



FROBENIUS PÉNZVÁLTÁSI PROBLÉMÁJA
doktori (PhD) értekezés
Kiss Géza

Debreceni Egyetem
Természettudományi Kar

2004.

Köszönetnyilvánítás

Ezúton is szeretnék köszönetet mondani témavezetőmnek, Freud Róbert tanár úrnak, aki több mint négy éven keresztül folyamatosan támogatta munkámat. Célt és irányokat megszabó tanácsai, állandó biztatása és ezernyi segítőkész, kiegészítő közreműködése nélkül sem a publikációk, sem ez a dolgozat nem jöhetett volna létre. Különösen hálás vagyok azért a sok-sok beszélgetésért, matematizálásért, amely egyetemista éveim óta formálta tanári szemléletemet és mély humánumáért, amely a legnehezebb helyzeteken is átsegített.

Köszönettel tartozom feleségemnek és szüleimnek, akik türelmükkel és a nyugodt háttér biztosításával segítették munkámat.

Tanártársaim és barátaim támogatását is végig érezhettem. Név szerint is szeretném megköszönni Oros Imre és Székely Péter kollégáimnak a \TeX megismeréséhez, a felmerült technikai nehézségek megoldásához nyújtott önzetlen segítséget.

Kiss Géza

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés	2
2. A pénzváltási probléma az iskolai tehetséggondozásban	4
2.1. Keressük a legnagyobb nem felírható számot!	4
2.2. A nem felírható számok számáról	10
2.3. Ízelítő az extrémális Frobenius-problémából	16
3. Az extrémális Frobenius-probléma	22
3.1. Néhány becslés $G(A)$ -ra	22
3.2. Az extrémális problémára vonatkozó eredmények összefoglalása	25
3.3. A $g(n, dn + k)$ meghatározása	29
3.4. Következmények, megjegyzések	33
4. A nem felírható számok száma	36
4.1. Az eddigi eredmények vázlatos áttekintése	36
4.2. Az ERDŐS–GRAHAM-sejtés	39
5. A nem felírható számok összegzése	44
5.1. Partíciók és nem felírható számok	44
5.2. Generátorfüggvény és a nem felírható számok összege .	46
5.3. A nem felírható számok hatványösszegeiről ($n = 2$)	50
5.4. Összegzések elemi módszerrel	54
5.5. A nem felírható számok hatványösszegei elemi módszerrel	59
6. Összegzés	66
Hivatkozások	70

1. Bevezetés

Ebben a dolgozatban bemutatjuk egy kiterjedt számelméleti problémakör néhány részletét. A kiinduló kérdés az, hogy adott relatív prím pozitív egészek nemnegatív egész kombinációival mely számok állnak elő. A témakör leginkább a lineáris diofantikus egyenletekkel áll szoros kapcsolatban, de a megoldási módszerek között igen változatos kombinatorikus, additív számelméleti és analízisbeli eszközök is előfordulnak. Az egész Frobenius problémakör bemutatására nem vállalkozhattunk. Ehhez mostanra már egyébként is rendelkezésre áll J. RAMÍREZ ALFONSÍN kitűnő összeállítása [24], amely teljes komplexitásban igyekszik felsorolni a témakör eddigi eredményeit. Az a közel 200 oldalas munka valóban csak a teljes felsorolásra vállalkozhatott, hiszen a közel 450 publikáció hozzávetőleges tartalmi kivonatolása is legalább egy vaskos kötetet tenne ki. Az eredeti cél szerint azokra a témakörökre koncentráltunk, amelyeket a saját eredmények megértéséhez, vagy éppen a korábbi eredményekhez történő igazításukhoz, mélységük megítéléséhez fontosnak gondoltunk. Így fordulhatott elő, hogy olyan önmagukban is nagyon érdekes, nehéz témák, mint pl. a klasszikus értelemben vett Frobenius-számok meghatározásában, a „postabélyeg” problémában, vagy az algoritmusok kérdéskörében eddig elért részeredmények teljes egészében kimaradtak a dolgozatból.

Ezzel szemben igyekszünk súlyának megfelelően foglalkozni a témakör lehetséges oktatási vonatkozásaival. A 2. fejezetben egy lehetséges felépítést adunk egy olyan tehetséggondozási projekthez, ahol rövid előkészítés után a középiskolai korosztály megismerheti a probléma történetét, legfontosabb területeit, a más helyzetekben is jól alkalmazható megoldási módszerek egy részét és nem utolsósorban nyitott kérdéseket is.

A 3. fejezetben az extrémális Frobenius-probléma eredményeiről adott áttekintést követően egy új tétellel és annak következményei alapján néhány újabb részlettel egészítjük ki az ismert pontos értéke-

ket. Tételünk ERDŐS PÁL és RONALD L. GRAHAM tételét általánosítja.

A 4. fejezet a nem felírható számokkal foglalkozik. Itt megadjuk az ERDŐS és GRAHAM által felvetett extrémális probléma teljes megoldását is.

Az 5. fejezetben a nem felírható számok bizonyos összegzéseivel foglalkozunk. Három módszert mutatunk be, melyek közül a harmadik, a teljes egészében elemi módszer önálló megfontolások eredménye.

A 2. fejezet anyaga a [18], a 3.3 – 3.4 szakaszé a [16], a 4.2 szakaszé a [17] cikkben jelent meg, az 5.4 – 5.5 szakaszé nincs publikálva.

2. A pénzváltási probléma az iskolai tehetséggondozásban

Ebben a bevezető fejezetben egyrészt vázlatosan megismerjük a Frobenius problémakör egészét, a legfontosabb fogalmakat, jelöléseket, másrészt a lehetséges oktatási vonatkozásokat fogjuk felvillantani.

A fogalmak és jelölések körét a további fejezetekben szükség szerint még bővítjük. Ez a fejezet szándékaink szerint önállóan, más források felhasználása nélkül is feldolgozható, követhető. A feladatok és az egyes fogalmak sorrendje egyben egy javaslatot is jelent a tárgyalás sorrendjére. Ez részben történeti, részben az egyes fejezetekben alkalmazott módszerek mélysége, nehézsége szerinti besorolás. A fejezetben szereplő évszámok, történeti adalékok a témakör elhelyezését, színesítését segíthetik.

Bár ebben a témában eddig közel 450 publikáció jelent meg, ismereteink szerint még nem foglalkoztak az iskolai alkalmazások lehetőségével. Az alábbiakban arra szeretnénk rávilágítani, hogy az ilyen típusú feladatok jól alkalmazhatóak a tehetséggondozásban.

A feladatok egy részét természetesen a normál iskolai munkában elképzelhetetlennek tűnik felhasználni, de a versenyzőktől elvárt nagyon magas szintet kitűnően mutatja az elsőként ismertetett 1983-as nemzetközi diákolimpiai feladat.

A fejezetben szereplő anyag már megjelent a szerző hasonló című angol nyelvű publikációjában [18].

2.1. Keressük a legnagyobb nem felírható számot!

Először az 1982/1983-as tanévben találkozhattunk tanulmányi versenyen is pénzváltási feladattal.

1. FELADAT. (Nemzetközi Matematikai Diákolimpia, Párizs) [25]
 Legyenek a, b, c páronként relatív prím pozitív egész számok. Mutassuk meg, hogy

$$abc - ab - bc - ca$$

az a legnagyobb egész szám, amely nem írható fel

$$xbc + yca + zab$$

alakban, ahol x, y, z nemnegatív egész számokat jelölnek.

2. FELADAT. (Műszaki Főiskolások Hajós György Versenye, Budapest) Valaki azt javasolta, hogy verjenek a jelenlegiekén kívül háromforintos pénzdarabokat is. Javaslatát azzal indokolta, hogy pusztán 3 és 5 forintosokkal bármekkora pénzösszeg kifizethető visszaadás nélkül, ha az egész számú forintból áll, és 7 Ft-nál több. Igaz-e ez az állítás?

Mindkét feladat speciális esete a számelméleti Frobenius-problémának, amelyet általánosan a következőképpen szokásos megadni: Legyenek $a_1 < a_2 < \dots < a_n$ pozitív egészek úgy, hogy $(a_1, \dots, a_n) = 1$. Keressük meg azt a legnagyobb K pozitív egész számot, amelyre a $K = \sum_{i=1}^n x_i a_i$ egyenlet nem oldható meg nemnegatív egész x_i -kben. Ezt a legnagyobb pozitív egész számot $G(a_1, \dots, a_n)$ -nel, míg az összes olyan K pozitív egészek számát, amelyre a $K = \sum_{i=1}^n x_i a_i$ egyenlet így nem oldható meg, $N(a_1, \dots, a_n)$ -nel jelöljük.

Mielőtt további feladatokra térnénk, oldjuk meg a 2. feladatot. Az új jelölésekkel azt kell igazolni, hogy $G(3, 5) = 7$. A 3 többszörösei természetesen kifejezhetők, felírhatók. Ugyanez igaz az 5-től kezdve azokra a számokra, amelyek hárommal osztva kettőt adnak maradékul. A legkisebb olyan szám, amely hárommal osztva egyet ad maradékul a 10 lesz. Az egyes maradékosztályokban mod 3 a legkisebb nem felírható elemek, a fentiek alapján rendre a $-3, 7, 2$. Ezek közül a legnagyobb a 7. ■

Analóg gondolatmenettel igazolható, hogy

3. FELADAT. $G(a_1, a_2) = (a_1 - 1)(a_2 - 1) - 1$, ha $(a_1, a_2) = 1$.

A megoldáshoz fel kell használni, hogy amennyiben $(a_1, a_2) = 1$ és $a_1 < a_2$, akkor $0, a_2, 2a_2, \dots, (a_1 - 1)a_2$ mindegyik maradékosztályból pontosan egy elemet tartalmaz mod a_1 . Ezt a továbbiakban teljes maradékrendszernek nevezzük.

Nem magától értetődő, hogy több a_i esetén is mindig van legnagyobb nem felírható szám.

4. FELADAT. Amennyiben $(a_1, \dots, a_n) = 1$, mindig van olyan $G(a_1, \dots, a_n)$ szám, amelyre teljesül, hogy $K > G(a_1, \dots, a_n)$ esetén a $K = \sum_{i=1}^n x_i a_i$ diofantoszi egyenlet megoldható nemnegatív egészekben.

Ez a Frobenius problémakör alaptételének is nyugodtan nevezhető feladat a Középiskolai Matematikai Lapokban 1997-ben VÍZVÁRI BÉLA [32] cikkeihez kapcsolva került kitűzésre. A feladat állítását n -re vonatkozó teljes indukcióval igazoljuk. Az $n = 2$ esetet az előbb vázoltuk. Ha $n > 2$, akkor tegyük fel, hogy k -ig már igaz az állítás és vizsgáljuk meg $k + 1$ -re. Legyen most az $n = k + 1$ esetben az első k darab szám legnagyobb közös osztója d . Ekkor az indukciós feltevés szerint az $\frac{a_1}{d}, \frac{a_2}{d}, \dots, \frac{a_k}{d}$ számokkal véges sok kivétellel minden pozitív egész szám felírható a kérdéses alakban. Így létezik olyan u , hogy $(u, a_{k+1}) = 1$ és $u = v_1 \frac{a_1}{d} + v_2 \frac{a_2}{d} + \dots + v_k \frac{a_k}{d}$, ahol v_1, v_2, \dots, v_k nemnegatív egészek. Mivel d és a_{k+1} relatív prímek, ellenkező esetben az a_1, a_2, \dots, a_{k+1} számoknak lenne 1-nél nagyobb közös osztója, ezért ud és a_{k+1} is relatív prímek. A fentiek szerint $n = 2$ esetén az állítás igaz, azaz véges sok kivétellel minden pozitív egész szám felírható

$$x_1 du + x_2 a_{k+1} = x_1 v_1 a_1 + x_1 v_2 a_2 + \dots + x_1 v_k a_k + x_2 a_{k+1}$$

alakban, ahol $x_1 v_1, x_1 v_2, \dots, x_1 v_k, x_2$ nemnegatív egészek. ■

Annak ellenére, hogy ez az általános eredmény gyakorlatilag az eredeti probléma felvetődése óta ismert, a legtöbb konkrét esetben nehéz feladatnak bizonyult $G(a_1, \dots, a_n)$ pontos meghatározása. Már három különböző címlet esetén sem adható meg általános formula. Az újabb címlet engedélyezése vagy egyáltalán nem befolyásolja a legnagyobb nem felírható számot (mert esetleg valamelyik korábbi címlet többszöröse vagy nagyobb a többivel nem felírható legnagyobb számnál), vagy az újabb kombinációs lehetőségek miatt lényegesen csökkenti azt. Ebben az esetben az egyes maradékosztályokban a felírható legkisebb reprezentánsok szerkezete szinte áttekinthetetlenné válik.

A publikációk egy jelentős részében éppen ezért különféle speciális feltételeket adnak meg a szerzők, annak érdekében, hogy ez a szerkezet kezelhető legyen. Ez tulajdonképpen a feladatok készítésének lehetősége is. Vizsgáljuk meg most a három szomszédos páratlan szám esetét.

5. FELADAT. *Határozzuk meg $G(2k + 1, 2k + 3, 2k + 5)$ -öt!*

A feladat megoldásához a kulcsot megtaláljuk, amennyiben modulo $2k + 1$ tekintjük a másik két szám lehetséges maradékait. Ezek mindegyik lineáris kombináció esetében a 2 és a 4 többszörösei lesznek. A $0, 2, 4, \dots, 4k$ teljes maradékrendszert alkotnak modulo $2k + 1$. A legnagyobb maradék eléréséhez a $2k + 5$ elemet pontosan k -szor kell vennünk (illetve, ha helyette néhányszor két darab $2k + 3$ -at veszünk, akkor „rosszabbul” járunk). Legfeljebb ugyanennyi elemből a kisebb maradékok is előállíthatók, így a legnagyobb nem felírható elem $G(2k + 1, 2k + 3, 2k + 5) = k(2k + 5) - (2k + 1) = 2k^2 + 3k - 1$. ■

Hasonló gondolatmenettel ROBERTS [26] 1956-ban igazolta, hogy

6. FELADAT. *Alkossanak az a_i -k növekvő számtani sorozatot, $a_1 = a, a_2 = a + d, \dots, a_n = a + (n - 1)d$, ahol $(a, d) = 1$. Ekkor*

$$G(a_1, a_2, \dots, a_n) = \left\lfloor \frac{a - 2}{n - 1} \right\rfloor a + (a - 1)d.$$

Az 1960-as évektől kezdődően a matematikusok körében kedvelt lett ez a téma és igen sok speciális esetben kiszámították $G(a_1, \dots, a_n)$ pontos értékét. Két fontos központ is kialakult: az egyik a német HOFMEISTER, a másik a norvég SELMER irányításával. A témakörben megjelent cikkek legfontosabb eredményeiről teljes áttekintést ad RAMÍREZ ALFONSÍN [23] 2000-ben Bonnban megjelent, illetve azóta jelentősen kibővített [24] összefoglaló munkája. E szakasz lezárásaként oldjuk meg az első feladatot, amely nehézségi fokával, a megoldási módszerekkel és harmonikus szerkezetével vélhetően sokat elárul a Frobenius-probléma szépségeiből.

Először azt látjuk be, hogy $T = 2abc - ab - bc - ca$ nem írható fel $xab + ybc + zca$ alakban, ahol x, y és z nemnegatív egész számok. Ha ui. felírható lenne;

$$xbc + yca + zab = 2abc - ab - bc - ca,$$

akkor

$$(x + 1)bc + (y + 1)ca + (z + 1)ab = 2abc$$

teljesülne. Mivel pl. bc és a relatív prímek, így az a osztója $x + 1$ -nek, ezért $a \leq x + 1$; hasonlóan $b \leq y + 1$ és $c \leq z + 1$, amiből

$$2abc = (x + 1)bc + (y + 1)ca + (z + 1)ab \geq 3abc$$

következne, ami nyilvánvalóan ellentmondás.

Megmutatjuk viszont, hogy tetszőleges t' pozitív egész esetén vannak olyan X, Y és Z pozitív egész számok, amelyekre

$$Xbc + Yca + Zab = 2abc + t'$$

fennáll, s ez a fentiek alapján elegendő az állítás igazolásához, illetve ez átfogalmazható úgy, hogy minden $t > 2abc$ egész felírható $Xbc + Yca + Zab = t$ alakban, ahol X, Y és Z pozitív egészek.

Induljunk ki abból, hogy a

$$bc, 2bc, 3bc, \dots, (a-1)bc, abc$$

számok a -val való osztási maradéka mind különböző, tehát teljes maradékrendszer alkotnak mod a , és így egyikük, pl. x_1bc ugyanabba a maradékosztályba tartozik mod a , mint t , tehát

$$x_1bc \equiv t \pmod{a}, \quad 1 \leq x_1 \leq a.$$

Hasonlóan kapjuk, hogy léteznek olyan y_1 és z_1 egészek, amelyekre

$$y_1ca \equiv t \pmod{b}, \quad 1 \leq y_1 \leq b,$$

$$z_1ab \equiv t \pmod{c}, \quad 1 \leq z_1 \leq c.$$

Ez azt eredményezi, hogy

$$(x_1bc - t) + y_1ca + z_1ab = x_1bc + y_1ca + z_1ab - t$$

osztható a -val, és hasonlóan b -vel és c -vel is, illetve mivel páronként relatív prímek, abc -vel is osztható, tehát

$$s = x_1bc + y_1ca + z_1ab \equiv t \pmod{abc}.$$

Ez azt is jelenti, hogy s -nek és t -nek, tehát $s-1$ -nek és $t-1$ -nek is ugyanaz az osztási maradéka mod abc , azaz

$$t-1 = q \cdot abc + r,$$

$$s-1 = q' \cdot abc + r \quad (0 \leq r < abc),$$

ahol $t > 2abc$ miatt $q \geq 2$ és az x_1, y_1, z_1 számokra tett nagyságrendi kikötések miatt $s \leq 3abc$, és ennek megfelelően $q' \leq 2$. A két előző egyenlet különbségéből adódik, hogy

$$t-s = (q-q')abc,$$

$$t = s + (q - q')abc = (x_1 + (q - q')a)bc + y_1ca + z_1ab,$$

ezzel az állítást igazoltuk, hiszen $X = x_1 + (q - q')a, Y = y_1, Z = z_1$ választással éppen három pozitív egészet kapunk. ■

Egy kis kitérővel maradjunk még ennél a feladatnál. Egy általánosabb eredmény lerövidítheti, megkönnyítheti munkánkat, ugyanakkor kevésbé láthatjuk, érzékelhetjük a valódi problémát.

JOHNSON [14] 1960-ban tette közzé a következő könnyen értelmezhető és belátható állítást:

7. FELADAT. *Legyenek az a_1, a_2, a_3 relatív prím pozitív egészek és $d = (a_1, a_2)$ az első két szám legnagyobb közös osztója. Ekkor*

$$G(a_1, a_2, a_3) = d \cdot G\left(\frac{a_1}{d}, \frac{a_2}{d}, a_3\right) + (d - 1)a_3.$$

Maga az állítás első közelítésben nem is tűnik érdekesnek, de egyrészt nagy mértékben általánosítható, másrészt alkalmazásával az 1. feladat gyors megoldásához jutunk. Felhasználjuk még itt azt is, hogy $ab > G(a, b) = ab - a - b$, s emiatt $G(b, a, ab) = G(a, b)$.

$$\begin{aligned} G(bc, ca, ab) &= c \cdot G(b, a, ab) + (c - 1)ab = \\ &= c(ab - a - b) + (c - 1)ab = 2abc - ab - bc - ca. \end{aligned}$$

2.2. A nem felírható számok számáról

SYLVESTER [30] 1884-ben megjelent problémái között szerepelt az előző fejezet 3. feladatához kapcsolódó kérdés felvetése és megoldása.

8. FELADAT. *Legyen két különböző címletű érménk és ezekből elegendően sok. Határozzuk meg azoknak a pozitív egészeknek a számát, amelyek nem „fizethetők ki” ezen kétféle érme segítségével maradék nélkül.*

A korábbi jelölésekkel $N(a_1, a_2)$ pontos értékét keressük. A megoldáshoz felhasználjuk, hogy

$$a_2, 2a_2, \dots, (a_1 - 1)a_2$$

minden nullától különböző maradékot tartalmazó maradékrendszert alkot mod a_1 . Az egyes maradékosztályokban ezek a felsorolt elemek lesznek a legkisebb felírhatók, továbbá tudjuk, hogy ezek a számok éppen az $1, 2, \dots, (a_1 - 1)$ egy permutációjának elemeivel lesznek rendre kongruensek mod a_1 . Legyen ez a permutáció $k_1, k_2, \dots, k_{a_1-1}$. Ekkor a $t \cdot a_2$ maradékosztályban a nem felírható elemek száma pontosan

$$\left\lfloor \frac{t \cdot a_2}{a_1} \right\rfloor = \frac{t \cdot a_2 - k_t}{a_1}.$$

Ezeket a számokat összegezve az összes nemnulla maradékosztályra megkapjuk a nem felírható elemeket:

$$\begin{aligned} & \frac{a_2 - t_1}{a_1} + \frac{2a_2 - t_2}{a_1} + \dots + \frac{(a_1 - 1)a_2 - t_{a_1-1}}{a_1} = \\ &= \frac{(1 + 2 + \dots + (a_1 - 1))a_2 - (t_1 + t_2 + \dots + t_{a_1-1})}{a_1} = \\ &= \frac{(1 + 2 + \dots + (a_1 - 1))(a_2 - 1)}{a_1} = \frac{(a_1 - 1)(a_2 - 1)}{2}. \blacksquare \end{aligned}$$

SELMER [28] az előbbi módszert általánosan alkalmazta. Legyen H egy teljes maradékrendszer mod a_1 . Minden $h \in H$ -hoz van olyan $r_h \equiv h \pmod{a_1}$, amely felírható $r_h = a_2y_2 + a_3y_3 + \dots + a_ny_n$ alakban és a legkisebb. Ezekkel a jelölésekkel

$$N(a_1, a_2, \dots, a_n) = \frac{1}{a_1} \sum_{h \in H} r_h - \frac{a_1 - 1}{2}.$$

Alkalmazzuk ezt az interpretációt további feladatokban is.

9. FELADAT. Alkossanak az a_i -k számtani sorozatot, azaz $a_1 = a$, $a_2 = a + d, \dots, a_n = a + (n-1)d$. Legyen továbbá $a - 1 = p(n-1) + s$, ahol $0 \leq s < n-1$. Ekkor

$$N(a_1, a_2, \dots, a_n) = \frac{1}{2}((a-1)(p+d) + s(p+1)).$$

Először az egyes osztályokba tartozó legkisebb r_h maradékokat kell megadnunk. $0, d, 2d, \dots, (a-1)d$ teljes maradékrendszert alkot mod a . A célunk az, hogy a legnagyobb maradékot is a legkevesebb a_i felhasználásával állítsuk elő. Ennek érdekében az a_n -et, amelynek maradéka $(n-1)d$, a lehetséges legnagyobb szorzóval vesszük:

$$p(n-1) \leq a-1 < (p+1)(n-1).$$

Ez alapján

$$(a-1) = p(n-1) + s; \quad 0 \leq s < n-1.$$

Ennek megfelelően $pa_n + a_{s+1}$ maradéka megegyezik $(a-1)d$ maradékával mod a . Az r_h rendszer táblázatba rendezhető:

a_2	a_3	\dots	a_{n-1}	a_n
$a_2 + a_n$	$a_3 + a_n$	\dots	$a_{n-1} + a_n$	$2a_n$
\dots	\dots	\dots	\dots	\dots
$a_2 + (p-1)a_n$	$a_3 + (p-1)a_n$	\dots	$a_{n-1} + (p-1)a_n$	pa_n
$a_2 + pa_n$	\dots	$a_{s+1} + pa_n$		

Az utolsó sor csak akkor szükséges, ha $s > 0$.

A táblázatban a d többszöröseinek összege az eredeti felírás alapján:

$$d + 2d + \dots + (a-1)d = d \frac{a(a-1)}{2}.$$

Az a többszöröseinek összegére:

$$(n-1)a + 2(n-1)a + \dots + p(n-1)a + (p+1)sa =$$

$$\begin{aligned}
&= a \left(\frac{(n-1)p(p+1)}{2} + (p+1)s \right). \\
N(a_1, a_2, \dots, a_n) &= \frac{1}{a} \sum_{h \in H} r_h - \frac{a-1}{2} = \\
&= \frac{(n-1)p(p+1)}{2} + (p+1)s + \frac{(a-1)}{2}(d-1) = \\
&= \frac{1}{2} ((p+1)(p(n-1) + 2s) + (d-1)(a-1)) = \\
&= \frac{1}{2} ((a-1)(p+d) + s(p+1)). \blacksquare
\end{aligned}$$

Ezzel az állítást igazoltuk, sőt a táblázatból kiolvasható, hogy a legnagyobb nem felírható szám $s > 0$ esetén

$$a_{s+1} + pa_n - a = a + sd + pa + p(n-1)d - a = pa + (a-1)d.$$

Amennyiben $s = 0$, a legnagyobb nem felírható számra azt kapjuk, hogy

$$pa_n - a = pa + p(n-1)d - a = (p-1)a + (a-1)d.$$

A két formula írható azonos alakban, mivel $s > 0$ -ra

$$\left\lfloor \frac{a-1}{n-1} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{a-2}{n-1} \right\rfloor = p, \text{ illetve } s = 0 \text{ esetén } \left\lfloor \frac{a-2}{n-1} \right\rfloor = p-1.$$

Ezzel a 6. feladat állítását is beláttuk. \blacksquare

Következő, kevésbé ismert eredményünk az 1. feladathoz kapcsolódik.

10. FELADAT. Legyenek a, b, c páronként relatív prím pozitív egész számok. Mutassuk meg, hogy azoknak a számoknak a száma, amelyek nem írhatók fel $xbc + yca + zab$ alakban, ahol x, y, z nemnegatív egész számok,

$$N(bc, ca, ab) = \frac{2abc - bc - ca - ab + 1}{2}.$$

Ebben az esetben is áttekinthetően megadhatjuk mod ab az egyes maradékosztályokban a bc és ca segítségével felírható legkisebb elemeket:

$$\begin{array}{cccccc} 0 & bc & 2bc & \dots & (a-1)bc & \\ ca & bc + ca & 2bc + ca & \dots & (a-1)bc + ca & \\ \vdots & & & & & \vdots \\ (b-1)ca & bc + (b-1)ca & 2bc + (b-1)ca & \dots & (a-1)bc + (b-1)ca & \end{array}$$

A táblázatban pontosan ab darab szám szerepel. Elegendő tehát belátnunk, hogy páronként inkongruensek mod ab . Ellenkező esetben

$$x_1bc + y_1ca \equiv x_2bc + y_2ca \pmod{ab}.$$

Ez pontosan azt jelenti, hogy

$$x_1bc + y_1ca - x_2bc + y_2ca = (x_1 - x_2)bc + (y_1 - y_2)ca$$

osztható ab -vel.

Azonnal látható, hogy az oszthatósági tulajdonságok miatt $x_1 - x_2$ osztható lesz a -val, $y_1 - y_2$ pedig b -vel. Mivel $0 \leq x_1, x_2 \leq a - 1$ és $0 \leq y_1, y_2 \leq b - 1$, az oszthatóság csak $x_1 = x_2$, valamint $y_1 = y_2$ esetében lehet igaz.

Adjuk most össze a reprezentánsokat:

$$\sum_{i=0}^{a-1} \sum_{j=0}^{b-1} (ibc + jca) = \frac{a(a-1)b^2c}{2} + \frac{b(b-1)a^2c}{2} =$$

$$= \frac{abc}{2} [b(a-1) + a(b-1)].$$

Alkalmazzuk a Selmer-féle formulát:

$$\begin{aligned} N(ab, bc, ca) &= \frac{1}{ab} \cdot \frac{abc}{2} [a(b-1) + b(a-1)] - \frac{ab-1}{2} = \\ &= \frac{2abc - ab - bc - ca + 1}{2}. \blacksquare \end{aligned}$$

A nem felírható számok meghatározása során tulajdonképpen egy harmadik megoldást nyertünk az 1. feladatra, mivel láthatóan a legnagyobb $r_h \pmod{ab}$ pontosan $(a-1)bc + (b-1)ca$ lesz. Innen rögtön felírhatjuk, hogy

$$G(ab, bc, ca) = (a-1)bc + (b-1)ca - ab = 2abc - ab - bc - ca.$$

Az $N(a_1, a_2, \dots, a_n)$ -et a $G(a_1, a_2, \dots, a_n)$ -hez viszonyítva érdekes megfigyelést tehetünk. Összehasonlítva az 1. és 10. feladat, továbbá a 3. és 8. feladat formuláit, azt látjuk, hogy

$$N(a_1, a_2, \dots, a_n) = \frac{G(a_1, a_2, \dots, a_n) + 1}{2}.$$

Fontos határeseteit kaptuk NIJENHUIS és WILF [22] tételének, akik annak az egyszerű ténynek a felismerése alapján, hogy tetszőleges olyan x és y pozitív egészek közül, amelyek összege $G(a_1, a_2, \dots, a_n)$, legfeljebb az egyik lehet felírható az a_1, a_2, \dots, a_n segítségével, kapták, hogy

$$N(a_1, a_2, \dots, a_n) \geq \frac{G(a_1, a_2, \dots, a_n) + 1}{2}.$$

Felső becslésként azonnal adódik, hogy

$$N(a_1, a_2, \dots, a_n) \leq G(a_1, a_2, \dots, a_n).$$

Ez a becslés nem is javítható, hiszen

$$a_1 = k, a_2 = k+1, a_3 = k+2, \dots, a_k = 2k-1$$

választással pontosan $N(a_1, a_2, \dots, a_n) = G(a_1, a_2, \dots, a_n) = k-1$.

2.3. Ízelítő az extrémális Frobenius-problémából

Az előzőekben láttuk, hogy $G(a_1, a_2, \dots, a_n)$ meghatározása sok esetben szinte megoldhatatlan feladatnak mutatkozik. Talán éppen ez az oka, hogy számos, elsősorban felső becslés ismert, amelyek a legkülönbözőbb specializáló feltételek mellett adnak korlátot a legnagyobb nem felírható számra. Az egyik első ilyen becslést ERDŐS és GRAHAM [6] adták 1972-ben a Kneser-tételt felhasználva:

$$G(a_1, a_2, \dots, a_n) \leq 2a_{n-1} \left\lfloor \frac{a_n}{n} \right\rfloor - a_n.$$

Valószínűleg a becslések adták az ötletet annak a vizsgálatához, hogy adott korlátig választva rögzített darabszámú a_i -t, mely esetben lesz maximális a nem felírható legnagyobb szám. Erre vonatkozik a $g(n, t)$ jelölés:

$$g(n, t) = \max G(a_1, a_2, \dots, a_n),$$

ahol mindegyik a_i legfeljebb t és legnagyobb közös osztójuk 1. Az egyszerűbb kezelhetőség miatt az $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ halmazt a továbbiakban sokszor A -val, az A elemeivel felírható természetes számok halmazát $S(A)$ -val jelöljük.

Ezt követően a sok további értékes becslés közül DIXMIER [4, Thm.3] tételét szeretném kiemelni, amely ugyancsak felhasználja a Kneser-tételt.

$$g(n, t) \leq (v-1)(t-r-1)-1, \text{ ahol } t-1 = v(n-1)-r \text{ és } 0 \leq r < n-1. \quad (2.3.1)$$

Most néhány speciális esetben határozzuk meg $g(n, t)$ -t. Az alábbi feladat megoldása azonnal adódik a 3. feladatból.

11. FELADAT. *Legyen $t > 2$ pozitív egész szám. Ekkor*

$$g(2, t) = (t-1)(t-2) - 1.$$

DIXMIER előbbi tételének alkalmazásával megoldhatók az $n = 3$ és $n = 4$ esetek is. A $g(3, t)$ értékét LEWIN [20] már 20 évvel korábban kiszámította:

$$g(3, t) = \left\lfloor \frac{1}{2}(t-2)^2 \right\rfloor - 1.$$

A „túl sok” érme irányából sűrűségi megfontolásokkal közelítette meg a problémát NAGATA és MATSUMURA [21]. Tételük a k -ra vonatkozó teljes indukcióval is bizonyítható.

12. FELADAT. *Legyenek n és k pozitív egészek, $k \leq n - 1$. Ekkor*

$$g(n, n+k) = 2k - 1.$$

Ezt az eredményt fejlesztette tovább ERDŐS [5] egy kitűzött feladatában:

13. FELADAT. *Ha $n > 2$, akkor*

$$g(n, 2n) = 2n + 1, \quad g(n, 2n + 1) = \begin{cases} 2n + 5, & \text{ha } n \not\equiv 2 \pmod{3}; \\ 2n + 3, & \text{ha } n \equiv 2 \pmod{3}. \end{cases}$$

Az első, kevésbé összetett állítás igazolása a nehezebb tételek bizonyítási módszereibe is betekintést enged. Először azt látjuk be, hogy minden lehetséges A halmazra

$$G(A) \leq 2n + 1.$$

Legyen $a_n = 2n$, hiszen ellenkező esetben a 12. feladat alapján

$$G(A) \leq 2(n-1) - 1 = 2n - 3.$$

Ha a $2n + 1$ két A -beli összege, akkor hozzávehetjük az A -hoz.

$$G(A') = G(A \cup \{2n + 1\}) \leq 2(n+1) - 3 = 2n - 1.$$

A továbbiakban feltehetjük, hogy $2n + 1 \neq a_i + a_j$.

Eszerint L és $2n + 1 - L$ közül legfeljebb az egyik van A -ban, de az elemek száma éppen n , így pontosan az egyik van A -ban.

Tegyük fel először, hogy $a_{n-1} = 2n - 1$. Ekkor az előbbiek miatt $2 \notin A$. Legyen $r > 2$ a legkisebb A -beli elem. Így

$$2n, 2n - 1, \dots, 2n + 1 - (r - 1) = 2n - r + 2 \in A.$$

Ezekhez az r -et hozzáadva,

$$2n - r + 2 + r = 2n + 2 \in S(A) \text{ és } 2n + 1 - (r - 2) + r = 2n + 3 \in S(A).$$

Hozzávéve ezt a két számot A -hoz kapunk egy $n + 2$ elemű A' halmazt, amelyre

$$G(A') \leq g(n + 2, n + 2 + n + 1) = 2(n + 1) - 1 = 2n + 1.$$

Feltehetjük tehát ezután, hogy $a_{n-1} < 2n - 1$, azaz $2 \in A$ és így minden páros szám $S(A)$ -ban van. A legkisebb páratlan A -beli számhoz (ilyen biztosan van, hiszen az elemek relatív prímekek) hozzáadva a 2-t minden ennél az elemnél nagyobb páratlan számhoz is eljuthatunk. Ezzel igazoltuk, hogy minden lehetséges A halmazra

$$G(A) \leq 2n + 1, \text{ azaz } g(n, 2n) \leq 2n + 1.$$

Meg kell még mutatni, hogy van olyan A , amelyre az egyenlőség teljesül. Legyen $A = \{n + 1, n + 2, \dots, 2n\}$. Látható, hogy $2(n + 1)$ és minden ennél nagyobb szám $S(A)$ -ban van, így

$$G(A) = 2n + 1. \blacksquare$$

A fenti gondolatmenet jelentős kiterjesztésével ERDŐS és GRAHAM [6] igazolták, hogy rögzített k -ra, ha az n elegendően nagy ($n \geq 9k^2 + 15k + 2$), akkor

$$g(n, 2n + k) = \begin{cases} 2n + 4k + 1, & \text{ha } n - k \not\equiv 1 \pmod{3}; \\ 2n + 4k - 1, & \text{ha } n - k \equiv 1 \pmod{3}. \end{cases} \quad (2.3.2)$$

Bizonyításuk összetett, de az egyszerűbb rész egy-egy olyan A konstrukciója, amellyel az egyenlőség teljesül.

14. FELADAT. Legyenek n és k pozitív egészek ($n \geq 9k^2 + 15k + 2$). Adjunk meg olyan n elemű A halmazt, amelyre teljesül, hogy elemei legnagyobb közös osztója 1, mindannyian kisebbek, mint $2n + k + 1$ és

$$G(A) = \begin{cases} 2n + 4k + 1, & \text{ha } n - k \not\equiv 1 \pmod{3}; \\ 2n + 4k - 1, & \text{ha } n - k \equiv 1 \pmod{3}. \end{cases}$$

Legyen elsőként $n - k \equiv 1 \pmod{3}$. Írjuk az n -et $n = 3m + k + 1$ alakban és legyen A a következő:

$$A = \bigcup_{i=1}^{2m+k} \{3i\} \cup \bigcup_{j=1}^{m+1} \{6m + 3k + 5 - 3j\}.$$

$S(A)$ legkisebb eleme, amely 1-gyel kongruens modulo 3:

$$2(3m + 3k + 2) = 6m + 6k + 4.$$

Ennek megfelelően

$$6m + 6k + 1 = 2n + 4k - 1 \notin S(A).$$

Legyen most $n - k \equiv 2 \pmod{3}$. Írjuk az n -et $n = 3m + k + 2$ alakban és legyen az A halmaz:

$$A = \bigcup_{i=1}^{2m+k+1} \{3i\} \cup \bigcup_{j=1}^{m+1} \{6m + 3k + 7 - 3j\}.$$

Az $S(A)$ legkisebb eleme, amely 2-vel kongruens modulo 3 a

$$2(3m + 3k + 4) = 6m + 6k + 8 = 2n + 4k + 4.$$

A harmadik esetben ugyanilyen elven tudunk megadni megfelelő halmazt. ■

$g(n, t)$ meghatározása szintén igen sok esetben megoldatlan probléma. LEV [19] megmutatta, hogy ERDŐS és GRAHAM (2.3.2) eredménye kiterjeszhető $t \leq 3n - 2$ -ig. E dolgozat szerzője [17]-ben igazolta, hogy a (2.3.1)-ben megadott becslés a DIXMIER által nem említett további esetekben is pontos. Nevezetesen, ha $2 \leq d < n$, $0 \leq k \leq n - d$, akkor $n - k \equiv 0$ vagy $-1 \pmod{d + 1}$ esetén

$$g(n, dn + k) = d(d - 1)n + 2dk + d^2 - d - 1. \quad (2.3.3)$$

A legnagyobb nem felírható számot adó konstrukciók itt is „két elem által” generáltak.

Az extrémális Frobenius-probléma egy másik kérdése: hogyan kell választanunk n darab különböző címletet t -ig, hogy a nem felírható számok száma maximális legyen. ERDŐS és GRAHAM azt sejtette, hogy akkor lesz a legtöbb a nem felírható szám, amikor az elemeket szomszédosaknak választjuk [7, 86. oldal]. A sejtés DIXMIER egyik tételének [4, Thm.2] felhasználásával igazolható. További kisebb számolással az is kideríthető, hogy a (2.3.3) bizonyításához megadott halmazok esetében, bár a legnagyobb nem felírható szám jóval nagyobb, a nem felírható számok száma a 15. feladatban szereplő szomszédosakkal mégis megegyező [17]. Számoljuk ki, hogy mennyi ebben az esetben ez a szám! (Ez tulajdonképpen a 9. feladat speciális esete, az alábbi képlet az ottaniból is levezethető, de itt egyszerűbben is eljárhatunk, és ezt mutatjuk be most.)

15. FELADAT. Legyenek n és t egészek, $1 < n \leq t$, továbbá $t = q(n - 1) + r$, ahol $1 \leq r \leq n - 1$. Ekkor

$$N(t - n + 1, t - n + 2, \dots, t) = \frac{(t - n + r - 1)q}{2}.$$

Mivel $a_i = t - n + i$ szomszédos egész számok, ezért a

$$J_m = [m(t - n + 1), mt]$$

intervallumban található egészek mind előállíthatók, ha $m = 1, 2, \dots$. A nem felírható számok a J_1 intervallum előtt, a J_1 és J_2 között, \dots , J_{m-1} és J_m között helyezkednek el, amíg ezek az intervallumok diszjunktak, azaz $(m-1)t < m(t-n+1)$, vagy, ami ezzel ekvivalens $m(n-1) < t$. Az utolsó ilyen érték az $m = q$. Így azoknak a számoknak a száma, amelyek nem írhatóak fel:

$$\begin{aligned} & \sum_{m=1}^q [m(t-n+1) - (m-1)t - 1] = \sum_{m=1}^q (t - mn + m - 1) = \\ & = qt - \frac{q(q+1)}{2}(n-1) - q = \frac{q}{2}[2t - (q+1)(n-1) - 2] = \\ & = \frac{q}{2}[t + q(n-1) + r - (q+1)(n-1) - 2] = \frac{(t-n+r-1)q}{2}. \blacksquare \end{aligned}$$

A fenti összeállításban szereplő feladatok mindegyike megfelelő előkészítés után a középiskolai tanítás során is tárgyalható.

SYLVESTER 1884-ben megjelent, kiindulásnak tekinthető első közlésétől [30], ahol egyszerű eszközökkel tárgyalja a kétismeretlenes esetet, egy teljes évszázadnak kellett eltelnie ahhoz, hogy a probléma kör előforduljon a versenyeken (1. és 2. feladat), majd hamarosan egy iskolai feladatgyűjteményben (Bergengóc példatár: 152. és 158. feladat)[8], és így reményeink szerint a későbbiekben rendszeresen a matematika iránt érdeklődő tanulóknál a különféle foglalkozásokon is.

3. Az extrémális Frobenius-probléma

Ebben a fejezetben egy rövid történeti áttekintést adunk az extrémális Frobenius-probléma eddigi eredményeiről. Ismereteink szerint az extrémális $g(n, t)$ függvényre vonatkozó összes eddig meghatározott pontos értéket felsoroljuk. Ezt követően a 3.3. szakaszban bemutatjuk az ehhez kapcsolódó [16] önálló eredményünket. Ez a tétel egyrészt jelentősen javítja ERDŐS PÁL és RONALD L. GRAHAM 1972-es klaszikus [6] eredményének érvényességi körét, másrészt néhány további esetben kiszámíthatjuk segítségével a $g(n, t)$ pontos értékét. Tételünk következményei közül néhány nagyon jellegzetes speciális esetet a 3.4. szakaszban külön is bemutatunk.

3.1. Néhány becslés $G(A)$ -ra

Az előző fejezetben vázlatosan megismertük az eredeti Frobenius-problémát. Eszerint, ha $0 < a_1 < \dots < a_n$ és $(a_1, a_2, \dots, a_n) = 1$, akkor a $K = \sum_{i=1}^n x_i a_i$ diofantoszi egyenlet megoldható elég nagy K -ra, ahol az x_i -k nemnegatív egészek. Nevezzük a következőkben is $G(a_1, a_2, \dots, a_n)$ -nek a legnagyobb olyan K -t, amelyre az egyenlet nem oldható meg. Az eddig ismertett eredmények is mutatják a nehézségeket. A legnagyobb nem felírható szám erősen függ az együtthatók, a „címletek” egymás közötti nagyságrendi és oszthatósági viszonyaitól. Talán éppen a probléma általános megoldhatóságának reménytelensége miatt az 1970-es évek elejétől egyre több felső becslés jelent meg a szakirodalomban. A teljesség igénye nélkül felsorolunk néhány ilyen felső becslést. Ezek közül többet azóta is rendszeresen idéznek, illetve ezek mentén alakult ki az azóta extrémális Frobenius-problémának nevezett általánosítás. A becslések között szerepel olyan is, amely a további vizsgálatainknak az alapját képezi.

SELMER függetlennek tekintette az a_i -ket, ha egyik sem volt kifejezhető a többi lineáris kombinációjaként. Az ilyen független halmazok

vizsgálatánál nyerte a következő becslést [28]:

3.1.1. TÉTEL.

$$G(a_1, a_2, \dots, a_n) \leq 2a_n \left\lfloor \frac{a_1}{n} \right\rfloor - a_1.$$

ERDŐS és GRAHAM 1972-ben adott a Kneser-tétel segítségével felső becslést a legnagyobb nem felírható számra [6]:

3.1.2. TÉTEL.

$$G(a_1, a_2, \dots, a_n) \leq 2a_{n-1} \left\lfloor \frac{a_n}{n} \right\rfloor - a_n.$$

Az extrémális problémára jellemző $g(n, t)$ jelölés ERDŐS 1971-es kitűzött feladatában szerepel először [5]. Legyen ennek megfelelően a továbbiakban

$$g(n, t) = \max G(a_1, a_2, \dots, a_n),$$

ahol a maximumot az összes olyan a_i -kre képezzük, amelyekre teljesül, hogy $1 < a_1 < a_2 < \dots < a_n \leq t$ és $(a_1, a_2, \dots, a_n) = 1$.

DIXMIER 1990-ben tette közzé becslését, amelyben az alsó becsléshez a $t, t-1, t-2, \dots, t-n+1$ szomszédos elemek alapján jutott el [4].

3.1.3. TÉTEL.

$$\left\lfloor \frac{t-2}{n-1} \right\rfloor (t-n+1) - 1 \leq g(n, t) \leq \left(\left\lfloor \frac{t-1}{n-1} \right\rfloor - 1 \right) t - 1.$$

Egészen új M. BECK, R. DIAZ és S. ROBINS becslése [1]:

3.1.4. TÉTEL.

$$G(a_1, a_2, \dots, a_n) \leq \frac{1}{2} \left(\sqrt{a_1 a_2 a_3 (a_1 + a_2 + a_3)} - a_1 - a_2 - a_3 \right).$$

Jelenlegi tárgyalásunkkal nem mutatnak kapcsolatot, de mindenképpen meg kell említeni, hogy a $G(a_1, a_2, \dots, a_n)$ -re alsó becslések is ismertek. Ezek általában aszimptotikus jellegűek és gráfelméleti, algoritmuselméleti valamint vektoros interpretációk eredményeként adódtak. J. L. DAVISON-tól származik egy az előbbi felső becsléshez hasonló szerkezetű becslés $n = 3$ -ra [3]:

3.1.5. TÉTEL.

$$G(a_1, a_2, a_3) \geq \sqrt{3}\sqrt{a_1 a_2 a_3} - a_1 - a_2 - a_3.$$

HUJTER MIHÁLYTÓL, 1982-ből származik a következő általános eredmény [11]:

3.1.6. TÉTEL.

$$G(a_1, a_2, \dots, a_n) \geq \left(\frac{n-1}{n}\right) ((n-1)! a_1 a_2 \dots a_n)^{\frac{1}{n-1}} - \sum_{i=1}^n a_i.$$

KILLINGBERGTRO ezt, az egynél kisebb szorzó egyre növelésével 2000-ben továbbjavította [15]:

3.1.7. TÉTEL.

$$G(a_1, a_2, \dots, a_n) \geq ((n-1)! a_1 a_2 \dots a_n)^{\frac{1}{n-1}} - \sum_{i=1}^n a_i.$$

Végezetül JANZ [13] egy különleges megfogalmazású becslését említjük meg. Az $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ pozitív egészekből álló véges halmazt telítettnek nevezi, ha bármely két elemének összege vagy szintén az A -hoz tartozik, vagy már nagyobb az A maximális eleménél. Ezután veszi az összes olyan telített halmazokat, amelyek két azonos differenciájú számtani sorozat uniójaként állíthatók elő. Ha a $g(n, t)$ függvényt csak ilyen halmazokra vizsgálja, továbbá a t elegendően nagy az n -hez képest ($t \geq (9n^3 - 30n^2 + 4n - 22)/4$), és azt is felteszi, hogy a t nem kongruens 0 vagy 1 modulo $(n-1)$, akkor

3.1.8. TÉTEL.

$$g(n, t) = G(t - n + 1, t - n + 2, \dots, t - 1, t).$$

Ez a korlátozások ellenére egy igen éles eredmény, amely később az általános megoldás(ok)nak is része lehet.

3.2. Az extrémális problémára vonatkozó eredmények összefoglalása

A becslések után ismerkedjünk meg az extrémális Frobenius problémakör eddigi eredményeivel. Ezeket részben az előző fejezetben is ismertettük. Ott az oktatási vonatkozások hangsúlyozása, itt az eddigi eredmények teljesebb megismertetése a célunk. A $g(n, t)$ -vel kapcsolatban több fontos részeredmény is ismert.

Első lépésnek tekinthetjük két japán szerző, NAGATA és MATSUMURA [21] 1961-ben megfogalmazott tételét:

3.2.1. TÉTEL. *Legyenek n és k pozitív egészek, $k \leq n - 1$. Ekkor*

$$g(n, n + k) = 2k - 1.$$

Erre az összefüggésre több eltérő bizonyítás is adható, amelyek közül egyre utaltunk a 2. fejezetben. Ezt az eredményt felhasználva ERDŐS 1971-ben folyóiratban kitűzött problémaként jelentette meg a $g(n, 2n)$ -re és a $g(n, 2n + 1)$ -re vonatkozó tételt [5]. A kitűzött feladatra később az általa adott megoldást ismertették.

3.2.2. TÉTEL. *Ha $n > 1$ pozitív egész, akkor*

$$g(n, 2n) = 2n + 1, \quad g(n, 2n + 1) = \begin{cases} 2n + 5, & \text{ha } n \not\equiv 2 \pmod{3}; \\ 2n + 3, & \text{ha } n \equiv 2 \pmod{3}. \end{cases}$$

Az ötletes kombinatorikus bizonyítást GRAHAMmal közösen kiterjesztették és 1972-ben megszületett az az általánosabb tétel, amelyet közel húsz évig nem sikerült egyetlen matematikusnak sem tovább javítania [6].

3.2.3. TÉTEL. *Ha n és k pozitív egészek, $n \geq 9k^2 + 15k + 2$, akkor*

$$g(n, 2n + k) = \begin{cases} 2n + 4k + 1, & \text{ha } n - k \not\equiv 1 \pmod{3}; \\ 2n + 4k - 1, & \text{ha } n - k \equiv 1 \pmod{3}. \end{cases}$$

Lényegében ezzel párhuzamosan kis n -ekre is többen vizsgálták nemcsak $G(A)$ -t, hanem a minél pontosabb felső becslések keresésével közvetve $g(n, t)$ -t is. A $G(a, b)$ kiszámítása alapján szinte nyilvánvaló, hogy

$$g(2, t) = \max[(a - 1)(b - 1) - 1] = (t - 2)(t - 1) - 1 = t^2 - 3t + 1.$$

Az $n = 3$ esetet LEWIN [20] tisztázta szintén az 1970-es évek elején:

3.2.4. TÉTEL.

$$g(3, t) = \left\lfloor \frac{(t - 2)^2}{2} \right\rfloor - 1.$$

Mind LEWIN, mind ERDŐS és GRAHAM bizonyításaiban azzal válik teljessé a $g(n, t)$ meghatározása, hogy megadnak olyan konkrét a_i -ket, amelyekre

$$g(n, t) = G(a_1, a_2, \dots, a_n).$$

Ezek a konstrukciók mindegyik esetben vagy szomszédos számokból, vagy két azonos differenciájú számtani sorozat egyesítéséből épülnek fel.

Ezután több mint másfél évtizedig, a menet közben egyre jobban kiterjedő Frobenius problémakörnek ebben a szegmensében nem történt semmiféle előrelépés. A következő áttörés DIXMIER 1990-ben

megjelent [4] cikke nyomán indult el és napjainkig is tart. DIXMIER francia matematikus csoportelméleti interpretációval és a Kneser-tételt is felhasználva, a fentebb említett 3.1.3. Tétel becslését élesítve nagyon pontos felső becslést adott $g(n, t)$ -re.

3.2.5. TÉTEL.

$$g(n, t) \leq (v-1)(t-r-1)-1, \text{ ahol } t-1 = v(n-1)-r \text{ és } 0 \leq r < n-1. \quad (3.2.1)$$

DIXMIER ezzel bizonyította ERDŐS és GRAHAM [7] egy 1980-ban publikált sejtését, mely szerint

3.2.6. TÉTEL.

$$g(n, t) \sim \frac{t^2}{n-1}.$$

A 3.2.5. Tétel becslése több fontos esetben a lehető legjobbnak bizonyult, azaz megadható olyan $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ halmaz, amelyre $G(A)$ megegyezik (3.2.1) jobb oldalával. Ezeket az eseteket DIXMIER két tételben rögzítette.

3.2.7. TÉTEL. *Ha $n-1 \mid t$ vagy $n-1 \mid t-2$, akkor*

$$g(n, t) = \frac{t(t-2)}{n-1} - t + 1.$$

3.2.8. TÉTEL. *Amennyiben $n-1 \mid t-1$, úgy*

$$g(n, t) = \frac{(t-1)^2}{n-1} - t.$$

Amikor az $n-1$ a $t-2$ -nek osztója, a maximális értéket a legnagyobb szomszédos címletek választásával érhetjük el. A másik két esetben $\lfloor t/(n-1) \rfloor$ differenciájú számtani sorozat lesz a konstrukció

alapja. Ezek a tételek azonnal adják az $n = 3$ -ra és az $n = 4$ -re vonatkozó explicit formulákat. Ezekre DIXMIER csak utal publikációjában [4].

Legyen először $n = 3$. Ekkor két esetet vizsgálunk aszerint, hogy a t páros vagy páratlan. A páros esetben a 3.2.7. Tétel alapján

$$g(3, t) = \frac{t(t-2)}{2} - t + 1 = \frac{t(t-2)}{2} - (t-2) - 1 = \frac{(t-2)^2}{2} - 1.$$

Amennyiben a t páratlan, tekintsük a 3.2.8. Tételt. Itt $t-1$ páros, így

$$g(3, t) = \frac{(t-1)^2}{2} - t = \frac{(t-1)(t-3)}{2} - 1 = \left\lfloor \frac{(t-2)^2}{2} \right\rfloor - 1.$$

Ez pontosan megegyezik a LEWIN-féle 3.2.4. Tétellel.

Hasonlóan kaphatjuk meg a pontos formulát az $n = 4$ esetben is. Legyen először $t = 3k$, vagy $t = 3k+2$. Alkalmazhatjuk a 3.2.7. Tételt, és kapjuk, hogy

$$g(4, t) = \frac{t(t-2)}{3} - t + 1 = \frac{t^2 - 2t + 3}{3} - t = \frac{(t-1)^2 + 2}{3} - t.$$

Legyen most $t = 3k + 1$, ekkor

$$g(4, t) = \frac{(t-1)^2}{3} - t.$$

A két képlet az oszthatósági viszonyok ismeretében egységes alakban is felírható:

3.2.9. TÉTEL.

$$g(4, t) = \left\lfloor \frac{(t-1)^2 + 2}{3} \right\rfloor - t.$$

Az $n = 5$ esetben a $t = 4k + 3$ -ra már nem kapunk pontos értéket a két DIXMIER-tétel alapján. Az n további növelésével egyre ritkábban fordul elő, hogy a két tétel oszthatósági feltételei teljesülnek, így ezen az úton további általánosabb eredmények nem nyerhetők. Azt, hogy mégsem érdektelen a két tétel későbbi használata, például a $t = 3n - 1$ eset pontos számolásával is indokolhatjuk.

Más úton V. LEVnek [19] sikerült kiterjesztenie az ERDŐS–GRAHAM-tétel érvényességi körét. Belátta, hogy a $g(n, 2n+k)$ -ra vonatkozó formula egészen $k = n - 2$ -ig teljesül az eredetileg megfogalmazott formában. Bizonyításában FREIMAN két erős tételére támaszkodik. Itt lényeges, hogy „majdnem sűrű” halmazok szerepeljenek, tehát ezen az úton sem nyerhetünk új formulákat. Az előbb említett 3.2.7. DIXMIER-tétellel azonban pontosan meghatározzuk $g(n, 3n - 1)$ -et:

$$g(n, 3n - 1) = \frac{t(t - 2)}{n - 1} - t + 1 = \frac{(3n - 1)(3n - 3)}{n - 1} - 3n + 2 = 6n - 1.$$

Itt elfogynak a szakirodalomban az általánosan igaz formulák. Ez természetesen nem jelenti azt, hogy nem tudunk meghatározni bizonyos feltételek teljesülése esetén további $g(n, t)$ -ket, pl. $g(5, t)$, ha $t \neq 4k + 3$, illetve $g(n, 4n - 4)$; $g(n, 4n - 3)$; $g(n, 4n - 2)$ is azonnal adódik a DIXMIER-tételekből.

3.3. A $g(n, dn + k)$ meghatározása

Az előbbiekhöz hasonló, azonnal látható esetek kivételével vajon bővíthető-e a felső becslések alapján a pontos $g(n, t)$ -k köre? Vannak-e olyan további esetek, amikor a DIXMIER-féle, eddig is nagyon precíznek mutató felső becslés teljesen pontos eredményt ad? Néhány speciális esetet részletesen kiszámolva, fokozatosan derült ki, hogy kisebb korlátozások mellett két maradékosztályra is pontos a becslés [16].

3.3.1. TÉTEL. *Legyenek a d, n, k olyan természetes számok, hogy $2 \leq d < n$, $0 \leq k \leq n - d$. Ha $n - k \equiv 0 \pmod{d + 1}$ vagy $n - k \equiv -1 \pmod{d + 1}$, akkor*

$$g(n, dn + k) = d(d - 1)n + 2dk + d^2 - d - 1.$$

BIZONYÍTÁS: A 3.2.5.Tétel jelölései szerint

$$dn + k - 1 = (d + 1)(n - 1) - n + k + d = (d + 1)(n - 1) - (n - k - d),$$

hiszen $k \leq n - d$. Most látjuk, hogy $v = d + 1$ és $r = n - k - d$. Alkalmazzuk a 3.2.5.Tétel szerinti becslést erre az esetre:

$$\begin{aligned} g(n, t) &\leq (v - 1)(t - r - 1) - 1 = d[dn + k - (n - k - d) - 1] - 1 = \\ &= d(dn + k - n + k + d - 1) - 1 = d[(d - 1)n + 2k + d - 1] - 1 = \\ &= d(d - 1)n + 2dk + d^2 - d - 1. \end{aligned}$$

A bizonyítás befejezéséhez mutatnunk kell olyan konkrét $0 < a_1 < a_2 < \dots < a_n \leq t$ egész számokat, amelyekkel

$$G(a_1, a_2, \dots, a_n) = d(d - 1)n + 2dk + d^2 - d - 1.$$

Vegyük külön az $n - k \equiv 0$ és $-1 \pmod{d + 1}$ eseteket.

I. eset. Legyen először $n - k \equiv 0 \pmod{d + 1}$. Ekkor az n -et felírhatjuk $n = l(d + 1) + k$ alakban, tehát az is teljesül, hogy

$$dn + k = ld(d + 1) + dk + k = (d + 1)(ld + k).$$

Álljon az $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ halmaz a $(d + 1)$ többszöröseiből és a t -től lefelé haladva abból az l darab legnagyobb számból, amelyek mind (-1) -gyel kongruensek modulo $(d + 1)$:

$$A = \{d + 1, 2(d + 1), 3(d + 1), \dots, (ld + k - 1)(d + 1), (ld + k)(d + 1),$$

$$dn + k - 1, dn + k - 1 - (d + 1), dn + k - 1 - 2(d + 1), \dots \\ \dots, dn + k - 1 - (l - 1)(d + 1)\}.$$

Látható, hogy $|A| = (ld + k) + l = l(d + 1) + k = n$. Jelöljük z -vel az A halmaz legkisebb olyan elemét, amely nem többszöröse a $(d + 1)$ -nek, azaz

$$z = dn + k - 1 - (l - 1)(d + 1) = (ld + k)(d + 1) - 1 - (l - 1)(d + 1) = \\ = (d + 1)(ld + k - l + 1) - 1.$$

Az előző fejezetben bemutatott módszer alapján tudjuk, hogy $0, z, 2z, \dots, (d - 1)z, dz$ egy teljes maradékrendszer alkot mod $(d + 1)$. Így a legnagyobb szám, amely nem írható fel az A halmaz elemeinek lineáris kombinációjaként:

$$G(A) = dz - (d + 1) = d(d + 1)(ld + k - l + 1) - d - d - 1 = \\ = d(d + 1)[(d - 1)l + k + 1] - 2d - 1 = \\ = d(d + 1)(d - 1)l + d(d + 1)k + d^2 + d - 2d - 1.$$

Most felhasználjuk, hogy $n - k = l(d + 1)$, így

$$G(A) = d(d + 1)(d - 1)l + d(d + 1)k + d^2 - 2d - 1 = \\ = d(d - 1)(n - k) + d(d - 1)k + 2dk + d^2 - d - 1 = \\ = d(d - 1)n + 2dk + d^2 - d - 1.$$

II. eset. Legyen most $n - k \equiv -1 \pmod{d + 1}$. Ekkor $n - k = l(d + 1) - 1$, illetve $n = l(d + 1) + k - 1$. Ezt behelyettesítve látjuk, hogy $dn + k = ld(d + 1) + dk - d + k = (d + 1)(ld + k) - d$. Így azt is könnyen láthatjuk, hogy a $dn + k - 1$ többszöröse a $(d + 1)$ -nek:

$$dn + k - 1 = (d + 1)(dl + k) - d - 1 = (d + 1)(ld + k - 1).$$

Álljon most az $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ halmaz ismét a $(d+1)$ többszöröseiből és a t -től lefelé haladva abból az l darab legnagyobb számból, amelyek mind 1-gyel kongruensek modulo $(d+1)$:

$$A = \{d+1, 2(d+1), 3(d+1), \dots, (ld+k-1)(d+1),$$

$$dn+k, dn+k-(d+1), dn+k-2(d+1), \dots, dn+k-(l-1)(d+1)\}.$$

Látható, hogy $|A| = (ld+k-1) + l = l(d+1) + k - 1 = n$. Jelöljük x -szel az A halmaz legkisebb olyan elemét, amely nem többszöröse a $(d+1)$ -nek, azaz

$$\begin{aligned} x &= dn+k-(l-1)(d+1) = (ld+k-1)(d+1) + 1 - (l-1)(d+1) = \\ &= (d+1)(ld+k-1-l+1) + 1 = (d+1)[d-1]l+k + 1. \end{aligned}$$

A bizonyítást ugyanúgy folytathatjuk, mint az I. esetben.

$0, x, 2x, \dots, (d-1)x, dx$ egy teljes maradékrendszert alkot mod $(d+1)$. Így a legnagyobb szám, amely nem írható fel az A halmaz elemeinek lineáris kombinációjaként:

$$\begin{aligned} G(A) &= dx - (d+1) = d[(d+1)(ld+k-l) + 1] - d - 1 = \\ &= d(d+1)(d-1)l + d(d+1)k + d - d - 1. \end{aligned}$$

Felhasználjuk, hogy $n - k + 1 = l(d+1)$, így

$$\begin{aligned} G(A) &= d(d+1)(d-1)l + d(d+1)k - 1 = \\ &= d(d-1)(n-k+1) + d(d+1)k - 1 = \\ &= d(d-1)n + [d(d+1) - d(d-1)]k + d(d-1) - 1 = \\ &= d(d-1)n + 2dk + d^2 - d - 1. \end{aligned}$$

3.4. Következmények, megjegyzések

A 3.3.1. Tétel több érdekes következményét érdemes áttekinteni. Először alkalmazzuk tételünket a $d = 2$ esetben.

3.4.1. KÖVETKEZMÉNY. *Legyenek az n és k olyan pozitív egészek, hogy $n > 2$, $0 \leq k \leq n - 2$. Ha $n - k \equiv 0 \pmod{3}$ vagy $n - k \equiv -1 \pmod{3}$, akkor*

$$g(n, 2n + k) = 2n + 4k + 1.$$

Ezzel a LEV által adott bizonyítástól eltérő úton általánosítottuk a 3.2.3. ERDŐS–GRAHAM-tételt az $n - k \not\equiv 1 \pmod{3}$ esetekben. A legnagyobb megengedett k érték ebben az esetben $k = n - 2$, ekkor kapjuk, hogy

$$g(n, 3n - 2) = 2n + 4(n - 2) + 1 = 6n - 7.$$

A következő $k = n - 1$ értékre már korábban választ adtunk a 3.2.7. DIXMIER-tétel alapján: $g(n, 3n - 1) = 6n - 1$.

Alkalmazzuk most a tételt a $d = 3$ esetben is.

3.4.2. KÖVETKEZMÉNY. *Legyenek n és k olyan pozitív egészek, hogy $n > 3$, $0 \leq k \leq n - 3$. Ha $n - k \equiv 0 \pmod{4}$ vagy $n - k \equiv -1 \pmod{4}$, akkor*

$$g(n, 3n + k) = 6n + 6k + 5.$$

Ezt a sort folytatva, az n -nél kisebb d -k esetében két-két maradékosztályra, igen sok értékes eredményt nyerhetünk $g(n, t)$ -re.

Harmadik következményként említsük meg a $k = 0$ esetet is.

3.4.3. KÖVETKEZMÉNY. *Legyenek d és n olyan pozitív egészek, hogy $n > 2$, és $d < n$. Ha $n \equiv 0 \pmod{d + 1}$ vagy $n \equiv -1 \pmod{d + 1}$, akkor*

$$g(n, dn) = d(d - 1)n + d^2 - d - 1.$$

Például a fenti feltételek mellett:

$$g(n, 2n) = 2n + 1; \quad g(n, 3n) = 6n + 5; \quad g(n, 4n) = 12n + 11.$$

Az előző következtetések csak a $g(n, dn + k)$ -ra vonatkozó tétel érvényességi körében igazak. Algebrai azonosság alapján $n - 1 \mid n^k - 1$, így DIXMIER 3.2.7. és 3.2.8 Tétele segítségével néhány további esetben is kiszámítható $g(n, t)$, pl.:

3.4.4. TÉTEL.

$$\begin{aligned} g(n, n^2) &= n^3 - n - 1, \\ g(n, 2n^2) &= 4n^3 + 2n^2 + 1, \\ g(n, n^3) &= n^5 + n^4 - n^2 - n - 1, \\ g(n, 2n^3) &= 4n^5 + 4n^4 + 2n^3 + 1. \end{aligned}$$

A LEV által sikerrel alkalmazott két azonos differenciájú számtani sorozatra vonatkozó FREIMAN-tétel, az eddig sikerre vezető konstrukciók mind abba az irányba mutatnak, hogy az *extremális Frobenius-számokat* valószínűleg mindig a két szám által generált halmazok adják. A $G(A)$ konkrét eseteinek kiszámításai is mutatják, hogy amennyiben behozunk egy harmadik, az előbbiekhöz relatív prím tagot, a legnagyobb nem felírható szám jelentősen csökken. Amikor teljesül, hogy $d < t/n < d + 1$, akkor az extrémális esetet biztosító a_i -khez várhatóan úgy lehet eljutni, hogy vesszük a $(d + 1)$ összes olyan többszöröseit, amelyek még kisebbek, mint t és azután ezt a halmazt a $(\text{mod } d + 1)$ szerint egy adott maradékosztályba eső legnagyobb lehetséges számokkal bővítjük addig, amíg a darabszám éppen n lesz. A sejtésünk az, hogy minden $dn + k$ esetét végignézve a dn -től a $dn + n - d$ -ig csak kétféle eredményt kaphatunk, amelyek közül a nagyobb biztosan a tételünkben szereplő érték. Az $n - k \equiv 1 \pmod{d + 1}$ esetben a fenti konstrukcióval

$$g(n, dn + k) \geq d(d - 1)n + 2dk - 1$$

adódik. Tehát az alsó és felső becslés közötti „hézag” mindössze $d^2 - d$ hosszúságú.

4. A nem felírható számok száma

A 2. fejezetben tárgyaltuk, hogy a relatív prím $a_1 < a_2 < \dots < a_n$ pozitív egészekre a $K = \sum_{i=1}^n x_i a_i$ diofantikus egyenlet megoldható nemnegatív egész x_i -kre, ha K elegendően nagy. A legnagyobb nem felírható számig azonban olyanok is előfordulnak, amelyek felírhatók és olyanok is, amelyek nem. Ebben a fejezetben a nem felírható számok számával kapcsolatos áttekintést követően, a 4.2. szakaszban bevezetjük a $g(n, t)$ -hez hasonló extrémális függvényt és teljes megoldását adjuk annak az ERDŐS–GRAHAM által megfogalmazott sejtésnek, amely szerint szomszédos elemek választásával lesz a legtöbb a nem felírható elemek száma [17].

4.1. Az eddigi eredmények vázlatos áttekintése

Már SYLVESTER 1884-ben vizsgálta és meg is oldotta azt a kérdést, hogy két különböző „érme” esetén hány olyan pozitív egész szám van, amely nem írható fel e két szám lineáris kombinációjaként. Ezt az eredményt a 2. fejezet 8. feladatában mutattuk be.

4.1.1. TÉTEL.

$$N(a_1, a_2) = \frac{(a_1 - 1)(a_2 - 1)}{2}$$

Elsősorban SELMER norvég matematikus munkássága révén gyakorlatilag mindegyik olyan esetben kiszámítható $N(a_1, a_2, \dots, a_n)$, amikor már előbb $G(a_1, a_2, \dots, a_n)$ -et ismerjük. A kiszámításhoz egy áttekinthető modellt használt. A $(\text{mod } a_1)$ maradékosztályok mindegyikéből megkereste a legkisebb felírható számot és így össze tudta számolni a nem felírhatókat.

Legyen H egy teljes maradékrendszer $\text{mod } a_1$. Minden $h \in H$ -hoz van olyan $r_h \equiv h \pmod{a_1}$, amely felírható $r_h = a_2 y_2 + a_3 y_3 + \dots + a_n y_n$ alakban és a legkisebb. Ezekkel a jelölésekkel

4.1.2. TÉTEL.

$$N(a_1, a_2, \dots, a_n) = \frac{1}{a_1} \sum_{h \in H} r_h - \frac{a_1 - 1}{2}.$$

A módszer gyakorlati alkalmazásaira a 2. fejezetben több példát is mutattunk. A 9. feladatban középiskolai eszközökkel kiszámítottuk $N(a_1, a_2, \dots, a_n)$ -et, amikor az a_i -k számtani sorozatot alkotnak. Speciálisan, amikor $d = 1$, akkor szomszédos számok esetében kapjuk a nem felírható számát (ld. 15. feladat). Erre jelen fejezet második részében még visszatérünk. SELMER [28] a sorozatokra vonatkozó formulát továbbfejlesztette „majdnem” számtani sorozatokra is.

4.1.3. TÉTEL. *Legyenek a, h, d, k pozitív egészek és $(a, d) = 1$. Ekkor*

$$\begin{aligned} N(a, ha + d, ha + 2d, \dots, ha + kd) = \\ = \frac{(a-1)(hq + d + h - 1 + hr(q+1))}{2}, \end{aligned}$$

ahol $a - 1 = qk + r$, $0 \leq r < k$.

Végül TINAGLIA [31] $n = 3$ -ra vonatkozó, a szokványostól nagyon eltérő megfogalmazású eredményét ismertetjük.

4.1.4. TÉTEL. *Legyenek p, q és r a legkisebb olyan pozitív egész számok, amelyek kielégítik az*

$$a_1 x_p + a_2 y_p = p a_3, \quad a_1 x_q + a_3 y_q = q a_2, \quad a_2 x_r + a_3 y_r = r a_1$$

diofantoszi egyenleteket úgy, hogy $x_p, y_p, x_q, y_q, x_r, y_r \geq 0$. Ezekkel a jelölésekkel

$$N(a_1, a_2, a_3) = \frac{1}{2}(a_1 r + a_2 q + a_3 p - pqr - a_1 - a_2 - a_3 + 1).$$

Az előbbi feltételekkel felírt p, q, r számokat JOHNSON-egészeknek nevezik.

Becslések természetesen $N(a_1, a_2, \dots, a_n)$ -nel kapcsolatban is ismertek. A legegyszerűbb talán NIJENHUIS és WILF eredménye [22]. A 0-tól a $G(a_1, a_2, \dots, a_n)$ -ig pontosan $G(a_1, a_2, \dots, a_n) + 1$ darab nemnegatív szám van. Ezeket párba állíthatjuk úgy, hogy az egyes párok összege minden esetben $G(a_1, a_2, \dots, a_n)$ legyen:

$$z_l + z_m = G(a_1, a_2, \dots, a_n).$$

Mivel $G(a_1, a_2, \dots, a_n)$ nem írható fel az a_i -k segítségével, ezért a párokban szereplő számok közül legalább az egyik szintén ilyen lesz, így kaptuk, hogy

4.1.5. TÉTEL.

$$\frac{G(a_1, a_2, \dots, a_n) + 1}{2} \leq N(a_1, a_2, \dots, a_n).$$

Amennyiben $N(a_1, a_2, \dots, a_n)$ -et olyan esetekben is meg tudnánk határozni, amelyekben $G(a_1, a_2, \dots, a_n)$ -et nem ismerjük, jó felső becslést kaphatnánk a legnagyobb nem felírható számra, és fordítva. Máris érthető, hogy a témakörnek ez a szelete is rohamosan fejlődik. A párhuzamok lehetősége miatt megemlítünk még egy alsó becslést, amely KILLINGBERGTROTÓL [15] származik:

4.1.6. TÉTEL.

$$\left| \binom{n-1}{n} ((n-1)! a_1 a_2 \dots a_n)^{\frac{1}{n-1}} - \sum_{i=1}^n a_i - 1 \right| \leq N(a_1, a_2, \dots, a_n).$$

Összevetve a 3.1.6. és 3.1.7. Tétélekkel, ahol $G(a_1, a_2, \dots, a_n)$ -re ismertettünk alsó becsléseket, látjuk, hogy ezekben a becslésekben a két függvény, G és N gyakorlatilag megegyezik. Olyan konstrukció tetszőleges n -re adható, ahol ez az egyenlőség ténylegesen be is következik.

$$G(n, n+1, \dots, 2n-1) = N(n, n+1, \dots, 2n-1) = n-1.$$

4.2. Az ERDŐS–GRAHAM-sejtés

ERDŐS és GRAHAM [7, 86.old.] tették fel a következő kérdést: „Hogyan kell megválasztani n darab pozitív egész számot $1 < a_1 < a_2 < \dots < a_n \leq t$, hogy azoknak a számoknak a száma, amelyek nem írhatók fel $\sum_i c_i a_i$ alakban maximális legyen? Itt a c_i -k szokásosan mind nemnegatív egész számok. Vajon a szomszédos egész számok, $a_1 = t - n + 1, a_2 = t - n + 2, \dots, a_n = t$ választása adja-e minden esetben a legtöbb nem felírható számot?”

Ebben a fejezetben egy egyszerű bizonyítást adunk erre a sejtésre. Ezenkívül végtelen sok más esetben tudunk példát adni további, a maximumot szintén biztosító $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ konstrukcióra is.

Jelentse továbbra is $N(a_1, a_2, \dots, a_n)$ azoknak a pozitív egészeknek a számát, amelyek nem írhatók fel az a_1, a_2, \dots, a_n nemnegatív lineáris kombinációjaként. A $g(n, t)$ mintájára definiáljuk a $\nu(n, t)$ függvényt:

$$\nu(n, t) = \max N(a_1, a_2, \dots, a_n),$$

ahol a maximumot az összes olyan a_i -kre tekintjük, amelyek kielégítik az $1 < a_1 < a_2 < \dots < a_n \leq t$ és $(a_1, a_2, \dots, a_n) = 1$ feltételeket. ERDŐS és GRAHAM állítását a következő formában írhatjuk fel az új jelölésünkkel:

4.2.1. TÉTEL. *Legyenek n és t egész számok, $1 < n \leq t$. Ekkor*

$$\nu(n, t) = N(t - n + 1, t - n + 2, \dots, t).$$

A tétel bizonyításához felhasználjuk DIXMIER következő eredményét [4]:

4.2.2. TÉTEL. *Ha $a_n \leq t$ akkor tetszőleges k esetén legalább $\min(t, kn - k + 1)$ darab egész szám reprezentálható az a_1, a_2, \dots, a_n egészek segítségével az $I_k = [(k - 1)t + 1, kt]$ intervallumban.*

Tulajdonképpen ezen a tételen alapul DIXMIER korábban idézett két becslése, a 3.1.3. és 3.2.5. Tétel is, amelyek segítségével az extrémális Frobenius-problémában is eredményesen dolgozhattunk.

A sejtés bizonyítása előtt kimondjuk a következő segédtételt:

4.2.3. LEMMA. *Legyenek n és t egészek, $1 < n \leq t$. Legyenek továbbá a q és r egészek a $t = q(n-1) + r$ maradékos osztás szerint definiálva, ahol $1 \leq r \leq n-1$. Ekkor*

$$N(t-n+1, t-n+2, \dots, t) = \frac{(t-n+r-1)q}{2}.$$

Az állítás pontosan megegyezik a 2. fejezet 15. feladatával. A bizonyítást ott részleteztük. (Megjegyezzük, hogy a lemma a 2. fejezet 9. feladatából és SELMER számtani sorozatokkal kapcsolatos 4.1.3. Tételéből is levezethető.)

Most rátérünk a 4.2.1. Tétel igazolására.

BIZONYÍTÁS: A fentebbi 4.2.2. Tételben az egyes I_k intervallumok rendre legalább

$$n; 2n-1; 3n-2; \dots; k(n-1)+1; \dots$$

felírható elemet tartalmaznak. Így azoknak a száma, amelyek nem írhatók fel az I_k intervallumból, rendre legfeljebb

$$t-n; t-2n+1; t-3n+2; \dots; t-k(n-1)-1; \dots; t-q(n-1)-1 = r-1.$$

Ez egy számtani sorozat, amelyet összegezve

$$N(a_1, a_2, \dots, a_n) \leq \sum_{k=1}^q (t - k(n-1) - 1).$$

Láthatóan ez a szám megegyezik a 15. feladat bizonyításában a második \sum -val (21. oldal).

Tehát $\nu(n, t) = N(t - n + 1, t - n + 2, \dots, t)$, ahogyan állítottuk. ■

A fejezet hátralévő részében további optimális halmazokat adunk meg.

Az eddigiekben azt találtuk, hogy az $A = \{t - n + 1, t - n + 2, \dots, t\}$ halmaz optimális abban az értelemben, hogy $\nu(n, t) = N(A)$.

Vajon léteznek-e más ilyen optimális halmazok is?

A következő tételben belátjuk, hogy nagyon sok esetben igen.

4.2.4. TÉTEL. *Legyenek d, n, k egészek, $2 \leq d < n$, $0 \leq k < n - d$. Ha $n - k \equiv 0 \pmod{d + 1}$ vagy $n - k \equiv -1 \pmod{d + 1}$, akkor $t = dn + k$ -ra létezik legalább két optimális A halmaz, azaz amelyre*

$$N(A) = \nu(n, dn + k).$$

BIZONYÍTÁS: Azt fogjuk belátni, hogy van a $\{t - n + 1, t - n + 2, \dots, t\}$ halmaztól különböző optimális halmaz. Ugyanazokat a halmazokat használjuk fel, amelyek a 3.3.1. Tétel bizonyításában, $g(n, dn + k)$ pontos értékének meghatározásánál szerepeltek. Természetesen ezért azonosak a d, k és n számokra megadott feltételek az ottaniakkal.

I. eset. Legyen $n - k \equiv 0 \pmod{d + 1}$. Ekkor $n = l(d + 1) + k$, tehát

$$dn + k = ld(d + 1) + dk + k = (d + 1)(ld + k).$$

Az $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ álljon a $(d + 1)$ összes többszöröseiből és a $-1 \pmod{d + 1}$ maradékosztály l darab legnagyobb eleméből t -ig:

$$\begin{aligned} A = \{ & d + 1, 2(d + 1), \dots, (ld + k - 1)(d + 1), (ld + k)(d + 1), \\ & dn + k - 1, dn + k - 1 - (d + 1), dn + k - 1 - 2(d + 1), \dots, \\ & dn + k - 1 - (l - 1)(d + 1) \}. \end{aligned}$$

Legyen $z = dn + k - 1 - (l - 1)(d + 1)$ a legkisebb olyan eleme A -nak, amely nem többszöröse a $(d + 1)$ -nek.

Ismert tény (ld. pl. Sylvester [30]) és ebben a dolgozatban is tárgyaltuk a 2. fejezet 8. feladatában, illetve a 4.1.1. Tételben, hogy $N(b, c) = (b - 1)(c - 1)/2$, így

$$\begin{aligned} N(A) = N(d + 1, z) &= (z - 1) \frac{d}{2} = [dn + k - l(d + 1) + d - 1] \frac{d}{2} = \\ &= (dn + k - n + k + d - 1) \frac{d}{2}. \end{aligned}$$

Ez egyenlő $\nu(n, t) = N(t - n + 1, t - n + 2, \dots, t)$ -vel, mivel a jelöléseinkkel és a 4.2.3. Lemma alapján $t = dn + k = d(n - 1) + k + d$, így

$$d = q, r = k + d \text{ és } dn + k - n + k + d - 1 = t - n + r - 1.$$

II. eset. Tegyük fel most, hogy $n - k \equiv -1 \pmod{d + 1}$. Ekkor $n = l(d + 1) + k - 1$ és

$$dn + k = (d + 1)dl + dk - d + k = (d + 1)(dl + k) - d.$$

Ebben az esetben $dn + k - 1 = (d + 1)(dl + k - 1)$ többszöröse $(d + 1)$ -nek. Az $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ halmaz tartalmazza ismét a $(d + 1)$ többszöröseit, továbbá az $1 \pmod{d + 1}$ maradékosztály l darab legnagyobb elemét t -ig:

$$A = \{d + 1, 2(d + 1), \dots, (ld + k - 1)(d + 1),$$

$$dn + k, dn + k - (d + 1), dn + k - 2(d + 1), \dots, dn + k - (l - 1)(d + 1)\}.$$

A II. esetben az I. esethez hasonló számolással kapjuk, hogy $N(A) = \nu(n, t)$. ■

Érdekes kettősség, hogy a 3.3.1., ill. 4.2.4. Tételben megadott konstrukció mind $g(n, dn + k)$, mind pedig $\nu(n, dn + k)$ szempontjából az

extremális konstrukciót adja, miközben a szomszédos a_i -k választása csak ν -re vonatkozóan optimális.

Továbbra sem ismerjük a választ arra a kérdésre, hogy minden t -re megadható-e a szomszédos elemek konstrukcióján kívül még legalább egy optimális halmaz, illetve vannak-e további, az említettektől eltérő optimális halmazok is a $\nu(n, t)$ vizsgálatánál.

5. A nem felírható számok összegzése

Itt megmutatjuk a kapcsolódást SYLVESTER eredeti vizsgálataihoz, a partíciókhoz. Az összegzésekre három módszert mutatunk be, melyek közül az első kettő a matematikai analízis eszközeit használja. A harmadik, teljesen elemi és egyszerű alapgondolaton alapuló módszer a szakirodalomban nem lelhető fel. A módszer hátránya, hogy már $n = 2$ esetén is viszonylag sok elemi számolást igényel. Előnye lehet viszont a nagymértékű általánosíthatóság, amelyet két konkrét halmaz esetében részletesen is megvizsgálunk. Ez a fejezet, bár használjuk az analízis eszközeit, a 2. fejezethez hasonlóan tekinthető az oktatáshoz, tehetséggondozáshoz szorosan kapcsolódó résznek. A témakörnek ez a szelete a tanártovábbképzésben is tárgyalható. A generátorfüggvény alkalmazása mint módszer több szempontból is nagyon tanulságos; rámutat EULER zsenialitására csakúgy, mint a számelméleti Frobenius-probléma, a partíciók és az analízis kapcsolatára. Tárgyalása során matematikatörténeti szempontból is nagyon értékes gondolatokat, szemléletmódot ismerhetünk meg és adhatunk tovább tanítványainknak, kollégáinknak.

5.1. Partíciók és nem felírható számok

Az itt szereplő fogalmakat és eredményeket FREUD RÓBERT és GYARMATI EDIT Számelmélet [9] című egyetemi tankönyve, valamint J. RAMÍREZ ALFONSÍN összefoglaló cikke [24] alapján állítottuk össze.

Az n pozitív egész szám partícióin az n szám pozitív egészek összegként történő lényegesen különböző előállításait értjük és ezek számát $p(n)$ -nel jelöljük. A partíciókkal kapcsolatos problémák hatékony kezelésének eszköze a generátorfüggvény. EULER megmutatta, hogy a

$p(n)$ generátorfüggvénye

$$\prod_{i=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^i} = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} p(n)x^n.$$

Jelöljük $d(m; a_1, a_2, \dots, a_n)$ -nel az $m = \sum_{i=1}^n x_i a_i$ diofantoszi egyenlet megoldásainak számát, ahol $x_i \geq 0$. Tehát $d(m; a_1, a_2, \dots, a_n)$ az m pozitív egésznek az a_1, a_2, \dots, a_n összeadandókból képzett partíciói számát jelöli. Ezt a függvényt SYLVESTER definiálta és „denumerant”-nak, leszámológónak nevezte. Erre is megadható a $p(n)$ -hez hasonlóan generátorfüggvény:

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 + \sum_{i=1}^{\infty} d(m; a_1, a_2, \dots, a_n) x^m = \\ &= \frac{1}{(1-x^{a_1})(1-x^{a_2}) \dots (1-x^{a_n})}. \end{aligned}$$

$G(a_1, a_2, \dots, a_n)$ a legnagyobb olyan k lesz, amelyre a generátorfüggvényben az x^k együtthatója nulla. Ezt az analízisből vett szóhasználatlaltal úgy is fogalmazhatjuk, hogy a legnagyobb olyan k , amelyre a generátorfüggvény k -adik deriváltja, $f^k(0) = 0$. A generátorfüggvény bevezetésével és vizsgálatával számtalan aszimptotikus becslés született $d(m; a_1, a_2, \dots, a_n)$ -re. SCHUR és NETTO vizsgálatai szerint

$$d(m; a_1, a_2, \dots, a_n) \sim \frac{m^{n-1}}{P_n(n-1)!} \quad \text{ha } m \rightarrow \infty,$$

ahol P_n az a_1, a_2, \dots, a_n számok szorzata. Ez az eredmény is mutatja, hogy ha az m elegendően nagy, akkor $d(m; a_1, a_2, \dots, a_n)$ biztosan legalább 1, létezik tehát a legnagyobb nem felírható szám. Jelen dolgozatban nem célunk a Frobenius problémakör és az analízis kapcsolatának

részletekbe menő bemutatása. Az ebből a néhány fogalomból, gondolatból is érzékelhető, hogy érdekes, nehéz, és egyelőre sokkal több kérdést vet fel, mint amennyire az $n > 2$ esetben sikeresnek mutatkozik.

5.2. Generátorfüggvény és a nem felírható számok összege

A lehetséges iskolai vonatkozások szempontjából kiválasztottunk egy olyan könnyebben kezelhető részt, amely bepillantást enged a generátorfüggvény használatának módszereibe.

Ebben a szakaszban végig csak az $n = 2$ esetre szorítkozzunk.

Legyenek a és b relatív prím pozitív egészek és jelölje $\text{NR}(a, b)$ azoknak a nemnegatív egészeknek a halmazát, amelyek nem fejezhetőek ki $xa + yb$ alakban, ahol x és y nemnegatív egészek. Legyen $S(a, b)$ ezeknek a nemnegatív egészeknek az összege:

$$S(a, b) = \sum \{n : n \in \text{NR}(a, b)\}.$$

$G(a, b)$ -t és $N(a, b)$ -t is ismerjük (ld. pl. 2. fejezet 3. feladat és 8. feladat):

$$G(a, b) = ab - a - b = (a - 1)(b - 1) - 1, \quad N(a, b) = \frac{(a - 1)(b - 1)}{2}.$$

Természetes felső becslést kaphatunk azonnal a nem felírható számok összegére, ha $(ab - a - b)$ -ig a legnagyobb $\frac{(a-1)(b-1)}{2}$ darab egész számot, és egy alsó becslést, ha a legkisebb $\frac{(a-1)(b-1)}{2}$ pozitív egész számot vesszük:

$$\frac{1}{8}(a - 1)^2(b - 1)^2 + \frac{1}{4}(a - 1)(b - 1) \leq S(a, b)$$

$$S(a, b) \leq \frac{3}{8}(a - 1)^2(b - 1)^2 - \frac{1}{4}(a - 1)(b - 1).$$

T. C. BROWN és P. J. SHIUE [2] pontosan meghatározták $S(a, b)$ -t:

5.2.1. TÉTEL. *Legyenek a és b relatív prím pozitív egészek. Ekkor*

$$S(a, b) = \frac{1}{12}(a-1)(b-1)(2ab - a - b - 1).$$

BIZONYÍTÁS: Jelentse $r(n)$ az n pozitív egész szám azon $n = xa + yb$ alakú előállításainak számát, ahol x és y nemnegatív egészek. Könnyen beláthatjuk, hogy ha $n \leq ab - 1$, akkor $r(n) = 0$ vagy $r(n) = 1$. Ellenkező esetben ugyanis az n -et legalább kétféleképpen előállíthatnánk, azaz $n = x_1a + y_1b = x_2a + y_2b$, ahol az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy $x_1 > x_2$. Átrendezve látjuk, hogy $0 = (x_1 - x_2)a + (y_1 - y_2)b$. Innen $b \mid x_1 - x_2$, azaz $x_1 \geq b$ és $n \geq ab$ adódna. Most definiáljuk a következő függvényt:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{ab-a-b} [1 - r(n)]x^n.$$

Mivel az $r(n)$ csak 0-t vagy 1-et vehet fel, ezért

$$\begin{aligned} f'(1) &= \sum_{n=0}^{ab-a-b} n[1 - r(n)] = \sum \{n : 1 \leq n \leq ab - a - b \text{ és } r(n) = 0\} \\ &= \sum \{n : n \in \text{NR}(a, b)\} = S(a, b). \end{aligned}$$

Az $f(x)$ függvény meghatározásához fel fogjuk használni S. SERTÖZ és A. ÖZLÜK által [29]-ben részletezett generátorfüggvényt:

$$T(x) = \frac{1}{(1-x^a)(1-x^b)} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^{an} \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^{bn} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} r(n)x^n.$$

Legyen most

$$P(x) = \frac{(x^{ab} - 1)(x - 1)}{(x^a - 1)(x^b - 1)} \quad \text{és} \quad f^*(x) = \frac{P(x) - 1}{x - 1}.$$

Belátható, hogy $P(x)$ olyan polinom, amelynek főegyütthatója 1 és fokszáma $ab - a - b + 1$. L'Hospital-szabállyal közvetlenül igazolható, hogy $P(1) = 1$, így biztos, hogy $\frac{P(x)-1}{x-1}$ is polinom, amelynek főegyütthatója szintén 1 és fokszáma $ab - a - b$.

A következő azonos átalakítással ki fogjuk mutatni, hogy $f = f^*$.

$$\begin{aligned} f^*(x) &= \frac{P(x) - 1}{x - 1} = \frac{P(x)}{x - 1} + \frac{1}{1 - x} = (x^{ab} - 1)T(x) + \frac{1}{1 - x} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} r(n)x^{ab+n} + \sum_{n=0}^{\infty} [1 - r(n)]x^n = \\ &= \sum_{n=ab}^{\infty} [r(n - ab) + 1 - r(n)]x^n + \sum_{n=0}^{ab-1} [1 - r(n)]x^n. \end{aligned}$$

Mivel tudjuk, hogy ez egy $(ab - a - b)$ -ad fokú polinom, minden ennél magasabb kitevőjű hatvány együtthatója nulla. Így

$$f^*(x) = \frac{P(x) - 1}{x - 1} = \sum_{n=0}^{ab-a-b} [1 - r(n)]x^n = f(x).$$

Hozzákezdhetünk $f'(1)$ kiszámításához. A könnyebb kezelhetőség érdekében legyen $y = x^a$. Ezzel

$$\begin{aligned} P(x) &= \frac{(x^{ab} - 1)(x - 1)}{(x^a - 1)(x^b - 1)} = \frac{\sum_{k=0}^{b-1} y^k}{\sum_{k=0}^{b-1} x^k}. \\ f(x) &= \frac{P(x) - 1}{x - 1} = \frac{\sum_{k=0}^{b-1} y^k - \sum_{k=0}^{b-1} x^k}{(x - 1) \sum_{k=0}^{b-1} x^k} = \frac{\sum_{k=1}^{b-1} \frac{y^k - x^k}{x - 1}}{\sum_{k=0}^{b-1} x^k} = \frac{g(x)}{h(x)}. \end{aligned}$$

Vizsgáljuk külön a számlálót és a nevezőt.

$$g(x) = \sum_{k=0}^{b-1} \frac{y^k - x^k}{x-1} = \sum_{k=0}^{b-1} \frac{x^{ak} - x^k}{x-1} = \sum_{k=1}^{b-1} (x^k + x^{k+1} + \dots + x^{a^{k-1}}).$$

Az 1-et behelyettesítve

$$g(1) = \sum_{k=1}^{b-1} (a-1)k = \frac{1}{2}(a-1)(b-1)b, \quad h(1) = b.$$

Következzenek most a $g(x)$ és $h(x)$ deriváltjai. Használjuk fel, hogy

$$\begin{aligned} k + (k+1) + \dots + (ka-1) &= \frac{1}{2}ka(ka-1) - \frac{1}{2}k(k-1) = \\ &= \frac{1}{2}(k^2(a^2-1) - k(a-1)). \end{aligned}$$

Deriválva a $g(x)$ -et

$$\begin{aligned} g'(1) &= \sum_{k=1}^{b-1} (k + (k+1) + \dots + (ka-1)) = \\ &= \sum_{k=1}^{b-1} \frac{1}{2}(k^2(a^2-1) - k(a-1)) = \\ &= \frac{1}{2}(a^2-1) \sum_{k=1}^{b-1} k^2 - \frac{1}{2}(a-1) \sum_{k=1}^{b-1} k = \\ &= \frac{1}{2}(a^2-1) \frac{1}{6}(b-1)b(2b-1) - \frac{1}{2}(a-1) \frac{1}{2}(b-1)b = \\ &= b(a-1)(b-1) \left(\frac{(a+1)(2b-1)}{12} - \frac{1}{4} \right). \end{aligned}$$

$$h'(1) = 1 + 2 + \dots + (b-1) = \frac{1}{2}(b-1)b.$$

Az $f'(1)$ -et a két függvény hányadosára vonatkozó deriválási szabály alapján kapjuk:

$$\begin{aligned} S(a, b) = f'(1) &= \frac{h(1)g'(1) - g(1)h'(1)}{(h(1))^2} = \\ &= \frac{b^2(a-1)(b-1) \left(\frac{(a+1)(2b-1)}{12} - \frac{1}{4} \right) - \frac{1}{4}b^2(a-1)(b-1)^2}{b^2} = \\ &= \frac{1}{12}(a-1)(b-1)((a+1)(2b-1) - 3 - 3(b-1)) = \\ &= \frac{1}{12}(a-1)(b-1)(2ab - a - b - 1). \blacksquare \end{aligned}$$

A bizonyítást két okból is részletesen tárgyaltuk.

Egyrészt látjuk, hogy legegyszerűbb esetben is magasabb segéd-eszközökre, ügyes számolási technikára és menet közben több kisebb ötletre is szükség van a nem felírható számok összegének meghatározásához. Ezen az úton $n > 2$ esetén átláthatatlanok lesznek az egyes hatványok együthatói, ugyanaz az a nehézség lép fel, mint az eredeti Frobenius-probléma általános megoldása (egyelőre megoldhatatlansága) esetében.

Másrészt összevethetjük ezt a módszert a később tárgyalandó teljesen elemi módszerrel is.

5.3. A nem felírható számok hatványösszegeiről ($n = 2$)

Ö. J. RÖDSETH [27] erős analitikus eszközökkel BROWN és SHIUE előbb bizonyított 5.2.1. Tételét jelentősen általánosította. Az a és b relatív prím pozitív egészek esetében jelölje most is $\text{NR}(a, b)$ azoknak

a nemnegatív egészeknek a halmazát, amelyek nem fejezhetők ki $xa + yb$ alakban, ahol x és y nemnegatív egészek. Legyen $S_m(a, b)$ ezen nemnegatív egészek m -edik hatványainak összege:

$$S_m(a, b) = \sum \{n^m : n \in \text{NR}(a, b)\}.$$

A hatványösszegek felírhatók zárt alakban:

5.3.1. TÉTEL. *Tetszőleges m pozitív egészre*

$$\begin{aligned} S_{m-1}(a, b) &= \\ &= \frac{1}{m(m+1)} \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^{m-i} \binom{m+1}{i} \binom{m+1-i}{j} B_i B_j a^{m-j} b^{m-i} - \frac{1}{m} B_m, \end{aligned}$$

ahol a B_i -k az ún. Bernoulli-féle számok.

A szakirodalomban több helyen megtalálható (pl. [10]) Bernoulli-féle számok egy hatványsor együtthatói:

$$\frac{z}{e^z - 1} = \sum_{j \geq 0} B_j \frac{x^j}{j!}.$$

$$B_0 = 1, B_1 = -\frac{1}{2}, B_2 = \frac{1}{6}, B_3 = 0, B_4 = -\frac{1}{30}, \dots$$

A tételt nem bizonyítjuk, de néhány m -re az összeget pontosan kiszámítjuk.

Az $m = 1$ esetben a nem felírható számok számát kapjuk (ld. 2. fejezet 8. feladat), azaz $S_0(a, b) = \frac{1}{2}(a-1)(b-1)$. Alkalmazzuk ezt az általános eredményt először $S(a, b)$ kiszámítására:

5.3.2. KÖVETKEZMÉNY.

$$S(a, b) = \frac{1}{12}(a-1)(b-1)(2ab - a - b - 1).$$

BIZONYÍTÁS: Legyen $m = 2$, ekkor a formula átírható:

$$\begin{aligned}
S(a, b) &= \frac{1}{6} \sum_{i=0}^2 \sum_{j=0}^{2-i} \binom{3}{i} \binom{3-i}{j} B_i B_j a^{2-j} b^{2-i} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} = \\
&= \frac{1}{6} \binom{3}{0} B_0 b^2 \left[\binom{3}{0} B_0 a^2 + \binom{3}{1} B_1 a + \binom{3}{2} B_2 \right] + \\
&+ \frac{1}{6} \binom{3}{1} B_1 b \left[\binom{2}{0} B_0 a^2 + \binom{2}{1} B_1 a \right] + \frac{1}{6} \binom{3}{2} B_2 \left[\binom{1}{0} B_0 a^2 \right] - \frac{1}{12} = \\
&= \frac{b^2}{6} \left(a^2 - \frac{3}{2} a + \frac{1}{2} \right) - \frac{b}{4} (a^2 - a) + \frac{1}{12} a^2 - \frac{1}{12} = \\
&= \frac{1}{12} (2a^2 b^2 - 3a^2 b - 3ab^2 + 3ab + a^2 + b^2 - 1) = \\
&= \frac{1}{12} (a-1)(b-1)(2ab - a - b - 1). \blacksquare
\end{aligned}$$

Most következhet a nem felírható számok négyzetösszegének meghatározása.

5.3.3. KÖVETKEZMÉNY.

$$S_2(a, b) = \frac{1}{12} (a-1)(b-1)ab(ab - a - b).$$

BIZONYÍTÁS: Legyen $m = 3$, ekkor a formula átírható:

$$\begin{aligned}
S_2(a, b) &= \frac{1}{12} \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^{3-i} \binom{4}{i} \binom{4-i}{j} B_i B_j a^{3-j} b^{3-i} - \frac{1}{3} B_3 = \\
&= \frac{1}{12} \binom{4}{0} B_0 b^3 \left[\binom{4}{0} B_0 a^3 + \binom{4}{1} B_1 a^2 + \binom{4}{2} B_2 a + \binom{4}{3} B_3 \right] +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{12} \binom{4}{1} B_1 b^2 \left[\binom{3}{0} B_0 a^3 + \binom{3}{1} B_1 a^2 + \binom{3}{2} B_2 a \right] + \\
& + \frac{1}{12} \binom{4}{2} B_2 b \left[\binom{2}{0} B_0 a^3 + \binom{2}{1} B_1 a^2 \right].
\end{aligned}$$

Kihasználva, hogy $B_3 = 0$, néhány tagot eleve elhagyhattunk. Beírva a binomiális együtthatók értékét és egyszerűbb alakra hozva:

$$\begin{aligned}
S_2(a, b) &= \frac{b^3}{12} (a^3 - 2a^2 + a) - \frac{b^2}{6} \left(a^3 - \frac{3}{2}a^2 + \frac{a}{2} \right) + \frac{b}{12} (a^3 - a^2) = \\
&= \frac{1}{12} ab(a^2 b^2 - 2a^2 b - 2ab^2 + 3ab + a^2 + b^2 - a - b) = \\
& \quad \frac{1}{12} (a-1)(b-1)ab(ab - a - b). \blacksquare
\end{aligned}$$

Az előző két levezetésből látható, hogy az általános formulából rövidebb számolással $n = 2$ esetén akármelyik hatványösszege meghatározható a nem felírható számoknak. A későbbi összehasonlíthatóság érdekében számoljuk ki még az $S_3(a, b)$ -t is.

5.3.4. KÖVETKEZMÉNY.

$$S_3(a, b) = \frac{(a^4 - 1)(b^4 - 1)}{120} + \frac{a^2 b^2 (a - 1)(b - 1)(ab - 2a - 2b + 1)}{24}.$$

BIZONYÍTÁS: Legyen $m = 4$, ekkor a formula átírható:

$$S_3(a, b) = \frac{1}{20} \sum_{i=0}^4 \sum_{j=0}^{4-i} \binom{5}{i} \binom{5-i}{j} B_i B_j a^{4-j} b^{4-i} - \frac{1}{4} B_4 =$$

A kifejtésnél a B_3 -at tartalmazó tagokat nem írjuk le.

$$= \frac{1}{20} \binom{5}{0} B_0 b^4 \left[\binom{5}{0} B_0 a^4 + \binom{5}{1} B_1 a^3 + \binom{5}{2} B_2 a^2 + \binom{5}{4} B_4 \right] +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{20} \binom{5}{1} B_1 b^3 \left[\binom{4}{0} B_0 a^4 + \binom{4}{1} B_1 a^3 + \binom{4}{2} B_2 a^2 \right] + \\
& + \frac{1}{20} \binom{5}{2} B_2 b^2 \left[\binom{3}{0} B_0 a^4 + \binom{3}{1} B_1 a^3 + \binom{3}{2} B_2 a^2 \right] + \\
& + \frac{1}{20} \binom{5}{4} B_4 \left(\binom{1}{0} B_0 a^4 \right) + \frac{1}{120}.
\end{aligned}$$

Beírva az egyes konkrét értékeket és rendezve:

$$\begin{aligned}
S_3(a, b) = \frac{(a-1)(b-1)}{120} (6a^3b^3 - 9a^3b^2 - 9a^2b^3 + a^3b + ab^3 + 6a^2b^2 + \\
+ a^2b + ab^2 + ab + a^3 + b^3 + a^2 + b^2 + a + b + 1)
\end{aligned}$$

adódik. Ez további azonos átalakításokkal rövidebb alakra hozható:

$$S_3(a, b) = \frac{(a^4-1)(b^4-1)}{120} + \frac{a^2b^2(a-1)(b-1)(ab-2a-2b+1)}{24}. \blacksquare$$

Az $(a-1)(b-1)$ tényező tetszőleges m -re kiemelhető a kifejezésből. Páros m esetében további szimmetriát jelent, hogy az 1-nél nagyobb páratlan indexű Bernoulli-számok mindegyike 0, így azokban az összegekben nincs konstans, kiemelhető ab is.

5.4. Összegések elemi módszerrel

Az előző két szakaszban többféleképpen is meghatároztuk a nem felírható számok összegét, sőt a második, általánosabb formula tetszőleges kitevőre megadta a hatványösszegekre vonatkozó képletet $n = 2$ esetén. RÖDSETH megemlíti általános bizonyítása kezdetén azt az alapgondolatot, amelyet továbbgondolva és ötvözve a SELMER által kifejlesztett „minimális rendszer” módszerrel sokkal egyszerűbb eszközökkel is eljuthatunk az előző pontban leírt eredményekhez, sőt elemi módszerünket $n > 2$ esetén is kipróbáljuk egy speciális halmazra.

5.4.1. TÉTEL. *Legyenek $a_1 < a_2 < \dots < a_n$ relatív prím pozitív egészek. Vegyük mod a_1 mindegyik nemnulla maradékosztályból az a_2, a_3, \dots, a_n segítségével felírható legkisebb elemet, legyenek ezek $x_1, x_2, \dots, x_{a_1-1}$. Ekkor*

$$S(a_1, a_2, \dots, a_n) = \sum_{j=1}^{a_1-1} \left(\frac{x_j^2}{2a_1} - \frac{x_j}{2} \right) + \frac{a_1^2 - 1}{12}.$$

BIZONYÍTÁS: Az alapgondolatot a 4.1.2. Tételnél már megismerhettük. Legyen $t_1, t_2, \dots, t_{a_1-1}$ az $1, 2, \dots, a_1 - 1$ egészek egy permutációja. Az $x_j \equiv t_j \pmod{a_1}$ maradékosztályból

$$t_j, t_j + a_1, t_j + 2a_1, \dots, x_j - a_1$$

a nem felírható elemek. Ezek számtani sorozatot alkotnak és elemszámuk $\frac{x_j - t_j}{a_1}$. Az elemek összege:

$$\frac{x_j - a_1 + t_j}{2} \cdot \frac{x_j - t_j}{a_1} = \frac{x_j^2 - t_j^2}{2a_1} - \frac{x_j}{2} + \frac{t_j}{2}.$$

A t_j -kre vonatkozó összegzéseket minden esetben egyszerű elvégezni:

$$\sum_{j=1}^{a_1-1} t_j^2 = \sum_{j=1}^{a_1-1} j^2 = \frac{(a_1 - 1)a_1(2a_1 - 1)}{6},$$

illetve $\sum_{j=1}^{a_1-1} t_j = \frac{a_1(a_1-1)}{2}$. Így a tételben szereplő összeg:

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^{a_1-1} \left(\frac{x_j^2 - t_j^2}{2a_1} + \frac{t_j}{2} - \frac{x_j}{2} \right) = \\ & = \sum_{j=1}^{a_1-1} \left(\frac{x_j^2}{2a_1} - \frac{x_j}{2} \right) - \frac{(a_1 - 1)(2a_1 - 1)}{12} + \frac{a_1(a_1 - 1)}{4} = \end{aligned}$$

$$= \sum_{j=1}^{a_1-1} \left(\frac{x_j^2}{2a_1} - \frac{x_j}{2} \right) + \frac{a_1^2 - 1}{12}. \blacksquare$$

Alkalmazzuk elemi módszerünket $n = 2$ esetén.

5.4.2. KÖVETKEZMÉNY. *Legyenek a és b relatív prím pozitív egészek. Ekkor*

$$S(a, b) = \frac{1}{12}(a-1)(b-1)(2ab - a - b - 1).$$

BIZONYÍTÁS: Az előző tételben szereplő x_j -k ebben az esetben $b, 2b, \dots, (a-1)b$ lesznek.

$$\sum_{j=1}^{a-1} x_j^2 = \sum_{j=1}^{a-1} (jb)^2 = b^2 \sum_{j=1}^{a-1} j^2 = \frac{a(a-1)(2a-1)}{6} b^2,$$

$$\sum_{j=1}^{a-1} x_j = b \sum_{j=1}^{a-1} j = \frac{a(a-1)}{2} b.$$

E két összeg felhasználásával kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} S(a, b) &= \sum_{j=1}^{a-1} \left(\frac{x_j^2}{2a} - \frac{x_j}{2} \right) + \frac{a^2 - 1}{12} = \\ &= \frac{b^2(a-1)(2a-1)}{12} - \frac{ab(a-1)}{4} + \frac{a^2 - 1}{12} = \\ &= \frac{1}{12}(a-1)(2ab^2 - b^2 - 3ab + a + 1) = \\ &= \frac{1}{12}(a-1)[2ab(b-1) - a(b-1) - (b-1)(b+1)] = \\ &= \frac{1}{12}(a-1)(b-1)(2ab - a - b - 1). \blacksquare \end{aligned}$$

Nézzük meg most a nem felírhatóak összegét egy olyan összeállításban, amellyel már többször találkoztunk a dolgozatban, és az elemek száma 3 (ld. 2. fejezet 1. feladat, 10. feladat).

5.4.3. TÉTEL. *Legyenek a, b, c páronként relatív prím pozitív egész számok. Ekkor*

$$S(ab, bc, ca) = \frac{1}{12} [7a^2b^2c^2 - 6abc(ab + bc + ca) + 3abc(a + b + c) + a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 - 1].$$

BIZONYÍTÁS: Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy ab a legkisebb szám. Szükségünk van maradékosztályonként a legkisebb felírható számokat tartalmazó x_j rendszerre. ezt a 2. fejezet 10. feladatának megoldásából kölcsönözzük.

$$\begin{array}{cccccc} 0 & bc & 2bc & \dots & (a-1)bc & \\ ca & bc+ca & 2bc+ca & \dots & (a-1)bc+ca & \\ \vdots & & & & \vdots & \\ (b-1)ca & bc+(b-1)ca & 2bc+(b-1)ca & \dots & (a-1)bc+(b-1)ca & \end{array}$$

Számítsuk ki először a táblázatban szereplő számok összegét:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{ab-1} x_j &= \sum_{i=0}^{a-1} \sum_{j=0}^{b-1} (ibc + jca) = \\ &= c [b^2(1+2+\dots+(a-1)) + a^2(1+2+\dots+(b-1))] = \\ &= \frac{a^2bc(b-1) + ab^2c(a-1)}{2} = \frac{1}{2} abc(2ab - a - b). \end{aligned}$$

Szükségünk lesz még az x_j^2 -ek összegére, ezért elkészítjük ezt a táblázatot is. Az érthetőséget remélhetőleg nem zavarja, hogy csak az első

3 oszlop fért ki. Az áttekinthetőség kedvéért a mindegyik számban szereplő c^2 -et föl sem tüntetjük.

$$\begin{array}{ccc}
 0 & b^2 & 2^2b^2 \\
 a^2 & b^2 + 2ab + a^2 & 2^2b^2 + 2a2ba^2 \\
 \vdots & & \vdots \\
 (b-1)^2a^2 & b^2 + 2(b-1)ab + (b-1)^2a^2 & \dots
 \end{array}$$

Az összegzésnél felhasználjuk a hatványösszegeket és a táblázat szimmetriáját, illetve azt, hogy b darab sor és a oszlop van.

$$\begin{aligned}
 \sum_{j=0}^{ab-1} x_j^2 &= a^3[1 + 4 + \dots + (b-1)^2]c^2 + \\
 &+ 2ab[1+2+\dots+(b-1)][1+2+\dots+(a-1)]c^2 + b^3[1+4+\dots+(a-1)^2]c^2 = \\
 &= \frac{1}{6}a^3(b-1)b(2b-1)c^2 + \frac{1}{2}ab(a-1)a(b-1)bc^2 + \frac{1}{6}b^3(a-1)a(2a-1)c^2.
 \end{aligned}$$

Alkalmazzuk most az 5.4.1. Tételt. Ebben az esetben $a_1 = ab$, a szükséges részösszegeket már előre meghatároztuk.

$$\begin{aligned}
 S(ab, bc, ca) &= \sum_{j=1}^{ab-1} \left(\frac{x_j^2}{2ab} - \frac{x_j}{2} \right) + \frac{a^2b^2 - 1}{12} = \\
 &= \frac{1}{12}a^2c^2(b-1)(2b-1) + \frac{1}{4}(a-1)(b-1)abc^2 + \frac{1}{12}b^2c^2(a-1)(2a-1) - \\
 &\quad - \frac{1}{4}abc(2ab - a - b) + \frac{1}{12}(a^2b^2 - 1),
 \end{aligned}$$

amiből a beszorítások elvégzésével és összevonásokkal a tételben megadott alakot kapjuk. ■

5.5. A nem felírható számok hatványösszegei elemi módszerrel

Ebben a szakaszban az a célunk, hogy az 5.3.3 és 5.3.4 Következményeket elemi módszerrel is igazoljuk.

A nem felírható számok négyzetösszegeinek meghatározása előtt számtani sorozat elemeinek négyzetösszegét állítjuk elő.

5.5.1. LEMMA. *Az $u, u+d, \dots, u+kd$ számtani sorozatban az elemek négyzetösszege:*

$$(k+1) \left[u^2 + udk + \frac{d^2 k(2k+1)}{6} \right]. \quad (5.5.1)$$

BIZONYÍTÁS: Írjuk fel az egyes elemek négyzeteit és az egyműket vonjuk össze.

$$\begin{aligned} (k+1)u^2 + 2ud(1+2+\dots+k) + d^2(1^2+2^2+\dots+k^2) = \\ = (k+1) \left[u^2 + udk + \frac{d^2 k(2k+1)}{6} \right]. \blacksquare \end{aligned}$$

Most az előző szakaszhoz hasonlóan egy általános tétellel írjuk le a nem felírhatóak négyzetének összegét.

5.5.2. TÉTEL. *Legyenek $a_1 < a_2 < \dots < a_n$ relatív prím pozitív egészek. Vegyük mod a_1 mindegyik nemnulla maradékosztályból az a_2, a_3, \dots, a_n segítségével felírható legkisebb elemet, legyenek ezek $x_1, x_2, \dots, x_{a_1-1}$. Ekkor*

$$S_2(a_1, a_2, \dots, a_n) = \frac{1}{6a_1} \sum_{j=1}^{a_1-1} [2x_j^3 - 3x_j^2 a_1 + x_j a_1^2].$$

BIZONYÍTÁS: Legyen $t_1, t_2, \dots, t_{a_1-1}$ az $1, 2, \dots, a_1 - 1$ egészek egy permutációja. Az $x_j \equiv t_j \pmod{a_1}$ maradékosztályból

$$t_j, t_j + a_1, t_j + 2a_1, \dots, x_j - a_1$$

a nem felírható, számtani sorozatot alkotó elemek és elemszámuk $\frac{x_j - t_j}{a_1}$. Az elemek négyzetének összegét az 5.5.1. Lemma alapján kapjuk.

A mi esetünkben most $u = t_j$, $d = a_1$ és $k = \frac{x_j - t_j - a_1}{a_1}$. Írjuk be ezeket az értékeket (5.5.1)-be.

$$\begin{aligned} & (k+1) \left[u^2 + udk + \frac{d^2 k(2k+1)}{6} \right] = \\ &= \frac{x_j - t_j}{a_1} \left[t_j^2 + \frac{t_j a_1 (x_j - t_j - a_1)}{a_1} \right] + \\ &+ \frac{x_j - t_j}{a_1} \left[\frac{a_1^2 (x_j - t_j - a_1)(2x_j - 2t_j - a_1)}{6a_1^2} \right] = \\ &= \frac{x_j - t_j}{6a_1} [6x_j t_j - 6t_j^2 - 6a_1 t_j + 2x_j^2 - 4x_j t_j - 3x_j a_1 + 2t_j^2 + 3t_j a_1 + a_1^2] = \\ &= \frac{x_j - t_j}{6a_1} [2x_j^2 + 2x_j t_j - 3x_j a_1 + 2t_j^2 - 3t_j a_1 + a_1^2] = \\ &= \frac{1}{6a_1} [2x_j^3 - 3x_j^2 a_1 + x_j a_1^2 - 2t_j^3 + 3t_j^2 a_1 - t_j a_1^2]. \end{aligned}$$

Látható, hogy a „kritikus” tagok mind kiestek a beszorzásnál, így nincs semmilyen akadálya, hogy összegezzünk az összes maradékosztályra:

$$\frac{1}{6a_1} \sum_{j=1}^{a_1-1} [2x_j^3 - 3x_j^2 a_1 + x_j a_1^2 - 2t_j^3 + 3t_j^2 a_1 - t_j a_1^2].$$

Válasszuk külön azokat a hatványösszeget, amelyeket ténylegesen ki is tudunk számolni:

$$\frac{1}{6a_1} \sum_{j=1}^{a_1-1} [2x_j^3 - 3x_j^2 a_1 + x_j a_1^2] -$$

$$-\frac{1}{6a_1} \left[\frac{a_1^2(a_1 - 1)^2}{2} - \frac{a_1^2(a_1 - 1)(2a_1 - 1)}{2} + \frac{a_1^3(a_1 - 1)}{2} \right].$$

Most emeljünk ki a második részből $a_1^2(a_1 - 1)/2$ -t, így látható, hogy az pontosan nulla lesz:

$$\begin{aligned} \frac{1}{6a_1} \sum_{j=1}^{a_1-1} [2x_j^3 - 3x_j^2a_1 + x_ja_1^2] - \frac{a_1(a_1 - 1)}{12} [a_1 - 1 - 2a_1 + 1 + a_1] = \\ = \frac{1}{6a_1} \sum_{j=1}^{a_1-1} [2x_j^3 - 3x_j^2a_1 + x_ja_1^2]. \blacksquare \end{aligned}$$

Alkalmazzuk tételünket $n = 2$ esetén. Eredményünk megegyezik RÖDSETH 5.3.1. Tételének 5.3.3. Következményével.

5.5.3. KÖVETKEZMÉNY. *Legyenek a és b relatív prím pozitív egészek. Ekkor*

$$S_2(a, b) = \frac{1}{12}(a - 1)(b - 1)ab(ab - a - b).$$

BIZONYÍTÁS: Helyettesítsük be az aktuális értékeket az 5.5.2. Tételbe és használjuk a hatványösszegekre vonatkozó ismert formulákat.

$$\begin{aligned} & \frac{1}{6a} \sum_{j=1}^{a-1} [2(jb)^3 - 3(jb)^2a + (jb)a^2] = \\ & = \frac{1}{6a} \left[2b^3 \frac{a^2(a - 1)^2}{4} - 3ab^2 \frac{a(a - 1)(2a - 1)}{6} + a^2b \frac{a(a - 1)}{2} \right] = \\ & = \frac{ab(a - 1)}{12} [b^2(a - 1) - b(2a - 1) + a] = \\ & = \frac{1}{12} ab(a - 1) [ab^2 - b^2 - 2ab + b + a] = \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{12}ab(a-1)(b-1)(ab-a-b). \blacksquare$$

Az eddigiekben láttuk, hogy az elemi módszer, bár minimális eszközöket igényel, a számítások egyre hosszadalmasabbak. Ugyanakkor a négyzetek összegzésénél a „vegyes” tagokon kívül az x_j -ket nem tartalmazó tagok is kiestek. Érdekes megvizsgálnunk még a harmadik hatványok összegére vonatkozó elemi lehetőségeket is. Először ismét egy lemmát bizonyítunk.

5.5.4. LEMMA. *Legyen $u, u + d, \dots, u + kd$ számtani sorozat, ekkor az elemek harmadik hatványainak összege:*

$$\frac{1}{4}(k+1) [4u^3 + 6u^2dk + 2ud^2k(2k+1) + d^3k^2(k+1)]. \quad (5.5.2)$$

BIZONYÍTÁS: Írjuk fel az egyes elemek köbét és az egyneműeket vonjuk össze.

$$\begin{aligned} & (k+1)u^3 + 3u^2d(1+2+\dots+k) + 3ud^2(1^2+2^2+\dots+k^2) + \\ & \quad + d^3(1^3+2^3+\dots+k^3) = \\ = & (k+1)u^3 + 3u^2d \frac{k(k+1)}{2} + 3ud^2 \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + d^3 \frac{k^2(k+1)^2}{4} = \\ = & \frac{1}{4}(k+1) [4u^3 + 6u^2dk + 2ud^2k(2k+1) + d^3k^2(k+1)]. \blacksquare \end{aligned}$$

Most az előzőekhez hasonlóan egy általános tétellel írjuk le a nem felírhatóak harmadik hatványainak összegét.

5.5.5. TÉTEL. *Legyenek $a_1 < a_2 < \dots < a_n$ relatív prím pozitív egészek. Vegyük mod a_1 mindegyik nemnulla maradékosztályból az a_2, a_3, \dots, a_n segítségével felírható legkisebb elemet, legyenek ezek $x_1, x_2, \dots, x_{a_1-1}$. Ekkor*

$$S_3(a_1, a_2, \dots, a_n) = \sum_{j=1}^{a_1-1} \frac{1}{4a_1} (x_j^4 - 2x_j^3a_1 + x_j^2a_1^2) - \frac{a_1^4 - 1}{120}.$$

BIZONYÍTÁS: Legyen $t_1, t_2, \dots, t_{a_1-1}$ az $1, 2, \dots, a_1 - 1$ egészek egy permutációja, Az $x_j \equiv t_j \pmod{a_1}$ maradékosztályból

$$t_j, t_j + a_1, t_j + 2a_1, \dots, x_j - a_1$$

a nem felírható, számtani sorozatot alkotó elemek és elemszámuk $\frac{x_j - t_j}{a_1}$. Az elemek köbének összegét az 5.5.4. Lemma alapján kapjuk.

Hasonlóan az 5.5.1. Lemmához $u = t_j$, $d = a_1$ és $k = \frac{x_j - t_j - a_1}{a_1}$. Írjuk be ezeket az értékeket (5.5.2)-be.

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4}(k+1) [4u^3 + 6u^2dk + 2ud^2k(2k+1) + d^3k^2(k+1)] = \\ &= \frac{x_j - t_j}{4a_1} \left[4t_j^3 + 6t_j^2a_1 \frac{x_j - t_j - a_1}{a_1} \right] + \\ &+ \frac{x_j - t_j}{4a_1} \left[2t_ja_1^2 \frac{(x_j - t_j - a_1)(2x_j - 2t_j - a_1)}{a_1^2} \right] + \\ &+ \frac{x_j - t_j}{4a_1} \left[a_1^3 \frac{(x_j - t_j - a_1)^2(x_j - t_j)}{a_1^3} \right] = \\ &= \frac{x_j - t_j}{4a_1} [4t_j^3 + 6t_j^2(x_j - t_j - a_1)] + \\ &+ \frac{x_j - t_j}{4a_1} [2t_j(x_j - t_j - a_1)(2x_j - 2t_j - a_1)] + \\ &+ \frac{x_j - t_j}{4a_1} [(x_j - t_j - a_1)^2(x_j - t_j)]. \end{aligned}$$

Végezzük el a beszorzásokat és az összevonásokat:

$$\begin{aligned} & \frac{x_j - t_j}{4a_1} [x_j^3 + x_j^2t_j + x_jt_j^2 - 2x_jt_ja_1] + \\ &+ \frac{x_j - t_j}{4a_1} [-2x_j^2a_1 + x_ja_1^2 + t_j^3 + t_ja_1^2 - 2t_j^2a_1]. \end{aligned}$$

Újabb beszorzás és rendezés után:

$$\frac{1}{4a_1} (x_j^4 - 2x_j^3a_1 + x_j^2a_1^2 - t_j^4 + 2t_j^3a_1 - t_j^2a_1^2).$$

Végül összegezzük ezeket a tagokat $j = 1$ -től $(a_1 - 1)$ -ig:

$$S_3(a_1, a_2, \dots, a_n) = \sum_{j=1}^{a_1-1} \frac{1}{4a_1} (x_j^4 - 2x_j^3a_1 + x_j^2a_1^2 - t_j^4 + 2t_j^3a_1 - t_j^2a_1^2).$$

Az x_j -t nem tartalmazó tagok összegzését el is végezhetjük felhasználva az ismert hatványösszegeket:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4a_1} \sum_{j=1}^{a_1-1} (-t_j^4 + 2t_j^3a_1 - t_j^2a_1^2) = \\ &= -\frac{(a_1-1)(2a_1-1)(3a_1^2-3a_1-1)}{120} + \frac{a_1^2(a_1-1)^2}{8} - \\ & \quad - \frac{a_1^2(a_1-1)(2a_1-1)}{24} = \\ &= -\frac{(a_1-1)}{120} [(2a_1-1)(3a_1^2-3a_1-1) - 15a_1^2(a_1-1) + (2a_1-1)5a_1^2] = \\ &= -\frac{(a_1-1)}{120} [a_1^3 + a_1^2 + a_1 + 1] = -\frac{a_1^4-1}{120}. \end{aligned}$$

$$S_3(a_1, a_2, \dots, a_n) = \sum_{j=1}^{a_1-1} \frac{1}{4a_1} (x_j^4 - 2x_j^3a_1 + x_j^2a_1^2) - \frac{a_1^4-1}{120}. \blacksquare$$

A kilátástalannak is ítélt algebrai átalakítások ellenére egy szép általános formulát nyertünk. Az x_j -ket és t_j -ket is vegyesen tartalmazó tagok kiestek, ezekkel a számolás általánosan biztosan lehetetlen lenne. E szakasz befejezéséként alkalmazzuk az 5.5.5. Tételt az $n = 2$ esetre.

5.5.6. KÖVETKEZMÉNY. *Legyenek a és b relatív prím pozitív egészek. Ekkor*

$$S_3(a, b) = \frac{(a^4 - 1)(b^4 - 1)}{120} + \frac{a^2 b^2 (a - 1)(b - 1)(ab - 2a - 2b + 1)}{24}.$$

BIZONYÍTÁS: Helyettesítsük be az aktuális értékeket az 5.5.5. Tételbe és alkalmazzuk a hatványösszegekre vonatkozó ismert formulákat.

$$\begin{aligned} S_3(a, b) &= \frac{1}{4a} \sum_{j=1}^{a-1} x_j^4 - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{a-1} x_j^3 + \frac{a}{4} \sum_{j=1}^{a-1} x_j^2 - \frac{a^4 - 1}{120} = \\ &= \frac{(a - 1)(2a - 1)(3a^2 - 3a - 1)b^4}{120} - \frac{a^2(a - 1)^2 b^3}{8} + \\ &\quad + \frac{a^2(a - 1)(2a - 1)b^2}{24} - \frac{a^4 - 1}{120}. \end{aligned}$$

Beszorzással azonnal ellenőrizhető, hogy ez a kifejezés megegyezik az 5.3.4. Következmény utolsó előtti sorával. Így kaptuk, hogy

$$S_3(a, b) = \frac{(a^4 - 1)(b^4 - 1)}{120} + \frac{a^2 b^2 (a - 1)(b - 1)(ab - 2a - 2b + 1)}{24}. \blacksquare$$

6. Összegzés

A disszertációban a következő probléma különféle aspektusait vizsgáljuk: Adott $A = \{a_1 < a_2 < \dots < a_n\}$ relatív prím pozitív egészek esetén, melyek azok a K pozitív egészek, amelyek felírhatók $K = \sum_{i=1}^n x_i a_i$ alakban, ahol az x_i -k nemnegatív egészek.

A rövid bevezetést követő 2. fejezetnek kettős szerepe van. Egyrészt ismertetjük mindazokat a fogalmakat, amelyek a későbbi részek megértéséhez szükségesek: a legnagyobb nem felírható szám $G(A)$, a nem felírható számok száma $N(A)$, továbbá ezek extrémális változatai: $g(n, t) = \max G(a_1, a_2, \dots, a_n)$ és $\nu(n, t) = \max N(a_1, a_2, \dots, a_n)$, ahol $a_n \leq t$. Másrészt 15 jellemző feladat bemutatásával az oktatás céljait szeretnénk szolgálni. Ezek felhasználhatók a tehetséggondozásban, illetve az előbb említett feladatok megoldásán kívül kitérünk a történeti vonatkozásokra, az új eredmények közlésére és nyitott kérdések ismertetésére is.

A 3. fejezetet $G(A)$ és $g(n, t)$ vizsgálatának szenteljük. Fő eredményünk $g(n, dn + k)$ pontos értékének meghatározása két maradékosztályra mod $(d + 1)$. Ez ERDŐS és GRAHAM egyik 1972-es tételének egy általánosítása. A bizonyítás előtt részletesen bemutatunk néhány ismert felső és alsó becslést ezekre a számokra, beleértve DIXMIER egy 1990-es tételét is, amelyen eredményünk bizonyítása nyugszik.

A 4. fejezetben bebizonyítjuk, hogy az extrémális $\nu(n, t)$ számot akkor kapjuk, ha azt az n darab legnagyobb egész számot választjuk, amely nem nagyobb mint t . Ez ERDŐS és GRAHAM egy 1980-ból származó sejtése volt. Azt is bebizonyítjuk, hogy végtelen sok n és t esetében az extrémális $\nu(n, t)$ elérhető más olyan A halmazzal is, amely különbözik a legnagyobb n darab egésztől t -ig.

Az utolsó fejezetben a nem felírható számok $S_k(A)$ -val jelölt k -adik hatványösszegeivel foglalkozunk. Először bemutatjuk, hogyan használhatók fel az analízis eszközei $S_1(A)$ meghatározására $n = 2$ esetén.

Ezt követően diszkutáljuk RÖDSETH magasabb hatványokra vonatkozó általános tételének néhány speciális esetét. Végül megmutatjuk, hogy egy teljesen elemi módszer nemcsak a korábbi esetekben, hanem néhány problémára $n > 2$ esetén is alkalmazható. Ez az utolsó rész tekinthető bizonyos értelemben a 2. fejezet folytatásának is, mivel felhasználható tananyagként azoknak a tanároknak a továbbképzéséhez, akik már ismerik a témakör alapvető tényeit és módszereit.

A disszertáció a szerző következő publikációin alapul: [18] (2. fejezet), [16] (3.3 – 3.4 szakaszok) és [17] (4.2 szakasz). (Az 5.4 – 5.5 szakaszok eredményei nincsenek publikálva.)

6. Summary

The thesis investigates various aspects of the following problem: Given a set $A = \{a_1 < a_2 < \dots < a_n\}$ of relatively prime positive integers, which positive integers K can be represented as $K = \sum_{i=1}^n x_i a_i$, where x_i are non-negative integers.

The short introduction is followed by Chapter 2, which plays a double role. On the one hand, we present here all notions necessary for the understanding of the later parts: the greatest non-representable number $G(A)$, the number of non-representable numbers $N(A)$, and the extremal versions of these: $g(n, t) = \max G(a_1, a_2, \dots, a_n)$ and $\nu(n, t) = \max N(a_1, a_2, \dots, a_n)$ where $a_n \leq t$. On the other hand, our presentation, including 15 characteristic problems, is planned to serve also educational purposes. It can be used for teaching talented students; besides the solutions of the above-mentioned problems we include historical remarks, comment on new results and mention also open questions.

Chapter 3 is devoted to the investigation of $G(A)$ and $g(n, t)$. Our main result is finding the exact value of $g(n, dn + k)$ for two residue classes mod $(d + 1)$. This is a generalization of a theorem by ERDŐS and GRAHAM from 1972. Before the proof we present in detail some known upper and lower bounds for these numbers, including a theorem by DIXMIER from 1990, on which the proof of our result is based.

In Chapter 4 we prove that the extremal number $\nu(n, t)$ is obtained when we choose the n largest integers not exceeding t . This was a conjecture by ERDŐS and GRAHAM from 1980. We also prove that for infinitely many values of n and t , the extremal value $\nu(n, t)$ is achieved also for another set A differing from the set of the greatest n numbers up to t .

In the last chapter we deal with the sum $S_k(A)$ of k^{th} powers of the non-representable numbers. First we illustrate, how analysis can be used for determining $S_1(A)$ when $n = 2$. Then we discuss some

special cases of a general result by RÖDSETH for higher powers. Finally we show a completely elementary method applicable not only to the previous cases, but also for some problems with $n > 2$. This final part can also be considered as a continuation of Chapter 2 in a certain sense, since it can be used as a material for continued training of teachers who know already the basic facts and methods of the topic.

The thesis is based on the following publications of the author: [18] (Chapter 2), [16] (Sections 3.3 – 3.4) and [17] (Section 4.2). (The results of Sections 5.4 – 5.5 are unpublished.)

Hivatkozások

- [1] M. BECK, R. DIAZ and S. ROBINS, The Frobenius problem, rational polytopes, and Fourier-Dedekind sums, *J. Number Theory*, **96** (1) (2002), 1 – 21.
- [2] T. C. BROWN and P. J. SHIUE, A remark related to the Frobenius problem, *The Fibonacci Quarterly* **31**(1) (1993), 32 – 36.
- [3] J. L. DAVISON, On the linear diophantine problem of Frobenius, *J. Number Theory*, **48** (1994), 353 – 363.
- [4] J. DIXMIER, Proof of a conjecture by Erdős and Graham concerning the problem of Frobenius, *J. Number Theory*, **34** (1990), 198 – 209.
- [5] P. ERDŐS, Problem P-84, *Can. Math. Bull.*, **14** (1971), 275 – 277.
- [6] P. ERDŐS and R. L. GRAHAM, On a linear diophantine problem of Frobenius, *Acta Arithmetica*, **21** (1972), 399 – 408.
- [7] P. ERDŐS and R. L. GRAHAM, Old and New Problems and Results in Combinatorial Number Theory, *Monographies de l'Enseignement Mathématique*, **28** Université de Genève, 1980.
- [8] FAZAKAS TÜNDE - HRASKÓ ANDRÁS (szerk.), Bergengóc példatár, Matematika feladatok és azok megoldásai 2. *Typotex Kiadó, Budapest* 2001.

- [9] FREUD RÓBERT – GYARMATI EDIT, Számelmélet (egyetemi tankönyv), *Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest*, 2000.
- [10] R. L. GRAHAM, D. E. KNUTH and O. PATASHNIK, Concrete Mathematics, *Reading, Mass.: Adison-Wesley*, 1990.
- [11] M. HUJTER, On sharp upper and lower bounds for the Frobenius problem, *Technical Report MO/32* Computer and Automation Inst., Hungarian Academy of Sciences, (1982)
- [12] M. HUJTER, Lower bounds for the Frobenius problem, *Technical Report MO/43* Computer and Automation Inst., Hungarian Academy of Sciences, (1982)
- [13] A. JANZ, Bestimmung der maximalen Frobeniuszahl, Master thesis, *Johannes Guttenberg Universität, Mainz*, April 1997.
- [14] S. M. JOHNSON, A linear diophantine problem, *Can. J. Math.*, **12** (1960) 390 – 398.
- [15] H. G. KILLINGBERGTRO, Betjening av figur i Frobenius' problem (Using figures in Frobenius' problem), (Norwegian) *Normat* **2** (2000), 75 – 82.
- [16] G. KISS, Extremal Frobenius numbers in some special cases, *Annales Univ. Sci. Budapest*, **44** (2001), 27 – 31.
- [17] G. KISS, On the extremal Frobenius problem in a new aspect, *Annales Univ. Sci. Budapest*, **45** (2002), 139 – 142.

- [18] G. KISS, The Frobenius problem on competitions and in classroom, *Teaching Mathematics and Computer Science*, **1/2** (2003), 203 – 218.
- [19] V. F. LEV, On the extremal aspect of the Frobenius problem, *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, **73** (1996), 111 – 119.
- [20] M. LEWIN, A bound for a solution of a linear Diophantine problem, *J. London Math. Soc.*, **6** (1972), 61 – 69.
- [21] M. NAGATA and H. MATSUMURA, A theorem in elementary arithmetic (in Japanese), *Sugaku*, **13** (1961-62) 161; *Math. Rev.* **25** (3) (1963) No. 2386.
- [22] M. NIJENHUIS and H. S. WILF, Representation of integers by linear forms in nonnegative integers, *J. Number Theory*, **4** (1972), 98 – 106.
- [23] J. L. RAMÍREZ ALFONSÍN, The Diophantine Frobenius Problem, *Forschungsinstitut für Diskrete Mathematik, Bonn*, Report No. 00893, 2000.
- [24] J. L. RAMÍREZ ALFONSÍN, The Diophantine Frobenius Problem, *Equipe Combinatoire Université Pierre et Marie Curie, Paris* Report, June 2003.
- [25] REIMAN ISTVÁN, Nemzetközi Matematikai Diákolimpiák 1959 – 1994, *Typotex Kiadó, Budapest*, 1997, 362 – 365.
- [26] J. B. ROBERTS, Note on linear forms, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **7** (1956), 465 – 469.

- [27] Ö. J. RÖDSETH, A note on Brown and Shiue's paper on a remark related to the Frobenius problem, *Fibonacci Quarterly*, **32**(5) (1994), 407 – 408.
- [28] E. S. SELMER, On the linear diophantine problem of Frobenius, *Journal für reine und angewandte Mathematik*, **293/294** (1) (1977), 1 – 17.
- [29] S. SERTÖZ and A. ÖZLÜK, On a diophantine problem of Frobenius, *Bull. Tech. Univ. Istanbul*, **39**(1) (1986), 41 – 51.
- [30] J. J. SYLVESTER, Mathematical questions with their solution, *Educational Times*, **41** (1884), 21.
- [31] C. TINAGLIA, Su alcune soluzioni di un problema di Frobenius in tre variabili, *Boll. U. M. I.* **7**(2) (1988), 361 – 383.
- [32] VÍZVÁRI BÉLA, Mit rakjunk a hátizsákba, hogyan váltsunk fel pénzt? I. – II. *Középiskolai Matematikai Lapok, Budapest*, **46** (1996), 386 – 391, 452 – 457.