; kerület és terület képletek, alkalmazása és értelmezése; háromszögek osztályozása szögei szerint; <i>Kitekintés: mértékegységek (ár, hektár)</i>
	(6. oszt.) Körvonal, körlap és körcikk. Körvonal hossza. Körlap területe. alakzatok felismerése, megkülönböztetése, rajzolása; képletek ismerete, alkalmazása.
Térmértan	(5. oszt.) Téglatest. Kocka. A téglatest és a kocka térfogata. Gúla. alakzatok felismerése és megkülönböztetése; összefüggések felismerése környezetünk tárgyaival; térfogat és felszín képletek ismerete és értelmezése; geometriai alakzatok fogalma;
Szöveges feladatok	(5-6. oszt.) szöveges problémák megoldása



### 3. Az előhívásos vs. hagyományos tanítási kísérlet tesztjeinek eredményei

Hagyományos		Összegző dolgozat										Utóteszt									
Nº	Nem	1.a	1.b	1.c	1.d	1.e	2.	3.a	3.b	3.c	Σ	1.a	1.b	1.c	1.d	1.e	2.	3.a	3.b	3.c	Σ
1.	F	3,5	1,5	2	0	4	5	3,5	2	3	24,5	3,5	1	3	1,5	2,5	5,5	4	1	2	24
2.	N	3	1	1,5	1	0	1,5	0	1,5	2	11,5										
3.	F	1,5	2	3	2,5	1	5	3	1,5	2	21,5										
4.	F	3,5	2	3	3	6,5	2	1,5	2	1,5	25	1,5	0	3	0,5	1,5	5	3,5	1,5	2	18,5
5.	N	3	2,5	3	4	6,5	5,5	1	0	2,5	28	2	1	0	0	3	3	1,5	0	2	12,5
6.	N	3	1,5	2	2,5	1	0	0	1	1	12	2	2	1,5	1,5	0	1,5	0	1	2	11,5
7.	F	1	0,5	0	2	2	4,5	1,5	1	2	14,5	2,5	1	0	0	3	0	0	0	1	7,5
8.	F	1	0	0	0	0	4	3	0	2,5	10,5	1,5	1	0,5	1	0	0	0	0	0	4
9.	F	3,5	1,5	1,5	1,5	1,5	5,5	1	0	1	17	3	0,5	3	0	0	4,5	1	0	1	13
10.	F	3,5	1	0,5	2,5	1	2,5	0	0,5	2	13,5	3	0,5	0,5	0	2,5	5	0	0	2	13,5
11.	F	1,5	2,5	3	3,5	6,5	5	0	0	2,5	24,5	0	1	1,5	0,5	1,5	0	0	0	2	6,5
12.	F	2,5	0,5	3	0	0	5	0	2	2,5	15,5	2,5	0	0	0	0	4,5	0	0	2,5	9,5
13.	N	3	2	2	2	0	1	2	1,5	2	15,5	2,5	2	1	1,5	0	2	0	0	1,5	10,5
14.	F	2	0	0	0	0	2	1,5	0	2	7,5	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1
15.	F	0,5	2	0	2	3	1,5	3	1,5	1,5	15	0,5	2,5	1,5	1,5	0	2	0	0	0,5	8,5
16.	N	0	1	1	0,5	2	5	3	1,5	3	17	0,5	2	0	0,5	0	0	0	0	2	5
17.	F	3	1,5	1,5	0	0	0	3	1	3	13										
18.	F	3,5	2,5	2,5	4,5	6	5,5	4,5	2	3	34	3,5	2,5	3	4,5	4	5,5	4,5	2	2,5	32
19.	N	2,5	2	0,5	0	3	5,5	1	0	2,5	17	3	1	2	0	3	1,5	0	2	1,5	14
20.	F	3	1	0	0	1	5,5	3,5	1	2,5	17,5										
21.	N	0	1	0	0	0	1,5	1	1	3	7,5	0	0	0	0,5	0	1,5	0,5	0	0,5	3
22.	N	3,5	2	2,5	3,5	2,5	0	3,5	2	1	20,5	3,5	2,5	3	2	0	3,5	4	1,5	2	22

Előhívásos

Összegző dolgozat

Utóteszt

<b>№</b>	<b>Nem</b>	<b>1.a</b>	<b>1.b</b>	<b>1.c</b>	<b>1.d</b>	<b>1.e</b>	<b>2.</b>	<b>3.a</b>	<b>3.b</b>	<b>3.c</b>	<b>Σ</b>	<b>1.a</b>	<b>1.b</b>	<b>1.c</b>	<b>1.d</b>	<b>1.e</b>	<b>2.</b>	<b>3.a</b>	<b>3.b</b>	<b>3.c</b>	<b>Σ</b>
1.	F	3,5	2,5	3,0	3,5	5	5,5	3,5	2,0	2,5	31	3,5	2,5	2	2	6	5,5	4	2	1,5	29
2.	F	3,5	2,5	3	4,5	6,5	5,5	4	2	3	34,5	3,5	2,5	2,5	1,5	3	5	4	2	3	27
3.	F	3,5	1	0	2	0	0	1,5	0	0	8	1	2	1	0	0	2	2	1,5	0	9,5
4.	N	3	2,5	3	3	6	5,5	3,5	2	3	31,5	3,5	0,5	3	2,5	3	5,5	4,5	2	3	27,5
5.	N	3	1	3	3,5	6	5,5	3,5	2	2,5	30,5	3,5	0,5	2,5	1,5	4,5	4,5	4	1,5	3	25,5
6.	N	3,5	2	2	2,5	1,5	1	2	1,5	1,5	17,5	2	1	3	0	0	2	2,5	1,5	1	13
7.	N	2,5	0	3	0	0	5	0	0	2	12,5	0	0	0	0	0	3,5	0	0	2	5,5
8.	F	0	1	0,5	3	2	5	1	1,5	2,5	16,5	0	0	0	0	1,5	2	0	0	3	6,5
9.	N	3	2,5	2	2,5	4,5	5	3,5	1,5	3	27,5	3,5	2,5	2	1	4,5	5,5	0	1,5	3	23,5
10.	F	3	2,5	3	3	3,5	0	3,5	0,5	1,5	20,5	3,5	0	2	2	0	1,5	0	0	0,5	9,5
11.	F	2,5	1,5	1	0,5	0	4,5	1	0	2,5	13,5	0	0	2,5	1,5	0	2	4	1,5	2	13,5
12.	F	3,5	2,5	3	3,5	0	5,5	3,5	1,5	2,5	25,5	3,5	2,5	3	1,5	0	5,5	0	1	0,5	17,5
13.	F	3	2	1,5	0,5	0	0	0	0	2	9	0	0	0	2	0	0	2,5	0	1,5	6
14.	N	3,5	2,5	3	3	5	5	3	2	1,5	28,5	3,5	2,5	1,5	1,5	5	5,5	3	1,5	0,5	24,5
15.	N	0	0	0	0	0	5,5	0	0	1,5	7	0	1	1	0,5	0	0	0	0	0,5	3
16.	N	2,5	2,5	3	4,5	5	5,5	3,5	2	3	31,5	3,5	2,5	3	4,5	0	5,5	4,5	2	2	27,5
17.	F	3,5	2,5	2	2,5	1	5	2,5	1,5	2,5	23	0	1	2	2	0	5,5	2	2	1,5	16
18.	F	3,5	1	2	0	4	1	3,5	2	3	20	3	0	2	1,5	0	5	3	2	0,5	17
19.	F	3	2	1	2,5	0	0	2	1,5	2,5	14,5	0,5	0,5	0	2,5	0	0	2	0	2,5	8
20.	F	3,5	2	3	0	0	5	4	1,5	1,5	20,5	3	1	2	4,5	0	1,5	2	2	3	19
21.	N	3,5	2	1	2,5	0	5	0	6,5	3	23,5	3,5	2	1	0	0	2	4	2	1,5	16
22.	F	3	2	2,5	2,5	1,5	5,5	3,5	0,5	3	24	3	2,5	3	2	0	5,5	2,5	2	2,5	23
23.	F	3,5	2,5	3	4	5	4,5	4,5	2	3	32	3,5	1	3	2,5	0	5,5	4	2	3	24,5
24.	F	3,5	2,5	0	0	4,5	4,5	1,5	1	2,5	20	3,5	2,5	2	0	0	3,5	0	2	2	15,5
25.	N	3	1,5	2	1,5	4	5	2,5	1,5	3	24	2,5	0,5	2	0,5	5	,5	0	2	1,5	19,5
26.	N	3	2	1	1	3	4,5	3	2	3	22,5	3	2,5	1,5	1	5	5,5	0	0	2	19,5
27.	N	2,5	2	2	1,5	0,5	2	1	1	3	15,5	2,5	1	2	1,5	0	0	0	1,5	0,5	9

## 4. Diákmunka-1

Osztály: 2 B

Műveletek racionális számokkal

1. Számítsd ki!

a)  $3,2 \cdot (-0,8) + (-4,8) : 0,8 = -10$

1)  $3,2 \cdot (-0,8) = -3,2 : 0,8 = -4$   
 2)  $(-4,8) : 0,8 = -6$   
 3)  $-4 + (-6) = -10$

b)  $-8,5 : (4,6 - 6,3) = 5$

1)  $4,6 - 6,3 = -1,7$   
 2)  $-8,5 : (-1,7) = 5$

c)  $0,4 \cdot (-250) \cdot 5 \cdot (-0,2) =$

1)  $0,4 \cdot (-250) = -100$   
 2)  $-100 \cdot 5 = -500$   
 3)  $-500 \cdot (-0,2) = 100$

d)  $-0,65 \cdot (-0,44) \cdot (-1,23) \cdot 8,1 = 6,66$

1)  $-0,65 \cdot (-0,44) = 0,286$   
 2)  $0,286 \cdot (-1,23) = -0,35178$   
 3)  $-0,35178 \cdot 8,1 = -2,849418$

e)  $(4\frac{2}{3} - 4,8) : (\frac{5}{9} \cdot \frac{2}{12}) = \frac{14}{3}$

1)  $4\frac{2}{3} - 4,8 = 1,333 - 4,8 = -3,466$   
 2)  $\frac{5}{9} \cdot \frac{2}{12} = \frac{10}{108} = \frac{5}{54}$   
 3)  $-3,466 : \frac{5}{54} = -3,466 \cdot \frac{54}{5} = -37,44$

2. A Poszeidon tengeraltatójáró -300 méteren lebeg, majd gyakorlás céljából négy egyenlő szakaszban a felszínre emelkedik. Milyen mélységeken fog tartózkodni az egyes emelkedési szakaszok után?

$-300 - 4 = -296$   
 $-300 - 25 = -225$   
 $-300 - 75 = -225$   
 $-300 - 150 = -150$   
 $-300 - 225 = -75$   
 $-300 - 275 = -25$   
 $-300 - 300 = 0$

Felkelés:  $-225, -150, -75, 0$

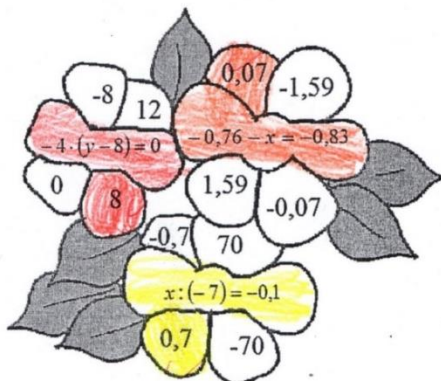
3. Oldd meg az egyenleteket! Színezd ki az egyenlet gyökét tartalmazó virágszírmot.

$-5 \cdot (x - 7) = 27$       $x \cdot (-10) = 3,4$

$x - 7 = 27 : (-5)$       $x = 3,4 : (-10)$   
 $x = 5,4$       $x = -0,34$

$x = 5,4 + 7$   
 $x = 12,4$

$27 \overline{) 5}$   
 $25 \overline{) 5,4}$   
 $20$   
 $20$   
 $0$



## 5. Diákmunka-2

Osztály: 2. A.

Műveletek racionális számokkal

1. Számítsd ki!

a)  $3,2 \cdot (-0,8) + (-4,8) : 0,8 = \frac{100}{10} = 10$

$$\frac{32}{10} \cdot \left(-\frac{8}{10}\right) = -\frac{40}{10} \quad \left| \quad \frac{48}{10} : \frac{8}{10} = \frac{60}{10} \quad \left| \quad \frac{-40}{10} + \frac{60}{10} = \frac{100}{10}$$

b)  $-8,5 : (4,6 - 6,3) = \frac{50}{10} = 5$

$$\frac{85}{10} : \frac{63 - 46}{10} = \frac{85}{10} : \frac{-17}{10} = \frac{85}{10} \cdot \left(-\frac{10}{17}\right) = -\frac{50}{10}$$

c)  $0,4 \cdot (-250) \cdot 5 \cdot (-0,2) = 100$

$$\frac{4}{10} \cdot (-250) = -100 \quad \left| \quad 5 \cdot (-0,2) = -1 \quad \left| \quad -100 \cdot (-1) = 100$$

d)  $-0,65^{-1} \cdot (-0,44)^{-2} \cdot (-1,23)^{-3} \cdot 8,1 = 4,08$

$$-0,65^{-1} = \frac{1}{-0,65} = \frac{100}{65} = \frac{20}{13} \quad \left| \quad 0,44^{-2} = \frac{1}{0,44^2} = \frac{1}{0,1936} = \frac{10000}{1936} = \frac{625}{121} \quad \left| \quad 0,21^{-3} = \frac{1}{0,21^3} = \frac{1}{0,009261} = \frac{1000000}{9261} = \frac{100000}{9261} \quad \left| \quad -1,02^{-3} = \frac{1}{-1,02^3} = \frac{1}{-1,061208} = \frac{1000000}{-1061208} = \frac{125000}{-132651} \quad \left| \quad +8,1 = \frac{81}{10} \quad \left| \quad \frac{20}{13} \cdot \frac{625}{121} \cdot \frac{100000}{9261} \cdot \frac{125000}{-132651} \cdot \frac{81}{10} = 4,08$$

e)  $\left(\frac{4 \frac{2}{3} - 4,8}{3}\right)^3 : \left(\frac{5}{9} - \frac{21}{12}\right) = \frac{-48}{120}$

$$\frac{14}{3} - \frac{48}{10} = \frac{140}{30} - \frac{144}{30} = \frac{-4}{30} = \frac{-2}{15} \quad \left| \quad \frac{5}{9} - \frac{21}{12} = \frac{20}{36} - \frac{63}{36} = \frac{-43}{36} \quad \left| \quad \frac{-2}{15} : \frac{-43}{36} = \frac{-2}{15} \cdot \frac{36}{-43} = \frac{72}{645} = \frac{24}{215}$$

2. A Poszeidon tengeralattjáró -300 méteren lebeg, majd gyakorlás céljából négy egyenlő szakaszban a felszínre emelkedik. Milyen mélységeken fog tartózkodni az egyes emelkedési szakaszok után?

$$-300 : 4 = -75 \quad \left| \quad 3) -150 - (-75) = -75 \text{ (m)}$$

$$1) -300 - (-75) = -225 \text{ (m)} \quad \left| \quad 4) -75 - (-75) = 0 \text{ (m)}$$

$$2) -225 - (-75) = -150 \text{ (m)}$$

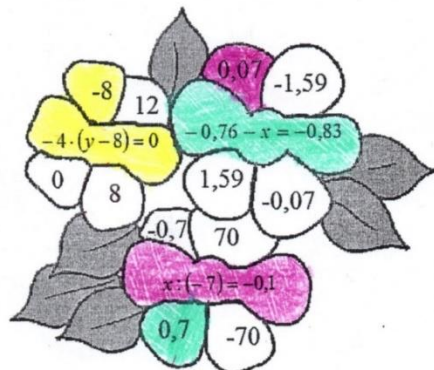
3. Oldd meg az egyenleteket! Színezd ki az egyenlet gyökét tartalmazó virágszirmot.

$$-5 \cdot (x-7) = 27$$

$$x-7 = \frac{27}{-5} = -5,4$$

$$x \cdot (-10) = 3,4$$

$$x = \frac{3,4}{-10} = -0,34$$

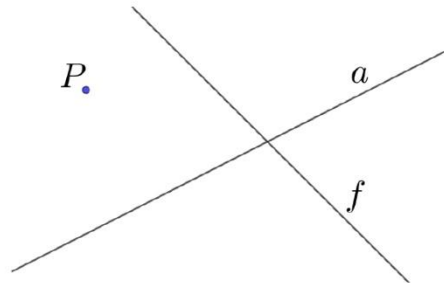


## 6. Feladatlap: Merőleges és párhuzamos egyenesek, a koordinátásík

*Merőleges és párhuzamos egyenesek, a koordináta-sík*

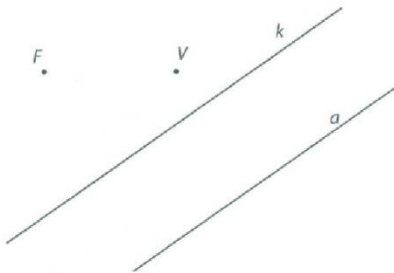
1. a) Rajzold meg zöld színnel azt az egyenest, amely átmegy a  $P$  ponton, és párhuzamos az  $f$  egyenessel!
- b) Rajzold meg kék színnel azt az egyenest, amely átmegy a  $P$  ponton, és merőleges az  $a$  egyenesre!

(2 pont)



2. Oldd meg a feladatot a térképészvázlat segítségével! A térképen rajzolj segédvonalakat és mérd vonalzóval! Számítsd ki a valódi távolságokat a mért adatokból!

(7 pont)



Jelmagyarázat:

- a – autótút,
- k – kerékpárút,
- F – falu,
- V – város.

Lépték 1 cm 1000 m-nek felel meg.

Mérd meg hány **milliméter** a következő három távolság és számítsd ki hány **méter** a valóságban!

Térképen (mm)

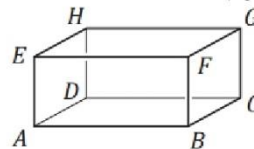
Valóságban (m)

- a) A falu és a város távolsága:
- b) A falu és az autótút távolsága:
- c) Az autótút és a kerékpárút távolsága:

3. Add meg az ábrán látható téglatest azon éleit, amelyek

(5 pont)

- a) az AD éllel párhuzamosak: \_\_\_\_\_
- b) az AD élt metszik: \_\_\_\_\_
- c) az AD élhez kitérők: \_\_\_\_\_



Nevezd meg a téglatest lapátloít alkotó szakaszokat végpontjaikkal:

\_\_\_\_\_

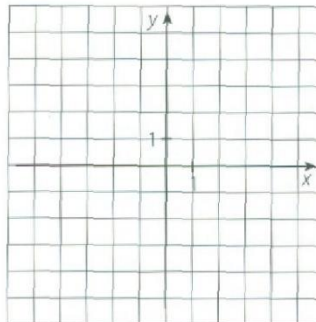
4. Ábrázold a koordináta-rendszerben az A (2; -3) és C (-3; 4) pontokat!

(8 pont)

a) Adj (-5)-öt az A pont első jelzőszámához, a másodikat ne változtasd! Írd le az így kapott B pont koordinátáit: B ( ; ) és rajzold be a koordináta-rendszerbe!

b) Adj (+5)-öt a C pont első jelzőszámához, a másodikat ne változtasd! Írd le az így kapott D pont koordinátáit: D ( ; ) és rajzold be a koordináta-rendszerbe!

c) Milyen négyszöget határoznak meg az A, B, C, D pontok?



Rajzold meg a négyszöget!

d) Számítsd ki a kapott négyszög kerületét és területét!



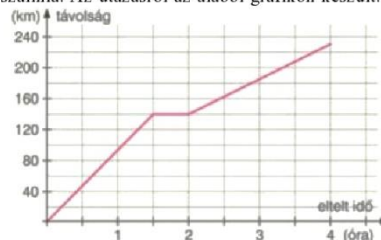
5. Dani vonattal utazott a nagymamájához. Egyszer át kellett szállnia. Az utazásról az alábbi grafikon készült. A grafikon alapján válaszolj a kérdésekre! (4 pont)

a) Hány óras volt Dani utazása?

b) Milyen messze lakik Dani a nagymamájától?

c) Mennyi időt kellett Daninak a csatlakozásra várnia?

d) Hány kilométerre van a nagymama lakóhelyétől az az állomás, ahol Daninak át kellett szállnia?



6. Lili egy baráti összejövetelre fánkot süt. Úgy tervezi, hogy mindenki három fánkot kap. (5 pont)

a) Hány darabot kell sütnie, ha a társaság 1, 2, 3, 4, 5 tagú? Válaszodat írd a táblázatba!

társaság létszáma						
fánkok száma (db)						

b) Milyen összefüggés van a társaság létszáma és a fánkok száma között?

\_\_\_\_\_

c) Ábrázold grafikonon az összetartozó értékeket!



## 7. Az IKT-s vs. előhívásos tanítási kísérlet tesztjeinek eredményei

2.A-IKT-s		Témazáró dolgozat																					
Nº	Nem	1.a	1.b	2.a	2.b	2.c	3.a	3.b	3.c	3.d	4.0	4.a	4.b	4.c	4.d	5.a	5.b	5.c	5.d	6.a	6.b	6.c	Σ
1.	F	1	1	2	2	2,5	1	1	1	1,0	1	1	1	1	4	1	0	1	1	2	1	1,5	28
2.	L	1	0,5	1,5	2	2	1	1	0,5	1,5	1	1	1	0,5	2	1	0	1	1	2	1	1	23,5
3.	F	1	0,5	2	2,5	2	1	1	0,5	1	1	0,5	0,5	1	3	1	1	1	1	0	0,5	0,5	22,5
4.	L	0,5	0,5	1,5	1	2	1	0	0	0	0	0	0	0,5	0	1	0	1	1	2	0,5	0,5	13
5.	F	1	1	2	2,5	2,5	1	1	1	2	0,5	1	0	1	2	1	1	1	1	2	1	1,5	27
6.	F	0,5	0,5	1	0,5	0,5	1	1	0	1	1	1	0,5	0,5	2	1	0	1	0	2	1	0,5	16,5
7.	F	1	1	2	2,5	2,5	1	1	0	1	1	1	1	1	0	1	0	1	1	2	1	1	23
8.	F	1	0	1,5	1	2,5	1	0,5	0	0,5	0,5	1	0	0,5	1	1	0	1	0	2	1	0	16
9.	F	1	1	2	0,5	1,5	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	2	0,5	2	12,5
10.	L	1	0,5	2	1	2,5	1	1	0	0	1	1	1	0,5	0,5	1	0	1	1	2	0	1,5	19,5
11.	L	1	0,5	1	0,5	0	1	1	0,5	0	1	0,5	0,5	0,5	1	1	0	1	1	2	0	1,5	15,5
12.	F	1	1	2	2,5	2,5	1	1	1	2	1	1	1	1	4	1	1	1	1	2	1	2	31
13.	L	1	0,5	1	0	0,5	0,5	1	1	0	1	1	1	1	2,5	1	0	1	0	2	1	1	18
14.	L	1	1	2	1,5	2,5	1	1	1	2	1	1	1	1	4	1	0	1	0	2	1	2	28
15.	L	1	1	1,5	2,5	2,5	1	0	0,5	0	1	1	1	1	0	1	1	1	0	0	0	1	18
16.	L	0	0	1	1,5	2,5	0,5	0	0	0	0,5	0	0,5	0,5	0	1	0	0	0	0	0	0	8
17.	F	0,5	1	2	1	2,5	0,5	0,5	1	0,5	1	0,5	1	1	3,5	1	0	0	1	2	0	0	20,5
18.	F	1	0,5	2	1,5	2,5	1	0,5	0	0	1	0,5	0,5	1	3	1	0	0	0	2	1	0	19
19.	F	1	0,5	2	1,5	1,5	1	0,5	0	0	1	1	1	1	3	1	0	1	0	2	1	2	22
20.	F	1	1	2	2,5	2,5	1	1	1	0,5	1	1	0,5	1	3	1	1	1	0	2	1	2	27
21.	F	1	0,5	2	2,5	2,5	1	1	1	1	1	0,5	1	0,5	2	1	1	1	1	0	0,5	1,5	23,5
22.	F	1	0,5	1	0,5	0,5	1	0	0,5	0	1	1	1	0	1	1	1	1	1	0	0,5	1	14,5

## 2.B-Előhívásos

## Témazáró dolgozat

N <sub>ö</sub>	Nem	1.a	1.b	2.a	2.b	2.c	3.a	3.b	3.c	3.d	4.0	4.a	4.b	4.c	4.d	5.a	5.b	5.c	5.d	6.a	6.b	6.c	Σ
1.	F	1	1	2	2,5	2,5	1	1	1	1	1	1	1	1	4	1	0	1	1	2	1	2	29
2.	L	1	1	0,5	1	1,5	1	1	0,5	0	1	1	1	1	3	1	0	1	1	2	1	2	22,5
3.	L	1	0,5	2	1,5	1	1	1	1	2	1	1	1	1	3	1	0	1	0	2	0,5	1,5	24
4.	F	0,5	1	1,5	2	2	1	0,5	0	0	1	0,5	0,5	1	2,5	1	0	1	1	2	1	0	20
5.	F	0,5	0,5	2	1,5	2,5	1	1	0	0	1	1	1	0,5	0	1	1	1	0	2	1	0	18,5
6.	L	1	1	2	1	2,5	1	1	0,5	2	0,5	0,5	0,5	1	2	0	0	1	0	2	1	1	21,5
7.	F	1	1	2	2,5	2,5	1	1	1	0	1	1	1	1	4	1	1	1	1	2	1	2	29
8.	F	0	1	2	2,5	2,5	1	1	0,5	0,5	1	1	0,5	0,5	3	1	0	1	0	0	0	0	19
9.	F	1	1	1,5	1,5	2,5	1	1	0	1	1	1	1	1	3	1	1	1	0	2	1	1,5	25
10.	F	0,5	0,5	0,5	1	2,5	1	1	0,5	0	0,5	1	0	1	2,5	1	0	1	0	2	0,5	2	19
11.	L	0,5	0,5	2	0,5	1,5	0,5	0	0	0	1	0,5	0,5	1	0	1	0	1	0	2	0	0	12,5
12.	F	0,5	1	2	2,5	2,5	1	0,5	0,5	2	1	1	1	0,5	1	1	1	1	1	2	0,5	1,5	25
13.	L	1	0,5	1,5	2	2	1	1	1	2	1	1	1	1	4	1	0	1	1	2	0,5	2	27,5
14.	L	1	0,5	2	2	2	1	1	1	0	1	1	1	1	3	1	1	1	1	2	0	2	25,5
15.	F	1	1	2	2,5	2,5	1	1	1	2	1	1	1	1	4	1	1	1	1	2	1	2	31
16.	F	1	1	1,5	1,5	2,5	1	0,5	0,5	2	1	1	1	1	0	1	1	1	1	2	0,5	2	24
17.	F	1	0	1,5	0,5	2	1	1	0	0	1	0,5	0,5	0,5	0	1	1	1	1	2	0	2	17,5
18.	F	0,5	1	2	1,5	1	0,5	0,5	0	1,5	1	1	1	1	3	1	1	1	0	2	1	1,5	23
19.	L	0,5	0,5	2	2,5	1,5	1	0	0	1	1	1	1	0,5	3	1	0	0	0	2	0	0	18,5
20.	L	1	1	2	2,5	2,5	1	1	0,5	2	1	0,5	0,5	0,5	0	1	1	1	0	2	0	1,5	22,5
21.	L	1	1	2	2,5	2,5	0	0	0	0	1	1	1	1	2,5	1	0	1	1	2	1	2	23,5
22.	L	1	1	2	2,5	2,5	1	1	1	2	1	1	1	1	4	1	1	1	0	2	1	2	30
23.	F	1	1	2	1,5	1,5	1	0,5	0,5	1,5	1	1	1	0,5	1	0	1	1	0	2	0	0,5	19,5
24.	F	1	1	2	2,5	1,5	1	0,5	0	2	1	1	1	1	3	1	1	1	1	0	1	0,5	24
25.	L	1	1	1,5	2,5	2,5	1	1	1	2	1	1	1	1	3,5	1	1	1	0	2	0	2	28
26.	L	1	1	1,5	2	0	1	1	1	2	1	1	1	1	4	1	1	1	1	2	0,5	2	27
27.	F	1	0,5	2	1,5	1,5	0,5	0	0	1	1	1	0	0	0	1	1	1	0	2	0,5	1,5	17

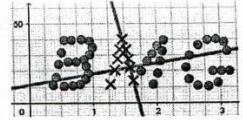
7.o.-HU

Témazáró dolgozat

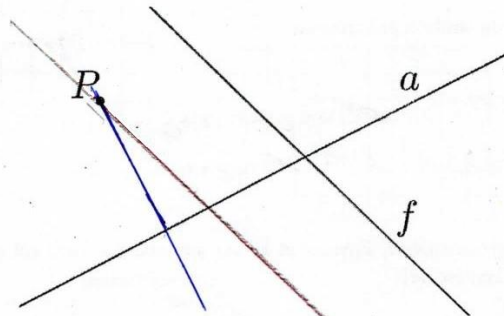
N <sub>ö</sub>	Nem	1.a	1.b	2.a	2.b	2.c	3.a	3.b	3.c	3.d	4.0	4.a	4.b	4.c	4.d	5.a	5.b	5.c	5.d	6.a	6.b	6.c	Σ
1.	L	0,5	1	2	0,5	1,5	1	1	0	0	1	1	1	0,5	3	1	1	1	1	2	0	2	22
2.	L	1	1	0,5	1	1	0,5	0	0	0	1	1	1	0,5	3	1	0	0	0	2	1	1	16,5
3.	L	0,5	0,5	1	2	0	0,5	1	0,5	2	1	1	1	0,5	3	1	0	1	0	2	1	2	21,5
4.	L	1	1	1	1,5	1,5	1	0,5	1	0	1	1	1	0,5	3	1	1	1	0	2	1	1	22
5.	F	0	0,5	2	1,5	2,5	1	1	1	1,5	1	1	1	0,5	3	1	1	0	1	2	0,5	1,5	24,5
6.	F	1	1	1	1,5	0,5	1	1	0,5	1,5	0,5	1	1	0,5	2	1	0	1	1	2	1	1	21
7.	F	1	0,5	2	1	1	1	0,5	0	0	1	1	1	0,5	2	1	1	1	1	2	1	0	19,5
8.	F	1	1	1	1	1,5	1	0,5	0	0	1	1	1	0,5	3	1	1	1	1	2	1	1,5	22
9.	L	1	1	2	2,5	2,5	1	0,5	0,5	2	1	1	1	0,5	3	1	1	1	1	2	1	1,5	28
10.	F	1	1	2	2,5	2,5	1	1	1	2	1	1	1	0,5	3	1	1	0	1	2	1	1,5	28
11.	L	1	1	1	0,5	1,5	1	1	0	2	1	1	1	0,5	4	1	1	1	1	2	1	1	24,5
12.	L	1	0	1	0,5	0,5	1	0	1	0	1	1	1	0,5	0,5	1	0	1	1	2	1	0	15
13.	F	1	1	2	2,5	2,5	1	1	1	1,5	1	1	1	0,5	3	1	1	1	1	2	1	1,5	28,5
14.	F	0,5	1	1	2,5	2,5	1	0,5	0,5	2	1	1	0,5	0,5	0	0	1	1	1	2	1	2	22,5

## 8. Diákmunka-3

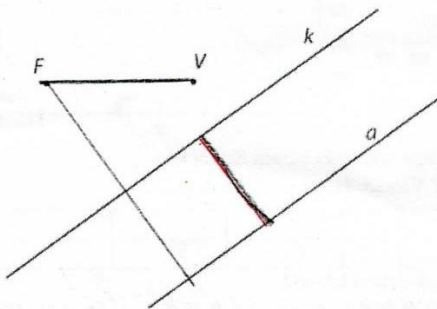
Merőleges és párhuzamos egyenesek, a koordináta-sík



1. a) Rajzold meg zöld színnel azt az egyenest, amely átmegy a  $P$  ponton, és párhuzamos az  $f$  egyenessel!
- b) Rajzold meg kék színnel azt az egyenest, amely átmegy a  $P$  ponton, és merőleges az  $a$  egyenesre!



2. Oldd meg a feladatot a térkép vázlat segítségével! A térképen rajzolj segédvonalakat és mérd vonalzóval! Számítsd ki a valódi távolságokat a mért adatokból!



Jelmagyarázat:

- a – autóút,
- k – kerékpárút,
- F – falu,
- V – város.

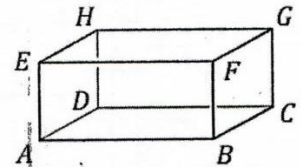
Lépték 1 cm 1000 m-nek felel meg.

Mérd meg hány **milliméter** a következő három távolság és számítsd ki hány **méter** a valóságban!

- |   | Térképen (mm)   | Valóságban (m) |
|---|---|----------------|
| a) A falu és a város távolsága:         | $30\text{ mm} (3\text{ cm}) - 3\text{ millió cm} (3000\text{ m})$ |                |
| b) A falu és az autóút távolsága:       | $50\text{ mm} - 5\text{ millió cm} (5000\text{ m})$               |                |
| c) Az autóút és a kerékpárút távolsága: | $20\text{ mm} - 2\text{ millió cm} (2000\text{ m})$               |                |

3. Add meg az ábrán látható téglatest azon éleit, amelyek

- a) az AD éllel párhuzamosak: EH, BC, FG
- b) az AD élt metszik: HD, HE, AB, DC
- c) az AD éllel kitérők: GC, FB, FE, GH



Nevezd meg a téglatest lapátloít alkotó szakaszokat végpontjaikkal:

EC, BG, HA, DE, BF, HF, AC, EG, DB

4. Ábrázold a koordináta-rendszerben az A (2; -3) és C (-3; 4) pontokat!

a) Adj (-5)-öt az A pont első jelzőszámához, a másodikat ne változtasd! Írd le az így kapott B pont koordinátáit: B (-5; -3) és rajzold be a koordináta-rendszerbe!

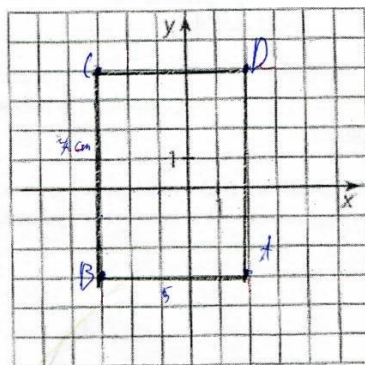
b) Adj (+5)-öt a C pont első jelzőszámához, a másodikat ne változtasd! Írd le az így kapott D pont koordinátáit: D (2; 4) és rajzold be a koordináta-rendszerbe!

c) Milyen négyszöget határoznak meg az A, B, C, D pontok?

Leptetlap  
Rajzold meg a négyszöget!

d) Számítsd ki a kapott négyszög területét és kerületét!

$10 \cdot 10 \text{ cm}^2$   
 $S = a \cdot b = 5 \cdot 4 = 20 \text{ cm}^2$   
 $k = 2(a+b) = 2 \cdot (5+4) = 18 \text{ cm}$



5. Dani vonattal utazott a nagymamájához. Egyszer át kellett szállnia. Az utazásról az alábbi grafikon készült. A grafikon alapján válaszolj a kérdésekre!

a) Hány órá volt Dani utazása?

4 óra

b) Milyen messze lakik Dani a nagymamájától?

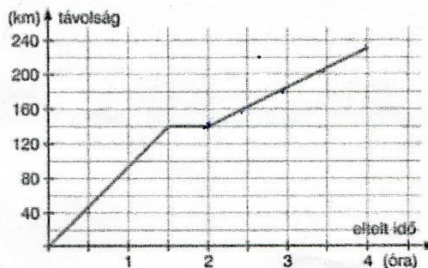
220 km

c) Mennyi időt kellett Daninak a csatlakozásra várnia?

30 percet

d) Hány kilométerre van a nagymama lakóhelyétől az állomás, ahol Daninak át kellett szállnia?

80 km



6. Lili egy barátai összejövetelre fánkot süt. Úgy tervezi, hogy mindenki három fánkot kap.

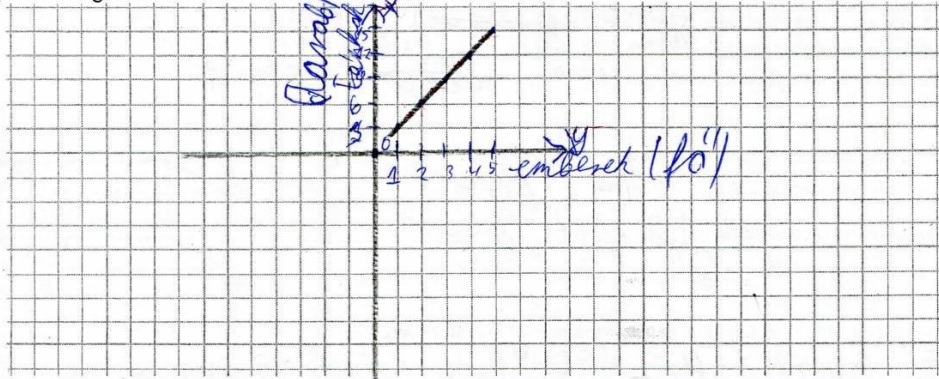
a) Hány darabot kell sütnie, ha a társaság 2, 3, 4, 5 tagú? Válaszodat írd a táblázatba!

társaság létszáma	1	2	3	4	5	
fánkok száma (db)	3	6	9	12	15	

b) Milyen összefüggés van a társaság létszáma és a fánkok száma között?

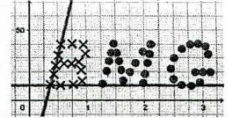
$1 \cdot 3 = 3, 2 \cdot 3 = 6$  stb. vagyis mindenki kap 3 fánkot. Vagy minden személyre nő a fánkok száma.

c) Ábrázold grafikonon az összetartozó értékeket!

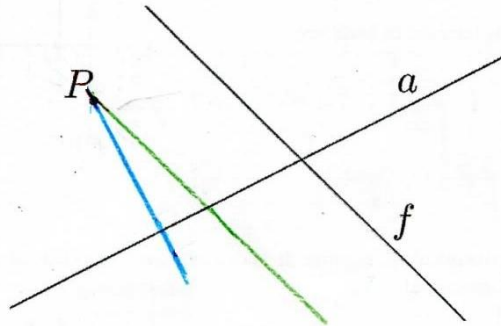


## 9. Diákmunka-4

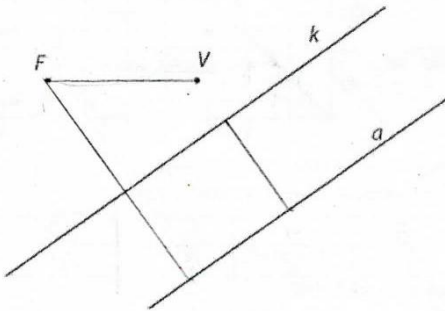
Merőleges és párhuzamos egyenesek, a koordináta-sík



1. a) Rajzold meg zöld színnel azt az egyenest, amely átmegy a  $P$  ponton, és párhuzamos az  $f$  egyenessel!
- b) Rajzold meg kék színnel azt az egyenest, amely átmegy a  $P$  ponton, és merőleges az  $a$  egyenesre!



2. Oldd meg a feladatot a térképívzlat segítségével! A térképen rajzolj segédvonalakat és mérd vonalzóval! Számítsd ki a valódi távolságokat a mért adatokból!



Jelmagyarázat:

- a – autótű,
- k – kerékpárút,
- F – falu,
- V – város.

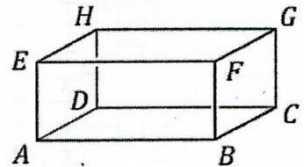
Lépték 1 cm 1000 m-nek felel meg.

Mérd meg hány **milliméter** a következő három távolság és számítsd ki hány **méter** a valóságban!

- |  | Térképen (mm)  | Valóságban (m) |
|--|----------------|----------------|
| a) A falu és a város távolsága:          | 30 mm = 300 m  |                |
| b) A falu és az autótű távolsága:        | 48 mm = 4800 m |                |
| c) Az autótűt és a kerékpárút távolsága: | 20 mm = 2000 m |                |

3. Add meg az ábrán látható téglatest azon éleit, amelyek

- || a) az AD éllel párhuzamosak: EH, BC, FG
- ⊥ b) az AD éllel metszik: EA, HD, AB, DC
- c) az AD éllel kitérők: HB, EF, GC, FB,



Nevezd meg a téglatest lapátlőit alkotó szakaszokat végpontjaikkal:

- ABF, AEF, FCB, FCG, GCD, GHD, AEH, AHD  
EEG, EHG, ABC, ADC

4. Ábrázold a koordináta-rendszerben az A (2; -3) és C (-3; 4) pontokat!

a) Adj (-5)-öt az A pont első jelzőszámához, a másodikikat ne változtasd! Írd le az így kapott B pont koordinátáit: B (-2; -3) és rajzold be a koordináta-rendszerbe!

b) Adj (+5)-öt a C pont első jelzőszámához, a másodikikat ne változtasd! Írd le az így kapott D pont koordinátáit: D (2; 4) és rajzold be a koordináta-rendszerbe!

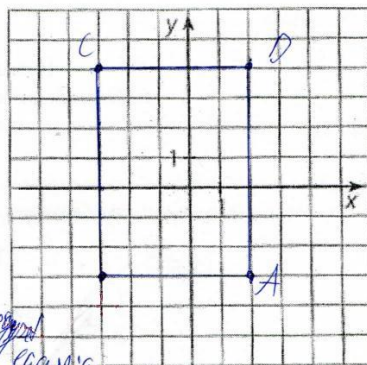
c) Milyen négyszöget határoznak meg az A, B, C, D pontok?

*széghalag*

Rajzold meg a négyszöget!

d) Számítsd ki a kapott négyszög területét és kerületét!

*Ker.: (7 \* 2) + (5 \* 2) = 14 + 10 = 24 méter  
ter.: 7 \* 5 = 35 négyzet méter*



5. Dani vonattal utazott a nagymamájához. Egyszer át kellett szállnia. Az utazásról az alábbi grafikon készült. A grafikon alapján válaszolj a kérdésekre!

a) Hány óras volt Dani utazása?

*4 óra*

b) Milyen messze lakik Dani a nagymamájától?

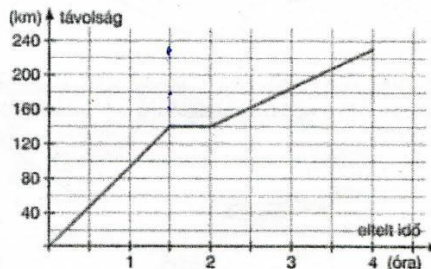
*220 km 235 km*

c) Mennyi időt kellett Daninak a csatlakozásra várnia?

*30 percet*

d) Hány kilométerre van a nagymama lakóhelyétől az az állomás, ahol Daninak át kellett szállnia?

*95 km*



6. Lili egy baráti összejövetelre fánkot süt. Úgy tervezi, hogy mindenki három fánkot kap.

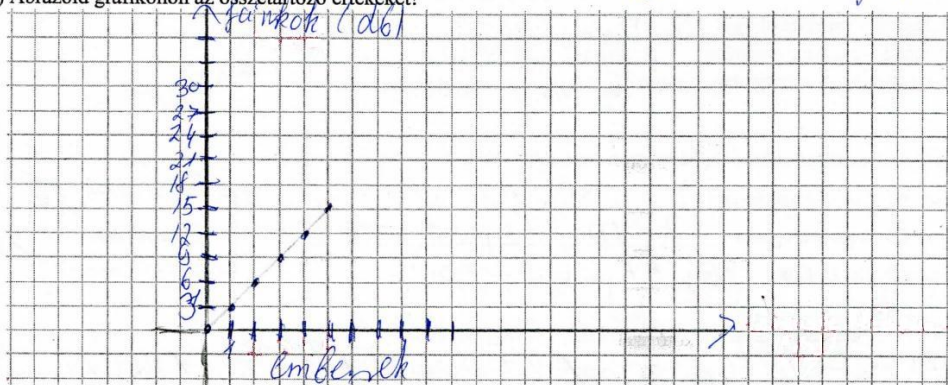
a) Hány darabot kell sütnie, ha a társaság 2, 3, 4, 5 tagú? Válaszodat írd a táblázatba!

társaság létszáma	1	2	3	4	5	6
fánkok száma (db)	3	6	9	12	15	18

b) Milyen összefüggés van a társaság létszáma és a fánkok száma között?

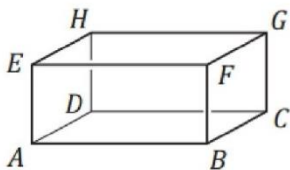
*Ahogy nő egy emberrel a társaság mindig 3 fánkkal többet kell sütnie ki lennie egyenes arányos*

c) Ábrázold grafikonon az összetartozó értékeket!



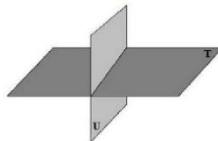
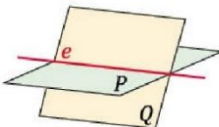
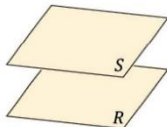
# 10. Órai feladatlap: Téglatest, Kocka. Párhuzamos és merőleges síkok

1. Az ábra egy dobozt szemléltet. Adjunk meg párhuzamos és merőleges lapokat!



Párhuzamos lapok	Merőleges lapok

Síkok



Két metsző sík a teret \_\_\_ részre osztja.

2. Keressetek a tantárcsomban párhuzamos és merőleges síkokat!

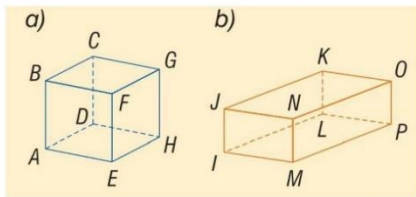
**Felelet:** \_\_\_\_\_  
 \_\_\_\_\_  
 \_\_\_\_\_

3. Keressünk párhuzamos lapátlókat az ábrán látható

a) kockán:

b) téglatesten:

\_\_\_\_\_

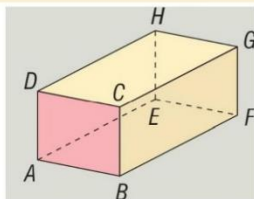


4. Hány olyan lapja van az ábrán látható téglatestnek, amely a sötétre festett

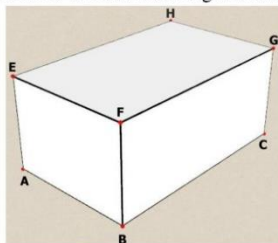
a) lappal párhuzamos:

b) lapra merőleges:

c) lappal egybevágó:



5. Színezd pirosra azt a lapot, melyet a B, A, F csúcsok határoznak meg; zöldre azt a lapot, melyet a FB és CB élek határoznak meg; kékre azt a lapot, mely az AB és CB élek által meghatározott lappal szemközi lap.



6. Hány pötty látható a dobókockán

- a) a 3-as;      b) a 6-os;      c) az 5-ös;      d) a 4-es lappal párhuzamos lapon?

**Felelet:** a) \_\_\_\_\_;      b) \_\_\_\_\_;      c) \_\_\_\_\_;      d) \_\_\_\_\_;



7. A dobókocka 1-es és 2-es lapjai merőlegesek egymásra.

a) Keresd meg az összes olyan lapot, amely merőleges a 6-os lapra:

b) Keresd meg az összes olyan lapot, amely merőleges a 4-es lapra:

8. A főtt tojást szeletelő szerkezet nyolc párhuzamos sík mentén vágta fel a tojást. A tojás sárgáján csak három sík haladt át. Hány fehér és hány sárgáját tartalmazó rész keletkezett?

a) A fehér részek száma: \_\_\_\_\_.

b) A sárga részek száma: \_\_\_\_\_.



9. Tizenkét darab egyforma kockából téglatestet építünk. Hányféle téglatestet kaphatunk? Töltsd ki a táblázat minél több oszlopát, ha  $a \leq b \leq c$ !

**Megoldás:**

a						
b						
c						



10. P, Q és R különböző síkok. Fejezd be a következő mondatokat!

a) Ha P sík párhuzamos a Q síkkal, és Q sík párhuzamos R síkkal, akkor

\_\_\_\_\_.

b) Ha P sík merőleges a Q síkra, és Q sík merőleges R síkra, akkor

\_\_\_\_\_.

11. Egy téglatest alakú szoba egyik sarkában egy pók, egy vele szomszédos sarokban pedig egy légy pihen. A pók el szeretné fogni a legyet, de megállapodnak, hogy csak a lapátlókon haladhatnak. Van-e esélye a póknak, hogy elkapja a legyet?

Felelet: \_\_\_\_\_.

Indoklás: \_\_\_\_\_.



7.  $\angle AOB = 130^\circ$ ,  $OC$  a szögfelezője. Határozd meg az  $\angle AOC$  fokmértékét! Készíts pontos rajzot!

[4,5 pont]

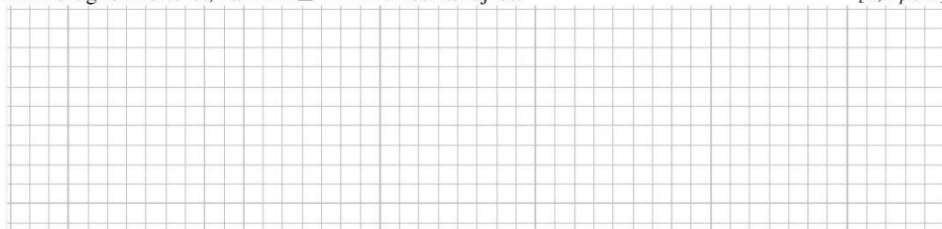
***Felelet:***

8. Szerkessz egy  $45^\circ$ -os szöveget!

[5,5 pont]

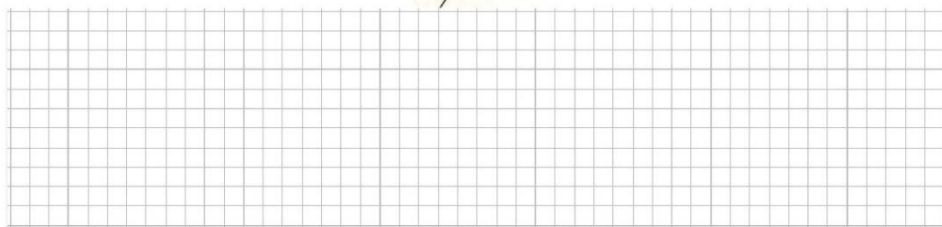
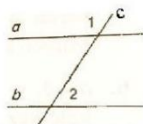


7. Az  $AOB$  és  $BOC$  szögek mellékszögek. Az  $OM$  félegyenes az  $BOC$  szög szögfelezője. Határozd meg az  $AOB$  szög fokmértékét, ha  $MOC \angle = 30^\circ$ . Készíts rajzot! [5,5 pont]



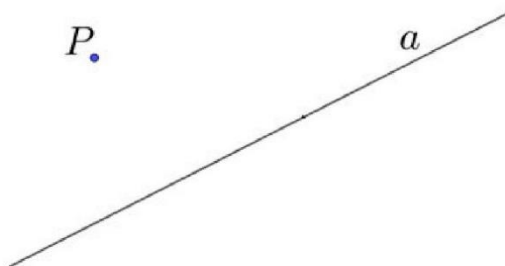
**Felelet:**

8. Az ábrán az  $a$  és  $b$  egyenesek párhuzamosak, a  $c$  mindkettőt metsző egyenes,  $1\angle : 2\angle = 7 : 2$ . Számíts ki minden keletkezett szöget! [7 pont]



**Felelet:**

9. Szerkessz egy egyenest, amely átmegy a  $P$  ponton, és merőleges az  $a$  egyenesre! [3,5 pont]



32 pont/\_\_\_\_\_

### 13. Az IKT-s vs. hagyományos tanítási kísérlet tesztjeinek eredményei

IKT-s		Témazáró-1									Témazáró-2									
N <sub>ö</sub>	Nem	1	2	3	4	5	6.	7.	8.	∑	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	∑
1.	F	1,0	1,0	2,0	2,5	4,0	4,5	4,5	5,5	25,0	0,0	1,5	2,5	1,0	4,0	1,0	4,5	0,0	2,5	17,0
2.	F	1,0	1,0	1,5	2,0	3,0	3,0	2,5	3,0	17,0	1,5	1,5	2,5	2,5	4,0	1,5	4,5	3,0	3,5	24,5
3.	L	1,0	1,0	2,0	2,0	4,0	4,0	4,5	5,5	24,0	1,5	1,5	2,5	2,5	4,0	3,0	5,5	5,0	3,5	29,0
4.	F	1,0	1,0	2,0	2,0	4,0	0,5	4,0	2,5	17,0	1,5	1,5	1,0	2,5	0,0	1,5	4,0	0,0	3,5	15,5
5.	F	1,0	1,0	2,0	0,0	4,0	0,5	1,0	0,0	9,5	0,0	1,5	1,0	1,0	2,5	2,0	1,0	4,0	2,5	15,5
6.	F	1,0	1,0	0,5	0,0	3,0	3,5	4,5	5,5	19,0	1,5	0,0	2,5	2,5	4,0	2,0	5,5	4,0	3,5	25,5
7.	F	1,0	0,0	2,0	1,5	3,0	2,0	2,5	0,5	12,5	0,0	1,5	2,5	1,0	4,0	1,0	2,5	0,0	0,0	12,5
8.	F	1,0	1,0	2,0	1,5	2,0	3,5	4,5	5,5	21,0	1,5	1,0	2,5	2,5	4,0	1,5	2,5	7,0	3,5	26,0
9.	L	1,0	0,0	2,0	2,5	2,0	2,0	4,5	2,5	16,5	0,0	0,0	0,0	1,0	1,5	1,5	2,5	0,0	3,5	10,0
10.	L	1,0	0,0	0,5	1,5	1,5	0,0	2,5	3,0	10,0	1,5	0,0	2,5	2,5	4,0	1,5	1,0	0,0	3,5	16,5
11.	F	1,0	1,0	2,0	2,5	2,5	4,5	4,5	5,5	23,5	1,5	1,5	2,5	2,5	4,0	4,0	5,5	7,0	3,5	32,0
12.	L	1,0	1,0	2,0	2,5	3,5	4,5	4,0	5,5	24,0	0,0	1,5	1,0	2,5	4,0	1,0	4,5	0,0	3,5	18,0
13.	L	1,0	0,0	0,5	2,0	1,0	0,0	3,0	2,5	10,0	0,0	0,0	2,5	2,5	4,0	1,0	2,5	0,0	3,5	16,0
14.	L	1,0	1,0	0,5	2,0	1,5	2,0	2,5	0,0	10,5	0,0	1,5	1,0	2,5	1,5	0,0	4,5	6,5	3,0	20,5

## Hagyományos

## Témazáró-1

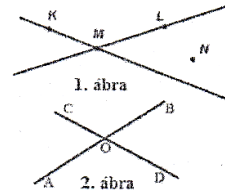
## Témazáró-2

Nő	Nem	1	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	Σ	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	Σ
1.	F	1,0	1,0	2,0	2,5	3,5	4,5	3,5	3,0	21,0	1,5	1,5	1,0	2,5	3,5	2,0	1,5	7,0	3,5	24,0
2.	F	1,0	1,0	2,0	2,5	3,5	3,5	4,5	5,5	23,5	1,5	0,0	2,5	2,5	4,0	3,0	5,5	7,0	3,5	29,5
3.	F	1,0	1,0	0,5	1,0	1,5	0,0	2,5	5,0	12,5	1,5	1,5	2,5	2,5	3,0	0,0	3,5	4,0	3,5	22,0
4.	L	1,0	1,0	0,5	2,5	2,5	4,5	3,5	4,5	20,0	1,5	1,5	2,5	0,0	3,0	4,0	5,5	7,0	3,5	28,5
5.	F	1,0	1,0	2,0	1,0	0,0	0,0	0,5	1,5	7,0	0,0	1,0	1,0	0,0	0,0	0,0	1,0	0,0	3,5	6,5
6.	L	1,0	1,0	2,0	2,5	2,5	0,0	4,0	0,0	13,0	1,5	1,5	2,5	1,0	3,0	2,0	3,5	4,0	3,5	22,5
7.	L	1,0	0,0	0,5	2,0	0,0	1,5	3,0	0,5	8,5	0,0	1,5	2,5	1,0	4,0	4,0	3,5	0,0	3,5	20,0
8.	F	1,0	0,0	0,5	2,5	0,0	1,5	1,0	0,0	6,5	0,0	1,5	2,5	2,5	1,5	0,0	1,0	0,0	0,0	9,0
9.	L	1,0	0,0	0,5	2,5	4,0	4,5	3,5	0,5	16,5	0,0	1,5	2,5	2,5	3,5	4,0	4,0	4,0	3,5	25,5
10.	F	1,0	1,0	2,0	2,5	2,5	4,5	4,5	0,5	18,5	1,5	1,5	2,5	2,5	4,0	3,0	5,5	7,0	3,5	31,0
11.	F	1,0	1,0	0,5	0,5	0,0	1,5	0,0	0,5	5,0	1,5	1,5	2,5	0,0	2,5	4,0	4,5	0,0	3,0	19,5
12.	L	1,0	1,0	0,5	2,5	0,0	4,0	4,5	0,0	13,5	1,5	1,5	2,5	2,5	4,0	2,0	4,5	7,0	2,0	27,5
13.	L	1,0	1,0	2,0	1,0	2,0	0,0	2,5	0,5	10,0	1,5	1,5	2,5	2,5	0,0	0,0	0,0	4,0	3,5	15,5
14.	L	1,0	1,0	2,0	2,0	2,5	4,5	4,0	3,0	20,0	1,5	1,5	2,5	2,5	4,0	4,0	5,5	7,0	3,5	32,0
15.	F	1,0	1,0	0,5	2,5	2,0	0,5	4,0	0,5	12,0	1,5	1,5	1,0	0,0	3,0	0,0	2,0	0,0	1,0	10,0
16.	F	1,0	0,0	2,0	1,5	2,5	1,5	2,5	0,0	11,0	0,0	0,0	2,5	1,0	0,0	2,0	0,0	4,0	3,5	13,0
17.	F	1,0	1,0	2,0	1,0	2,0	0,0	2,0	0,5	9,5	0,0	1,5	2,5	2,5	0,0	0,0	0,0	4,0	3,5	14,0
18.	F	1,0	1,0	0,5	2,0	2,0	2,5	3,5	0,5	13,0	1,5	0,0	2,5	1,0	4,0	3,0	4,5	4,0	3,5	24,0
19.	L	1,0	1,0	2,0	2,5	1,0	2,5	1,0	2,5	13,5	1,5	1,5	1,0	1,0	3,0	3,5	5,0	3,0	3,5	23,0
20.	F	1,0	1,0	2,0	2,5	3,0	1,0	3,0	0,0	13,5	1,5	0,0	1,0	0,0	3,0	0,0	1,0	0,0	3,0	9,5
21.	F	1,0	1,0	2,0	2,5	2,5	2,0	4,0	3,0	18,0	1,5	1,5	2,5	0,0	4,0	2,5	5,5	7,0	3,5	28,0
22.	F	1,0	1,0	2,0	1,5	0,0	0,0	3,0	0,0	8,5	1,5	1,5	2,5	2,5	1,5	0,0	0,0	4,0	2,0	15,5
23.	L	1,0	0,0	0,0	2,0	3,0	2,5	3,5	3,0	15,0	1,5	1,5	2,5	0,0	0,0	0,0	5,5	7,0	3,5	21,5
24.	L	1,0	1,0	2,0	2,0	2,0	1,0	4,0	0,0	13,0	0,0	1,5	1,0	1,0	4,0	4,0	5,0	0,0	2,0	18,5

# 14. Diákmunka-6

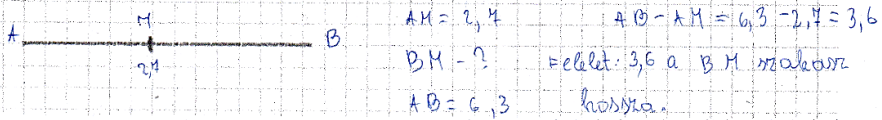
## TESZTEK

1. Melyik pont illeszkedik mindkét egyenesre? (1. ábra)  
 a) K, M pont    b) L, M pont     c) M pont    d) N pont
2. Melyik félegyenes lesz az OC félegyenes kiegészítő félegyenes?  
 a) OB    b) OA    c) OB és OA     d) OD
3. Az alábbiak közül melyik tompaszög?  
 a)  $10920^\circ$ ;    b)  $5880^\circ$ ;    c)  $660^\circ$ ;    d)  $5400^\circ$ .

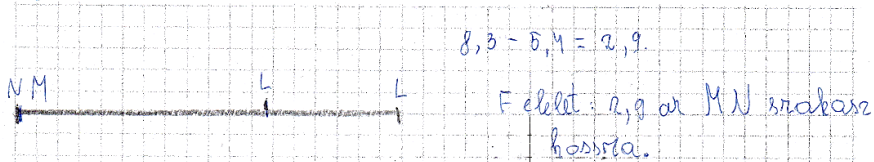


## FELADATOK

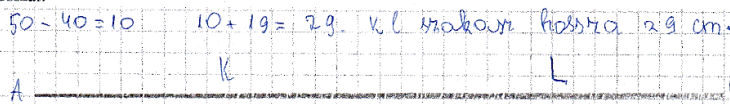
4. Az M pont az AB szakasz belső pontja.  $AB = 6,3\text{cm}$ ,  $AM = 2,7\text{cm}$ . Határozd meg a BM szakasz hosszát!



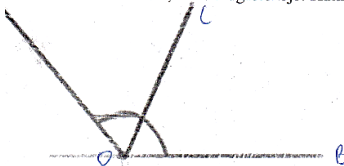
5. Az M, N és L pontok egy egyenesen vannak.  $ML = 5,4\text{cm}$ ,  $NL = 8,3\text{cm}$ . Határozd meg az MN szakasz hosszát! Hány megoldása van a feladatnak?



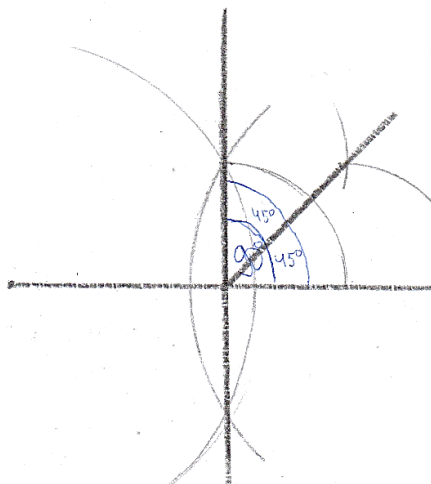
6. K és L pontok az AB szakaszra illeszkednek.  $AB = 50\text{cm}$ ,  $AL = 40\text{cm}$ ,  $BK = 19\text{cm}$ . Határozd meg a KL szakasz hosszát!



7.  $\angle AOB = 130^\circ$ , OC a szögfelezője. Határozd meg az  $\angle AOC$  fokmértékét! Készíts pontos rajzot!



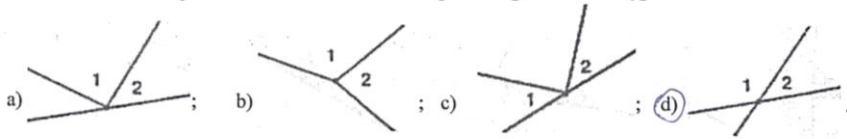
8. Szerkessz egy  $45^\circ$ -os szöveget!



# 15. Diákmunka-7

Egyenesek kölcsönös helyzete a síkon

1. Az alábbi ábrák melyikén lesznek az 1-es és 2-es jelű szögek mellékszögek?



2. Ha a csúcsszögek közül az egyik fokmértéke  $55^\circ$ , akkor a másik:

- a)  $45^\circ$ ;                      b)  $125^\circ$ ;                      c)  $55^\circ$ ;                      **d)  $35^\circ$ .**

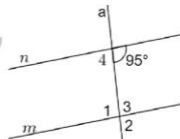
3. Az  $\alpha$  és  $\beta$  mely értékeinél lesznek párhuzamosak az  $a$  és  $b$  egyenesek?



- a)  $\alpha = 50^\circ, \beta = 130^\circ$ ;    b)  $\alpha = 50^\circ, \beta = 50^\circ$ ;    c)  $\alpha = 135^\circ, \beta = 50^\circ$ ;    d)  $\alpha = 50^\circ, \beta = 120^\circ$ .

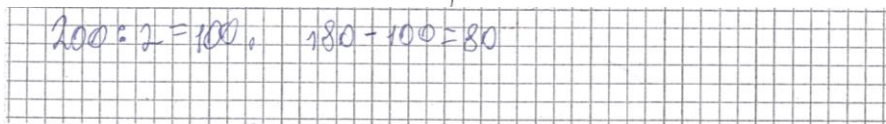
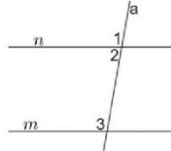
4. Határozd meg az ábra alapján az 1-es szög fokmértékét, ha  $n$  és  $m$  párhuzamos egyenesek, az  $a$  mindkettőt metsző egyenes!

$$180^\circ - 95^\circ = 85^\circ$$



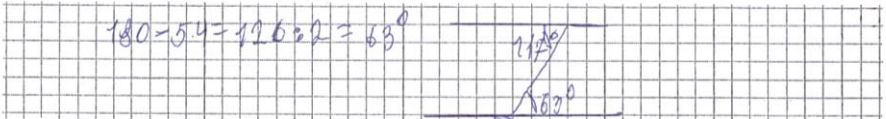
- a)  $95^\circ$ ;                      **b)  $85^\circ$ ;**                      c)  $105^\circ$ ;                      d)  $210^\circ$ .

5. Az ábrán  $n$  és  $m$  egyenesek párhuzamosak, az  $a$  mindkettőt metsző egyenes,  $1\angle + 3\angle = 200^\circ$ . Határozd meg a 2-es jelű szög fokmértékét!



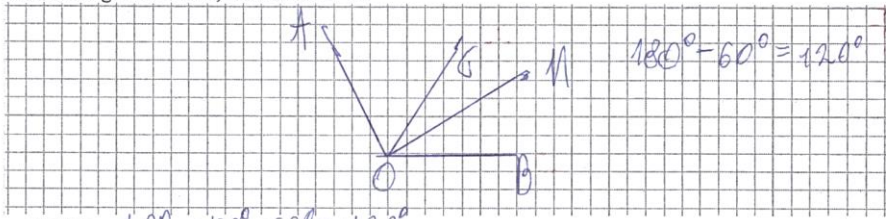
Felelet:  $2\angle = 80^\circ$

6. Határozd meg két egyenes metszésekor keletkezett mellékszögeket, ha az egyik  $54^\circ$ -kal nagyobb a másikonál.



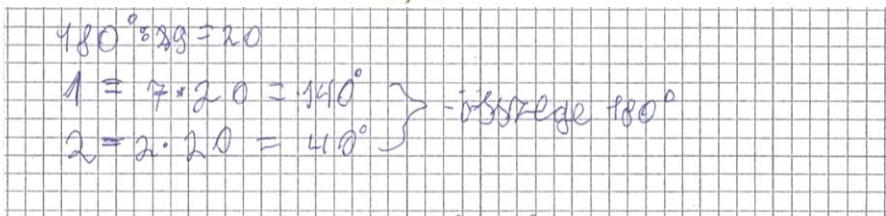
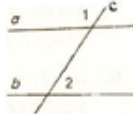
Felelet:

7. Az  $AOB$  és  $BOC$  szögek mellékszögek. Az  $OM$  félegyenes az  $BOC$  szög szögfelezője. Határozzátok meg az  $AOB$  szög fokmértékét, ha  $MOC \angle = 30^\circ$



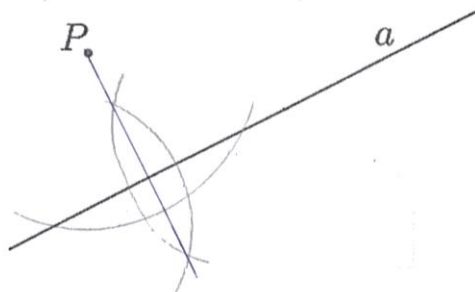
*Felelet:*  $\angle AOB = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$

8. Az ábrán az  $a$  és  $b$  egyenesek párhuzamosak, a  $c$  mindkettőt metsző egyenes,  $1\angle : 2\angle = 7 : 2$ . Számíts ki minden keletkezett szöget!



*Felelet:*  $1 = 140^\circ, 2 = 40^\circ, 140^\circ + 40^\circ = 180^\circ$

9. Szerkessz egy egyenest, amely átmegy a  $P$  ponton, és merőleges az  $a$  egyenesre!



## 16. Az IKT-s osztály eszközhasználati szokásait vizsgáló kérdőív

**Számítógéppel támogatott matematika órák**

1. Használod-e otthon az internetet?  
 Igen  Nem

Ha igen milyen eszközön?  
 okostelefonon   
 táblagépen   
 számítógépen   
 egyéb

2. Mire használod-e az internetet?  
 kapcsolattartásra   
 információszerezésre   
 játékra, szórakozásra   
 tanulásra   
 egyéb célra

3. Használod-e az internetet matematikatanuláshoz az iskolán kívül?  
 Igen  Nem

4. Szívesen dolgoztál számítógépen a matematika órákon?  
 Igen  Nem

Ha igen, mit szerettél legjobban csinálni a számítógéppel?

Ha nem akkor mi nem tetszett?

5. A tananyag nagyobb részét  
 órán, tanári magyarázattal   
 órán, dinamikus munkalap segítségével   
 órán, feladatlap feladatainak megoldásával   
 otthoni tanulással   
 házi feladat megoldásával   
 tanultam meg.

6. Mennyi időt kellett még otthon foglalkoznod a tananyaggal, hogy felkészülj a következő órára?  
 Kevesebb, mint 15 perc   
 15 perc   
 30 perc   
 45 perc   
 Több

7. Rendezd sorba mi segített legjobban a felkészülésben?  
 A) tankönyv 1.   
 B) saját jegyzet 2.   
 C) osztálytársak segítsége 3.   
 D) feladatlapok 4.   
 E) GeoGebra segédletek 5.   
 F) internetes segédletek 6.

8. Melyik számonkérési formát kedvelted leginkább? Rakd sorba!

- A) papír feladatlap 1.
- B) Redmenta feladatlap 2.
- C) szóbeli felelés 3.
- D) írásbeli felelet 4.
- E) dolgozatírás 5.

9. A feladatmegoldáshoz javasolt animációkat megnyitottad-e?

mindig  gyakran  ritkán

10. Hasznosnak találtad-e a megnyitott animációkat?

mindig  gyakran  ritkán

11. Segítettek-e a számítógépes eszközök a matematikatanulásban?

Tegyél „X”-et a táblázat megfelelő helyére!

	Új anyag	Gyakorlás	Számonkérés
PowerPoint bemutató	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
GeoGebra segédletek	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Okosdobozos feladatok	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
LearningApps-es feladatok	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Redmenta feladatlapok	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

12. Mit viszel magaddal?

---

---

---

---

---

---