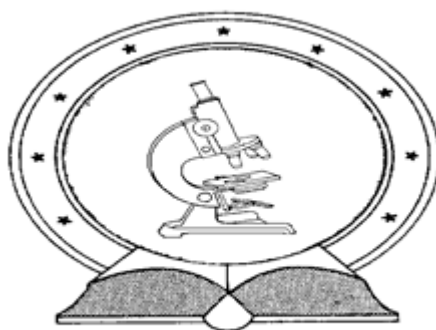


DE TTK



1949

Téri képességek mérése és fejlesztése GeoGebrával a középiskolában

Egyetemi doktori (PhD) értekezés

Szerző: Budai László

Témavezető: Dr. habil. Hoffmann Miklós

Társtémavezető: Dr. habil. Ján Gunčaga

DEBRECENI EGYETEM

Természettudományi Doktori Tanács

Matematika- és Számítástudományok Doktori Iskola

Debrecen, 2016

Ezen értekezést a Debreceni Egyetem Természettudományi Doktori Tanács.....Doktori Iskolaprogramja keretében készítettem a Debreceni Egyetem természettudományi doktori (PhD) fokozatának elnyerése céljából.

Nyilatkozom arról, hogy a tézisekben leírt eredmények nem képezik más PhD disszertáció részét.

Debrecen, 201.

a jelölt aláírása

Tanúsítom, hogy doktorjelölt 20...- 20.. .. között a fent megnevezett Doktori Iskolaprogramjának keretében irányításommal végezte munkáját. Az értekezésben foglalt eredményekhez a jelölt önálló alkotó tevékenységével meghatározóan hozzájárult. Nyilatkozom továbbá arról, hogy a tézisekben leírt eredmények nem képezik más PhD disszertáció részét.

Az értekezés elfogadását javaslom.

Debrecen, 20..

a témavezető aláírása

Téri képességek mérése és fejlesztése GeoGebrával a középiskolában

Értekezés a doktori (Ph. D.) fokozat megszerzése érdekében matematika- és számítástudományok tudományágban

Írta: Budai László, okleveles matematika-informatika szakos tanár

Készült a Debreceni Egyetem Matematika- és Számítástudományok Doktori Iskolája (matematika-didaktika) keretében

Témavezető: Dr. habil. Hoffmann Miklós

Társtémavezető: Dr. habil. Ján Gunčaga

A doktori szigorlati bizottság:

elnök: Dr. Maksa Gyula

tagok: Dr. Bácsó Sándor

Dr. Ambrus András

A doktori szigorlat időpontja: 2015. május 5.

Az értekezés bírálói:

Dr.

Dr.

Dr.

A bírálóbizottság:

elnök: Dr.

tagok: Dr.

Dr.

Dr.

Dr.

Az értekezés védésének időpontja: 20.. .. .

Köszönetnyilvánítás

Köszönöm témavezetőmnek, Hoffmann Miklósnak, és társtémavezetőmnek, Ján Gunčagának a kutatás sikeres elvégzéséhez nyújtott szakmai, és didaktikai segítséget.

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés	1
1.1. A témaválasztás indoklása	1
1.2. A dolgozat szerkezete	3
2. Irodalmi előzmények.....	6
2.1. A téri képesség fogalma	6
2.2. A téri képességek méréséről.....	9
2.3. A téri képességek fejlődése és fejleszthetősége.....	17
2.4. Számítógéppel támogatott matematikaoktatás.....	30
3. A kutatás módszertana	37
4. A kutatáshoz szükséges, geometriai alapokon nyugvó szoftveres háttér létrehozása	42
4.1. Ortogonális axonometria	44
4.2. Centrális vetítés, perspektíva	54
5. A nevelési-oktatási kísérlet.....	62
5.1. A NAT és matematika kerettantervek áttekintése	62
5.2. PISA 2012 eredmények összefoglaló értékelése	67
5.3. Előzetes állapotfelmérés összetevői és eredményei	69
5.4. A fejlesztési folyamat leírása	74
5.5. A nevelési-oktatási kísérlet hatásvizsgálata	86
6. Egy új irányt képviselő mérési metódus kidolgozása	97
6.1. Statikus tesztek dinamikus GeoGebra-adaptációja.....	97
6.2. Pilot vizsgálati eredmények értékelése, tapasztalatok.....	102
7. Összegzés, további kutatási lehetőségek.....	117
8. Irodalomjegyzék	120
9. Függelék.....	1
9.1. Alkalmazott téri képességeket mérő teszt sor	1
9.2. Affektív tényezők vizsgálata: Claus-féle kérdőív	36
9.3. Kiemelt segédanyagok.....	37

*„Csak az igazságot lehet megérteni;
ami nem igazság, azt megérteni nem
lehet, legfeljebb elhinni.”*

(Bartel Leendert van der Waerden)

1. Bevezetés

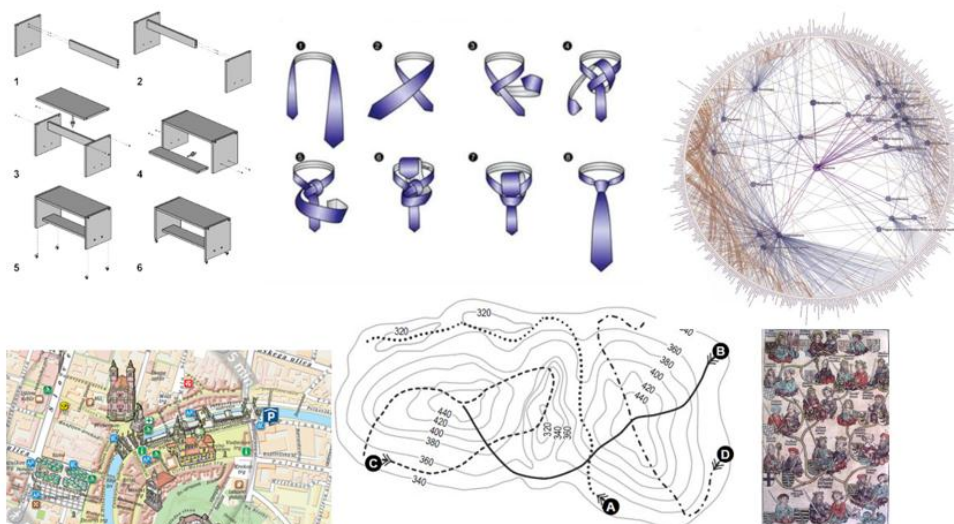
1.1. A témaválasztás indoklása

A fentebb olvasható idézet, mely a nagy holland matematikus, van der Waerden gondolatát fejezi ki a matematikai tudásról, akár a matematika-didaktika kiindulópontja is lehetne. Feltehetnénk a kérdést, vajon hány olyan tanuló volt, akik csupán „elhitték” a matematikát. A modern matematika-didaktikának (elmúlt 20 év) fő célkitűzése: a tanuló ne csak elhiggye, hanem értse is meg a matematikai igazságokat. Ennek az alapgondolatnak a mentén szükséges alakítanunk a matematikaoktatásban alkalmazott eszközöket, módszereket, stratégiákat.

A 20. század utolsó negyedében született Y és Z generációs fiatalok életében már megkerülhetetlen szerepet tölt be az információs és kommunikációs technika (mobiltelefon, internet használata...). Ebből következően fel kellett ismernünk annak a szükségességét, miszerint az IKT eszközöknek az oktatásban is fontos szerepet kell betölteniük. Napjainkban már szinte minden tárgy oktatása esetében van lehetőség (sőt ajánlott) IKT eszközök bevonására.

A magyarországi középfokú matematikaoktatásban a térgeometriának meglehetősen szűkös szerep jut (tantervekben foglaltak alapján), így nincs elég lehetőség arra, hogy a tanulók viszonylag szélesebb rálátással rendelkezzenek a térgeometriával kapcsolatban. Márpedig ez több okból is szükséges lenne: a mindennapi életünket a háromdimenziós térben éljük, és szükségszerűen, minden nap találkozunk tér-sík leképezésekkel. Néhány példa (1. ábra): asztal összeszerelési útmutató, nyakkendő kötésére vonatkozó instrukciók, Wikipédia szócikk kapcsolati rendszer, egy város nevezetességeinek megtalálása térkép alapján, megfelelő hegyi útvonal optimális megtalálásának döntéstámogatása,

családfa, pakolás táskába, autó csomagtartójába, lakás felújításkor szükséges anyagmennyiség számítása, becslése, tájékozódás egy bevásárlóközpontban stb. Ezen felül több száz olyan szakma van, melyek esetében szükséges alapkövetelmény egy megfelelő szintű térszemlélet.



1. ábra A mindennapi életben előforduló, térlátást igénylő problémák

Hazai (Országos kompetenciamérés) és nemzetközi felmérések (PISA) esetében is egyre több feladat mutat a téri képességek mérésének irányába. A PISA és kompetencia alapú feladatok közel egyharmada igényel megfelelő szintű térlátást (3D→2D leképezések értelmezése). Mindezekén túl a matematika érettségi II. része minden évben tartalmaz egy térgeometriai számítási feladatot, melyhez elengedhetetlen a hozzá tartozó síkbeli ábra értelmezése, azzal kapcsolatos mentális manipulatív műveletek végzése. Az említett mérési eljárások eredményei (<http://www.oktatas.hu/koznevelas/meresek/kompetencia-meres/eredmenyek>, http://www.oktatas.hu/koznevelas/meresek/pisa/pisa_2012_meres), további kutatások és pedagógusok konkrét tapasztalatai is azt mutatják, hogy a középiskolai tanulók térszemlélete nem mindig megfelelő, fejlesztésre szorul.

A problémamegoldó képesség fejlesztése nem kizárólagosan a matematika tárgy feladata, hanem más tárgyak keretein belül is egyre nagyobb szerepet kap

(kompetencia alapú oktatás, moduláris oktatás...). A matematikán belül a geometriának is egyik fő célkitűzése a tanulók problémamegoldó képességének a fejlesztése. Lehet ezt tenni például analógiák segítségével. Az analogikus gondolkodásmód kialakítására, fejlesztésére kiváló lehetőséget nyújthat például a geometriaórák alkalmával a sík-tér analógiák vizsgálata. Nemzetközi vizsgálatok (részletesebben a következő fejezetben) mutatják, hogy a középiskolai tanulók nagy része számos témakör esetében (ilyen a térgeometria is) nem szerzik meg az alkalmazható tudást, azaz nem képesek olyan problémákat megoldani, melyek megoldásához szükséges eszköztár már a birtokukban van, de az új, hétköznapi kontextusban ezt nem tudják alkalmazni. Másik, ide köthető probléma, hogy egy-egy témakör interdiszciplináris kapcsolatait nem látják át (erre nyújthat megoldást például a moduláris oktatás, ahol a témakört egyidejűleg minden oldalról körbejárják).

1.2. A dolgozat szerkezete

Az előző alfejezet alapján a dolgozat két fő kutatási kérdésre, illetve az ezekhez tartozó alkérdésekre keresi a választ a téri képességek fejlesztése és fejleszthetősége, illetve mérésére vonatkozóan:

Hatékonyabb térszemlélet-fejlesztést tesz-e lehetővé, ha a hagyományos fejlesztő eszközöket kiegészítjük modern IKT eszközöknek a matematika-oktatásba való bevonásával?

- Milyen előismeretekkel rendelkeznek a középiskolai tanulók az egyes évfolyamokon a térgeometriát illetően?
- Milyen tipikus gondolkodási, technikai hibákat vétenek a tanulók egy-egy térgeometriai feladat megoldása során?
- Milyen mértékű térszemlélet-fejlődést eredményezhet a GeoGebra dinamikus geometriai szoftver bevonása a matematikaoktatásba?
- Hogyan illeszthető be a mindennapi matematikaoktatásba a NAT-hoz és kerettantervekhez igazodva ez a fejlesztési módszer (eszköztényező, időtényező, pszichomotorikus tényezők)?

Megfelelően méri-e a tanulók téri képességeit egy új koncepción alapuló, dinamikus interaktív térszemlélet-fejlettséget mérő tesztsor?

- Lehetséges-e egy már meglévő statikus tesztsort adaptálni egy dinamikus interaktív környezetbe?
- Milyen típusú feladatok jeleníthetők meg *online környezetben*?
- Milyen módon zárhatjuk ki *egyéb képességek* (pl.: szövegértés) egyidejű mérését (ha egyáltalán lehetséges ezek kizárása)?
- A dinamikus adaptálásra alkalmas tesztsorok esetében a dinamikus feladat ugyanazt a részképességet méri-e, mint a neki megfelelő statikus feladat?
- Hogyan illeszkedik a térszemlélethez kapcsolódó képességrendszerhez az így létrehozott dinamikus mérő tesztsor?

A felvetett kérdések vizsgálata előtt, a 2. fejezetben a témához kapcsolódó szakirodalom áttekintése található, mely alapján elhelyezzük, és illesztjük a dolgozatban foglalt aktualitásokat.

A szakirodalom áttekintése után a 3. fejezetben leírjuk a kutatás pontos tervezetét, módszereit elméleti és gyakorlati szempontból. Ebben a fejezetben foglalmazzuk meg a kutatásra vonatkozó, fenti kérdések megválaszolására irányuló hipotéziseinket.

A 4. fejezetben a kutatás elindításához szükséges egyik előfeltétel megteremtéséről írunk. A fejezet tartalmazza azokat a technikai tudnivalókat, melyek alapján a dolgozat szerzője a fejlesztési célok és körülmények figyelembevételével alkalmassá tette a kívánt potenciális fejlesztő eszközt a kutatás lebonyolítására. A saját készítésű alarendszerekre felépített, több száz dinamikus, interaktív segédanyagot használtuk a fejlesztés során.

Az 5. fejezetben a nevelési-oktatási kísérletünket ismertetjük. A kísérlet megkezdése előtt fontosnak tartottuk kiemelni a jelen kutatással releváns NAT, és kerettantervi célokat, követelményeket, tartalmakat, valamint a PISA 2012

eredményeinek vizsgálatát a kutatási hipotéziseink tükrében. A feltett hipotéziseinkre a bemeneti, és kimeneti mérések közötti aktív tanári-tanulói tevékenységek, illetve a mérések eredményei alapján adunk választ.

A 6. fejezetben kísérletet teszünk egy új, kétdimenziós, non-immervív teszt-sor kidolgozására, bevezetésére. A használt technika lehetővé teszi az így kapott tételek 2D-immervív felhasználását is majd a megfelelő körülmények között (passzív 3D-s szoftveres támogatás adott, 3D-s szemüveg és madár vagy joystick használata szükséges az immervív felhasználáshoz).

A 7. fejezetben foglaljuk össze a 4-6. fejezetekben tárgyalt kutatómunka eredményeit, illetve a kapott eredmények függvényében megfogalmazunk további kutatási célokat.

2. Irodalmi előzmények

2.1. A téri képesség fogalma

Célunk a középiskolai tanulók téri képességeinek fejlesztése, vizsgálata. Az említett tevékenységeket csak akkor tudjuk precízen végrehajtani, ha tisztázuk, hogyan is értelmezzük a téri képesség fogalmát, fogalomrendszerét. A térszemlélet fogalma megjelenik többek közt a matematikai problémamegoldásban, intelligencia elméletekben, illetve a kompetencia alapú tanuláselméletekben is (a téri képességek megfelelő használata egy a kiemelt matematikai kompetenciák közül).

A téri képesség nem csupán a külső, materiális világ észlelését, arra való reakciókat jelenti, hanem nagyon fontos szerep tulajdonítható az érzékelési folyamat (vagy annak utóhatásaként felfogható emlékezet) során zajló mentális folyamatoknak egyaránt: „a képzeleti kép oly képzet, amelyben a lélek egy dolgot, mint jelenvalót szemlél ” [Spinoza, 1677]. Ronald Finke egy összefoglaló munkájában (1989) ezt gyakorlati vonatkozásban közelíti meg kognitív pszichológiai, pszichoterápiai, mentális gyakorlás (például autóvezetéshez, repülőgép vezetéshez, sporthoz, katonai művelethez köthető cselekvéssorozat képzeletben való gyakorlása) és perceptuális tanulás szempontjából. Perceptuális tanulás alatt „a tapasztalat (gyakorlás) következtében fellépő valódi és tartós változást, az információs környezetből való kiemelésének és feldolgozásának javuló képességét értjük.” [Gibson, 1979, 10. o.]. Ezen tapasztalatok, információk begyűjtésére különböző kognitív folyamatok lehetnek alkalmasak (kategorizáció, tárgyazonosítás, összehasonlítás...). Ezek alapján eljuthatunk egy kétfaktoros modellhez: felismerés (rekogníció), manipuláció [Piaget, 1967; Lewis, 1977; Roach, 1983]. A felismerés a látvány egészének befogadása és értelmezése, egy szemléleti kép konstruálása, míg a manipuláció a képzeleti munkát jelenti (testek transzformációja, mozgatása belső megjelenítéssel).

Gardner (1983) javaslata egy viszonylag új elmélet, mely Louis Thurstone (1938, 1958) intelligenciafaktor-modelljének továbbfejlesztése: a többszörös intelligencia elmélet, ahol intelligencián a felmerülő problémák megoldását, új problémák kitalálást és produktumok létrehozását érti. Nézete szerint nem létezik egységes intelligencia, hanem mindenki többféle, elkülönült intelligenciával rendelkezik:

- nyelvi intelligencia (pl.: költészet),
- logikai-matematikai intelligencia (tudományos gondolkodás képessége),
- téri intelligencia (pl.: tengerészek, festők, mérnökök, sebészek),
- zenei intelligencia,
- testi-kinesztetikus intelligencia (pl.: sportolók, táncosok),
- interperszonális intelligencia (mások szükségleteinek, érzelmeinek felismerése, pl.: tanárok),
- intraperszonális intelligencia (saját érzelmeink felismerése és kontrollálása).

A téri intelligencia használata is többféleképpen megmutatkozhat, funkciótól függően: „egy építész például esztétikailag használja, egy sebész, vagy géométer más funkcióval” [Séra, 2002, 15. o.].

Fontos megemlíteni Gardner 1993-ban megfogalmazott nézetét a téri intelligenciáról: „Ahogy azt ma látjuk, az intelligencia mindig a sajátos feladatokkal vagy tudásterületekkel összefüggésben fejeződik ki. Nincs ’tisztá’ téri intelligencia: ehelyett egy gyermek rejtvényfejtésében, útvonal megtalálásában, építőkockával való játékban vagy kosárlabda passzában kifejeződő téri intelligencia van. Hasonlóképpen a felnőtteknél sem mutatkoznak közvetlenül a téri képességek, hanem vannak többé-kevésbé jártas sakkozók vagy művészek vagy geometrikusok” [Gardner, 1993, 8. o.].

Thurstone óta elfogadott álláspont az intelligenciakutatók körében, hogy a téri intelligencia önálló faktort képez bármely komplex intelligencia-modellben [Guilford, 1964; Vernon, 1971; Maier, 1999], továbbá antropológiai és neuropszichológiai vizsgálatok, biológiai tények is alátámasztják [Liben és Downs, 1991; Thorndyke, 1981], hogy a téri intelligencia faktor jól elkülöníthető a többi intelligencia-összetevőtől (mondjuk a nyelvi, vagy logikai intelligenciától).

A rendszerbe való beillesztés után most nézzünk meg néhány téri képesség-meghatározást. Gardner szerint tehát a téri képesség „a téri világról való mentális modell kialakítására és e modell használatával való manőverezésre és tevékenységre való képesség”-et jelenti [Gardner, 1993, 9. o.]. A magyar nyelv értelmező szótára a következőképpen határozza meg a térszemléletet: „Az a lelki képesség, tulajdonság, amelynek birtokában az ember a tárgyakat alakjuknak, kiterjedésüknek, nagyságuknak, illetve máshoz való térbeli viszonyuknak megfelelően érzékeli” [1962, 640. o.].

A pedagógiában általában „a tárgyak kép alapján történő elképzelésére, rekonstrukciójára való térlátás”-i képességet értik rajta. [Drahos, 1988].

A pszichológiában megkülönböztetünk fenomenális (pszichológiai) és fizikai (geometriai) teret. A fenomenális tér (szemben a fizikai térrel) nem homogén (nem azonos tulajdonságú minden irányban), vannak kitüntetett szerepű irányai és pontjai (a szemléltető pozíciója). John Eliot (1987) szerint pszichometriai, fejlődési és kísérleti kutatások alapján a téri képesség: „a tárgyak egymáshoz viszonyított elhelyezkedéséről való tudomásunk és képességünk, készségünk, hogy ezt a tudást mentális és fizikai problémák megoldására felhasználjuk.” [Eliot, 1987, 173. o.]

David Lohman (1979, 126. o.) szerint a téri képesség az „absztrakt vizuális képek előállítására, fenntartására és manipulálására való képesség.” Carpenter és Just (1986, 221. o.) kutatási alapján John Carroll (1993, 304. o.) a Lohman-féle megközelítést kiegészítve kiemeli, hogy olyan individuális képességről

van szó, mely a „látótérben való keresésre, a tárgyak formájának, alakjának, téri helyének felfogására” való képesség.

A téri képességek (képességrendszerek) definiálása során nagyon körültekintőnek kell lenni, ugyanis a túl szűk, illetve a túl tág definiálás ellehetetleníti a téri feladatok, problémák megfelelő osztályozását, és nehezítheti a mérési, és fejlesztési folyamatokat.

Figyelembe véve (és összegezve) a fentebb tárgyalt megközelítéseket **téri képességen tehát a két- és háromdimenziós alakzatok észlelésének és az észlelt információ, tárgyak és viszonylatok megértésének és problémák megoldására való felhasználásának képességét értjük.** Ez a meghatározás megfelelő alapot nyújthat a térszemlélet vizsgálatához.

2.2. A téri képességek méréséről

A téri képességek vizsgálatának kezdete a 20. század elejére tehető, szoros összefüggésben áll a matematikai statisztika és a pszichológiai méréselmélet fejlődésével. Az értelmi képességek vizsgálatára irányuló első munka Alfred Binet és Theodore Simon nevéhez fűződik. 1905-ben publikálták intelligenciatesztjüket, melynek célja többek közt az intelligenciát, illetve a személyiséget meghatározó tényezők vizsgálata volt. A mérések szempontjából is érdekes lehet kiemelni Charles Spearman 1904-ben tett felvetését, miszerint mindenki rendelkezik egy g-intelligenciafaktorról (general intelligence factor), és egy s-intelligenciafaktorról (special intelligence factor). Horváth György 1991-es munkájában ismerteti az ezzel kapcsolatos további tudnivalókat.

Az első, kifejezetten a vizuális-téri képességek mérésére irányuló mérőeszköz Stanley Porteus nevéhez fűződik, aki 1915-ben publikált egy útvonal megkeresésével kapcsolatos feladatot vizsgálati célokból (útvessző-feladat). Ezzel párhuzamosan az I. Világháború alatt már használtak a katonák részére csoportos intelligencia-mérő eszközöket, melyeknek egyik részpróbája egy kockaszámolási feladat volt (például hány téglát tartalmaz az a téglarakás, melynek csak 3 oldalát látjuk).

Az ezt követő 20 évben nagy előrelépés történt olyan mérőeszközök kidolgozásában, melyek első sorban a téri képességek mérésére irányulnak. 1935-ben Koussy Angliában végzett vizsgálatában 28 tételes tesztet alkalmazott, és ez alapján identifikaált egy úgynevezett k-faktort, mely a Spearman-féle s-intelligenciafaktor részcsoportha és „tartalmazza a vizuális téri képzelet használatát és az azt elősegítő képességet”. Ez gyakorlatilag a téri percepciót (téri kapcsolatot felfogása, meghatározása) jelenti. Koussy következtetését több rákövetkező vizsgálat is alátámasztotta [Kurt Gottschaldt 1926; Macfarlene Smith, 1938].

A k-faktor a faktoranalitikus kutatásoknak [Guilford és Zimmermann 1948, Michael és mts. 1957, French és mts. 1963, Shepard és Feng 1972, Ekstrom és mts. 1976] köszönhetően kiegészült további faktorokkal, illetve lehetséges al-faktorokkal. Mark McGee (1979) például két, konzisztensen elkülöníthető téri képességet azonosított: vizualizációs és orientációs téri képességek. Ez szoros párhuzamba állítható Eliot rekogníciós és manipulációs téri képességeivel (a rekogníciót McGee orientációs faktorához, a manipulációt pedig a vizualizációhoz hasonlóan definiálhatjuk). A fentebb említett kutatások során azonosított téri képesség-összetevők tekintetében nem teljes az egyetértés. Lohman (1979) szerint ennek különböző okai lehetnek:

- az eltérő módszer eltérő faktorstruktúrához vezethet,
- bizonyos paraméterek torzíthatják az addig kialakult faktorstruktúrát (sebesség, pontosság, feladat-komplexitás),
- a kapott faktorok számát és természetét a különböző tételsorok összeállítása is befolyásolhatja.

A faktoranalitikus módszerek eme tulajdonságaiból adódó problémákat próbálta Lohman feloldani, amikor az addigi korrelációs vizsgálatokat (összesen 35) bizonyos eljárásokkal (hierarchikus faktormódszer, többdimenziós skálázás) újraértelmezte. Lohman 3 faktort és néhány alfaktort állapított meg: vizualizáció, orientáció, téri relációk, mint főbb faktorok, és például keresés,

vizuális emlékezet, mint alfaktorok. A vizualizáció a legáltalánosabb faktor, és mint ilyen, a leglassabb, legbonyolultabb tételekre vonatkoztathatjuk. A téri orientáció az a képesség, amely segítségével el tudjuk képzelni, hogy egy tárgy, vagy téri elrendezés milyen látványt nyújt a nézőpont-változtatást követően. A téri relációkat Lohman a geometriai transzformációk mentális végrehajtásához szükséges képességeként határozta meg.

Lohman eredményeire építve Carroll (1993) öt faktort állapított meg: vizualizáció, téri reláció, bezárási sebesség, zárási hajlékonyság, perceptuális sebesség. Az utolsó három faktor gyakorlatilag az észlelési és emlékezeti tényezők leírására szolgálhat. Eliot úgy hivatkozik az ilyen jellegű tesztekre, mint emlékezeti és felismerési tesztek (például: Thurstone Rejtett ábra tesztje, McQuarrie Másolás tesztje, Witkin Beágyazott forma tesztje), megkülönböztetve azokat a komplexebb vizualizációs-manipulációs téri képességeket mérő tesztsoroktól (Papírhajtogatás teszt, Felületátalakítás teszt, Stumpf-Fay kocka teszt, Olson-Eliot-Roach Téri dimenzionalitás tesztje).

Meg kell jegyeznünk a fentiek alapján tehát, hogy nincs egységes, mindenki által elfogadott faktor-modell, viszont minden említett erre irányuló törekvés közelebb visz minket a célhoz (a téri képesség komponenseinek korrekt identifikálása). Az 1990-es évek közepétől napjainkig folyó, erre irányuló kutatások [Norman, 1994; Maier, 1994 és 1998; Sorby, 1999; Séra, Kárpáti, Gulyás, 2000 és 2002, Alias, Black, Gray, 2002; Kwon, 2003; Lajoie, 2003; Potter és van der Merwe, 2001; Woolf, Romoser, Bergeron, Fisher, 2003, Wang, Chang, Li, 2006; Contero, 2006; Gorska és Sorby, 2008; Tóth, 2014] már többváltozós statisztikai eljárásokat használnak, melyek eltérő felépítésű modellekhez vezetnek, de nem rengetik meg alapjaiban az eddig tárgyalt megközelítéseket, sőt az eddigiekkel összhangban állnak. Fontos kiemelni a pszichometriai és intelligenciakutatásokon túl az ezzel kapcsolatos napjainkban is zajló neurológiai kutatásokat is [Motes, Malach, Kozhevnikov, 2008, 2014]. A téri feladatok, problémák megoldása során figyelemmel kísérték az agyi aktivitást is,

és ezek alapján neurális folyamatok szempontjából két jól elkülöníthető faktort azonosítottak: téri vizualizáció és objektum-vizualizáció. A téri-vizualizációnál vizsgálták a helymeghatározást, mozgást, transzformációkat és téri relációkat. Az objektum-vizualizáció faktorhoz a következő folyamatok tartozhatnak: objektum színe, anyaga, alakja, mérete. Ez az eredmény párhuzamba állítható a fentebb tárgyalt faktor-modellekkel, ugyanis az objektum-vizualizáció például a perceptuális, rekogníciós képességekre utalhat, a téri-vizualizációs képesség pedig gyakorlatilag megegyezik az eddigi modellekben szereplő főfaktoral.

A tesztelméletből ismeretes, hogy fontos tisztában lennünk a használt teszt különböző "jóság"-mutatóival, melyek alapján eldönthető, hogy a teszt valóban a megfelelő, mérni kívánt képességeket mérte-e (validitás), és azt helyesen tette, azaz megismétlése során várhatóan hasonló eredmények születnek (reliabilitás).

Jelenleg (2015) valamivel több, mint 400 teszt áll rendelkezésünkre [Eliot és Smith, 1983; Séra, Kárpáti, Gulyás, 2001]. Az 1. táblázat a téri képességek mérésére irányuló ismertebb tesztek leírását, és azokhoz tartozó (nagy mintás mérések során kapott) megbízhatósági mutatókat tartalmazza [Ekstrom és munkatársai nyomán, 1990; Roach, 1993]:

Teszt	Leírás	Kihez köthető	Vizsgált minta korosztálya (év)	Reliabilitási együttható (Cronbach-alfa)
Rejtett forma	A feladat eldönteni, hogy 5 megadott geometriai alakzat közül melyik van elrejtve egy komplex ábrában.	Gottschaldt, Thurstone	17-20	0,83
Másolás	Minden tétel egy négyvonalas geometriai ábra és egy pontokból álló négyzetháló.	MacQuarrie, Thurstone	19-	0,84

	A feladat az ábrát átrajzolni a pontokra.			
Kocka összehasonlítás (SDT ¹ egy változata)	El kell dönteni, hogy azonos vagy különböző kockák vannak feltüntetve a rajzon.	Thurstone	19-	0,80
Forma összeillesztés	El kell dönteni, hogy öt részből melyek illeszthetők össze egy előre megadott formára.	Ekstrom	18-22	0,81
Kártyaforogatás	Mindegyik ábra egy szabálytalan alakzat. Meg kell állapítani, hogy hat egyéb, elforgatott rajzból melyek azonosak.	Thurstone	17-19	0,87
Papírhajtogatás	Papírlap egymás után következő hajtogatások sorozata. Az utolsó hajtás átlyukasztott helyet mutat, és ez alapján kell megállapítani a lyuk elhelyezkedését a következő hajtást kövően.	Thurstone	18-23	0,79
Felületkialakítás (SDT)	Milyen test kiterített palástja látható a rajzon.	Thurstone	18-23	0,91
Mentális forgatás (MRT)	Tíz kockából álló térbeli objektum különböző szögben elforgatott változataiból ki kell választani egy megadott minta képzeletbeli elforgatásával azonos mintákat.	Vandenberg, Kuse	14-30	0,88

¹ SDT: Surface Developing Test, axonometrikus kép párosítása a testhez tartozó megfelelő hálóval.

Mentális vágás (MCT)	Testet metszve egy síkkal meg kell állapítani a síkmet-szet-alakzatot.	College Entrance Examination Board (1939)	15-30	0,81
MRT Eliot-Price	MRT kizárólagosan horizontális és vertikális forgatásra korlátozva.	Eliot, Price	15-23	0,87
Perspektívák teszt	Összetekert drótot tartalmazó átlátszó plastik kockák kép-párjairól eldöntendő, hogy milyen perspektívának felel-nek meg.	Stumpf-Fay	18-23	0,80

1. táblázat Ismertebb papír-ceruza alapú tér-tesztek reliabilitás-mutatói (forrás: Kár-páti-Gulyás-Séra: A térszemlélet, 30. o.)

A 0,79 és 0,91 értékek kielégítőnek mondhatók az adott korosztályra nézve. Ezek az értékek szoros kapcsolatban állnak bizonyos előre jelző érvényességi vizsgálatokkal is [Holzinger és Swineford 1946, Smith 1946 és 1964, Ghiselli 1973, McGee 1979]. A vizsgálatok szerint a téri tesztek alkalmasak például geometriai, matematikai, kémiai, műszaki, illetve művészeti ágon történő előmenetek sikerességének jelzésére. Haanstra 1994-ben ismertet egy Flanagan és munkatársai által végzett longitudinális vizsgálatot, mely a (reliábilis és validitált) téri tesztek mérési képességeinek tulajdonságairól szól. Eszerint a jó téri képességű fiúk nagyobb valószínűséggel válnak építésszé, mérnökké, vagy orvossá. Nőknél az említett tulajdonság matematikatanári, gyógytornászi vagy képzőművész pályák előrejelzője lehet. A tesztben részt vevőket később (2, 5, 15 év elteltével) felkeresték, és a későbbi tanulmányok, képzettség és foglalkozás szempontjából valóban jó előrejelzést adtak a téri tesztek eredményei. Shea, Lubinski és Benbow 2001-ben publikált elemzéseiből kiderül: „Az intellektuálisan tehetséges serdülők jobb téri, mint verbális képességekkel valószínűbben találhatók meg a mérnöki és számítógép-tudomány-matematika területén, míg azok, akik fordított képességmintával rendelkeznek, hajlamosak,

hogy a társadalomtudományok, a biológia, az orvostudomány és a jog felé vonzódnak.”

Összegezve és kiegészítve a fentebb írtakat tehát választ kaptunk a térszemlélet mérésével kapcsolatos fontosabb kérdéseire:

- **Miért kell mérnünk a téri képességek fejlettségét?**

- képet kapjunk a tanulóink aktuális állapotáról, ezzel elősegítve a nevelési-oktatási folyamatokat (motivációs bázis kialakítása, hiányosságok pótlása...)
- matematikai teljesítmény előrejelzése (Julia Sherman szerint a téri képesség volt az egyik, meghatározó tényező, mely 9. osztályos korban szignifikánsan jósolta az 1-3 évvel későbbi matematikai teljesítményt)
- életpálya előrejelzése
- tehetséggondozás (tehetségek identifikálása, tehetségkeresési eljárások komponense lehet)
- hátrányos helyzetű tanulók nevelési-oktatási folyamatának elősegítése (serdülők továbbtanulási irányítása)
- kiemelt kutatási terület a perceptuális folyamatok elégtelen működésének vizsgálata céljából (diszlexia, diszgráfia és a diszkalkulia azonosítása)

- **Mit kell mérnünk a téri képességek kapcsán?**

- a több, jelenleg használatos faktormodellek közül érdemes kevés főfaktor-számmal (2 vagy 3 főfaktor) rendelkező modellt választani, ellenkező esetben a mérni kívánt metszet túl tág
- a téri képesség, mint kompetencia által meghatározott területeket (ezeket tudjuk majd transzferálni a faktormodellbe alkomponensekként, részképességekként)
 - Térábrázolási rendszerek ismerete (síkban)
 - Térbeli helyzet érzékeltetése (síkban)

- Térérzékelés, térészlelés
- Téralakítás-tervezés, konstruálás (síkban és térben)
- Térbeli tájékozódás
- Tér rekonstruálása
- Az elemek elrendezéséből adódó térérzetek ábrázolása (pl.: egyensúly, ritmus)
- Térbeli formák ábrázolása képzeletből és látvány alapján, síkban és térben
- Térbeli struktúrák, szerkezeti felépítések értelmezése: metszet, makett, modell készítése
- Tér redukálása, absztrahálása
- Időben változó térélmények ábrázolása (mozgás)
- **Milyen módszerekkel mérhetjük a téri képesség fejlettségét?**
 - hagyományos módszerek:
 - papír-ceruza alapú tesztek
 - Perspektivikus ábrázolás
 - Gipszöntvény másolás
 - Alaprajz, metszet készítése
 - modern módszerek
 - 2 dimenziós non-immerzív módszerek (dinamikus, interaktív, online tértesztek hagyományos hardver-eszközökkel támogatva)
 - 2 dimenziós immerzív módszerek (dinamikus, interaktív, online tértesztek monitoron 3D-s szemüveggel, egér helyett madárral)
 - 3 dimenziós immerzív módszerek (virtuális valóság sisak, kesztyű, például Harvard Mental Imagery Lab: SAT és PPT tesztek)

A modern módszerek esetében (2004-től számítandó) jelenleg nincs még standardizált tesztsor, illetve hozzá tartozó kidolgozott mérési metódus, így az

5. fejezetben tárgyalt oktatási kísérletünket is egy hagyományos, standardizált papír-ceruza alapú mérésre fogjuk alapozni.

2.3. A téri képességek fejlődése és fejleszthetősége

Kifejezetten a térészlelés fejlődésével jelentősebb mértékben csupán az 1960-as évektől kezdtek foglalkozni, aminek oka a pszichológia irányának változása, a kognitív pszichológia kialakulása [Séra, Kárpáti, Gulyás, 2002]. Megerősödik tehát az igény, hogy az emberi megismerő folyamatokról részletesebb képet kapjunk az eddig ismertnél.

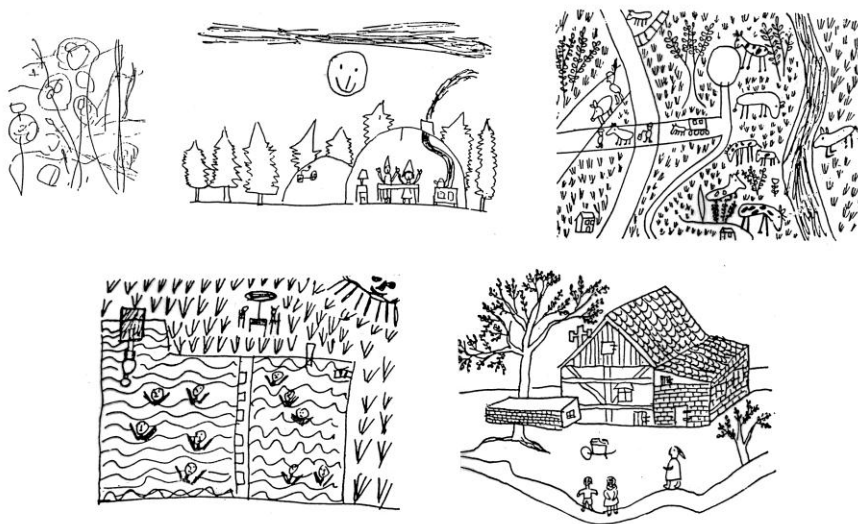
Téri képességek fejlődését tekintve (mint bármilyen képesség esetén) meg kell különböztetnünk két típust: a spontán, természetes fizikai/szellemi fejlődéssel járó fejlődés és a célirányos, iskolai színterű fejlődési lehetőség. A spontán fejlődés okai lehetnek többek közt a társadalmi konvenciók, illetve túlélési stratégiák elsajátítása (Kárpáti, 2013). A spontán zajló téri képesség fejlődési modellje összefüggésben állhat a Piaget és Inhelder (1956, 1960, 1971) felfogása szerinti általános értelmi fejlődési modellel (mint annak egy speciális megközelítése). A 2. táblázat mutatja a Piaget-féle négy fejlődési szakaszt, és a hozzájuk tartozó téri-szerveződési szinteket:

Életkor	Általános értelmi fejlődés	A téri szerveződés szintjei
0-2 év	érzékszervi-mozgásos szakasz	érzékszervi-mozgásos tér
2-7 év	műveletek előtti gondolkodás szintje	művelet előtti tér
7-12 év	konkrét gondolati műveletek szintje	konkrét műveleti tér
12- év	formális gondolati műveletek szintje	formális műveleti tér

2. táblázat Piaget modellje a téri megismerés fejlődéséről az általános értelmi fejlődéssel összefüggésben

Mélyebb összefüggésben Eliot (1987) nyomán írja Séra (2002, 40. o.): „A téri gondolkodást a téri relációk három osztálya alakítja: topológiai, projektív

és euklideszi viszonyok. A háromféle téri tartalmat eltérő tulajdonságok jellemzik. A modellben a képzelet- a belső mentális kép, amely viszonylag későn jelenik meg az interiorizált utánzás termékeként- a téri reprezentáció lényeges összetevője. A képzeleti tér kialakulását megelőzi az észleleti tér kialakulása. A fejlődés a szerveződés szintjében, a téri relációk típusában, a reprezentációs módban (mozgásos, ikonikus és szimbolikus), a referencia rendszerben (egocentrikus, rögzített és koordinált) és a topgrafikus reprezentációban (mentális térkép) párhuzamosan alakul.” Ezt tekinthetjük a különböző megközelítések (például a Brunner-féle reprezentációs elmélet) összehangolásának is, feltételezve az életkori szakaszolások bizonyos mértékű flexibilis kezelését (elképzelhető, hogy egy várhatóan 15-16 éves korban kialakuló bizonyos téri képességkomponens csak késve, 18-19 éves korban jelentkezik, vagy egyáltalán nem is fog kialakulni egy emberben). A fentebb idézett összefüggéseket jól prezentálja a gyakorlatban, ha például megtekintünk, elemzünk különböző életkorban rajzolt gyermekrajzokat (2. ábra). Teljes bizonyossággal kivehetők rajta a kisgyermek korban használt topológikus terek (2. ábra 2. rajza), vagy éppenséggel a serdülőkorban kialakuló perspektíva megjelenése (2. ábra 5. rajza).



2. ábra Különböző életkorban készült gyermekrajzok (forrás: Kárpáti, A.: Bevezetés a gyermekrajz fejlődésének vizsgálatába, előadás, 2005)

A szenzomotoros (érzékszervi mozgásos) szakaszban a gyermek tárgysterét a formák belső tulajdonságai uralják:

- közelség,
- elkülönültség,
- szomszédosság,
- határolás,
- befogás,
- zártság,
- folyamatosság.

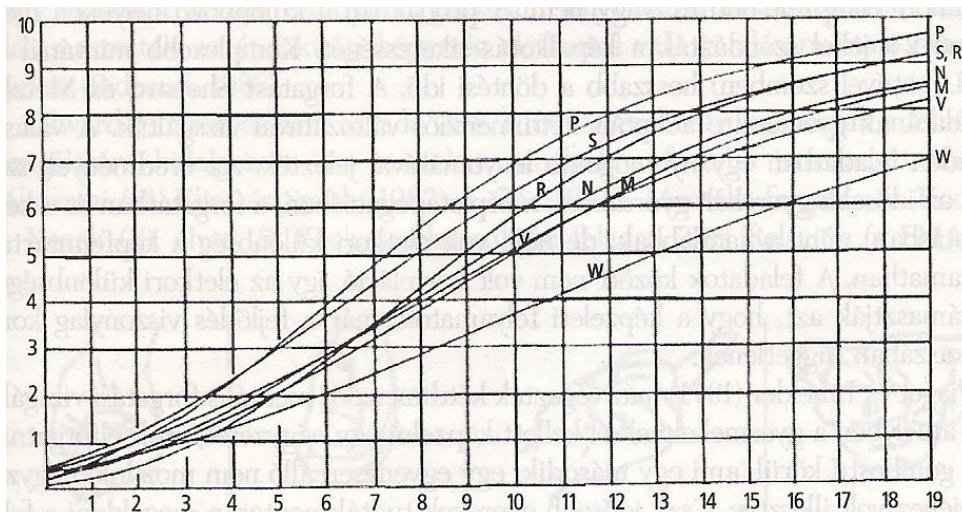
Mivel ez a típusú észlelés nélkülözi a mértéket, perspektívát, így beszélhetünk ebben a szakaszban topologikus térészlelésről. Piaget szerint a kétéves kor környékére tehető a tárgyállandóság (a tárgyak tőlünk függetlenül léteznek, a tárgy helye független a megközelítési iránytól), illetve az érzékszervek összehangolódása következtében az információk összehangolása (alakkonstancia, nagyságkonstancia).

Kétéves kor fölött a gyermek jelét adja annak, hogy képes belső reprezentációkat kialakítani a térről (ezek még nem szimbolikus reprezentációk). A térről szerzett gyakorlati tudása révén kisebb, ismertebb területen már képes tájékozódni.

Hétéves kor környékén a gyermekek többsége konkrét észlelési tapasztalatok alapján alakítja a térismeretét. Tisztában vannak a topológiai viszonyokkal, de a saját cselekvésüket nem tudják még elképzelni más nézőpontból. Az így induló 3. szakaszban a gyermek folyamatosan szerzi meg a konkrét műveleti és a mentális manipulációhoz szükséges készségeket. Tizenkét éves koráig fokozatosan eljut a tárgyak sokféle nézetből való elvonatkoztatásához (projektív tér és euklideszi-tér párhuzamos fejlődése). Kisiskolás korban, a különböző tárgyhelyzetekhez tartozó nézőpontváltásokkal párhuzamosan alakul az irányítottság, irányítási képesség is [Herendiné-Kónya, 2007].

Tizenkét éves kor környékén kezd kialakulni a piaget-i euklideszi-metrikus tér egyik fontos alapköve, a vízszintes és függőleges fogalmak megfelelő alkalmazása. A döntött poharas kísérlet- egy henger alakú pohár asztalra helyezését követően megdöntjük, és a víz helyzetét kell berajzolni- során a víz szintjét a gyerekek gyakran a pohár tengelyeinek alapján ítélik meg (a kutatásokban ellenőrizték a megfelelő szavak megértésének szintjét is). A kísérletben a jobban teljesítők aránya kis mértékben növekszik hétéves kortól, majd 11-13 éves korban gyorsabb ütemű a növekedés [Piaget és Inhelder 1956; Hoben és Lohaus, 1993; Mag, 1995]. 11-13 éves kor környékén tehát kialakul az euklideszi vonatkoztatási rendszer alkalmazásának képessége, mely alapot fog nyújtani a később (15-16 év) kialakuló, euklideszi metrika és a referenciarendszer együttes koordinálásához (például a perspektivikus látásmód, ábrázolásmód kialakulásának lehetősége).

Az 1. diagram szemlélteti a kognitív képességek spontán fejlődési ütemét az életkor előrehaladtával [Thurstone 1955; Carroll 1993]. A gyerekek egyre ügyesebben oldanak meg különböző típusú (szóbeli, térbeli, emlékezeti) feladatokat. Az észlelési sebesség például már egy felnőtt teljesítményének 80%-a 12 éves gyerek esetén, a verbális képesség viszont 60% környékén mozog (ezért is fontos a tesztek úgy összeállítani, hogy a teszt szövege jól érthető, egyértelmű és kizárólag ismert kifejezéseket tartalmazzon az adott életkorra nézve, kiküszöbölve ezzel az esetleges instrukció-értelmezési problémákból adódó helytelen következtetéseket).



1. diagram Thurstone elsődleges mentális képesség tesztjeinek fejlődési görbéi (Carroll, 1993, 665. o. nyomán). P: észlelési sebesség, S: térbeli, N: számolási, M: emlékezet, V: szóbeli, W: beszédflowékonyság.

Az életkori különbségek vizsgálata során a kognitív fejlettségen túl egyéb fontos befolyásoló tényezők is hatással vannak a térlátás spontán alakulására: nem, általános intelligencia, mentális képzeleti komponens, tapasztalatok.

A vizuális mentális képzelet komponens vizsgálata során kimutatható, hogy a gyerekek jobban támaszkodnak a képzeleteikre, mint a felnőttek. Stephen Kosslyn és munkatársai (1990) a Piaget-féle szakaszok mindegyikéből vizsgálták gyerekek képalkotási, képfenntartási, képletapogatási és forgatási képességeit. Az eredmények azt mutatták, hogy az említett képességek közül csupán a képfenntartási folyamatban nem volt életkori különbség, a többinél viszont befolyásoló tényező az életkor (gyorsabb a megoldás például). Ez alátámasztja azt a megállapítást, hogy a képzeleti folyamatok már a Piaget-féle második szakaszban függetlenek.

Érdemes még kiemelni életkori sajátosságok szempontjából a mentális forgatással kapcsolatos eredményeket. Piaget és Inhelder (1971); Marmor (1975, 1977); Kerr, Corbit, Jurkovic (1980); Dean (1983); Kail (1985) és Dósa (2000) eredményei alátámasztják a mentális átalakítási képesség életkorral való javulásának tényét (ez elsősorban a gyorsaságra értendő).

Az 1970-es évek elejétől a pszichológusok kutatják a nemi különbségekből adódó különböző képesség-fejlődéseket. Kimura 1999-ben írt összefoglalója alapján ezek a verbális, matematikai, mozgási, észlelési, téri teljesítményekre kiterjedő kutatások nem csupán a nemek közötti különbségek, hanem az azonos neműek közötti egyéni különbségek feltárását is szolgálja.

Az elemzések azt mutatják, hogy a kétdimenziós minták feldolgozásában a nemek közötti különbségek elhanyagolhatóak, viszont a háromdimenziós manipulációt igénylő (például téri tájékozódás), és mozgást tartalmazó problémák esetében (nagyobb távolságra lévő objektumok méretének, sebességének meghatározása, becslése, például gépjármű vezetése esetén) a férfiak előnye jelentős [Voyer, 1995]. Ez az előny Johnson és Meade (1987) kutatásai alapján már 10 éves korban érzékelhető, és egészen felnőttkorig tart [Law, 1993]. Beanninger és Newcombe (1989) szerint gyakorlás hatására a képességek javulnak, de a nemek közötti különbség mértéke nem csökken jelentősen. Ezt hazai kutatások is alátámasztják [Németh, Hoffmann, 2006, 2007].

A téri képességek eddigiekben tárgyalt spontán fejlődési menetét fontos ismernünk, hiszen ez határozza meg számunkra a fejlesztési lehetőségek bázisrendszerét (stratégiák, módszerek, eszközök) az adott nevelési-oktatási környezetben, és alapot nyújt az eredményesség vizsgálatának lehetőségére egyaránt.

Az előző alfejezetekben (2.1., 2.2.) láthattuk, hogy a térszemlélet komplex képességcsoport, melynek fejlesztése kizárólagosan célirányosan és a részképességekre való koncentrációval valósítható meg. Séra (2002, 81. o.) írja: „[...] a legtöbb vizuális nevelési program nem éri el a megfelelő eredményt – elsősorban azért, mert nem fókuszál, a képességnyalábot egyszerre akarja fejleszteni.”

A tudatos, célirányos fejlesztést természetesen az életkori, nemi különbségek (és esetleg egyéb egyedi tényezők) sajátosságainak figyelembevételével kell tennünk, mely során hagyományos és modern eszközök széles tárháza áll

rendelkezésünkre. A hagyományos eszközök közé soroljuk például a már óvodában és kisiskolás korban is használatos építőkockákat, formaillesztőket, gyurmát, origamit, Lego-t, illetve a későbbi időszakban a mértani testek tanulmányozása, modellezése, testek és hálók azonosítása, a valóság szemléltetése valóságközeli feladatokon keresztül, térbeli transzformációk vizsgálata stb. jelenti a hagyományos fejlesztési utat. Modern eszközök körébe tartoznak a számítógéppel támogatott oktatási környezetek. Ilyen lehet például egy szoftver használata (Active Inspire, DGS, részletesebben 2.4 fejezetben), multimédiás környezetbe adaptált tananyagok (feladatok, szemléltető ábrák), e-learning, virtual mentoring stb. Katona (2012) összefoglalta a számítógép lehetséges szerepeit a tanulási-tanítási folyamat során:

- a tanár előkészítő munkáját segítő eszköz
 - pontos és dinamikus szerkesztőeszköz
 - dinamikus ábrakészítő eszköz
 - prezentáció készítéséhez használható eszköz
 - feladatgenerátor
 - adatbázis, információforrás
 - oktatásmenedzser
- a tanár órai munkáját segítő eszköz
 - dinamikus modellező, kísérletező, szimulációs rendszer szemléltetéshez, és kísérletezéshez
 - pontos és dinamikus szerkesztőeszköz
 - multimédiás tudásközvetítő, ismeretközlő, vetítőeszköz
 - adatbázis, információforrás
 - a számonkérés eszköze
- a tanuló órai munkáját segítő eszköz
 - dinamikus modellező, kísérletező, szimulációs rendszer
 - problémamegoldási segédeszköz
 - adatbázis, információforrás
 - pontos és dinamikus szerkesztőeszköz

- az önálló tanulást segítő eszköz:
 - multimédiás tudásközvetítő, ismeretközlő eszköz
 - problémamegoldási segédeszköz
 - dinamikus modellező, kísérletező, szimulációs rendszer
 - pontos és dinamikus szerkesztőeszköz
 - tudásszintmérő eszköz
 - adatbázis, információ forrás
 - tanulásmenedzser

Természetesen az optimális fejlesztési irány a két lehetőség egymást támogató ötvözése. A fejlesztés nem csupán a matematikai tanórák feladata, a képességrendszer interdiszciplináris jellege miatt más tanórák keretei között is fejlesztésre kerülhet a térszemlélet (néhány példa: fizika: csillagászat, kémia: atomok, molekulák szerkezeti felépítése, ezekből adódó tulajdonságok vizsgálata, földrajz: térképismeret, történelem: harctéri viszonyok elemzése a terület topográfiai sajátosságai szempontjából, testnevelés és sportjátékok). Ezeken kívül „a téri gondolkodás szerepe a vizuális művészetekben magától értetődő” [Gardner, 1983].

Az eszközök alkalmazásának hatékonysága a fejlesztés során függ az alkalmazott módszerektől/stratégiáktól is: a lehető legmegfelelőbb helyen és időben- alkalmazkodva az egyéni életkori és egyéb különbségekhez (differenciáltan)- alkalmazzuk tudatosan, célirányosan, koncentráltan a megfelelő eszközt. Ezt természetesen nem egyszerű megvalósítani, a továbbiakban nézzünk néhány erre vonatkozó kutatási eredményt.

A gyakorlás (és ezzel egyidejűleg a tapasztalatok bővítése) fontos alapkőve a képességek fejlesztésének (mint az élet minden területén). McGee megállapítása (1979) antropológiai adatokat értékelve a következő: „ha a tapasztalatai tényezők jelentősek a kiemelkedő téri képességek kialakulásában, elvárhatjuk, hogy a gyakorlás megfelelő téren javulást eredményez a téri vizualizáció és az

orientáció tesztjeinek teljesítményében”. Lean kutatási eredményeire támaszkodva 1981-ben megerősíti McGee álláspontját: „A bizonyítékok [...] jelzik, hogy ezek a változatos téri készségek megfelelő tapasztalatokkal gyakorolhatóak”. Eliot fogalmazza meg 1987-ben, hogy nem világos az addigiak alapján, hogy pontosan milyen típusú gyakorlás lenne hatékony, vagy hogy átvihető-e az egyik feladat gyakorlása egy másik típusú feladatra. Ezek alapján igyekszik sürgetni az olyan jellegű kutatásokat, melyek feltárhatják (mind a gyermekek, mind a felnőttek számára egyaránt) a téri képességek fejlesztésére szolgáló leghatékonyabb módszereket.

A 3. táblázatban láthatunk néhány pedagógiai kutatást a téri-vizuális képesség fejleszthetőségre vonatkozóan (időrendi sorrendben), melyek a fejlesztő tevékenységek pozitív hatásairól számolnak be. A tevékenységek alapján képet kaphatunk a különböző gyakorlási irányokról, módszerekről.

Ki(k)hez fűződik	Korcsoport	Tevékenység
Faubian és mts., 1942	egyetemisták	Műszaki rajz gyakorlása a kötelező kereteken túl.
E. H. Brinkmann, 1966	8. osztály	Matematika órák közé iktatott 3 hetes öninstrukciós program. Geometriai idomok megkülönböztetésének, minták hajtogatásának, kivágott idomok mintáival való manipulációs gyakorlása.
Vandenberg, 1975	6. osztály	Modellépítési tréning.
Connor, Shackman és Serbin, 1978	6 évesek	Beágyazott idomokkal való gyakorlás.
McColsky, 1979	13 évesek	14 foglalkozásos modellezési tanfolyam.
Rowe, 1982	7. osztály	20 órás (heti 1 különóra) gyakorlás, melynek során két-, illetve háromdimenziós gondolkodást és képzeleti manipulációt igénylő feladatok gyakorlása történt.
Stericker és LeVesconte, 1982	egyetemisták	Beágyazott forma tesztel, és mentális forgatási tesztekkel, illetve kézzel forgatható modellekkel való gyakorlás.
Gardner, 1983	általános iskola	Projekt-módszer bevezetése, használata a vizuális alkotó képesség vizsgálatára.
Lord, 1985	alsóéves egyetemisták	14 héten keresztül heti 30 perces gyakorlás, melyek során többnyire térbeli objektumok mentális metszése, és a metszet lerajzolása volt a cél.
Gagnon, 1985	általános és középiskolások	A videojátékok hatásainak vizsgálata a téri-vizualizációs képességek fejlődésében.
Lajoie, 1986	egyetemisták	Ortografikus rajzolás számítógéppel való támogatása.

Kárpáti, 1992	7-12 évesek	Leonardo program. Öt alternatív rajztanterv ki-próbálása.
Mayer és Sims, 1994	főiskolások	Multimédiás tanulási kísérlet. A hallgatók egy-idejűleg kaptak számítógépes animációt és szóbeli leírást az adott tananyagokhoz.
Kovács és Hoffmann, 1997	egyetemisták	Saját készítésű szoftverrel a Monge-projekció szemléltetése.
Salat, 2001	12-13 évesek	4 hónapon keresztül, heti 3 óra. Tükrözés, konstrukció, hajtogatás, lebontás, forgatás, transláció, darabolás.
Herendiné-Kónya, 2007	kisiskolások	10 hetes kurzus beiktatása, alkalmazkodva a matematika tantervhez.
Casey és mtsi., 2008	4-6 évesek	Eligazodás gyakorlása háztömböket tartalmazó térkép segítségével.
Nagy-Kondor, 2010	mérnökhallgatók	DGS (dinamikus geometriai rendszer) bevonása az oktatásba.
Dominiak és Wienmeyer, 2015	középiskolások	Sportjátékok és tánc tréning beiktatása az oktatásba.

3. táblázat Téri-vizuális képesség fejleszthetőségére vonatkozó pedagógiai kutatások

A pedagógiai kísérleteken túl számos pszichológiai-laboratóriumi vizsgálat is ismert. A vizsgálatok a téri problémák megoldása során használatos stratégiai eljárásokra irányultak. Kyllonen, Lohman és Slow 1984-ben végzett vizsgálataik alapján három különböző megoldási stratégiát vizsgáltak:

- elemző és lépésenkénti összehasonlítási folyamatokra összpontosító stratégia,
- egészes stratégia párhuzamos összehasonlítási folyamatok hangsúlyával,
- visszajelzés alkalmazása (a probléma bemutatásával és a pontos megoldások megadásával).

Kísérletükkel igazolták, hogy a téri-képességek fejlettségének szintje meghatározza a téri problémák megoldása során alkalmazott stratégiákat, sőt a tanulásukat is eltérő módon befolyásolják.

Ekstrom, French, Harman és Dermen 1990-ben hasonló eredményre jutottak a vizsgálataik során. Három csoport három különböző felkészítést kapott:

- vizualizációs és verbális felkészítés (az elemző stratégiának megfelelő feltételek biztosítása),
- csak vizualizációs felkészítés (némafilm, egészleges stratégia alkalmazása),
- a csoport tagjai megkaphatták a megoldásokat, és összehasonlíthatták válaszukat a pontos modellel.

Megállapították, hogy akik alacsony verbális és téri-képességekkel rendelkeznek, azok esetében nagy segítség volt a visszajelzés. Akik az előzetes mérések alapján mind verbális, mind téri képesség tekintetében magas pontszámot értek el, képesek voltak a stratégiájukat a probléma igényeinek megfelelően változtatni. Az elemző oktatási feltételben jól dolgoztak az alacsony téri és magas verbális képességű személyek. Összefoglalva tehát a különböző téri képességszinttel rendelkezők esetében különböző stratégiák alkalmazása a célravezető.

Fontos megemlíteni a verbális és vizuális fejlesztés kapcsán Allan Paivio kettős kódolási elméletét: „Az értelmes tanulás során vonatkoztatási kapcsolatok alakulnak ki a vizuális és verbális információk párhuzamosan kiépülő leképződései között. A vonatkoztatási kapcsolatok teszik lehetővé a két rendszer közötti átjárhatóságot. A tanulást követően a több ötletes megoldást felvető magas téri képességűek könnyebben tudnak kiépíteni mentális kapcsolatokat a vizuális és verbális alapú reprezentációk között, amíg ez nem jellemzi a téri tesztekben alacsony pontot elérőket, akiknek nagyobb erőfeszítést kell tenni a vizuális reprezentáció kiépítéséhez”. [Clark és Paivio, 1991, 64. o.]

Lohman és Nichols 1990-ben végzett forgatási és szintézis feladatokkal kapcsolatos vizsgálatokat. Véleményük szerint a téri képességek nem állandó, vagy kismértékben változó személyiségjegyek, hanem gyakorlás és tapasztalatszerzés útján fejlődő képesség. A fejlődés kétféleképpen mehet végbe:

- tényszerű ismeretek elsajátításán, majd átszerveződésén keresztül (deklaratív tudás, emlékezet),
- a tevékenység elvégzéséhez szükséges új tudás, új készségek fejlődnek ki, vagy a meglévők finomodnak (procedurális tanulás).

Véleményük szerint gyakorlás hatására a nemek közötti különbségek szignifikánsan csökkenthetők. A mentális forgatás gyakorlása során összességében nem kaptak kielégítő eredményeket, ez alapján azt fogalmazták meg, hogy a geometriai transzformációk elvégzéséhez szükséges kognitív képességek gyermekkorban alakulnak ki, és ez is eredményezheti a belső reprezentációk kialakításában mutatkozó különbségeket (jó és gyengébb tanulók között). Kifejezetten a gyengébb téri képességű tanulókra vonatkozóan-akiknél gyermekkorban nem alakultak ki megfelelően ezek a képességek- megállapították, hogy a téri feladatok gyakorlása hasznosnak bizonyult: „a téri kognitív képességek fejleszthetőek azoknál a személyeknél, akik nem eléggé gyakorlottak egy adott készség teljesítésében vagy a tárgyak belső reprezentációinak átalakításában”. A jobb téri képességekkel rendelkezők esetében a gyakorlás csupán a feladatok gyorsabb elvégzését tette lehetővé a tanulók számára. Összességében megállapították, hogy „a legnagyobb változás a téri képességekben nem az adott képesség gyakorlásával, hanem olyan tapasztalatokkal érhető el, amelyek gazdagabb deklaratív tudásalap fokozatos kialakítását teszik lehetővé”.

Tehát a tanár által megfelelően választott stratégiák, módszerek, eszközök (életkor, nem, tapasztalat szerinti) differenciált alkalmazása nyújtana az optimális hatékonysági szint elérését a fejlesztési eljárás során.

2.4. Számítógéppel támogatott matematikaoktatás

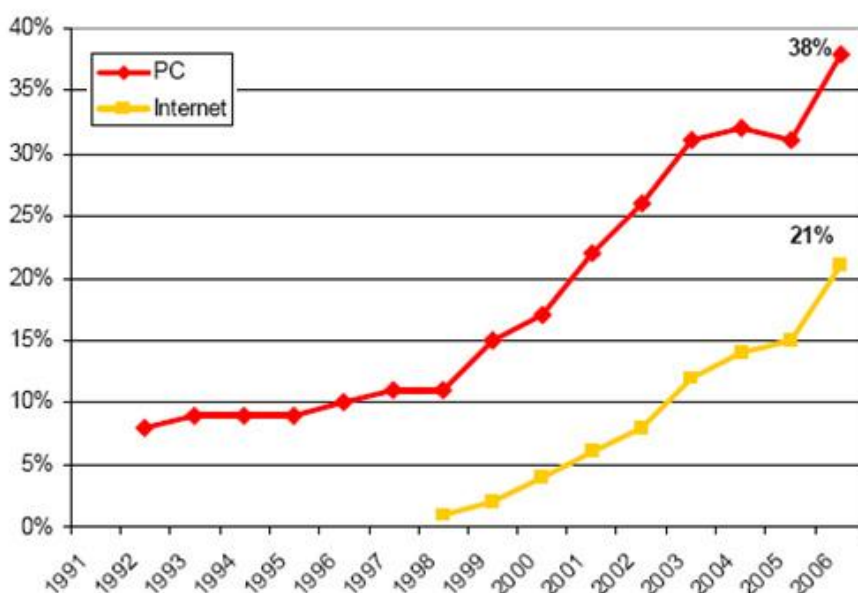
Az előző alfejezetben láthattunk néhány példát a modern oktatási eszközök és módszerek kapcsán a számítógép igen széles spektrumú alkalmazási lehetőségeire. Kifejezetten a matematika órákon való fejlesztésre irányuló beszámolóknak, leírásoknak is bőséges irodalma van. Érdemes ezzel kapcsolatban kitérni a matematika- és számítástudományok néhány érdekesebb mérföldkövére is (kizárólag a teljesség igény nélkül), hogy bepillantást nyerjünk azokba a módszertani, társadalmi, szakmai változásokba, melyek meghatározták a jelen kor nevelési-oktatási folyamatait (4. táblázat):

Év	Történés
1976	Az első számítógéppel bizonyított tétel (négy szín-tétel).
1986	Számítógép bevonása a téri képességek fejlesztése céljából.
1997	Először győzi le számítógép az akkori sakk-világbajnokot (Kasparov)
1998	Sulinet program, a középiskolák és tanárok ellátása számítástechnikai eszközökkel, illetve internettel
2010	Számítógépes bizonyítás a Rubik-kocka kirakhatóságára vonatkozóan
2016	Először győzi le számítógép a go-világbajnokot (AlphaGo MI)

4. táblázat A számítógép-alkalmazások néhány érdekesebb állomása

A 4. táblázat alapján elmondható, hogy a számítógépek problémamegoldásra már a '70-es években is használatosak voltak (bár a matematikusok a számítógépet, mint szakmai szempontból korrekt bizonyítási eszközt csak később fogadták el). A számítógépek bevonása a matematika órákba a '80-as évek elejére tehető (főleg szimuláció, illetve síkgeometria témakörben). A '90-es években a gyorsabb hardver-fejlődés (mely nem utolsó sorban a számítógépes játékiparnak köszönhető) lehetővé tette erőforrás-igényesebb szoftverek, algoritmusok (például sakk-program) használatát is. Itt tehát igen jelentős minőségi javulás figyelhető meg a 3D-s fejlesztő szoftverek tekintetében is (például Hellmut Stachel díjnyertes 3D-CAD szoftverje 1993-ban). A '90-es évek

végén Magyarországon elindult a Sulinet Program, mely hatalmas áttörést jelentett a magyarországi oktatásban (eszközök és internet). A 2000-es évek elejétől pedig egyre jobban kezdi érvényét veszteni az a szemlélet, hogy anyagi okok miatt nincs számítógép vagy internet egy háztartásban (Magyar Információs Társadalom 2006-os éves jelentése alapján az internethez való hozzáférés ára már az európai középmezőnyben volt).



2. diagram A számítógép és az internet terjedése a háztartásokban Magyarországon (forrás: MIT)

A 2. diagram mutatja az ezek alapján kialakult tendenciát Magyarországon. Az elmúlt 15 évben erősödött az informatika, a média és a távközlés közeledése egymáshoz, illetve megjelentek az internetes közösségekre építő szolgáltatások, megerősödött az internetes tartalomfejlesztés, az új alkalmazásokat használók pedig elérték a többszázazres tömeget. A Magyar Információs Társadalom álláspontja: „Az információs társadalom messze több mint az informatika vagy az elektronikus szolgáltatások: a társadalom, a gazdaság és a hétköznapi élet olyan átalakulása, amely a foglalkoztatásban, a termelésben és a fogyasztásban az információs- és tudástermékeket, a kulturális javakat, az ok-

tatás és a tudomány teljesítményét értékeli fel, és teszi ezeket a versenyképesség zálogává.” Ez az álláspont nagyon szemléletesen rámutat arra a tényre, miszerint az oktatásnak is alkalmazkodnia kell a megváltozott körülményekhez.

Az elmúlt 20 év számos vizsgálata mutat rá arra a tényre, hogy a szoftverekkel támogatott matematikaoktatás hatékonyabb fejlesztést tesz lehetővé, mint az addig használt hagyományos eszközök kizárólagos használata. Az említett hardveres fejlődés következtében lehetőség nyílt a 3D-s megjelenítésű szoftverek használatára, elterjedésére is. Míg a felsőoktatásban (érthető módon) a CAD/CAM rendszerek terjedtek el, addig a középfokú oktatásban a dinamikus geometriai szoftverek (DGS) használata ajánlott. Néhány ezek közül: Archimedes Geo3D, Cabri 3D, Cinderella 3D, Euler 3D, GeoGebra, Geometria, GeomSpace, GeomView, Géospace, GEUP 3D, Sterizium, Yenka 3D Shapes.

Azon túl, hogy az említett DGS-ek képesek objektumok térbeli megjelenítésére is, a következő hasznos lehetőségeket is tartalmazzák (DGS-ek általános jellemzői):

- Interaktivitás
- Dinamikusság
- Animációk
- Makrók (cselekvés-sorozat lementése és visszahívási lehetősége)
- Sriptek írása (programozási lehetőség)

Ezekon kívül számos további funkcióval bírhatnak (CAS, LaTeX export, web export, beépített bizonyítások előhívása...), de a mindennapi oktatásban való alkalmazáshoz figyelembe kell vennünk néhány gyakorlati szempontot is. Az oktatási intézmény egyik fontos szempontja, hogy a szoftver ingyenesen

beszerezhető legyen, a tanár és a tanuló szempontja pedig a korlátlan hozzáférhetőség bárhonnán, egyszerű, gyorsan megtanulható kezelés, illetve az adott szoftverhez elérhető segédanyagok mennyisége és minősége.

A GeoGebra DGS megfelel a fentebb támasztott követelményeknek: teljesen ingyenes, könnyű kezelhetőség, széleskörű alkalmazási lehetőség, több-százezer ingyenesen elérhető segédanyag, multi platform (Windows, Linux, Mac OS X, Android), és ami igazán kiemeli versenyképesség szempontjából is a többi DGS közül, az a GeoGebra mögött álló közösség (5. táblázat).

62 nyelv	900000 látogató havonta
190 országban	400000 letöltés havonta
122 intézet (82 ország)	6,2 millió letöltés 2011-ben
43 fejlesztő	
200 fordító	
45000 online tananyag	

5. táblázat A GeoGebra közösségi fejlődése (2013-as adatok alapján, forrás: geogebra.org)

A GeoGebra egy olyan dinamikus matematikai program, melyet készítője, Markus Hohenwarter, eredetileg középiskolai oktatási segédletnek szánt, de ma már szinte minden korosztály oktatásában sikerrel alkalmazzák. A GeoGebra témájában kapcsolódik a geometriához, az algebrához, az analízishez, a statisztikához, és még a fizika egyes területeinek tanításában is alkalmazható. A GeoGebra egyrészt egy dinamikus geometriai program, másrészt,

pedig egy számítógépes algebrai rendszer, s legújabb verziója már egy egyszerű táblázatkezelőt is tartalmaz. Talán legfontosabb tulajdonsága, hogy összekapcsolja az objektumok különböző reprezentációit, geometriai megjelenítését és algebrai leírását.

Az évek során számtalan nemzetközi díjjal is jutalmazták. Sikerét többek között annak köszönheti, hogy nyílt forráskódú és tetszőleges Java futtatására alkalmas platformon telepíthető. Legfontosabb előnye azonban talán mégis az, hogy használatát, az alap funkcióinak működését szinte bárki pár óra alatt el tudja sajátítani.

Az, hogy a GeoGebra egy dinamikus szerkesztő rendszer, azt jelenti, hogy a felhasználó a programmal egy virtuális szerkesztőkészletet kap, amelynek segítségével elkészítheti a középiskolai szerkesztések bármelyikét. A papíron végzett szerkesztésektől eltérően a kiinduló objektumok (pontok, egyenesek...) a szoftverben szabadon mozgathatók, miközben a tőlük függő objektumok a geometriai kapcsolatok alapján velük együtt mozognak.

A GeoGebra másrészt egy számítógépes algebrai rendszer (CAS), amelyben az objektumok algebrai úton adhatók meg (pontok koordinátaikkal, egyenesek egyenleteikkel, függvények képletükkel, stb.). Az objektumokkal különböző számítások végezhetőek. A beépített táblázatkezelő lehetőséget ad az adatok előzőektől eltérő módon való megjelenítésre, azok egyszerűbb kezelésére és különböző statisztikai alkalmazások készítésére.

A szoftver segítségével különböző műveleteket és absztrakt fogalmakat szemléltethetünk a diákok számára, oly módon, ahogy hagyományos eszközökkel csak nehezen, vagy egyáltalán nem lehetséges. Például általános iskolában szemléltethetjük az egész számok összeadását, a törtek szorzását, középiskolában a függvény-transzformációkat, fakultáción vagy felsőoktatásban a derivált függvény fogalmát.

A GeoGebra továbbá lehetőséget ad a diákoknak, hogy meglássák és megfogalmazzák a különböző matematikai reprezentációk közötti összefüggéseket. Például középiskolában a kör egyenlete és képe közötti, felsőoktatásban pedig a komplex számok algebrai és geometriai reprezentációja közötti összefüggéseket.

A GeoGebra segítségével a diákoknak lehetőségük nyílik a kísérletezésre, a felfedező tanulásra. Például megvizsgálhatják, hogy van-e egy virágnak szimmetria tengelye, vagy kipróbálhatják, hogy milyen oldalhosszak esetén szerkeszthető meg egy háromszög vagy akár azt, hogy hogyan változik az alsó összeg értéke, ha növeljük a felosztások számát.

A GeoGebra a tárgyi feltételek és a módszertani célok függvényében több módon is alkalmazható az oktatásban. Egy számítógép és egy projektor segítségével szemléltethetünk az egész osztálynak, ami interaktív táblát használva talán még könnyebben követhető a diákok számára. Ha lehetőségünk nyílik gépteremben dolgozni, akkor minden tanuló önállóan (vagy párban/csoportban) dolgozhat, s akár mindenkinek különböző interaktív feladatlapot készíthetünk, a tevékenységükre adott azonnali visszacsatolással.

Egy nem elhanyagolható lehetőség- főleg azok számára, akiknek az előbbiek nem megvalósíthatók -, hogy a GeoGebrával készült dinamikus segédanyagok, interaktív feladatlapok könnyedén publikálhatók az interneten is.

A GeoGebra 3D modulját 2010 környékén franciák kezdték fejleszteni magánprojekt keretében (Mathieu Blossier). A fejlesztés lassú ütemű volt, a 3D-s környezet nem sok lehetőséget biztosított még, és előfordultak technikai problémák is (beépített eszközök nem megfelelő működése, instabilitás). A 2013 október és 2015 október között Magyarországon megvalósuló GEOMATECH projekt számottevő mértékben segítette a GeoGebra 3D modul (és egy online szerkesztési felület) stabil alkalmazhatóságát, melyben a jelen dolgozat szerzője is aktív részt vállalt. Így az addig GeoGebra 5.0 Béta néven ismert DGS nevéből 2014 szeptemberében elhagyták a Béta verzió-megjelölést, így

a GeoGebra hivatalosan is alkalmassá vált térbeli objektumok, műveletek stabil kezelésére.

Az eddig tárgyalt okok miatt jelen dolgozat következő fejezeteiben leírt alkalmazások, módszerek, oktatási kísérletek mindegyike a GeoGebra DGS-ben valósult meg.

3. A kutatás módszertana

Az elméleti kutatás egyik legfontosabb összetevője a témához kapcsolódó hazai és nemzetközi szakirodalom áttekintése. A téri képességek fejlesztésének kérdése-, mint az előző fejezetben láthattuk- igen nagy irodalommal rendelkezik. A kisgyermek korban (óvodai nevelés), különböző eszközökkel történő fejlesztéstől, majd a középfokú oktatáson át egészen a felsőoktatási szinten modellező szoftverek segítségével való fejlesztésekig megtalálhatóak pedagógiai és pszichológiai vizsgálatok. Ezekkel a kutatásokkal mindenképpen tisztában kell lennünk, hiszen csak így ismerjük meg a téri képességek fejlesztésének folyamatát, irányvonalait, lehetőségeit, hiányterületeit, továbbá a már meglévő kutatási eredményekre támaszkodni is tudunk.

A gyakorlati kutatás fő irányvonala a GeoGebra alkalmazásának/alkalmazhatóságának vizsgálata saját tapasztalatok alapján, elsősorban a téri képességek fejleszthetőségére irányulva. A kutatási stratégia leíró (például tipikus tanulói nehézségek detektálása), összefüggés-feltáró (dokumentumelemzések, megfigyelés, szóbeli és írásbeli kikérdezések, interjúk, szakmai tudásmérés) és kísérleti induktív jellegű. A kísérleti induktivitás szerkezete szerint kétcsoportos kísérlet: a kísérlet során a kontrollcsoport változatlanul végezte a munkáját (fejlesztése kizárólag hagyományos eszközökkel történt), a kísérleti csoportnál pedig bekapcsoltuk a GeoGebrát mint független változót. A kísérlet természetes körülmények között zajlott (valós tanórák, nem laboratóriumi körülmények). A kísérletek megbízhatóságára vonatkozóan a következők teljesültek:

- szerkezeti kontroll: közel azonos képességű kísérleti és kontrollcsoport,
- elő- és utóvizsgálatok:
 - intézményi szintű kötelező mérések minden évfolyamra
 - téri képességek mérése: Séra-Kárpáti-Gulyás-féle térteszt (standardizálva, 2002)+MRT (mentális forgatási teszt)
 - affektív tényezők mérése: Claus-féle módosított kérdőív

- metodikai kontroll: csoportok folyamatos megfigyelése, szóbeli és írásbeli tanulói interjúk, kísérleti megfigyelések, tanulói teljesítmények elemzése, tanulói produktumok gyűjtése, elemzése,
- matematikai kontroll: a megállapított összefüggések megbízhatóságának statisztikai úton történő ellenőrzése,
- folyamatos nyomon követés: előre nem látható, zavaró tényezők feltárása és kiküszöbölése.

A kutatás helyszínéül egy nógrád megyei kisvárosi általános és középiskola szolgált. A kutatás longitudinális jellegű volt, időtartama 5 tanévet ölel fel (2010 szeptember-2015 június). A 4. táblázat mutatja az 5 tanév során történő, téri képességek mérésére irányuló bemeneti és kimeneti mérések időpontját (azonos színekkel a felmenő rendszerű évfolyamok megjelölése). A longitudinális vizsgálatnak köszönhetően hosszmetseti (egy adott évfolyam 4 éven keresztüli nyomon követése, azaz a négyosztályos gimnáziumba való belépéstől az érettségiig bezáróan, illetve az 5 tanéven keresztül folyamatosan belépő 9. osztály szintjének felmérése) vizsgálatokra és keresztmetseti (életkor és fejlettség kapcsolatának vizsgálata) vizsgálatokra is egyaránt lehetőség kínálkozik.

Hosszmetseti vizsgálati modell										
Mérés időpontja										
Keresztmetseti vizsgálat	Bemeneti	Kimeneti	Bemeneti	Kimeneti	Bemeneti	Kimeneti	Bemeneti	Kimeneti	Bemeneti	Kimeneti
	2010 szeptember 13-17	2011 június 6-10	2011 szeptember 5-9	2012 június 4-8	2012 szeptember 10-14	2013 június 3-7	2013 szeptember 9-13	2014 június 2-6	2014 szeptember 8-12	2015 június 1-5
	Évfolyam									
	9.	9	9	9	9	9	9	9	9	9
	10.	10	10	10	10	10	10	10	10	10
	11.	11	11	11	11	11	11	11	11	11
	12.	12	12	12	12	12	12	12	12	12

6. táblázat Az 5 tanév longitudinális kutatásának szerkezete

A kutatás tehát ciklikusan operacionalizált, kvantitatív (matematikai statisztika módszereivel) és kvalitatív (csoportok folyamatos megfigyelése, tanulók szóbeli és írásbeli kikérdezése, kísérleti megfigyelések szervezése...) normaorientált jellegű.

Az adott tanévben a mindenkori minta osztályonként (4 középiskolai évfolyam, 2 párhuzamos osztály) átlagosan 20-25 fő volt (részletesebben az oktatási kísérlet leírásánál). Így az 5 tanév alatt $N = 882$ bemeneti, és ugyanennyi kimeneti teszt került megírásra. Ezen tesztek objektivitását, reliabilitását, validitását nem volt szükséges vizsgálni. A minta eredményei alapján előreláthatólag tudunk megállapításokat tenni az alapsokaságra nézve, melyet a 2010 után kezdett középiskolai tanulók alkotják.

A szakirodalom áttekintése, és a kutatás stratégiájának, módszereinek, eszközeinek meghatározását, és a minta kiválasztását követően történt a hipotézisek felállítása az oktatási kísérlet, illetve az ahhoz szükséges feltételek megteremtése.

A következő hipotéziseket fogalmaztuk meg a kutatási eljárás kezdetén:

1. A GeoGebra DGS alkalmazása a matematikaórán növeli a hallgatók motivációs bázisát (elsősorban a belső motivációt).
2. A GeoGebra DGS-ben kidolgozott matematikadidaktikai eszközrendszerrel kiegészített téri képességek fejlesztése a középiskolai évfolyamok jó térlátással rendelkező tanulói esetében eredményesebb, mint kizárólag a hagyományos eszközökkel történő fejlesztés.
3. A GeoGebra DGS-ben kidolgozott matematikadidaktikai eszközrendszerrel kiegészített téri képességek fejlesztése a középiskolai évfolyamok kevésbé jó térlátással rendelkező tanulói esetében eredményesebb, mint kizárólag a hagyományos eszközökkel történő fejlesztés.

Az oktatási kísérlet a következő komponensekből áll:

- Technikai előkészület: a GeoGebra, mint független változóként behozott fejlesztő eszköz alkalmassá tétele a téri képességek fejlesztésére, pontosabban térbeli objektumok megjelenítése szimulált 3D felületen, ismert komputergrafikai módszerekkel. A 4. fejezetben tárgyalt technikai megvalósítás szükséges volt a GeoGebra 4.x verzióban, továbbá a

jelenleg már stabilabban futó GeoGebra 5.0 esetében is van létjogosultsága számos esetben (több 3D-s munkafelület egyidejű használata).

- Kerettantervek elemzése: matematika tantervek rövid elemzése, a minél szélesebb rálátás, illetve a kidolgozott segédanyagok tanterv-kompatibilitásának biztosítása érdekében (a segédanyagok szakmailag és módszertanilag indokolt helyen és időben történő alkalmazásának biztosítása, 5.1- es fejezet)
- GeoGebra segédanyagok elkészítése (tervek szerint 50 munkalap), módszertani ajánlásokkal (függelékben)
- PISA 2012 vizsgálat rövid értelmezés: fontos a nemzetközi szintű kitekintés, összehasonlítás, illetve a feladattípusok, hiányosságok értékelő elemzése (az említett szintmérő számos esetben támaszkodik a térlátásra, 5.2- es fejezet)
- Előzetes állapotfelmérés végzése (5.3. fejezet)
- Oktatási kísérlet a fentebb leírt módon, tanórai keretek között (5.4. fejezet)
- Utótesztelés: A fejlesztő kísérletek eredményeinek elemzése (5.5. fejezet)

A témakörhöz kapcsolódva a 6. fejezetben kísérletet teszünk egy hiányterület tartalmának bővítésére. A GeoGebra alkalmassá és stabillá vált összetettebb, komplexebb interaktivitást is lehetővé tevő munkalapok létrehozására. Célunk egy kétdimenziós non-immerzív (majd később immerzív) téri képességeket mérő online, dinamikus, interaktív tesztsor létrehozása. Az említett fejezetben az ezzel kapcsolatos pedagógiai kísérlet pilot vizsgálatait, és a kapott eredményeket összegezzük. Erre vonatkozó hipotéziseink:

4. A már meglévő, hagyományos papír-ceruza alapú téri képességeket mérő tesztsorok adaptálhatóak a GeoGebra dinamikus 3D környezetébe (technikai, illetve didaktikai szempontból).

5. A GeoGebrába adaptált tesztsorok ugyanazt a képességet mérik le, amit a nekik megfelelő statikus teszt.

4. A kutatáshoz szükséges, geometriai alapokon nyugvó szoftveres háttér létrehozása

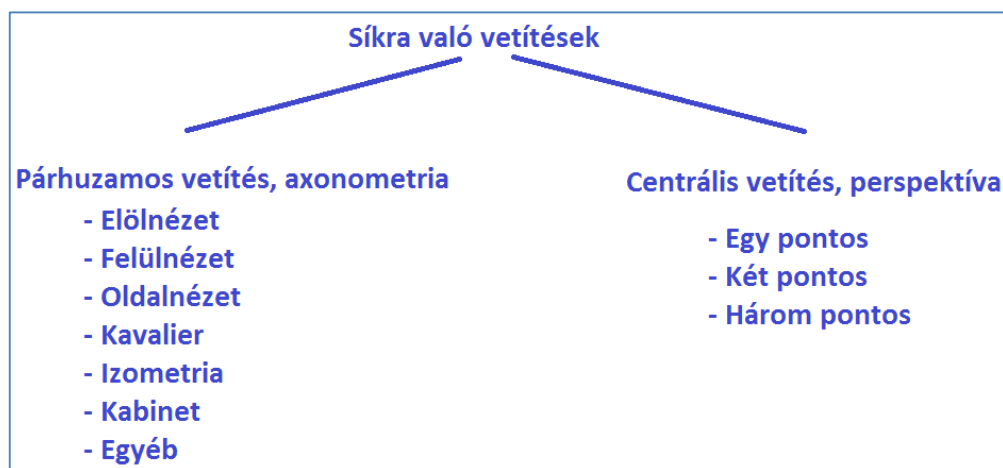
A GeoGebra 5.0 Béta verziója (pontosabban 4.9.x) 2014 szeptember 10-től GeoGebra 5.0.x verziószámmal fut, azaz a Béta utótagot elhagyták. Ez támogatja alapértelmezett módon a 3D-s elemek dinamikus megjelenítését is. Az említett verziót a franciák fejlesztik elsősorban (ezen kívül magyarok is hozzájárulnak a fejlesztéshez, köztük a dolgozat szerzője is), 2008 óta, de 2013-ig nem sok eszköz volt elérhető még benne. Különböző projektek meggyorsították a fejlődését, így 2013-2015 között rohamosan bővültek a felhasználható lehetőségek. Az általános és középiskolában felmerülő igényeket többé-kevésbé kielégíti, de általánosságban elmondható, hogy bizonyos kondíciók mellett elképzelhető, hogy az 5.0 verzió 3D-s nézetében gyártott munkalapjaink nem működnek megfelelően (stabilitási problémák, objektumok ponttá zsugorodása, nem teljes mértékben támogatott webes felületű megjelenítés...). Ezen felül jelenleg nincs lehetőségünk több 3D-s nézetet egyidejűleg kezelni.

A 2.4-es részben említett okok miatt mindenképpen a GeoGebra DGS-re esett a választásunk a téri képesség fejlesztése céljából. Figyelembe véve a fentebb leírtakat szükséges volt a GeoGebra térbeli objektumok manipulálásával kapcsolatos lehetőségeit kibővíteni (ameddig az 5.0 nem fogja tartalmazni üzembiztosan a szükséges eszközöket). Ezt bizonyos komputergrafikai és ábrázoló geometriai eszközökkel érjük el, melyek segítségével a kifejezetten csak 2D-s megjelenítést támogató felületen dinamikus 3D-s környezetet szimulálunk. A 2D alatt általában az euklideszi R^2 síkot, 3D alatt az euklideszi R^3 teret értjük, a centrális vetítés esetében pedig a projektív teret (P^2 , P^3).

Most először ennek elméleti háttérét tekintjük át, majd a technikai részleteket adjuk meg. Az általunk létrehozott rendszert azóta több nógrád megyei iskolában is sikerrel használtuk, használták.

Vetítési transzformáción általánosságban azt értjük, amikor egy n dimenziós koordináta-rendszer objektumait leképzzük egy n -nél kevesebb dimenziójú koordináta rendszer objektumaira. Például egy négy dimenziós hiperkockát minden további nélkül komputergrafikai eszközökkel leképezhetünk 3D-be, vagy akár 2D-be is, megjelenítve azt dinamikusán a monitoron. A leképezés defektusának nevezzük azt az értéket, ahány dimenziót veszítettünk a leképezés során, azaz a 4d-s hiperkocka 2D-ben való megjelenítése esetén a leképezés defektusa 2 lesz. A közoktatásban (néhány szélsőséges példától eltekintve) leggyakrabban a $3D \rightarrow 2D$ vetítési transzformációt szoktuk használni (defektus = 1). Ezen belül is még számos lehetőségünk lenne a vetítés megadására, a képsík, vetítési centrum és a vetítősugarak paramétereinek változtatásával.

A 3. ábra mutatja a síkra való geometriai vetítések (egy lehetséges) osztályozását.



3. ábra Vetítések osztályozása

Alapvetően tehát a párhuzamos vetítés és centrális vetítés jöhet szóba. Mindkét típusú vetítés szemléletes képet állít elő, így mind a kettőnek van haszna a térszemlélet-fejlesztés során. más-más helyzetekben.

Az axonometrikus leképezés rendelkezik a következő tulajdonságokkal:

- egyenestartó,

- illeszkekedéstartó,
- osztóviszonytartó,
- párhuzamosságtartó.

Az említett tulajdonságok éppen az affín transzformációkra jellemzőek. Elmondható tehát, hogy az axonometria a tér síkra való elfajult affín leképezése. Ezek a tulajdonságok értelemszerűen a párhuzamos vetítést is jellemzik, ezért érdekes kitérni az alakzat axonometrikus képe és párhuzamos vetítéssel létrejött képe közötti kapcsolatra. Ezzel kapcsolatosan nézzük az axonometria alaptételét és a Pohlke-tételt.

Az axonometria alaptétele: Az alakzat axonometrikus képe mindig tekinthető az alakzat párhuzamos vetülete affín megfelelőjeként. Másként fogalmazva: Az alakzat axonometrikus képe mindig affín az alakzat valamely párhuzamos vetületéhez.

Ha az alaptételben nem a párhuzamos vetületet szeretnénk speciálisabbnak választani, hanem az affín kapcsolatot, akkor egy olyan tételhez jutunk, melyet sokáig tekintettek az axonometria alaptételének.

Pohlke-tétel (1853) Egy alakzat axonometrikus képe mindig hasonló az alakzat valamely párhuzamos vetületéhez.

A Pohlke-tétel ma már azért nem veszi át az alaptétel helyét, mert ha az axonometrikus leképezést magasabb dimenzióra általánosítanánk, akkor a Pohlke-tétel magasabb dimenzióban nem lenne igaz, míg a mostani alaptétel magasabb dimenzióban is megfogalmazható. Mindezek alapján az axonometria és párhuzamos vetítés fogalmakat gyakorlatilag egymás szinonimájaként használhatjuk.

4.1. Ortogonális axonometria

Kapcsolódva a fentebb írtakhoz, a Pohlke-tételre utalva az ortogonális axonometria olyan paralelvetület, melynek során az általános helyzetű tengelyke-

resztet a képsíkra merőlegesen vetítjük. Az így keletkezett vetületre alkalmazunk esetleg hasonlósági transzformációt. Az így keletkezett kép kifejezetten szemléletesnek, használhatónak mondható a középiskolai geometria követelményrendszerét tekintve.

Alaprendszer definiálása

További célunk, hogy tudjuk forgatni a térbeli alakzatot, így változtatva dinamikusan az aktuális nézethez tartozó képalakzatot. Ezt legegyszerűbben mátrixos alakban tudjuk kezelni. Tudunk az x, y, z tengely körül forgatni, vagy akár általános helyzetű tengely körül is. Számolás után a következő forgatási mátrixokat kapjuk:

$$\mathbf{R}_z = \begin{bmatrix} \cos z & -\sin z & 0 & 0 \\ \sin z & \cos z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R}_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos x & -\sin x & 0 \\ 0 & \sin x & \cos x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{R}_y = \begin{bmatrix} \cos y & 0 & \sin y & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin y & 0 & \cos y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$\mathbf{R}_{zxy} = \mathbf{R}_y \cdot \mathbf{R}_x \cdot \mathbf{R}_z =$$

$$\begin{bmatrix} \cos y \cos z + \sin x \sin y \sin z & -\cos y \sin z + \cos z \sin x \sin y & \cos x \sin y & 0 \\ \cos x \sin z & \cos x \cos z & -\sin x & 0 \\ -\cos z \sin y + \cos y \sin x \sin z & \sin y \sin z + \cos y \cos z \sin x & \cos x \cos y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A 4. sor és oszlop a homogén koordinátákat tartalmazza (kiegészítjük a tér pontjait a végtelen távoli, úgynevezett ideális pontokkal, azaz a projektív térben tekintjük a forgatást), de ennek a mi esetünkben jelenleg nincs jelentősége.

Példa: forgassuk el a P (3,-2,1) pontot az x tengely körül 45°-os szöggel. Mik lesznek a pont koordinátái az elforgatás után?

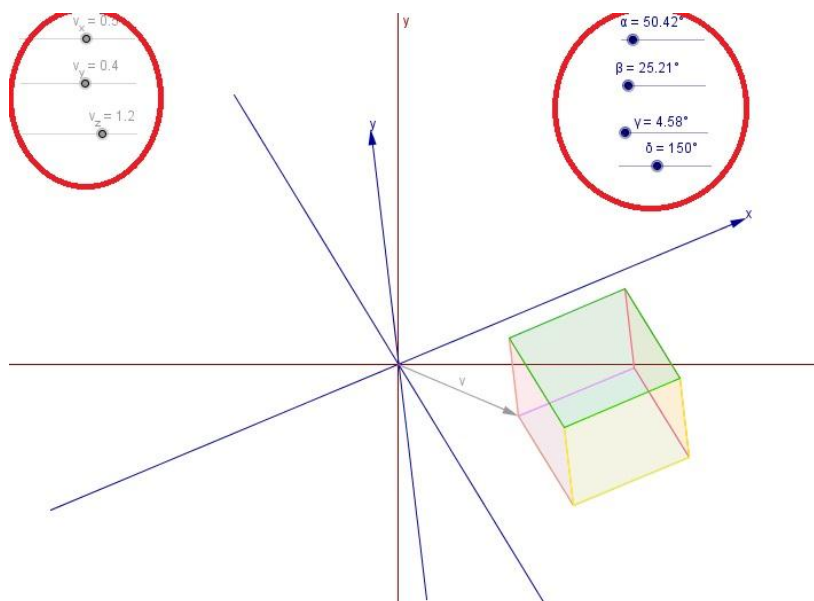
Megoldás:

$$\begin{aligned}
R_x \cdot P &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos x & -\sin x \\ 0 & \sin x & \cos x \end{bmatrix}_{3 \times 3} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}_{3 \times 1} = \\
&= \begin{bmatrix} 1 \cdot 3 + 0 \cdot (-2) + 0 \cdot 1 \\ 0 \cdot 3 + (-2) \cos 45^\circ + 1 \cdot (-\sin 45^\circ) \\ 0 \cdot 3 + (-2) \sin 45^\circ + 1 \cdot \cos 45^\circ \end{bmatrix}_{3 \times 1} = \begin{bmatrix} 3 \\ -3\sqrt{2} \\ \frac{2}{2} \end{bmatrix}_{3 \times 1}
\end{aligned}$$

Látható, hogy ebben az esetben az x koordináta nem módosult (hiszen az x tengely körül forgattunk).

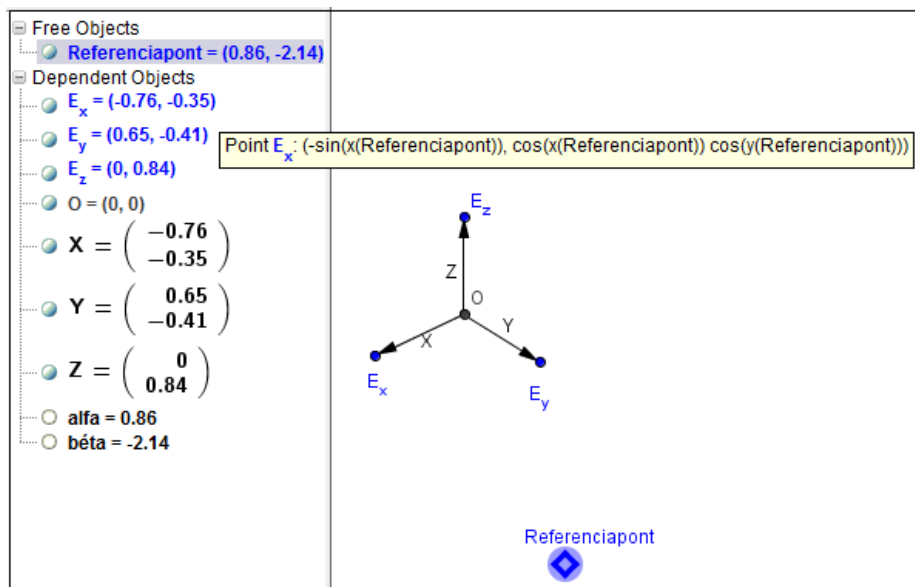
Definiálunk egy 3 vektorból álló ortonormált bázist, ez lesz a térbeli koordináta rendszerünk. Ezt négy ponttal tudjuk megadni: az origó, és a három tengelyen egy-egy pont, ami az origótól egységnyi távolságra van, vagyis $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ és $(0,0,1)$ koordinátájú pontok. Ezt a három pontot forgathatjuk tetszőleges tengely körül, vagyis a négy pont mindegykét megszorozzuk az R_{zxy} mátrix-al, majd az így kapott térbeli koordinátáknak elhagyjuk a z koordinátáját, így kapjuk meg a három pont síkbeli képét.

Alapvetően a három tengely körüli (és esetleg egymás után mindhárom tengely körüli) forgatást GeoGebrában csúszka vezérlőelemekkel szokás megoldani, ahogy azt a 4. ábrán is láthatjuk, jelölve a vezérlő felületet.



4. ábra Tengelyek körüli forgatás szimulálása

Tapasztalataink azt mutatják, hogy a tanulóknak a fentebb írt mozgatási módszer körülményes. A GeoGebrában a munkalapok elkészítésével kapcsolatos időtényező, és bizonyos matematika-didaktikai megfontolások miatt másképp járunk el, új módszert fejlesztettünk ki: két tetszőleges tengely körüli forgatási mátrixszal fogunk szorozni, például R_{xy} . Így két szögre lesz szükségünk a vetített kép meghatározásához. Definiálunk egy úgynevezett referenciapontot, melynek az x és y koordinátái szolgáltatják a két forgatási szög mértékét radiánban megadva. A harmadik tengely körüli forgatás is bizonyos kondíciók mellett szimulálható az így létrehozott rendszerben. A merőleges vetítés miatt elhagyjuk a térbeli pontok z koordinátáit, és megkaptuk a síkvetületeket (5. ábra).



5. ábra Axonometrikus kép szimulálása 2D-s felületen

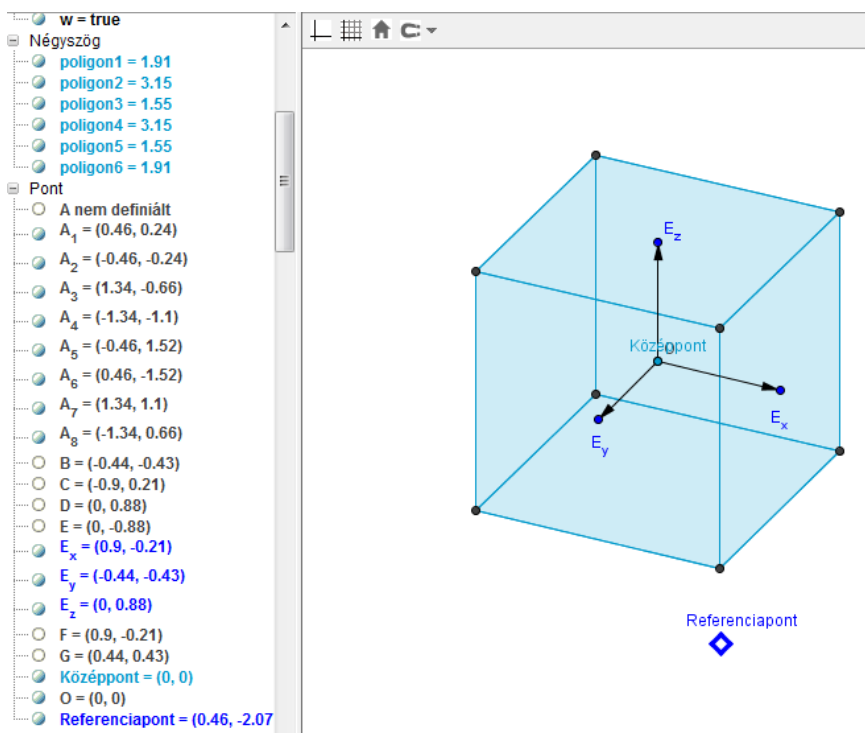
A három pont koordinátái részletesebben:

- $E_x = (-\sin(x(\text{Referenciapont})), \cos(x(\text{Referenciapont})) \cos(y(\text{Referenciapont})))$
- $E_y = (\cos(x(\text{Referenciapont})), \cos(y(\text{Referenciapont})) \sin(x(\text{Referenciapont})))$
- $E_z = (0, -\sin(y(\text{Referenciapont})))$

Ez a megoldás a tapasztalatok szerint a tanulóknak sokkal kényelmesebb felhasználást tesz lehetővé, mint a három tengely körüli külön-külön forgatás. Abban az esetben ugyanis négy csúszkával tudnánk a forgatást megvalósítani, ebben az esetben viszont csupán a pont megfogásával és mozgásával érjük el a kívánt hatást, ami leginkább hasonlít a legtöbb ilyen jellegű geometriai szoftverben előforduló mozgatási módszerekhez (egy egérgomb nyomva tartása és egér mozgása). További előny lehet még, hogy ebben az alaprendszerben csupán a referenciapont szabad alakzat, minden más objektum ennek lesz a függvénye.

Kocka és egyéb poliéderek

Az alaprendszer segítségével egyszerűen tudunk kockát definiálni, ha a kocka egyik csúcsát az origóba toljuk, így csak párhuzamos egyeneseket kell húzni a tengelyekkel, azaz kizárólag síkbeli szerkesztési lépéseket kell végrehajtani. Hosszútávon azonban ez a megoldás nem lesz előnyös. Látványosabb, hasznosabb a következő: a kocka középpontját fogjuk behelyezni az origóba. Az eredmény látható a 6. ábrán:



6. ábra Kocka létrehozása

Az alaprendszerre épülő kocka megvalósítása után semmi akadálya nincs annak, hogy segédanyagainkat tesztre szabjuk, azaz a saját igényeinknek megfelelő munkalapokat hozzunk létre különböző célokkal (prezentálás, gyakorlás, sejtés megfogalmazásának elősegítése, analógia...). Néhány példa a teljesség igénye nélkül:

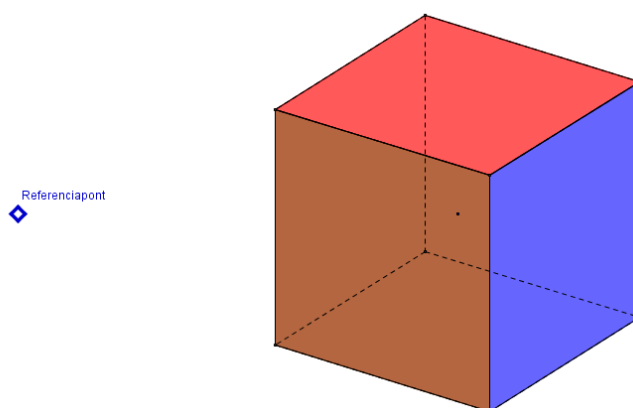
- a csúcspontok definíciós részébe változó paraméterek beiktatásával tetszőlegesen téglalest, hasáb létrehozható

- négyszög alapú gúlák létrehozása (hasáb bármely lapjának középpontját használva)
- kockából tetraéder, oktaéder származtatása
- különböző csonkolt poliéderek származtatása (pl.: kocka csúcsainak tetszőleges vágásával)
- poliéderek síkmetszetei, hálói
- kép kifestése poliéderek oldalaira

Érdemes megemlíteni még, hogy bizonyos esetekben szükséges lehet a drótváz-modelleken túl láthatósági elrendezésben is megjeleníteni a térbeli objektumokat. Ezekre is számos, a komputergrafikából ismert lehetőségünk van. A GeoGebra adottságait és sajátosságait figyelembe véve a következőképpen járunk el:

- megállapítjuk, hogy egy sokszög egyszerű-e,
- az egyszerű sokszög pozitív vagy negatív a körüjárás irányú,
- láthatósági kondíciók beállítása.

A láthatóságot technikai szempontból a következőképpen oldottuk meg. A `lista1={Csúcspont[sokszög]}` paranccsal körüjárás mentén felsorolt csúcsait kapjuk a sokszögnek egy listában, ebből legyártható az oldalak, mint szakaszok listája - és Sorozat parancsokkal vagy javascriptes ciklusokkal megnézhető bármely két oldal metszéspontja létezik-e vagy sem, erről egy lista készíthető, és ha a létező metszéspontok száma több, mint ami az egymást követő oldalak metszéspontjainak a számaként adódna, akkor nem egyszerű a sokszög, máskülönben egyszerű. Ezek után kiszámoljuk a sokszög külső szögeinek az előjeles összegét, és ha az 360° akkor pozitív, ha -360° akkor negatív a körüjárás. A láthatósági feltételek beállítása az objektumhoz kapcsolódó Haladó beállítások felületen vagy java script által vezérelt ciklusokkal oldható meg. Érdemes a fentebb leírt eljárást makrónként menteni, és a poliéder minden oldalára alkalmazni azt (7. ábra).

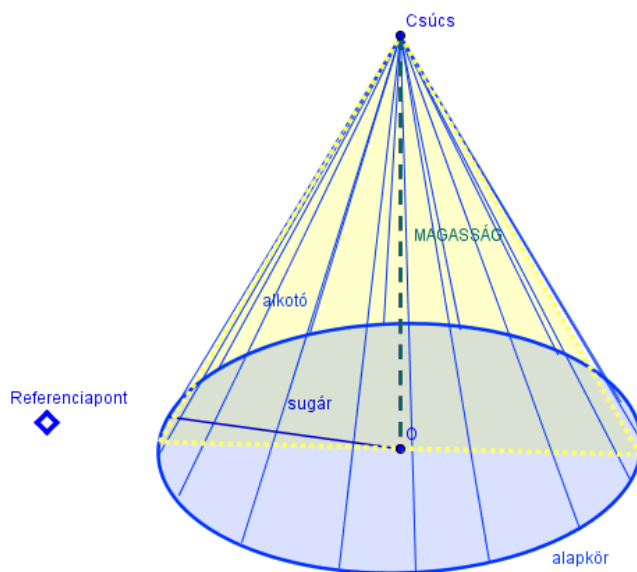


7. ábra Kocka ábrázolása lapjainak láthatósági megjelenítése szerint

Henger, kúp

Hengerből, illetve kúpból származtatható térelemeket tartalmazó munkalapok elkészítése az alapkör létrehozása után síkbeli szerkesztésekkel történhet. Az alapkör, mivel dinamikusan változtatható a nézete egy kúpszelet lesz (ellipszis). Ezt a kúpszeletet 5 pontjával egyértelműen meg tudjuk határozni. Az alaprendszerben szereplő E_x és E_y pontokat az O pontra való centrális tükrözés után 4 pontunk lesz az alapkör származtatásához. Az 5. ponthoz többféle módon hozzá lehet jutni, mi egyfajta felezési eljárás útján kaptuk. A magasságot pedig a z tengelyen elhelyezett egységvektor segítségével definiáljuk: $M=k \cdot z$, ahol k egy csúszka aktuális értéke lehet.

Ekkor az alapkör sugarát, a henger/kúp magasságát is lehet dinamikusan állítani, illetve be lehet még tenni egy változó paramétert, mely a ferdeségért lesz felelős (vízszintes eltolása a fedőkör lapnak), ahogy azt a 8. ábrán is láthatjuk:



8. ábra Kúp létrehozása

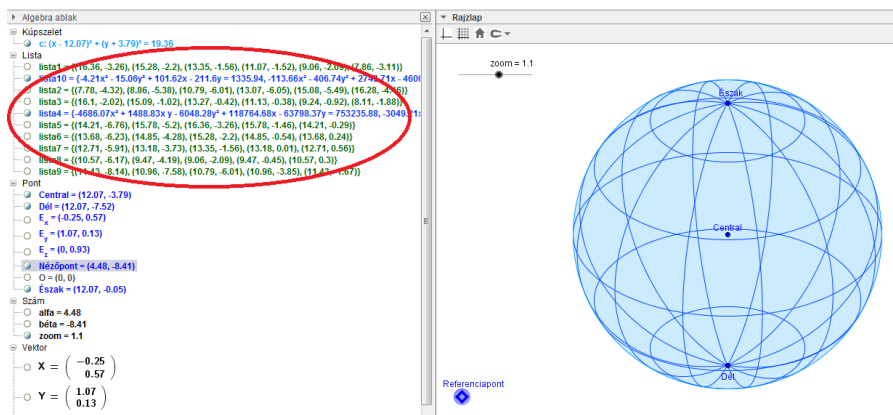
Hengert az alapkör M mértékű eltolásával kaphatunk, az alkotókat pedig az alapkör pontjaival és a csúcsponttal összekötött szakaszok alkotják, tetszőleges számban. Ha származtatott pontokkal dolgozunk, akkor az alkotók a referenciapont mozgatásától függően jelennek meg, ha mi magunk veszünk fel alkotót a szakasz eszközzel, akkor egy független objektum jön létre, melynek helyzete nem függ a referenciapont elhelyezkedésétől. Ez mindig feladat specifikus, hogy éppen melyik típust használjuk a munkalapon.

Ennek segítségével egyszerű síkmértani szerkesztések során a következőkhöz juthatunk: csonkakúp, ferdekúp, n -szög alapú gúla, n -szög alapú hasábok, palástok, síkmetszetek...

Gömb

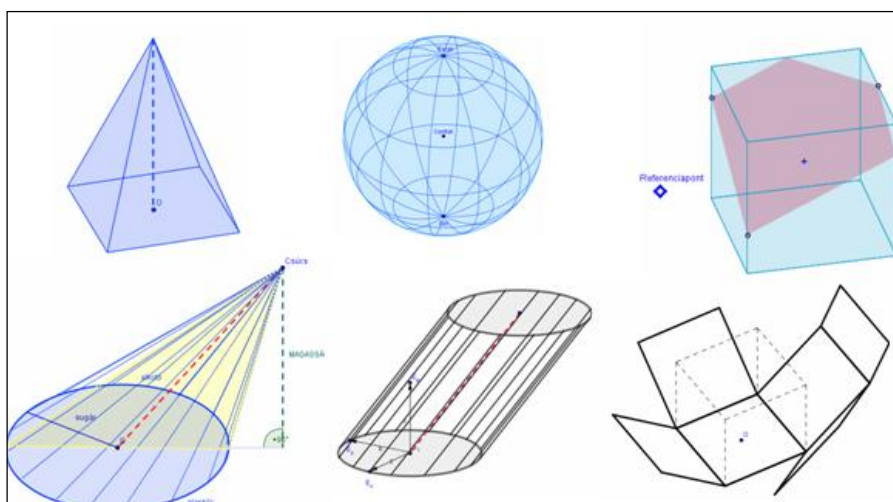
A GeoGebra 4.0 verziójától lehetőség van listák kezelésére is. Ez lehet akár egy olyan adatsokaság, melynek elemei pontok. A leképezés során definiálunk

szélességi és hosszúsági körökön elhelyezkedő pontokat (minimum ötöt), melyeket listákba szervezünk, és ezekre a listákra kúpszeleteket fektetünk. Így egy forgatható gömböt kapunk (9. ábra).



9. ábra Gömb létrehozása

Ebből az alaprendszerből kiindulva kizárólag síkmértani szerkesztésekkel megvalósíthatóak az alap térbeli objektumok, melyek szükségesek lehetnek a középiskolai matematikaórákon.

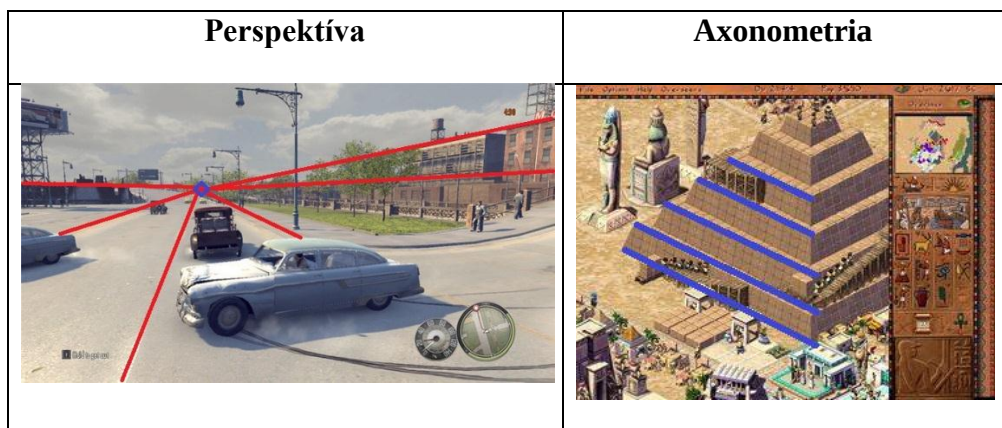


10. ábra Térobjektumok szimulált 3D környezetben

A fentebb említett térelemeket megvalósító munkalapok, és még sok egyéb ehhez kapcsolódó munkalap is megtalálható a www.geogebraTube.com oldalon. Az alap munkalapokat használva nagyon gyorsan szinte bármilyen térbeli feladatra specifikusan előállítható egy szemléltető/gyakorló munkalap (akár olyan is, mely esetleg a hagyományos módon nehezen lenne előállítható).

4.2. Centrális vetítés, perspektíva

A centrális vetítés ritkábban fordul elő a közoktatásban, térobjektumok prezentálásakor, vagy vázlatrajz készítésekor is inkább a párhuzamos vetítést szoktuk alkalmazni, mely szemléletesebb, ugyanakkor a valósághoz kevesebb köze van, mint a centrális projekciónak. Bizonyos esetekben érdemes lehet a tanulóknak bemutatni centrális projekció révén létrejött alakzatokat is, mert sok érdekesség és szabály figyelhető meg ezek segítségével, aminek a realitásokhoz nagyon sok köze van. Érdemes lehet bázis-motivációként kapcsolatba hozni az informatika egyik jelentős ágával is, a számítógépes játékiparral. Míg bizonyos típusú játékok, mint mondjuk a stratégiai játékok izometrikus nézetben készülnek főként, addig a TPS (third person shooter-külső nézetes akció) és FPS (first person shooter-belső nézetes akció) kategóriájú játékoknál centrális axonometriát alkalmaznak (11. ábra).



11. ábra Centrális vetítéssel programozott PC játék (baloldalon, MAFIA 2), illetve izometrikus axonometriával készült játék (jobb oldalon, Pharaoh)

A párhuzamos vetítés esetében projektív szempontból a vetítés centruma végtelen távoli pont, centrális vetítéskor ez valós pont. A definíció szerint, ha S a projektív tér egy rögzített síkja, és C egy síkra nem illeszkedő pont, akkor a C centrumú S síkra történő (centrális) vetítésen azt a leképezést értjük, amely a tér egy tetszőleges, C -től különböző X pontjához hozzárendeli a CX egyenes és az S sík metszéspontját. A vetítősugarak tehát illeszkednek a C centrumra, és nem párhuzamosak. Hasonlóan az ortogonális axonometria esetéhez, itt is érdemes mátrixos alakban dolgozni. Legyen a centrum a z tengely pozitív felén, és az origótól való távolságát jelöljük d -vel (a Centrum lehetne magában az origóban is, az egy más jellegű esetet eredményezne). Tekintsük az $[xy]$ síkot a vetítés képsíkjának. A mátrixokban homogén koordinátás alakot kell alkalmaznunk, ugyanis az ortogonális axonometriával ellentétben itt azok értéke nem 0 lesz. A $z = 0$, $C(0,0,d)$ paraméterű centrális vetítés esetén a vetítési mátrix a következő alakot veszi fel:

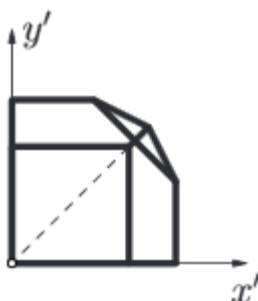
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{d} & 1 \end{bmatrix}$$

Ekkor a $P(P_x, P_y, P_z, 1)$ homogén koordinátákkal adott pont képe:

$$\begin{bmatrix} P'_x \\ P'_y \\ P'_z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{d} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_x \\ P_y \\ 0 \\ 1 - \frac{P_z}{d} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} P_x \frac{d}{d-P_z} \\ P_y \frac{d}{d-P_z} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \text{ ahol } P_z \neq d.$$

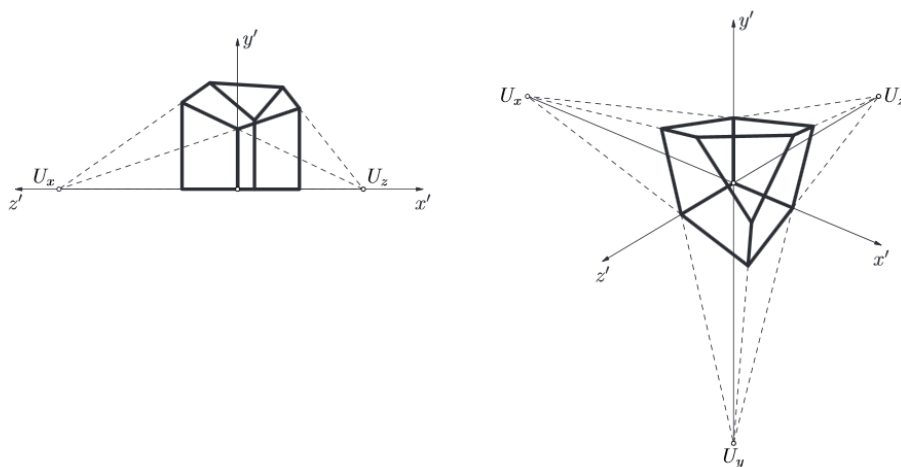
Az utolsó lépésben a gyakorlati alkalmazás érdekében vissza kell térnünk descartes-i alakra, azaz $1 - \frac{P_z}{d}$ -vel végigosztjuk a négy koordinátát. Érdemes megemlíteni még azt az esetet, amikor $P_z = d$. Ennek a feltételnek megfelelő pontok mértani helye a centrumra illeszkedő, és a z tengellyel párhuzamos sík, amit eltűnési síknak is szokás nevezni. A $z = d$ sík pontjai mind végtelen távoli

pontok lesznek, és ha egy alakzat metszi az eltűnési síkot, szétesik, amit fontos lesz a gyakorlati alkalmazás során szemünk előtt tartani.



12. ábra Egy iránypontos perspektíva

A 12. ábra mutatja az előbbi vetítés során keletkezett képalakzatot. Ez nem megfelelő nézet számunkra, szemléletesebb megjelenítéshez juthatunk, ha elforgatjuk az alakzatot a tengelyek körül (13. ábra):

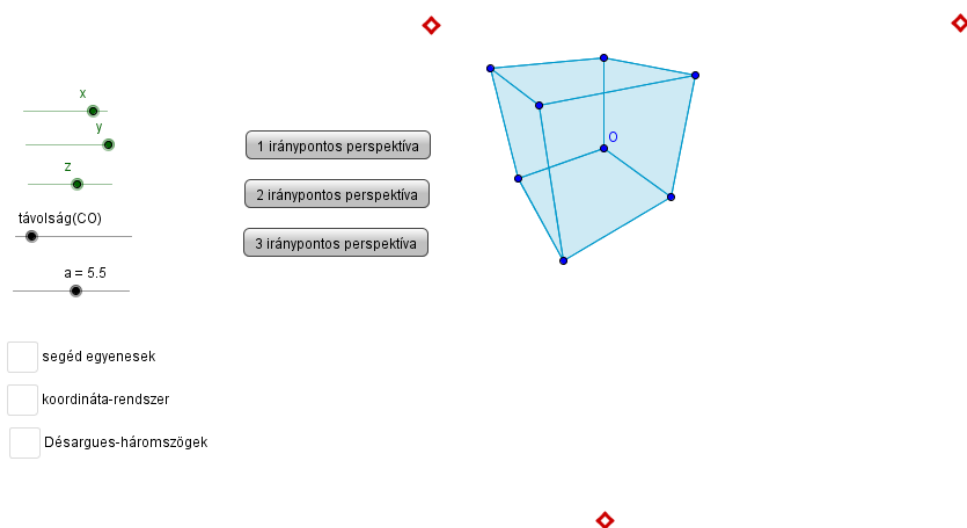


13. ábra Két-, illetve három iránypontos perspektíva.

A koordinátatengelyek egységpontjai, végtelen távoli pontjai és az origó (O , U_x , U_y , U_z , E_x , E_y , E_z) ponthatese alkotja a centrális projekció bázisalakzatát. Aszerint, hogy U_x , U_y , U_z közül hány végtelen távoli pont van, szokás egy, két vagy három iránypontos perspektíváról beszélni.

A GeoGebrás megvalósítás hasonlóan működik, mint az ortogonális axonometria esetében: a forgatási mátrixokkal szorozzuk a térbeli pont koordinátáit,

majd az így keletkezett koordinátákat a vetítési mátrixszal. A 14. ábra mutat egy lehetséges GeoGebra-megvalósítást. A gombokkal szimulálni tudjuk az egy, két, illetve három iránypontos perspektívát előre definiált konfigurációban, illetve lehetőség van még az x , y , z tengely körül forgatást végezni, a centrum és origó távolságát módosítani, illetve a kocka élének hosszát állítani. Ezeken kívül jelölőnégyzettel kapcsolhatóak a segédegyenesek, a koordináta-rendszer, illetve a Désargues-háromszögek.

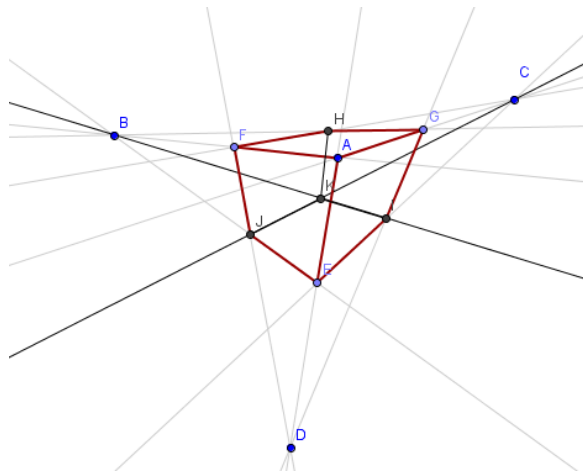


14. ábra Egy pontos, Két pontos, illetve 3 pontos perspektíva szemléltetése dinamikusan

Az így kialakított $(O, U_x, U_y, U_z, E_x, E_y, E_z)$ bázisalakzatból egyszerű síkmértani szerkesztésekkel juthatunk egyéb térbeli objektumok centrális vetületéhez.

Ha a centrális projekciót intuitív módon szeretnénk megadni, azaz a bázisalakzatával, abban az esetben érdekes módon nem feltétlenül jutunk valódi centrális projekcióhoz (15. ábra). A centrál-axonometria főtétele kimondja ugyanis, hogy minden centrál-axonometria egy centrális projekció és egy projektív transzformáció szorzata, azaz a centrál-axonometrikus kép projektív az alakzat valamely centrális vetületéhez. Így az általunk tetszőlegesen megadott

ponthetes nem feltétlenül ad olyan alakzatot, ami előállítható centrális vetítéssel. Tapasztalataink szerint a szemléletességet nem mindig csorbítja, de ennek további vizsgálata érdekes kutatási terület lehet.



15. ábra Intuitív módon felvett bázisalakzat nagy valószínűséggel nem centrális projekció

A centrális projekció tehát a centrális axonometria egy speciális esete, amikor az alaprendszer ponthetesére bizonyos feltételeknek teljesülnie kell. A centrál-axonometriára Pohlke tételét nem lehet általánosítani, nem igaz az, hogy tetszőleges centrál-axonometria centrális vetítés és hasonlóság szorzata:

Szabó–Stachel–Vogel-tétel: Legyen $(O, U_x, U_y, U_z, E_x, E_y, E_z)$ egy centrál-axonometria bázisalakzata, továbbá a bázisalakzat egyetlen pontja se legyen végtelen távoli pont. A bázisalakzat által meghatározott centrál-axonometria akkor és csakis akkor centrális projekció és hasonlóság szorzata, ha

$$\left(\frac{OE_x}{E_xU_x}\right)^2 : \left(\frac{OE_y}{E_yU_y}\right)^2 : \left(\frac{OE_z}{E_zU_z}\right)^2 = \operatorname{tg}\alpha : \operatorname{tg}\beta : \operatorname{tg}\gamma,$$

ahol

$$\alpha = U_yU_xU_z\angle, \beta = U_zU_yU_x\angle, \gamma = U_yU_zU_x\angle.$$

A Szabó–Stachel–Vogel-tétel komputergrafikai szempontból egy új irányt határozhat meg a GeoGebrás megvalósítást illetően: a tételnek köszönhetően

teljesen kikerülhetők a komputergrafikai számítások, kizárólag a síkon maradván is meg tudjuk jeleníteni a centrális vetületét az alakzatoknak. A $(O, U_x, U_y, U_z, E_x, E_y, E_z)$ bázisalakzat esetében 5 pont egyértelműen meghatározza a centrális projekciót, ezekből a hiányzó 2 pont helyzete egyszerű összefüggések útján számítható.

Legyen adott a (O, U_x, U_y, U_z, E_y) ponttöbbség. Ekkor a Szabó–Stachel–Vogel-tételben megadott összefüggésben 4 ismeretlenünk van: $OE_x, E_x U_x, OE_z, E_z U_z$ (E_x és E_z hiánya miatt). Ismert viszont az OU_z távolság, így $E_z U_z$ felírható OU_z és OE_z összegeként is. Így a

$$\left(\frac{OE_y}{E_y U_y}\right)^2 : \left(\frac{OE_z}{E_z U_z}\right)^2 = tg\beta : tg\gamma \quad (1)$$

aránypárból kapjuk a

$$\left(\frac{OE_y}{E_y U_y}\right)^2 : \left(\frac{OE_z}{OU_z + OE_z}\right)^2 = tg\beta : tg\gamma \quad (2)$$

aránypárt. Ekkor már csak az OE_z ismeretlenünk van, reciprokkal való szorzás után jutunk a

$$\left(\frac{OE_y}{E_y U_y}\right)^2 \cdot \left(\frac{OU_z + OE_z}{OE_z}\right)^2 = tg\beta : tg\gamma \quad (3)$$

kifejezéshez. Osszuk le mindkét oldalt $\left(\frac{OE_y}{E_y U_y}\right)^2$ -el:

$$\left(\frac{OU_z + OE_z}{OE_z}\right)^2 = \frac{tg\beta}{tg\gamma} : \left(\frac{OE_y}{E_y U_y}\right)^2 \quad (4)$$

Reciprokkal való szorzás, majd négyzetgyökvonás után kapjuk:

$$\frac{OU_z + OE_z}{OE_z} = \sqrt{\frac{tg\beta}{tg\gamma}} \cdot \frac{E_y U_y}{OE_y} \quad (5)$$

A bal oldali törtkifejezés tagjaira bontva:

$$\frac{OU_z + OE_z}{OE_z} = \frac{OU_z}{OE_z} + 1 \quad (6)$$

A (6) alakot használva az (5) bal oldalán ki tudunk vonni mindkét oldalból 1-et, ezt követően pedig OE_z -vel való szorzás, majd a $\sqrt{\frac{tg\beta}{tg\gamma}} \cdot \frac{E_y U_y}{OE_y} - 1$ -el való osztás után megkapjuk OE_z értékét:

$$OE_z = \frac{OU_z}{\sqrt{\frac{tg\beta}{tg\gamma}} \cdot \frac{E_y U_y}{OE_y} - 1} \quad (7)$$

A (7)-ben kapott eredményt visszahelyettesítve (1)-be rövid számítás után:

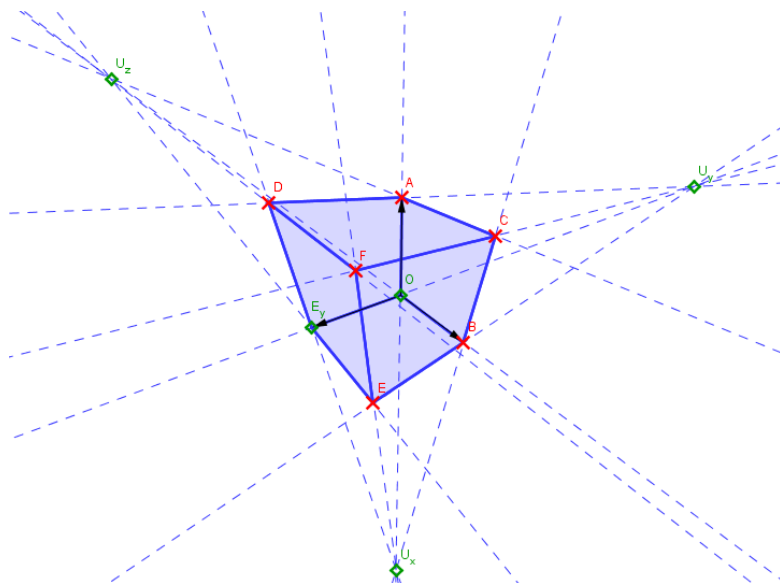
$$E_z U_z = \frac{OE_z \cdot \sqrt{\frac{tg\beta}{tg\gamma}}}{\frac{OE_y}{E_y U_y}} \quad (8)$$

Ezután két ismeretlenünk marad, az OE_x és $E_x U_x$, melyeket a tételben szereplő bármelyik aránypárral tudunk már számítani a fentebb látott módon:

$$OE_x = \frac{OU_x \cdot \sqrt{\frac{tg\alpha}{tg\beta}}}{\frac{OE_y}{E_y U_y} \cdot \sqrt{\frac{tg\alpha}{tg\beta}}}, \text{ illetve} \quad (9)$$

$$E_x U_x = \frac{OE_x}{\sqrt{\frac{tg\alpha}{tg\beta}} \cdot \frac{OE_y}{E_y U_y}}. \quad (10)$$

A (7), (8), (9) és (10)-ben kapott eredmények minden további nélkül beépíthetők a GeoGebrába, így egy centrális projekció bázisalakzatához jutunk, melyben 5 változó paramétert lehet dinamikusan, interaktív módon változtatni. A 16. ábrán látható az így kapott bázisalakzat, a zöld pontok szabad alakzatok, azaz tetszőlegesen mozgathatóak, a piros pontok pedig függő alakzatok.



16. ábra Szabó–Stachel–Vogel-tétel alapján létrehozott centrális projekció

Az így készített GeoGebrás munkalapot alkalmassá lehet tenni arra, hogy intuitív módon felvett bázisalakzatra illesszük a centrális projekció alaprendszerét, és elemezzük az eltérés mértékét.

5. A nevelési-oktatási kísérlet

5.1. A NAT és matematika kerettantervek áttekintése

Nevelési-oktatási rendszerünk alapvetően kétpólusú, és három szintű. Az első szint a központi szabályozás, melyet a Nemzeti alaptanterv (NAT) és a kerettantervek képviselnek, majd ezek alapján készül el a helyi tanterv, mely tükrözi a magasabb szinten megfogalmazott célokat, alapelveket, fejlesztési feladatokat és tartalmi csomópontokat.

Érdekes megemlíteni, hogy az első NAT-változatok hogyan próbálták meg definiálni a térlátást:

- „térlátás: síkban, vetületekkel ábrázolt dolgok gondolati rekonstrukciója háromdimenziós alakká, térbeli viszonyokká” (fejlesztési fázis, 3. NAT változat 1995),
- „térszemlélet: az énközpontúság és a viszonylagosság felismerése, alapvető térgeometriai gondolkodás képessége” (NAT, 1996).

A NAT megközelítése jól szemlélteti a definíciós problémákat is: míg az első esetben túlságosan szűk a meghatározás, addig a másodikban túl tág, megfoghatatlan. Másrészt viszont a későbbiek során (NAT 2003, NAT 2007, NAT 2012) ezen a felső szinten már nem is szükséges az ilyen részletes definiálás (pontosabb megközelítése az alsóbb szinteken történik).

A NAT, mint kompetenciaalapú tanterv a hazai közoktatásban 2007-től a NAT-ok az Európai Parlament és Tanács ajánlását (2006) figyelembe véve ismeretek, készségek, képességek és motívumok egységeként értelmezik a kompetencia fogalmát. Mindezek alapján a NAT 2012 II. részének 3. pontja tartalmazza a matematika műveltségterülethez kapcsolódó alapelveket, célokat, tudásépítési kötelezettségeket. Cél például: „Egyaránt lényeges a reprodukzív és a problémamegoldó, alkotó gondolkodásmód megismerése, elsajátítása, mi-

közben nem szorulhat háttérbe az alapvető tevékenységek (pl. mérés, alapszerkesztések), műveletek (pl. aritmetikai, algebrai műveletek, transzformációk) automatizált végzése sem.” A fejlesztési feladatok a következők:

1. Tájékozódás
 - 1.1. Tájékozódás a térben
 - 1.2. Tájékozódás az időben
 - 1.3. Tájékozódás a világ mennyiségi viszonyaiban
2. Megismerés
 - 2.1. Tapasztalatszerzés
 - 2.2. Képzelet
 - 2.3. Emlékezés
 - 2.4. Gondolkodás
 - 2.5. Ismeretek rendszerezése
 - 2.6. Ismerethordozók használata
3. Ismeretek alkalmazása
4. Problémakezelés és –megoldás
5. Alkotás és kreativitás: alkotás öntevékenyen, saját tervek szerint; alkotások adott feltételeknek megfelelően; átstrukturálás
6. Akarati, érzelmi, önfejlesztő képességek és együttéléssel kapcsolatos értékek
 - 6.1. Kommunikáció
 - 6.2. Együttműködés
 - 6.3. Motiváltság
 - 6.4. Önismeret, önértékelés, reflektálás, önszabályozás
7. A matematika épülésének elvei

Néhány, a kutatási témakörhöz kapcsolódó konkrét fejlesztési cél kiemelése (a teljesség igénye nélkül) 9-12 évfolyamokra vonatkozóan:

- „Tájékozódás a másik ember nézőpontja szerint.” (1.1.)

- „Mennyiségi következtetések (pl. azonos egység esetén mennyiség és mérőszám kapcsolata alapján; azonos mennyiség esetén egység és mérőszám viszonya szerint).” (1.3.)
- „Modellezés”, „Geometriai alkotások létrehozása szabadon és másolással; transzformációk elvégzése, a „kép” eredetijének megalkotása” (2.1.)
- „Adott tárgy, elrendezés, kép más nézőpontból való elképzelése, például testek építése különböző nézeteikből, vetületeikből.” (2.2.)
- „Képzeletben történő mozgatás (pl. átdarabolás elképzelése; testháló összehajtásának, szétvágásoknak az elképzelése; testek különféle síkmetszetének elképzelése.” (2.2.)
- „Képi emlékezés statikus helyzetekben (kép, helyzet felidézése összképben; részletek felidézése; a szabvány mértékegységek nagysága; összesség felidézése: darabszám, elemek, elrendezés, sorrend; minták és szerkezetek felidézése statikus képen; jelek helyzetének, alakjának felidézése; függvények grafikus képe).”(2.2.)
- „Analógiás gondolkodás és korlátai.” (2.4.)
- „Idealizáló absztrakció (kör, háromszög, négyszög; pont egyenes, sík, tér)” (2.4.)
- „Oktatási-tanulási technológiákkal való megismerkedés, azok értelmes, interaktív használata.” (2.6.)

Annak ellenére, hogy intézményi szinten már 1997-től kezelték a (NAT-hoz igazított) tananyag-feldolgozást, az 1995-ös NAT-hoz igazított központi ajánlású kerettanterv csupán 2000-ben lett publikálva, bevezetve. A további NAT-verziók esetében már mindig megtörtént a kerettantervek felülvizsgálata, sőt alternatív kerettantervek (2004, 2008, 2013) kidolgozása is megtörtént. Az adott, érvényes NAT elvárásait lefordítja, részletezi ezekre, a napi gyakorlati megvalósíthatóságot jellemzi, a funkciója a helyi tervezés segítése.

A 7. táblázat tartalmazza a központi kerettantervben adott matematika óraszámokat (ajánlások, bizonyos mértékű átcsoportosítások a 9-10 és 11-12 évfolyamokon belül lehetségesek már), illetve a MOZAIK-féle kerettanterv esetében. A tisztán térgeometriára szánt órák száma alapján nyomatékosan kiemelhetjük a tudatos tananyagtervezés fontosságát.

Kerettanterv	Évfolyam	Óraszám/tanév	Javasolt geometria óraszám/tanév	Javasolt térgeometria óraszám/tanév	Térgeometria óraszám aránya az évi összes órához képest
Központi (4 évfolyamos gimnázium, emelt szint)	9.	185	40	4	2,16 %
	10.	185	44	10	5,41 %
	11.	185	28	2	1,08 %
	12.	160	50	22	13,75 %
Központi (4 évfolyamos gimnázium)	9.	111	30	2	1,80 %
	10.	111	30	10	9,01 %
	11.	111	22	8	7,21 %
	12.	96	20	18	18,75 %
MOZAIK (4 évfolyamos gimnázium)	9.	111	35	2	1,80 %
	10.	111	39	7	6,31 %
	11.	111	40	2	1,80 %
	12.	96	47	20	20,83 %

7. táblázat Kerettantervi óraszámok

A központi emelt óraszámú (heti 5 matematika óra) kerettantervet csak érdekességgéppen említjük: az emelt szint és óraszám nem feltétlenül biztosít több lehetőséget a téreometriai ismeretek tanítására.

A nevelési-oktatási kísérletünk helyszínéül szolgáló intézmény a MOZAIK kerettanterv-családot, és ahhoz tartozó eszközöket használ, így nézzünk most néhány tartalmat, követelményt az említett kerettantervből:

- 9. évfolyam:
 - Geometriai alapfogalmak ismerete, térelemek kölcsönös helyzete
 - Síkbeli és térbeli nevezetes pontthalmazok ismerete
 - Szemléltető és szerkesztett ábrák készítése geometriai alakzatokról; tulajdonságok megállapítása, következtetések, bizonyítások
- 10. évfolyam:
 - Hasonló síkidomok területének, hasonló testek felszínének és térfogatának arányára vonatkozó tételek ismerete, alkalmazása
 - A szögfelezőtétel, a magasságtétel, a befogótétel és a körhöz külső pontból húzott érintő és szelőszakaszok tételének ismerete, alkalmazása egyszerű számolási, szerkesztési és bizonyítási feladatokban
 - A szögfüggvények alkalmazása gyakorlati jellegű síkbeli és térbeli számítási feladatokban
 - Vektorok alkalmazása egyszerű geometriai bizonyítási feladatokban
 - Hasonló alakzatok vizsgálata a mindennapi életből vett példák alapján
- 11. évfolyam:

- A geometria analitikus modelljének alkalmazása egyszerű gyakorlati problémákban
- 12. évfolyam:
 - Térelemek kölcsönös helyzetének, távolságuk, hajlásszögük definíciójának ismerete
 - A felszín és a térfogat szemléletes fogalmának ismerete. Hasáb, gúla, forgáshenger, forgáskúp, gömb, csonkagúla, csonkakúp felszínének és térfogatának kiszámítása konkrét feladatokban a megfelelő képletbe történő behelyettesítéssel
 - Térbeliség ábrázolása, modellek, metszetek készítése; térbeli számítások gyakorlati problémák kapcsán
 - Matematikai modellek megjelenítése számítógépen

Látható tehát, hogyan realizálódik az alsóbb szinten a téri képességek fejlesztéséhez köthető NAT tartalom- és követelményrendszer. Mindezek alapján elkészíthető a helyi szintű tanterv, tanmenet, illetve pedagógiai program, mely már a napi szintű, tanórai bontásban határozza meg a nevelési-oktatási folyamatot.

Az elkészített, téri képességek fejlesztésére irányuló segédanyagok matematika órákba történő beillesztésére a fentebb tárgyalt irányelvek a mérvadóak. A részletesebb, tanóra szintű folyamatot az 5.4-es fejezetben fejtjük ki.

5.2. PISA 2012 eredmények összefoglaló értékelése

Amikor matematikateljesítményeket (vagy továbblépve oktatási rendszereket) hasonlítunk össze, számos kritikus tényező adódik: a nemzeteken belüli szociális, kulturális, demográfiai, iskola-struktúra eltérések. A PISA felmérésekben mindezek ellenére közös standardokhoz igazított teljesítménymérés történik (a 15 éves korosztály körében), melynek magyarázata: felnőttként ugyanazokkal a kihívásokkal fognak szembesülni, és ugyanazért a munkáért

kell majd versenyezniük. Az egyes országoknak nemzetközi szintén is helyt kell állniuk, ennek alapkövét pedig az oktatási rendszer jelenti.

A PISA mérésekben első alkalommal 2003-ban volt kiemelt terület a matematika (feladatok számát illetően hangsúlyosabb terület). Ekkor alakították ki az OECD-országokra vonatkozó egységes pontrendszert, pontosabban az 500 pontos átlagot, 100 pontos szórással. 2012-ben például az OECD-országok alkalmazott matematika műveltség átlaga 494 pont volt, míg 2009-ben 496 pont volt. A magyar diákok 477 pontot teljesítettek 2012-ben, míg 2009-ben 490 pontot. Ezek az értékek még a standard hibát figyelembe véve is szignifikánsan alul maradnak az átlagon.

A PISA hat képességszintet határoz meg: az 1. szinten a legkönnyebb feladatok vannak, a hatodik szinten a legnehezebbek, és ennek alapján kapnak a tanulók besorolást (például a rendszer szerinti kettes szinten lévő tanuló nagy valószínűséggel nem tudja megoldani a hármas szintű feladatokat). A 2012-es felmérésen a magyarországi tanulók 28,1 %-a helyezkedik el az első szinten, ami a 2003-es méréshez képest 5,8 %-os növekedést jelent, míg a kiváló szinten teljesítők arányában nem történt szignifikáns változás.

A PISA mérések alkalmazott matematika négy tartalmi területe közül az egyik a „Tér és alakzat”. A négy részterület átlagait külön vizsgálva megállapítható, hogy egyedül a „Tér és alakzat” esetében vannak a diákok a teljes teszt átlaga alatt (3 ponttal).

Mivel a 2003-as mérésben és a 2012-es mérésben is kiemelt terület volt a matematika, így lehetőség nyílik a közel 10 év alatt történő változások megfigyelésére. Ha a 2003-as és 2012-es mérés közötti 13 pontos eredménycsökkenést mutató Magyarország sorát vizsgáljuk, az látszik, hogy a 2003-ban velünk egy szinten teljesítők között nem volt olyan ország, amelynek az eredménye 2012-re nagyobb mértékben csökkent volna, mint a magyar 15 éveseké. Ennek ellenére a „Tér és alakzat” részterület 2003-as mérésekor sem volt szignifikánsan alacsonyabb a 2012-es eredményekhez képest (szinten tartás történt).

A PISA felmérésekkel kapcsolatban Magyarországon nincs egységes álláspont kialakítva, számos érv és ellenérv szól az eredmények validitása mellett (például a 2003-as PISA felmérés során néhány matematikai feladat esetében bizonyos ideig hibás javítókulcs állt rendelkezésre, továbbá Magyarországon nem teremtették meg a kereszttantervi kompetenciák fejlesztésének feltételeit). Véleményünk szerint azonban mindenképpen érdemes kitekinteni olyan irányba is, hogy milyen típusú feladatokat kellene megoldani a tanulóknak ahhoz, hogy nemzetközi szinten is helyt tudjanak állni. Úgy tűnhet, hogy bizonyos esetekben a nálunk kimeneti követelményként szereplő érettségi néhány feladata nincs összhangban (didaktikai szempontból) a PISA mérés feladataival, azért az elmúlt 10 év alatt történt változások, törekvések (kompetencia-alapú oktatás, differenciált oktatás, kooperatív oktatás, IKT eszközökkel támogatott oktatás) valószínűleg iránymutató hatással vannak. Ezt erősíti az országos kompetenciamérés is (melyben a feladatok stílusai hasonló a PISA feladatokhoz), illetve az egyre több valóság-közeli matematikai feladatok terjedése a hétköznapi matematikaórákon (jó példa: sulinova adatbank, <http://tudas-bazis.sulinet.hu/hu/matematika/matematika>).

5.3. Előzetes állapotfelmérés összetevői és eredményei

A térszemléleti képesség összetevőinek egyik lehetséges modelljét alkalmaztuk a vizsgált környezetben, mely leginkább McGee modelljéhez hasonlított. A kétfaktoros modellben az Eliottól (1987) származó elnevezéseket használtuk, mert véleményünk szerint ez nem csupán a feladatok elkülönítést szolgálja, hanem a mutatja a megoldásukhoz szükséges részképességeket is. Az általunk vizsgált két faktor a rekogníció (felismerés) és a manipuláció. A felismerést McGee orientációs faktorához, a manipulációt pedig a vizualizációhoz hasonlóan definiálhatjuk. A felismerés során a látvány egészének befogadása, értelmezése a cél. A manipulációhoz tartoznak azok a feladatok, amelyekben térbeli objektumokkal kell műveleteket végezni (mozgatás, elfordítás, transzformálás). Itt tehát nem a kép összeállításának vizsgálata történik, hanem

a kép mentális reprezentációjával történő műveletek alkalmazásának vizsgálata.

A 8. táblázatban látható a két faktor szerinti feladatok besorolása (megjegyzendő, hogy az adott tevékenységek nem 100%-osan elkülöníthetőek a faktorok szerint, de mindegyik tevékenységet a domináns tényező szerint jelöltünk).

Rekogníció	Manipuláció
Rekonstrukció	Vetületi ábrázolás és olvasás
Kétdimenziós vizuális elképzelés	Szerkezetlátás
Térbeli alakzat felismerése, megjelenítése	Mentális forgatás
	Tárgy képzeleti manipulálása
	Téri konstrukció
	Dinamikalátás
	Láthatósági elrendezés

8. táblázat A vizsgált faktorok és feladattípusok

A választott kétfaktoros modellünkhöz a Séra-Kárpáti-Gulyás –féle, 2002-ben publikált és standardizált teszt sor illeszthető a legjobban, így a bemeneti és kimeneti méréseket is az említett teszthez tartozó feladatsorok valamelyikével végeztük (elkerülve a feladatok kompromittálódását). A tesztfeladatok részletesebb leírása, megoldási, javítási útmutatója megtalálható a függelékben. Kiemelendő, hogy az útmutatásban írt időtényezők szigorú betartása fontos volt a mérések során, hiszen az nem vezetett volna helyes irányba, ha a

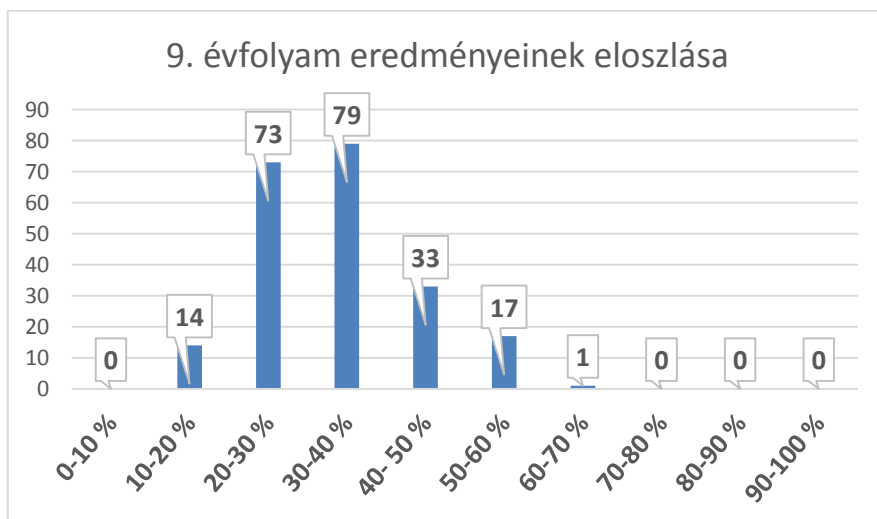
tanuló egy feladatot hibátlanul megold az arra számítható időkeret többszöröse alatt, a többi feladaton pedig alulteljesít idő hiányában.

A bemeneti méréseket a 3. fejezet 6. táblázata alapján végeztük. Alapvetően arra voltunk kíváncsiak, hogy a mindenkori 15 éves korosztály (a gimnáziumba belépő 9. évfolyam) megfelelő téri képességekkel rendelkezik-e. Az erre irányuló vizsgálatot 5 tanéven keresztül végeztük, ami így egy longitudinális, hosszmetzeti vizsgálatnak felel meg.

Minden tanévben általában 40 tanuló kezdte meg tanulmányait a 9. évfolyamon, így a bemeneti mérés mintájának nagysága egész pontosan $N = 217$.

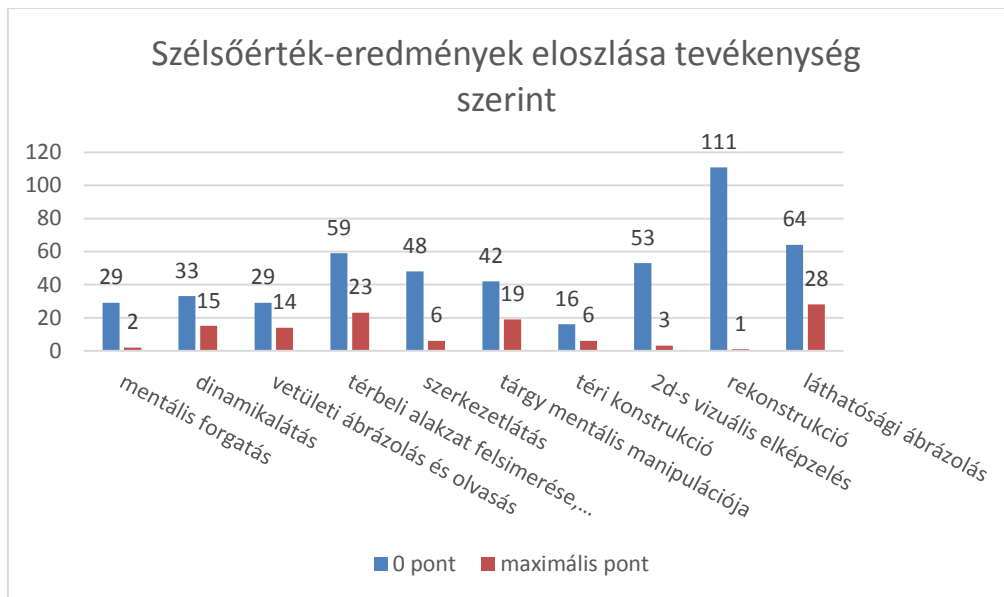
Az 5 tanév 5 különböző csoportjának teljesítménye között nem volt szignifikáns különbség $\alpha = 0,05$ szinten (egytényezős varianciaanalízis: $F_{\text{számított}} = 0,3995 < F_{\alpha} = 2,5787$).

A 3. diagram mutatja a tanulók összteljesítmény szerinti eloszlását, ahol a horizontális tengelyen a százalék-osztályok, a vertikális tengely pedig a tanulók száma szerepel. Az $N = 217$ mintában a tanulók 91,7 %-a (199 fő) teljesített 50% alatt.



3. diagram Mindenkori 9. évfolyamos tanulók bemeneti eredményei 5 tanévet felölelve
($N = 217$)

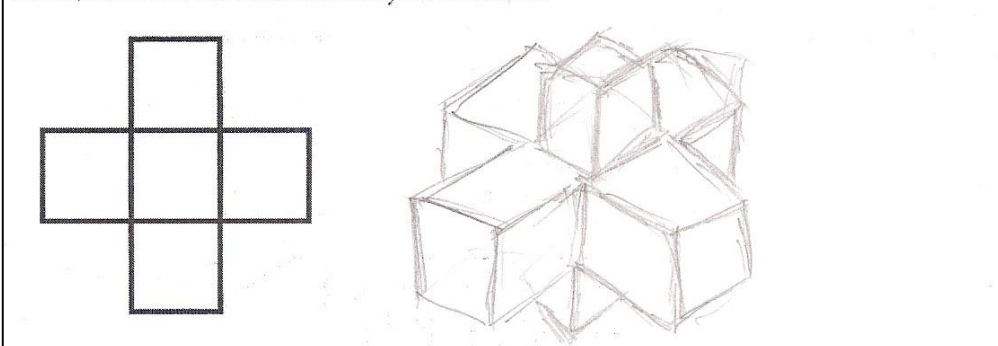
A szélsőségek (0 pont, maximális pont) vizsgálatából további következtetéseket tudunk levonni (4. diagram):



4. diagram A 0 pontot, illetve a maximális pontot elérők száma tevékenységenként

A 4. diagram alapján a rekonstrukciós feladat igen szélsőséges eredményekhez vezetett. A feladat leírását és az egyetlen, a megadott szempontok szerinti (a rajz egésze szerkezetében jó, minden nézete jó) hibátlan tanulói megoldást a 17. ábrán láthatjuk. Látható, hogy a tanuló törekedett a legmegfelelőbb axonometrikus kép kialakítására, ezen felül pedig radír segítségével a lapok láthatósági elrendezését is igyekezett figyelembe venni. A 217 tanulóból 111 (51,15 %) tanuló 0 pontot kapott a feladatra. Ez a tevékenység erőteljesen köthető a térbeli geometriai feladatok esetében készíthető vázlatrajz kivitelezéséhez.

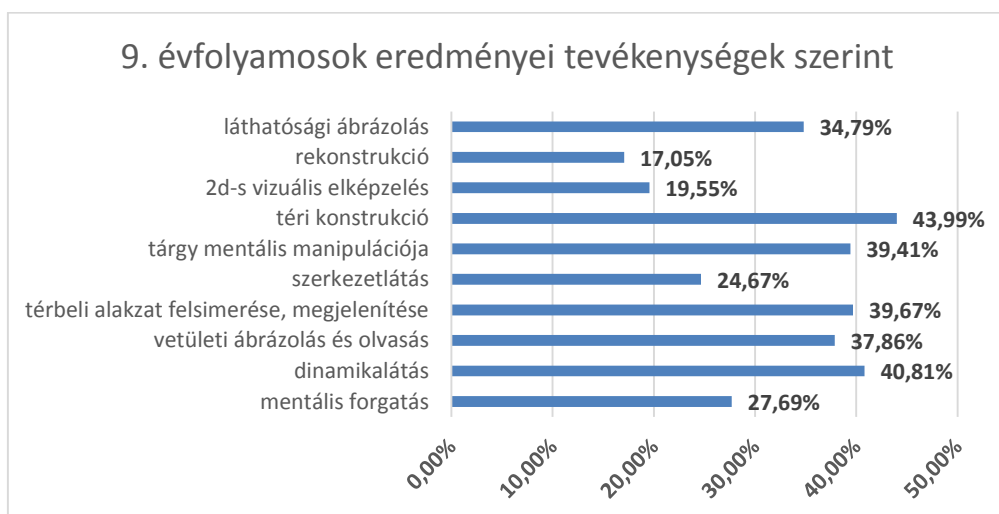
Rajzolj olyan építményt (perspektivikus vagy axonometrikus képét), amelyet előlről, hátulról, alulról, felülről és mindkét oldalról ilyennek látunk!



17. ábra Rekonstrukciós feladat és az egyetlen helyes tanulói megoldás

Két olyan tevékenység volt, melyeket a tanulók több, mint 10%-a oldott meg hibátlanul: térbeli alakzat felismerése és megjelenítése (23 tanuló, 10,59 %), és a láthatósági ábrázolás (28 tanuló, 12,9 %). A láthatósági feladatnál adott volt egy épület-együttes felülnézetből, különböző magasságú épületekkel. Feladat volt lerajzolni a látványt szemből nézve, a kitakart épületrészek (élek) elfedésével. A többi tevékenység esetében mindenhol 10% alatt maradt a hibátlan megoldást nyújtó tanulók száma.

Az 5. diagramon az eredmények tevékenységek szerinti eloszlását láthatjuk.



5. diagram Az eredmények megoszlása tevékenység szerint

A 2D-s vizuális elképzelés mérésére irányuló feladat hasonló eredménnyel zárult, mint a fentebb említett rekonstrukciós feladat. Azt látjuk, hogy 40% feletti teljesítmény 2 tevékenység esetén fordult elő: téri konstrukció (három elemből összetett test konstruálása bizonyos feltételeknek eleget téve) és dinamikalátás (összetekeredett zsinór két végének meghúzása után keletkezik-e csomó). Az 5. diagramon látható adatok alapján fontos megjegyeznünk, hogy egy tevékenység mérése során sem született a vizsgált mintán 50%-tól jobb eredmény.

A téri képességeket mérő tesztsoron kívül minden tanév elején és végén, intézményi szinten megszervezett bemeneti és kimeneti mérések voltak előírva. A mérési feladatlapon minden évben szerepelt egy térgeometriai jellegű feladat. A 9. évfolyamosok ezen a belső mérésen a tanévek elején átlagosan 28,6 %-os eredményt értek el az említett feladatban, illetve maximális pontot elérők száma az 5 tanév alatt mindösszesen 17 volt (7,83 %).

5.4. A fejlesztési folyamat leírása

A vizsgálati időszak hossza lehetővé tette gimnáziumi évfolyamok teljes, 4 éven keresztül (belépéstől kilépésig) fejlesztésének nyomon követését. A kutatás helyszínéül szolgáló közép fokú oktatási intézmény az országos kompetenciamérés adatai alapján minden évben az országos átlag körül teljesítménynél ingadozott, azaz mondhatjuk, hogy egy teljesen átlagos középiskoláról van szó (nem folyik kiemelkedően magas tehetséggondozás, de tanulási nehézségekkel, hátrányos helyzetű, külön nagymértékű fejlesztésre szoruló tanulókból sincs átlagon felül).

A nevelési-oktatási kísérlet felmenő rendszerben valósult meg, a mindenkori 'a' osztály képviselte a kontrollcsoportot, a 'b' osztály pedig a kísérleti csoportot. A részletesebb kutatás tárgyát képező évfolyam 2010/2011-es tanévben kezdett 9. évfolyamon, 9/a 23, és 9/b 21 fő tanulóval (az adott csoportban személyi változás nem történt a 4 tanév alatt). Ezen tanulók fejlesztése, kvantitatív és kvalitatív mérése, megfigyelése történt 4 tanéven keresztül.

Az 'a' osztály követte a már megszokott, hagyományosnak nevezett fejlesztési utat (kézbe vehető modellek) interaktív táblával ellátott tantermekben, a 'b' osztály pedig használta a hagyományos modelleket, interaktív táblát, és a GeoGebrát.

Az 5.1. fejezet 7. táblázatában látható, térgeometria órákra fordítható időkeret alapján két lehetőséget láttunk a fejlesztésre (és tapasztalatunk szerint érdemes kihasználni a lehetőségeket minél szélesebb spektrumban):

- közvetlen térlátás-fejlesztés: kifejezetten térgeometria órán van rá lehetőség, téri képesség-komponensek célirányosan történő fejlesztése (ez nagyrészt a 12. évfolyamra volt jellemző)
- közvetett módon történő fejlesztés: bármilyen jellegű matematikaórán 1-2 perc alatt prezentálható térgeometriai segédanyag, mely alapvető célja a tanuló szemléletének bővítése, elmélyülés az adott problémában (síkgeometria órán térbeli analóg problémák felvetése, algebrai azonosságokra geometriai modell bemutatása...)

A NAT és MOZAIK-kerettantervekben meghatározott cél- és követelmény-rendszerhez igazodó tanmenteket használtunk a fejlesztési időszak folyamán. Az 5 tanév alatt bizonyos évfolyamokhoz megjelentek már a felülvizsgált kerettantervhez tartozó, újabb tanmenetek, de mi a kutatásunk során végig a 2010-es verziót használtuk.

A GeoGebra alkalmazása többek között a következő tevékenységeket támogatta (néhány példával):

- szemléltetés (térbeli transzformációk)
- összefüggések felfedezése (hasonló testek térfogatának aránya)
- sejtések megfogalmazása (duális testekre vonatkozóan)
- kísérletezés (szélsőérték-feladatok)
- önellenőrzés (térgeometriai számítási feladat)

Mindezen tevékenységek megvalósulhattak frontálisan, illetve önállóan, akár differenciált tanórai keretek között egyaránt. Ezen kívül számos lehetőség adódhat a már meglévő, kidolgozott segédanyagok használatán túl az önálló tanulói produktumok készítésére is (otthoni munka, szorgalmi feladat).

A fejlesztéssel kapcsolatos fontos megjegyzés, hogy az adott osztályokat nem kizárólag egy tanár tanította végig az évek folyamán, így a kutatás során biztosított volt a tanárfüggetlenség, illetve a Pygmalion-effektus elkerülése, mely tényezők emelték a kutatás objektív módon történő elvégzését.

9. évfolyam	
tanóra sorszáma	tanóra témája
15.	Nevezetes algebrai azonosságok
43.	Pontok, egyenesek, síkok és ezek kölcsönös helyzete
44.	Néhány alapvető geometriai fogalom
54.	Nevezetes ponthalmazok a síkban és a térben
82.	A geometriai transzformáció fogalma, példák geometriai transzformációkra
10. évfolyam	
tanóra sorszáma	tanóra témája
52.	A hasonlósági transzformáció
61.	Hasonló testek térfogatának aránya
74.	Síkbeli és térbeli számítások a szögfüggvények segítségével
79.	Vektorok alkalmazása a síkban és a térben
11. évfolyam	
tanóra sorszáma	tanóra témája
69.	Vektorok a koordináta-rendszerben. Műveletek koordinátaikkal adott vektorokkal
70.	Két pont távolsága. Két vektor hajlásszöge
73.	A háromszög súlypontjának koordinátái
75-76.	Az egyenest meghatározó adatok a koordináta-rendszerben
89.	Kúpszeletek és egyenleteik a koordináta-rendszerben
12. évfolyam	
tanóra sorszáma	tanóra témája
22.	Tételek kölcsönös helyzete, tételek szöge
23.	Tételek távolsága
24.	A sík és a tér felbontása
25.	A testek osztályozása
26.	Szabályos testek
30.	Feladatok
31.	A térfogat fogalma, a hasáb és a henger térfogata
32.	Feladatok
33.	A gúla és a kúp felszíne és térfogata
34.	Térfogat és felszínszámítási feladatok

35.	A csonka gúla és a csonka kúp felszíne és térfogata
36.	Feladatok
37.	A gömb és részeinek felszíne és térfogata
38.	Egymásba írt testek
39-40.	Összetett feladatok
77-78.	Alapvető geometriai fogalmak
79-80.	Geometriai transzformációk
81-83.	Vektorok, szögfüggvények
88-90.	Koordinátageometria

9. táblázat A készített segédanyagok használatának lehetőségei tanórai szinten

A 9. táblázat tartalmazza a véleményünk szerint szóba jöhető lehetőségeket a GeoGebrás segédanyagok beiktatására. A használat segédanyagok teljes listája a függelékben megtalálható, kiegészítve néhány módszertani javaslattal.

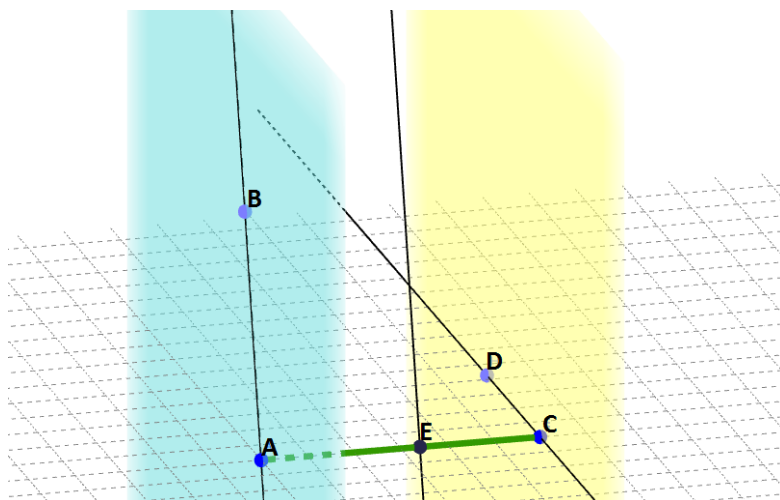
Jelen fejezetben néhány példát mutatunk, mely tapasztalataink szerint különösen hatékony volt a tanulók által elkövetett tipikus hibák, illetve nehézségek redukálására. A tanulók a következő néhány hibát tömegesen követték el:

- térelemek viszonyának nem megfelelő értelmezése (kitérő egyenesek távolsága és hajlásszöge; 2 sík, illetve sík és egyenes hajlásszöge)
- vektorokhoz kapcsolódó egyszerű térbeli feladat megoldása (a kocka egy csúcsából kiinduló 3 élét értelmezzük 3 vektorként, majd ezek segítségével fejezzük ki a kocka néhány nevezetesebb vonalát → Descartes-féle térbeli derékszögű koordináta-rendszer bevezetése)
- térgeometriai számításoknál a hajlásszögek nem megfelelő értelmezése
- térgeometriai számításoknál a szükséges metszet-síkidomokkal (például háromszögek) való műveletek, azok megtalálása
- egy sokszög (háromszög, téglalap, trapéz) valamely tengely körüli megforgatása után milyen térbeli alakzatot kapunk (forgástestek felszínének és térfogatának számítása)
- hogyan keletkezhet (szabályos) hatszög egy kocka síkmetszeteként
- alakzatok képe különböző nézőpontokból

- $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ algebrai azonosság memorizálása, alkalmazása
- hasonló testek felszínének és térfogatának arányaira vonatkozó összefüggések memorizálása, alkalmazása
- mértani helyek azonosítására irányuló feladatok esetében az összes megoldás megtalálásának hiánya (analogikus gondolkodás)
- felszín- és térfogatképletek nem megfelelő használata (formalizmuson alapuló tipikus hibák)

Az említett tipikus hibák esetében kifejezetten hatékonnak bizonyult a GeoGebra bevonása az adott matematikaórákon.

A kitérő egyenesek távolságának és hajlásszögének szemléltetésére egy tanuló készített igen ötletes segédanyagot (18. ábra):



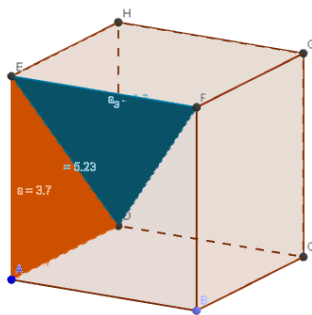
18. ábra Kitérő egyenesek távolsága és hajlásszöge dinamikus megjeleníthetőséggel, tanulói produktum

Az ábrán látható AB és CD pontok határozták meg a két kitérő egyenest. A tanuló a tankönyvben található ábráról vette az alapötletet, ahol egy kocka két megfelelő éle határozta meg a kitérő egyeneseket. Ez így speciális (szűkített) eset, ugyanis két párhuzamos síkból (kocka két szemközti lapja) nem tudjuk kimozdítani az egyeneseket, de azokon belül viszont szabadon mozgathatóak az egyenesek, így általánosabb esetet kaptunk, mint a kockás példa. Az E pont

segítségével tudjuk az AB egyenessel párhuzamos egyenest eltolni a másik síkra, ahol értelmezhetővé válik a kitérő egyenesek hajlásszöge is.

A vektorok esetében a konkrét feladatot megvalósító (tankönyvi példa alapján) munkalap az origóból kiinduló 3 ortonormált vektor, mely így egyúttal egy kockát is egyértelműen meghatároz. A 3 vektor segítségével különböző irányú lapátlók és testátlók meghatározása volt a cél. Ez a munkalap a szemléltetésen túl segítette a tanuló kísérletezését, önellenőrzését is. A parancssorba beírt, 3 adott vektorral való műveletsorok pedig azonnal megjelentek a dinamikus 3D felületen. Innen egyenes út vezethet a Descartes-féle térbeli derékszögű koordináta-rendszer bevezetéséhez.

A 19. ábra egy egyszerű feladaton keresztül mutatja be a térgeometria számításokat segítő segédanyag előnyeit. Testek felszínének, térfogatának számításakor számos esetben kell a hiányzó adatokat síkmetszetek segítségével számolni. Tapasztalataink szerint sok esetben gondot okoz a tanulóknak a megfelelő síkmetszet meglátása az adott térbeli objektumban (gondolhatunk itt például csonkakúppal kapcsolatos számítási feladatokra is).



Számítsuk ki a 3,7 cm élhosszúságú kocka testátójának hosszát?

él hossza:

[Új feladat](#)

Tekintsük például a DAE derékszögű háromszöget! ☒ DAEΔ

Erre a háromszögre felírható Pitagorasz-tétele.

A két befogót a-val, az átfogót t-el jelölve: (l a kocka egyik lapátója)

$$a^2 + a^2 = t^2$$

Behelyettesítve a Pitagorasz-tételbe: $3,7^2 + 3,7^2 = t^2$

$$13,69 + 13,69 = t^2$$

$$27,38 = t^2$$

Vonjunk mindkét oldalból négyzetgyököt, így:

$$5,23 = t$$

A 3,7 cm élhosszúságú kocka lapátójának hossza tehát 5,23 cm.

A testátó meghatározásához szükségünk van az utóbb kiszámolt lapátó hosszára is. Tekintsünk most egy olyan derékszögű háromszöget, amiben szerepel a lapátó, a testátó és a kocka éle is:

Tekintsük a DEF derékszögű háromszöget! ☒ DEFA

$$l^2 + a^2 = t^2$$

A DEF derékszögű háromszög derékszöge az E csúcsnál van.

l helyére írjuk a 5,23-t, a helyére a 3,7-t.

Pitagorasz-tételt ismét alkalmazhatjuk, mert ismert az a oldal

$$5,23^2 + 3,7^2 = t^2$$

(kezdeti feltétel), illetve kiszámoltuk a lapátó hosszát.

Ez a két hosszúság alkotja a DEF háromszög befogóit.

$$27,38 + 13,69 = t^2$$

Az átfogó, amit keresünk, pontosan a testátó hossza lesz, jelöljük ezt t-vel.

$$41,07 = t^2$$

$$6,41 = t$$

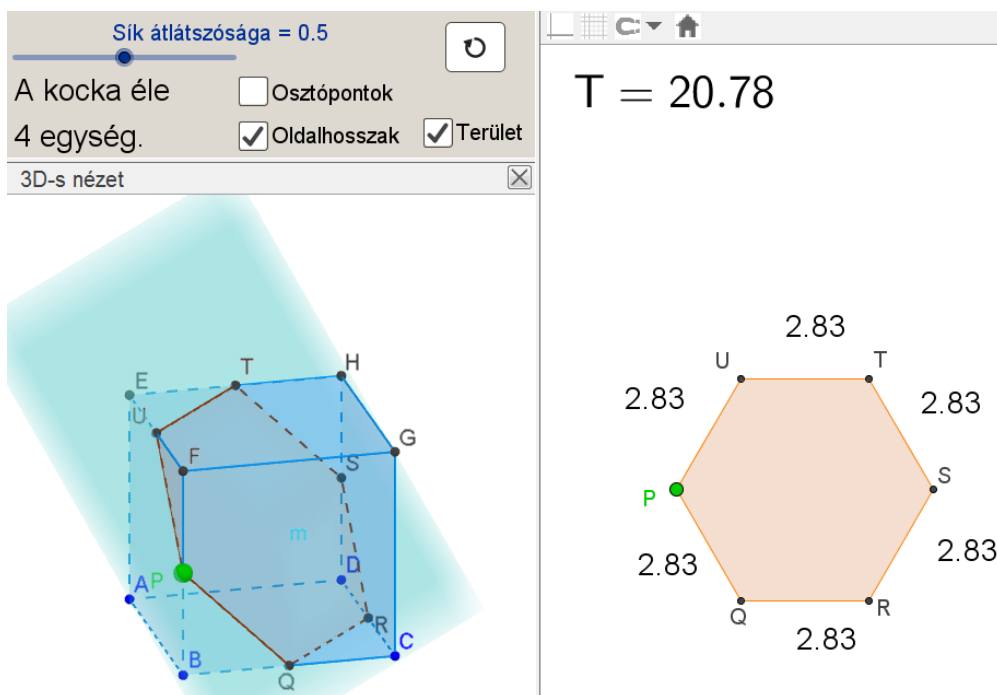
A 3,7 cm élhosszúságú kocka testátójának hossza tehát 6,41 cm hosszú.

19. ábra Térgeometriai számítások elvégzését és ellenőrzését segítő dinamikus, interaktív segédanyag

Az ilyen jellegű segédanyagok a következő lehetőségeket tartalmazhatják:

- dinamikus, interaktív 3D vázlatrajz készítése
- a feladatban megadott adatok beírása (beviteli mező)
- megjeleníthető tanári magyarázat (alkalmazandó összefüggések)
- a megoldás levezetése a feladat konkrét adataival (jelölőnégyzettel lehet a további lépéseket megjeleníteni)
- új feladat kérésének lehetősége (nyomógomb)

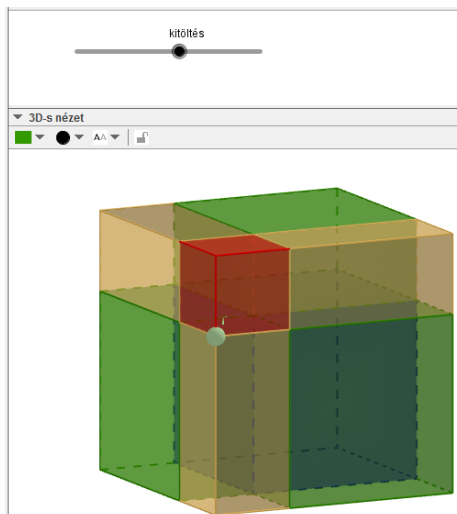
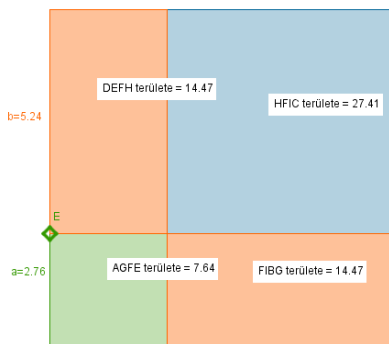
A 20. ábra a kocka hatszög-síkmetszetének előállítását bemutató segédanyagot tartalmazza. Itt lehetőség van a tanulónak kísérletezésre, a P pont (zöld) mozgatásával. A sík átlátszósága állítható, ami még szemléletesebben mutathatja a vágást. A segédanyag jobb munkalapján a síkmetszet néhány adata látható.



20. ábra Kocka hatszög-síkmetszeteinek előállítás, néhány kiegészítő információval

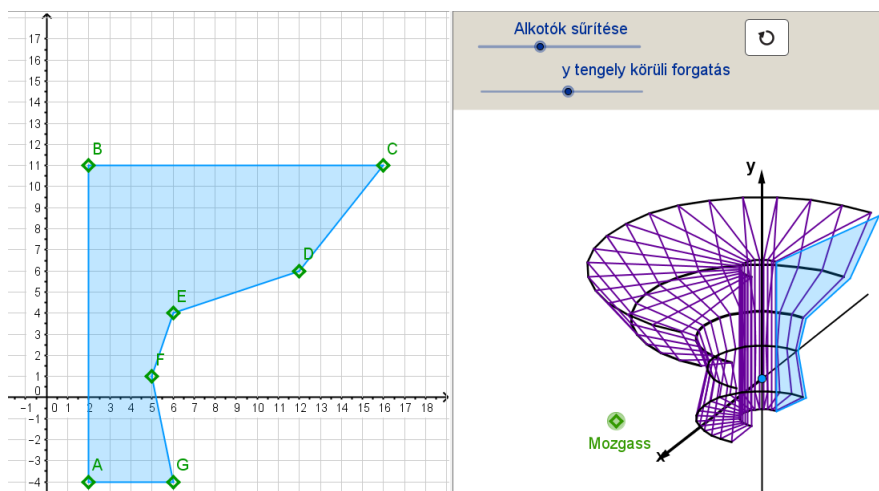
A 21. ábrán egy nem célirányosan téri képességek fejlesztésére irányuló munkalap látható, sokkal inkább az analógiás gondolkodásmód fejlesztése egy térbeli interpretációval. Két tag összegének köbére vonatkozóan tömeges tanulói hiba a képlet nem megfelelő megtanulása, és ebből következően az alkalmazása. A segédanyag jobb oldali munkalapján dinamikusan, interaktívan ellenőrizhető a két tag köbére vonatkozó algebrai azonosság. Ezen felül szemléletesen mutatja a tanulóknak, hogy a vágások után milyen részek keletkeznek: 2 kocka, és 3-3 egybevágó téglatest. Ezek a típusú interpretációk nagymértékben hozzásegítik a tanulókat a képletek helyes értelmezéséhez, memorizálásához (és ebből következően az alkalmazáshoz).

$$(a + b)^2 = (2.76 + 5.24)^2 = 8^2 = 64$$



21. ábra Két tag összegének négyzetére, és köbére vonatkozó geometriai interpretáció

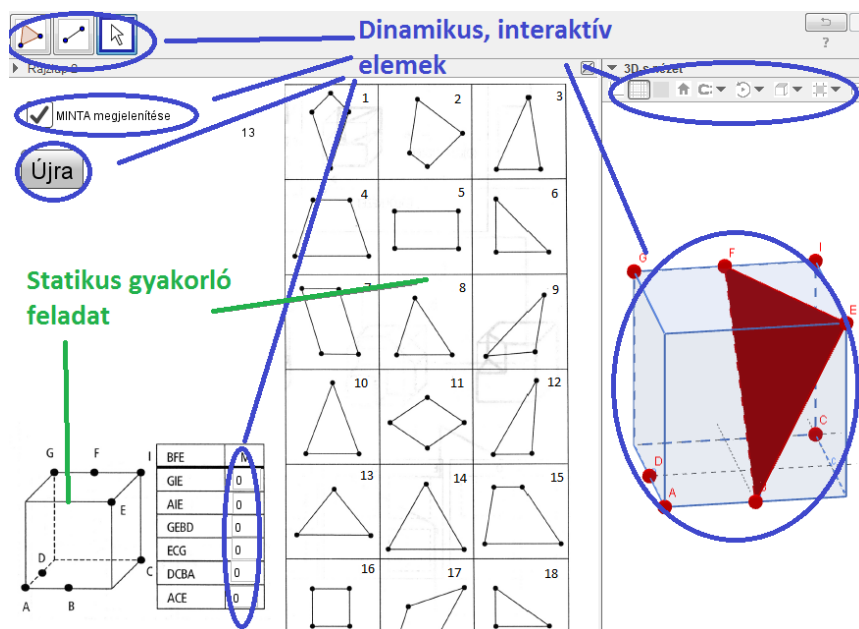
12. évfolyamon a térgeometriai számításos feladatok egy bizonyos típusánál, ahol a térbeli alakzatot egy síkidom valamilyen tengely körüli forgatásával kapunk, már az indulás nagy nehézséget okoz a tanulóknak: nem tudják azonosítani a térbeli alakzatot, amivel dolgozniuk kellene. A kiinduló alakzatok általában sokszögek, így a gyakorláshoz készíthetők speciális munkalapok (téglalapok, derékszögű trapézok megforgatása), vagy akár egy általános alakzat forgatásának szemléltetésére is. A 22. ábrán egy tetszőleges sokszög forgatásának bemutatását megvalósító munkalap látható. A baloldalon látható sokszög 7 csúcspontja tetszőlegesen mozgatható, a jobb oldali részen pedig több beállítási lehetőséget találunk a forgatásra vonatkozóan. Van lehetőségünk a felületet alkotó vonalak sűrítésére, az y tengely körüli forgatás szögét meghatározni (teljesen körbeforgatjuk, vagy esetleg bizonyos szögnél megállunk a forgatással), illetve a térbeli alakzatot mozgatni, körbeforgatni.



22. ábra Forgástestek származtatása

Térgeometriai számítások esetén a tanulók nehezen találják meg azt a síkmetszetet, mely alapján hiányzó adatokat tudnának számolni (például csomakakúpnál a megfelelő derékszögű háromszög vagy trapéz azonosítása). A 23. ábra egy statikus gyakorló feladat dinamikus adaptációját mutatja. A feladat: adott a kocka élén néhány pont (csúcs, élfelező pontok), majd az ezek segítségével adott sokszögeket kell beazonosítani. A GeoGebrás segédanyag a papírceruza alapú feladathoz a következőket teszi hozzá pluszban:

- megjeleníthető mintapélda a feladat könnyebb megértése céljából
- a keresett sokszöget a tanuló be tudja rajzolni a testesrabott eszköztár segítségével, és kísérletezhet, ellenőrizhet
- a vázlatrajz teljesen interaktív, dinamikus 3D felületen van (beépített nevezetes nézőpontok változtatása lehetséges)
- a megoldását a tanuló beírhatja a megfelelő beviteli mezőbe, és azonnali visszacsatolást kap a munkájáról (ez többféleképpen megvalósulhat: egyszerű jó vagy rossz, vagy esetleg bővebb magyarázat is kivitelezhető)
- feladat inicializálása (Újra gomb)



23. ábra Kocka síkmetszeteinek azonosítása dinamikus, interaktív segédanyagban

Végül, de nem utolsó sorban megemlítünk egy igen érdekes tanulói magatartást egy térgeometriai számítási feladat kapcsán. A feladat a következő: „50 kg cementet zsákból egy vödörbe szeretne áttölteni a kőműves. A vödör csonka kúp alakú, alsó alapköre 20 cm átmérőjű, a felső alapköre 28 cm átmérőjű, magassága pedig 27 cm. Sikeres lesz-e az áttöltés?”. Az áttöltés sikerességét természetesen úgy gondoljuk, hogy maradéktalanul átkerül a zsák tartalma a vödörbe.

A feladat megoldása során a következő esetek fordultak elő:

- a tanulók nem tudták elkezdni a feladatot (100 tanulóból 19 tanuló)
- a tanulók kiszámították a csonkakúp térfogatát, és megálltak, nem tudták, mi lehet a következő lépés (100 tanulóból 52 tanuló)
- a tanulók kiszámították a csonkakúp térfogatát, és azonosították az 50 kg cementet 50 literként, majd ez alapján 50000 cm^3 -ként, ami bizonyos anyagok esetében esetleg működőképes is lehetett volna (100 tanulóból 20 tanuló)

- a tanulók kiszámították a csonkakúp térfogatát, és jelezték, hogy szükségük lenne még információra (100 tanulóból 7 tanuló)
- a tanulók a feladat elolvasása és értelmezése után jelezték, hogy szükségük van még információra (100 tanulóból 2 tanuló)

Az említett tanulói magatartások megfigyelése alapján (a tanulók 9 %-a jelezte az információhiányt) fontos kiemelni, hogy témától, sőt tantárgytól függetlenül az adott célirányos szakmai fejlesztés mellett minden esetben ügyeljünk a tanulók kritikus problémaelemző képességének fejlesztésére, illetve a kapott eredményhez való kritikus hozzáállás kiemelésére, önellenőrzésre (az eredmény nagyságrendileg rendben van-e, valóságnak megfelelhet-e az eredmény, létezhet-e több megoldás is...).

Ezen felül a GeoGebrás munkalapok lehetőséget nyújtottak a tanulóknak az egyéni haladási ütemük biztosítására is (differenciált órák).

5.5. A nevelési-oktatási kísérlet hatásvizsgálata

A fejlesztés során két téri képességtaktort vizsgáltunk, a rekogníciót és a manipulációt (utóbbit nagyobb hangsúllyal), mindezt 3 rekognitív és 7 manipulatív részkomponens megfigyelésével.

A tanulók fejlődését, tevékenységüket 3 szempont alapján értékeltük:

- kognitív tényezők,
- affektív tényezők,
- pszichomotorikus tényezők.

Mindhárom szempont alapján elvégeztük:

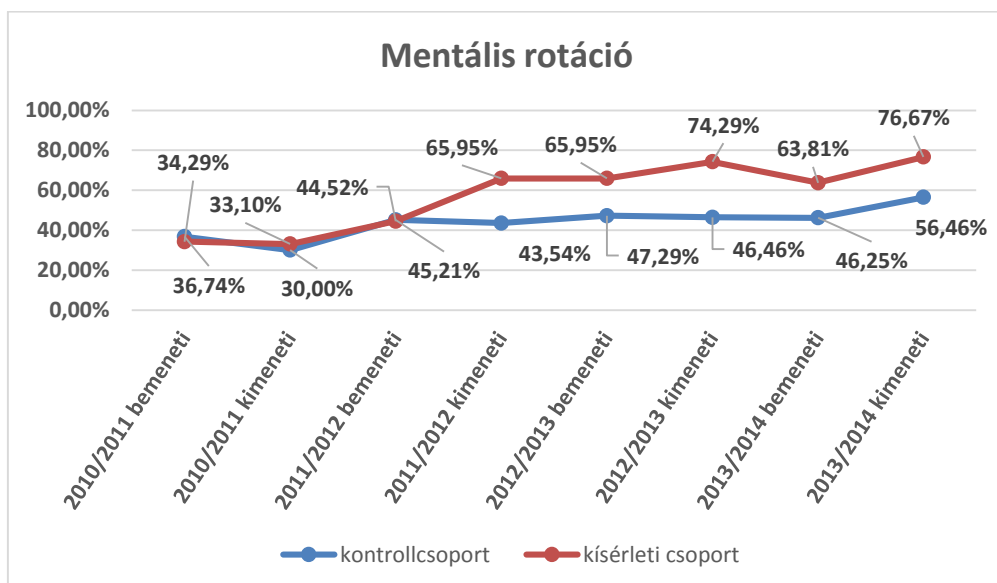
- a kísérleti és kontroll csoport összehasonlító elemzését,
- a kontroll csoport fejlődésének elemzését,
- a kísérleti csoport fejlődésének elemzését.

A megfigyelt csoportok 4 tanév során minden tanév elején, és végén írtak mérőteszteket (kognitív tényezők vizsgálata), így összesen 8 teszt van, melyeket csomópontoknak tekinthetünk, és a 8 teszt eredményei alapján tudjuk leírni a 4 tanév alatt végbement fejlődési mértéket folytonos módon. A fejlődési út természetesen tartalmazza a spontán fejlődést is, de a beiktatott független változó (a GeoGebra alkalmazásának) hatása így is lekövethető (hiszen mindkét csoport esetében megtörténik a spontán fejlődés).

A 3. fejezetben megfogalmazott második és harmadik hipotézist (mely a fejlődés mértékére vonatkozik) részképességenként vizsgáljuk meg, majd az így kapott eredmények összegzéséből adódik a válasz.

Nézzük meg részletesebben a mentális rotáció részképesség eredményeit. Feltevésünk az, hogy a mentális rotációs tevékenység 4 tanév alatti fejlődésének eredményei a kontroll csoport tanulói esetében alulmaradnak a kísérleti csoport tanulóinak eredményeihez képest. Szeretnénk a fejlődés mértékét mindkét csoport esetében számszerűsíteni, majd a mintánk esetében kapott eredmények alapján szeretnénk megállapításokat tenni az alapsokaságra nézve.

A 6. diagram egy kiemelt részképesség, a mentális rotációs tevékenység fejlődési görbáját mutatja a kísérleti és a kontroll csoport esetében, a 4 tanévet felölelve.



6. diagram Mentális rotációs tevékenység fejlődése 4 tanév alatt

A függőleges tengely a tanulói összteljesítmények átlagát mutatja százalékpontban, a vízszintes tengely pedig a mérés idejét (tanév), és típusát.

Vizsgáljuk meg először a kísérleti és a kontroll csoport közötti összefüggést:

Nullhipotézis: $H_0: \mu_1 = \mu_2$, azaz a kontroll csoport és a kísérleti csoport teljesítményei között nincs különbség.

Baloldali alternatív hipotézis: $H_1: \mu_1 < \mu_2$, azaz a kísérleti csoport szignifikánsan jobb eredményeket ért el átlagosan, mint a kontroll csoport.

$F_{\text{számított}} = 0,24 > F_{\alpha} = 0,23$, így féloldali Welch-próba alapján $|t| = |-2,31| = 2,31 > t_{\alpha} = 2,26$, azaz van szignifikáns különbség a két eredmény között $\alpha < 0,05$ szignifikanciaszint mellett, azaz a nullhipotézist elvetjük. Érdekes meghatározni az empirikus szignifikanciaszintet is, mely több információval szolgálhat.

A számított t értékhez tarozó, $d_f = 42$ szabadsági fokú empirikus szignifikanciaszint $P = 0,0126$. Azaz $\alpha < 0,0126$ szignifikanciaszinten fogadható el a

H_1 hipotézis, vagyis a kísérleti csoport szignifikánsan jobb eredményeket ért el átlagosan, mint a kontroll csoport.

Nézzük meg, hogyan alakultak az eredmények a kísérleti csoporton belül:

Nullhipotézis: $H_0: \mu_1 = \mu_2$, azaz a kísérleti csoport esetében nincs szignifikáns különbség a bemeneti átlagos teljesítmény, és a kimeneti átlagos teljesítmény között.

Baloldali alternatív hipotézis: $H_1: \mu_1 < \mu_2$, azaz a kísérleti csoport esetében a kimeneti átlagos teljesítmény szignifikánsan nagyobb, mint a bemeneti átlagos teljesítmény.

Hasonlítsuk össze a kísérleti csoport 2010-ben írt bementi, és 2014-ben írt kimeneti méréseit párosított féloldali t-próbával. Ekkor a próbastatisztika értéke $t = -6,5711$, amihez $d_f = 20$ szabadsági fok mellett $P = 0,000001055$ empirikus szignifikanciaszint tartozik. Ennek alapján mondható az alapsokaságra nézve, hogy $\alpha < 0,000001055$ szignifikanciaszinten fogadható el a H_1 hipotézis.

Szeretnénk számszerűsíteni a fejlődés mértékét, illetve általánosítani az alapsokaságra nézve, erre vonatkozóan a következő hipotézist tesszük fel:

Nullhipotézis: $H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0$, azaz a kísérleti csoport esetében nincs szignifikáns különbség (0 pontos) a bemeneti átlagos teljesítmény, és a kimeneti átlagos teljesítmény között.

Baloldali alternatív hipotézis: $H_1: \mu_1 - \mu_2 < -x$, azaz a kísérleti csoport esetében a kimeneti átlagos teljesítmény legalább $x > 0$ ponttal szignifikánsan nagyobb, mint a bemeneti átlagos teljesítmény.

Az előzőekben láthattuk, hogy az aktuális H_0 hipotézisünket elvethetjük (a nincs szignifikáns különbséget azonosnak tekinthetjük a 0 pontos eltéréssel), így a H_1 hipotézis esetében azt kell vizsgálnunk, hogy egy elfogadható szignifikanciaszint ($\alpha < 0,1$) mellett milyen mértékű fejlődés várható az alapsokaságra nézve a kísérleti csoport eredményei alapján.

A 6. diagrammon láthatjuk, hogy a kísérleti csoport esetében 42,38 százalékpontos a fejlődés a 4 tanév alatt az adott részképességre vonatkozóan. Ez a 20 pontos feladatokra vetítve közel 8,5 pontos javulást eredményez.

A $t = \frac{\text{várható érték} - (-x)}{\text{standard hiba}}$ próbastatisztikát alkalmazva keressük az x értékét egy elfogadható szignifikanciaszinten. A próbák végrehajtása után a 6 ponthoz már elfogadható szignifikanciaérték tartozik, ugyanis $t = \frac{-8,47 - (-6)}{1,22} = -2,02$ próbastatisztikához tartozó empirikus szignifikanciaszint $P = 0,0283$. Tehát $\alpha < 2,83\%$ szignifikanciaszint mellett fogadható el, hogy a kísérleti csoport esetén az átlagos kimeneti eredmények több mint 6 ponttal nagyobbak, mint az átlagos bemeneti eredmény. Így az alapsokaság esetén legalább 30 százalékpontos növekedés az elvárható.

Vizsgáljuk most meg hasonló módon a kontroll csoport fejlődését:

Nullhipotézis: $H_0: \mu_1 = \mu_2$, azaz a kontroll csoport esetében nincs szignifikáns különbség a bemeneti átlagos teljesítmény, és a kimeneti átlagos teljesítmény között.

Baloldali alternatív hipotézis: $H_1: \mu_1 < \mu_2$, azaz a kontroll csoport esetében a kimeneti átlagos teljesítmény szignifikánsan nagyobb, mint a bemeneti átlagos teljesítmény.

A párosított féloldali t -próbával kapjuk a $t = -4,01$ értéket, melyhez $d_f = 22$ szabadsági fok mellett $P = 0,00029$ empirikus szignifikanciaszint tartozik. Ennek alapján mondható az alapsokaságra nézve, hogy $\alpha < 0,00029$ szignifikanciaszinten fogadható el a H_1 hipotézis, vagyis a kontroll csoport is szignifikáns fejlődést mutatott az adott részképességre tekintve.

A fejlődés számszerűsítése:

A 6. diagram szerint a kontroll csoport fejlődése a 4 tanév alapján a mentális rotáció részképességre vonatkozóan közel 20 százalékpontos, mely 4 pontnak felel meg. Az alapsokaságra vonatkozóan:

Nullhipotézis: $H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0$, azaz a kontroll csoport esetében nincs szignifikáns különbség (0 pontos) a bemeneti átlagos teljesítmény, és a kimeneti átlagos teljesítmény között.

Jobboldali alternatív hipotézis: $H_1: \mu_1 - \mu_2 > -x$, azaz a kontroll csoport esetében a kimeneti átlagos teljesítmény kevesebb mint $x > 0$ ponttal szignifikánsan nagyobb, mint a bementi átlagos teljesítmény.

A próbák végrehajtása után a 3,5 ponthoz már elfogadható szignifikanciaérték tartozik, ugyanis $t = \frac{-5,75 - (-3,5)}{1,33} = -1,68$ próbastatisztikához tartozó empirikus szignifikanciaszint $P = 0,0524$. Tehát $\alpha < 5,24\%$ szignifikanciaszint mellett fogadható el, hogy a kontroll csoport esetén az átlagos kimeneti eredmények kevesebb mint 3,5 ponttal nagyobbak, mint az átlagos bemeneti eredmény. Így az alapsokaság esetén legfeljebb 17,5 százalékpontos növekedés az elvárható.

Az eddigiekben vizsgáltuk a mentális rotáció részképesség eredményeit, fejlődését. Összegezve az eddig leírtakat:

- a kísérleti csoport eredményei a fejlesztést követően szignifikánsan jobbak, mint a kontroll csoport eredményei,
- a kísérleti csoport eredményei alapján az alapsokaságra nézve legalább 30 százalékpontos fejlődés várható,
- a kontroll csoport eredményei alapján az alapsokaságra nézve legfeljebb 17,5 százalékpontos fejlődés várható.

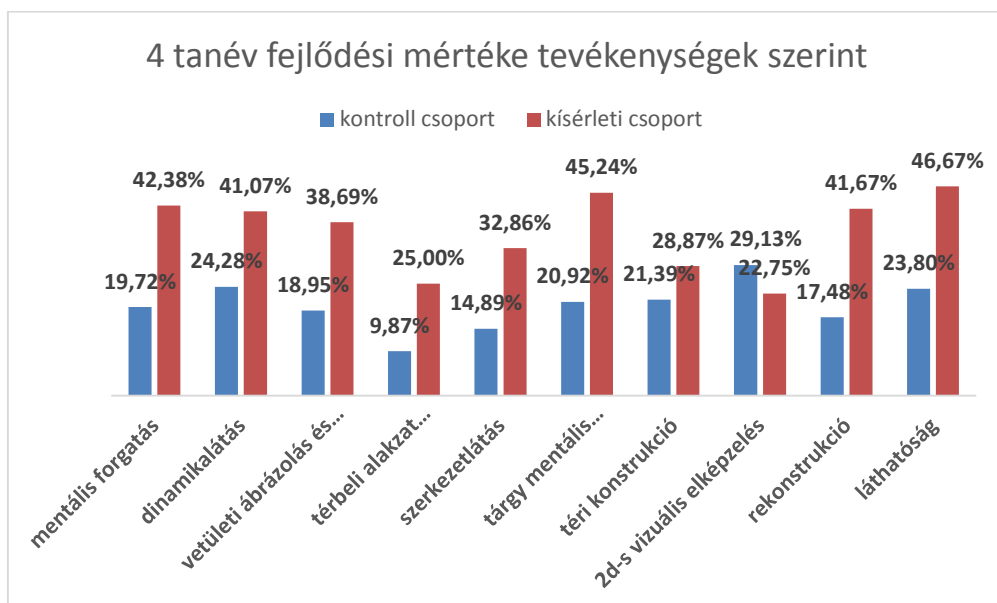
A 10. táblázat tartalmazza a további részképességekre vonatkozó vizsgálatok eredményeit. A táblázatban az adott H_1 hipotézis elfogadására vonatkozó empirikus szignifikanciaszintek és pontok szerepelnek.

Részképesség	Milyen szignifikancia-szinten különbözik a két csoport eredménye?	Kimutatható szignifikáns fejlődés a kísérleti csoportban?	Mekkora fejlődés várható a kísérleti csoport esetében? (legalább)	Kimutatható szignifikáns fejlődés a kontroll csoportban?	Mekkora fejlődés várható a kontroll csoport esetében? (legfeljebb)
térbeli alakzat felismerése, megjelenítése	$\alpha < 1,17\%$	$\alpha < 0,004\%$	1 pont $\alpha < 3,36\%$	$\alpha < 0,27\%$	0,5 pont $\alpha < 9,01\%$
2D-s vizuális elképzelés	$\alpha < 6,57\%$	$\alpha < 3,85\%$	0,5 pont $\alpha < 9,03\%$	$\alpha < 0,007\%$	1,5 pont $\alpha < 3,54\%$
rekonstrukció	$\alpha < 0,60\%$	$\alpha < 0,02\%$	1 pont $\alpha < 10,76\%$	$\alpha < 9,77\%$	≈ 0 pont
Vetületi ábrázolás és olvasás	$\alpha < 18,89\%$	$\alpha < 0,005\%$	2 pont $\alpha < 4,05\%$	$\alpha < 4,01\%$	2 pont $\alpha < 4,6\%$
Szerkezetlátás	$\alpha < 0,001\%$	$\alpha < 2,96\%$	0,5 pont $\alpha < 8,93\%$	$\alpha < 3,44\%$	0,3 pont $\alpha < 8,39\%$
Tárgy képzeleti manipulálása	$\alpha < 0,99\%$	$\alpha < 0,008\%$	1,5 pont $\alpha < 3,57\%$	$\alpha < 40,08\%$	≈ 0 pont
Téri konstrukció	$\alpha < 2,88\%$	$\alpha < 0,82\%$	2 pont $\alpha < 7,89\%$	$\alpha < 16,68\%$	1 pont $\alpha < 7,05\%$
Dinamikalátás	$\alpha < 2,91\%$	$\alpha < 0,002\%$	2,5 pont $\alpha < 5,93\%$	$\alpha < 10,9\%$	0,5 pont $\alpha < 2,68\%$
Láthatósági elrendezés	$\alpha < 1,38\%$	$\alpha < 0,03\%$	1 pont $\alpha < 9,78\%$	$\alpha < 12,65\%$	0,5 pont $\alpha < 6,97\%$

10. táblázat A hipotézisvizsgálatokhoz tartozó empirikus szignifikanciaszintek és pontszámok

A 2D-s vizuális elképzelés, illetve vetületi ábrázolás és olvasás részképességek esetében nem mutatható ki szignifikáns különbség a kísérleti és kontroll csoport fejlődésében. Ezzel összhangban vannak a csoportokon belüli eredmények is.

Végül nézzük meg a 4 tanév során történt fejlődési mértékeket a tevékenységek szerint (7. diagram):



7. diagram A 4 tanév alatt bekövetkezett fejlődés a tevékenységek szerint

A diagramon látható, hogy a GeoGebra kiemelkedően hatékony eszköz volt a mentális forgatás, tárgy mentális manipulációja, rekonstrukció és láthatósági ábrázolás fejlesztésének terén. Kevésbé volt hatékony a téri konstrukció, 2D-s vizuális elképzelés fejlesztésekor.

Összehasonlítva a kontrollcsoport, és a kísérleti csoport fejlődési mértékét a 4 tanévre vonatkozóan, megállapíthatjuk, hogy $\alpha = 0,05$ szignifikanciaszint mellett a két csoport fejlődési mértéke szignifikánsan különbözik egymástól, azaz a GeoGebrával (is) fejlesztett kísérleti csoport jelentősen nagyobb fejlődést ért el, ami minimum 95%-os valószínűséggel az új módszernek köszönhető ($F_{\text{számított}} = 0,53 > F_{\alpha} = 0,31$, így Welch-próba alapján $|t| = |-5,09| = 5,09 > t_{\alpha} = 2,11$).

A kognitív tényezőkkel kapcsolatos tapasztalatokhoz tartozik, hogy a tanulói feladatmegoldó stratégiákban is érezhető volt a különbség: a kísérleti csoport magabiztosabban és pontosabban készített vázlatrajzot térobjektumokról, tudatosan használtak kísérletező módszereket, és az önellenőrzés is mindig jelen volt a feladatmegoldásuk során. Ezeken felül a különböző tanulói stratégiák részletesebb elemzésekre is alkalmas lehet a GeoGebra (a tanulói produktumok

esetében lépésre bontva nyomon követhető az elvégzett tevékenységük sorozata).

A kognitív vizsgálatok után térjünk rá az affektív tényezőkkel kapcsolatos tapasztalatokra. Minden tanuló kitöltött egy Claus-féle módosított kérdőívet, mely a szokásos kérdéseken túl (mennyire szereti a matematikát, ezen belül a geometriát, vannak-e félelmei a matematikaórákon...) SWOT-elemzést is tartalmazott. Célunk volt kideríteni a tanulók matematikához való hozzáállását, illetve véleményük alapján a potenciális változtatnivalókat a matematikaórával kapcsolatban. Nézzünk meg ezek közül néhány érdekesebb eredményt:

Kérdés	Igen	Nem
A matematika az első három legkedveltebb tantárgyam közé tartozik.	168	264
Úgy vélem, hogy az iskola befejezése után semmi közöm nem lesz a matematikához.	342	90
Ha sok időm lenne, akkor szórakozásból is foglalkoznék a matematikával.	23	409
Szívesebben oldok meg 5 egyszerűbb feladatot, mint egy nehéz, gondolkodtató feladatot.	418	14
Egy nehéz feladatot szívesebben oldok meg egyedül.	21	412

11. táblázat Claus-féle kérdőív néhány eredménye (N=432)

A 11. táblázatból számos, a tanár számára érdekes tanulói hozzáállás tükröződik, mely meghatározó tényező lehet a mindennapos tanulási-tanítási folyamat szervezésében (a tárgy megszerettetése céljából történő tevékenységek).

Jelen kutatásunk egyik fő kérdése a tanulók és számítógépes eszközök kapcsolatának viszonya motiváció szempontjából. Arra a kérdésre, hogy a matematikaórán szeretik-e használni a tanulók a számítógépet, a következő válaszok adódtak:

- Igen: 345 (79,86 %)
- Nem: 32 (7,4 %)
- Nekem mindegy: 55 (12,74 %)

Ezzel alapvetően elégedett lehetünk, de lenne még lehetőség javítani az igen válaszra adott arányon.

A 12. táblázatban láthatunk néhány tanulói véleményt a matematikaóráról általában:

Ami jó a matematikaórán	Amin változtatnák a matematikaórán
„általában értem a feladatokat, főleg ha számológépen is csináljuk”	„többet gyakorolni a dolgozatok előtt”
„a tanár humora”	„nem jó 2 óra egymás után”
„alaposan átnézünk mindent”	„sok a dolgozat”
„fegyelem”	„az ellenőrzőbeszedésen”
„táblai munka” (interaktív)	„gyorsan haladunk, néha lehetne lassabban is”

12. táblázat Jó és változtatni való komponensek a matematikaórán, tanulói vélemények alapján

A következőkben arra keressük a választ, hogy a GeoGebra használata hozzájárul-e ahhoz, hogy a tanulók jobban megkedveljék a matematikát.

	első 3 legkedveltebb tárgy közül egyik a matematika	matematika nem a legkedveltebb tárgyak közé tartozik
GeoGebrával	93	119
GeoGebra nélkül	75	145

	első 3 legkedveltebb tárgy közül egyik a matematika	matematika nem a legkedveltebb tárgyak közé tartozik
GeoGebrával	82,44	129,55
GeoGebra nélkül	85,55	134,44

13. táblázat Kontingencia táblázat a megfigyelt gyakorisági értékekkel (fent) és a segéd-kontingencia táblázat a várható gyakoriság értékekkel (alul)

A 13. táblázat a Claus-féle kérdőív alapján adott válaszok gyakoriságát tartalmazza, kontingencia táblázatban (és a hozzá tartozó segéd-kontingencia táblázatot). Mivel nominális adatok függőségéről kell döntenünk, így a Pearson-féle Khi-négyzet próbát alkalmazzuk. Nullhipotézisünk szerint a két változó között nincs függőségi viszony, azaz a GeoGebra használata nem befolyásolja a matematikaóra megkedvelését.

A táblázat, és a kapott értékek kielégítik a próba alkalmazásához szükséges feltételeket (minden entitás egyértelműen egy cellába tartozik, és a gyakoriságok mindegyike >5). Az $\alpha = 0,05$ szintű elsőfajú hibához a $(2-1)(2-1) = 1$ szabadságfokú khi-négyzet eloszlás esetén a 3,71 számérték tartozik. A próbastatisztika értéke 4,34. Mivel a $4,34 > 3,71$, így elvetjük a nullhipotézist, azaz nem fogadható el az a feltételezés, miszerint nincs összefüggés a GeoGebra használata és a matematikaóra megkedvelése között. Arra a következtetésre jutottunk, hogy a GeoGebrát használó tanulók körében szignifikánsan nagyobb arányban kedvelik a matematikaórákat.

A pszichomotorikus tényezőkkel kapcsolatos célokat a tapasztalatok, és a fentebb leírt eredmények következtetései alapján, hatékonyabb módon tudjuk teljesíteni a GeoGebra bevonásával:

- a feladatok megoldásainak tiszta, világos, áttekinthető rögzítése,
- szabadkézi rajz- és vázlatkészítés,
- modellek készítése,
- számítógép megfelelő kezelése.

6. Egy új irányít képviselő mérési metódus kidolgozása

6.1. Statikus tesztek dinamikus GeoGebra-adaptációja

2000-ben került kidolgozásra és standardizálásra egy téri képességek mérésére irányuló papír-ceruza alapú teszt sor (Séra-Kárpáti-Gulyás, 9.1. függelék), amely az általános képzés során elsősorban rajz, matematika és technika tárgyak keretében fejleszthető térszemlélet fejlettségének kimutatására szolgál. A teszt komplex olyan értelemben, hogy pedagógiai szempontokat is figyelembe vevő, alapvetően normaorientált képességteszt, másrészt több korcsoport mérésére is alkalmas (bizonyos megszorítások mellett).

Az említett teszt feladatai két képességtornak megfelelő besorolást kaphatnak (hasonló módon, mint a forrás statikus teszt): rekogníció és manipuláció. Ezek McGee orientációs faktorához és a vizualizációhoz hasonlóan definiálhatóak.

A teszt A, B és C sorból áll, mindegyik 9-9 feladatot tartalmaz, különböző részképességekkel.

Így 27 feladatot kapunk, melyek között van átfedés. Ezek alapján a GeoGebrás adaptációkhoz úgy juthatunk, hogy mérlegeljük annak létjogosultságát.

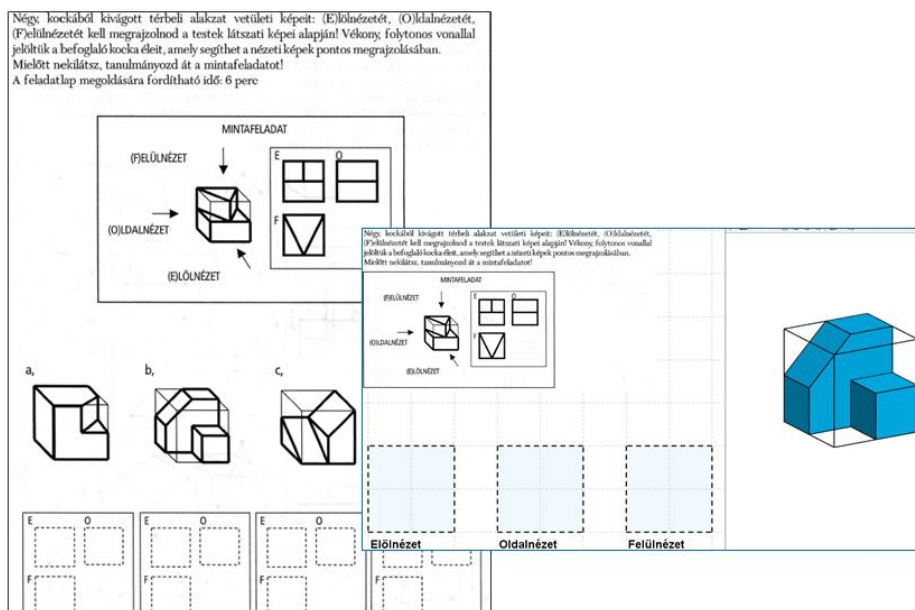
Elképzelhető, hogy a statikus feladat nem alkalmas egyáltalán a dinamikus adaptációra, vagy csak kis mértékben, esetleg a dinamikus volta miatt megszűnik teszt létezni, hiszen a megfelelő beállításokkal rögtön adja a megoldást magát is. Létezhet olyan eset is, amikor az adaptáció technikai nehézségekbe ütközik a megvalósítás szempontjából (bonyolult 3D-s ábra leképezése).

Az adaptáció során így a statikus feladatok kétféle besorolást kaphatnak:

- a feladat alkalmas a dinamikus adaptációra, lehet vele mérni és esetlegesen fejleszteni is (apróbb változtatások mellett),
- a feladat alkalmatlan a dinamikus adaptációra (megvalósítása nehézkes vagy elveszti a létjogosultságát a dinamikusság következtében).

Nézzünk meg néhány példát az említett besorolásokhoz.

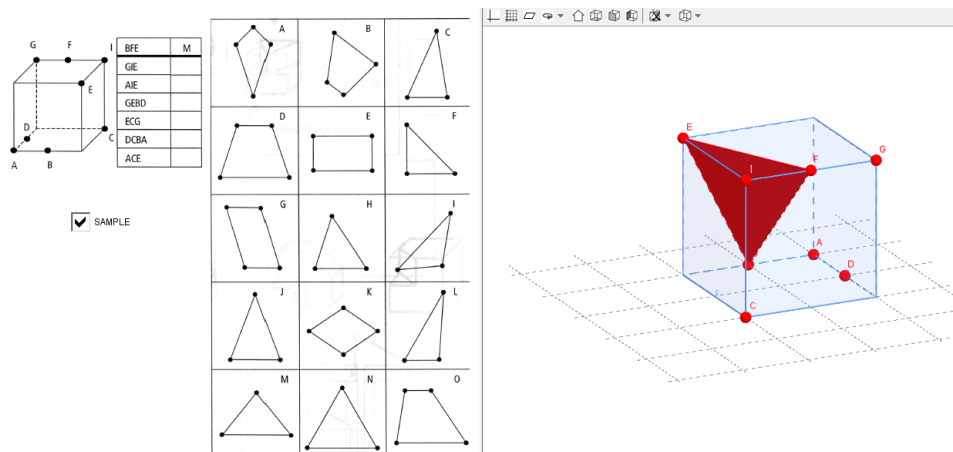
Az 24. ábrán az A3 kódú statikus tesztfeladat b alfeladatát és dinamikus GeoGebra-adaptációját láthatjuk. A testek látszati képei alapján kell megrajzolni a testek vetületi képeit a különböző nézőpontokból (előlnézet, oldalnézet, felülnézet). A dinamikus munkalapon a jobb oldali munkaterületen a térbeli alakzat teljesen körbeforgatható, sőt vannak beépített, előre definiált automata nézet-beállítási lehetőségek. A feladat dinamikus megvalósítva elveszti a létjogosultságát mérő eszközként, hiszen egy kattintással adódhat a megoldás. Tanórai fejlesztésre, gyakorlásra azonban alkalmas lehet, a tanuló eszközkészlet-korlátozást beépítve rajzolja meg a GeoGebrában a vetületi képet (szakaszból felépítve), és beépített ellenőrzésfunkcióval kaphat visszacsatolást, illetve ellenőrizheti a dinamikus forgatással is megoldását.



24. ábra A3 kódú feladat statikus (balra) és dinamikus megvalósítása (jobbra)

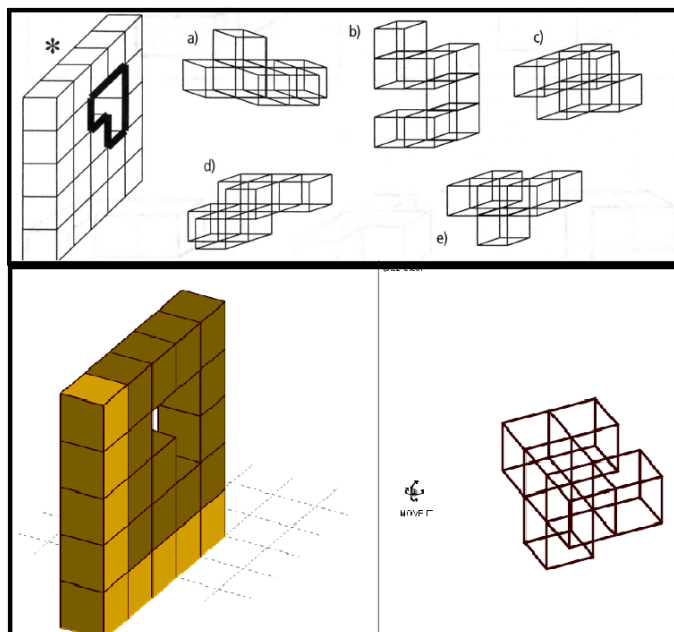
Nézzünk pár példát olyan adaptációkra, melyek tudnak mérőeszközként (is) funkcionálni. A 25. ábrán az A4 dinamikus megvalósítása látható. A kockán berajzolt pontok a kocka csúcsai vagy élfelező pontjai. A jobb oldali ábrából kell választania a tanulónak, hogy a megadott pontokat összekötve milyen

alakzathoz jutunk. A statikus teszt mintájára bekapcsolható egy jelölőnégyzet-
tel egy mintapélda, mely a tanulót segítheti a feladat értelmezésében.



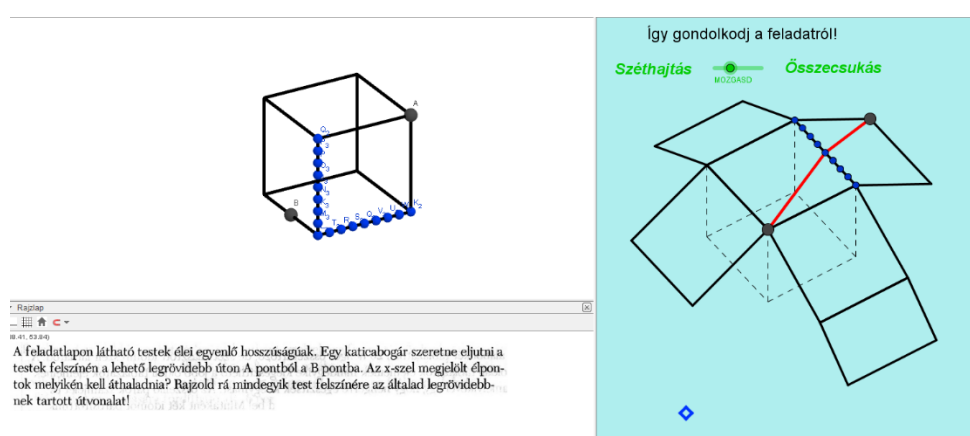
25. ábra A4 tesztfeladat dinamikus adaptációja

Az A4 dinamikus tesztfeladatot fejlesztő értékelésre is tudjuk használni némi átalakítás után: beviteli mezők elhelyezésével a tanuló megadhatja a munkalapon a megoldását, amelyet a program ki is értékel neki, és szöveges választ/további segítséget ad. Az említett munkalap magas fokú interaktivitása miatt nagy segítséget nyújtott a tanulóknak az órán.



26. ábra A6 feladat statikus (fent) és dinamikus (lent) megvalósításban

Az A6 statikus feladat e) tételének dinamikus adaptációját látjuk a 26. ábrán. Feladata a tanulónak eldönteni, hogy mely építmény fér át a baloldalon megadott térbeli alakzaton lévő lyukon. Elsőre úgy tűnhet, hogy a dinamikuság elrontja a mérés lehetőségét, de a tapasztalat azt igazolja, hogy még így sem olyan egyértelműen tudják a tanulók a megoldást megtalálni, azaz a mi nézőpontunkhoz helyesen igazítani az építményeket. Fejlesztésre alkalmas munkalapként lehet a tanulónak visszacsatolást adni, ha a helyes nézőpontban állítja be a jobb oldali alakzatot, és akár animációval szemléltetve azt, hogy valóban átfér az alakzat a lyukon.



27. ábra B1 dinamikus tesztfeladat

A 27. ábrán a B1 kódú dinamikus tesztfeladatot látjuk (a kocka lapjaira rajzolt útvonal hogy néz ki a hálóján). A bal felső munkaterületen a szöveghez tartozó ábra található, teljesen 3D dinamikusan. A feladat jobb oldalán egy teljesen kidolgozott mintapélda van, a megoldás mutatásának lehetőségével dinamikus 3D-ben. Ez szükséges, mert a tapasztalat szerint a tanulóknak az ilyen jellegű feladatok értelmezése nehezebb. Természetesen a mintapélda más konfigurációkat tartalmaz, de lényegét megőrzi.

Végül 7 feladat került a dinamikus tesztsorba, mely alkalmas mérésre, és ebből 4 olyan, mely kis megszorítás mellett fejlesztő értékelésre is alkalmas. Ezeken kívül 8 olyan feladat van, melyek a mérést megelőzően alkalmasak

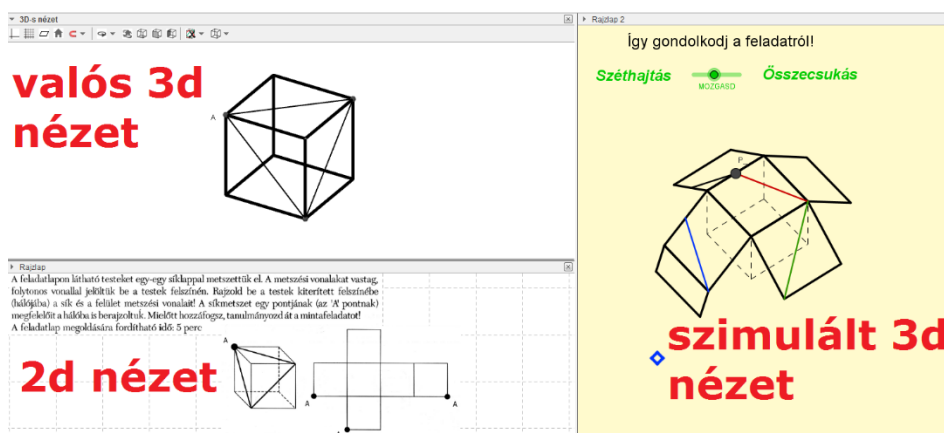
dinamikus munkalapként való alkalmazásra/gyakorlásra az órákon. Természetesen az így kapott dinamikus feladatok az eredmények tükrében bővíthetők a statikus mérőfeladatok mintájára, igazodva a téri képességrendszer felépítéséhez. Sok feladat esetében van a), b) és c) alpont is, így mennyiség szempontjából is egy használható feladatbankhoz juthatunk. 8. munkalapként bekerült a tesztbe a mozgási és egyéb lehetőségeket bemutató munkalap is, egy tutorial, mely a tanulók technikai háttértudását erősíti, hogy ne induljon senki hátránnyal az új környezet miatt.

A feladatok elemzése során fontos, hogy a dinamikus mérőfeladatok több részképességet is érintsenek. Ilyen szempontból a kétfaktoros modellnek elegendő tesz a 7 feladat, illetve ezeken belül 4 alképességet tudunk vizsgálni jelenleg (a statikus teszt besorolása alapján):

- térbeli alakzat felismerése és megjelenítése (A8): ebben a feladatban a rendelkezésre álló vizuális információk ellentmondásosnak tűnnek, zsúfoltak, illetve az ábra zajos, vagyis sok részletet tartalmaz.
- szerkezet átlátása (B1, C4, A4): a viszonyok, arányok megjelenítésén keresztül a belső kép pontosságának mérésére szolgál. Méri, hogy a belső szemléleti kép hogyan tükrözi a tárgy valódi viszonyait. A feladat megoldási szintje a nézőpontból, illetve ábrázolásból adódó torzulások korrekciójának pontosságára utal (a B1 esetében egyfajta tárgyi kognitív térkép pontosságára). Alapobjekumunk a közoktatásban leggyakrabban előforduló test, a kocka. Ezzel kell különböző műveleteket végrehajtani a felszínen és a kocka belsejében.
- 3D alakzat mentális rotációja: (A6, C7): a C7-es feladat egy kockaforgatási feladat. Itt a téri reprezentációk manipulálásán kívül más megoldási stratégia is felmerülhet. Az A6 összetett feladat, amely egy bizonytalan körvonalú ábra felismeréséből és az így összeállt alakzat képzeleti forgatásából, vagy különböző vetületeinek azonosításából áll.

- Tárgy képzeleti manipulálása (C5): olyan tárgyi tevékenységek fázisa-
inak képzeleti követése a feladat, amelyek testek vagy síkidomok ösz-
szetett térbeli transzformációiból állnak.

Technikai kivitelezés szempontjából érdekes megemlíteni a GeoGebra le-
hetőségeit a térbeli objektumok megjelenítésére. Jelenleg az 5.0 Béta verzió
lehet alkalmas erre alapértelmezett módon. Probléma, hogy ez a verzió még
eléggé fejlesztési fázisban van, bizonyos körülmények között instabillá válhat-
nak a munkalapok. Ezt megtámogatni/kiegészíteni lehetőség van a már 4.1 és
4.2 fejezetekben tárgyalt módon, mely stabilan alkalmas dinamikus 3D-s ele-
mek megjelenítésére, és a velük való különböző manipulációkra. Összességé-
ben tehát a statikus tesztek dinamikus adaptálása során a két lehetőség előnyeit
kell ötvöznünk, hogy kaphassunk egy optimális eszközkészletet (28. ábra).



28. ábra Dinamikus térteszt megvalósítása GeoGebrával

6.2. Pilot vizsgálati eredmények értékelése, tapasztalatok

A vizsgálat menete

A 7 feladatot tételeire bontva 14 item került a pilot vizsgálatba. A vizsgálat
lebonyolítása egy átlagos kisvárosi középfokú oktatási intézményben (II. Rá-
kóczi Ferenc Általános Iskola, Gimnázium és Szakközépiskola, Szécsény,
Nógrád megye) történt 2013. október 8-án és 9-én, 115 tanuló bevonásával (58
10. évfolyamos és 57 12. évfolyamos tanuló). A teszt nem volt kivitelezhető

online felületen, így a teszteket egy mindenki által elérhető központi hálózati meghajtóról érték el a tanulók, a válaszaikat pedig lapra rögzítették. Némely esetben módosítani kellett a statikus feladatok pontozására vonatkozó utasításokat, de természetesen az időtényező is ilyen jellegű változó volt. A dinamikus tesztre összességében 45 perc állt rendelkezésre a tanulóknak, ami a tapasztalatok alapján megfelelő mértékűnek bizonyult. Mind a 115 tanuló kitöltötte a statikus tesztet is (ezekkel az eredményekkel kerül majd a későbbiekben összehasonlításra a két teszt).

Az oktatási intézményben a lebonyolításhoz szükséges technikai követelmények adottak voltak: a GeoGebra legfrissebb verziója telepítve minden szükséges kiegészítő plug-in-nel, központi meghajtó elérése, megfelelő számú számítógép. A személyes jelenlét fontosnak bizonyult, némely esetben felmerült értelmezési problémák miatt, melyek az óta kiküszöbölésre kerültek.

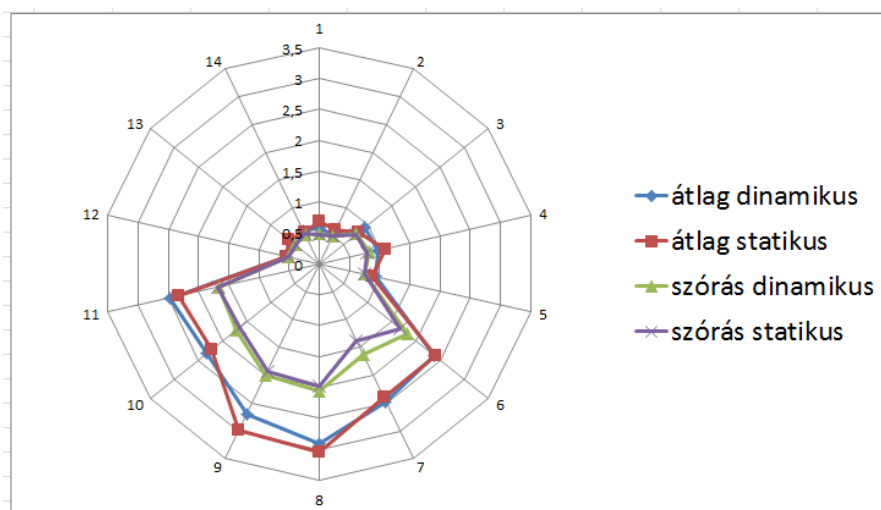
Az érvényesség ellenőrzése

Mint láthattuk a 2. fejezetben, a térszemléleti képességet a másodlagos vizuális információk feldolgozásáért felelős képességként definiáltuk. Ebből kifolyólag ez az általános megismerési képesség részét képezi (a statikus teszt is ez alapján kívánta a tudást mérni).

A kongruens validitás vizsgálata jelen esetben szükséges és létjogosult, hiszen a dinamikus teszt nem egy új összetevőkből definiált tesztsor. Azt várjuk, hogy a dinamikus teszt eredményei a statikus teszt eredményeivel jól korreláljanak (adott szignifikanciaszint mellett), illetve némely esetben várható egy esetleges új részképesség-rendszerbe való besorolás (gondoljunk csak például a mentális forgatásra, ami a dinamikus elemek miatt előreláthatólag más részképességet fog mérni). A megfelelő korrelációs mérték mutathatja, hogy a teszt validitása megfelelő, ugyanakkor a fentebb említett problémára nem adhat teljes mértékben választ (azaz az új teszt alkalmas-e valaminek a mérésére, és ha igen, mely részképesség lenne az). Ezek alapján további vizsgálatok szüksége-

sek. Megfelelő számú (>1000) minta esetén a 0,7 korrelációs érték már meggyőző lehet (nem túl erős, nem túl gyenge), illetve egyéb statisztikai módszerek alkalmazását követően kivitelezhető lehet az esetleges új részképesség-besorolási probléma is.

A statikus tesztsorból azok a részelemek kerültek összehasonlító elemzésre, melyeknek van megfelelő dinamikus adaptációja. Az 11. diagram mutatja a statikus és dinamikus (N=115) tesztek átlagait és szórását a 14 item esetében. Ezek alapján megállapítható, hogy az összeredményeket tekintve nincs szignifikáns különbség az alapmutatókat illetően.

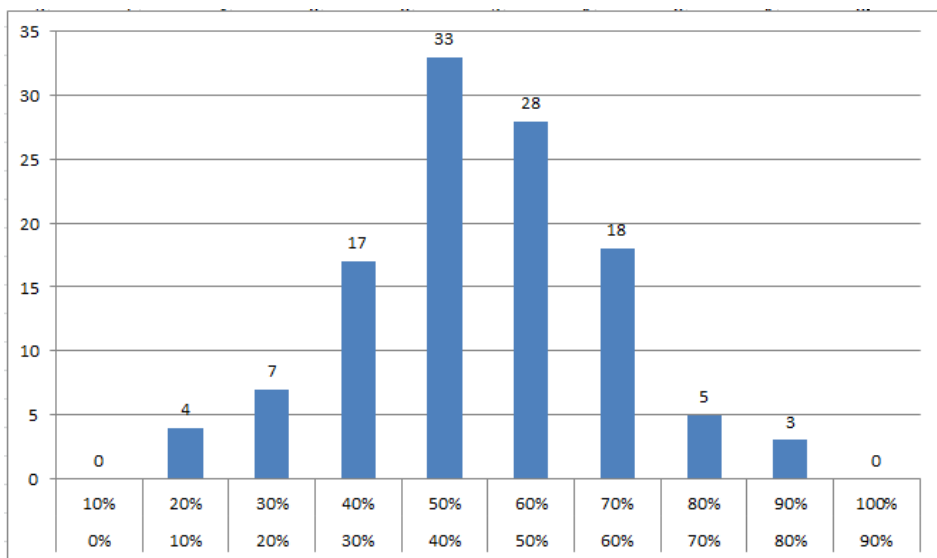


8. diagram A tesztek alapstatisztikái

A dinamikus tesztsor esetében vizsgáltuk még a jó és a rossz válaszok különbségeinek gyakoriságát is, illetve összehasonlítottuk a jó válaszok gyakoriságával: a kétféle számítás eredményei között nem mutatkozott szignifikáns különbség.

A százalékpontban számolt összesített átlagok és szórások: a statikus teszt átlaga 52,07, szórása 39,62. A dinamikus tesztsor átlaga 50,61, szórása 40,9. A statikus teszten elért eredmények átlagosan alacsonyabbak, mint amit a nagyméretű minta mutatott. Az összesített átlagok mindkét teszt esetében optimálisnak tekinthetők, azaz 50%-os érték körül ingadoznak.

A dinamikus teszt összpontszámainak hisztogramja (9. diagram) megfelel az elképzeléseknek: a viszonylag kis mintaelemszám ellenére illeszthető a Gauss-görbe, azaz a teszt nehézsége megfelelőnek mutatkozik az eredmények eloszlásainak tekintetében. A tanulók több, mint 53%-a ért el 40% és 60% közötti eredményt.



9. diagram Összpontszámok eloszlása

Érdekes lehet még vizsgálni az évfolyamok közti különbséget: az A8a és A8b feladatok esetén jelentősebb eltérés mutatkozik a 12. évfolyam irányában, vagyis ők ezeket a feladatokat jobban meg tudták oldani. A C4 és C5 feladatok esetében volt a legkisebb eltérés a 2 évfolyam eredményei között.

Korrelációs vizsgálatok

Az 14. táblázat és a 15. táblázat mutatja a feladatok összpontszámai alapján számított korrelációs együtthatókat. Mindkét esetben elmondható, hogy a legtöbb feladatpár szignifikáns korrelációban áll egymással.

	A8aS	A8bS	B1aS	B1bS	B1cS	C4aS	C4bS	A4aS	A4bS	A6aS	A6bS	C5aS	C5bS	C5cS
A8aS	1													
A8bS	-0,08	1												
B1aS	0,135	0,042	1											
B1bS	0,218	0,293	0,144	1										
B1cS	-0,07	0,027	-0,06	0,019	1									
C4aS	0,004	0,053	0,155	0,027	-0,14	1								
C4bS	0,033	-0,13	-0,04	0,145	0,154	0,143	1							
A4aS	-0,04	0,12	-0,01	0,326	-0,27	-0,04	0,05	1						
A4bS	0,094	-0,07	0,125	0,144	-0,06	0,09	0,054	0,203	1					
A6aS	0,093	0,338	0,033	0,072	0,103	0,202	0,072	0,079	-0,1	1				
A6bS	0,13	0,369	0,102	0,364	-0,17	0,066	0,137	0,311	0,172	0,043	1			
C5aS	0,053	-0,03	0,031	0,08	-0,12	-0,09	-0,11	0,095	-0,15	0,095	-0,01	1		
C5bS	0,15	-0,13	0,128	0,015	0,062	-0	0,116	-0,06	0,053	0,071	-0,04	0,204	1	
C5cS	-0,03	0,035	-0,01	0,072	-0,04	-0,01	0,005	0,063	0,047	0,015	-0,03	0,082	-0,06	1

14. táblázat statikus teszt összpontszámai közötti korrelációk (N=115)

A tesztek átlagos feladatkorrelációi: statikusnak 17,9021%, a dinamikusnak pedig 17,1532%.

	A8aD	A8bD	B1aD	B1bD	B1cD	C4aD	C4bD	A4aD	A4bD	A6aD	A6bD	C5aD	C5bD	C5cD
A8aD	1													
A8bD	0,046	1												
B1aD	-0,06	-0,02	1											
B1bD	0,195	0,167	-0,07	1										
B1cD	-0,03	-0	0,07	0,026	1									
C4aD	-0,03	0,045	0,096	-0,06	-0,07	1								
C4bD	-0,07	-0,08	0,069	0,045	0,056	0,156	1							
A4aD	0,034	0,084	-0,05	0,055	-0,12	0,058	-0,03	1						
A4bD	0,152	0,007	0,144	0,139	-0,01	0,167	-0,05	0,226	1					
A6aD	0,187	0,088	0,125	0,034	0,168	0,138	0,073	0,124	0,038	1				
A6bD	-0,02	0,076	0,128	0,238	0,019	0,014	0,084	0,266	0,123	0,084	1			
C5aD	0,012	0,044	0,074	0,043	-0,06	0,095	0,004	0,012	0,029	0,143	0,009	1		
C5bD	0,035	-0,03	0,125	-0,06	0,085	0,062	-0,06	-0,11	0,066	-0,05	9E-05	0,156	1	
C5cD	-0,04	0,044	0,034	0,065	-0,03	0,053	0,016	0,008	0,035	-0,04	0,073	0,046	-0,14	1

15. táblázat dinamikus teszt összpontszámai közötti korrelációk (N=115)

Az összesített pontszámoknak és a feladatoknak a korrelációi mindkét tesztben szignifikánsak és átlagosan közel állnak egymáshoz. Ennél a típusú értékelésnél figyelembe kell venni, hogy ez az adott feladatnál elért számszerű értéktől is függ. Pontosabb képet kaphatunk a viszonyokról, ha a tétel-összpontszám korrelációs értékei százalékos eredmények alapján készülnek, melyeket a megbízhatósági elemzések keretein belül végzünk el.

Megbízhatósági elemzések

A megbízhatóságot jelzi a Cronbach-féle alfa koefficiens, melyet a teszt negyedelésével végzett korrelációs számításokkal kapunk. Az N=115 minta eredményei alapján számított alfa a statikus teszt esetében 0,4391, a dinamikus teszt sor esetében pedig 0,4239 (standardizálva 0,4021). A nagymintás teszten mért 0,83 értékhez képest ez alacsonynak tűnhet, de a minta elemszámát figyelembe véve és a két érték közti elhanyagolható különbséget tekintve ez elfogadható tartományba esik (nagymintás tesztelés esetén 0,7 körüli érték elfogadható).

Egyéb reliabilitás-mutatók értékeit számítva kapjuk a következő eredményeket (16. táblázat):

Reliabilitási statisztikák			
Guttman-koefficiens			KR20-koefficiens
Lambda	1	,391	0,5643
	2	,465	
	3	,421	
	4	,372	
	5	,466	
	6	,473	
Tételek száma		14	

16. táblázat további reliabilitási mutatók értékei (N=115)

Ezek az értékek N=115 és a megfelelő szignifikanciaszint mellett ($p < 0,05$) elfogadhatónak minősülnek.

A 17. táblázatból kitűnik, hogy a C4bD item kihagyásával tudnánk a reliabilitási értéket növelni, mintegy 0,0061-del. A tétel-összpontszám korrelációs értékek 0,07 és 0,53 között változnak. A 0,46 szóródási érték megfelelő mértékű. Ezeket a korrelációs értékeket elkülönítés-mutatónak is nevezik, ugyanis arra mutat rá, hogy a jobban teljesítő tanulókat hogyan különíti el a gyengébben teljesített tanulóktól a teszteredmények alapján a mérendő feladat szerint.

A 0 körüli elkülönítés-mutató jelenti azt az értéket, amikor a jók is ugyanolyan arányban oldják meg az adott feladatot, mint a kevésbé jók. Negatív érték tükrözi azt például, amikor az összkép szempontjából egy jobban teljesítő tanuló az adott feladatot kevésbé sikeresen oldja meg, mint egy olyan, aki az összkép szempontjából gyengébb eredményt ért el. Még szemléletesebb képet kaphatunk, IRT vizsgálatok után (valószínűsített itemjelleggörbékkel), amiket a következőkben végzünk.

Item-Total statisztika						
	Átlag, ha kihagyjuk	Variancia, ha kihagyjuk	Korrigált item-korreláció	Négyzetes korreláció	Cronbach Alpha, ha kihagyjuk	Tétel-összp. Korrel.
A8aD	20,3217	37,045	,100	,118	,416	0,178702
A8bD	20,4174	37,035	,098	,055	,416	0,178665
B1aD	19,9652	35,788	,163	,100	,403	0,283855
B1bD	19,9304	35,539	,165	,154	,401	0,295778
B1cD	19,9826	37,228	,011	,086	,428	0,132394
C4aD	18,5391	30,812	,189	,108	,387	0,464679
C4bD	18,4348	33,844	,072	,070	,430	0,333673
A4aD	18,0000	29,105	,202	,168	,384	0,513013
A4bD	18,2087	28,623	,247	,149	,361	0,539226
A6aD	18,5913	30,595	,226	,162	,372	0,483568
A6bD	18,4435	30,126	,271	,162	,354	0,512892
C5aD	20,3739	36,938	,115	,072	,414	0,194678
C5bD	20,3391	37,700	-,010	,108	,427	0,070985
C5cD	20,3217	37,343	,045	,044	,421	0,127995

17. táblázat dinamikus teszt megbízhatósági elemzése

Az 18. táblázat a statikus és dinamikus tesztsor keresztkorrelációját mutatja. A sorokban a statikus, oszlopokban pedig a dinamikus feladatok kódjaival. Az adott mintaelemszám mellett a 0,21-nál nagyobb korrelációs értékek szignifikánsak a $p < 0,05$ szinten. Ezeket a metszeteket kiemeltük. A legoptimálisabb az lett volna (amit persze fentebb részletezett okok miatt nem várhatunk), ha a

mátrix diagonáljában lévő értékek lettek volna nagyobbak 0,21-nál.

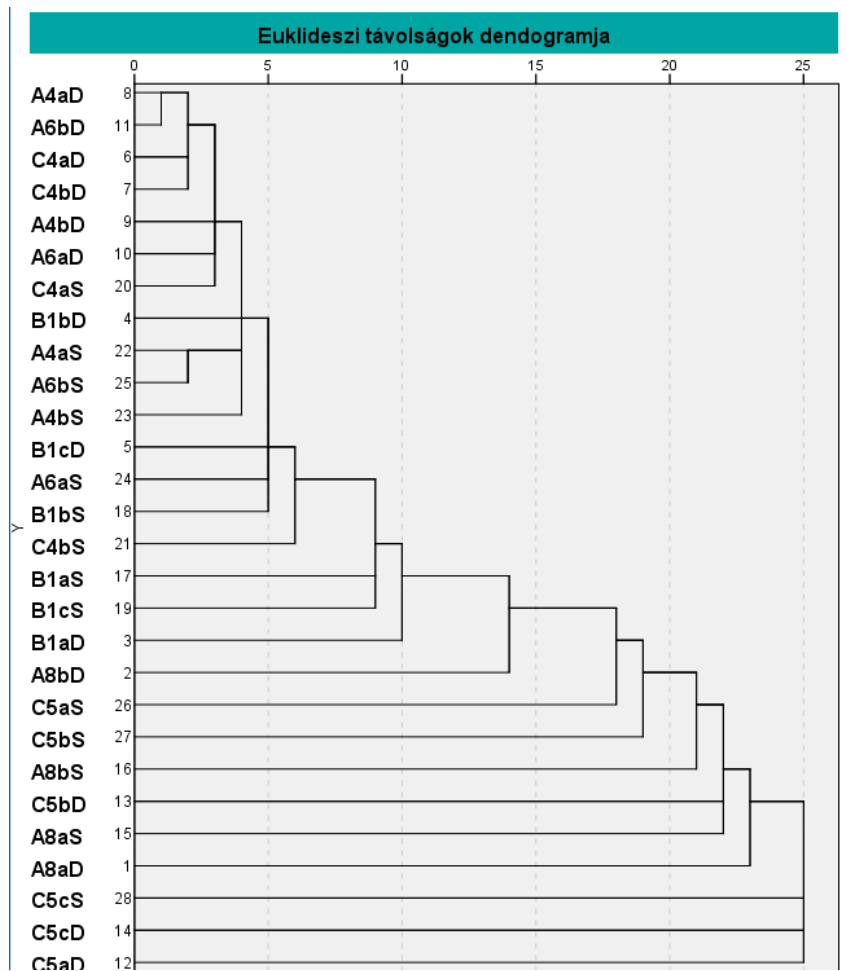
	A8aD	A8bD	B1aD	B1bD	B1cD	C4aD	C4bD	A4aD	A4bD	A6aD	A6bD	C5aD	C5bD	C5cD
A8aS	0,09	-0,08	-0,14	0,03	-0,11	-0,04	-0,04	0,02	-0,02	-0,03	0,03	-0,02	-0,01	-0,03
A8bS	-0,09	0,30	0,08	0,09	0,04	0,03	-0,14	-0,01	0,02	0,04	0,09	-0,10	-0,04	0,02
B1aS	0,03	-0,01	0,24	0,02	-0,01	-0,03	-0,11	0,01	0,09	0,03	0,10	0,01	-0,02	-0,17
B1bS	0,14	0,02	0,02	0,24	-0,12	0,01	0,08	-0,02	0,22	-0,01	0,06	0,04	-0,06	0,02
B1cS	0,14	0,17	0,06	0,14	0,16	0,06	0,01	-0,04	-0,03	0,05	-0,04	0,07	0,11	-0,03
C4aS	-0,08	-0,01	0,11	0,00	-0,07	0,13	-0,01	0,02	-0,05	-0,14	0,02	-0,17	-0,08	-0,03
C4bS	0,04	-0,17	0,00	0,14	0,13	0,02	0,25	0,02	0,11	0,00	0,12	-0,12	-0,11	0,10
A4aS	0,06	-0,11	-0,06	-0,02	-0,24	0,08	0,08	0,19	-0,01	0,01	-0,05	-0,01	-0,21	0,11
A4bS	-0,02	-0,05	0,08	-0,05	-0,17	-0,09	0,13	0,06	0,04	-0,08	0,01	-0,03	-0,17	0,01
A6aS	-0,03	0,15	0,00	0,05	0,02	0,07	-0,13	0,18	-0,01	0,28	0,05	0,03	-0,06	-0,01
A6bS	-0,02	0,10	0,07	0,16	-0,13	0,00	0,03	0,07	0,24	-0,01	0,35	-0,21	-0,17	0,24
C5aS	-0,02	-0,10	-0,09	0,17	-0,09	-0,21	-0,23	-0,02	0,14	-0,02	-0,12	0,20	-0,09	-0,16
C5bS	0,07	0,07	-0,08	0,09	-0,02	-0,05	-0,09	0,17	0,06	-0,02	-0,13	-0,01	-0,07	-0,01
C5cS	0,01	-0,15	0,09	0,02	0,14	-0,03	-0,05	-0,06	0,04	0,03	-0,09	-0,05	-0,12	0,04

18. táblázat statikus és dinamikus feladatok keresztkorrelációi (N=115)

A két teszt keresztkorrelációi, ami a validitás szempontjából igen fontos, a várakozásokhoz képest alacsonyabb értékeket adott. Az A8 feladat, ami a térbeli alakzatok megjelenítése és felismerése részképességet hivatott mérni, erősebb korrelációs értéket mutat. Ez azt jelenti, hogy a statikus teszt és annak dinamikus adaptációja ekvivalens a mérni kívánt részképesség szempontjából. Ezt a CHIC program által generált 0,97 mértékű ekvivalencia-mutató is megerősíti (0 és 1 közötti érték lehet, minél nagyobb, annál nagyobb a koherencia két adott feladat között). A B1 feladatról is elmondható, hogy az eredeti statikus teszt által mért manipulációs szerkezetátlátás részképességet megfelelően méri. Ehhez a részképességhez tartozik még a C4 és A4 feladat is, melyek összességében tekintve megfelelő értékeket mutatnak, bontva azonban az A4b statikus és dinamikus feladata közötti 0,04 korrelációs érték kevésnek tűnik. Az A4b dinamikus feladat 0,24 korrelációs értéket mutat az A6b statikus feladattal. Az A6 feladat minden összetevője erős korrelációs értékeket mutat a statikus és dinamikus feladatot illetően. Mivel eredetileg mentális manipulálásról volt szó a statikus tesztben, így a fentiek alapján arra lehet következtetni, hogy a feladat felfogható úgy is, hogy a rendelkezésre álló minta, mintarendszer megváltozott orientációjáról kell dönten, és így ebben az esetben inkább a felismerési részképesség dominálhat. A C5 feladat esetében nem kapunk erős

korrelációs értékeket. A feladat dinamikus jellege a probléma egy jobb megértését tudja biztosítani (a teljes 3D dinamikus mintapélda következtében). Ennek következménye viszont, hogy az eredeti besorolás alapján a részképességet módosítani szükséges. Leginkább egyfajta rekonstrukcióról lehetne szó, azon belül is összetettebb rekonstrukcióról. A dinamikus 3D segítség mentesíti a tanulót a vizuális képzelet manipulációs mechanizmusától. A rekonstrukció során a tanuló szintetizálja vetületi képek tanulmányozásával szerzett vizuális információkat. Fontos megemlíteni, hogy a dinamikus 3D segítség ellenére sincs lehetősége a tanulónak a szintézis műveletének végrehajtását kiiktatni.

A tesztadatokat klaszteranalízis vizsgálata alá vetettük, a statikus és dinamikus feladatok közötti kapcsolatrendszer mélyrehatóbb feltárása céljából. Ez a struktúra egészét vizsgálja a változók, jelen esetben az egyes feladatok alapján. A tesztek együttes klaszterdiagramja szerint (10. diagram) az A4, C4, A6 és B1 statikus és dinamikus feladatok közel állnak egymáshoz ($d < 5$). Fontos kiemelni a diagram alapján, hogy a többi feladat kapcsolódása is folyamatos, így nem alakulnak ki nagyobb klaszterek, azaz egymással lazábban kapcsolódó képet mutatnak.



10. diagram statikus és dinamikus feladatok együttes klaszterdiagramja

IRT vizsgálatok

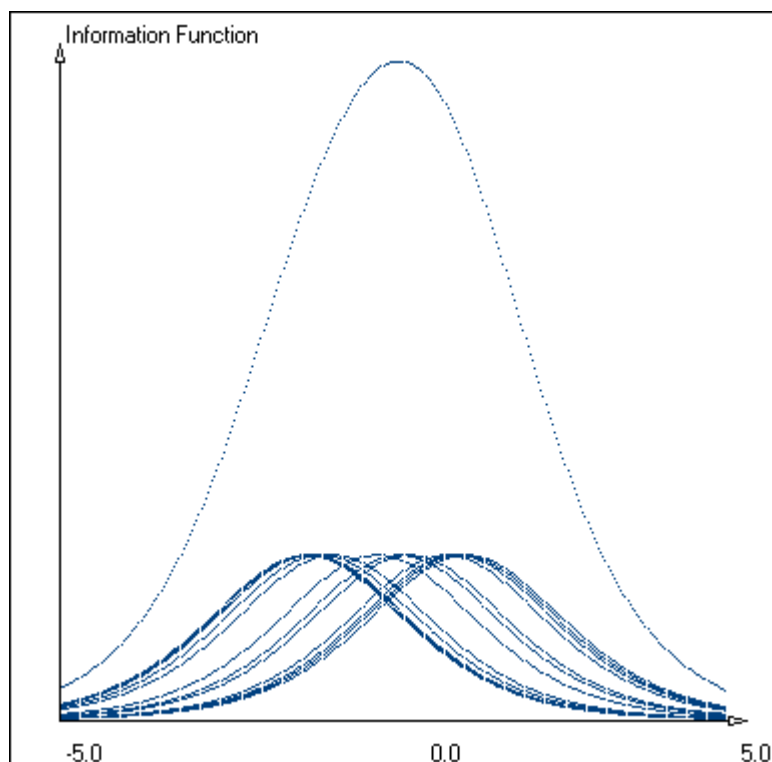
A klasszikus tesztelmélet legfőbb problémája az, hogy a validitás, reliabilitás, faktoranalízis nagy része korrelációs összefüggésekre alapoz, a korreláció viszont függ a szóródástól, így a kapott értékek populáció-függőek lesznek, azaz másik mintán elvégezve más eredmények adódhatnak. A modern tesztelmélet (item-válasz elmélet, angolul rövidítve: IRT) ezzel szemben a teszt egésze helyett elemi egységeket vizsgál, ennek következtében a vizsgálat eredményekor kapott jellemzők egy része valószínűségi jellegű, és jelentős mértékben populáció-független.

A leggyakrabban a Rasch-modellt szokták alkalmazni, mely egy speciális exponenciális függvénnyel, az úgynevezett Rasch logisztikus függvénnyel közelíti az itemek közti kapcsolatokat leíró függvényeket (ezeket a függvényeket empirikus úton is meg tudnánk határozni, ha elég nagyszámú mintán végeznénk el a kísérletet). A közelítéssel ellenőrizhető, hogy rendelkezésre álló adatok érvényesek-e, megfelelően modellezi-e a mérési adatok kapcsolatát, illetve az adatok ráillenek-e a modellre (visszajáról nézve). Az iterációs számítás műveletigényes, azt a Ganz-Rasch 1.0 szoftverrel végeztük el.

Az IRT modell sajátosságai miatt az adatokat standardizálni kellett a megfelelő módon. Az így bekövetkezett arányeltolódások az IRT-beli tételek jellemzőit nem torzítja.

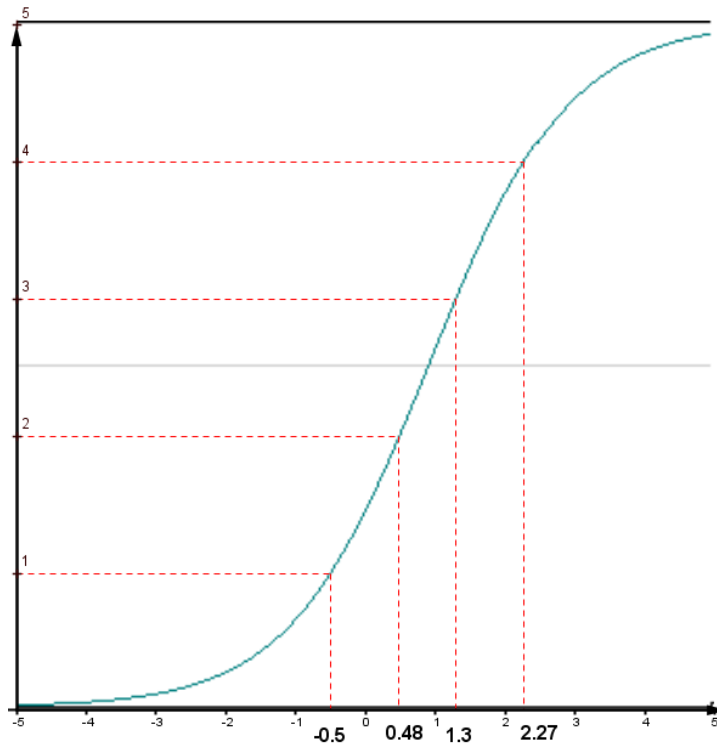
A feladattételek Rasch-score-ja az egyik legfontosabb információ: egy közös képességskálán elhelyezve mutatja a feladattétel eloszlás-független besorolását úgy, hogy statisztikai hipotézisvizsgálattal ellenőrzi a kiugró adatokat. Ezek kiszűrésével fokozható, optimalizálható a modellkonformitás. Nézzük meg részletesebben mindezt néhány példán keresztül.

A 29. ábra mutatja az egyes itemek valószínűségi pontszámait az egységes képességskálán elhelyezve, illetve a teszt egészére vonatkozó normális-eloszlást mutató görbe. A képességszintekre vonatkozó karakterisztikus jelleggörbék mutatják, hogy a $(-3,3)$ intervallumon az egységes képességrendszerbe helyezve az egyes itemeket, nehézség szempontjából szélesebb skálát írnak le, a csúcsok $-1,5$, illetve $1,2$ közötti előfordulással. Tehát van olyan feladat, amelyet a $-1,5$ személyi paraméterű (képességfokozatú) személy is nagy valószínűséggel maximális pontra ír, illetve a nehezebb feladatok esetén valószínűleg csak az $1,2$ körüli képességfokozatú (azaz ügyesebb diák) tud csak elérni maximális pontszámot. A teszt egészének beválására vonatkozóan megállapíthatjuk a nagyobb görbéből, hogy a teszt általában összefér az adatainkkal. Az ábra alapján következtetni tudunk még a feladatok elkülönítő erejére is.



29. ábra a feladattételek pontszámainak valószínűsége a képességszint függvényében

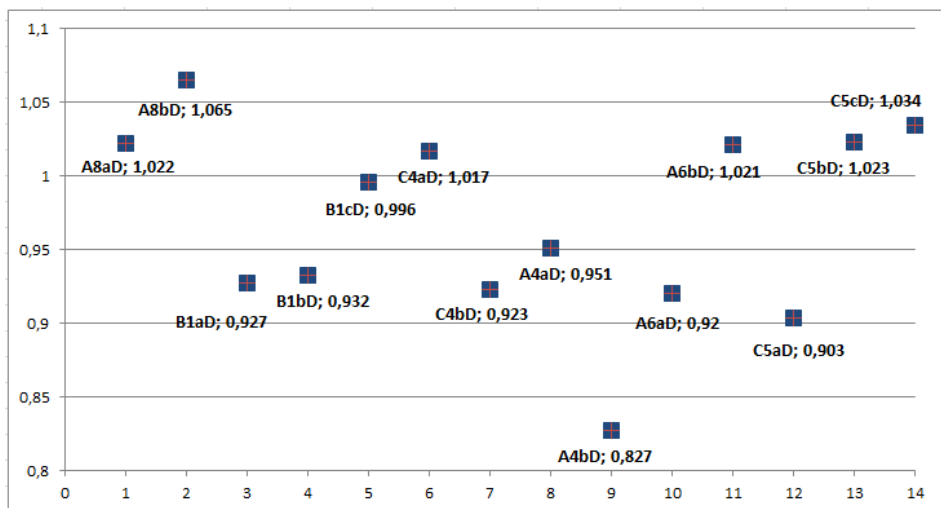
Nézzünk meg egy konkrét példát az A6aD tételen szemléltetve. A 11. diagram az A6aD kódú dinamikus feladat itemkarakterisztikus görbáját szemlél-teti. A várható pontszám eloszlásfüggvénye megmutatja, hogy 50%-os való-színűséggel milyen képességű személy hány pontra tudja várhatóan megoldani a tételt. Az A6aD esetében például 1 pontot 50%-os valószínűséggel egy -0,5 képességfokozatú tanuló fog tudni elérni, és az átlagos teljesítmény (ami jelen esetben 1 és 4 pont közötti, tehát kivéve a maximális és 0 pontosak) 50%-os valószínűséggel a -0,5 és 2,27 közötti képességintervallum esetén várható. Mondhatjuk, hogy ez a feladat erre a képességintervallumra van kalibrálva. A grafikon ezen kívül azt is megmutatja, hogy az A6aD esetében a (-0,5 , 2,27) képességintervallumon belül milyen képességszinttel rendelkező tanulók fog-ják várhatóan 50%-os valószínűséggel teljesíteni az 1, 2, 3, 4 pontra a felada-tokat.



11. diagram A6aD tétel várható pontszáma a képességszint függvényében

Az elkülönítő erő mértékét az említetteken kívül a görbe meredeksége is mutatja (minél meredekebb a nyújtott S betű alak, annál nagyobb a feladat elkülönítési mértéke).

Végül nézzünk meg egy itemilleszkedésre vonatkozó grafikont (12. diagram):



12. diagram itemek infit paramétereit

Az item modell-illeszkedése a modell által elvart, előre jelzett és a valós teljesítmény közti különbség alapján szolgáltat értéket. Az infit paraméterek a CML-féle item paraméteres számítás alapjaira épülnek (t-próbával). A Ganz-Rasch szoftver kiszámítja az illeszkedési paramétereket ($|t| < 2$), a paraméterek átlagát automatikusan 1-nek veszi (néhány program 0-nak szokta). Ebből adódóan 0,7 és 1,3 közötti értékek fogadhatóak el. A diagram vízszintes tengelye az itemek sorszámát jelöli, a függőleges tengely pedig az adott item infit paraméterét. Látható, hogy a legkisebb infit paraméter érték az A4bD, legnagyobb pedig az A8bD kódú tételhez tartozik, de ezek még így is beleférnek az elfogadási intervallumba. Egy item minél közelebb van az 1-hez, annál jobban illeszkedik a modellbe.

A vizsgálat egésze bizonyítja, hogy a fentebb tárgyalt modell konformitása általában megfelelő az adatainkkal.

Összegzés, további teendők

A fenti elemzésekből kitűnik, hogy a Séra-Kárpáti-Gulyás-féle téri képességeket mérő teszt bizonyos feladatának dinamikus GeoGebra-adaptációja va-

lilitás, reliabilitás, objektivitás, konformitás, beválás, modell-illeszkedés szempontjából mindenben megfelel az elvárásoknak, az eredeti teszttel megegyező ”erejű”.

Módosítani szükséges a C5 feladat részképesség-besorolását. Az A4 feladat szorosabb korrelációt mutat az A6 feladattal, így annak a részképesség-besorolása is valószínűleg módosul, nem azt méri, amit a statikus párja. További teendők még a 19. táblázatban jelölt részképességekhez további 5 dinamikus mérőfeladatot fejleszteni (piros 'X' jellel jelölve a fejlesztés alatt lévők), és az így kapott tesztsoron elvégezni a pilot vizsgálatokat, optimalizálni, majd nagyobb mintájú mérést lefolytatni és kiértékelni, akár online real-time felületen is.

Feladattípusok	Részképességek	
	Felismerés	Manipuláció
Vetületi ábrázolás és olvasás		X
Rekonstrukció	C5D	
Szerkezetlátás		B1D, C4D
Kétdimenziós vizuális elképzelés	X	
Térbeli alakzat felismerése, megjelenítése	A8D	
Háromdimenziós alakzatok összetartozó részeinek felismerése, párosítása	X	
Háromdimenziós alakzattal végzett forgatás		A6D; A4D
Téri konstrukció		X
Dinamikalátás		X

19. táblázat Meglévő és fejleszteni kívánt dinamikus feladatok részképességek szerinti besorolása

7. Összegzés, további kutatási lehetőségek

Jelen dolgozatban arra kerestük a választ, hogy egy változó paraméter, a GeoGebra beiktatása a matematikaórákba milyen hatással van a középiskolai tanulók kognitív, affektív és pszichomotorikus képességeire, illetve ezt a kutatási témához kapcsolódó szakirodalomhoz.

A kutatás során, mely 5 tanévet ölelt fel, a feltett hipotéziseinkre a következő válaszokat kaptuk:

1. hipotézis: A GeoGebra DGS alkalmazása a matematikaórán növeli a hallgatók motivációs bázisát (elsősorban a belső motivációt).

A Claus-féle kérdőív, és tanulói interjúk, illetve tapasztalataink alapján a következő eredményekre jutottunk:

- a tanulók közel 80%-a szereti használni a számítógépet (GeoGebrát) a matematikaórán
- tanulói beszámolók (és tapasztalataink) alapján a feladat megértését elősegítheti a GeoGebra
- a GeoGebrát használók körében szignifikánsan nagyobb azok aránya, akik kedvelik (megkedvelték) a matematikát

A 1. hipotézisünk helytállónak bizonyult.

2. hipotézis: A GeoGebra DGS-ben kidolgozott matematikadidaktikai eszközrendszerrel kiegészített téri képességek fejlesztése a középiskolai évfolyamok jó térlátással rendelkező tanulói esetében eredményesebb, mint kizárólag a hagyományos eszközökkel történő fejlesztés.

A kognitív képességek fejlődésének vizsgálatára használt teszt 2 faktort (rekogníció, manipuláció), és ezeken belül összesen 10 tevékenységet vizsgált. Bizonyos tevékenységek esetében nem mutatott szignifikáns különbséget a fejlődésben a kísérleti csoport, de a rekogníciós, illetve a manipulációs faktort egészében vizsgálva már szignifikáns a különbség.

A 2. hipotézisünk a tehetségesebb tanulókra vonatkozik, pontosabban egy jó tanulót a GeoGebra még inkább jobbá tehet. Az 5.5 alfejezetben kapott eredmények szűkítése a tehetségesebb tanulókra összhangban van a minta egészére kapott eredményekkel.

A 2. hipotézisünk helytállónak bizonyult.

3. hipotézis: A GeoGebra DGS-ben kidolgozott matematikadidaktikai eszközrendszerrel kiegészített téri képességek fejlesztése a középiskolai évfolyamok kevésbé jó térlátással rendelkező tanulói esetében eredményesebb, mint kizárólag a hagyományos eszközökkel történő fejlesztés.

A 2. hipotézisünkhöz hasonló módon, az 5.5. alfejezetben kapott eredmények szűkítése a kevésbé jó térlátással rendelkező tanulókra összhangban van a minta egészére vonatkozó eredményekkel, azaz a kevésbé jó térlátással rendelkező tanulók esetében hatékonyabb fejlesztést tudunk elérni az új módszerrel.

A 3. hipotézisünk helytállónak bizonyult.

A fejlesztés hatásvizsgálata után kísérletet tettünk egy új, 2D non-immerzív, téri képességeket mérő tesztsor kidolgozására, mely megfelelő technikai körülmények között alkalmas immerzív felhasználásra is. A teszt egy már meglévő, statikus papír-ceruza alapú teszt dinamikus, interaktív GeoGebra-adaptációja. A teszt használhatóságára irányulóan két hipotézist fogalmaztunk meg, melyre kerestük a válaszokat.

4. hipotézis: A már meglévő, hagyományos papír-ceruza alapú téri képességeket mérő tesztsorok adaptálhatóak a GeoGebra dinamikus 3D környezetébe (technikailag kivitelezhető).

A hipotézis elsősorban a technikai megvalósításra vonatkozik. Azt tapasztaltuk, hogy a statikus tesztek bármelyike átvihető dinamikus környezetbe, ennek jelenleg technikai akadálya nincs. Megjegyzendő azonban, hogy bizonyos típusú feladatok esetén az adaptáció, mint mérőeszköz létjogosultságát

veszti, ugyanis elképzelhető, hogy a dinamikus, interaktív felület miatt a megoldás azonnal adódik. Az ilyen jellegű feladatok gyakorlásra lehetnek alkalmasak.

A 4. hipotézis igaz.

5. hipotézis: A GeoGebrába adaptált tesztsorok ugyanazt a képességet mérik le, amit a nekik megfelelő statikus teszt.

Mivel itt egy új mérőeszköz kidolgozásáról van szó, ami egy már meglévő tesztsor alapján készült, így szükséges elvégezni egy kongruens-validitás vizsgálatot, melynek részét képezi a tesztsor objektivitás, validitás, valamint reliabilitás vizsgálata is.

Az eredmények a pilot-tesztelés alapján azt mutatják, hogy bizonyos dinamikus tesztfeladatok nem ugyanazt a részképességet mérik, mint a nekik megfelelő, statikus párjuk.

A 5. hipotézist elvetjük.

A 5. hipotézisre kapott válasz további kutatási célokat eredményez.

Célunk a közeljövőben az eddig kidolgozott dinamikus téri képességeket mérő eszköz finomítása, kiegészítése. Az említett módosítások elvégzését követően lehetőség nyílhat egy, a Nemzeti Kutatási, Fejlesztési és Innovációs Hivatal által kiírt pályázat keretében, hogy a Magyar Tudományos Akadémia Kognitív Idegtudományi és Pszichológiai Intézet segítségével magas szintű hatásvizsgálatokat végezzünk az említett mérőeszközre. Lehetőség adódhat a tesztelésben részt vevő tanulók MRI vizsgálatára, melyből a tevékenység során végbemenő agyi funkciókra tudunk következtetni, illetve fontosnak tartanánk még eye tracking vizsgálatokat is, mely alapján a mérőeszköz optimális elrendezésére tudnánk következtetni, ezzel is emelve a mérőeszköz objektivitási mutatóját.

Az említett vizsgálatok után szándékunkban áll egy minimum $N = 1000$ mintán való mérés megvalósítása, online felületen.

8. Irodalomjegyzék

Alias, M., Black, T. R., & Gray, D. E. (2002). *Effect of instructions on spatial visualization ability in civil engineering students. International Educational Journal*, 3(1), 1–12.

Allen, G. L. Kirasic, K.C., Beard, R.L. (1989): Children's expressions of spatial knowledge, *Journal of Experimental Child Psychology*, 48, 114-130.

Amponsah, B., Krekling S.(1997): Sex differences in visual-spatial performance among ghanian and norwegian adults. *Journal of Cross-Cultural Psychology*. 28, 8-92.

Anderson, R. A. (1997): Multimodal integration for the representation of space in the posterior parietal cortex. *Philosophical transactions of the Royal Society of London, series B*, 352, 1421-1428

Arnheim, R. (1969): *Visual thinking*, Berkeley, University of California Press.

Arnheim, R. (1983): Perceiving, thinking, forming, *Art Education*, 36, 9-11.

A magyar nyelv értelmező szótára, VI. (1962) Budapest, Akadémiai Kiadó

Bangert-Drowns, R.L. (1986): Review of developments in meta-analytic method. *Psychological Bulletin*, 99, 388-399.

Bárdné Feind Teréz (2001): Építész hallgatók térszemléletének fejlődése és fejlesztése az ábrázoló geometria tantárgy keretében, Publikálatlan PhD értekezés, Budapest, Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem, Építészeti Kar

Beanninger, M., Newcombe, n. (1989): The role of experience in spatial test performance: A mete-analysis, *Sex Roles*, 20, 327-344.

Benbow, C.P. (1988): Sex differences in mathematical reasoning ability in intellectually talented preadolescents: Their nature, effects, and possible causes, *Behavioral and Brain Scineces*, 11, 169-232

Bennett, G. K., Seashore, H. G., Wesman, A. G. (1974): *Manual for the differential aptitude tests: forms S and T* (5th. ed.). New York, Psychological Corporation

Bethel-Fox, C. E., Shepard, R. N. (1988): Mental rotation: effects of stimulus complexity and familiarity. *Journal of Experimental Psychology: Human Perception and Performance*, 14, 12-23.

Biederman, I., Shiffrar, M. (1987): Sexing day-old chicks: A case study and expert systems analysis of a difficult perceptual-learning task. *Jorunal of Experimental Psychology: Learning, Memory, and Cognition*, 13, 640-645.

- Bideaud, J.: Rotation of the mental images with respect to children and adults. In Cornoldi, C. (ed.): *Imagery and cognition*, Padova, University of Padova, 1988, 195-208.
- Blade, M. F., Watson, W.S. (1955): Increase in spatial visualization test scores during engineering study. *Psychological Monographs*, 69 (No. 397).
- Bognár Cecil (1932): *Térszemlélet*. Athenaum, 5-6. _Sz., 136-152.
- Bonda, E., Petrides, M., Frey, S., Evans, A. (1995): Neural correlates of mental transformation of the body-in-space. *Proceedings of the National Academy of Sciences of United States of America*, 92, 1180-1184.
- Boulter, D. R., Kirby, J. R. (1969): Identification of strategies used in solving transformational geometry problems. *Journal of Educational Research*, 87, 298-303.
- Brinkmann, E. H. (1966): Programmed instruction as a technique for improving spatial visualization. *Journal of Applied Psychology*, 50, 179-184.
- Bryant, D. J. (1997): Representing space in language and perception. *Mind and Language*, 12, 239-264.
- Caplan, P., Macpherson, G., Tobin, P. (1985): Do sex related differences in spatial ability exist? *American Psychologist*, 40, 786-799.
- Captentes, P. A., Just, M. A. (1986): Spatial ability: an information processing approach to psychometrics. In: R.J. Sternberg (ed.): *Advances in the psychology of human intelligence*, vol. 3. Hillsdale, NJ, Erlbaum, 221-253.
- Carroll, J. B. (1983): Studying individual differences in cognitive abilities: through and beyond factor analysis. In: Dillon, R. F., Schmeck, R. R., (ed): *Individual differences in cognition*. Vol. 1. New York, academic press, 1-33
- Casey, M. B., Nuttall, R. L., Pezaris, e. (1997): Mediators of gender differences in mathematics college entrance test scores: a comparison of spatial skills and internalized beliefs and anxieties. *Developmental Psychology*, 33, 669-680.
- Casey M. B., Nuttall, R. L., Pezaris, e., Benbow, C. P. (1995): The influence of spatial ability on gender differences in mathematics college entrance test scores across diverse samples. *Developmental Psychology*, 31, 697-705.
- Carroll, J. B. (1993): *Human cognitive abilities: a survey of factor-analytic studies*. Cambridge, Cambridge University Press
- Childs, M. K., Polich, J. M. (1979): Developmental differences in mental rotation. *Journal of Experimental Child Psychology*, 27, 339-351.

Clak, J. M., Paivio, A. (1991): Dual coding theory and education. *Educational Psychology Review*, 3, 149-210.

Cooper, L. A., Shepard, R. N. (1973) Chronometric studies of the rotation of mental images. In: Chase, W. G. (ed.): *Visual information processing*. New York, Academic Press

Cooper, L. A., Mumaw, R. J. (1985): Spatial aptitude. In: Dillon, R. F., (ed.): *Individual differences in cognition*. Vol. 2. New York, Academic Press, 67-94.

Cooper, L. A. (1988): The role of spatial representations in complex problem solving. In: Schiffer, S., Steele, S. (ed.): *Cognition and representation*. Boulder Westview Press, 53-86.

Connor, J. M., Schackman, M., Serbin, L. A. (1978): Sex related differences on a visual-spatial test and generalization to a related test. *Child Development*, 49, 24-29.

Contero, M., Naya, D., Company, P., & Saorín, J. L. (2006). Learning support tools for developing spatial abilities in engineering design. International Journal of Engineering Education, 22(3), 470–477.

Csapó Benő (1985): A rajzkészség vizsgálata középiskolai tanulóknál. In: *Acta Universitatis Szegediensis de Attila József nominate Sectio pedagogica et psychologica*. JATE, Szeged, 28-43.

Dabbs, J. M., Chang, E.-I., Strong, R. A., Milun, R. (1998): Spatial ability, navigation strategy, and geographical knowledge among men and women. *Evolution and Human Behavior*, 19, 89-98.

Dean, A., Duhe, D., Green, D. (1983): The development of children's mental tracking strategies on a rotation task. *Journal of Experimental Child Psychology*, 36, 226-240.

Dean, G., Morris, P. E. (1991): Imagery and spatial ability: when introspective reports predict performance. In: Logie, R. H., Denis, M. (ed.): *Mental images in human cognition*. Amsterdam, Elsevier, 331-347.

Deregowsky, J. B. (1989): Real space and represented space: Cross-cultural perspectives, *Behavioral and Brain Sciences*, 12, 51-119.

Diamond, R., Carey, S., Back, K. (1983): Genetic influences on the development of spatial skills during early adolescence. *Cognition*, 13, 167-185.

Dósa Zoltán (2000): A mentális forgatás hasonlóságai és különbségei gyermek- és felnőttkorban. Előadás a Magyar Pszichológiai Társaság XIV. Nagygyűlésén (Budapest, 2000. május).

Drahoš István (1988): Az elsőéves hallgatóság térszemléletére és ábrázolási készségére vonatkozó vizsgálatok. In: Eidos Füzetek 3. – Térszemlélet, térfogalom, térrendezés. Budapest, Magyar Rajztanárok Országos Egyesülete, 9-15.

Eliot, J., Smith, I. M. (1983): An international directory of spatial tests. Einsdor, Nfer-Nelson.

Eliot, J. (1987): Models of psychological space: psychometric, developmental, and experimental approaches. New York, Springer.

Ekstrom, R. B., French, J. W., Harman, H. H., Dermen, D. (1990): Manual for kit of factor-referenced cognitive tests 1976. Princeton, N.J., Educational Testing Service

El Koussy, a. A. H. (1935): Visual perception of space. British Journal of Psychology, Monograph Supplement, 20,1-30.

Evans, G. W. (1980): Environmental cognition. Psychological Bulletin, 88, 259-287.

Faubian, r. W., Cleveland, E. A., Hassell, T. W. (1942): The influence of training on mechanical aptitude test scores. Educational Psychological Measurement, 2, 91-94.

Finke, R. A. (1989): Principles of Mental Imagery. Cambridge, Bradford Book

Finke, R. A. (1986): Mental imagery and the visual system. Scientific American 254, 88-95 (A gondolatok képzéskészítése és a látórendszer. Tudomány, 1986, május 86-93)

Flanagan, J. C. et al. (1973): The career databook: results from project Talent's five years follow-up study. Palo Alto, American Institutes for Research

French, J. W., Ekstrom, R. B., Price, L. A. (1963): Kit of reference tests for cognitive factors. Princeton, N. J., Educational Testing Service

Freyd, J. J., Finke, R. A. (1984): Facilitation of length discrimination using real and imagined context frames. American Journal of Psychology, 97, 323-341.

Friedman, L. (1995): The space factor in mathematics: gender differences. Review of Educational Research, 65, 22-50.

Galea, L. A. M., Kimura, D. (1993): Sex differences in route-learning. Personality and Individual Differences, 14, 53-65.

Gardner, H. (1983A): Frames of mind: the theory of multiple intelligences. New York, Basic Books

Gardner, H. (1983B): Artful scribbles. Boston: Harvard University Press

- Gardner, H. (1993): Multiple intelligences: the theory in practice (a reader). New York, Basic Books
- Gaul Emil (2001): A tervező-konstruáló képességek szerkezete és fejlődése 12-16 éves korban. Publikálatlan PhD. Értekezés, Budapest, ELTE Neveléstudományi Tanszék
- Geary, D. G. (1995): Sexual selection and sex differences in spatial cognition. *Learning and Individual Differences*, 7, 289-302.
- Geary, D. G. (1996): Sexual selection and sex differences in mathematical abilities. *Behavioral and Brain Sciences*, 19, 229-284.
- Geary, D. G. (1999): Sex differences in mathematical abilities. Commentary on the math-fact retrieval hypothesis. *Contemporary Educational Psychology*, 24, 267-274
- Geary, D. G. Saults, S. J., Liu, F., Hoard, M. K. (2000): Sex differences in spatial cognition, computational fluency, and arithmetical reasoning. *Journal of Experimental Child Psychology*, 77, 337-353.
- Gerő Zsuzsa (1973): A gyermekrajzok esztétikuma. Budapest, Akadémiai Kiadó
- Ghiselli, E. E. (1973): The validity of aptitude test in personnel selection. *Personnel Psychology*, 26, 461-477.
- Gibson, E. J. (1969): Principles of perceptual learning and development. New York, Appleton
- Gibson, J. J. (1979): The ecological approach to visual perception. Boston, Houghton
- Goldberg, S., Lewis, M. (1969): Play behavior in the year-old infant: early sex differences, *Child Development*, 40, 21-31
- Gombrich, E. H. (1972): Művészet és illúzió- a képi ábrázolás pszichológiája. Budapest, gondolat (eredeti: 1959)
- Gordon, R. (1949): An investigation into some of the factors that favour the formation of stereotyped images. *British Journal of Psychology*, 40, 156-167.
- Gorska, R., & Sorby, S. (2008, June). *Testing instruments for the assessment of 3-D spatial skills. Paper presented at the ASEE Annual Conference, Pittsburgh, PA.*
- Gregory, R. L. (1970): The intelligent eye. London, Weidenfeld (Az értelmes szem. Budapest, Gondolat, 1973)

Gregory, R. L. (1993): Seeing and thinking. *Giornale Italiano di Psicologia*, 20, 749-770.

Grimshaw, G. M., Sitarenios, G., Finegan, J. K. (1995): Mental rotation at 7 years: Relations with prenatal testosterone levels and spatial play experiences, *Brain and Cognition*, 29, 85-100.

Gulyás János (1996): A térszemlélet vizsgálata. Nem publikált szakdolgozat, ELTE, Pedagógiai Tanszék

Haanstra, F. H. (1994): Effects of art education on visual-spatial and aesthetic perception: two meta-analysis. *Groningen, Rijksuniversiteit Groningen*

Haier, R. J., Siegel, B. V., MacLachlan, E. Jr., Soderling, E., Lotenberg, S., Buschbaum, M. S. (1992): Regional glucose metabolic changes after learning a complex visuo-spatial/motor task: a positron emission tomography study. *Brain Research*, 570, 134-143.

Harris, L. (1978): Sex differences in spatial ability: possible environmental, genetic, and neurological factors. In: Kinsbourne, M. (ed.): *Asymmetrical functions of the brain*. New York, Columbia University Press, 405-552.

Har, R. A., Moore, G. T. (1973): Development of spatial cognition. a review. In: R. M. Downs, D. Stea (eds.): *Image and environment*. Chicago, Aldine, 246-288.

Hedges, L. V., Nowell, A. (1995): Sex differences in mental test scores, variability and numbers of high scoring individuals. *Science*, 269, 41-45.

Hegarty, M., Kozhevnikov, M. (1999): Types of visual-spatial representations and mathematical problem solving. *Journal of Educational Psychology*, 91, 684-689.

Herendiné, K. E. (2007): *Kisiskolások térbeli tájékozódó képességének fejlesztési lehetőségei*, PhD. értekezés

Herman, J. F., Heines, J. A., Cohen, D. S. (1987): Children's spatial knowledge of their neighborhood. *Journal of Applied Developmental Psychology*, 8, 77-90.

Hermelin, B., O'Connor, N. (1986): Spatial representations in mathematically and in artistically gifted children. *British Journal of Educational Psychology*, 56, 150-157.

Hoben, T., Lohaus, A. (1993): *Modeling Growth and Individual Differences in Spatial Tasks*, University of Chicago Press

Hoffmann M., Németh, B., (2006): Gender differences in spatial visualization among engineering students, *Annales Mathematicae et Informaticae* 01/2006; 33.

- Holding, C. S., Holding, D. H. (1989): Acquisition of route network knowledge by males and females. *Journal of General Psychology*, 116, 29-41.
- Holzinger, K. J., Swineford, F. (1946): The relation of two bi-factors to achievement in geometry and other subjects. *Journal of Educational psychology*, 37, 256-265.
- Horváth György (1991a): *Az értelem mérése*. Budapest, Tankönyvkiadó
- Horváth György (1991b): *Bevezetés a tesztelméletbe – A tesztyszerkesztés és –értékelés alapjai*. Budapest, Keraban Könyvkiadó
- Horváth György (1997): *A modern tesztmodellek alkalmazása*. Budapest, Akadémiai Kiadó
- Hurwitz, A. és Day, M. (1991): *Children and their art*. New York, Harcourt, Brace and Jovanovich
- Hyde, J. (1981): How large are cognitive gender differences? *American Psychologist*, 36, 892-901.
- Hyde, J. S., Linn, M. C. (1988): Gender differences in verbal ability: A meta-analysis. *psychological Bulletin*, 104, 53-69.
- Hyde, J. S., Fennema, E., Lamon, S. J. (1990): Gender differences in mathematics performance: A meta-analysis. *Psychological Bulletin*, 107, 139-155.
- Jantzen, H. (1938/1979): A művészettörténeti térfogalomról. In: Mezei Ottó (szerk.): *A tér a festészetben- Szöveggyűjtemény*. Budapest, Népművelési Propaganda Iroda, 9-35.
- Johnson, E. S., Meade, A. C. (1987): Developmental patterns of spatial ability: An early sex differences. *Child Development*, 58, 725-740.
- Johnston, J. R., Slobin, D. I. (1979): The development of locative expressions in English, Italian, Serbo-Croatian and Turkish. *Journal of Child Language*, 6, 529-545.
- Kail, R. (1985): Development of mental rotation: A speed-accuracy study. *Journal of Experimental Child Psychology*, 40, 181-192.
- Kail R., Carter, P., Pellegrino, J. (1980): The locus of sex differences in spatial ability. *Perception and Psychophysics*, 26, 182-186.
- Kail, R., Pellegrino, J. (1979): Developmental changes in mental rotation. *Journal of Experimental Child Psychology*, 29, 102-116.

Karádi Kázmér (1988): A téri tájékozódás neuropszichológiája. In: Kállai János, Karádi Kázmér és Tényi Tamás: A térélmény kultúrtörténete és pszichopatológiája. Budapest, Tertia Kiadó, 82-125.

Karádi, K., Szabó, I., Szepesi, T., Kállai, J., Kovács, B. (1999): Sex differences on the hand mental rotation task for 9-yr.-old children and young adults. *Perceptual and Motor Skills*, 89, 969-972.

Kárpáti Andrea (1983): A képzőművészeti nevelés értékelhetőségéről. *Pedagógiai szemle*, 7-8, 635-646.

Kárpáti Andrea (1992): Leonardo Program – a vizuális nevelés öt modellje. Budapest, Akadémiai Kiadó, 1992

Kárpáti Andrea (1997): Vizuális nevelés: projekt módszerű vizsga. Calibra Kiadó, Budapest.

Kárpáti Andrea (2001): Firkák, formák, figurák – a vizuális nyelv fejlődése a kisgyermekkortól a kamaszkorig. Budapest, Dialóg Campus Könyvkiadó

Kárpáti Andrea, Gyebnár Viktória (1996a): A vizuális képességek és a személyiség, Budapest, ELTE, Neveléstudományi Tanszék

Katona, J. (2012): A geometriai térszemlélet számítógéppel támogatott fejlesztése a műszaki felsőoktatásban, PhD. disszertáció, Debrecen

Kerettanterv tantárgyi füzetek 5. (2000): Rajz és vizuális kultúra. Budapest, Oktatási Minisztérium

Kárpáti Andrea, Gyebnár Viktória (1996b): A Leonardo Program értékelési rendszere, Budapest, ELTE, neveléstudományi Közlemények

Kellog, R., O’deal, S. (1967): *Analysing children’s art*. Palo Alto, Mayfield Publishing Co.

Kellog, R. (1969A): *The psychology of children’s art*. Del Mar, Crm Associates for Random House.

Kellog, R. (1969B): *Analysing children’s art*. Palo Alto, National Press Book

Kerr, N. H., Corbit, R., Jurkovic, G. J. (1980): Mental rotation: Is it stage related? *Journal of Mental Imagery*, 4, 49-56.

Kimura, D. (1992): Nemi különbségek az agy működésében. *Tudomány* 8(11), 65-72.

Kimura, D. (1999): *Sex and cognition*, Cambridge, Mass., MIT Press

Király Ildikó, Racsmány Mihály (1996): A jó, a rossz és a bal: gyermekek téri viszonyokat leíró kifejezéseinek kognitív fejlődéslélektani vizsgálata. Magyar Pszichológiai Szemle, LII. (36), 247-258.

Kirby, J. R., Boulter, D. R. (1997): Spatial ability and transformational geometry. Paper presented at the European Association for Research in Learning and Instruction, Athens, 26-30, aug. 1997., p, 11.

Kondor, N. R. (2007): Dinamikus geometriai rendszer bevezetése a gépészmérnök hallgatók műszaki ábrázolás oktatásába, PhD. disszertáció, Debrecen

Kosslyn, S. M. (1987/1990): Látás és vizuális képzelet az agyféltekében: egy komputációs megközelítés. In: Séra László, Kovács Ilona, Komlósi Annamária (szerk.): A képzelet. Budapest, Tankönyvkiadó, 1990, 270-328.

Kosslyn, S. M., Brunn, J., Cave, K. R., Wallach, R. W. (1984): Individual differences in mental imagery ability: A computational analysis. Cognition, 18, 195-243.

Kosslyn, S. M., Van Kleeck, M. H., Kirby, K. N. (1990): A neurologically plausible model of individual differences in visual mental imagery. In: Hampson, P. J., Marks, D. F., Richardson, J. T. E. (eds.): Imagery: Current developments. London, Routledge, 39-77.

Kosslyn, S. M., Margolis, J. A., Barrett, A. M., Goldknopf, E. J., Daly, P. E. (1990): Age differences in imagery abilities. Child Development, 61, 995-1010.

Kozbevnikov, M., Hegarty, M. (2001): A dissociation between object manipulation spatial ability and spatial orientation ability. Memory and Cognition, 29, 745-756.

Kyllonen, P. C., Lohman, D. L., Snow, R. E. (1984): Effects of aptitude, strategy training, and task facets on spatial task performance. Journal of Educational Psychology, 76, 130-145.

Kyllonen, P. C., Lohman, D. L., Woltz, D. J. (1984): Componential modeling of alternative strategies for performing spatial tasks. Journal of Educational Psychology, 76, 1325-1345.

Kwon, O. N. (2003). *Fostering spatial visualization ability through web-based virtual-reality program and paper-based program. Lecture Notes in Computer Science*, 2713, 701–706.

Lajoie, S. P. (2003). *Individual differences in spatial ability: Developing technologies to increase strategy awareness and skills. Educational Psychologist*, 38(2), 115–125.

- Lajoie, S. P. (1986): Individual differences in spatial ability: A computerized tutor for orthographic projection tasks (doctoral dissertation, Stanford University). Dissertation Abstracts International, 47, 3370a.
- Landau, B. (1994): Where is „waht” and what is „where”: The language of objects in space. *Lingua*, 92, 259-296.
- Landau, B., Jackendoff, R. (1993): „What” and „where” in spatial language and spatial cognition. *Behavioral and Brain Sciences*, 16, 217-265.
- Lautrey, J. (1988): The development of capacities for imaginal representation of transformation: A confrontation of piagetian and information processing perspectives. In: Cornoldi, C. (ed.): *Imagery and cognition*. Padova, University of Padova, 219-234.
- Law, D. J., Pellegrino, J. W., Hunt, E. B. (1993): Comparing the tortoise and the hare: Gender differences and experience in dynamic spatial reasoning tasks. *Psychological Science*, 4, 35-40.
- Lean, G. A. (1981): Training of spatial abilities: a bibliography (report no. 8, Mathematics Education Centre, Papua New Guinea, University of Technology)
- Levinson, S. C. (1996): Frames of reference and molyneux's question. In: Bloom, P., Peterson, M. A., Nadel, L., Garrett, M. F. (eds): *Language and space*. Cambridge, Bradford Book, 109-169.
- Liben, L. S., Downs, R. M. (1991): The role of graphic representations in understanding the word. In: Downs, R. M., Liben, L. S., Palermo, D. S. (eds.): *Visions of aesthetics, the environment and development – The legacy of Joachim F. Wohlwill*. Hillsdale, N. J., 139-180.
- Lindauer, M. S. (1977): Imagery from the point of view of psychological aesthetics, the arts, and creativity. *Journal of Mental Imagery*, 2, 343-362.
- Lindauer, M. S. (1983): Imagery and the arts. In: Sheikh, A. A. (ed.): *Imagery: Current theory, research, and application*. New York, Wiley, 468-506.
- Linn, M., Petersen, A. (1985): Emergence and characterization of sex differences in spatial ability: A meta-analysis. *Child Development*, 56, 1479-1498.
- Lohman, D. F. (1979A): Spatial ability: A review and a reanalysis of the correlational literature. (Technical Report No. 8.), Stanford University, School of Education
- Lohman, D. F. (1979B): Spatial ability: Individual differences in speed and level, (Technical Report No. 9.), Stanford University, School of Education

- Lohman, D. F. (1988): Spatial abilities as traits, processes and knowledge. In: Sternberg, R. J. (ed.): *Advances in the psychology of human intelligence*. Hillsdale, N.J., Erlbaum, vol. IV, 181-248.
- Lohman, D. F., Nichols, P. D. (1990): Training spatial abilities: effects of practice on rotation and synthesis tasks. *Learning and Individual Differences*, 2, 67-93.
- Lord, T. R. (1985): Enhancing the visuo-spatial aptitude of students. *Journal of Research in Science Teaching*, 22(5), 395-405.
- Löwenfeld, V. (1970): *Creative and mental growth*. New York: The Macmillan Company.
- Lummix, M., Stevenson, H. W. (1990): Gender differences in beliefs and achievement, a cross-cultural study. *Developmental Psychology*, 26, 254-263.
- Maccoby, E., Jacklin, C. N. (1974): *The psychology of sex differences*. Stanford, Stanford University Press
- Maier, P. H. (1998). *Spatial geometry and spatial ability: How to make solid geometry solid? In E. Osnabrück, K. Cohors-Fresenborg, G. Reiss, G. Toener, & H. Weigand (Eds.), Selected papers from the annual conference of didactics of mathematics 1996 (pp. 63–75). Munich, Germany: Gesellschaft für Didaktik der Mathematik (GDM).*
- Mag M. (1995): Gondolkodás és beszéd, avagy a téri orientáció verbál-kognitív megközelítése. *Magyar Pszichológiai szemle*, LI (35), 305-325.
- Maguire, E. A., Burgess, N., Donnett, J. G., Frackowiak, R. S. J., Frith, C. D., O'keefe, J. (1998): Knowing where and getting there: a human navigation network. *Science*, 280, 921-924.
- Manger, T., Eikeland, O.-J. (1998): The effect of spatial visualization and student's sex on mathematical achievement. *British Journal of Psychology*, 89, 17-25.
- Marks, D. F. (1973): Visual imagery differences in recall of pictures. *British Journal of Psychology*, 64, 17-24.
- Marks, G. S. (1975): Development of kinetic images: When does the child first represent movement in mental images. *Cognitive Psychology*, 7, 548-325.
- Marmor, G. S. (1977): Mental rotation and number conservation: are they related? *Developmental Psychology*, 13, 320-32
- Masters, M. S., Sanders, B. (1993): Is the gender difference in mental rotation disappearing? *Behavior Genetics*, 23, 337-341.

Matthews, M. H. (1987): Sex differences in spatial competence: the ability of young children to map „primed” unfamiliar environment. *Educational Psychology*, 32, 77-90.

Mayer, R. E., Sims, V. K. (1994): For whom is a picture worth a thousand words? Extensions of a dual-coding theory of multimedia learning. *Journal of Educational Psychology*, 86, 389-401.

Mcclosky, P. (1979): The facilitation of spatial ability and problem solving in adolescent pupils through learning in deisgn. *Educational Review*, 31, 259-268.

McGee, M. G. (1979): Human spatial abilities: psychometric studies and environmental, genetic, hormonal, and neurological influences. *Psychological Bulletin*, 86, 889-918.

McWhinnie, H. J. (1991): The identification of spatial types one. Final report. University of Maryland.

Michael, W. B., Guilford, J. P., Fruchter, B., Zimmerman, W. S. (1957): The description of spatial-visualization abilities. *Educational and Psychological Measurement*, 17, 185-199.

Miller, L. K., Santoni, V. (1986): Sex differences in spatial abilities: Strategic and experiential correlates. *Acta Psychologica*, 62, 225-235.

Moffat, S. D., Hampson, E., Hatzipentalis, M. (1998): Navigation in a „virtual maze” sex differences and correlation with psychometric measure of spatial ability in humans. *Evoluton and Human Behavior*, 19, 73-87.

Moody, L. J. (1991): Copying naturalistica drawing, and spatial aptitude. *Visual Arts Research*, 17 (34/2), 33-42.

Motes, M. A., Malach, R., & Kozhevnikov, M. (2008). Object-processing neural efficiency differentiates object from spatial visualizers. *NeuroReport*, 19(17), 1727-1731. [PDF](#)

Mumaw, R. J., Pellegrino, J. W. (1984): Individual differences in complex spatial processing, *Journal of Educational Psychology*, 76, 920-939.

Neisser, U., Boodoo, G., Boushard, T. J., Boykin, A. W., Brody, N., Ceci, S. J., Halpern, D. F., Loehlin, J. C., Perloff, R., Sternberg, R. J., Urbina, S. (1996): Intelligence: Knowns and unknowns. *American Psychologist*, 51, 77-101.

Nemzeti alaptanterv (NAT) (1995): Művészetek. Budapest, Korona Kiadó

Norman, Kent L. (1994): Spatial Visualization-A Gateway to Computer-Based Technology, *Journal of Special Education Technology*, v12 n3 p195-206 Spr 1994.

- Olson, D. R., Bialystok, E. (1983): Spatial cognition. Hillsdale, NJ., Erlabum
- Olson, D. A., Eliot, J. (1986): Spatial dimensionality tests. Institute for Child Study, University of Maryland
- Paál Ákos (1970/1995): A gyermekrajzok fejlődésének motivációi 6-10 éves korban. Utánközlés In: Kárpáti Andrea (szerk.) (1995): A vizuális képességek fejlődése, Budapest, Nemzeti Tankönyvkiadó, 98-105.
- Pellegrino, J.W., Goldman, S.R. (1983): Developmental and individual differences in verbal and spatial reasoning. In: Dillon, R. F., Schmeck, R. R., (eds): Individual Differences in Cognition. Vol. 1. New York, Academic Press, 137-180.
- Pellegrino, J.W., Alderton, D. L., Shute, V.J. (1984): Understanding spatial ability. Educational Psychologist, 19, 239-254.
- Piaget, J., Inhelder, B. (1956): The child's conception of geometry. New York, Basic Books (eredeti: 1948).
- Piaget, J., Inhelder, B. (1971): Mental imagery in the child. New York, Basic Books (eredeti: 1966)
- Pléh Csaba, Vinkler Zsuzsa, Kálmán László (1996): A téri kifejezések alaktana magyar gyermekeknél: vizsgálat a Childes-adatbázis alapján. Magyar Pszichológiai Szemle, LII. (36), 235-246.
- Pléh Cs. (1999): Hozzájárulhatnak-e az empirikus pszichológiai kutatások a nyelv-gondolkodás viszony filozófiai problémájának megoldásához? In: Neumer Katalin (szerk.): Nyelv, gondolkodás, raltivizmus. Budapest, Osiris, 35-165
- Peres, M., Laeng, B., Latham, K., Jackson, M., Zaiyoune, R., Richardson, C. (1995): A redrawn vandenbergh and kuse mental rotation test: Different version and factors thet effect performance. Brain and Cognition, 28, 39-58.
- Poltrock, S. E., Brown, P. (1984): Individual differences in visual imagery and spatial ability. Intelligence, 8, 93-138.
- Pongrácz Éva, Várnagy Elemér (1996): Roma gyermekek képzőművészeti képesség-fejlesztése. A Hét Szabad Művészet Könyvtára Sorozat. Zsámbék, Katolikus Tanító-képző Főiskola.
- Potter, C. & van der Merwe, E. (2001, August). *Spatial ability, visual imagery and academic performance in engineering graphics. Paper presented at the International Conference on Engineering Education, Oslo, Norway.*

- Pylyshyn, Z. W. (1984): A képzelet és a megismerés funkcionális architektúrája (1984): In: Séra László, Komlósi Annamária, Kovács Ilona (szerk.): A képzelet. Budapest, Tankönyvkiadó, 1990, 239-269.
- Révész György, Bernáth László, Séra László (1995): A Piavio-féle „Individual Differences questionnaire” magyar változata. Magyar Pszichológiai Szemle, 35, 327-343.
- Ritoók Pálné, Takács Mária (1967): Pályaválasztási szaktanácsadás. Budapest, MŰM
- Roach, D. (1993): A new spatial dimensionality test. University of Maryland, College of Art (p. 47 + Appendix)
- Rock, I. (1983): The logic of perception. Bradford, Book, MIT Press
- Rock, I. (1992): Comment on asch and witkin's studies in space orientation. 2. Journal of Experimental Psychology: General, 121, 4gibson04-406.
- Royer, J. M., Tronsky, L. N., Chan, Y., Jackson, S.J., Marchant, H., LII. (1999) Mathfact retrieval as the cognitive mechanism underlying gender differences in math test performance. Contemporary Educational Psychology, 24, 181-266.
- Salat Annamária Enikő (2001): A vizualizációs geometriai fejlesztő program hatásvizsgálata a képzeletre. Publikálatlan diplomadolgozat, Kolozsvár, Babesbolyai Tudományegyetem Pszichológiai Tanszék
- Salthause, T. A. (1992): Mechanism of age-cogniton relations in adulthood. Hillsdale, Erlbaum
- Sanders, B., Soares, M. P., D'Aquila, J. M. (1982): The sex difference on test of spatial visualization: A nontrivial difference. Child Development, 53, 1106-1110.
- Sandstrom, N. J., Kaufman, J., Huettel, S. A. (1998): Males and females use different distal cue in a virtual environment navigation task. Cognitive Brain Research, 6, 351-360.
- Schofield, N. J., Kirby, J. R. (1994): Position location on topographical maps: effects of task factors, training, and strategies. Cognition and Istruction, 12, 35-60.
- Schuster, M. (1983): Die psychologie der kinderzeichnung. Berlin, Springer Verlag
- Schuster, M. (1996): Fotopsychologie. Lacheln für die ewigkeit. Berling, Spring Verlag

Séra László (1983): A képzelet pere a kognitív pszichológiában. In: Séra László, Komlósi Annamária (szerk.): Perceptuális tanulás és képzelet. Budapest, Tankönyvkiadó, 73-114.

Séra, L., Kárpáti, A., Gulyás, J. (2002): A térszemlélet. Comenius Bt., Pécs

Séra László, Kovács Ilona, Komlósi Annamária (szerk), (1990): A képzelet. Budapest, Tankönyvkiadó

Séra László, Bakon Ildikó (1995): A téri megismerés fejlődése. Pszichológia, 15(3), 313-329.

Séra László, Révész György (1996): A téri helyzet szerepe az alakészlelésben – az ábrairányok észlelését és tetszését meghatározó tényezők. Magyar Pszichológiai Szemle, LII (36), 217-233.

Séra László (2001): Mozgástér, exploráció, játék és a téri képességek nemi eltéréseinek evolúciós magyarázata. In: Pléh Csaba, Csányi Vilmos, Bereckei Tamás (szerk.): Lélek és evolúció, Budapest, Osiris, 2001, 297-307.

Shaywitz, B. A., Shaywitz, S. E., Pugh, K. R., Constable, R. T., Skudlarski, P., Fulbright, R. K., Bronen, R. A., Fletcher, J. M., Shankweiler, D. P., Katz, L., Gore,

J. C. (1995): Sex differences in the functional organization of the brain for language. Nature, 373, 607-609.

Shea, D. L., Lubinski, D., Benbow, C. P. (2001): Importance of assessing spatial ability in intellectually talented young adolescents: A 20-year longitudinal study. Journal of Educational Psychology, 93, 604-614.

Smith, I. M. (1938): The form-perception factor. British Journal of Educational Psychology, 3,1.

Sorby, S. A. (2007). *Developing 3D spatial skills for engineering students*. Australasian Journal of Engineering Education, 13(1), 1–11.

Sorby, S. A. (2009). *Educational research in developing 3–D spatial skills for engineering students*. International Journal of Science Education, 31(3), 459–480.

Spinoza, B. (1968): Etika. Bp., Magyar Helikon

Thorndyke, P. W., Stasz, C. (1980): Individual differences in procedures for knowledge acquisition from maps, Cognitive Psychology, 12, 137-175

Thurstone, L. L., (1938): Primary mental abilities. Chicago, Chicago University Press

- Thurstone, L. L., (1955): The differential growth of mental abilities (Report No. 14). Chapel Hill, NC
- Tóth, P. (2014): A téri vizuális képességek értelmezése és rendszere, TÁMOP-4.1.2 B2 Pályázat könyvei
- Vandenberg, S. G. (1975): Sources of variance in performance of spatial tests. In: Eliot, Salkind: Children's spatial development. Springfield, Ill., Thomas, 57-66
- Vernon, P. e., (1971): The structure of human abilities. London, Methuen
- Voyer D, Voyer S, Bryden MP (1995): Magnitude of sex differences in spatial abilities: a meta-analysis and consideration of critical variables, Psychol Bull. 1995 Mar;117(2):250-70.
- Wang, H-C., Chang, C-Y., & Li, T-Y. (2006). *The comparative efficacy of 2D- versus 3D-based media design influencing spatial visualization skills. Computers in Human Behavior*, 23(4), 1943–1957.
- Woolf, B., Romoser, M., Bergeron, D., & Fisher, D. (2003, July). *Tutoring 3-dimensional visual skills: Dynamic adaptation to cognitive level. In Proceedings of the 11th International Conference on Artificial Intelligence in Education, Sydney, Australia*

9. Függelék

9.1. Alkalmazott téri képességeket mérő teszt sor

ELTE BTK Neveléstudományi Tanszék
Térszemlélet feladatlap
2000. november

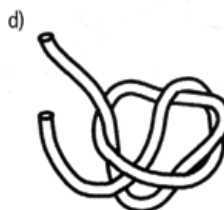
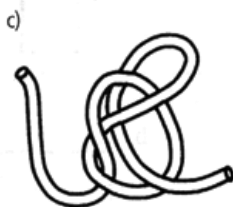
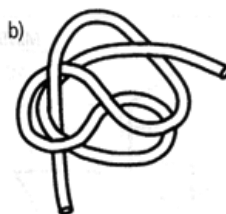
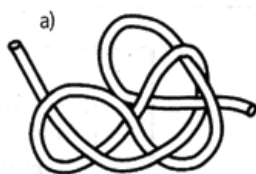
A-1

Név: kód

Osztály:

Az alábbi ábrán nyolc zsinór látható. Karikázd be, melyiken keletkezik csomó, ha meghúzod a két végét! Amelyiken szerinted nem, azt pedig húzd át!

A feladatlap megoldására fordítható idő: 3 perc



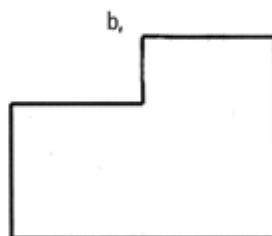
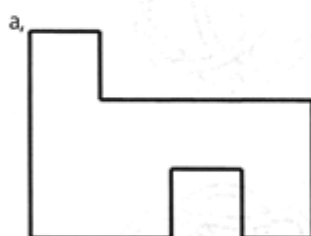
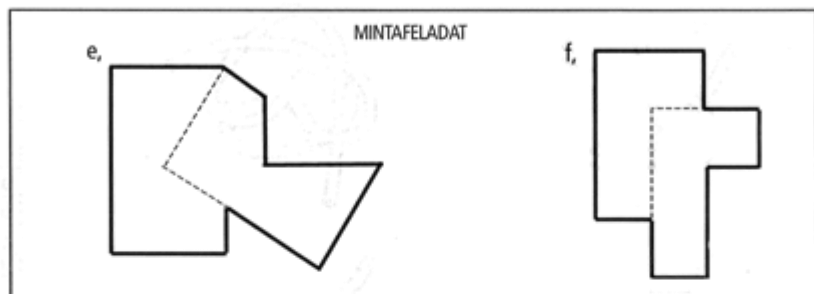
a	
b	
c	
d	

e	
f	
g	
h	

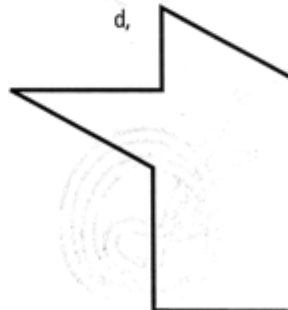
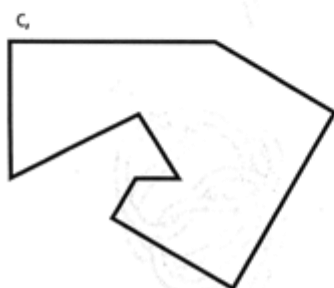
Hogyan lehetne két egybevágó részre vágni (nem feltétlenül egy egyenes vonallal) az alább látható ábrákat? A vágást szaggatott vonallal jelöld!

Bemelegítésként tanulmányozd át a két mintafeladatot!

A feladatlap megoldására fordítható idő: 5 perc



a	
b	

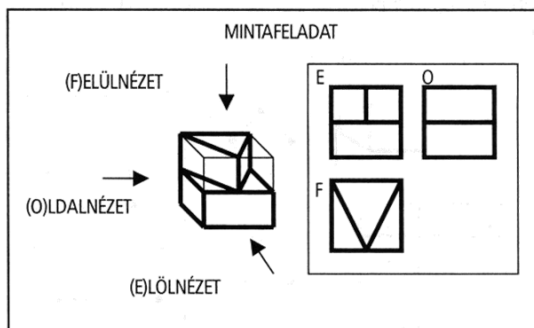


c	
d	

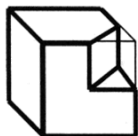
Négy, kockából kivágott térbeli alakzat vetületi képeit: (E)lőlnézetét, (O)ldalnézetét, (F)elülnézetét kell megrajzolnod a testek látszati képei alapján! Vékony, folytonos vonallal jelöltük a befoglaló kocka éleit, amely segíthet a nézeti képek pontos megrajzolásában.

Mielőtt nekilátsz, tanulmányozd át a mintafeladatot!

A feladatlap megoldására fordítható idő: 6 perc



a,



b,



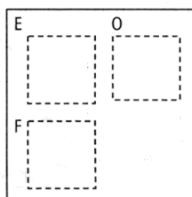
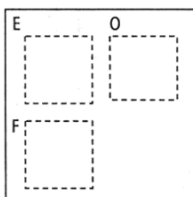
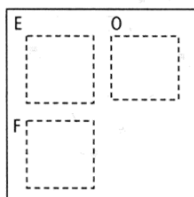
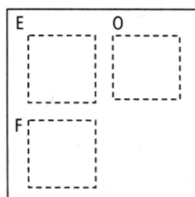
c,



d,



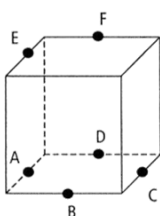
a	
b	
c	
d	



A kockákba berajzolt pontok a kockák csúcspontjai vagy oldalfelező pontjai. Milyen síkidomot kapunk, ha a megadott pontokat összekötjük? Válaszd ki a jobb oldali 18 ábra közül, és írd mindegyik mellé az ábra betűjelét! A síkidomok képei nem pontosan mérethűek, csupán hasonlóak a kocka pontjai által körülhatárolt síkidom valódi alakjához. Mintaként mind a két változatban egy-egy síkidomot azonosítottunk: pl. ha az első kockában összekötjük az EFA pontokat, akkor az „S” ábrán látható háromszöget kapjuk, a második kockában összekötött BFE pontok pedig az „M” ábrán látható háromszöget adják. Egy ábra tartozhat akár két síkidomhoz is.

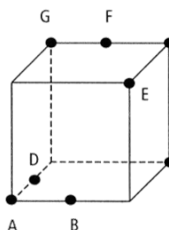
A feladatlap megoldására fordítható idő: 7 perc

1)

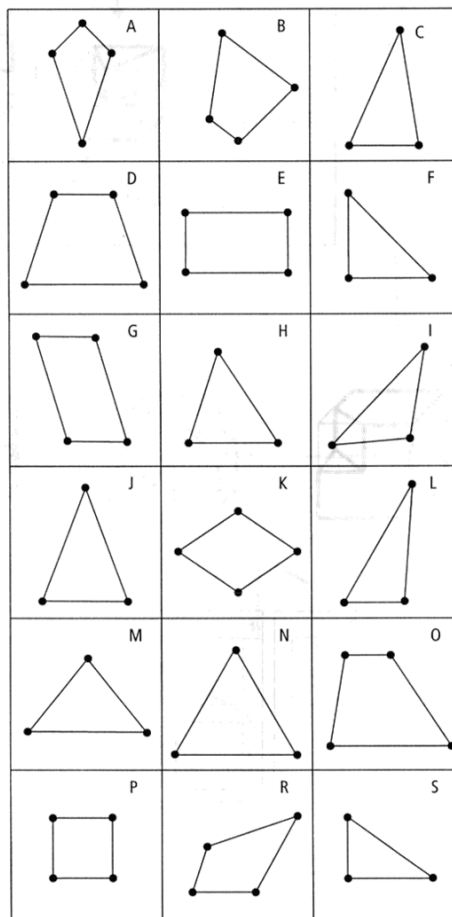


EFA	S
EBCF	
BDF	
CDAB	
EDA	
EBD	
BDF	

2)



BFE	M
GIE	
AIE	
GEBD	
ECG	
DCBA	
ACE	



a	
b	
c	
d	
e	
f	

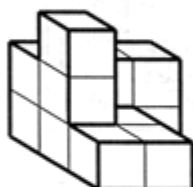
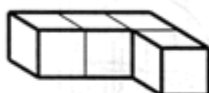
g	
h	
i	
j	
k	
l	

Az alábbi feladatok mindegyikében egy-egy, az arányok érzékeltetéséhez mérethálával bevont összetett alakzatot kell előre megadott csupa egyforma térelemből összeállítani. Rajzold be az elemek összeillesztéseinel látható éleket, és színessel különítsd el az alkotó elemeket egymástól! Előbb tanulmányozd át a mintafeladatot!

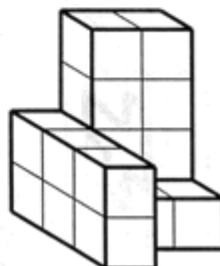
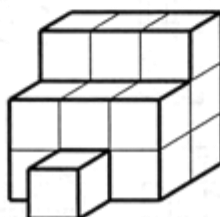
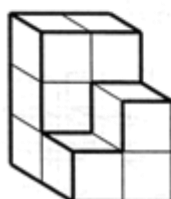
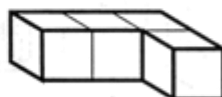
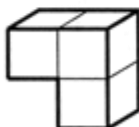
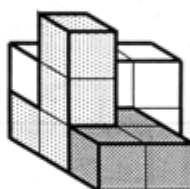
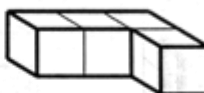
A feladatlap megoldására fordítható idő: 5 perc

MINTAFELADAT

Állítsd össze csupa egyforma ilyen térelemből az alábbi mérethálós alakzatot:

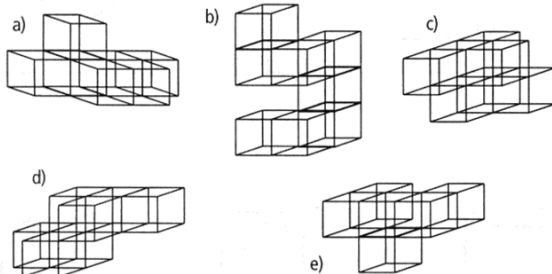
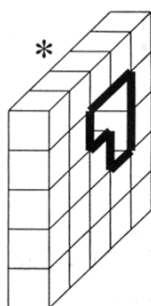
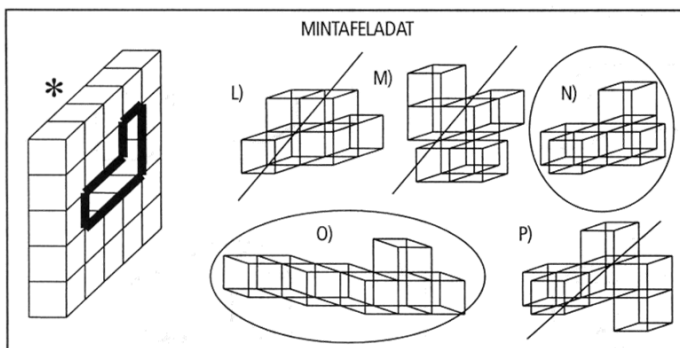


A MINTAFELADAT (egy lehetséges) MEGOLDÁSA

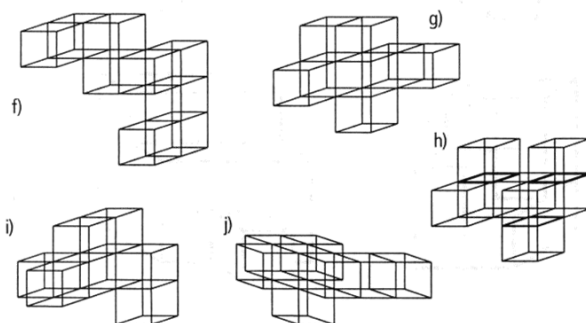
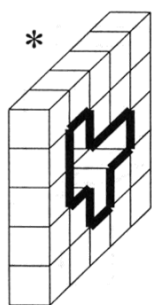


a	
b	
c	

A feladatlap két különálló, de hasonló feladatsort tartalmaz, az elején kiegészítve egy mintafeladattal. A feladatsorok mindegyikében a csillaggal jelölt ábrák mellett 5, egyforma kockákból összeállított alakzat látható, melyeknek rajzába a testet alkotó kis kockák összes élet, így takart éleit is berajzoltuk. Állapítsd meg, hogy az 5 építmény közül melyik fér át valahogy az első (csillaggal jelölt) ábrán látható lyukon, ha a testek tetszőlegesen forgathatók! Karikázd be közülük azt, amelyik átfér valahogy; és húzd át azt, amelyik nem! Előbb tanulmányozd át a mintafeladatot!

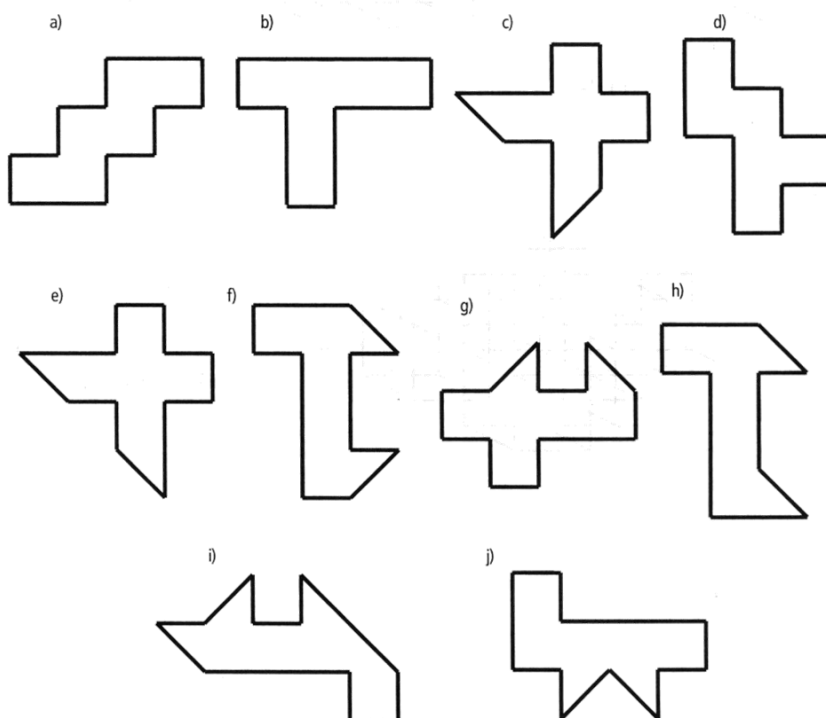
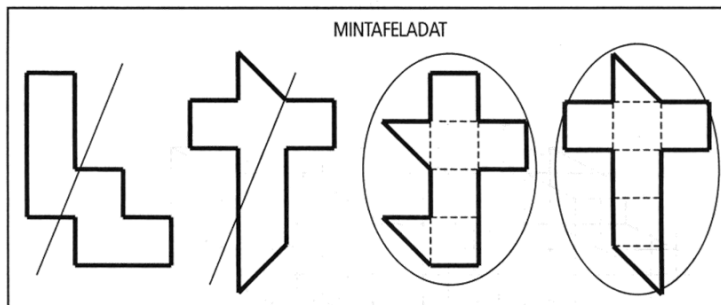


a	
b	
c	
d	
e	



f	
g	
h	
i	
j	

Vizsgáld meg az alábbi tíz alakzatot: melyik lehetne egy kocka hálójá? Amelyik igen, azt karikázd be, és rajzold be a hajtogatási vonalakat a hálóba. Amelyikből nem lehet kockát hajtogatni, azt húzd át! Mielőtt nekikezdenél, tanulmányozd át a mintafeladatot!
A feladatlap megoldására fordítható idő: 6 perc



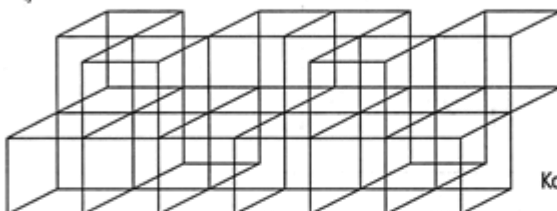
a	
b	
c	
d	

e	
f	
g	
h	

i	
j	

Értelmezd az alábbi ábrákat térbeli alakzatként, melyek egyforma tömör kockákból állnak, és amelyeknek takart éleit is ábrázoltuk. Írd az ábrák mellé, hogy hány kockából épülnek fel az alakzatok, és **vastagítsd meg színessel az összes látható éleket!**
A feladatlap megoldására fordítható idő: 6 perc

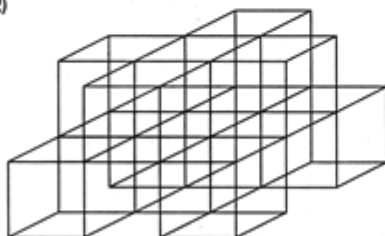
1)



Kockák száma:

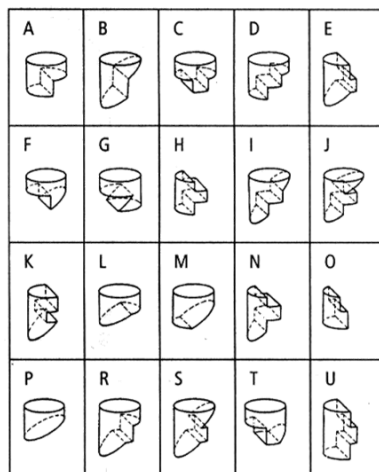
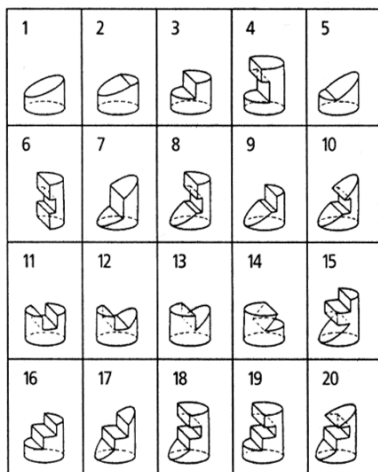
1	
2	

2)



Kockák száma:

Az alábbi két táblázatban 20 henger összetartozó, de szétválasztott idomrészeit láthatod. A baloldali táblázatok elemeinek mindegyike kiegészíthető a jobb oldali táblázatok elemeinek valamelyikével úgy, hogy hengerré egészítsék ki egymást. Az összeillő párok számjelét és betűjelét a feladat alján található táblázatba írd be! Mintaként két idomot párosítottunk. A feladatlap megoldására fordítható idő: 4 perc

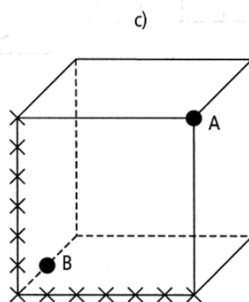
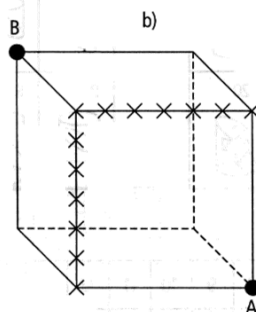
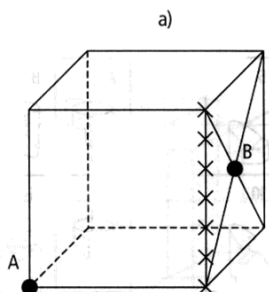


a

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
P						B													

A feladatlapon látható testek élei egyenlő hosszúságúak. Egy katicabogár szeretne eljutni a testek felszínén a lehető legrövidebb úton A pontból a B pontba. Az x-szel megjelölt élpon-
tok melyikén kell áthaladnia? Rajzold rá mindegyik test felszínére az általad legrövidebb-
nek tartott útvonalat!

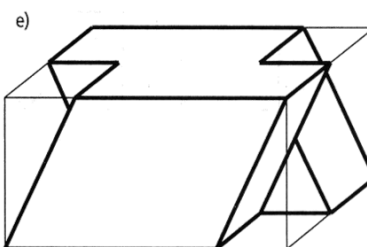
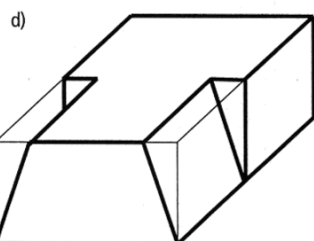
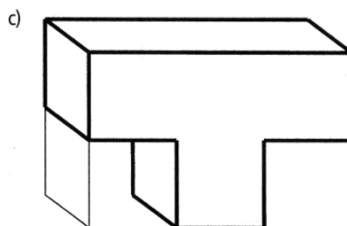
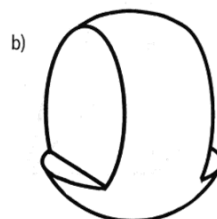
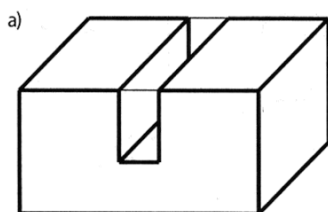
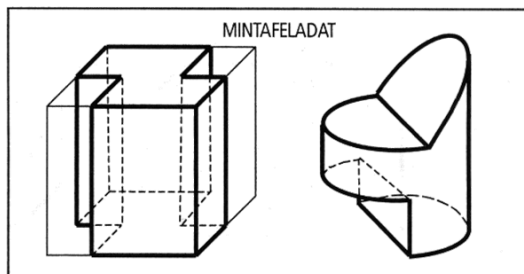
A feladatlap megoldására fordítható idő: 3 perc



a	
b	
c	

Ebben a feladatban 4 egyszerű testből (téglatestből vagy gömbből) kivágott csunkolt test nem látható éleit kell berajzolnod a testek axonometrikus rajzaiba úgy, ahogy te azt lehetségesnek tartod. Előbb tanulmányozd át a mintafeladatot, ahol az általunk berajzolt megoldás nem az egyetlen, de talán a legkézenfekvőbb változat!

A feladatlap megoldására fordítható idő: 5 perc



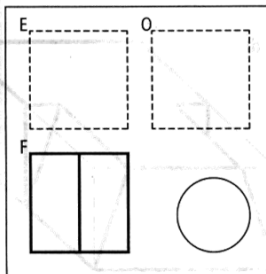
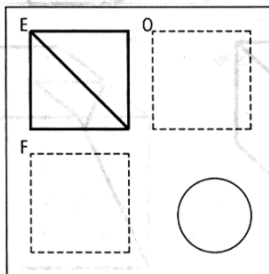
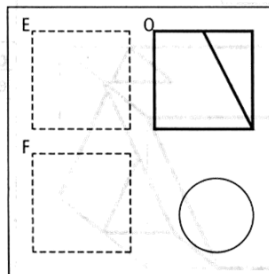
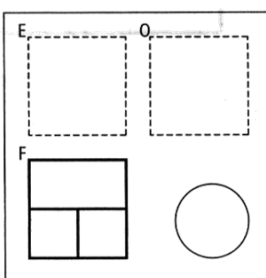
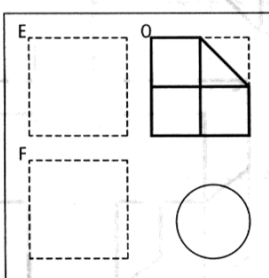
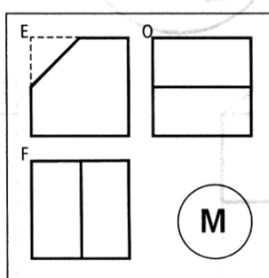
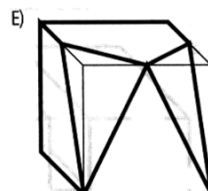
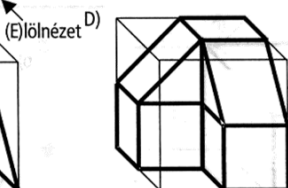
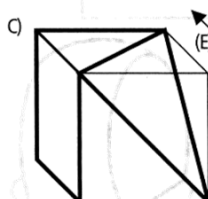
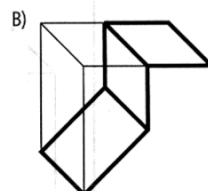
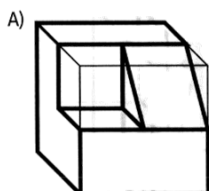
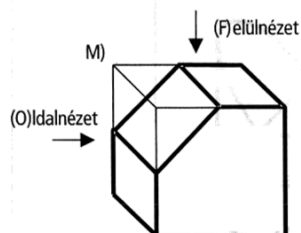
a	
b	

c	
---	--

d	
e	

Párosítsd a testek látszati és vetületi ábrázolását. A testek betűjelét írd az üres karikába, majd fejezd be a vetületi ábrázolást a testek hiányzó két nézetének megrajzolásával! Mintaként az „M” jelű test három nézetét megrajzoltuk, és segítségképpen a látszati képén megadtuk a nézeti irányokat is.

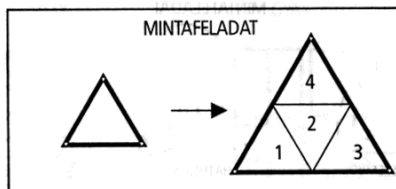
A feladatlap megoldására fordítható idő: 6 perc



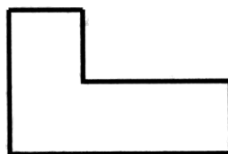
a	
b	

c	
d	
e	

A feladatlap két feladatból áll, mindkettőben hasonló a feladat. Állíts össze a megadott egyszerű alakzathoz hasonló, de nála nagyobb síkbeli alakzatot négy ilyen alapidarabból!
(Rajzban kell „összepuzzlézni” négy ilyenből egy velük hasonlót.) Mielőtt hozzákezdesz, tanulmányozd át a mintafeladatot!
A feladatlap megoldására fordítható idő: 7 perc

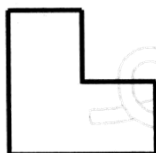


a)



a

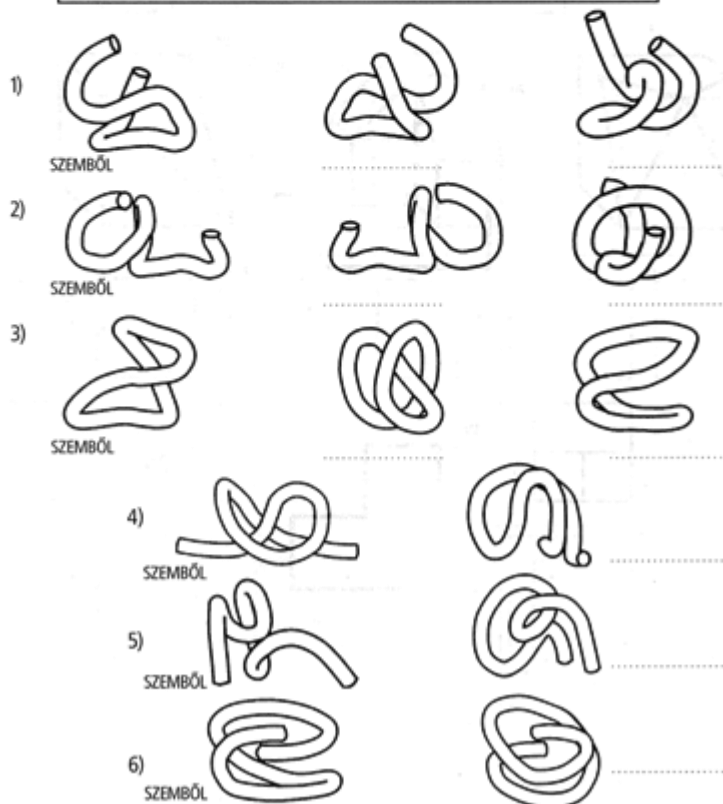
b)



a

Az alábbi hat feladat mindegyike egy-egy drótból készült térbeli alakzat két vagy három perspektivikus képét mutatja más-más nézőpontból. Ha az első rajzot tekintjük előnézetnek (tehát szemből ilyennek látjuk), akkor ehhez képest honnan kell nézni az alakzatot, hogy a tőle jobbra lévő képeket lássuk: balról, jobbról, hátulról vagy felülről? Írd az ábrák alá, hogy az első nézethez képest honnan látszódna olyannak az alakzat! Bemelegítésként tanulmányozd át a mintafeladatot!

A feladatlap megoldására fordítható idő: 5 perc



a
b

c
d

e
f

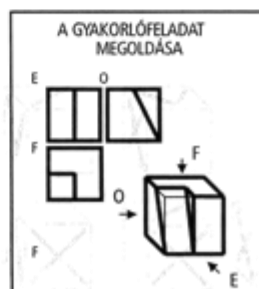
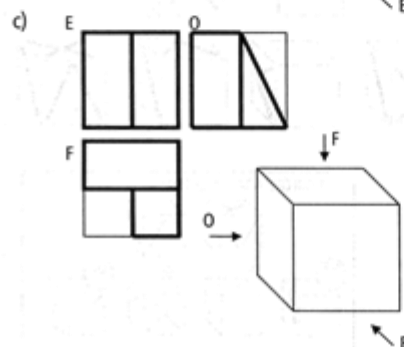
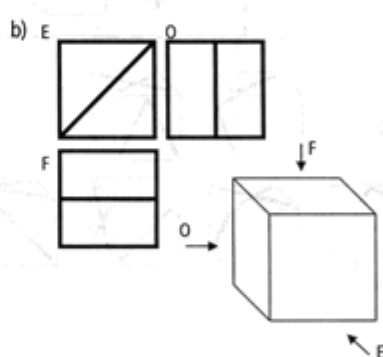
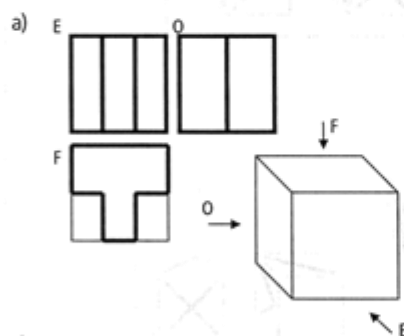
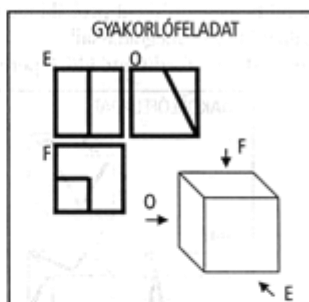
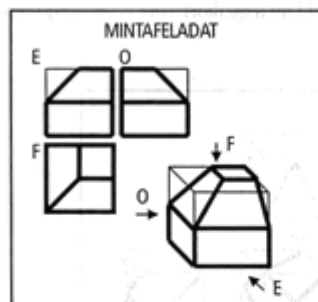
g

h

i

Ebben a feladatban három, kockából kialakított, síklapokkal csonkolt test vetületi képe látható. Rekonstruáld a testeket a látszati képük megrajzolásával! Csak a látható éleket rajzold meg! (A vetületi képekben szereplő élek is mind láthatóak.) Segítségként, keretként vékony vonallal jelöltük annak a kockának az éleit, amelyből a testet kivágták. Bemelegítésként tanulmányozd át a mintafeladatot, ezután próbáld megoldani a gyakorlófeladatot, majd vedd össze a lap alján található helyes megoldással!

A feladatlap megoldására fordítható idő: 7 perc



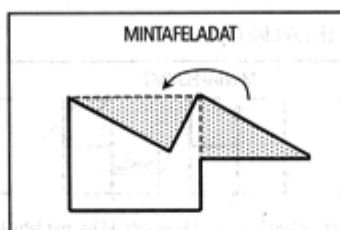
a
b

c

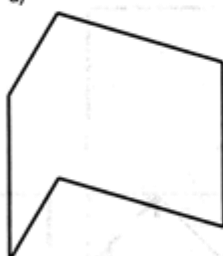
Tekintsd az alábbi alakzatokat papírból kivágott síkidomoknak, melyeket képzeletben kell egy ollóval két részre vágni egy egyenes vágással úgy, hogy a két részből valahogy téglalapot lehessen összerakni, tetszőlegesen forgatva a két papírdarabot. Jelöld a vágást szaggatott vonallal!

Lásd a mintafeladatot!

A feladatlap megoldására fordítható idő: 4 perc



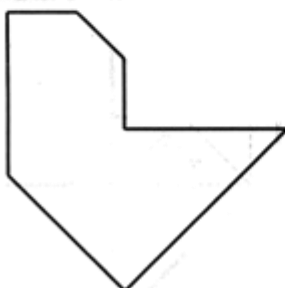
a)



b)



c)



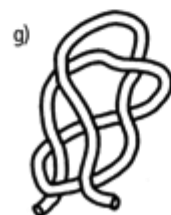
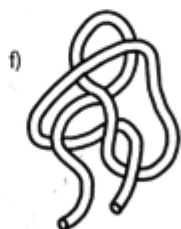
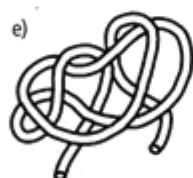
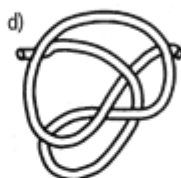
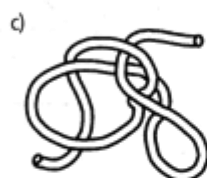
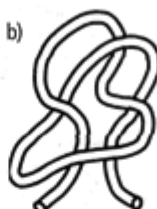
d)



a	
b	

c	
d	

Az alábbi ábrán nyolc zsinór látható. Karikázd be, melyiken keletkezik csomó, ha meghúzzod a két végét! Amelyiken szerinted nem, azt pedig húzd át!
A feladatlap megoldására fordítható idő: 3 perc



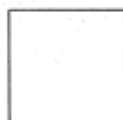
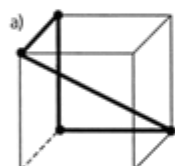
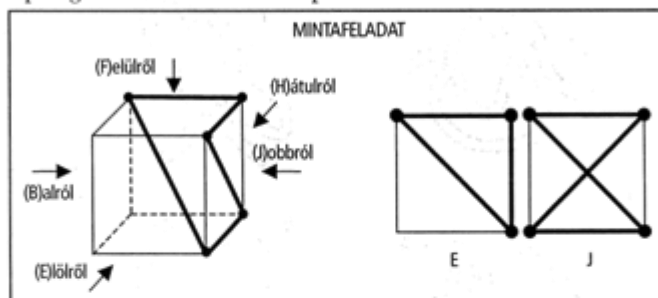
a	
b	
c	
d	

e	
f	
g	
h	

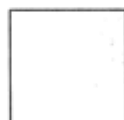
A feladatok mindegyike egy-egy kocka belsejébe beépített drótváz asakzat axonometrikus képét tartalmazza. Az alakzatok csúcspontjai egyben a befoglaló kocka csúcsai vagy oldal felezőpontjai. Hogyan látszik ez az alakzat két kitüntetett irányból? Rajzold be, mit látnál, ha (E)lölről, (H)átulról, (J)obból, (B)alról, vagy (F)elölről néznék! Feladatonként csak két nézetre vagyunk kíváncsiak.

A mintafeladatban megmutatjuk, hogy mit is értünk ezeken a kitüntetett irányokon.

A feladatlap megoldására fordítható idő: 5 perc

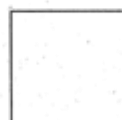
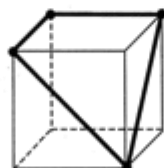


B



H

b)

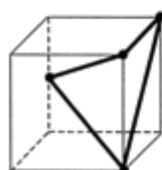


F



B

c)

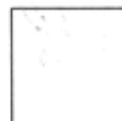


J



H

d)



H



B

a	
b	

c	
d	

e	
f	

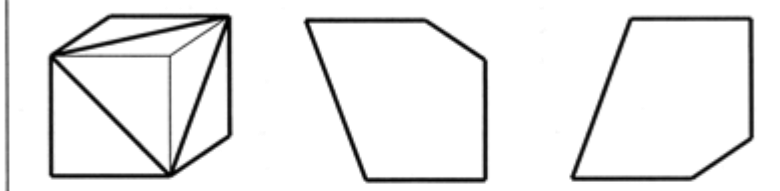
g	
h	

Ez feladat két feladatsort tartalmaz, az elején kiegészítve egy gyakorló feladatsorral. Az egy sorban található három rajz mindegyike ugyanazt a kockából kivágott testet három különböző helyzetben ábrázolja, az utolsó két rajzon azonban csak a test külső határoló vonalai láthatóak. Ilyennek láthatnád a testet egy sötétített szobában, ahol a test helyett csupán annak kontúrjai által körülhatárolt részletek nélküli alakatlan formája látszódná. Ha felkapcsolnád a villanyt, akkor mit látnál? Rajzold be a testek látható éleit!

Előbb a gyakorló feladatot oldd meg, majd vedd össze a lap alján található megoldással!

A feladatlap megoldására fordítható idő: 6 perc

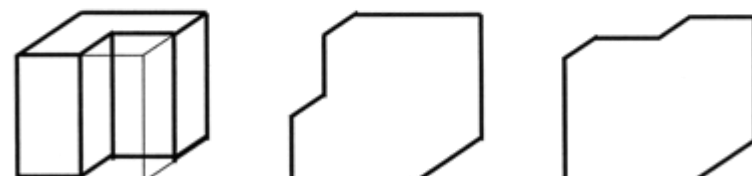
GYAKORLÓFELADAT



1)



2)



a	
b	

c	
d	

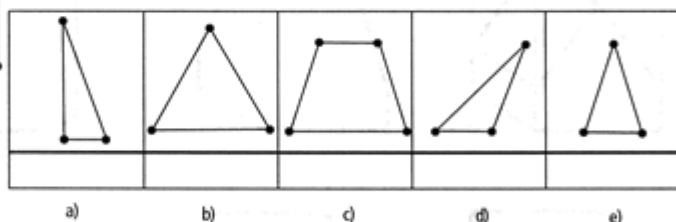
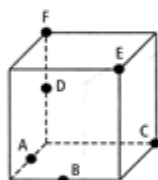
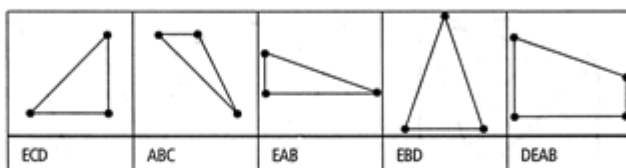
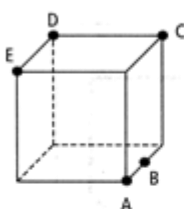
A GYAKORLÓFELADAT MEGOLDÁSA



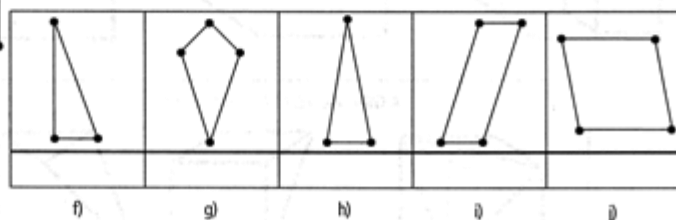
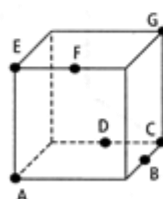
A feladatban szereplő mindkét kockában öt-öt különböző síkidomot kell felfedezned. A pontok a kockák csúcspontjai vagy oldalfelező pontjai. Keresd meg, hogy mely pontokat kell összekötni ahhoz, hogy az ábrákon látható síkidomokat kapjuk! Írd az ábrák alá a pontok betűjeleit! Az ábrák nem pontosan mérhetőek, csupán hasonlóak a kocka pontjai által meghatározott síkidom valódi alakjához. Mielőtt hozzákezzesz, tanulmányozd át a mintafeladatot!

A feladatlap megoldására fordítható idő: 7 perc

MINTAFELADAT

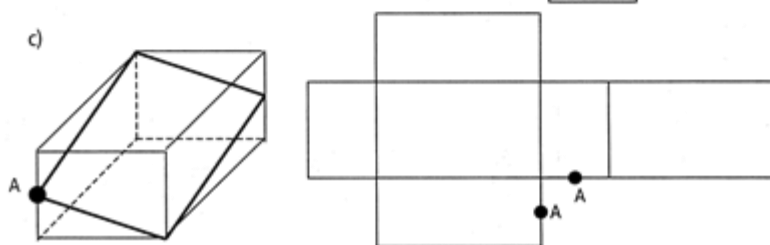
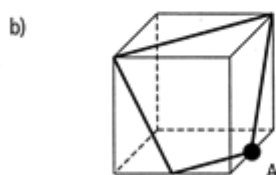
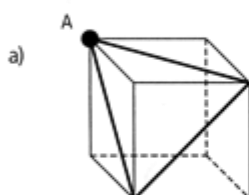
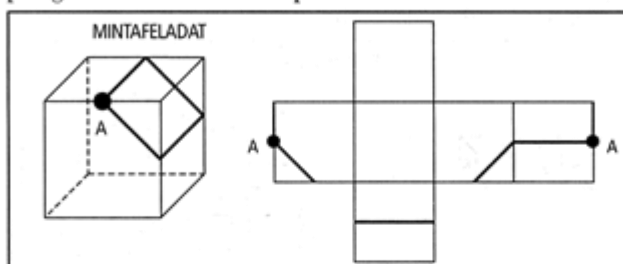


a	
b	
c	
d	
e	



f	
g	
h	
i	
j	

A feladatlapon látható testeket egy-egy síklappal metszettük el. A metszési vonalakat vastag, folytonos vonallal jelöltük be a testek felszínén. Rajzold be a testek kiterített felszínébe (hálójába) a sík és a felület metszési vonalait! A síkmetszet egy pontjának (az 'A' pontnak) megfelelőit a hálóba is berajzoltuk. Mielőtt hozzáfogsz, tanulmányozd át a mintafeladatot!
A feladatlap megoldására fordítható idő: 5 perc



a

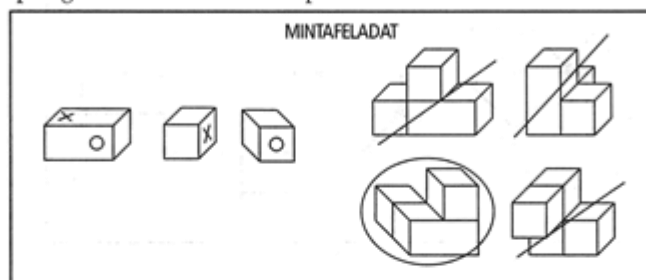
b

c

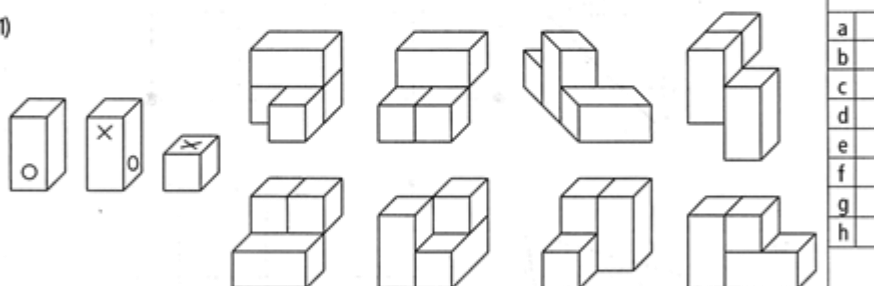
Az alábbi két feladatsorban három egyszerű tételemből összetett testet konstruáltunk. Képzeld el, hogy az elemek azonos jelekkel jelölt részeit összeragasztottuk. Válaszd ki és karikázd be azokat az ábrákat, amelyek az így összeállított testet ábrázolhatják, ellenkező esetben húzd át!

Előbb tanulmányozd át a mintafeladatot!

A feladatlap megoldására fordítható idő: 7 perc

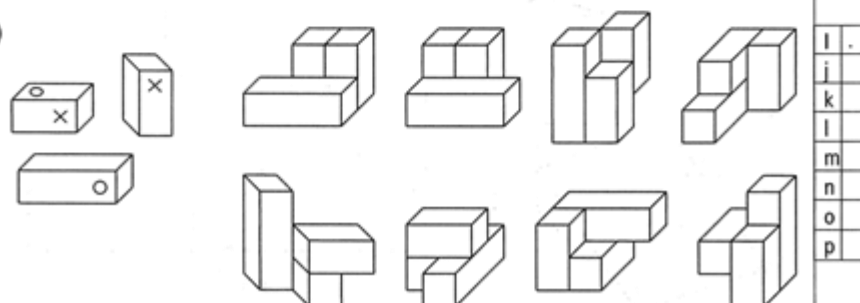


1)



a	
b	
c	
d	
e	
f	
g	
h	

2)

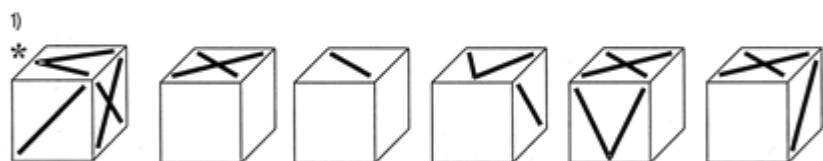
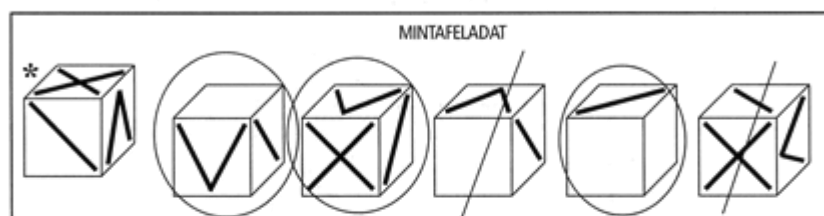


i	
j	
k	
l	
m	
n	
o	
p	

A feladat 3 feladatsort tartalmaz, kiegészítve egy mintafeladattal. Mindegyik esetben hasonló a feladat: egy kocka három oldalajára három különböző jelet rajzoltunk: \, V, X, a másik három oldalát pedig üresen hagytuk. Az csillaggal jelölt ábrák ezt a három oldalán megjelölt kockát mutatják. Válaszd ki a mellette lévő 5 kép közül, hogy melyik ábrázolhatja ezt a kockát valamilyen más helyzetében, és melyik nem! Karikázd be az 5 kép közül azt, amelyik ábrázolhatja és húzd át azt, amelyik nem!

Bemelegítésként és a feladat jobb megértése végett tanulmányozd át a mintafeladatot!

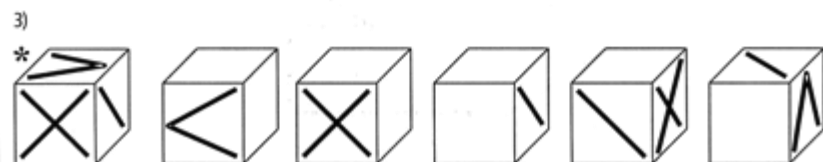
A feladatlap megoldására fordítható idő: 6 perc



a
b
c
d
e



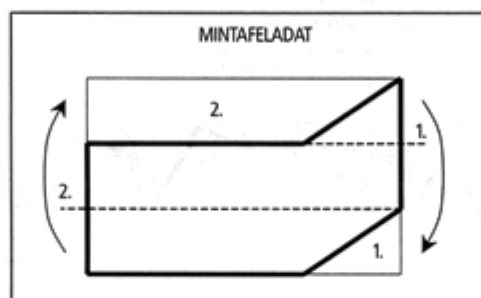
f
g
h
i
j



k
l
m
n
o

Tekintsd az alábbi alakzatokat papírból kivágott síkidomoknak, melyeket képzeletben kell egy ollóval két részre vágni egy egyenes vágással úgy, hogy a két részből valahogy téglalapot lehessen összerakni, tetszőlegesen forgatva a két papírdarabot. Mindegyik feladatot több-féleképpen is meg lehet oldani. Keress mindegyik feladatra 2-2 megoldást! A vágásokat jeleld szaggatott vonallal, és a változatokat számozd meg! (Lásd a mintafeladatot!)

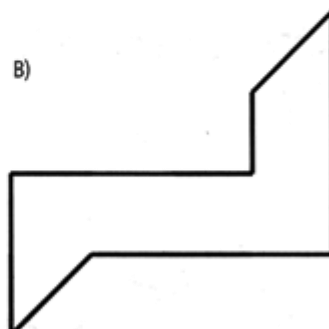
A feladatlap megoldására fordítható idő: 6 perc



A)



B)



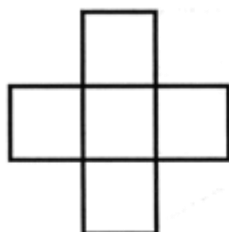
C)



a	
b	

c	
---	--

Rajzolj olyan építményt (perspektivikus vagy axonometrikus képét), amelyet előlről, hátulról, alulról, felülről és mindkét oldalról ilyenek látunk!
A feladatlap megoldására fordítható idő: 4 perc



a ☐

FAVÓKULCS

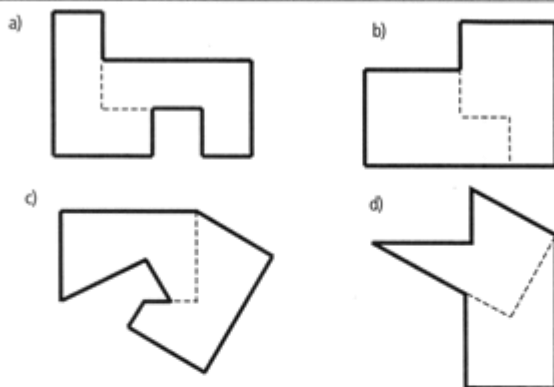
A1

Bekarikázva: a, c, e

Áthúzva: b, d, f, g, h

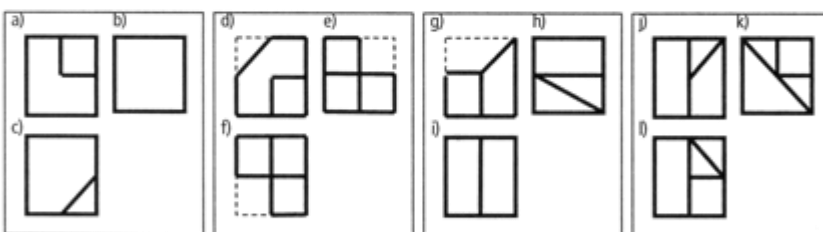
Minden helyes döntés 1-1 pontot jelent. Helyes a döntés, ha a megoldókulcsban áthúzott ábrát a tanuló is áthúzza, vagy a bekarikázottat bekarikázza. A teljes feladatra adható összes pontszám 8 pont.

A2



A helyes megoldások mindegyikére 1-1 pont adható. A feladatra így maximálisan $4 \times 1 = 4$ pont. Az ábrákhoz a nekik megfelelő betűkkel jelölt lapszéli kódokkák tartoznak.

A3



Egy-egy helyesen megrajzolt nézet 1-1 pontot ér, tehát tesztenként max. 3 pont adható. Csak a hibátlan megoldások pontozhatók. Bizonyos pontatlanság, arányokban való eltérés azonban megengedhető. A feladatra adható max. pontszám így: $4 \times 3 = 12$ pont.

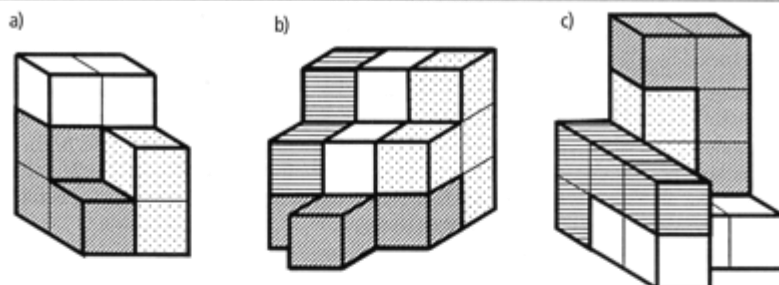
A4

a)	EBCF	E
b)	BDF	F
c)	CDAB	P
d)	EDA	S
e)	EBD	J
f)	BDF	F

g)	GIE	F
h)	AIE	S
i)	GEBD	D
j)	ECG	N
k)	DCBA	A
l)	ACE	N

Egy-egy ábra eredményes azonosítása 1-1 ponttal értékelhető, a feladatra adható maximális pontszám $2 \times 6 = 12$ pont.

A5



Ábránként a helyes megoldásra maximum 1 pont adható. Mindhárom ábrának többféle megoldása is létezik, mi itt csak egyféle megoldást mutatunk be. Csak az egyértelműen eldönthetőek számíthatók helyes megoldásnak. A megoldás esztétikuma, (a felismerhetőség határán belül) nem játszik szerepet a feladat pontozásában. A feladatra adható maximális pontszám $3 \times 1 \text{ pont} = 3 \text{ pont}$.

A6

Bekarikázva: a, b, e, h, i, j

Áthúzva: c, d, f, g

Összesen 10 döntést kell értékelni, minden helyes döntés 1-1 pontot jelent. Helyes a döntés, ha a megoldókulcsban áthúzott ábrát a tanuló is áthúzta, vagy a bekarikázottat bekarikázta. A teljes feladatra adható összes pontszám $2 \times 5 \text{ pont} = 10 \text{ pont}$.

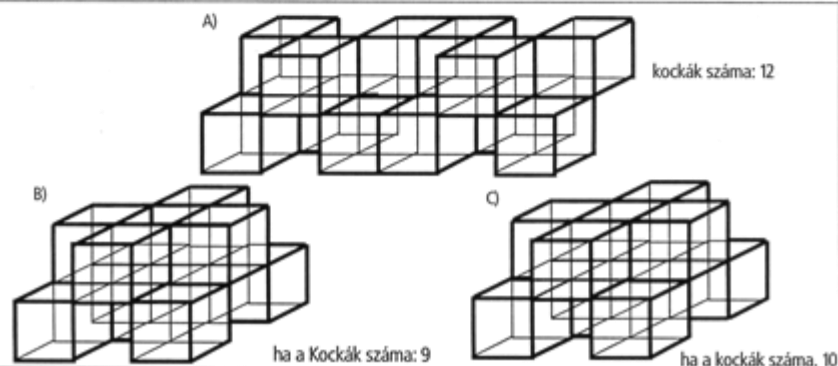
A7

Bekarikázva: a, d, e, f, j

Áthúzva: b, c, g, h, i

Minden helyes döntés 1-1 pontot jelent. Helyes egy döntés, ha a megoldókulcsban áthúzott ábrát a tanuló is áthúzta, vagy a bekarikázottat bekarikázta. A teljes feladatra adható összes pontszám 10 pont.

A8



Az értékelés ábránként 2-2 részből áll. Egyrészt értékelni kell, hogy a látható éleket helyesen rajzolták-e be. Az erre adható ábránként maximálisan 5 pontból minden hibás és/vagy hiányzó él 1-1 pont levonást eredményez. Tehát 5 hibás és/vagy hiányzó él esetén már nem jár pont a feladatnak erre a részére. Az 'A' ábra erre vonatkozó pontszámát az 'a' jelű kódkockákba, a 'B' ábrára vonatkozóét a 'c' kódkockákba kell beírni.

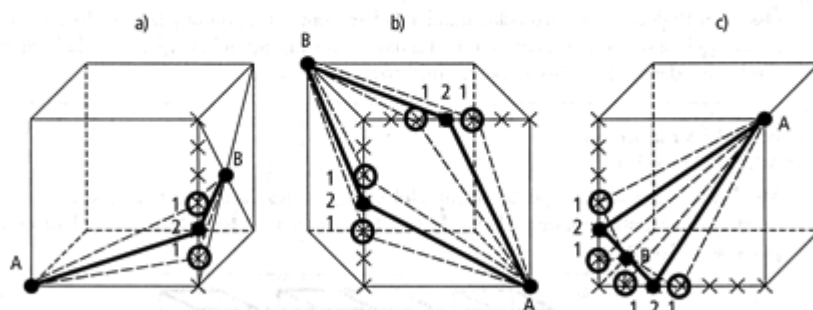
Másrészt értékelni kell, hogy helyesen állapították-e meg a testet alkotó kockák számát. Ha hibátlan a megoldás, akkor ábránként 5-5 pont adható, ha a helyes eredménytől eltér a megadott szám (akárcsak eggyel is), akkor nem adható rá egyetlen pont sem. Az 'A' ábra erre vonatkozó pontszámát a 'b' jelű kódkockákba, a 'B' ábrára vonatkozóét a 'd' kódkockákba kell beírni. Az ábrákat a testeknek egy mélyebb nézőpontból való ábrázolásaként is fel lehet fogni, természetesen egyértelmű megoldásként.

A9

a)	b)	c)	d)	e)	f)	g)	h)	i)	j)	k)	l)	m)	n)	o)	p)	q)	r)	s)	t)
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
P	L	A	O	M	U	B	E	R	S	C	T	F	G	K	D	I	N	H	L

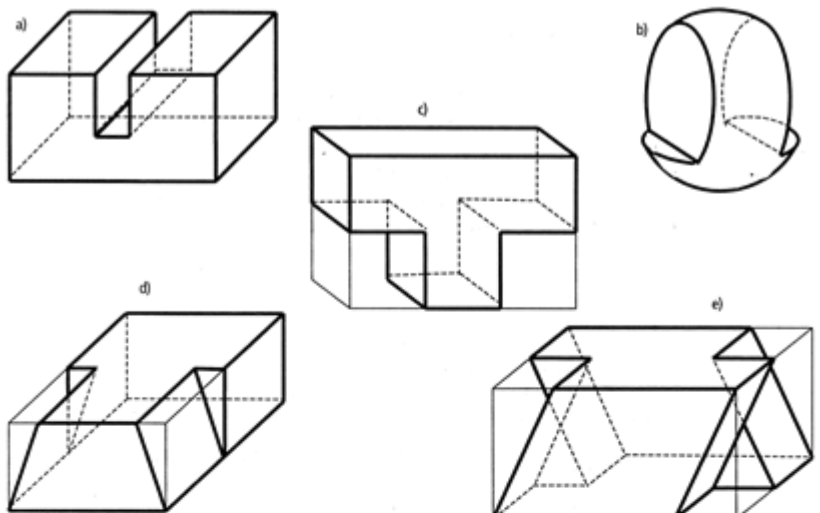
Minden helyes párosítás 1-1 pont, amelyeket külön értékelünk a jobb oldali kódkockákban. A teljes feladatra maximálisan $18 \times 1 = 18$ pont adható.

B1



Az üres karikán áthaladó útvonalanként ábránként max 1 pont jár. A sötét ponton áthaladó útvonal a hibátlan megoldás, és ezért ábránként 2 pont adható. A b) és c) testek esetében két helyes útvonal is létezik, de a plusz megoldás nem értékelhető plusz ponttal. A feladatra adható max pontszám: $3 \times 2 = 6$ pont.

B2



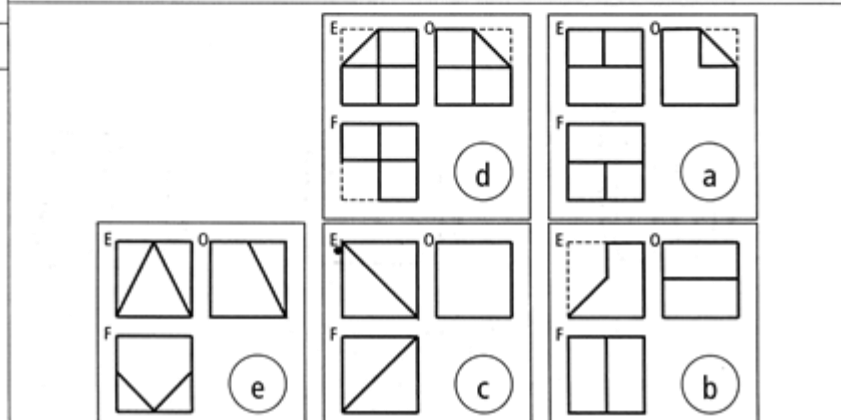
Egy-egy hiányzó él berajzolásáért 1-1 pont adható. Hiányzó élnek egy csomóponttól csomópontig terjedő teljes él vagy annak egy (csak is egy) nem látható szakasza számít. Így az ábrákra adható maximális pontszám:

- a) testre: 8 pont
- b) testre: 3 pont
- c) testre: 10 pont
- d) testre: 6 pont
- e) testre: 8 pont

Összesen 35 pont.

Minden helytelen vagy hiányzó él esetén ebből a pontszámból le kell vonni 1 pontot.

B3



A látszati kép és a vetületi ábrázolás helyes párosításáért 1-1 pont adható, függetlenül attól, hogy a hiányzó két vetületi rajzot hogyan sikerült megrajzolni. Egy alakzat egy nézetére 0 vagy 2 pont adható. 2 pont akkor, ha hibátlan a megoldás (bizonyos pontatlanság, arányokban való eltérés megengedhető) ettől eltérő esetben nem jár pont. Testenként (így a két vetületi rajzra maximum 4 pont, a helyes párosításért kapott 1 ponttal együtt 5 pont adható. Így a teljes feladatra adható összpontszám 5×5 pont = 25 pont. Az alakzatonkénti pontszámokat az alakzat kisbetűs jelének megfelelő kódkockába kell beírni. (amely a fentieknek megfelelően 0, 1, 3, 5 pont lehet kódkockaként)

B4



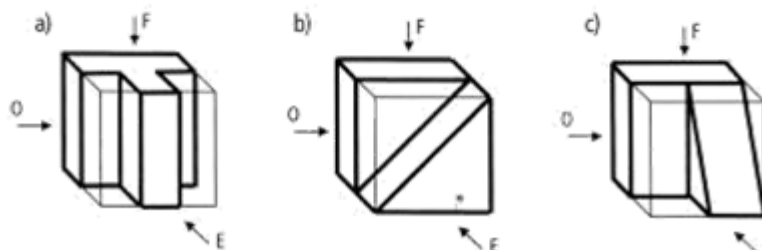
A rajzokra adható pontszám 0, 1 vagy 2 pont. Hibátlan megoldás esetén 2 pont jár, ha a létrehozott alakzat az eredetire emlékeztet, de nem matematikai értelemben hasonló, úgy 1 pont adható. A feladatra adható maximális pontszám így: $2 \times 2 = 4$ pont.

B5

6 alakzat 9 nézetét kell megállapítani. Minden helyes döntés 1-1 pontot ér, így a feladatra adható maximális pontszám $9 \times 1 = 9$ pont. Az ábrákhoz a velük egyvonalban lévő kódkockák tartoznak.

- | | |
|-------------|------------|
| a) hátulról | b) jobbról |
| c) hátulról | d) jobbról |
| e) felülről | f) balról |
| g) jobbról | |
| h) balról | |
| i) felülről | |

B6



Helyes rajzonként maximum 2 pont adható. Kiseb pontatlanság, helytelen arányok esetén 2 pont helyett 1 pont jár, de csak akkor, ha a rajzból a vetületek szintézise kimutatható. (1-1 helyes, de elszigetelt szakaszért pl. önmagában nem jár pont.) A teljes feladatra adható maximális pontszám $3 \times 2 = 6$ pont.

B7

Bekarikázva: a, b, e, f, h, j, k

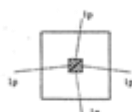
Áthúzza: c, d, g, i, l

Az itemeket tételenként balról jobbra haladva az olvasási irányuknak megfelelően betűztük meg.

Tételenként 4-4, összesen 12 döntést kell értékelni, helyes-e, vagy sem. Helyes a döntés, ha a megoldáskulcsban áthúzott betűjelű ábrát a tanuló is áthúzta, vagy a bekarikázottat bekarikázta. Minden helyes döntés 1-1 pontot jelent, így maximálisan $3 \times 4 = 12$ pont adható a feladatra.

B8

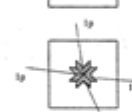
a) feladat



b) feladat



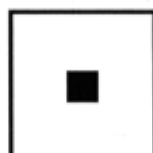
c) feladat



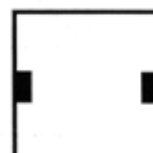
d) feladat



a)



b)



c)



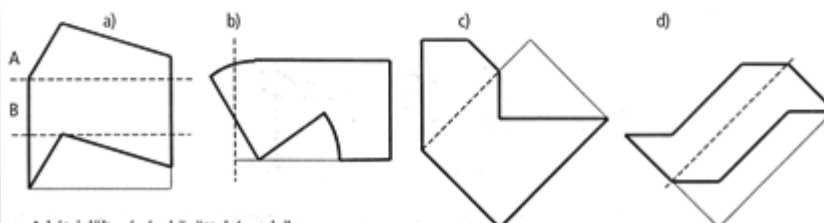
d)



Ábránként 4-4 szimmetrikus részből áll a megoldás, és ezekre egyenként 1-1 pont adható, így egy-egy „kihajtogatott papírra” maximum $4 \times 1 = 4$ pont adható.

A feladatok pontszámát a megfelelő kisbetűvel jelölt lapszéli kódkockákba kell beírni. A teljes feladatra $4 \times (4 \times 1 \text{ pont}) = 16$ pont adható.

B9



A két jelölt vágás között bármelyik velük párhuzamos vágás (kivéve B-t)

Ábránként helyes megoldás esetén 1 pont adható. Maximális pontszám: $4 \times 1 \text{ pont} = 4$ pont.

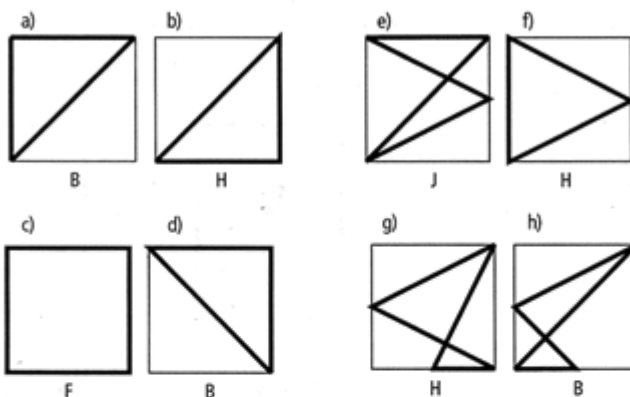
C1

Bekarikázva: a, b, g

Áthúzva: c, d, e, f, h

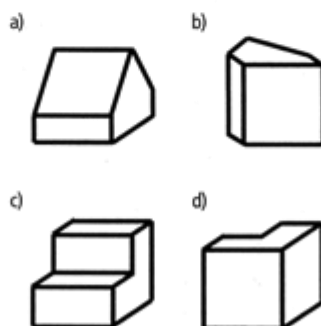
Minden helyes döntés 1-1 pontot jelent. Helyes a döntés, ha a megoldókulcsban áthúzott ábrát a tanuló is áthúzta, vagy a bekarikázottat bekarikázta. A teljes feladatra adható összes pontszám 8 pont.

C2



Minden helyes nézet 1-1 ponttal értékelhető, ez alakzatonként összesen 2 pont. A feladatra adható maximális pontszám $4 \times 2 \text{ pont} = 8 \text{ pont}$. Minden nézethez egy kódkocka tartozik.

C3



A látható élek hibátlan berajzolására testenként 1-1 pont adható. Az általunk megadott helyes megoldáshoz képest mindegyik ábra alulnézetből is értékelhető, természetesen ez a bemutatottal egyenértékű megoldásnak számít.

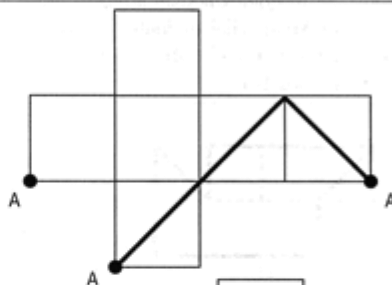
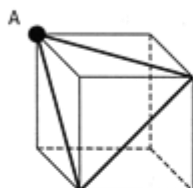
C4

- | | |
|------------------|-------------|
| a, EFB | f, CDE, EFD |
| b, FEC | g, ABCD |
| c, EFAB | h, BDE, BDG |
| d, ABE, ABF, FDC | i, EFCD |
| e, ACD, ACB | j, FADG |

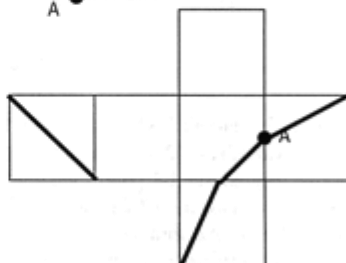
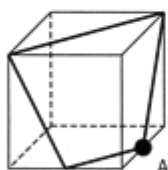
A helyes azonosítás síkidomként 1-1 pontot ér. Maximális pontszám: 2×5 pont = 10 pont. Az ábrákhoz a megfelelő betűvel jelölt lapszélei kódkockák tartoznak. A d, e, f, h, itemek esetén több elfogadható megoldás is létezik, bár ezek nem feltétlenül egybevágó síkidomok, de szórás, illetve számítás nélkül a szemlélet alapján mindegyiket elfogadhatjuk helyes megoldásnak. Egy itemre azonban így is csak max. 1 pont adható.

C5

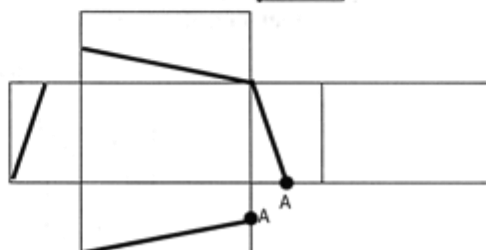
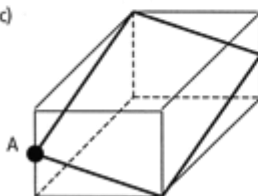
a)



b)



c)



Hibátlan megoldásért testenként 2 pont adható. A megoldások az a) testnek 3 kockalapra írt válaszból, a b) testnél 4 kockalapra, a c) testnél szintén 4 oldallapra írt válaszokból állnak. Egy hibának számít testenként, ha egy oldallapra írt szakasz hiányzik, vagy hibásan van bejelölve. Egy hiba esetén testenként csak 1 pont adható, több hiba esetén nem jár pont arra a tételre (testre). A feladatra adható max. pontszám $3 \times 2 = 6$ pont.

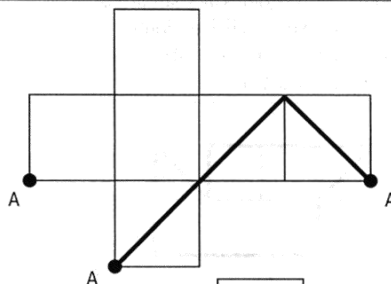
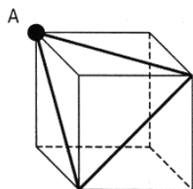
C4

- | | |
|------------------|-------------|
| a, EFB | f, CDE, EFD |
| b, FEC | g, ABCD |
| c, EFAB | h, BDE, BDG |
| d, ABE, ABF, FDC | i, EFCD |
| e, ACD, ACB | j, FADG |

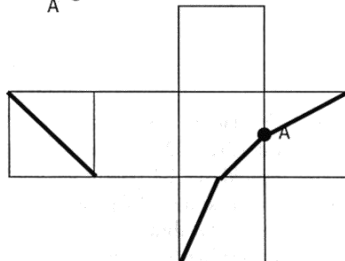
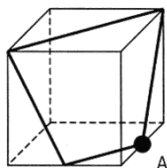
A helyes azonosítás síkidomként 1-1 pontot ér. Maximális pontszám: $2 \times 5 \text{ pont} = 10 \text{ pont}$. Az ábrákhoz a megfelelő betűvel jelölt lapszélei kódkockák tartoznak. A d, e, f, h, itemek esetén több elfogadható megoldás is létezik, bár ezek nem feltétlenül egybevágó síkidomok, de szórás, illetve számítás nélkül a szemlélet alapján mindegyiket elfogadhatjuk helyes megoldásnak. Egy itemre azonban így is csak max. 1 pont adható.

C5

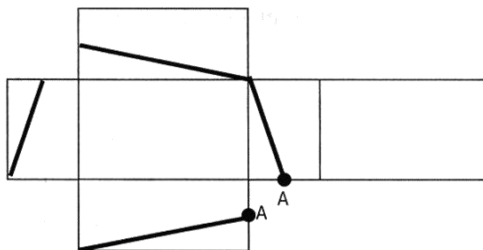
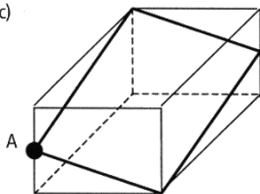
a)



b)

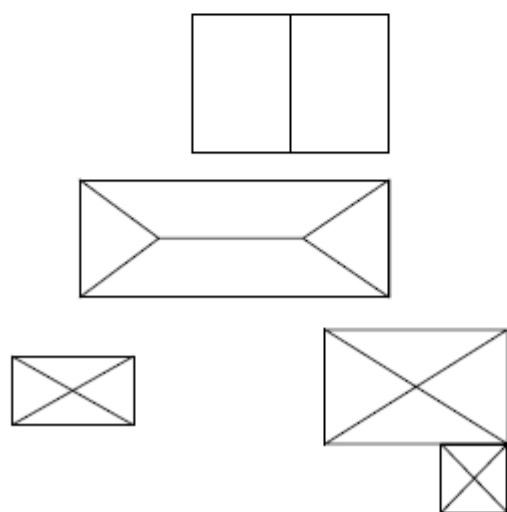


c)



Hibátlan megoldásért testenként 2 pont adható. A megoldások az a) testnek 3 kockalapra írt válaszból, a b) testnél 4 kockalapra, a c) testnél szintén 4 oldallapra írt válaszokból állnak. Egy hibának számít testenként, ha egy oldallapra írt szakasz hiányzik, vagy hibásan van bejelölve. Egy hiba esetén testenként csak 1 pont adható, több hiba esetén nem jár pont arra a tételre (testre). A feladatra adható max. pontszám $3 \times 2 = 6 \text{ pont}$.

Rajzolja meg az előlnézeti ábrán a sematikus ábrázolt város épületeinek látható éleit.



9.2. Affektív tényezők vizsgálata: Claus-féle kérdőív

Kérdőív

		Igen	Nem
1.	A matematika az első három legkedveltebb tantárgyam közé tartozik.		
2.	A matematika az utolsó három tantárgy között van.		
3.	Jelöld be, hogy mennyire érdekel a matematika: Nem érdekel érdekel		
4.	Ha választani kellene a tantárgyakat, akkor a matematikát választanám.		
5.	Ha tanári pályát választanám, szívesen tanítanám a matematikát.		
6.	Úgy vélem, hogy az iskola befejezése után semmi közöm nem lesz a matematikához.		
7.	Ha sok időm lenne, akkor szórakozásból is foglalkoznék a matematikával.		
8.	Mindig attól félek a matematikaórákon, hogy valami butaságot mondok.		
9.	Írásbeli számolási feladatoknál mindig félek attól, hogy elszámolom magam.		
10.	Nagyon félek a matematikadolgozatoktól.		
11.	Nem félek a matematikadolgozatoktól.		
12.	Ha matematikaórákon ki kell mennem a táblához, nagyon ideges vagyok.		
13.	Szívesen oldok meg egyenleteket, egyenlőtlenségeket, szöveges feladatokat, síkgéometria feladatokat, térgéometria feladatokat.		
14.	Szívesebben oldok meg 5 egyszerűbb feladatot, mint egy nehéz, gondolkodtató feladatot.		
15.	A matematika könnyű, nincsenek nehézségeim.		
16.	A matematika olyan nehéz, hogy sok mindent nem is értek.		
17.	Egy nehéz feladatot szívesebben oldok meg egyedül.		

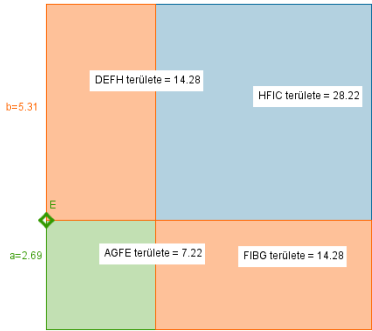
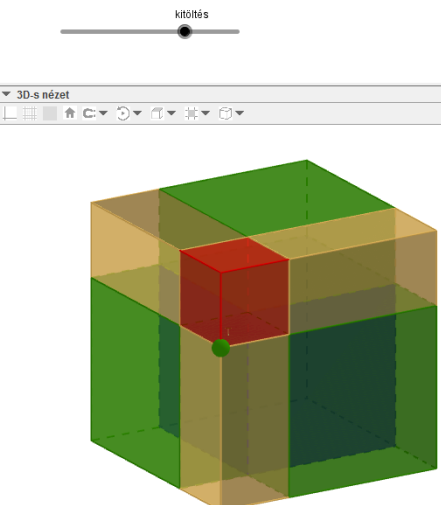
18. Szeretem, ha matematikaórán használunk számítógépet. Igen Nem Nekem mindegy

19. Írj le 3 jó dolgot, és 3 kevésbé jót (amin változtatni kellene) a matematikaórával kapcsolatban.

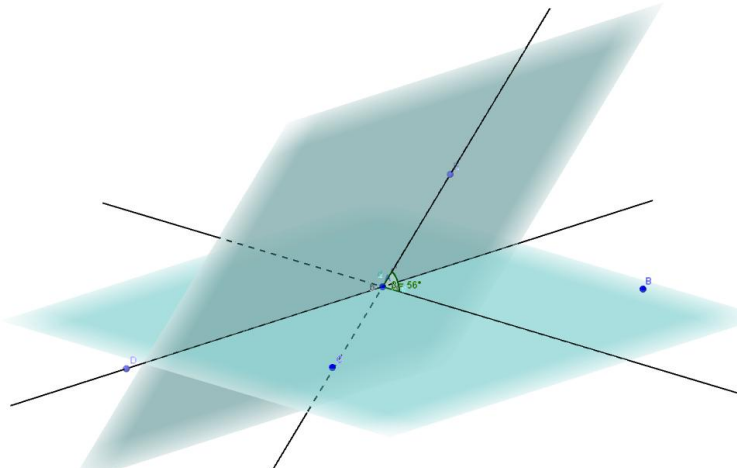
Ami jó a matematikaórákon	Amin változtatnék a matematikaórákon

9.3. Kiemelt segédanyagok

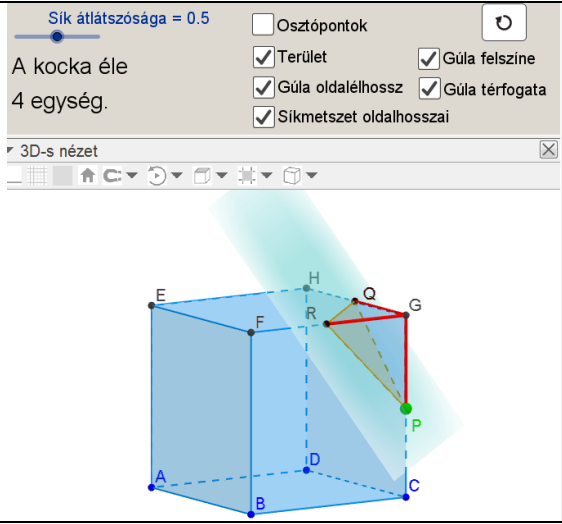
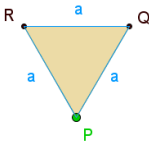
Két tag összegének köbére vonatkozó algebrai azonosság térgeometriai interpretációja

<u>Ajánlott évfolyam:</u> 9., 15. óra	<u>Fejlesztési cél (kerettanterv alapján):</u>
<u>Témakör/tartalom:</u> Számтан, algebra/ Nevezetes azonosságok	<u>ján):</u> Kombinatív készség fejlesztése
<u>Segédanyag leírása:</u> - baloldalon két tag összegének négyzetére vonatkozó azonosság szemléltetése síkgeometriai interpretációval, a és b értéke változtatható - jobb oldalon két tag összegének köbére vonatkozó azonosság szemléltetése térgeometriai interpretációval, a és b értéke változtatható, a kocka átlátszósága változtatható	
<u>Módszertani megjegyzések:</u> „Nézzük meg, a két tag összegének köbére vonatkozó azonosságot. Hány komponensből áll az azonosság jobb oldala?” „Az azonosság jobb oldalán 2 kocka, és 3-3 egybevágó téglatest térfogata szerepel.”	
$(a + b)^2 = (2.69 + 5.31)^2 = 8^2 = 64$ 	

Két sík hajlásszöge

<u>Ajánlott évfolyam:</u> 9., 43. óra	<u>Fejlesztési cél (kerettanterv alapján):</u>
<u>Témakör/tartalom:</u> Geometria/ Geometriai alapfogalmak	Tájékozottság a megismert síkidomok tulajdonságaiban. Sejtések megfogalmazása, új összefüggések felfedezése, bizonyítási igény kialakítása.
<u>Segédanyag leírása:</u> • Két sík és a megfelelő egyenesek helyzete változtatható • Két sík szögének mértéke változtatható	
<u>Módszertani megjegyzések:</u> „Állítsunk be különböző nevezetes szögmértékekhez tartozó sík-elhelyezkedéseket.” „Fogalmazzuk meg saját szavainkkal, hogyan értelmezhetjük két sík hajlásszögét.”	
	

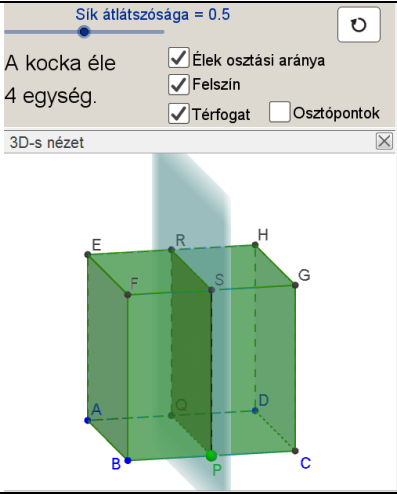
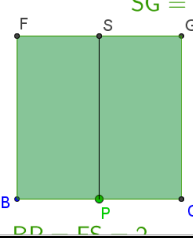
Kocka síkmetszetei I.

<u>Ajánlott évfolyam:</u> 9., 43. óra	<u>Fejlesztési cél (kerettanterv alapján):</u>
<u>Témakör/tartalom:</u> Geometria/ Geometriai alapfogalmak	<u>íán):</u> Háromszögekkel, négyszögekkel, sokszögekkel kapcsolatos ismeretek kiegészítése, rendszerezése. Tájékozottság a megismert síkidomok tulajdonságaiban.
<u>Segédanyag leírása:</u> • A kocka szabályos háromszög síkmetszetének előállíthatósága • Metsző sík átlátszósága állítható • P pont mozgatása, elhelyezése az élek nevezetes osztópontjain • A metszetre vonatkozó fontosabb paraméterek megjelenítése	
<u>Módszertani megjegyzések:</u> „Milyen módon keletkezhet kocka síkkal való metszésekor szabályos háromszög síkmetszet?” „Figyeljük meg a levágott gúla jellemzői paramétereit!”	
	$T_{PQR} = 3.65$ $GR = GQ = GP = 2.05$ $AP_{QRG} = 9.99$ $V_{PQRG} = 1.45$ $a = 2.91$ 

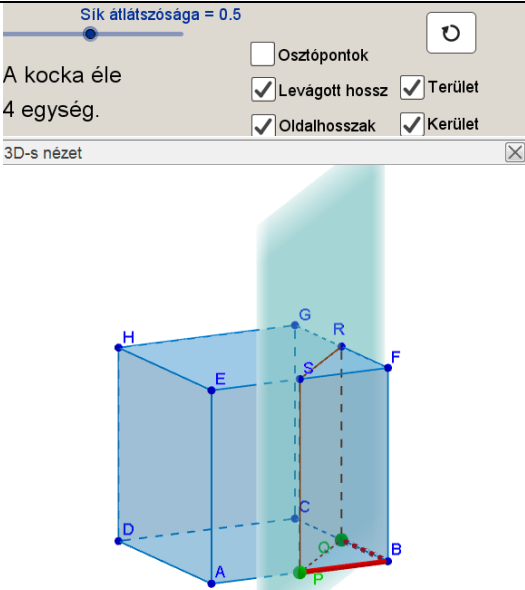
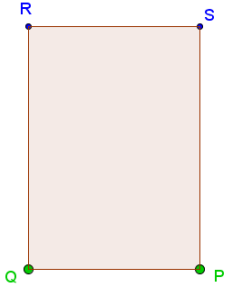
Kocka síkmetszetei II.

<u>Ajánlott évfolyam:</u> 9., 43. óra	<u>Fejlesztési cél (kerettanterv alapján):</u>
<u>Témakör/tartalom:</u> Geometria/ Geometriai alapfogalmak	Háromszögekkel, négyszögekkel, sokszögekkel kapcsolatos ismeretek kiegészítése, rendszerezése. Tájékozottság a megismert síkidomok tulajdonságaiban.
<u>Segédanyag leírása:</u> • A kocka tetszőleges háromszög síkmetszetének előállíthatósága • Metsző sík átlátszósága állítható • P, Q, R pont mozgatása, elhelyezése az élek nevezetes osztópontjain • A metszetre vonatkozó fontosabb paraméterek megjelenítése	
<u>Módszertani megjegyzések:</u> „Milyen módon keletkezhet kocka síkkal való metszésekor háromszög síkmetszet?” „Figyeljük meg a háromszög jellemzői paramétereit!” „Lehetséges derékszögű háromszög síkmetszet előállítása?”	
	$K_{PQR} = 9.42$ $T_{PQR} = 4.21$ $\alpha = 50.8^\circ$ $p = 3.3$ $\beta = 64.6^\circ$ $q = 3.3$ $\gamma = 64.6^\circ$ $r = 2.83$

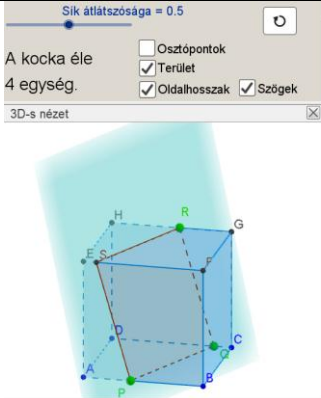
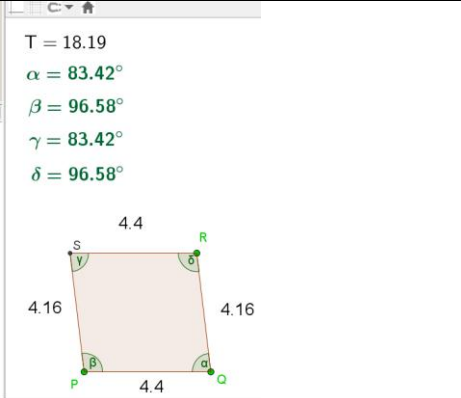
Kocka síkmetszetei III.

<u>Ajánlott évfolyam:</u> 9., 43. óra	<u>Fejlesztési cél (kerettanterv alapján):</u>
<u>Témakör/tartalom:</u> Geometria/ Geometriai alapfogalmak	Háromszögekkel, négyszögekkel, sokszögekkel kapcsolatos ismeretek kiegészítése, rendszerezése. Tájékozottság a megismert síkidomok tulajdonságaiban.
<u>Segédanyag leírása:</u> • A kocka négyzet síkmetszetének előállíthatósága • Metsző sík átlátszósága állítható • P pont mozgatása, elhelyezése az élek nevezetes osztópontjain • A metszetre vonatkozó fontosabb paraméterek megjelenítése	
<u>Módszertani megjegyzések:</u> „Milyen módon keletkezhet kocka síkkal való metszésekor négyzet síkmetszet?” „Figyeljük meg a keletkezett hasábok jellemzői paramétereit!”	
	BP PC = 1 ABPQ alapú hasáb felszíne = 64 CDQP alapú hasáb felszíne = 64 ABPQ alapú hasáb térfogata = 32 CDQP alapú hasáb térfogata = 32 SG = PC = 2 

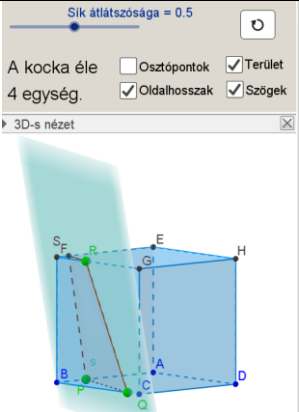
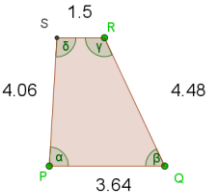
Kocka síkmetszetei IV.

Ajánlott évfolyam: 9., 43. óra	Fejlesztési cél (kerettanterv alapján):
Témakör/tartalom: Geometria/ Geometriai alapfogalmak	Háromszögekkel, négyszögekkel, sokszögekkel kapcsolatos ismeretek kiegészítése, rendszerezése. Tájékozottság a megismert síkidomok tulajdonságaiban.
Segédanyag leírása: - A kocka téglalap síkmetszetének előállíthatósága - Metsző sík átlátszósága állítható - P pont mozgatása, elhelyezése az élek nevezetes osztópontjain - A metszetre vonatkozó fontosabb paraméterek megjelenítése	
Módszertani megjegyzések: „Milyen módon keletkezhet kocka síkkal való metszésekor téglalap síkmetszet?” „Figyeljük meg a levágott téglalap, illetve hasáb jellemzői paramétereit!”	
	$BP = 2$ $BQ = 2$ $T = 11.31$ $K = 13.66$ $PQ = 2.83$ $QR = 4$ 

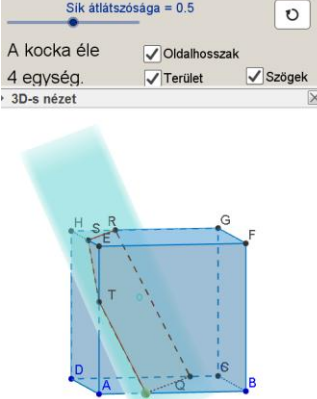
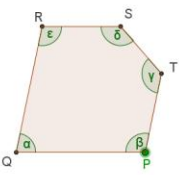
Kocka síkmetszetei V.

<u>Ajánlott évfolyam:</u> 9., 43. óra	<u>Fejlesztési cél (kerettanterv alapján):</u>
<u>Témakör/tartalom:</u> Geometria/ Geometriai alapfogalmak	Háromszögekkel, négyszögekkel, sokszögekkel kapcsolatos ismeretek kiegészítése, rendszerezése. Tájékozottság a megismert síkidomok tulajdonságaiban.
<u>Segédanyag leírása:</u> - A kocka paralelogramma síkmetszetének előállíthatósága - Metsző sík átlátszósága állítható - P, Q, R pont mozgatása, elhelyezése az élek nevezetes osztópontjain - A metszetre vonatkozó fontosabb paraméterek megjelenítése	
<u>Módszertani megjegyzések:</u> „Milyen módon keletkezhet kocka síkkal való metszésekor paralelogramma síkmetszet?” „Figyeljük meg a levágott paralelogramma jellemzői paramétereit!” „Keletkezhet-e rombusz síkmetszet?”	
	

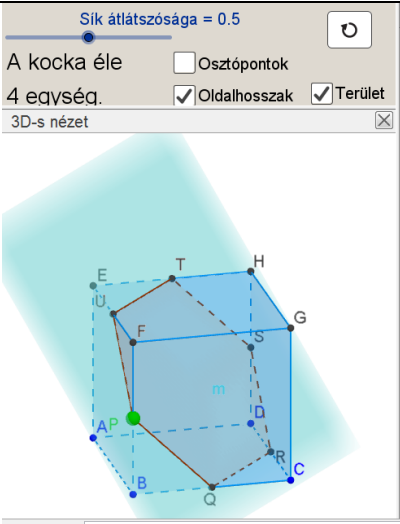
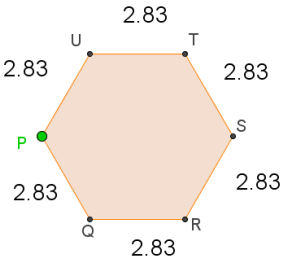
Kocka síkmetszetei VI.

<u>Ajánlott évfolyam:</u> 9., 43. óra	<u>Fejlesztési cél (kerettanterv alapján):</u>
<u>Témakör/tartalom:</u> Geometria/ Geometriai alapfogalmak	Háromszögekkel, négyszögekkel, sokszögekkel kapcsolatos ismeretek kiegészítése, rendszerezése. Tájékozottság a megismert síkidomok tulajdonságaiban.
<u>Segédanyag leírása:</u> - A kocka trapéz síkmetszetének előállíthatósága - Metsző sík átlátszósága állítható - P, Q, R pont mozgatása, elhelyezése az élek nevezetes osztópontjain - A metszetre vonatkozó fontosabb paraméterek megjelenítése	
<u>Módszertani megjegyzések:</u> „Milyen módon keletkezhet kocka síkkal való metszésekor trapéz síkmetszet?” „Figyeljük meg a levágott trapéz jellemzői paramétereit!” „Keletkezhet-e egyenlő szárú trapéz síkmetszet?”	
	$T = 10.43$ $\alpha = 86.66^\circ$ $\beta = 64.84^\circ$ $\gamma = 115.16^\circ$ $\delta = 93.34^\circ$ 

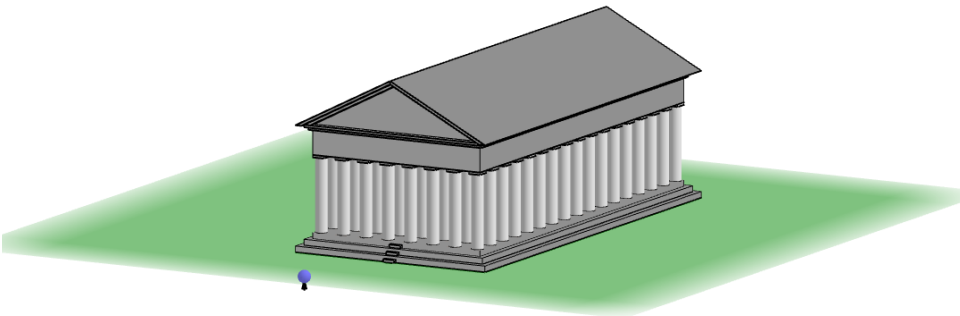
Kocka síkmetszetei VII.

<u>Ajánlott évfolyam:</u> 9., 43. óra	<u>Fejlesztési cél (kerettanterv alapján):</u>
<u>Témakör/tartalom:</u> Geometria/ Geometriai alapfogalmak	Háromszögekkel, négyszögekkel, sokszögekkel kapcsolatos ismeretek kiegészítése, rendszerezése. Tájékozottság a megismert síkidomok tulajdonságaiban.
<u>Segédanyag leírása:</u> - A kocka ötszög síkmetszetének előállíthatósága - Metsző sík átlátszósága állítható - P pont mozgatása, elhelyezése az élek nevezetes osztópontjain - A metszetre vonatkozó fontosabb paraméterek megjelenítése	
<u>Módszertani megjegyzések:</u> „Milyen módon keletkezhet kocka síkkal való metszésekor ötszög síkmetszet?” „Figyeljük meg a levágott ötszög jellemzői paramétereit!” „keletkezhet-e szabályos ötszög síkmetszet?”	
	$T = 18.16$ $\alpha = 78.46^\circ$ PQ = 4.46 $\beta = 101.54^\circ$ QR = 4.49 $\gamma = 128.21^\circ$ RS = 2.72 $\delta = 130.25^\circ$ ST = 2.17 $\epsilon = 101.54^\circ$ TP = 2.8 

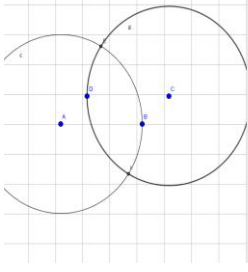
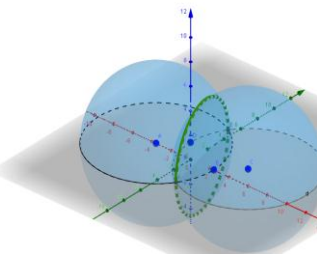
Kocka síkmetszetei VIII.

<u>Ajánlott évfolyam:</u> 9., 43. óra	<u>Fejlesztési cél (kerettanterv alapján):</u>
<u>Témakör/tartalom:</u> Geometria/ Geometriai alapfogalmak	Háromszögekkel, négyszögekkel, sokszögekkel kapcsolatos ismeretek kiegészítése, rendszerezése. Tájékozottság a megismert síkidomok tulajdonságaiban.
<u>Segédanyag leírása:</u> - A kocka hatszög síkmetszetének előállíthatósága - Metsző sík átlátszósága állítható - P pont mozgatása, elhelyezése az élek nevezetes osztópontjain - A metszetre vonatkozó fontosabb paraméterek megjelenítése	
<u>Módszertani megjegyzések:</u> „Milyen módon keletkezhet kocka síkkal való metszésekor hatszög síkmetszet?” „Előállítható-e szabályos hatszög síkmetszet?”	
	$T = 20.78$ 

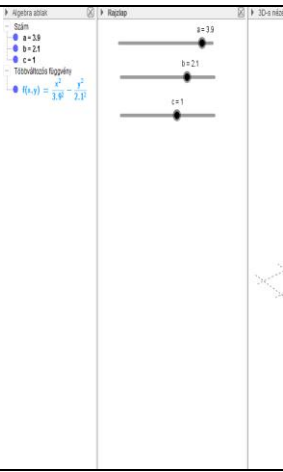
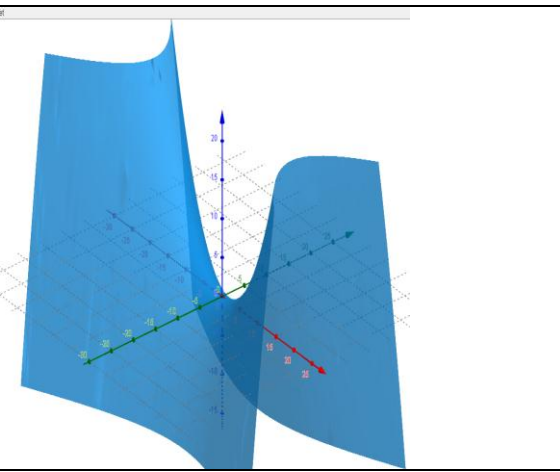
Hossz becslése térben

<u>Ajánlott évfolyam:</u> 9., 44. óra	<u>Fejlesztési cél (kerettanterv alapján):</u>
<u>Témakör/tartalom:</u> Geometria/ Geometriai alapfogalmak	<u>án):</u> Eredmények nagyságrendi becslése. Önellenőrzés igényének kialakítása.
<u>Segédanyag leírása:</u> Parthenon 3D virtuális térben.	
<u>Módszertani megjegyzések:</u> „Milyen épületet látsz az ábrán?” „Milyen magas, hosszú, széles az épület, ha az előtte álló ember 2 méter magas?” „Rajzold le az épület alaprajzát!”	
	

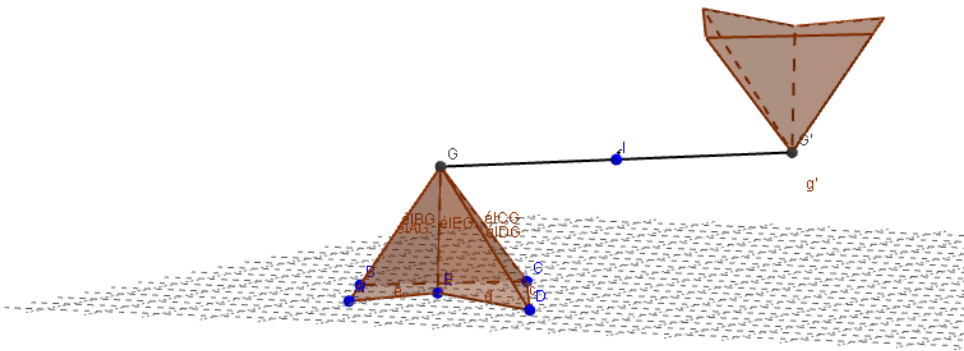
Nevezetes ponthalmazok síkban és térben

<u>Ajánlott évfolyam:</u> 9. , 54. óra	<u>Fejlesztési cél (kerettanterv alapján):</u>
<u>Témakör/tartalom:</u> Geometria/ Nevezetes ponthalmazok (mértani helyek) a síkban és térben	Síkbeli és térbeli nevezetes ponthalmazok ismerete Térelemek kölcsönös helyzetének elemzési képessége Szemléltető és szerkesztett ábrák készítése geometriai alakzatokról; tulajdonságok megállapítása, következtetések, bizonyítások Analogikus gondolkodás fejlesztése
<u>Segédanyag leírása:</u> Változtatható a két kör/gömb középpontjának helyzete, a kör/gömb sugara A különböző konfigurációk diszkutálása (a feladatnak megfelelő eredmény kiemelve)	
<u>Módszertani megjegyzések:</u> „Szerkesszünk pontot, amely két adott pont mindegyikétől 6 cm távolságra van!” „Hány megoldása van a feladatnak?” „Milyen konfiguráció mellett van a feladatnak 0, 1, 2, végtelen sok megoldása?” „Tekintsük meg a kiírt feladat térbeli megfelelőjét!”	
	

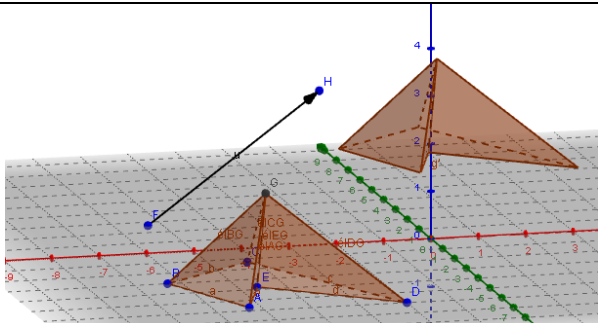
Nevezetes felületek és előállításuk

Ajánlott évfolyam: 9. , 54. óra	Fejlesztési cél (kerettanterv alapján):
Témakör/tartalom: Függvények, sorozatok/ Példák további függvényekre (kiegészítő anyag)	A függvényszemlélet fejlesztése: a hozzárendelések szabályként való értelmezése. A megfelelő modell megkeresése. Célszerű eszközhasználat.
Segédanyag leírása: Az a, b, és c csúszkák (mint együtthatók) segítségével megadott térbeli függvények, felületek megjelenítése, paramétereinek változtatása, elemzése	
Módszertani megjegyzések: A segédanyag fő célja a térbeli függvények, felületek megadásának kísérleti úton történő módja. Például: Hengerfelület: $x^2 + y^2 = 9$ Forgási paraboloid: $z = x^2 + y^2$	Nevezetes másodrendű felületek és egyenleteik: ❶ a gömb, egyenlete: $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ (R a gömb sugara); ❷ az ellipszoid, egyenlete: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$; ❸ az egyköpenyű hiperboloid, egyenlete: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$; ❹ a kétköpenyű hiperboloid, egyenlete: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$; ❺ a nyeregfelület (hiperbolikus paraboloid), egyenlete: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = z$.
	

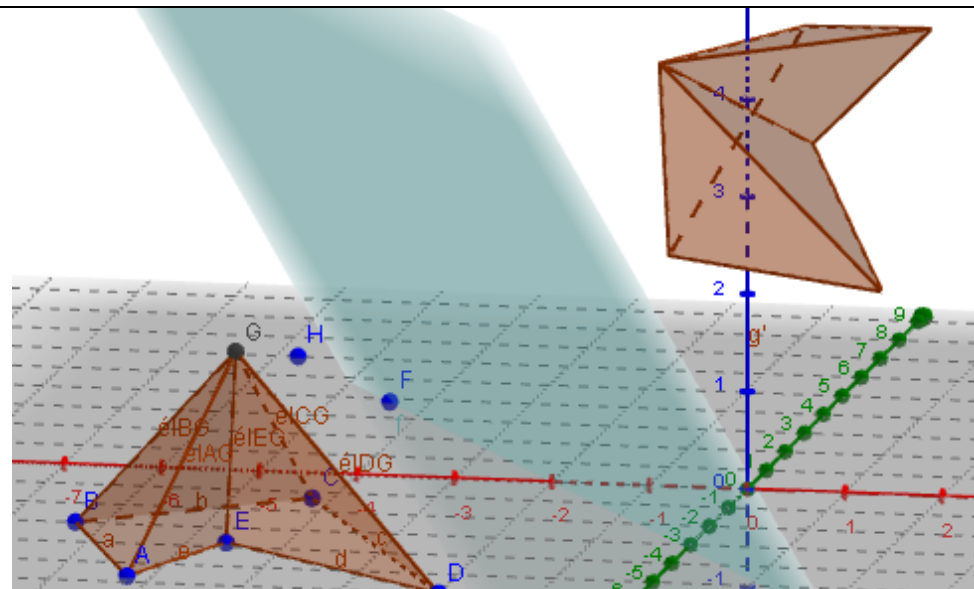
Geometriai transzformációk síkban és térben I.

<u>Ajánlott évfolyam:</u> 9., 82. óra	<u>Fejlesztési cél (kerettanterv alapján):</u>
<u>Témakör/tartalom:</u> Geometria/ Egybevágósági transzformációk	A síkbeli és térbeli egybevágósági transzformációk leírásának és tulajdonságainak ismerete, alkalmazása szerkesztési, bizonyítási és számolási feladatokban. Analogikus gondolkodásmód fejlesztése.
<u>Segédanyag leírása:</u> Egy sokszög alapú gúla középpontos tükrözése. Minden objektum mozgatható.	
<u>Módszertani megjegyzések:</u> „Milyen tulajdonságai vannak síkbeli és térbeli középpontos tükrözésnek?”	
	

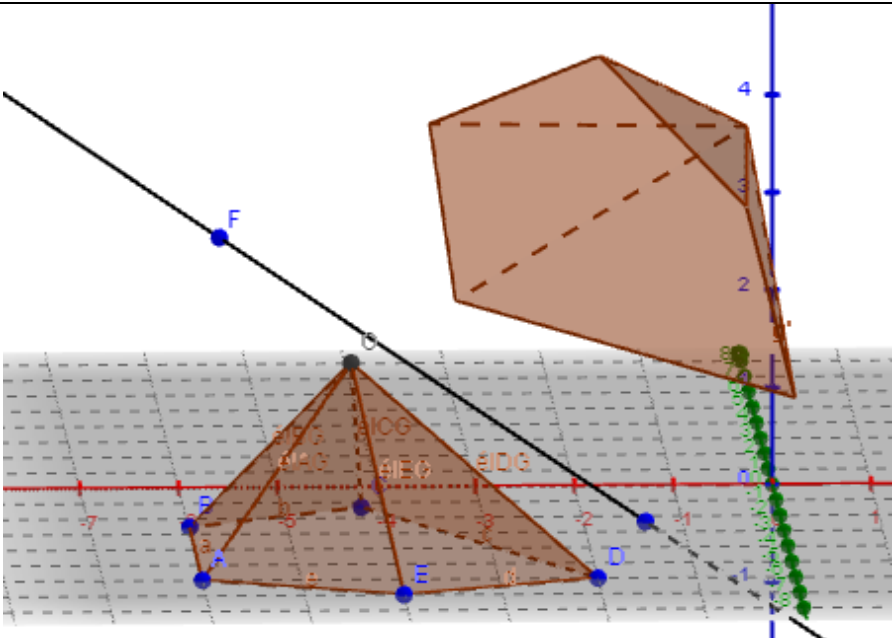
Geometriai transzformációk síkban és térben II.

Ajánlott évfolyam: 9., 82. óra	Fejlesztési cél (kerettanterv alapján):
Témakör/tartalom: Geometria/ Egybevágósági transzformációk	A síkbeli és térbeli egybevágósági transzformációk leírásának és tulajdonságainak ismerete, alkalmazása szerkesztési, bizonyítási és számolási feladatokban. Analogikus gondolkodásmód fejlesztése.
Segédanyag leírása: Egy sokszög alapú gúla eltolása a térben egy adott vektorral. Minden objektum mozgatható.	
Módszertani megjegyzések: „Milyen tulajdonságai vannak síkbeli és térbeli eltolásnak?”	
	

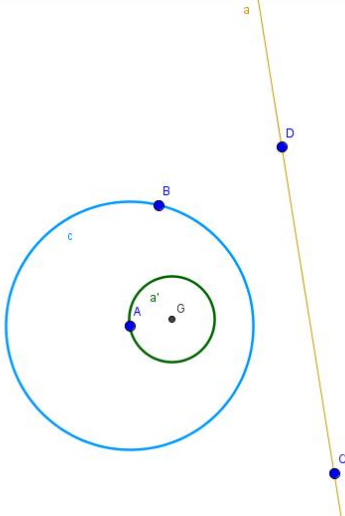
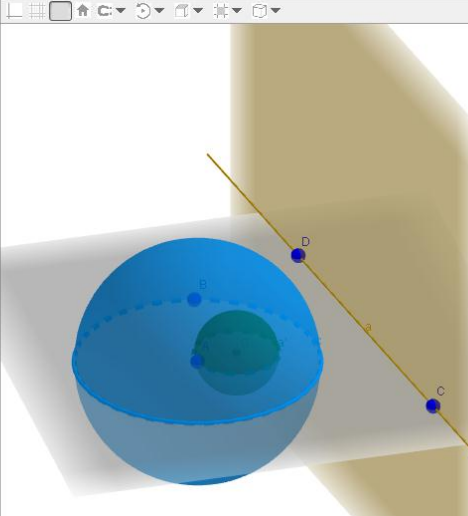
Geometriai transzformációk síkban és térben III.

<u>Ajánlott évfolyam:</u> 9., 82. óra <u>Témakör/tartalom:</u> • Geometria/ Egybevágósági transzformációk	<u>Fejlesztési cél (kerettanterv alapján):</u> A síkbeli és térbeli egybevágósági transzformációk leírásának és tulajdonságainak ismerete, alkalmazása szerkesztési, bizonyítási és számolási feladatokban. Analogikus gondolkodásmód fejlesztése.
<u>Segédanyag leírása:</u> Egy sokszög alapú gúla síkra való tükrözése. Minden objektum mozgatható. <u>Módszertani megjegyzések:</u> „Milyen tulajdonságai vannak a síkra való tükrözésnek?”	
	

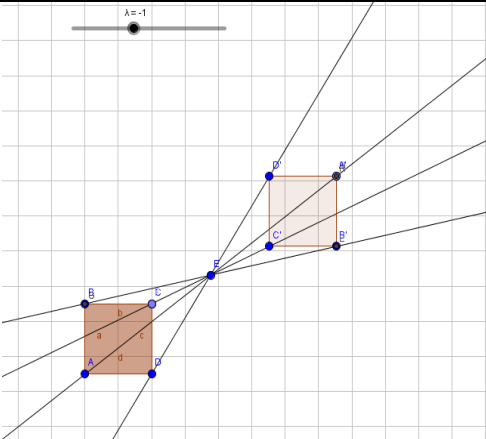
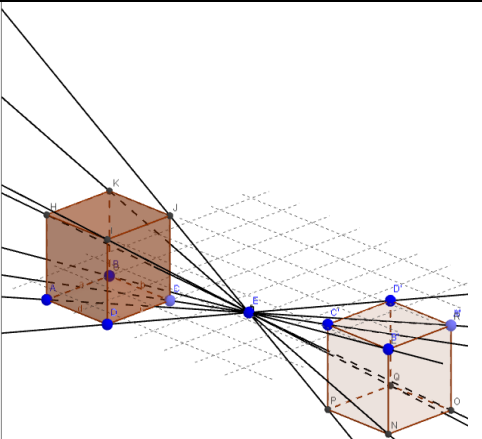
Geometriai transzformációk síkban és térben IV.

Ajánlott évfolyam: 9., 82. óra	Fejlesztési cél (kerettanterv alapján):
Témakör/tartalom: Geometria/ Egybevágósági transzformációk	A síkbeli és térbeli egybevágósági transzformációk leírásának és tulajdonságainak ismerete, alkalmazása szerkesztési, bizonyítási és számolási feladatokban. Analogikus gondolkodásmód fejlesztése.
Segédanyag leírása: Egy sokszög alapú gúla tengely körüli forgatása. Minden objektum mozgatható.	
Módszertani megjegyzések: „Milyen tulajdonságai vannak a tengely körüli forgatásnak?”	
	

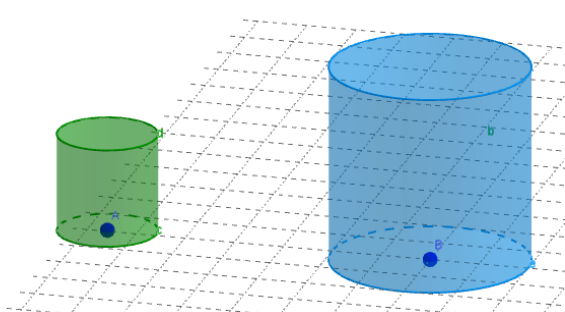
Geometriai transzformációk síkban és térben V.

<u>Ajánlott évfolyam:</u> 9., 82. óra	<u>Fejlesztési cél (kerettanterv alapján):</u>
<u>Témakör/tartalom:</u> Geometria/ Egybevágósági transzformációk (kiegészítő anyag)	A síkbeli és térbeli egybevágósági transzformációk leírásának és tulajdonságainak ismerete, alkalmazása szerkesztési, bizonyítási és számolási feladatokban. Analogikus gondolkodásmód fejlesztése.
<u>Segédanyag leírása:</u> Síkbeli és térbeli inverzió szemléltetése, tulajdonságainak leírása.	
<u>Módszertani megjegyzések:</u> „Milyen tulajdonságai vannak síkbeli és térbeli inverzióknak?”	
	

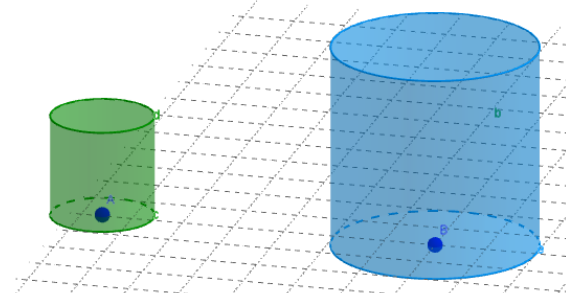
Középpontos hasonlóság

<u>Ajánlott évfolyam:</u> 10., 52. óra	<u>Fejlesztési cél (kerettanterv alapján):</u>
<u>Témakör/tartalom:</u> Geometria/ Hasonlósági transzformációk	A síkbeli és térbeli hasonlósági transzformációk leírásának és tulajdonságainak ismerete, alkalmazása szerkesztési, bizonyítási és számolási feladatokban. Analogikus gondolkodásmód fejlesztése.
<u>Segédanyag leírása:</u> Síkbeli és térbeli középpontos hasonlóság szemléltetése analóg módon, ahol a hasonlóság arány, és az objektumok pozíciói változtathatóak.	
<u>Módszertani megjegyzések:</u> „Milyen tulajdonságai vannak síkbeli és térbeli középpontos hasonlóságnak?”	
	
	

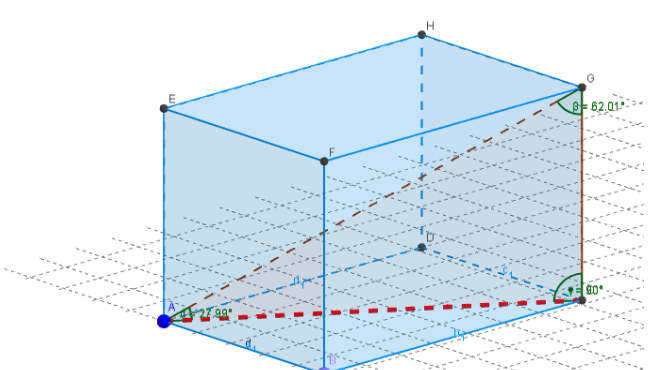
Hasonló testek felszínének aránya

<u>Ajánlott évfolyam:</u> 10., 61. óra	<u>Fejlesztési cél (kerettanterv alapján):</u>
<u>Témakör/tartalom:</u> Geometria/ Hasonlósági transzformációk	A síkbeli és térbeli hasonlósági transzformációk leírásának és tulajdonságainak ismerete, alkalmazása szerkesztési, bizonyítási és számolási feladatokban. Analogikus gondolkodásmód fejlesztése.
<u>Segédanyag leírása:</u> Két, egymással λ arányban lévő henger felszínének vizsgálata. Az arány változtatható, henger paraméterei megjeleníthetők.	
<u>Módszertani megjegyzések:</u> „Vizsgáljuk meg, mi lehet a kapcsolat a λ arány és a hengerek felszínének változása között!”	
$\lambda = 2$ $\frac{A_{kék}}{A_{zöld}} = \frac{62.83}{15.71} = 4$	

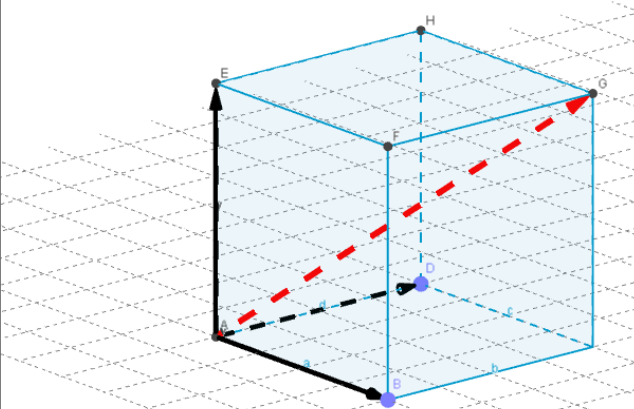
Hasonló testek térfogatának aránya

<u>Ajánlott évfolyam:</u> 10., 61. óra	<u>Fejlesztési cél (kerettanterv alapján):</u>
<u>Témakör/tartalom:</u> Geometria/ Hasonlósági transzformációk	A síkbeli és térbeli hasonlósági transzformációk leírásának és tulajdonságainak ismerete, alkalmazása szerkesztési, bizonyítási és számolási feladatokban. Analogikus gondolkodásmód fejlesztése.
<u>Segédanyag leírása:</u> Két, egymással λ arányban lévő henger térfogatának vizsgálata. Az arány változtatható, henger paraméterei megjeleníthetők.	
<u>Módszertani megjegyzések:</u> „Vizsgáljuk meg, mi lehet a kapcsolat a λ arány és a hengerek térfogatának változása között!”	
$\lambda = 2$ $\frac{V_{kék}}{V_{zöld}} = \frac{50.27}{6.28} = 8$	

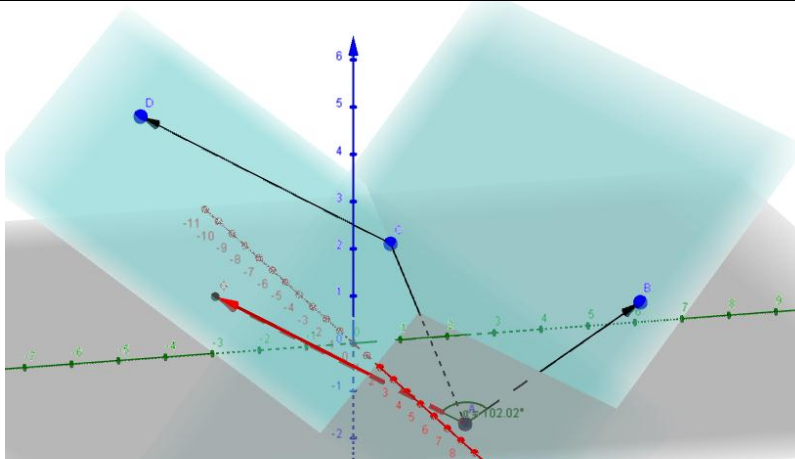
Szögfüggvények térbeli számításoknál

Ajánlott évfolyam: 10., 74. óra	Fejlesztési cél (kerettanterv alapján):
Témakör/tartalom: Függvények, sorozatok/ Feladatok (gyakorlás)	A szögfüggvények definíciójának ismerete hegyesszögre és tetszőleges forgásszögre. Szögfüggvényekre vonatkozó nevezetes azonosságok ismerete, és alkalmazása egyszerű feladatokban.
Segédanyag leírása:	
Téglatest változtatható éllel, illetve átlátszósággal. A feladatban adott, illetve keresendő adatok megjeleníthetősége, magyarázattal.	
Módszertani megjegyzések:	
„Mekkora szöget zár be a téglatest testátlója a végpontjából induló lapátlókkal?” „Próbáljuk meg a feladat megoldását néhány konkrét értékkel való számítás után általánosítani.”	
Téglatest kitöltése = 0.14  $a = 2.4$  $b = 3.6$  $c = 2.3$  ☒ lapátló $2.4^2 + 3.6^2 = l^2$ $l = 4.33$ ☒ szög $\operatorname{tg} \alpha = \frac{c}{l} = \frac{2.3}{4.33} = 0.53$	

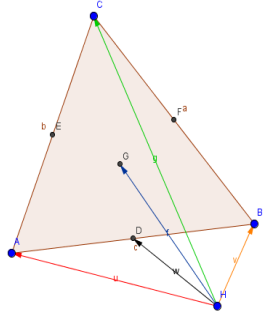
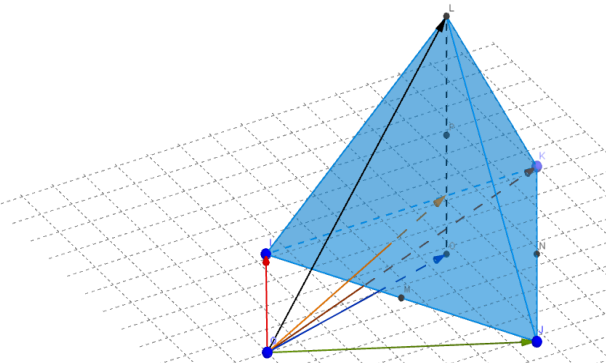
Vektorok a térben

<u>Ajánlott évfolyam:</u> 10., 79. óra	<u>Fejlesztési cél (kerettanterv alapján):</u>
<u>Témakör/tartalom:</u> Geometria/ Vektorok a koordináta-rendszerben	Vektorok lineáris kombinációjának fogalma. Vektorok felírása a koordináta-rendszerben; vektorok koordinátái, helyvektor fogalma. Vektorok alkalmazása egyszerű geometriai bizonyítási feladatokban.
<u>Segédanyag leírása:</u> Adott 3 ortonormált vektor. A parancssor segítségével lehetővé válik konkrét feladat megoldása kísérletezéssel, önellenőrzés, sejtések megfogalmazása bizonyítási feladatok esetében.	
<u>Módszertani megjegyzések:</u> „Írd fel a 3 adott vektor lineáris kombinációjaként az AG testátlót!” „Írd fel a 3 adott vektor lineáris kombinációjaként az DB lapátlót!” „Írd fel a 3 adott vektor lineáris kombinációjaként az BH testátlót!”	
☒ Kocka	

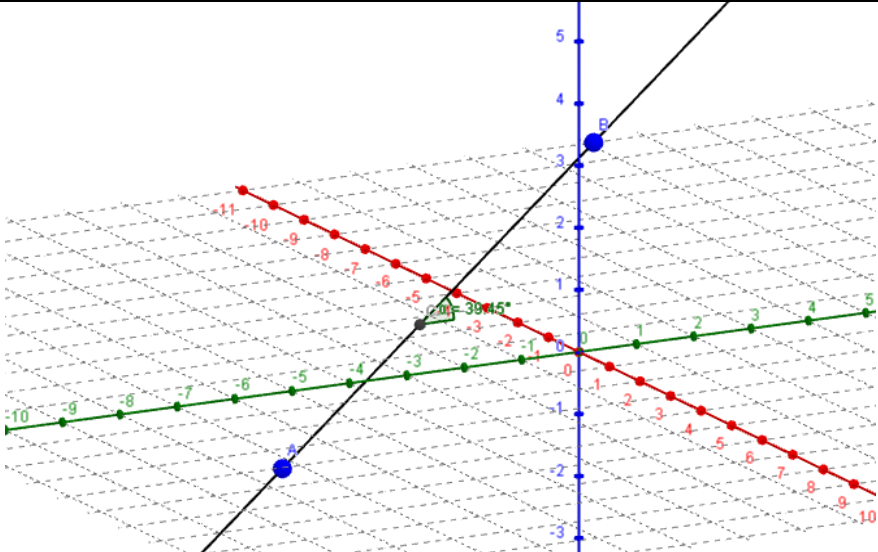
Két vektor hajlásszöge

<u>Ajánlott évfolyam:</u> 11., 70. óra <u>Témakör/tartalom:</u> Geometria/ Vektorokkal kapcsolatos alapfogalmak	<u>Fejlesztési cél (kerettanterv alapján):</u> A vektor fogalma. Vektor abszolútértéke, nullvektor, elentett vektor. Vektorok összeadása és kivonása. Vektorok alkalmazása egyszerű szerkesztési feladatokban.
<u>Segédanyag leírása:</u> Adott két általános helyzetű vektor a térben (koordináta-rendszer aktíválva). A két vektor hajlásszögének értelmezését segítő, látható a két vektorra illeszthető sík, illetve dinamikusan, interaktívan egy kiindulópontba helyezhető a két vektor, így értelmezve a bezárt szöget. <u>Módszertani megjegyzések:</u> „Fogalmazzuk meg a dinamikus ábra alapján, hogy mit értünk két vektor hajlásszögén.”	
	

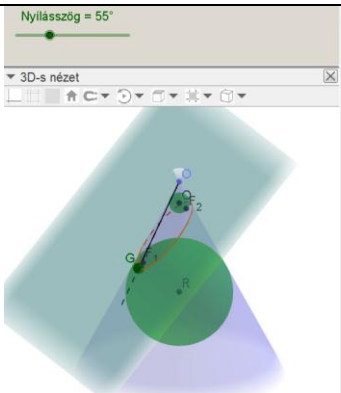
A háromszög súlypontjának koordinátái

<u>Ajánlott évfolyam:</u> 11., 73. óra	<u>Fejlesztési cél (kerettanterv alapján):</u>
<u>Témakör/tartalom:</u> Geometria/ Háromszögek nevezetes vonalai, pontjai	<u>Fejlesztési cél (kerettanterv alapján):</u> Kreatív problémamegoldás. Geometriai ismeretek alkalmazása A vektorok további alkalmazása. Analogikus gondolkodásmód fejlesztése.
<u>Segédanyag leírása:</u> Háromszög-tetraéder súlypontjainak analogonjaira vonatkozó bizonyítás szemléltetése dinamikus környezetben. Minden objektum mozgatható. Parancssor használata ajánlott.	
<u>Módszertani megjegyzések:</u> „Bizonyítsuk be vektorok alkalmazásával, hogy a háromszög súlyvonalai egy pontban metszik egymást.” „Bizonyítsuk be, hogy a tetraéder súlyvonalai egy pontban, a súlyvonalak laphoz közelebbi negyedelő pontjában metszik egymást.” „A térbeli bizonyításnál használjuk fel a síkbeli esetről használt ötleteket!” „Általánosítsunk N-dimenzióra!”	
	

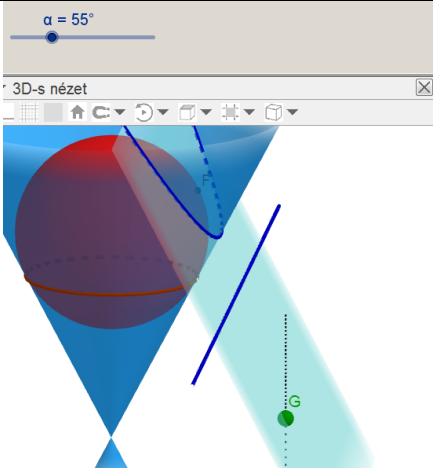
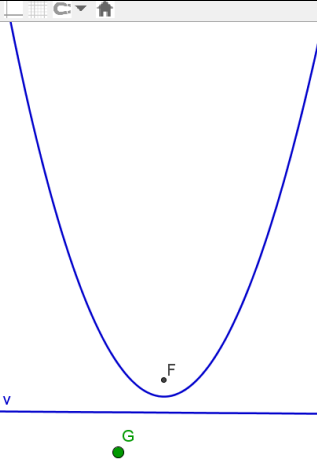
Egyenes a térben

Ajánlott évfolyam: 11., 75. óra	Fejlesztési cél (kerettanterv alapján):
Témakör/tartalom: Geometria/ Az egyenest meghatározó adatok	Adott probléma többféle megközelítése. Analogikus gondolkodásmód.
Segédanyag leírása: Adott a térben egy egyenes két pontjával. Irányvektor, normálvektor, iránytangens, $[xy]$ síkkal bezárt szög felvehetőek.	
Módszertani megjegyzések: „Határozzuk meg az egyenes irányvektorát!” „Határozzuk meg az egyenes normálvektorát!” „Határozzuk meg az egyenes iránytangensét!” „Határozzuk meg két egyenes térbeli párhuzamosságára vonatkozó kritériumakt.” „Írjunk fel a síkbeli esetek alapján a térbeli egyenes különböző egyenleteit!”	
	

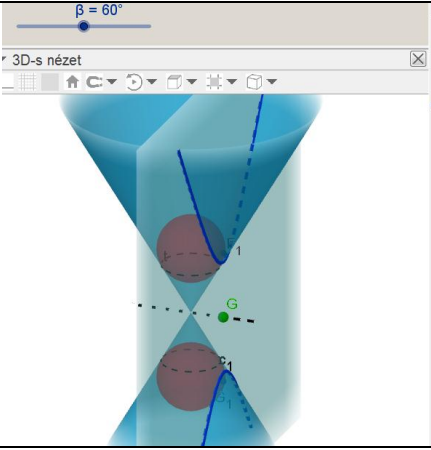
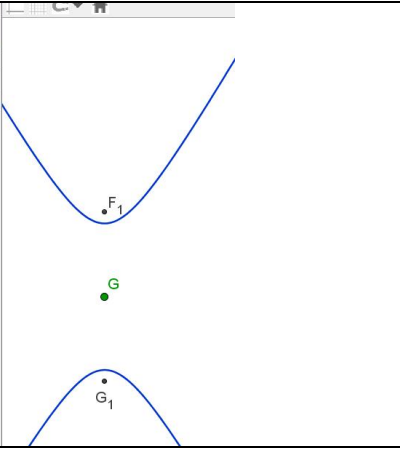
Kúpszeletek származtatása I.

<u>Ajánlott évfolyam:</u> 11., 89. óra	<u>Fejlesztési cél (kerettanterv alapján):</u>
<u>Témakör/tartalom:</u> Geometria/ Nevezetes síkbeli alakzatok	Az ellipszis, mint síkbeli ponthalmaz definíciójának ismerete. Adott probléma többféle megközelítése.
<u>Segédanyag leírása:</u> Kúp és sík áthatása, speciálisan csak ellipsziszre korlátozva. Változtatható a kúp nyílásszöge, illetve a sík dőlésszöge.	
<u>Módszertani megjegyzések:</u> • Szemléltetés, tulajdonságok keresése • „Figyeld meg a két alakzat áthatását különböző helyzetekben!” • „Az ábrán láthatod még a kúpot és a síkot is érintő két, úgynevezett Dandelin-gömböt. Az F_1 és F_2 pontok a sík és a gömbök érintési pontja. A sík és a kúp felület metszéspontjai ellipszist alkotnak, melynek F_1 és F_2 a fókuszpontjai.” • „A görbe valamennyi pontjára az F_1 és F_2 pontoktól vett távolságok összege, az F_1 és F_2 pontok távolságánál nagyobb állandó.”	
	

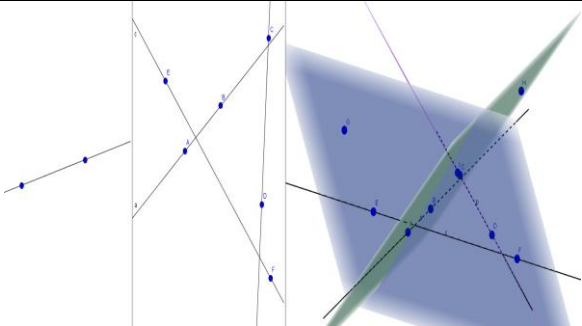
Kúpszeletek származtatása II.

<u>Ajánlott évfolyam:</u> 11., 89. óra	<u>Fejlesztési cél (kerettanterv alapján):</u>
<u>Témakör/tartalom:</u> Geometria/ Nevezetes síkbeli alakzatok	A parabola, mint síkbeli ponthalmaz definíciójának ismerete. Adott probléma többféle megközelítése.
<u>Segédanyag leírása:</u> Kúp és sík áthatása, speciálisan csak parabolára korlátozva. Változtatható a kúp nyílásszöge, illetve a sík dőlésszöge.	
<u>Módszertani megjegyzések:</u> - Szemléltetés, tulajdonságok keresése „Figyeld meg a két alakzat áthatását különböző helyzetekben!” „Az ábrán láthatod még a kúpot és a síkot is érintő Dandelin-gömböt. Az F1 pont a sík és a gömb érintési pontja. A sík és a kúpfelület metszéspontjai parabolát alkotnak, melynek F1 a fókuszpontja. (vezéregyenese pedig a kúp és gömb érintési körére illeszkedő síkon van)”	
	

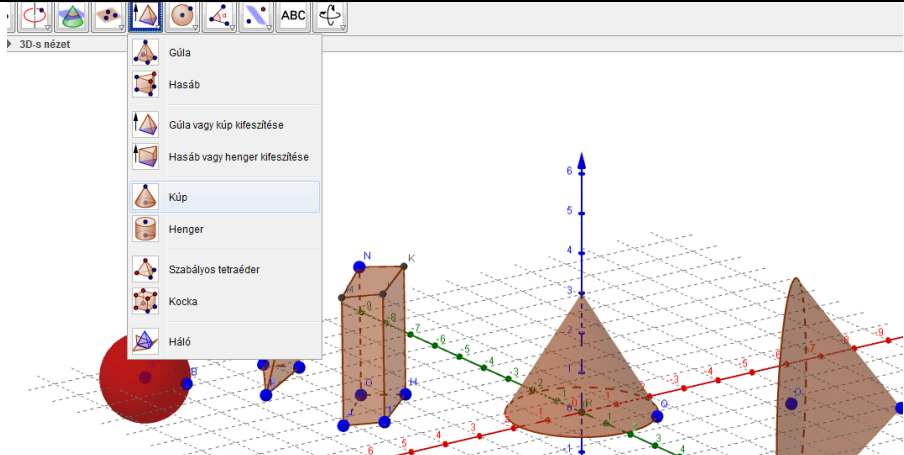
Kúpszeletek származtatása III.

<u>Ajánlott évfolyam:</u> 11., 89. óra	<u>Fejlesztési cél (kerettanterv alapján):</u>
<u>Témakör/tartalom:</u> Geometria/ Nevezetes síkbeli alakzatok	A hiperbola, mint síkbeli ponthalmaz definíciójának ismerete. Adott probléma többféle megközelítése.
<u>Segédanyag leírása:</u> Kúp és sík áthatása, speciálisan csak hiperbolára korlátozva. Változtatható a kúp nyílásszöge, illetve a sík dőlésszöge.	
<u>Módszertani megjegyzések:</u> - Szemléltetés, tulajdonságok keresése „Figyeld meg a két alakzat áthatását különböző helyzetekben!” „Az ábrán láthatod még a kúpot és a síkot is érintő két, úgynevezett Dandelin-gömböt. Az F_1 és F_2 pontok a sík és a gömbök érintési pontja. A sík és a kúpfelület metszéspontjai hiperbolát alkotnak, melynek F_1 és F_2 a fókuszpontjai.” „A görbe valamennyi pontjára az F_1 és F_2 pontoktól vett távolságok különbségének abszolútértéke, az F_1 és F_2 pontok távolságánál nagyobb állandó.”	
	

Sík és tér felosztása

Ajánlott évfolyam: 12., 24. óra	Fejlesztési cél (kerettanterv alapján):				
Témakör/tartalom: Geometria/ Geometriai alapfogalmak (kiegészítő anyag)	Bizonyítási készség, igény fejlesztése Analogikus gondolkodásmód fejlesztése Probléma megoldásainak diszkutálása				
Segédanyag leírása: 3 munkaterület érhető el, melyek segítségével a tanuló kísérletet tehet a probléma általánosítására: • egyenes felosztás pontokkal • sík felosztása egyenesekkel • tér felosztása síkokkal					
Módszertani megjegyzések: <table border="1" data-bbox="406 890 1037 1387"> <thead> <tr> <th>Sík felosztása egyenesekkel</th><th>Tér felosztása síkokkal</th></tr> </thead> <tbody> <tr> <td> $s(1)=s(0)+1$ $s(2)=s(1)+2$ $s(3)=s(2)+3$... $s(n)=s(n-1)+n$ $s(n+1)=s(n)+n+1$ A fenti egyenletek megfelelő oldalait összeadva, majd rendezve kapjuk: $s(n)=\frac{1}{2}(n^2+n+2)$ Könnyebben megjegyezhető alak: $s(n)=\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2}$ </td><td> $t(1)=t(0)+s(0)$ $t(2)=t(1)+s(1)$... $t(n)=t(n-1)+s(n-1)$ Így: $t(n)=t(0)+s(0)+s(1)+...+s(n-1)$ Ezért: $t(n)=\frac{1}{6}(n^3+5n+6)$ Könnyebben megjegyezhető alak: $t(n)=\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3}$ </td></tr> </tbody> </table>		Sík felosztása egyenesekkel	Tér felosztása síkokkal	$s(1)=s(0)+1$ $s(2)=s(1)+2$ $s(3)=s(2)+3$... $s(n)=s(n-1)+n$ $s(n+1)=s(n)+n+1$ A fenti egyenletek megfelelő oldalait összeadva, majd rendezve kapjuk: $s(n)=\frac{1}{2}(n^2+n+2)$ Könnyebben megjegyezhető alak: $s(n)=\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2}$	$t(1)=t(0)+s(0)$ $t(2)=t(1)+s(1)$... $t(n)=t(n-1)+s(n-1)$ Így: $t(n)=t(0)+s(0)+s(1)+...+s(n-1)$ Ezért: $t(n)=\frac{1}{6}(n^3+5n+6)$ Könnyebben megjegyezhető alak: $t(n)=\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3}$
Sík felosztása egyenesekkel	Tér felosztása síkokkal				
$s(1)=s(0)+1$ $s(2)=s(1)+2$ $s(3)=s(2)+3$... $s(n)=s(n-1)+n$ $s(n+1)=s(n)+n+1$ A fenti egyenletek megfelelő oldalait összeadva, majd rendezve kapjuk: $s(n)=\frac{1}{2}(n^2+n+2)$ Könnyebben megjegyezhető alak: $s(n)=\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2}$	$t(1)=t(0)+s(0)$ $t(2)=t(1)+s(1)$... $t(n)=t(n-1)+s(n-1)$ Így: $t(n)=t(0)+s(0)+s(1)+...+s(n-1)$ Ezért: $t(n)=\frac{1}{6}(n^3+5n+6)$ Könnyebben megjegyezhető alak: $t(n)=\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3}$				
					

Testek osztályozása

<u>Ajánlott évfolyam:</u> 12., 25. óra	<u>Fejlesztési cél (kerettanterv alapján):</u>
<u>Témakör/tartalom:</u> Geometria, mérés/ Testek osztályozása	A térszemlélet fejlesztése. Az esztétikai érzék fejlesztése. A matematika gyakorlati alkalmazásai a térgeometriában. Sík- és térgeometriai ismeretek összekapcsolása, analógiák felismerése.
<u>Segédanyag leírása:</u>	
A GeoGebra segítségével a megadott, illetve megadható testek elemzése.	
<u>Módszertani megjegyzések:</u>	
„Milyen testeket tudunk felvenni beépített eszközökkel a GeoGebrában?”	
„Mondjatok a felvett testek alakjához hasonló tárgyakat, épületeket!”	
„Melyek ezek közül a poliéderek?”	
„Milyen jellemzői vannak a felvett testeknek?”	
„Csoportosítsuk őket a tulajdonságaik szerint!”	
	

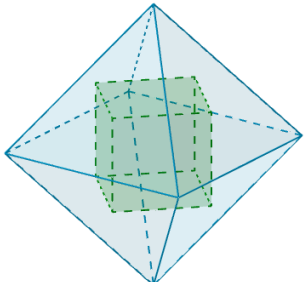
Szabályos testek I.

<u>Ajánlott évfolyam:</u> 12., 26. óra	<u>Fejlesztési cél (kerettanterv alapján):</u>
<u>Témakör/tartalom:</u> Geometria/ Poliéderek és tulajdonságaik	Analógiák felismerése. Pontos fogalomalkotásra törekvés Rendszerező készség fejlesztése.
<u>Segédanyag leírása:</u> Adott egy tetraéder, és adatai (lapok, élek, csúcsok, egy csúcsba futó élek száma). Megjeleníthető a duálisa, és annak adatai. Duális kiemelése opció.	
<u>Módszertani megjegyzések:</u> „Milyen alakzat a tetraéder duálisa?” „Mi jellemző a tetraéder duálisára? (lapok, élek, csúcsok száma)”	
Tetraéder ☒ Duális mutatása ☒ Duális kiemelése Lapok száma: 4 Csúcsok száma: 4 Élek száma: 6 Egy csúcsba futó élek száma: 3 3D-s nézet	

Szabályos testek II.

<u>Ajánlott évfolyam:</u> 12., 26. óra	<u>Fejlesztési cél (kerettanterv alapján):</u>
<u>Témakör/tartalom:</u> Geometria/ Poliéderek és tulajdonságaik	Analógiák felismerése. Pontos fogalomalkotásra törekvés Rendszerező készség fejlesztése.
<u>Segédanyag leírása:</u> Adott egy hexaéder (kocka), és adatai (lapok, élek, csúcsok, egy csúcsba futó élek száma). Megjeleníthető a duálisa, és annak adatai. Duális kiemelés opció. Interaktív segédanyag: választadás, majd visszacsatolás lehetősége.	
<u>Módszertani megjegyzések:</u> „Milyen alakzat a kocka duálisa?” „Mi jellemző a kocka duálisára? (lapok, élek, csúcsok száma)”	
Hexaéder ☒ Duális mutatása ☒ Duális kiemelés Ellenőrzés Lapok száma: 6 Csúcsok száma: 8 Élek száma: 12 Egy csúcsba futó élek száma: 3 Oktaéder Lapok száma: Csúcsok száma: Élek száma: Egy csúcsba futó élek száma: ▼ 3D-s nézet ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐	

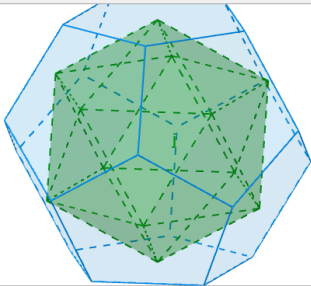
Szabályos testek III.

<u>Ajánlott évfolyam:</u> 12., 26. óra	<u>Fejlesztési cél (kerettanterv alapján):</u> Analógiák felismerése. Pontos fogalomalkotásra törekvés Rendszerező készség fejlesztése.
<u>Témakör/tartalom:</u> Geometria/ Poliéderek és tulajdonságaik	<u>ián):</u>
<u>Segédanyag leírása:</u> Adott egy oktaéder, és adatai (lapok, élek, csúcsok, egy csúcsba futó élek száma). Megjeleníthető a duálisa, és annak adatai. Duális kiemelése opció. Interaktív segédanyag: válaszadás, majd visszacsatolás lehetősége.	
<u>Módszertani megjegyzések:</u> „Milyen alakzat az oktaéder duálisa?” „Mi jellemző az oktaéder duálisára? (lapok, élek, csúcsok száma)”	
Oktaéder ☒ Duális mutatása Lapok száma: 8 ☒ Duális kiemelése Csúcsok száma: 6 Ellenőrzés Élek száma: 12 Egy csúcsba futó élek száma: 4 Kocka (hexaéder) Lapok száma: ? Csúcsok száma: ? Élek száma: ? Egy csúcsba futó élek száma: ? 3D-s nézet 🏠 ↺ ↻ 📐 🔍 📦 	

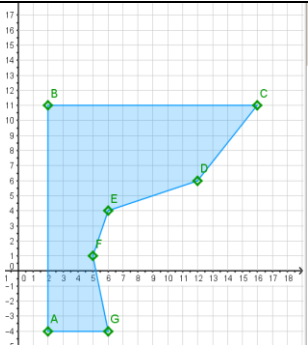
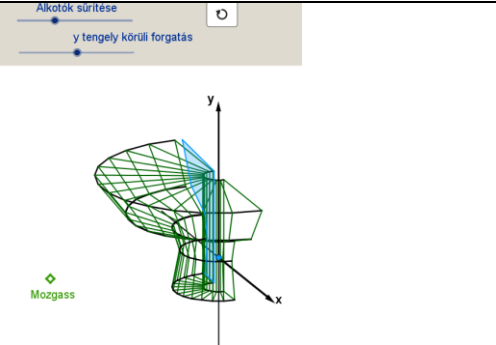
Szabályos testek IV.

<u>Ajánlott évfolyam:</u> 12., 26. óra		<u>Fejlesztési cél (kerettanterv alapján):</u> Analógiák felismerése. Pontos fogalomalkotásra törekvés Rendszerező készség fejlesztése.
<u>Témakör/tartalom:</u> Geometria/ Poliéderek és tulajdonságaik		
<u>Segédanyag leírása:</u> Adott egy ikozaéder, és adatai (lapok, élek, csúcsok, egy csúcsba futó élek száma). Megjeleníthető a duálisa, és annak adatai. Duális kiemelése opció. Interaktív segédanyag: válaszadás, majd visszacsatolás lehetősége.		
<u>Módszertani megjegyzések:</u> „Milyen alakzat az ikozaéder duálisa?” „Mi jellemző az ikozaéder duálisára? (lapok, élek, csúcsok száma)”		
Ikozaéder ☒ Duális mutatása ☒ Duális kiemelése Ellenőrzés Lapok száma: 20 Csúcsok száma: 12 Élek száma: 30 Egy csúcsba futó élek száma: 5 Dodekaéder Lapok száma: ? Csúcsok száma: ? Élek száma: ? Egy csúcsba futó élek száma: ? * 3D-s nézet		

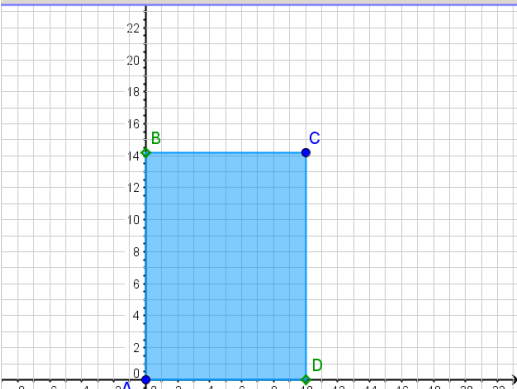
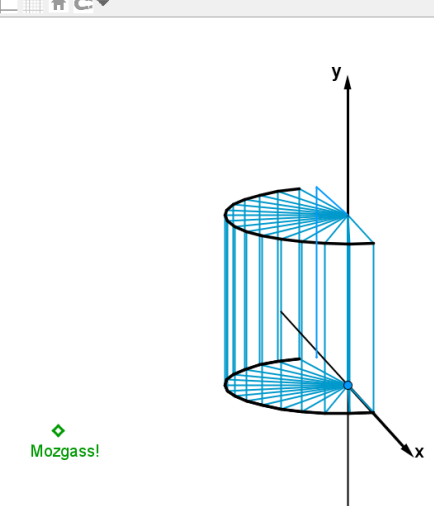
Szabályos testek V.

<u>Ajánlott évfolyam:</u> 12., 26. óra	<u>Fejlesztési cél (kerettanterv alapján):</u>
<u>Témakör/tartalom:</u> Geometria/ Poliéderek és tulajdonságaik	<u>ián):</u> Analógiák felismerése. Pontos fogalomalkotásra törekvés Rendszerező készség fejlesztése.
<u>Segédanyag leírása:</u> Adott egy dodekaéder, és adatai (lapok, élek, csúcsok, egy csúcsba futó élek száma). Megjeleníthető a duálisa, és annak adatai. Duális kiemelése opció. Interaktív segédanyag: válaszadás, majd visszacsatolás lehetősége.	
<u>Módszertani megjegyzések:</u> „Milyen alakzat az dodekaéder duálisa?” „Mi jellemző az dodekaéder duálisára? (lapok, élek, csúcsok száma)”	
☒ Duális mutatása ☒ Duális kiemelése Ellenőrzés Dodekaéder Lapok száma: 12 Csúcsok száma: 20 Élek száma: 30 Egy csúcsba futó élek száma: 3 Ikozaéder Lapok száma: ? Csúcsok száma: ? Élek száma: ? Egy csúcsba futó élek száma: ? 3D-s nézet 	

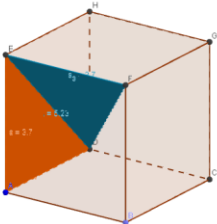
A térfogat fogalma

Ajánlott évfolyam: 12., 31. óra	Fejlesztési cél (kerettanterv alapján):
Témakör/tartalom: Geometria/ térfogat számítás	ján): A térfogat szemléletes fogalmának ismerete.
Segédanyag leírása: 7 pontjával megadható egy poligon a baloldalon. Jobb oldalon a megadott poligon y tengely körüli elforgatásából adódó térbeli test látható. Állítható az alkotók sűrűsége, és a poligon tengely körüli elforgatás mértéke. Lehetőség van a konfiguráció kezdeti állapotba történő hozására (inicializáló gomb).	
Módszertani megjegyzések: „Forgassunk meg derékszögű háromszöget tetszőleges oldala körül! Milyen térbeli alakzatot kaphatunk?” „Forgassunk meg téglalapot tetszőleges oldala körül! Milyen térbeli alakzatot kaphatunk?” „Forgassunk meg derékszögű trapézt tetszőleges oldala körül! Milyen térbeli alakzatot kaphatunk?” „Hozzunk létre hétköznapi forgásszimmetrikus alakzatokat! (pezsgőspohár, hordó, fenyőfa stb.)”	
	

A henger térfogata

<u>Ajánlott évfolyam:</u> 12., 31. óra	<u>Fejlesztési cél (kerettanterv alapján):</u>
<u>Témakör/tartalom:</u> Geometria/ térfogat számítás	<u>ián):</u> A térfogat szemléletes fogalmának ismerete.
<u>Segédanyag leírása:</u> 2 átellenes pontjával megadható egy téglalap a baloldalon. Jobb oldalon a megadott téglalap y tengely körüli elforgatásából adódó henger látható. Állítható az alkotók sűrűsége, és a téglalap tengely körüli elforgatás mértéke. Lehetőség van a konfiguráció kezdeti állapotba történő hozására (inicializáló gomb). Magasság, alapkör sugara, felszín és térfogat kiíratása opcionális.	
<u>Módszertani megjegyzések:</u> „Figyeljük meg a felszín, és térfogat változását a magasság, és az alapkör változtatásának függvényében!”	
☐ Magasság ☐ Térfogat alkotók sűrűsége ☐ Alapkör sugara ☐ Felszín ☐ forgatás y tengely körül 	

Térfogatszámítás, gyakorló feladat

Ajánlott évfolyam: 12., 32. óra	Fejlesztési cél (kerettanterv alapján):
Témakör/tartalom: Geometria/ térfogat számítás	ján): Önálló, pontos, esztétikus munkára való nevelés. Önellenőrzés igényének erősítése.
Segédanyag leírása: A munkalap baloldalán egy interaktív, dinamikus 3D vázlatrajz látható, jobb oldalon lehetőség van az ismert paraméter megadására. Ennek alapján jelölőnégyzetek segítségével kifejezhető a feladat megoldása, tanári magyarázattal segítve azt. A vázlatrajz a tanuló haladásától függően egészül ki a segédalakzatok berajzolásával. A tanári magyarázat teljesen dinamikus, az aktuális feladat értékeivel dolgozik.	
Módszertani megjegyzések: A munkalap alapján tetszőleges testre módosítható a koncepció. Bármilyen bemenő paraméter(ek) esetén dinamikus 3D vázlatrajz készítése lehetséges.	
	Számítsuk ki a 3,7 cm élhosszúságú kocka testátójának hosszát? él hossza: 3.7 Új feladat Tekintsük például a DAE derékszögű háromszöget! ☒ DAEA Ez a háromszög felírható Pitagorasz tételre. A két befogót a-val, az átfogót f-el jelölve: (j a kocka egyik lapátója) $a^2 + a^2 = f^2$ Behelyettesítve a Pitagorasz-tételbe: $3,7^2 + 3,7^2 = f^2$ $13,69 + 13,69 = f^2$ $27,38 = f^2$ Vorunk mindkét oldalból négyzetgyököt, így: $5,23 = f$ A 3,7 cm élhosszúságú kocka lapátójának hossza tehát 5,23 cm. A testátó meghatározásához szükségünk van az utolsó kiszámolt lapátó hosszára is. Tekintsünk most egy olyan derékszögű háromszöget, amiben szerepel a lapátó, a testátó és a kocka éle is: Tekintsük a DEF derékszögű háromszöget! ☒ DEFA $f^2 + a^2 = f^2$ A DEF derékszögű háromszög derékszöge az E csúcsnál van. Pitagorasz tételét ismét alkalmazhatjuk, mert ismert az a oldal (ezzel felírható), illetve kiszámoltuk a lapátó hosszát. Ez a két hosszúság alkotja a DEF háromszög befogóját. Az átfogó, amit keresünk, pontosan a testátó hossza lesz, jelöljük ezt t-vel. $5,23^2 + 3,7^2 = f^2$ $27,38 + 13,69 = f^2$ $41,07 = f^2$ A 3,7 cm élhosszúságú kocka

A csanakakúp térfogata

<u>Ajánlott évfolyam:</u> 12., 33. óra	<u>Fejlesztési cél (kerettanterv alapján):</u> A térfogat szemléletes fogalmának ismerete.
<u>Témakör/tartalom:</u> Geometria/ térfogat számítás	
<u>Segédanyag leírása:</u> 3 pontjával megadható egy derékszögű trapéz a baloldalon. Jobb oldalon a megadott trapéz y tengely körüli elforgatásából adódó csanakakúp látható. Állítható az alkotók sűrűsége, és a trapéz tengely körüli elforgatás mértéke. Lehetőség van a konfiguráció kezdeti állapotba történő hozására (inicializáló gomb). Magasság, alapkör sugara, fedőkör sugara, felszín és térfogat kiírása opcionális.	
<u>Módszertani megjegyzések:</u> „Figyeljük meg a felszín, és térfogat változását a magasság, az alapkör, illetve a fedőkör változtatásának függvényében!”	
☐ Magasság ☐ Alapkör sugara ☐ Fedőkör sugara ☐ Alkotó hossza ☐ Felszín ☐ Térfogat ↺ alkotók sűrűsége <input style="width: 100px;" type="range"/> forgatás y tengely körül <input style="width: 100px;" type="range"/> ◇ Mozgass!	

Szélsőérték-számítás

Ajánlott évfolyam: 12., 34. óra	Fejlesztési cél (kerettanterv alapján):
Témakör/tartalom: Geometria/ térfogat számítás	A matematika gyakorlati alkalmazásai a térgeometriában. Számítógép használata a problémamegoldásban.
Segédanyag leírása: A munkalap 3 részből áll: - vezérlő panel: kúp magasságának állítása, kúp nyílásszöge, tengelyek megjelenítése 3D vázlatrajz: kísérletezés, szemléltetés, sejtés megfogalmazása - grafikon: a kúp térfogatának változása a kúp magasságának függvényében.	
Módszertani megjegyzések: „Írjunk adott gömbbe kúpot! Milyen paraméterek mellett lesz a kúp maximális térfogatú?”	
Kúp magassága = 2.5 ☒ Tengelyek Kúp nyílásszöge = 112.02° 3D-s nézet 