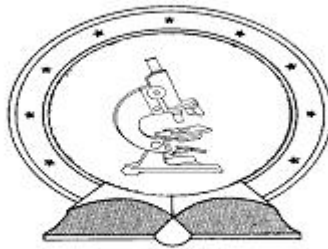


DE TTK



1949

FÜGGVÉNYEGYENLETEK ÉS ALKALMAZÁSAIK

egyetemi doktori (PhD) értekezés

Glavosits Tamás

Témavezető: Dr. Lajkó Károly, Dr. Száz Árpád

DEBRECENI EGYETEM

**TERMÉSZETTUDOMÁNYI DOKTORI TANÁCS
MATEMATIKA- ÉS SZÁMÍTÁSTUDOMÁNYOK DOKTORI ISKOLA**

Debrecen, 2018.

Ezen értekezést a Debreceni Egyetem Természettudományi Doktori Tanács Matematika- és Számítástudományok Doktori Iskola Matematikai analízis, függvényegyenletek és egyenlőtlenségek programja keretében készítettem a Debreceni Egyetem természettudományi doktori (PhD) fokozatának elnyerése céljából.

Debrecen, 2018.

.....
Glavosits Tamás
jelölt

Tanúsítom, hogy Glavosits Tamás doktorjelölt 2009-2013 között a fent megnevezett doktori program keretében irányításommal végezte munkáját. Az értekezésben foglalt eredményekhez a jelölt önálló alkotó tevékenységével meghatározóan hozzájárult. Az értekezés elfogadását javaslom.

Debrecen, 2018.

.....
Dr. Lajkó Károly
témavezető

Tanúsítom, hogy Glavosits Tamás doktorjelölt 2009-2013 között a fent megnevezett doktori program keretében irányításommal végezte munkáját. Az értekezésben foglalt eredményekhez a jelölt önálló alkotó tevékenységével meghatározóan hozzájárult. Az értekezés elfogadását javaslom.

Debrecen, 2018.

.....
Dr. Száz Árpád
témavezető

Függvényegyenletek és alkalmazásai

Értekezés a doktori (PhD) fokozat megszerzése érdekében
a matematika tudományágban.

Írta: Glavosits Tamás okleveles matematikus.

Készült a Debreceni Egyetem Matematika- és Számítástudományok Doktori Iskola Matematikai analízis, függvényegyenletek és egyenlőtlenségek doktori programja keretében.

Témavezető: Dr. Lajkó Károly, Dr. Szász Árpád

A doktori szigorlati bizottság:

elnök: Dr.

tagok: Dr.

Dr.

A doktori szigorlat időpontja: 201... ..

Az értekezés bírálói:

Dr.

Dr.

Dr.

A bírálóbizottság:

elnök: Dr.

tagok: Dr.

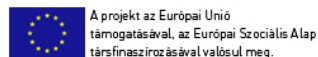
Dr.

Dr.

Dr.

Az értekezés védésének időpontja: 201... ..

Mindenkinek szeretnék köszönetet mondani, akik segítettek a disszertációm megírásában. Először is szeretném megköszönni témavezetőim Dr. Lajkó Károly és Dr. Száz Árpád munkáját. Szintén szeretném megköszönni a Debreceni Egyetem Analízis tanszéke oktatóinak a tanulmányaim illetve kutatásaim során nyújtott segítségüket. Végül, de nem utolsósorban szeretnék köszönetet mondani feleségemnek Glavositsné Holló Anikónak a biztatásért és támogatásért.



The work is supported by the TÁMOP-4.2.2/B-10/1-2010-0024 project. The project is co-financed by the European Union and the European Social Fund.

Research is carried out in the framework of the Center of Excellence of
Mechatronics and Logistics at the University of Miskolc

Tartalomjegyzék

1. Függvényegyenletek dekompozíciója	4
2. Függvényegyenletek és a Gauss-iteráció	8
3. A (0.2) $(g(\frac{x+1}{y}) + f(y) = g(\frac{y+1}{x}) + f(x))$ egyenlet megoldása	17
4. A (0.15) $(f(x+y) = g(xy))$ egyenletről	22
5. A Daróczy-Lajkó-Székelyhidi tétel	33
6. A (0.3) $(\gamma(\frac{x+1}{y}) + \gamma(\frac{y+1}{x}) = \gamma(\frac{x+1}{x}) + \gamma(\frac{y+1}{y}))$ és a (0.11) $(\gamma(x(y+1)) + \gamma(y(x+1)) = \gamma(x(x+1)) + \gamma(y(y+1)))$ egyenletek megoldása	41
7. Kiterjesztési tételek	47
8. A (0.6) $(g(x(y+1)) + f(x) = g(y(x+1)) + f(y))$ egyenlet és a (0.10) $(G_1(xy+x) + F_1(y) = G_2(x+y) + F_2(xy))$ Davidson egyenlet	67
9. A (0.1) $(G_1(\frac{x+1}{y}) + F_1(y) = G_2(\frac{y+1}{x}) + F_2(x))$ és a (0.5) $(G_1(x(y+1)) + F_1(x) = G_2(y(x+1)) + F_2(y))$ egyenletek megoldása	76
10. Lezárások és belsőképzések kommutativitása	79
11. Lezárások geometriai alkalmazásai	94
12. A nemnegativitástartomány létezéséről	103
13. Relációk páratlan szelekcióinak létezéséről	111
14. Tartalmi összefoglaló	115
15. Summary	122

Bevezetés

A disszertáció témája rendezett algebrai struktúrákon, illetve ezek részhalmaiban értelmezett függvények és relációk vizsgálata. A dolgozat két részből áll. Az első rész az **1.-10.** fejezeteket foglalja magába és függvényegyenletek megoldásával foglalkozik. Kissé részletesebben: legyen $\mathbb{T}$ egy rendezett test, $\mathbb{T}^a$ egy archimedeszien rendezett test, Y egy egyértelműen 2-osztható Abel-csoport. Jelölje $\mathbb{T}_+$, illetve $\mathbb{T}_+^a$ a $\mathbb{T}$ illetve a $\mathbb{T}^a$ test pozitív elemeinek a halmazát. Az első rész legfontosabb függvényegyenletei:

$$G_1\left(\frac{x+1}{y}\right) + F_1(y) = G_2\left(\frac{y+1}{x}\right) + F_2(x), \quad (0.1)$$

$$g\left(\frac{x+1}{y}\right) + f(y) = g\left(\frac{y+1}{x}\right) + f(x), \quad (0.2)$$

$$\gamma\left(\frac{x+1}{y}\right) + \gamma\left(\frac{y+1}{x}\right) = \gamma\left(\frac{x+1}{x}\right) + \gamma\left(\frac{y+1}{y}\right), \quad (0.3)$$

$$F(x) + G(y) = P(x+y) + Q\left(\frac{x}{y}\right), \quad (0.4)$$

ahol $G_1, G_2, F_1, F_2, g, f, \gamma, F, G, P, Q : \mathbb{T}_+ \rightarrow Y$ az ismeretlen függvények. A függvényegyenletek tetszőleges $x, y \in \mathbb{T}_+$ esetén teljesülnek. A (0.4) egyenletet **Olkin-Baker függvényegyenletnek** is nevezik.

$$G_1(x(y+1)) + F_1(x) = G_2(y(x+1)) + F_2(y), \quad (0.5)$$

$$g(x(y+1)) + f(x) = g(y(x+1)) + f(y), \quad (0.6)$$

$$P((\alpha + \gamma)x + (\beta + \delta)y) = Q(\alpha x + \beta y) + R(\gamma x + \delta y), \quad (0.7)$$

$$g_\lambda(\mu xy + x) + g_\mu(xy + y) = g_\mu(\lambda xy + y) + g_\lambda(xy + x), \quad (0.8)$$

$$g_2(2xy + x) + g_2(xy + y) = g_2(2xy + y) + g_2(xy + x). \quad (0.9)$$

A (0.5) és (0.6) egyenletekben a $G_1, G_2, F_1, F_2, g, f : \mathbb{T}_+^a \rightarrow Y$ függvények az ismeretlen függvények. A (0.7) egyenletben $P, Q, R : \mathbb{T}_+^a \rightarrow Y$ függvények az ismeretlen függvények, $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{T}_+^a$ olyan rögzített paraméterek, melyekre $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$. A (0.8) egyenletben $g_\lambda, g_\mu : \mathbb{T}_+^a \rightarrow Y$ ismeretlen függvények, $\lambda, \mu \in \mathbb{T}_+ \setminus \{1\}$ tetszőlegesen rögzített paraméterek. A (0.9) egyenletben $g_2 : \mathbb{T}_+^a \rightarrow Y$ ismeretlen függvény. A függvényegyenletek tetszőleges $x, y \in \mathbb{T}_+^a$ esetén teljesülnek.

$$G_1(xy + x) + F_1(y) = G_2(x + y) + F_2(xy) \quad (0.10)$$

A (0.10) egyenletben $G_1, G_2, F_1, F_2 : \mathbb{T}_+^a \rightarrow Y$ ismeretlen függvények. A függvényegyenlet tetszőleges $x, y \in \mathbb{T}_+^a$ esetén teljesül. A (0.10) egyenlet az úgynevezett **Davison egyenlet**.

$$\gamma(x(y+1)) + \gamma(y(x+1)) = \gamma(x(x+1)) + \gamma(y(y+1)), \quad (0.11)$$

$$\gamma\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) + \gamma(x+y) = \gamma\left(\frac{x}{y}\left(\frac{x}{y} + 1\right)\right) + \gamma\left(\frac{y}{x}\left(\frac{y}{x} + 1\right)\right), \quad (0.12)$$

$$\gamma(x+y) + \gamma\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) = \gamma\left((x+y)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)\right) + \gamma(1), \quad (0.13)$$

$$\gamma_\lambda(x+y) = \gamma_\lambda\left(\frac{4xy}{x+y}\right), \quad (0.14)$$

$$f(x+y) = g(xy). \quad (0.15)$$

A (0.11), (0.12), (0.13), (0.14) és a (0.15) egyenletekben $\gamma, \gamma_\lambda, f, g : \mathbb{T}_+ \rightarrow Y$ ismeretlen függvények. A (0.15) egyenletben Y egy tetszőleges nemüres halmaz. A függvényegyenletek tetszőleges $x, y \in \mathbb{T}_+$ esetén teljesülnek.

Az első rész két központi egyenlete a (0.1) és a (0.5) függvényegyenletek, melyek valószínűség-elmélet háttérű egyenletek.

Az első fejezetben megmutatjuk, hogy a (0.1) egyenlet visszavezethető a (0.2) és a (0.3) egyenletekre, a (0.5) egyenlet a (0.6) és a (0.11) egyenletekre.

A második fejezetben megmutatjuk, hogy a (0.3) és a (0.11) függvényegyenletek folytonos megoldásai meghatározhatók Gauss-iteráció segítségével ([42] OTDK dolgozat Miskolc 2003 **Daróczy Zoltán** professzor témavezetésével).

A harmadik fejezetben megadjuk a (0.2) egyenlet megoldását.

A negyedik fejezetben megadjuk a (0.15) egyenlet megoldását különböző alaphalmazon értelmezett ismeretlen függvények esetén. A (0.15) egyenletet a (0.11) egyenlet és a Davison egyenlet (0.10) megoldása során alkalmazzuk.

Az ötödik fejezetben általánosítjuk **Daróczy Zoltán, Lajkó Károly, Székelyhidi László** egy [24]-beli tételét. A tétel alkalmazásaként megadjuk a (0.4) egyenlet általános megoldását $\mathbb{T}_+$ -n. A (0.4) egyenlet $\mathbb{R}_+$ -on **Olkin-Baker egyenlet** néven ismert ([73], [06], [69]).

A hatodik fejezetben megadjuk a (0.3) és a (0.11) egyenletek megoldását. A (0.3) egyenlet megoldása közös munka Lajkó Károllyal [44], az egyenletet a (0.4) egyenletre vezetjük vissza. A (0.11) egyenlet megoldása során a (0.11) $\Leftarrow$ (0.12) $\Leftarrow$ (0.13) $\Leftarrow$ (0.14) $\Leftarrow$ (0.15) gondolatmenetet követjük. A (0.11) egyenlet Pexider változatának megoldása közös eredmény **Lajkó Károllyal** [45].

A hetedik fejezetben megadjuk a Pexider-additív függvényegyenlet általános megoldását abban az esetben, amikor az additivitás a $\mathbb{T}_+^2$ egy részkúpján

teljesül, ahol $\mathbb{T}_+$ egy archimedeszien rendezett test pozitív elemeinek a halmaza. A kapott eredményt a (0.7) egyenlet megoldása során alkalmazzuk. Általánosítjuk **Rimán János** [74]-beli kiterjesztési tételét arra az esetre, amikor a valós számok testének szerepét egy archimedeszien rendezett sűrű Abel-csoport veszi át.

A nyolcadik fejezet első részében a (0.6) egyenlet megoldását ismertetjük. A (0.6) egyenletet a (0.9) egyenletre vezetjük vissza az alábbi módon: $(0.6) \Leftarrow (0.8) \Leftarrow (0.9)$. Ezzel a módszerrel a (0.6) egyenletet meg tudjuk oldani, bár a (0.9) egyenlet általános megoldását nem ismerjük. Az egyenletek megoldása során a Dróczy-Lajkó-Székelyhidi tételt és a (0.7) egyenletet egyaránt alkalmazzuk. A fejezet második részében megmutatjuk, hogy a **Davison**-egyenlet visszavezethető az (0.6) egyenletre.

A kilencedik fejezetben, a korábbi fejezetek eredményeire támaszkodva megadjuk a (0.1) és a (0.5) függvényegyenletek megoldását. Mindkét egyenlet megoldása (valós-valós környezetben) megtalálható az OTDK dolgozatomban (2005. Budapest, **Lajkó Károly** témavezetésével [43]). A (0.1) egyenlet megoldása (általános esetben) közös munka **Lajkó Károllyal** [44].

A disszertáció második része a **10.-13.** fejezetekből áll, témája a lezárások tulajdonságainak vizsgálata, illetve a kapott összefüggések különféle alkalmazásainak bemutatása.

A tizedik fejezet fő eredménye két kommutativitással kapcsolatos tétel. Alkalmazásaként megadjuk egy rendezett $\mathbb{T}$ test feletti X vektortér bizonyos konvex operátorai, nevezetesen a lineáris, affin, konvex, kúp és konvexkúp lezárások által generált félcsoport Caley-táblázatát, ahol a félcsoport-művelet a kompozícióképzés (közös munka **Pataki Gergellyel**).

A tizenegyedik fejezet a tizedik fejezet fogalomalkotása által motivált síkgeometriai probléma megoldását tartalmazza (közös munka **Wolfgang Förg-Robbal**).

A tizenkettedik fejezet legfontosabb eredménye, hogy ha X egy csoport, $A \subset X$ tökéletesen kancellatív, akkor minden $B \subset A$ additív és antiszimmetrikus halmaz belefoglalható egy olyan $D \subset A$ additív antiszimmetrikus részhalmazba, amelyre $A \subset D \cup (-D)$ (közös munka **Száz Árpáddal** [47]).

A tizenharmadik fejezetben kritériumot adunk arra nézve, hogy ha X, Y csoportok, $R \subset X \times Y$ egy reláció, akkor R -nek milyen feltételek mellett létezik páratlan szelekciófüggvénye (közös eredmény **Száz Árpáddal** [46]).

1. Függvényegyenletek dekompozíciója

Bevezetés

A fejezetben megmutatjuk, hogy a két fő egyenletünk, a (0.1) és a (0.5) egyenletek hogyan vezethetők vissza egyszerűbb függvényegyenletek megoldására. Ezt az egyszerű eljárást nevezzük a függvényegyenlet dekompozíciójának. Az eljárás alkalmazásával a (0.1) egyenlet a (0.2) és a (0.3) egyenletekre, míg a (0.5) egyenlet a (0.6) és a (0.11) egyenletekre vezethető vissza.

A (0.1) és (0.5) függvényegyenletek valószínűségelmélet témakörébe tartozó függvényegyenlet-családokból származnak az alábbi módon: legyen (X, Y) egy kétváltozós, abszolút folytonos valószínűségi változó, jelölje rendre $f_{X|Y}$, $f_{Y|X}$, f_Y , f_X a feltételes, illetve marginális eloszlásfüggvényeket. Ezek között a függvények között fennáll az

$$f_{X|Y}(x, y)f_Y(y) = f_{Y|X}(x, y)f_X(x) \quad (1.1)$$

kapcsolat. Ha a feltételes és marginális eloszlásfüggvények bizonyos speciális alakúak, akkor alkalmas helyettesítések, illetve új ismeretlen függvények bevezetésével az (1.1) egyenletből származtathatóak a (0.1) illetve a (0.5) egyenletek. Így ezeknek az egyenleteknek a mérhető megoldásai megadják azoknak az eloszlásoknak a karakterizációját, amelyek az eredeti (1.1) egyenletben szerepelnek.

S. Narumi [72] (1923) elsők között (vagy talán elsőként) használt függvényegyenleteket eloszlások karakterizációjára. A kapott függvényegyenleteket erős regularitási feltételek mellett oldotta meg. Lásd még [05].

A [61] cikkben fordul elő először a (0.6) függvényegyenlet valós-valós környezetben. A függvényegyenletet **Lajkó Károly** $x, y \in \mathbb{R}$ esetben visszavezette a **Hosszú**-féle függvényegyenletre, az $x, y \in \mathbb{R}_+$ esetet azonban csak az ismeretlen függvények 2-szeri differenciálhatóságának feltételezése mellett oldotta meg, majd a **Járai**-tétel [53] alkalmazásával megmutatta, hogy a függvényegyenlet mérhető megoldásai 2-szer differenciálhatók.

Érdemes megjegyezni, hogy a (0.5) függvényegyenlet a

$$h_1((\alpha + y)x)(\alpha + y)f_Y(x) = h_2((\beta + x)y)(\beta + x)f_X(x)$$

függvényegyenletből származtatható, amelynek sűrűségfüggvény megoldásai a Gargnanóban tartott ISFE konferencián [64] lett ismertetve.

A (0.5) függvényegyenlet általános megoldását (több más eredménnyel együtt) megadtam a **Lajkó Károly** témavezetésével írt OTDK dolgozatomban (2005. Budapest [43]). Ezzel a dolgozattal országos 2. helyezést értem el. A dolgozatban szereplő, (0.1) egyenlet megoldására vonatkozó eredményeimet azonban még nem publikáltam, mivel az ott alkalmazott gondolatmenet csak valós-valós esetben érvényes, így nem találtam elég általánosnak.

A (0.1) függvényegyenlet általános megoldását $\mathbb{T}_+^2$ -ben (ahol $\mathbb{T}$ egy rendezett test) a [44]-ban publikáltuk **Lajkó Károllyal** közös cikk formájában.

A disszertáció első részének a (0.1) és a (0.5) függvényegyenletek általános körülmények közötti vizsgálata, más függvényegyenletekkel való kapcsolatának a feltárása, a szükséges elméleti háttér ismertetése, és nem a vizsgált függvényegyenletek valószínűség-elméleti alkalmazása a célja, mivel ez utóbbit mások már előttem elvégezték.

Függvényegyenletek dekompozíciója

1.1 Tétel Legyen $(X, \circ)$ egy grupoid, $(Y, +)$ egy egyértelműen 2-osztható Abel-csoport. A $G_i, F_i : X \rightarrow Y$ ($i = 1, 2$) függvények akkor és csak akkor megoldásai a

$$G_1(x \circ y) + F_1(y) = G_2(y \circ x) + F_2(x) \quad (x, y \in X) \quad (1.2)$$

függvényegyenletnek, ha

$$\begin{aligned} G_1(x) &= g(x) + \gamma(x), & F_1(x) &= f(x) - \gamma(x \circ x), \\ G_2(x) &= g(x) - \gamma(x), & F_2(x) &= f(x) + \gamma(x \circ x) \end{aligned} \quad (x \in X), \quad (1.3)$$

ahol az $f, g, \gamma : X \rightarrow Y$ függvények megoldásai a

$$\begin{aligned} g(x \circ y) + f(y) &= g(y \circ x) + f(x) \\ \gamma(x \circ x) + \gamma(y \circ y) &= \gamma(x \circ y) + \gamma(y \circ x) \end{aligned} \quad (x, y \in X). \quad (1.4)$$

egyenleteknek.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy a G_i, F_i ($i = 1, 2$) egyenletek megoldásai az (1.2) egyenletnek. Az egyenletben cseréljük meg az x és az y szerepét, majd az így kapott egyenletet adjuk hozzá az eredeti egyenlethez, illetve vonjuk ki az eredeti egyenletből. Ekkor tetszőleges $x, y \in X$ esetén kapjuk:

$$\begin{aligned} (G_1 + G_2)(x \circ y) + (F_1 + F_2)(y) &= (G_1 + G_2)(y \circ x) + (F_1 + F_2)(x) \\ (G_1 - G_2)(x \circ y) + (F_1 - F_2)(y) &= (G_2 - G_1)(y \circ x) + (F_2 - F_1)(x). \end{aligned} \quad (1.5)$$

Az (1.5) egyenletek közül a másodikban írjunk y helyett is x -et, ekkor kapjuk, hogy

$$(G_1 - G_2)(x \circ x) = (F_2 - F_1)(x) \quad (x \in X). \quad (1.6)$$

Az (1.5) és az (1.6) alapján kapjuk, hogy

$$(G_1 - G_2)(x \circ y) + (G_1 - G_2)(y \circ x) = (G_1 - G_2)(x \circ x) + (G_1 - G_2)(y \circ y). \quad (1.7)$$

Definiáljuk az $f, g, \gamma : X \rightarrow Y$ függvényeket

$$g(x) \doteq \frac{1}{2}(G_1 + G_2)(x), \quad f(x) \doteq \frac{1}{2}(F_1 + F_2)(x), \quad \gamma(x) \doteq \frac{1}{2}(G_1 - G_2)(x)$$

módon tetszőleges $x \in X$ esetén. Ekkor a g, f, γ függvények megoldásai a (1.4) egyenleteknek, és G_i, F_i ($i = 1, 2$) valamint a g, f, γ függvények között fennállnak az (1.3)-ban leírt összefüggések.

A megfordításhoz tegyük fel, hogy a g, f, γ függvények megoldásai az (1.4) egyenleteknek és a G_i, F_i függvények az (1.3) szerint vannak definiálva. Ekkor tetszőleges $x, y \in X$ esetén kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} G_1(x \circ y) + F_1(y) &= \\ &= (g(x \circ y) + \gamma(x \circ y)) + (f(y) - \gamma(y \circ y)) = \\ &= (g(x \circ y) + f(y)) + (\gamma(x \circ y) - \gamma(y \circ y)) = \\ &= (g(y \circ x) + f(x)) + (\gamma(x \circ x) - \gamma(y \circ x)) = \\ &= (g(y \circ x) - \gamma(y \circ x)) + (f(x) + \gamma(x \circ x)) = \\ &= G_2(y \circ x) + F_2(x). \end{aligned}$$

Ezzel a tételt bebizonyítottuk. $\square$

Alkalmazás

Az $x \circ y \doteq \frac{x+1}{y}$ illetve az $x \circ y \doteq x(y+1)$ választással azonnal kapjuk a következő eredményeket.

1.2 Tétel (T.Glavosits, K.Lajkó) Legyen $\mathbb{T}$ egy rendezett test, Y egy egyértelműen 2-osztható Abel-csoport. A $G_i, F_i : \mathbb{T}_+ \rightarrow Y$ ($i = 1, 2$) függvények akkor és csak akkor megoldásai a

$$G_1\left(\frac{x+1}{y}\right) + F_1(y) = G_2\left(\frac{y+1}{x}\right) + F_2(x) \quad (x, y \in \mathbb{T}_+) \quad (0.1)$$

függvényegyenletnek, ha

$$\begin{aligned} G_1(x) &= g(x) + \gamma(x), & F_1(x) &= f(x) - \gamma\left(\frac{x+1}{x}\right), \\ G_2(x) &= g(x) - \gamma(x), & F_2(x) &= f(x) + \gamma\left(\frac{x+1}{x}\right), \end{aligned} \quad (x \in \mathbb{T}_+), \quad (1.8)$$

ahol a $g, f : \mathbb{T}_+ \rightarrow Y$ függvények megoldásai a

$$g\left(\frac{x+1}{y}\right) + f(y) = g\left(\frac{y+1}{x}\right) + f(x) \quad (x, y \in \mathbb{T}_+), \quad (0.2)$$

függvényegyenletnek, a $\gamma : \mathbb{T}_+ \rightarrow Y$ függvény megoldása a

$$\gamma\left(\frac{x+1}{y}\right) + \gamma\left(\frac{y+1}{x}\right) = \gamma\left(\frac{x+1}{x}\right) + \gamma\left(\frac{y+1}{y}\right) \quad (x, y \in \mathbb{T}_+) \quad (0.3)$$

függvényegyenleteknek.

1.3 Tétel Legyen $\mathbb{T}$ egy rendezett test, Y egy egyértelműen 2-osztható Abel-csoport. A $G_i, F_i : \mathbb{T}_+ \rightarrow Y$ ($i = 1, 2$) függvények akkor és csak akkor megoldásai a

$$G_1(x(y+1)) + F_1(x) = G_2(y(x+1)) + F_2(y) \quad (x, y \in \mathbb{T}_+) \quad (0.5)$$

függvényegyenletnek, ha

$$\begin{aligned} G_1(x) &= g(x) + \gamma(x), & F_1(x) &= f(x) - \gamma(x(x+1)), \\ G_2(x) &= g(x) - \gamma(x), & F_2(x) &= f(x) + \gamma(x(x+1)), \end{aligned} \quad (x \in \mathbb{T}_+), \quad (1.9)$$

ahol a $g, f : \mathbb{T}_+ \rightarrow Y$ függvények megoldásai a

$$g(x(y+1)) + f(x) = g(y(x+1)) + f(y) \quad (x, y \in \mathbb{T}_+), \quad (0.6)$$

függvényegyenletnek, a $\gamma : \mathbb{T}_+ \rightarrow Y$ függvény megoldása a

$$\gamma(x(y+1)) + \gamma(y(x+1)) = \gamma(x(x+1)) + \gamma(y(y+1)) \quad (x, y \in \mathbb{T}_+) \quad (0.11)$$

függvényegyenleteknek.

2. Függvényegyenletek és a Gauss-iteráció

Bevezetés

Szigorúan monoton szigorú közepek

A fejezetben ismertetett eredmények egy része megtalálható a 2005-ben Miskolcon előadott OTDK dolgozatomban (**Daróczy Zoltán** témavezetésével [42]).

A fejezetben megmutatjuk, hogy a (0.3) $(\gamma\left(\frac{x+1}{y}\right) + \gamma\left(\frac{y+1}{x}\right) = \gamma\left(\frac{x+1}{x}\right) + \gamma\left(\frac{y+1}{y}\right))$ $\gamma : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ ismeretlen függvénnyel, a függvényegyenlet minden $x, y \in \mathbb{R}_+$ esetén teljesül) és (0.11) $(\gamma(x(y+1)) + \gamma(y(x+1)) = \gamma(x(x+1)) + \gamma(y(y+1)))$ $\gamma : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ ismeretlen függvénnyel, a függvényegyenlet minden $x, y \in \mathbb{R}_+$ esetén teljesül) egyenlet folytonos megoldásai meghatározhatóak Gauss-iteráció segítségével.

A (0.11) egyenlet esetén az alábbi utat követjük.

$$\gamma(x \circ y) + \gamma(y \circ x) = \gamma(\underbrace{x \circ x}_u) + \gamma(\underbrace{y \circ y}_v), \quad (2.1)$$

azaz az

$$x \leftarrow \sqrt[n]{u} \quad y \leftarrow \sqrt[n]{v} \quad (2.2)$$

helyettesítést végrehajtva az

$$\gamma(u) + \gamma(v) = \gamma(M_1(u, v)) + \gamma(M_2(u, v)) \quad (2.3)$$

függvényegyenletet kapjuk, ahol az M_1 és M_2 függvények

$$M_1(u, v) \doteq \sqrt[n]{u} \circ \sqrt[n]{v}, \quad M_2(u, v) \doteq M_1(v, u)$$

módon vannak definiálva. Ekkor az M_1 és M_2 függvények közepek. A (2.3) egyenletben végrehajtva az $u \leftarrow M_1(u, v)$, $v \leftarrow M_2(u, v)$ helyettesítést, majd az eljárást iterálva függvényegyenletek sorozatát kapjuk, melyeket egymással összevetve az alábbi egyenletet kapjuk

$$\gamma(u) + \gamma(v) = \gamma(u_n) + \gamma(v_n). \quad (2.4)$$

A kapott egyenletben az $(u_n, v_n)_{n \in \mathbb{Z}_+}$ sorozat - melyet **Gauss-iterációnak** - nevezünk az alábbi rekurzív definícióval van értelmezve:

$$(u_1, v_1) \doteq (M_1(u, v), M_2(u, v)), \\ (u_{n+1}, v_{n+1}) \doteq (M_1(u_n, v_n), M_2(u_n, v_n)) \quad (n \in \mathbb{Z}_+).$$

Ismert tény, hogy az u_n és v_n sorozatok konvergensek és közös határértékhez konvergálnak. A közös határérték - mint a kiindulásul választott (u, v) pontpár függvénye - szintén közép, melyet az M_1 és M_2 közepek **Gauss kompozíciójának** nevezzük és $M_1 \otimes M_2$ módon jelölünk. Így - feltételezve a γ ismeretlen függvény folytonosságát - az alábbi függvényegyenlethez jutunk:

$$\gamma(u) + \gamma(v) = 2\gamma(M_1 \otimes M_2), \quad (2.5)$$

melynek az általános illetve folytonos megoldása már ismert.

A (0.3) egyenlet esetén az alábbi helyettesítést kell végrehajtani.

$$\gamma(\underbrace{x \circ y}_u) + \gamma(\underbrace{y \circ x}_v) = \gamma(x \circ x) + \gamma(y \circ y), \quad (2.6)$$

azaz az

$$x \leftarrow u * v \quad y \leftarrow u * v, \quad (2.7)$$

ahol az $(u, v) \mapsto (u * v, v * u)$ függvény az $(u, v) \mapsto (u \circ v, v \circ u)$ függvény inverze. Ez a helyettesítés ebben az esetben is elvezet a (2.3) függvényegyenlethez, most azonban az M_1 és M_2 közepek az

$$M_1(u, v) \doteq (u * v) \circ (u * v), \quad M_2(u, v) \doteq M_1(v, u)$$

módon vannak értelmezve. A függvényegyenlet folytonos megoldásainak a meghatározása a (0.11) egyenlet esetén látottakkal analóg módon történik.

Mindkét alkalmazott módszer hasonló szerkezetű függvényegyenletek folytonos megoldásainak a meghatározására alkalmas. Nevezetesen, ha a $\circ$ egy mindkét változójában azonos értelemben szigorúan monoton binér algebrai művelet $\mathbb{R}_+$ -on akkor a (2.2) helyettesítés szükségszerűen (2.3) alakú, közepeket tartalmazó függvényegyenletet eredményez. Ha azonban a $\circ$ egy mindkét változójában ellentétes értelemben szigorúan monoton binér algebrai művelet, akkor bizonyos további feltételek esetén a (2.7) helyettesítés szintén közepeket tartalmazó egyenleteket eredményez. A kapott közepek szigorúan monoton szigorú közepek.

A bevezetés hátralévő részében felsoroljuk a szükséges fogalmakat és előismereteket.

2.1 Definíció Legyen $I \subset \mathbb{R}$ egy intervallum, $M : I \times I \rightarrow \mathbb{R}$ egy függvény. Tekintsük az alábbi tulajdonságokat.

1. M folytonos.
2. $\min(x, y) \leq M(x, y) \leq \max(x, y)$ minden $(x, y \in I)$ esetén.
3. $\min(x, y) < M(x, y) < \max(x, y)$ minden $(x, y \in I, x \neq y)$ esetén.

- Azt mondjuk, hogy M egy **közép** I -n, ha rendelkezik az (1), (2) tulajdonságokkal.
- Azt mondjuk, hogy M egy **szigorú közép** I -n, ha rendelkezik az (1), (3) tulajdonságokkal.

Közeppek Gauss-féle iterációja, közepeket tartalmazó függvényegyenletek

Az M_1 és M_2 közepek Gauss-féle kompozíciójának meghatározásában alapvető jelentőségű az alábbi jól ismert tétel [11], [27].

2.2 Tétel (Invariancia egyenlet) Legyen $I \subset \mathbb{R}$ egy intervallum, M_1 , M_2 , M_3 szigorú közepek I -n. Ekkor az alábbi állítások ekvivalensek:

1. $M_1 \otimes M_2 = M_3$.
2. $M_3(M_1(x, y), M_2(x, y)) = M_3(x, y)$ ($x, y \in I$).

1793-ban a 16 éves **K. F. Gauss** vizsgálta először a róla elnevezett iterációs problémát $M_1 = A$, $M_2 = G$ esetén (M az aritmetikai közép $\mathbb{R}_+$ -on, G a geometriai közép $\mathbb{R}_+$ -on). Az $A \otimes G$ -t AGM módon jelölte (aritmético-geometrico médium). Iterációval közelítette az $AGM(1, \sqrt{2})$ számot. Meghatározta a

$$G \doteq \frac{1}{AGM(1, \sqrt{2})}$$

közelítő értékét ($G = 0.8346268 \dots$). 1799 májusában felismerte, hogy

$$G = \frac{2}{\pi} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{1}{2\pi} B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right),$$

ahol a $B : \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$B(x, y) \doteq \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt \quad (x, y \in \mathbb{R}_+)$$

módon definiált függvény a béta függvény. A G számot Gauss konstansnak nevezzük. Később igazolta, hogy

$$AGM(x, y) = \left[\frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{(x^2 \cos^2(t) + y^2 \sin^2(t))^{\frac{1}{2}}} \right]^{-1} \quad (x, y \in \mathbb{R}_+).$$

Érdemes megjegyezni, hogy bár $A \otimes G = G \otimes A$, ennek ellenére az I -n értelmezett közepek halmazán a Gauss-féle kompozíció általában nem kommutatív, amit az alábbi egyszerű példa jól illusztrál:

Legyen $I \subset \mathbb{R}_+$ egy intervallum. Definíáljuk a $G_\lambda : I^2 \rightarrow I$ közeplet

$$G_\lambda(x, y) \doteq x^\lambda y^{1-\lambda} \quad (x, y \in I)$$

tetszőleges $\lambda \in]0, 1[$ esetén. A G_λ közeplet λ -val súlyozott geometriai középnek nevezzük. Ekkor

$$G_\lambda \otimes G_\mu = G_{\frac{\mu}{1-\lambda+\mu}} \quad (\lambda, \mu \in]0, 1[).$$

Így $G_\lambda \otimes G_\mu = G_\mu \otimes G_\lambda$ pontosan akkor, ha $\lambda = \mu$, vagy $\lambda + \mu = 1$, azaz a $\otimes$ művelet nem kommutatív. Azonban azt is érdemes megjegyezni, hogyha M_1 és M_2 szimmetrikus közepek I -n, akkor az $M_1 \otimes M_2 = M_2 \otimes M_1$.

A közepeket tartalmazó függvényegyenletekre vonatkozó alapvető jelentőségű az alábbi ismert tétel, amely az invariancia egyenlet közvetlen következménye.

2.3 Tétel Legyen $I \subset \mathbb{R}$ egy intervallum, M_1, M_2 szigorú közepek I -n, és tekintsük az alábbi függvényegyenleteket:

1. $f(x) + f(y) = f(M_1(x, y)) + f(M_2(x, y)) \quad (x, y \in I).$
2. $f(x) + f(y) = 2f(M_1 \otimes M_2(x, y)) \quad (x, y \in I).$

Ha f folytonos megoldása az **1.** egyenletnek, akkor megoldása **2.** egyenletnek is, azonban a **2.** egyenlet tetszőleges megoldása az **1.** egyenletnek is megoldása.

2.4 Példa Tekintsük az alábbi példákat a 2.3. Tételben szereplő **1.** és **2.** egyenletek ekvivalenciájával kapcsolatban.

- [70]-ben Maksa Gyula megadja az

$$f(x + y) + g(xy) = h(x) + h(y) \quad (x, y \in \mathbb{R}_+)$$

$f, g, h : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ ismeretlen függvényeket tartalmazó függvényegyenlet általános megoldását. A kapott megoldásból következik, hogy az

$$M_1(x, y) \doteq \frac{x + y}{2}, \quad M_2(x, y) \doteq \sqrt{xy} \quad (x, y \in I \doteq \mathbb{R}_+)$$

közepek esetén a **1.** egyenletnek csak konstans megoldásai vannak, így az **1.** és **2.** egyenletek ekvivalensek.

[26]-ben a szerzők megmutatják, hogy az aritmetikai és geometriai közepeket, illetve ezek Gauss-kompozícióját tartalmazó függvényegyenletek

abban az esetben is ekvivalensek, ha a közepek egy I intervallumon vannak értelmezve és az **1.** és **2.** egyenletek tetszőleges $x, y \in \mathbb{R}$ esetén teljesülnek. Ugyanitt található a következő példa. Legyen $\phi : I \rightarrow I$ egy szigorúan monoton folytonos függvény. Definiáljuk az $M : I^2 \rightarrow I$ közepet

$$M(x, y) \doteq \phi^{-1} \left(\frac{\phi(x) + \phi(y)}{2} \right) \quad (x, y \in I)$$

módon. Ekkor M -et kváziaritmetikai középnek nevezzük I -n. Ha az $M_1, M_2, M_1 \otimes M_2$ közepek egyaránt kváziaritmetikai közepek, akkor az **1.** és **2.** egyenletek ekvivalensek.

- [62]-ben Lajkó Károly vizsgálja a

$$f(px + (1-p)y)f((1-p)x + py) = f(x)f(y) \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

függvényegyenletet $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ismeretlen függvénnyel, $p \in]0, 1[$ rögzített konstans. Megmutatja, hogy ha létezik olyan $E \subset \mathbb{R}$ pozitív Lebesgue mértékű halmaz, amelyen $f \neq 0$, akkor

$$f(x) = B \exp(A_2(x, x) + A_1(x)) \quad (x \in \mathbb{R}),$$

ahol $A_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ szimmetrikus biadditív függvény úgy, hogy

$$A_2(px, (1-p)x) = 0 \quad (x \in \mathbb{R});$$

$A_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ additív függvény, $B \in \mathbb{R}$ konstans.

[23]-ben megtalálható az

$$f(px + (1-p)y) + f((1-p)x + py) = f(x) + f(y) \quad (x, y \in I)$$

egyenlet általános megoldása, ahol $p \in]0, 1[$ rögzített konstans, $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ az ismeretlen függvény. A szerzők megmutatják, hogy a p konstans algebrai tulajdonságaival karakterizálható, hogy a megfelelő **1.**, illetve **2.** alakú egyenletek ekvivalenciája.

[21]-ben is hasonló jellegű probléma szerepel. Definiáljuk az $M_1, M_2 : I^2 \rightarrow I$ közepeket

$$\begin{aligned} M_1(x, y) &\doteq \varphi^{-1} (p\varphi(x) + (1-p)\varphi(y)), \\ M_2(x, y) &\doteq M_1(y, x) \end{aligned} \quad (x, y \in I),$$

ahol $p \in]0, 1[$ rögzített konstans. Ez esetben is a p szám algebrai tulajdonságaival karakterizálható az **1.** és **2.** egyenletek ekvivalenciája.

- [33]-ban található az alábbi példa. Definiáljuk az $M_1, M_2 : \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}$ közepeket

$$M_1(x, y) \doteq M(x, y) \quad M_2(x, y) = \frac{xy}{M(x, y)} \quad (x, y \in \mathbb{R}_+)$$

módon, ahol

$$M(x, y) \doteq \frac{x+y}{2} \quad (x, y \in \mathbb{R}_+) \quad \text{vagy}$$

$$M(x, y) \doteq \left(\frac{x^p + y^p}{2} \right)^{\frac{1}{p}} \quad (x, y \in \mathbb{R}_+; p \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \text{ rögzített}).$$

Ekkor az **1.** egyenlet általános megoldása

$$f(x) = l(x) + c \quad (x \in \mathbb{R}_+),$$

ahol $l : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ logaritmusos függvény, $c \in \mathbb{R}$ konstans mindkét vizsgált esetben. Így az **1.** és **2.** egyenletek ekvivalensek.

Alkalmazások

2.5 Tétel Definiáljuk az $M_1, M_2 : \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}$ közepeket az alábbi módon

$$M_1(x, y) \doteq \frac{(\sqrt{4x+1}-1)(\sqrt{4y+1}+1)}{4} \quad (x, y \in \mathbb{R}_+) \quad (2.8)$$

$$M_2(x, y) \doteq M_1(y, x)$$

és tekintsük az alábbi függvényegyenleteket:

$$\gamma(y(x+1)) + \gamma(x(y+1)) = \gamma(x(x+1)) + \gamma(y(y+1)) \quad (x, y \in \mathbb{R}_+) \quad (2.9)$$

$$\gamma(x) + \gamma(y) = \gamma(M_1(x, y)) + \gamma(M_2(x, y)) \quad (x, y \in \mathbb{R}_+) \quad (2.10)$$

$$\gamma(x) + \gamma(y) = 2\gamma(\sqrt{xy}) \quad (x, y \in \mathbb{R}_+) \quad (2.11)$$

$\gamma : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ ismeretlen függvénnyel. Ekkor teljesülnek a következő állítások:

1. Ha a $\gamma : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ függvény megoldása a (2.9) függvényegyenletnek, akkor megoldása a (2.10) függvényegyenleteknek is.
2. Ha a $\gamma : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ függvény folytonos megoldása a (2.10) függvényegyenletnek, akkor megoldása a (2.11) függvényegyenletnek is.

3. Ha a $\gamma : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ függvény folytonos megoldása a 2.11 függvényegyenletnek, akkor léteznek $q, c \in \mathbb{R}$ konstansok úgy, hogy

$$\gamma(x) = q \log(x) + c \quad (x \in \mathbb{R}_+). \quad (2.12)$$

4. Ha a $\gamma : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ függvény folytonos megoldása a 2.9 függvényegyenletnek, akkor a (2.12)-ben megadott alakú.

Bizonyítás. 1. A (2.9) egyenletből $x \leftarrow \frac{\sqrt{4x+1}}{2}$, $y \leftarrow \frac{\sqrt{4y+1}}{2}$ helyettesítéssel kapjuk a (2.10) függvényegyenletet.

2. Mivel

$$M_1 \otimes M_2(x, y) = \sqrt{xy} \quad (x, y \in \mathbb{R}_+), \quad (2.13)$$

így a (2.10) egyenletből a γ függvény folytonosságának feltételezése mellett Gauss-iterációval kapjuk a (2.11) függvényegyenletet.

3. Tegyük fel, hogy a γ függvény megoldása a (2.11) függvényegyenletnek tetszőleges $x, y \in \mathbb{R}_+$ esetén. Ekkor

$$\gamma(x) + \gamma(y) = 2\gamma(\sqrt{xy}) = 2\gamma(\sqrt{(xy)1}) = \gamma(xy) + \gamma(1),$$

azaz az $x \mapsto \gamma(x) - \gamma(1)$ ($x \in \mathbb{R}_+$) módon definiált függvény egy logaritmikus függvény, (azaz $l(xy) = l(x) + l(y)$ teljesül minden $x, y \in \mathbb{R}_+$ esetén), amiből kapjuk, hogy a **3.** állítás teljesül.

4. Az **1.**, **2.**, **3.** állítások alapján nyilvánvaló. $\square$

2.6 Tétel Tekintsük az alábbi függvényegyenleteket:

$$\gamma(x) + \gamma(y) = \gamma(M_1(x, y)) + \gamma(M_2(x, y)) \quad (x, y \in \mathbb{R}_+) \quad (2.14)$$

$$\gamma(x) + \gamma(y) = 2\gamma(M_1 \otimes M_2(x, y)) \quad (x, y \in \mathbb{R}_+), \quad (2.15)$$

ahol az M_1 és M_2 közepek (2.8) módon vannak definiálva, $\gamma : \mathbb{T}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ az ismeretlen függvény. Ekkor, ha a $\gamma : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ függvény megoldása a (2.14) egyenletnek, akkor létezik egy $l : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ logaritmikus függvény és $c \in \mathbb{R}$ konstans úgy, hogy

$$\gamma(x) = l(x) + c \quad (x \in \mathbb{R}_+), \quad (2.16)$$

így a (2.14) és a (2.15) egyenletek ekvivalensek.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy a $\gamma : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ függvény megoldása a (2.14) egyenletnek. A (2.14) egyenletben hajtsuk végre az $x \leftarrow x(y+1)$, $y \leftarrow y(x+1)$ helyettesítést így kapjuk, hogy

$$\gamma(x(y+1)) + \gamma(y(x+1)) = \gamma(x(x+1)) + \gamma(y(y+1)) \quad (x, y \in \mathbb{R}_+). \quad (2.17)$$

A 6.2. Tétel alapján az (2.17) egyenlet általános megoldása (2.16)-ban megadott alakú. Mivel teljesül a (2.13), így a γ függvény megoldása a (2.15) egyenletnek.

A megfordítás triviális módon teljesül. $\square$

2.7 Tétel Definiáljuk az $M_1, M_2 : \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}$ közepeket az alábbi módon:

$$\begin{aligned} M_1(x, y) &\doteq \frac{xy + y}{y + 1}, \\ M_2(x, y) &\doteq M_1(y, x) \end{aligned} \quad (x, y \in \mathbb{R}_+). \quad (2.18)$$

Legyen továbbá

$$D \doteq \{(x, y) \in \mathbb{R}_+ | xy > 1\}.$$

Tekintsük az alábbi függvényegyenleteket:

$$\gamma\left(\frac{x+1}{y}\right) + \gamma\left(\frac{y+1}{x}\right) = \gamma\left(\frac{x+1}{x}\right) + \gamma\left(\frac{y+1}{y}\right) \quad (x, y \in \mathbb{R}_+) \quad (2.19)$$

$$\gamma(x) + \gamma(y) = \gamma(M_1(x, y)) + \gamma(M_2(x, y)) \quad (x, y \in D) \quad (2.20)$$

$$\gamma(x) + \gamma(y) = 2\gamma(\sqrt{xy}) \quad (x, y \in D) \quad (2.21)$$

$$\gamma(x) + \gamma(y) = 2\gamma(\sqrt{xy}) \quad (x, y \in \mathbb{R}_+) \quad (2.22)$$

$\gamma : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ ismeretlen függvénnyel. Ekkor teljesülnek a következők:

1. Ha a $\gamma : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ függvény megoldása a (2.19) egyenletnek, akkor megoldása a (2.20) egyenletnek is.
2. Ha a $\gamma : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ függvény folytonos megoldása a (2.20) egyenletnek, akkor megoldása a (2.21) egyenletnek is.
3. Ha a $\gamma : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ függvény megoldása a (2.21) egyenletnek, akkor megoldása a (2.22) egyenletnek is.
4. Ha a $\gamma : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ függvény folytonos megoldása a (2.22) egyenletnek, akkor léteznek $q, c \in \mathbb{R}$ konstansok úgy, hogy

$$\gamma(x) = q \log(x) + c \quad (x \in \mathbb{R}_+). \quad (2.23)$$

5. Ha a $\gamma : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ függvény folytonos megoldása a (2.19) egyenletnek, akkor a (2.23)-ben megadott alakú.

Bizonyítás.

1. A (2.19) függvényegyenletben hajtsuk végre az $x \leftarrow \frac{x+1}{xy-1}$, $y \leftarrow \frac{y+1}{xy-1}$ helyettesítést, így kapjuk, hogy teljesül a (2.20) függvényegyenlet.

2. Mivel

$$M_1 \otimes M_2(x, y) = \sqrt{xy} \quad (x, y \in \mathbb{R}_+), \quad (2.24)$$

így a (2.20) egyenletből a γ függvény folytonosságának feltételezése mellett Gauss-iterációval kapjuk a (2.21) függvényegyenletet.

3. Tegyük fel, hogy a γ függvény megoldása a (2.21) egyenletnek. Legyenek $x, y \in \mathbb{R}_+$ tetszőlegesen rögzített konstansok. Defináljuk az $u \in \mathbb{R}_+$ konstanst

$$u \doteq \max \left\{ \frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \frac{1}{\sqrt{xy}} \right\} + 1$$

módon. Ekkor $(x, u), (y, u), (\sqrt{xy}, u) \in D$, így kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \gamma(x) + \gamma(y) + 2\gamma(u) &= [\gamma(x) + \gamma(u)] + [\gamma(y) + \gamma(u)] = \\ &= 2\gamma(\sqrt{xu}) + 2\gamma(\sqrt{yu}) = 4\gamma\left(\sqrt{\sqrt{xy}u}\right) = 2\gamma(\sqrt{xy}) + 2\gamma(u), \end{aligned}$$

amiből kapjuk, hogy teljesül a (2.22) egyenlet.

4. bizonyítása analóg a 2.5. Tétel 3. állításának a bizonyításával.

5. állítás triviális módon következik az **1.**, **2.**, **3.**, **4.** állításokból. $\square$

2.8 Tétel Tekintsük az alábbi függvényegyenleteket.

$$\gamma(x) + \gamma(y) = \gamma(M_1(x, y)) + \gamma(M_2(x, y)) \quad (x, y \in \mathbb{R}_+) \quad (2.25)$$

$$\gamma(x) + \gamma(y) = 2\gamma(M_1 \otimes M_2(x, y)) \quad (x, y \in \mathbb{R}_+) \quad (2.26)$$

ahol az M_1 és M_2 közepek (2.18) módon vannak definiálva, $\gamma : \mathbb{T}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ az ismeretlen függvény. Ekkor, ha a $\gamma : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ függvény megoldása a (2.25) egyenletnek, akkor létezik egy $l : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ logaritmikus függvény és $c \in \mathbb{R}$ konstans úgy, hogy

$$\gamma(x) = l(x) + c \quad (x \in \mathbb{R}_+), \quad (2.27)$$

így az (2.25) és (2.26) egyenletek ekvivalensek.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy a $\gamma : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ függvény megoldása a (2.25) egyenletnek. A (2.25) egyenletben hajtsuk végre az $x \leftarrow \frac{x+1}{y}, y \leftarrow \frac{y+1}{x}$ helyettesítést így kapjuk, hogy

$$\gamma\left(\frac{x}{y+1}\right) + \gamma\left(\frac{y}{x+1}\right) = \gamma\left(\frac{x}{x+1}\right) + \gamma\left(\frac{y}{y+1}\right) \quad (x, y \in \mathbb{R}_+). \quad (2.28)$$

A 6.1. Tétel alapján a (2.28) egyenlet általános megoldása a (2.16)-ban megadott alakú. Mivel teljesül a (2.24), így a γ függvény megoldása a (2.26) egyenletnek.

A megfordítás triviális módon teljesül. $\square$

3. A (0.2) $(g(\frac{x+1}{y}) + f(y) = g(\frac{y+1}{x}) + f(x))$ egyenlet megoldása

Bevezetés

A fejezetben ismertetett eredmények teljes terjedelmükben megtalálhatóak a [43] OTDK dolgozatban és a [44] cikkben.

A fejezetben megadjuk a (0.2) egyenlet általános megoldását abban az esetben, amikor $\mathbb{T}$ egy rendezett test, Y egy egyértelműen 2-osztható Abel-csoport és az ismeretlen $f, g : \mathbb{T}_+ \rightarrow Y$ függvények a függvényegyenletet tetszőleges $x, y \in \mathbb{T}_+$ esetén elégitik ki.

Egy függvényegyenlet általános megoldásának megadása azt jelenti, hogy a függvényegyenletben szereplő ismeretlen függvényeket explicit módon kifejezzük ismert függvények, valamint bizonyos nevezetes függvényegyenletek megoldásaiként előálló függvények segítségével. Ilyen nevezetes függvényegyenletek az additív, logaritmus, exponenciális és a multiplikatív függvényegyenletek. Az általános megoldás felírásában előfordulhatnak még monomok, illetve polinomok is. Az általunk vizsgált egyenletek megoldásában csak additív és logaritmus függvények fordulnak elő, így most csak ezeket a függvényeket ismertetjük.

Additív és logaritmus függvények

Legyenek $(X, +)$, $(Y, +)$, algebrai struktúrák, $+$ binér algebrai művelet X -en illetve Y -on. Egy $a : X \rightarrow Y$ függvényt **additív függvénynek** nevezzük, ha megoldása az

$$a(x + y) = a(x) + a(y) \quad (x, y \in X)$$

függvényegyenletnek.

Legyenek $(X, \cdot)$, $(Y, +)$, algebrai struktúrák, $\cdot$ binér algebrai művelet X -en, $+$ binér algebrai művelet Y -on. Egy $l : X \rightarrow Y$ függvényt **logaritmus függvénynek** nevezzük, ha megoldása az

$$l(xy) = l(x) + l(y) \quad (x, y \in X)$$

függvényegyenletnek.

Szokás az $a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ additív függvényeket Cauchy-additívnak, az $l : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ logaritmus függvényeket Cauchy logaritmus függvénynek nevezni, mivel **A. Cauchy** volt az első, aki megadta a valós-valós additív egyenlet folytonos megoldásait.

Egy X vektortéren értelmezett additív függvény általános megoldásának szerkezete **Hamel** munkásságát követően vált ismertté [50].

A későbbiekben használni fogjuk az alábbi jól ismert tételt.

3.1 Tétel *Ha a egy folytonos (vagy mérhető) Cauchy-additív függvény, akkor létezik $p \in \mathbb{R}$ konstans úgy, hogy $a(x) = px$ minden $x \in \mathbb{R}$ esetén.*

Ha l egy folytonos (vagy mérhető) Cauchy-logaritmikus függvény, akkor létezik $q \in \mathbb{R}$ konstans úgy, hogy $l(x) = q \log(x)$ minden $x \in \mathbb{R}_+$ esetén. (Itt és a továbbiakban a $\log$ a természetes alapú logaritmusfüggvényt jelöli.)

Az additív és logaritmikus függvényekre vonatkozó eredmények megtalálhatóak a [03], [57], [01] monográfiákban.

A megoldás során használni fogjuk a Δ differencia-operátort, amely egy tetszőleges $g : \mathbb{T}_+ \rightarrow Y$ függvényhez a

$$\Delta g(x) \doteq g(x) - g\left(\frac{1}{x}\right) \quad (x \in \mathbb{T}_+)$$

módon definiált függvényt rendel.

3.2 Tétel [T. Glavosits, K. Lajkó] *Legyen $\mathbb{T}$ egy rendezett test, Y egy egyértelműen 2-osztható Abel-csoport és tekintsük a*

$$g\left(\frac{x+1}{y}\right) + f(y) = g\left(\frac{y+1}{x}\right) + f(x) \quad (x, y \in T_+) \quad (0.2)$$

függvényegyenletet, $g, f : \mathbb{T}_+ \rightarrow Y$ ismeretlen függvényekkel. Ekkor teljesülnek a következők.

1. *Ha az (g, f) pár megoldása a (0.2) egyenletnek, akkor a Δf függvény logaritmikus.*
2. *Ha a (g, f) pár megoldása a (0.2) egyenletnek, akkor az $(f + g, g)$ pár is megoldása a (0.2) egyenletnek.*
3. *Ha a (g, f) pár megoldása a (0.2) egyenletnek, akkor a Δg függvény is logaritmikus.*
4. *Ha a (g, f) pár megoldása a (0.2) egyenletnek, akkor*

$$g(x) + 2f(x) = \Delta f(x) + \Delta g(x+1) + c \quad (x \in \mathbb{T}_+),$$

ahol $c = 2f(1) + g(1) - \Delta g(2)$.

5. *Ha a (g, f) pár megoldása a (0.2) egyenletnek, akkor léteznek $l_1, l_2 : \mathbb{T}_+ \rightarrow Y$ logaritmikus függvények és $c_1, c_2 \in Y$ konstansok úgy, hogy*

$$\begin{aligned} g(x) &= l_1(x) + l_2(x+1) + c_1, \\ f(x) &= l_1(x(x+1)) + l_2(x) + c_2 \end{aligned} \quad (x \in \mathbb{T}_+). \quad (3.1)$$

(A megfordítás szintén igaz.)

6. Ha a $g, f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ függvénpár mérhető megoldása a (0.2) egyenletnek minden $x, y \in \mathbb{R}_+$ esetén, akkor léteznek $q_1, q_2, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ konstansok úgy, hogy

$$\begin{aligned} g(x) &= q_1 \log(x) + q_2 \log(x+1) + c_1, \\ f(x) &= q_1 \log(x(x+1)) + q_2 \log(x) + c_2 \end{aligned} \quad (x \in \mathbb{T}_+). \quad (3.2)$$

Bizonyítás.

1. Tegyük fel, hogy a (g, f) pár megoldása a (0.2) egyenletnek. Hajtsuk végre a (0.2) egyenletben az $x \leftarrow \frac{x}{y}$, $y \leftarrow \frac{1}{y}$ helyettesítést. Így kapjuk, hogy

$$g(x+y) + f\left(\frac{1}{y}\right) = g\left(\frac{y+1}{x}\right) + f\left(\frac{x}{y}\right) \quad (x, y \in \mathbb{T}_+). \quad (3.3)$$

A (3.3) egyenletben cseréljük meg x és y szerepét, majd az így kapott egyenletet vonjuk ki a (3.3) egyenletből. Így kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{y}\right) - f\left(\frac{1}{x}\right) &= \\ &= g\left(\frac{y+1}{x}\right) - g\left(\frac{x+1}{y}\right) + f\left(\frac{x}{y}\right) - f\left(\frac{y}{x}\right) \end{aligned} \quad (x, y \in \mathbb{T}_+). \quad (3.4)$$

A (3.4) egyenletet összevetve a (0.2) egyenlettel kapjuk, hogy

$$\Delta f(x) = \Delta f(y) + \Delta f\left(\frac{x}{y}\right) \quad (x, y \in \mathbb{T}_+). \quad (3.5)$$

A (3.5)-ban elvégezve az $x \leftarrow xy$ helyettesítést, kapjuk, hogy a Δf függvény logaritmikus.

2. Tegyük fel, hogy a (g, f) pár megoldása a (0.2) egyenletnek. Hajtsuk végre a (0.2) egyenletben az $y \leftarrow \frac{x+1}{y}$ helyettesítést. Így kapjuk, hogy

$$g(y) + f\left(\frac{x+1}{y}\right) = g\left(\frac{x+y+1}{xy}\right) + f(x) \quad (x, y \in \mathbb{T}_+). \quad (3.6)$$

A (3.6) egyenletben cseréljük meg x és y szerepét, majd a kapott egyenletet vonjuk ki a (3.6) egyenletből. Így kapjuk, hogy

$$f\left(\frac{x+1}{y}\right) + (g+f)(y) = f\left(\frac{y+1}{x}\right) + (g+f)(x) \quad (x, y \in \mathbb{T}_+). \quad (3.7)$$

ami mutatja, hogy az $(f, g+f)$ pár valóban megoldása a (0.2) egyenletnek.

3. Tegyük fel, hogy a (g, f) pár megoldása a (0.2) egyenletnek. Ekkor **1.** alapján Δf logaritmikus. A **2.** alapján az $(f, g+f)$ pár szintén megoldása a

(0.2) egyenletnek. Ekkor az **1.** alapján a $\Delta(g + f)$ függvény logaritmikus. Így a $\Delta g = \Delta(g + f) - \Delta f$ függvény logaritmikus.

4. Tegyük fel, hogy a (g, f) pár megoldása a (0.2) egyenletnek. A (0.2) egyenletben végezzük el az $y \leftarrow (x+1)y$, illetve az (0.2) egyenletben az $x \leftarrow (x+1)y$ helyettesítést. Így kapjuk a

$$\begin{aligned} g\left(\frac{1}{y}\right) + f((x+1)y) &= g\left(\frac{(x+1)y+1}{x}\right) + f(x) \\ g\left(\frac{(x+1)y+1}{y}\right) + f(y) &= g\left(\frac{y+1}{(x+1)y}\right) + f((x+1)y) \end{aligned} \quad (x, y \in \mathbb{T}_+) \quad (3.8)$$

egyenleteket. Adjuk össze a (3.8)-ban szereplő egyenleteket, majd a kapott egyenletben végezzük el az $y \leftarrow \frac{1}{y}$ helyettesítést. Így kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} g(y) + g(x+y+1) + f\left(\frac{1}{y}\right) &= \\ &= g\left(\frac{y+1}{(x+1)y}\right) + f((x+1)y) \end{aligned} \quad (x, y \in \mathbb{T}_+). \quad (3.9)$$

A (3.9) egyenletben cseréljük meg x és y szerepét, majd az így kapott egyenletet vonjuk ki a (3.9) egyenletből. Így kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} g(y) - g(x) + f\left(\frac{1}{y}\right) - f\left(\frac{1}{x}\right) &= \\ &= g\left(\frac{y+1}{x+1}\right) + g\left(\frac{x+1}{y+1}\right) + f(x) - f(y) \end{aligned} \quad (x, y \in \mathbb{T}_+). \quad (3.10)$$

Végezzük el (3.10)-ban az $y \leftarrow 1$ helyettesítést, így kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} g(x) + f(x) &= \\ &= -f\left(\frac{1}{x}\right) + g\left(\frac{x+1}{2}\right) - g\left(\frac{2}{x+1}\right) + 2f(1) + g(1) \end{aligned} \quad (x \in \mathbb{T}_+). \quad (3.11)$$

Adjuk a (3.11) mindkét oldalához $f(x)$ -et. Így **1.**-et és **3.**-at is felhasználva kapjuk **4.**-et.

5. Tegyük fel, hogy a (g, f) pár megoldása a (0.2) függvényegyenletnek. Defináljuk $G, F, l_1, l_2 : \mathbb{T}_+ \rightarrow Y$ függvényeket

$$\begin{aligned} G &\doteq (-3g + 2f), & F &\doteq (2g - f), \\ l_1 &\doteq \Delta F, & l_2 &\doteq \Delta G \end{aligned}$$

módon. Ekkor a $(-3g, -3f)$ pár megoldása a (0.2)-nak, a **2.** miatt a $(2f, 2g + 2f)$ pár is megoldása a (0.2)-nak, így az

$$(G, F) = (-3g + 2f, 2g - f) = (-3g, -3f) + (2f, 2g + 2f)$$

pár is megoldása a (0.2)-nak. Ekkor az **1.** és **3.** miatt az $l_1 = \Delta F$, $l_2 = \Delta G$ módon definiált függvények logaritmikus függvények, így **4.** alapján kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} g(x) &= (-3g + 2f)(x) + 2(2g - f)(x) = \\ &= (G + 2F)(x) \stackrel{4.}{=} \Delta F(x) + \Delta G(x + 1) + c_1 = \\ &= l_1(x) + l_2(x + 1) + c_1 \quad (x \in \mathbb{T}_+), \end{aligned} \quad (3.12)$$

ahol szintén **4.** alapján $c_1 = 2F(1) + G(1) - \Delta G(2)$.

Végezzük el (0.2)-ban az $y \leftarrow 1$ helyettesítést. Így kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} f(x) &= -g\left(\frac{2}{x}\right) + g(x + 1) + f(1) = \\ &= -\left[l_1\left(\frac{2}{x}\right) + l_2\left(\frac{2}{x} + 1\right) + c_1\right] + [l_1(x + 1) + l_2(x + 2) + c_1] + f(1) = \\ &= l_1\left(\frac{x + 1}{\frac{2}{x}}\right) + l_2\left(\frac{x + 2}{\frac{2}{x} + 1}\right) + f(1) = \\ &= l_1(x(x + 1)) + l_2(x) + c_2 \quad (x \in \mathbb{T}_+), \end{aligned} \quad (3.13)$$

ahol $c_2 = f(1) - l_1(2) = f(1) - \Delta G(2)$.

6. A (g, f) pár mérhetősége maga után vonja az

$$l_1 \doteq \Delta F \doteq \Delta(2g - f), \quad l_2 \doteq \Delta G \doteq \Delta(-3g + 2f)$$

függvények mérhetőségét, amiből következik az állítás.

Így a bizonyítás teljes. $\square$

4. A (0.15) $(f(x+y) = g(xy))$ egyenletről

Bevezetés

Ennek a fejezetnek a célja, hogy megadjuk az összes olyan

$$\begin{aligned} f : A + A &\doteq \{a + b \mid a, b \in A\} \rightarrow Y, \\ g : A \cdot A &\doteq \{a \cdot b \mid a, b \in A\} \rightarrow Y \end{aligned}$$

függvénypárt, amely kielégíti az

$$f(x+y) = g(xy) \quad (x, y \in A) \quad (0.15)$$

függvényegyenletet az $A \subset \mathbb{R}_+$ halmaz bizonyos tipikus megválasztása esetén. Látható, hogy az Y halmaznak nincs szerepe a függvényegyenlet megoldásában, így Y egy tetszőleges nemüres, illetve elég sok elemet tartalmazó halmaz. A szükséges algebrai előismeretek megtalálhatóak a [39], [56], [77], illetve a [65] könyvekben.

A (0.15) egyenletet a továbbiakban a (0.11) $(\gamma(x(y+1)) + \gamma(y(x+1)) = \gamma(x(x+1)) + \gamma(y(y+1)))$ egyenlet megoldása során fogjuk alkalmazni, illetve a segítségével fogjuk visszavezetni a Davison egyenletet $(G_1(xy+x) + F_1(y) = G_2(x+y) + F_2(xy))$ az (0.6) $(g(x(y+1)) + f(x) = g(y(x+1)) + f(y))$ egyenletre.

A (0.15) függvényegyenlet vizsgálatának további motivációját jelenti, hogy hasonló szerkezetű egyenletek megtalálhatóak matematika versenyeken, illetve példatárakban. **Daróczy Zoltán** professzor a KöMaL-ban tűzte ki a **B. 4456.** versenyfeladatot [20]. Legyen f a pozitív valós számok halmazán értelmezett olyan valós értékű függvény, amelyre $f\left(\frac{x+y}{2}\right) = f(\sqrt{xy})$ teljesül minden $x, y > 0$ esetén. Bizonyítsuk be, hogy f konstans. **Christopher G. Small** könyvében megoldással együtt szerepel az alábbi feladat ([76] (1.13 Problems 2., 26. oldal): határozza meg az $f(x+y) = f(xy)$ függvényegyenlet megoldását $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ ismeretlen függvénnyel, ahol a függvényegyenlet minden $x, y \in \mathbb{R}_+$ esetén teljesül.

A (0.15) $(f(x+y) = g(xy) \ (x, y \in A))$ egyenletről

4.1 Jelölés Legyen $\mathbb{T}$ egy rendezett test, (a_n) egy sorozat $\mathbb{T}$ -ben. Ekkor használni fogjuk az alábbi jelöléseket:

$$\begin{aligned} a_n \uparrow a &\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \quad \text{és} \quad a_1 < a_2 < a_3 < \dots, \\ a_n \downarrow a &\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \quad \text{és} \quad a_1 > a_2 > a_3 > \dots \end{aligned}$$

4.2 Tétel Megadjuk az

$$f(x+y) = g(xy) \quad (x, y \in A) \quad (0.15)$$

függvényegyenlet összes megoldását, $f : A + A \rightarrow Y$, $g : A \cdot A \rightarrow Y$ ismeretlen függvényekkel az A halmaz bizonyos tipikus megválasztása esetén, ahol $A \subset \mathbb{R}_+$ egy összeadásra és szorzásra nézve zárt halmaz, X egy nemüres, esetleg végtelen halmaz.

1. Legyen $A \doteq \mathbb{R}_+$. Az f, g függvények pontosan akkor megoldásai a (0.15) egyenletnek A -n, ha $f(x) = g(x) = c$ tetszőleges $x \in A$ esetén, ahol $c \in X$ tetszőleges konstans.
2. Legyen $A \doteq \mathbb{Q}_+$. Az f, g függvények pontosan akkor megoldásai a (0.15) egyenletnek A -n, ha $f(x) = g(x) = c$ tetszőleges $x \in A$ esetén, ahol $c \in X$ tetszőleges konstans.
3. Legyen $A \doteq]\alpha, \beta[\cap \mathbb{Q}$, ahol $0 \leq \alpha < \beta$ tetszőlegesen rögzített valós számok. Az f, g függvények pontosan akkor megoldásai a (0.15) egyenletnek A -n, ha $f(x) = g(y) = c$ tetszőleges $x \in A + A$, $y \in A \cdot A$ esetén, ahol $c \in X$ tetszőleges konstans.
4. Legyen $A \doteq \mathbb{Z}_+$. Az f, g függvények pontosan akkor megoldásai a (0.15) egyenletnek A -n, ha

$$f(x) = \begin{cases} c_1, & \text{ha } x = 2; \\ c_2, & \text{ha } x = 3; \\ c_3, & x \in \mathbb{Z}_+, x > 3. \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} c_1, & \text{ha } x = 1; \\ c_2, & \text{ha } x = 2; \\ c_3, & x \in \mathbb{Z}_+, x > 2, \end{cases} \quad (4.1)$$

ahol $c_1, c_2, c_3 \in X$ tetszőleges konstansok.

5. Legyen $7 < K$ és $A \doteq]0, K[\cap \mathbb{Z}_+$. Az f, g függvények pontosan akkor megoldásai a (0.15) egyenletnek A -n, ha (4.1) alakúak.
6. $A \doteq \mathcal{R}$ ahol $\mathcal{R} \doteq \left\{ \frac{k}{2^n} \mid k \in \mathbb{Z}_+, n \in \mathbb{Z}_+ \cup \{0\} \right\}$. Az f, g függvények pontosan akkor megoldásai a (0.15) egyenletnek A -n, ha $f(x) = g(x) = c$ tetszőleges $x \in A$ esetén, ahol $c \in X$ tetszőleges konstans.

Bizonyítás.

1. Tegyük fel, hogy az $f, g : \mathbb{R}_+ \rightarrow X$ függvények megoldásai a (0.15) függvényegyenletnek tetszőleges $(x, y \in \mathbb{R}_+)$ esetén. Defináljuk az $F, G : \mathbb{R}_+ \rightarrow X$ függvényeket

$$F(x) \doteq f(2x) \quad G(x) \doteq g(x^2) \quad (x \in \mathbb{R}_+)$$

módon. Ekkor kapjuk, hogy

$$F\left(\frac{x+y}{2}\right) = G(\sqrt{xy}) \quad (x, y \in \mathbb{R}_+)$$

amiből az $x = y$ helyettesítéssel kapjuk, hogy $F = G$, tehát F megoldása az **B. 4456.** feladatban szereplő egyenletnek, amiből az $x \leftarrow x - \sqrt{x^2 - y^2}$, $y \leftarrow x + \sqrt{x^2 - y^2}$ helyettesítéssel kapjuk, hogy $F(x) = F(y)$ minden $x, y \in \mathbb{R}_+$, $y < x$ esetén. Tehát F konstans függvény, de akkor - vele együtt - az f és a g is konstans függvények. A megfordítás triviális módon teljesül.

2. Ez a probléma már nem vezethető vissza a KöMaL feladat megoldására, mivel a gyökvonás kivezet $\mathbb{Q}$ -ból. Tegyük fel, hogy az $f, g : \mathbb{Q}_+ \rightarrow X$ függvények megoldásai a (0.15) függvényegyenletnek tetszőleges $x, y \in \mathbb{Q}_+$ esetén. Legyenek $x, y \in \mathbb{Q}_+$ úgy, hogy $x < y$. Ekkor létezik $\varepsilon \in \mathbb{Q}_+$ úgy, hogy $0 < x - \varepsilon \in \mathbb{Q}_+$. Defináljuk a $\lambda, \delta \in \mathbb{Q}_+$ számokat

$$\lambda \doteq \frac{\delta + \varepsilon}{\delta + 2\varepsilon}, \quad \delta \doteq y - x$$

módon. Ekkor, mivel

$$x = \lambda(x - \varepsilon) + (1 - \lambda)(y + \varepsilon), \quad y = (1 - \lambda)(x - \varepsilon) + \lambda(y + \varepsilon),$$

így kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} f(x) &= f(\lambda(x - \varepsilon) + (1 - \lambda)(y + \varepsilon)) = g(\lambda(x - \varepsilon)(1 - \lambda)(y + \varepsilon)) = \\ &= g((1 - \lambda)(x - \varepsilon)\lambda(y + \varepsilon)) = f((1 - \lambda)(x - \varepsilon) + \lambda(y + \varepsilon)) = f(y), \end{aligned}$$

azaz f konstans, de akkor g is az. Az állítás megfordítása triviális módon teljesül.

3. Mivel az A halmaz most korlátos, módosítanunk kell a **2.**-ben alkalmazott módszert. Legyenek $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+$ úgy, hogy $0 \leq \alpha < \beta$. Tegyük fel, hogy az f, g függvények megoldásai a (0.15) egyenletnek tetszőleges $x, y \in]\alpha, \beta[\cap \mathbb{Q}_+$ esetén. Legyenek $x, y \in A + A =]2\alpha, 2\beta[\cap \mathbb{Q}_+$ úgy, hogy $x < y$. Ekkor létezik $\varepsilon \in \mathbb{Q}_+$ úgy, hogy $2\alpha < x - \varepsilon$ és $y + \varepsilon < 2\beta$. Az $N \in \mathbb{Z}_+$ számot válasszuk meg úgy, hogy az

$$a < (1 - \lambda_N)(x - \varepsilon) \quad \text{és} \quad \lambda_N(y + \varepsilon) < b \quad (4.2)$$

feltételek egyaránt teljesüljenek, ahol

$$\lambda_N \doteq \frac{\delta_N + \varepsilon}{\delta_N + 2\varepsilon} \quad \text{és} \quad \delta_N \doteq \frac{y - x}{N}.$$

Mivel

$$\frac{a}{(x - \varepsilon)} < \frac{1}{2} \quad \text{és} \quad \frac{\varepsilon}{\delta_n + 2\varepsilon} \uparrow \frac{1}{2} \quad (n \rightarrow \infty)$$

így létezik $n_0 \in \mathbb{Z}_+$ úgy, hogy

$$\frac{a}{x - \varepsilon} < \frac{\varepsilon}{\delta_n + 2\varepsilon} = 1 - \lambda_n \quad (n > n_0),$$

azaz $a < (1 - \lambda_n)(x - \varepsilon)$.

Analóg módon kapjuk, hogy mivel

$$\frac{1}{2} < \frac{b}{y + \varepsilon} \quad \text{és} \quad 1 - \frac{\varepsilon}{\delta_n + 2\varepsilon} \downarrow \frac{1}{2} \quad (n \rightarrow \infty),$$

így létezik $n_1 \in \mathbb{Z}_+$ úgy, hogy

$$\lambda_n = 1 - \frac{\varepsilon}{\delta_n + 2\varepsilon} < \frac{b}{y + \varepsilon} \quad (n > n_1),$$

azaz $\lambda_n(y + \varepsilon) < b$. Ekkor $N > \max(n_0, n_1)$ választás mellett a (4.2) feltételek teljesülnek. Legyen

$$x_k \doteq x + k\delta_N \quad (k = 0, 1, \dots, N).$$

Ekkor az N választása miatt a

$$\lambda_N(x_k - \varepsilon), \quad (1 - \lambda_N)(x_{k+1} + \varepsilon), \quad (1 - \lambda_N)(x_k - \varepsilon), \quad \lambda_N(x_{k+1} + \varepsilon)$$

számok $[\alpha, \beta[\cap \mathbb{Q}_+$ -beliek, így a **2.** állítás bizonyítása során alkalmazott módszerrel analóg módon kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} f(x_k) &= f(\lambda_N(x_k - \varepsilon) + (1 - \lambda_N)(x_{k+1} + \varepsilon)) = \\ &= g(\lambda_N(x_k - \varepsilon)(1 - \lambda_N)(x_{k+1} + \varepsilon)) = g((1 - \lambda_N)(x_k - \varepsilon)\lambda_N(x_{k+1} + \varepsilon)) = \\ &= f((1 - \lambda_N)(x_k - \varepsilon) + \lambda_N(x_{k+1} + \varepsilon)) = f(x_{k+1}). \end{aligned}$$

A $k \in \{0, 1, \dots, N - 1\}$ szám tetszőlegesen választása miatt teljesül az egyenlőségek alábbi lánc:

$$f(x) = f(x_0) = f(x_1), \quad f(x_1) = f(x_2), \quad \dots, \quad f(x_{N-1}) = f(x_N) = f(y),$$

azaz f konstans, de akkor g is az. A megfordítás triviális módon teljesül.

4. Legyen $A \doteq \mathbb{Z}_+$. Először megmutatjuk, hogy ha az f, g függvények megoldásai a (0.15) egyenletnek tetszőleges $x, y \in \mathbb{Z}_+$ esetén, akkor (4.1) alakúak. Ehhez az $f(n + 1) = g(n)$ ahol $n \in \mathbb{Z}_+$ összefüggés miatt elegendő belátni, hogy $f(x) = f(4)$ valahányszor $x \geq 4$.

Definiáljuk a $T : \{4, 5, 6, \dots\} \rightarrow \mathbb{Z}_+$ függvényt

$$T(x) \doteq \begin{cases} \frac{x}{2} + 3, & \text{ha } x \text{ páros;} \\ \frac{x-1}{2} + 2, & \text{ha } x \text{ páratlan.} \end{cases}$$

módon. A T függvény rendelkezik az alábbi tulajdonságokkal:

$$f(x) = f(T(x)) \quad (x \geq 4), \quad (4.3)$$

$$T(x) < x \quad (x \geq 8). \quad (4.4)$$

(4.3) az alábbi módon igazolható:

$$f(2k) = f(2(k-1) + 2) = g(4(k-1)) = f(k+3) = f\left(\frac{2k}{2} + 3\right) = f(T(2k)),$$

$$f(2k+1) = g(2k) = f(k+2) = f\left(\frac{(2k+1)-1}{2} + 2\right) = f(T(2k+1)),$$

illetve (4.4) a T definíciója alapján egyszerű számolással adódik.

Tetszőlegesen rögzített $a \in \{4, 5, 6, \dots\}$ esetén értelmezzük az (x_n) sorozatot

$$x_1 \doteq a, \quad x_{n+1} \doteq T(x_n) \quad (n \in \mathbb{Z}_+)$$

módon. A T függvény (4.3) és (4.4) tulajdonságából teljes indukcióval kapjuk, hogy bárhogyan is választjuk meg az (x_n) sorozat $x_1 = a \in \{4, 5, 6, \dots\}$ kezdőpontját, minden $n \in \mathbb{Z}_+$ esetén $f(a) = f(x_n)$ teljesül, továbbá $x_n > x_{n+1}$ valahányszor $x_n \geq 8$. Ha $a = 9$, akkor $x_1 = 9$, $x_2 = 6$; illetve ha $a = 8$, akkor $x_1 = 8$, $x_2 = 7$, $x_3 = 5$, $x_4 = 4$. Tehát minden $a \geq 4$ esetén $f(a) = f(4)$, vagy $f(a) = 6$ (attól függően, hogy a nem osztható, vagy osztható 3-mal). Így nem maradt más hátra, minthogy megmutassuk, hogy $f(4) = f(6)$. Ez azonban igaz, mivel

$$f(6) = f(3+3) = g(9) = g(1 \cdot 9) = f(10) = f(8) = f(7) = f(5) = f(4),$$

amiből kapjuk, hogy f és g valóban (4.1) alakúak.

Megfordítva, az (4.1) szerint definiált f és g függvények valóban megoldásai a (0.15) függvényegyenletnek tetszőleges $x, y \in \mathbb{Z}_+$ esetén.

5. A 4. állítás bizonyítása során alkalmazott gondolatmenet most is alkalmazható.

6. Tegyük fel, hogy az f , g függvények megoldásai a függvényegyenletnek tetszőleges $x, y \in \mathcal{R}$ esetén. Legyenek $x, y \in \mathcal{R}$ rögzített számok. Ekkor léteznek $k, l \geq 4$ pozitív egészek és $z \in \mathcal{R}$ úgy, hogy $x = kz$ és $y = lz$. Defináljuk az $F : \{2, 3, \dots\} \rightarrow X$, $G : \mathbb{Z}_+ \rightarrow X$ függvényeket

$$F(u) \doteq f(uz) \quad u \in \{2, 3, \dots\},$$

$$G(v) \doteq g(vz^2) \quad v \in \mathbb{Z}_+$$

módon. Ekkor az F , G függvények megoldásai az

$$F(u+v) = G(uv) \quad (u, v \in \mathbb{Z}_+)$$

függvényegyenletnek, amiből a **4.** alapján kapjuk, hogy létezik $c \in X$ melyre $F(u) = c$ minden $u \geq 4$ esetén. Így $f(x) = f(kz) = F(k) = F(l) = f(lz) = f(y)$, amiből az $x, y \in \mathcal{R}$ számok tetszőleges választása miatt kapjuk, hogy f konstans, de akkor - vele együtt - g is konstans. A megfordítás triviális módon teljesül. $\square$

A (0.15) $(f(x + y) = g(xy) \ (x, y \in A))$ egyenlet végtelen értékkészletű megoldásáról

Ebben a részben megmutatjuk, hogy létezik olyan $A \subset \mathbb{R}_+$ összeadásra nézve zárt halmaz, melyhez megadhatóak olyan $f : A + A \rightarrow Y$ és $g : A \cdot A \rightarrow Y$ függvények, melyek végtelen értékkészletű megoldásai a (0.15) függvényegyenletnek, ahol Y egy végtelen halmaz. Ehhez szükségünk van néhány fogalomra.

Négyzetmentesnek nevezünk egy pozitív egész számot, ha nem osztható egy egynél nagyobb pozitív egész szorzatával, vagy ekvivalens módon a négyzetmentes szám az 1, és minden olyan 1-nél nagyobb pozitív egész, amely páronként különböző prímszámok szorzata.

Az első néhány négyzetmentes szám:

1, 2, 3, 5, 6, 7, 11, 13, 14, 15, 17, 19, 21, ...

4.3 Jelölés Használni fogjuk az $\mathcal{Z}_{(+)}, \mathcal{Q}_{(+)} \subset \mathbb{R}$ számhalmazokat, melyek

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_{(+)} &\doteq \left\{ \sum_{k=1}^n a_k \sqrt{x_k} \mid n \in \mathbb{Z}_+; a_k \in \mathbb{Z}; x_k \in X \quad (k = 1, \dots, n) \right\}, \\ \mathcal{Q}_{(+)} &\doteq \left\{ \sum_{k=1}^n a_k \sqrt{x_k} \mid n \in \mathbb{Z}_+; a_k \in \mathbb{Q}_+; x_k \in X \quad (k = 1, \dots, n) \right\}, \end{aligned} \quad (4.5)$$

ahol X jelöli a négyzetmentes számok halmazát.

4.4 Tétel Legyen $A \doteq \mathcal{Z}_{(+)}$, vagy $A \doteq \mathcal{Q}_{(+)}$, továbbá Y egy végtelen halmaz. Ekkor léteznek olyan $f : A + A \rightarrow Y$, $g : A \cdot A \rightarrow Y$ függvények, melyek végtelen értékkészletű megoldásai az

$$f(x + y) = g(xy) \quad (x, y \in A)$$

függvényegyenletnek.

A bizonyítás elvégzéséhez szükség van egy kevés számelméleti előismeretre.

Legyen $K \subset \mathbb{R}$ egy számtest, $n \in \mathbb{Z}_+$, továbbá legyenek $a_1, \dots, a_{n+1}$ valós számok. Ekkor $K(a_1, \dots, a_n)$ fogja jelölni a legszűkebb olyan résztestét $\mathbb{R}$ -nek, amely a K test elemeit és az $a_1, \dots, a_{n+1}$ számokat egyaránt tartalmazza,

azaz az összes olyan testének a metszetét, amelyek tartalmazzák az $a_1, \dots, a_n$ számokat és K minden elemét, azaz az

$$K(a_1, \dots, a_n) = \bigcap \{L \subset \mathbb{R} \mid L \text{ test, } K \cup \{a_i, \dots, a_i\} \subset L\},$$

amit a K test $a_1, \dots, a_n$ számokkal való bővítésének nevezzük.

Használni fogjuk az alábbi jól ismert azonosságot:

$$K(a_1, \dots, a_n)(a_{n+1}) = K(a_1, \dots, a_n, a_{n+1}).$$

4.5 Tétel Legyen n egy rögzített pozitív egész, $p_1, \dots, p_n$ különböző prímek, továbbá tetszőleges $k \in \{1, \dots, n\}$ esetén $\mathcal{P}_k = \{p_l \mid l \leq k\}$. Jelölje X_k azoknak az 1-től különböző pozitív négyzetmentes egészeknek a halmazát, melyek prímosztói $\mathcal{P}_k$ -beliek. Ekkor X_k egy 2^k elemű halmaz. Az X_k elemeit az alábbi módon fogjuk jelölni: $X_k = \{1, x_2, x_3, \dots, x_{2^k}\}$. A $\mathbb{Q}(\sqrt{p_1}, \dots, \sqrt{p_n})$ elemeit explicit módon is meg tudjuk adni:

$$\mathbb{Q}(\sqrt{p_1}, \dots, \sqrt{p_n}) = \{a_1 + a_2\sqrt{x_2} + \dots + a_{2^n}\sqrt{x_{2^n}} \mid a_i \in \mathbb{Q}, x_i \in X_n\}. \quad (4.6)$$

- a. Tetszőleges $x \in \mathbb{Q}(\sqrt{p_1}, \dots, \sqrt{p_n})$ szám (4.6) alakban történő felírása egyértelmű.
- b. $\mathcal{Z}_{(+)}$ és $\mathcal{Q}_{(+)}$ elemeinek (4.5) alakban történő felírása egyértelmű.
- c. $\mathcal{Z}_{(+)}$ és $\mathcal{Q}_{(+)}$ minden eleme irracionális.

Bizonyítás.

Legyen K egy számtest, n egy rögzített pozitív egész, legyenek $p_1, \dots, p_n$ különböző prímek. Legyen továbbá:

$$K_k \doteq \mathbb{Q}(\sqrt{p_1}, \dots, \sqrt{p_k}) \quad (k \in \{1, 2, \dots, n\}).$$

1. Először megmutatjuk, hogy ha $a \in K$, akkor

$$K(\sqrt{a}) = \{u + v\sqrt{a} \mid u, v \in K\}. \quad (4.7)$$

Legyen $L = \{u + v\sqrt{a} \mid u, v \in K\}$. Ekkor az $L \subset K(\sqrt{a})$ tartalmazás nyilvánvaló.

Megmutatjuk, hogy L egy $\sqrt{a}$ -t és K minden elemét tartalmazó részteste $\mathbb{R}$ -nek. Ehhez elegendő belátni, hogy L tartalmazza minden nemzérus elemének a multiplikatív inverzét, ugyanis a többi testaxióma triviális módon teljesül. Ehhez legyenek $u, v \in K$ számok olyanok, hogy $u + v\sqrt{a} \neq 0$. Számunkra csak a $v \neq 0$ eset érdekes. Ekkor $u - v\sqrt{a} \neq 0$, mivel ellenkező esetben ellentmondásba kerülnénk a $\sqrt{a} \notin K$ feltétellel. Így egyszerű számolással kapjuk, hogy

$$\frac{1}{u + v\sqrt{a}} = \frac{u - v\sqrt{a}}{(u + v\sqrt{a})(u - v\sqrt{a})} = \frac{u - v\sqrt{a}}{u^2 - v^2a} = \frac{u}{u^2 - v^2a} + \frac{-v}{u^2 - v^2a}\sqrt{a},$$

ami állításunk teljesülését bizonyítja.

Ha L egy tetszőleges $\sqrt{a}$ -t és K minden elemét tartalmazó test, akkor a $\{u + v\sqrt{a} \mid u, v \in K\} \subset L$ tartalmazás teljesülése nyilvánvaló.

2. Bebizonyítjuk, hogy ha $a \in K$, de $\sqrt{a} \notin K$, akkor tetszőleges $x \in K(\sqrt{a})$ szám (4.7) alakban történő felírása egyértelmű. Tegyük fel, hogy $\sqrt{a} \notin K$ és léteznek $u_1, u_2, v_1, v_2 \in K$ úgy, hogy $u_1 + v_1\sqrt{a} = u_2 + v_2\sqrt{a}$. Ekkor rendezéssel kapjuk, hogy $u_1 - u_2 = (v_2 - v_1)\sqrt{a}$. A $v_2 - v_1$ nem lehet zérustól különböző, mert ekkor ellentmondásba kerülnénk a $\sqrt{a} \notin K$ feltétellel. Ha azonban $v_2 - v_1 = 0$, akkor $u_1 - u_2 = 0$ is teljesül, és pontosan ezt kellett bizonyítanunk.

3. Bebizonyítjuk, hogy tetszőleges $k \in \{1, \dots, n-1\}$ esetén

$$\mathbb{Q}(\sqrt{p_1}, \dots, \sqrt{p_{k+1}}) = \mathbb{Q}(\sqrt{p_1}, \dots, \sqrt{p_k})(\sqrt{p_{k+1}}).$$

Az állítást **1.** és **2.** felhasználásával n szerinti teljes indukcióval kapjuk.

4. Bebizonyítjuk, hogy ha $a, b \in K$ és $\sqrt{a} \in K(\sqrt{b})$, akkor $\sqrt{a} \in K$, vagy $\sqrt{ab} \in K$. Ugyanis, ha $\sqrt{a} \notin K$, akkor a $\sqrt{a} \in K(\sqrt{b})$ feltétel és az **1.** alapján léteznek $u, v \in K$, $v \neq 0$ számok, melyekkel $\sqrt{a} = u + v\sqrt{b}$. Ebből kapjuk, hogy $\sqrt{a} - v\sqrt{b} = u$, amiből négyzetre emeléssel, majd ismét rendezéssel kapjuk, hogy

$$\sqrt{ab} = \frac{a + v^2b - u^2}{2v} \in K.$$

5. Bebizonyítjuk, hogy ha x egy pozitív, négyzetmentes egész, $1 \leq k \leq n$, akkor $\sqrt{x} \in \mathbb{Q}(\sqrt{p_1}, \dots, \sqrt{p_k})$ pontosan akkor teljesül, ha x prímosztói $\mathcal{P}_k$ -beliek. A bizonyítást k szerinti teljes indukcióval végezzük. Az $k = 1$ eset bizonyításához legyen x egy négyzetmentes pozitív egész, p_1 egy prím és tegyük fel, hogy $\sqrt{x} \in \mathbb{Q}(\sqrt{p_1})$. Ekkor a **4.** alapján kapjuk, hogy $\sqrt{x} \in \mathbb{Q}$, vagy $\sqrt{xp_1} \in \mathbb{Q}$. Ha $\sqrt{x} \in \mathbb{Q}$, akkor $x = 1$ és így teljesül a bizonyítandó állítás. Ha azonban $\sqrt{xp_1} \in \mathbb{Q}$, akkor az csak úgy lehet, ha $x = p_1$, így a bizonyítandó állítás ebben az esetben is teljesül.

Az öröklődés bizonyításához tegyük fel, hogy a **5.** valamely $1 \leq k \leq n-1$ esetén teljesül. Az $k+1$ eset igazolásához legyen $\sqrt{x} \in K_{k+1}$, ahol x egy pozitív négyzetmentes egész. Ekkor, mivel $x, p_{k+1} \in K_k$ és $\sqrt{x} \in K_k(\sqrt{p_{k+1}})$, így a **4.** alapján kapjuk, hogy $\sqrt{x} \in K_k$, vagy $\sqrt{xp_{k+1}} \in K_k$. Az $\sqrt{x} \in K_k$ -ből az indukciós feltétel alapján következik a bizonyítandó állítást. Ha azonban $\sqrt{xp_{k+1}} \in K_k$ teljesül, akkor xp_{k+1} nem lehet négyzetmentes, mivel ekkor ellentmondásba kerülnénk az indukciós feltétellel. Ekkor azonban megintcsak az indukciós feltétel alapján igaz az állítás. Így az öröklődés is teljesül.

6. Bebizonyítjuk, hogy $\sqrt{p_1} \notin \mathbb{Q}$, illetve $\sqrt{p_{k+1}} \notin \mathbb{Q}(\sqrt{p_1}, \dots, \sqrt{p_k})$ minden $k \in \{1, \dots, n-1\}$ esetén. Az állítás a **5.** közvetlen következménye.

a. n szerinti teljes indukcióval bizonyítjuk. Az $n = 1$ eset a **2.** közvetlen következménye $K = \mathbb{Q}$ és $a = p_1$ mellett. Az öröklődés igazolásához tegyük

fel, hogy a bizonyítandó állítás valamilyen $1 \leq k \leq n-1$ esetén teljesül. A $k+1$ eset bizonyításához tegyük fel, hogy valamely $x \in K_{k+1}$ szám felírható

$$x = a_1 + a_2\sqrt{x_2} + \cdots + a_{2^{k+1}}\sqrt{x_{2^{k+1}}} = b_1 + b_2\sqrt{x_2} + \cdots + b_{2^{k+1}}\sqrt{x_{2^{k+1}}} \quad (4.8)$$

alakban, ahol az a_i, b_i együtthatók racionális számok minden $i \in \{1, \dots, 2^{k+1}\}$ esetén. A (4.8) egyenletből rendezéssel kapjuk, hogy

$$(a_1 - b_1) + (a_2 - b_2)\sqrt{x_2} + \cdots + (a_{2^{k+1}} - b_{2^{k+1}})\sqrt{x_{2^{k+1}}} = 0. \quad (4.9)$$

A (4.9)-ben a megfelelő tagokból $\sqrt{p_{k+1}}$ -et kiemelve kapjuk, hogy léteznek $u, v \in K_k$ számok, melyekkel $0 = u + v\sqrt{p_{k+1}} \in K_k(\sqrt{p_{k+1}})$. Ekkor azonban, mivel **6.** miatt $\sqrt{p_{k+1}} \notin K_k$, így az **2.** alapján kapjuk, hogy $u = v = 0$, ami az indukciós feltétel alapján éppen az $a_i = b_i$ egyenlőségek teljesülését jelenti tetszőleges $i \in \{1, 2, 3, \dots, 2^{k+1}\}$ esetén. Így az öröklődés is teljesül.

b., c. az a. közvetlen következménye. $\square$

Most bebizonyítjuk a 4.4. Tételt.

Bizonyítás. Megmutatjuk, hogy például az $A \doteq \mathcal{Z}_{(+)}$ választás megfelelő. Jelölje (p_n) a pozitív prímszámok növekvő sorozatát. Defináljuk a $\phi : \mathcal{N} \rightarrow \mathbb{Z}_+$ függvényt tetszőleges $x = a_1 + a_2\sqrt{x_2} + \cdots + \sqrt{x_k} \in \mathcal{N}$ esetén

$$\phi(x) \doteq \max\{n \in \mathbb{Z}_+ \mid p_n \text{ osztója } x_i\text{-nek valamely } i \in \{2, \dots, k\} \text{ esetén}\}$$

módon. A ϕ függvény a 4.5. Tétel **a.** állítása alapján jóldefiniált. Egyszerű számolással ellenőrizhető, hogy a ϕ függvény rendelkezik a következő tulajdonsággal:

$$\phi(x+y) = \phi(xy) \quad (x, y \in \mathcal{N}). \quad (4.10)$$

Tegyük fel, hogy a (c_n) egy Y -beli injektív sorozat. Defináljuk az $f : \mathcal{Z}_{(+)} + \mathcal{Z}_{(+)} \rightarrow Y$ és $g : \mathcal{Z}_{(+)} \cdot \mathcal{Z}_{(+)} \rightarrow Y$ függvényeket

$$\begin{aligned} f(u) &\doteq c_{\phi(u)} & (u \in \mathcal{Z}_{(+)} + \mathcal{Z}_{(+)}, \\ g(v) &\doteq c_{\phi(v)} & (v \in \mathcal{Z}_{(+)} \cdot \mathcal{Z}_{(+)}) \end{aligned}$$

módon. Ekkor (4.10) alapján kapjuk, hogy

$$f(x+y) = c_{\phi(x+y)} = c_{\phi(xy)} = g(xy) \quad (x, y \in \mathcal{Z}_{(+)},$$

azaz f és g megszámlálhatóan végtelen értékészletű megoldásai a (0.15) függvényegyenletnek.

Az $A \doteq \mathcal{Q}_{(+)}$ választás szintén megfelelő. $\square$

Alkalmazások

A most következő Tétel 1. állítása [45] a további alkalmazások szempontjából fontos.

4.6 Tétel (T. Glavosits, K. Lajkó) Legyen $\mathbb{T}$ egy rendezett test, Y egy tetszőleges nemüres halmaz. Ekkor teljesülnek a következő állítások:

1. (T. Glavosits, K. Lajkó) Ha az $f, g : \mathbb{T}_+ \rightarrow Y$ függvények megoldásai az

$$f(x + y) = g(xy) \quad (x, y \in \mathbb{T}_+) \quad (0.15)$$

függvényegyenletnek, akkor létezik $c \in Y$ úgy, hogy $f(x) = g(x) = c$ minden $x \in \mathbb{T}_+$ esetén.

2. (T. Glavosits) Ha a $\mathbb{T}$ test archimedeszeien rendezett, $I \subset \mathbb{T}_+$ egy összefüggő nyílt halmaz, az $f : I + I \rightarrow Y$, $g : I \cdot I \rightarrow Y$ függvények megoldásai az

$$f(x + y) = g(xy) \quad (x, y \in I)$$

függvényegyenletnek, akkor létezik $c \in Y$ úgy, hogy $f(x) = g(x) = c$ minden $x \in \mathbb{T}_+$ esetén.

Bizonyítás.

1. Tegyük fel, hogy az $f, g : \mathbb{T}_+$ függvények megoldásai a (0.15) függvényegyenletnek tetszőleges $x, y \in \mathbb{T}_+$ esetén. Legyen $u \in \mathbb{T}_+$ tetszőleges, és hajtsuk végre a (0.15) egyenletben az $x \leftarrow (u + \frac{1}{u})x$, $y \leftarrow (u + \frac{1}{u})^{-1}y$ helyettesítést. Így kapjuk, hogy

$$f\left(\left(u + \frac{1}{u}\right)x + \frac{1}{u + \frac{1}{u}}y\right) = g(xy) = f(x + y) \quad (x, y, u \in \mathbb{T}_+). \quad (4.11)$$

A (4.11) egyenletben hajtsuk végre az $x \leftarrow \frac{u}{u^4 + u^2 + 1}$, $y \leftarrow \frac{u^5 + u^3}{u^4 + u^2 + 1}$ helyettesítést. Így kapjuk, hogy $f(u) = f(1)$ minden $u \in \mathbb{T}_+$ esetén, azaz f és vele együtt g is konstans $\mathbb{T}_+$ -on.

2. bizonyítása analóg a 4.2. Tétel 3. bizonyításával. $\square$

4.7 Következmény Legyen $\mathbb{T}$ egy archimedeszien rendezett test, $Y = Y(+)$ egy csoport. Ekkor teljesülnek a következők:

1. Ha $f : \mathbb{T}_+ \rightarrow Y$ egy olyan függvény, amely egyidejűleg additív és logaritmikus $\mathbb{T}_+$ -on, azaz

$$\begin{aligned} f(x + y) &= f(x) + f(y), \\ f(xy) &= f(x) + f(y) \end{aligned} \quad (x, y \in \mathbb{T}_+),$$

akkor $f(x) = 0$ minden $x \in \mathbb{T}_+$ esetén.

2. Ha Y egy egyértelműen 2-osztható csoport, $a, b, c \in \mathbb{T}_+ \rightarrow Y$ olyan additív függvények, amelyek teljesítik az alábbi Pexider-logaritmikus egyenletet

$$a(xy) = b(x) + c(y) \quad (x, y \in \mathbb{T}_+),$$

akkor az a, b, c függvények azonos 0 függvények $\mathbb{T}_+$ -on.

3. Ha Y egy egyértelműen 2-osztható csoport, $A : \mathbb{T} \rightarrow Y$ egy olyan nem azonosan 0 additív függvény, amelyre

$$A(\alpha xy + \beta x + \gamma y) = 0 \quad (x, y \in \mathbb{T}_+)$$

valamely $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{T}$ esetén. Ekkor $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

5. A Daróczy-Lajkó-Székelyhidi tétel

Bevezetés

A fejezetben általánosítjuk **Daróczy Zoltán, Lajkó Károly, Székelyhidi László** alábbi tételét, a továbbiakban röviden DLSz tétel.

5.1 Tétel (Daróczy-Lajkó-Székelyhidi [24]) *Ha $\mathbb{T}$ egy rendezett test, Y egy egyértelműen 2-osztható Abel-csoport, az $f : \mathbb{T}_+ \rightarrow Y$ olyan, hogy minden $\lambda \in \mathbb{T}_+ \setminus \{1\}$ esetén létezik $j_\lambda : \mathbb{T}_+ \rightarrow Y$ Jensen-függvény úgy, hogy*

$$\Delta_\lambda f(x) \doteq f(\lambda x) - f(x) = j_\lambda(x) \quad (x \in \mathbb{T}_+),$$

akkor létezik olyan $j : \mathbb{T}_+ \rightarrow Y$ Jensen-függvény és $l : \mathbb{T}_+ \rightarrow Y$ logaritmusikus függvény, amelyekkel

$$f(x) = j(x) + l(x) \quad (x \in \mathbb{T}_+).$$

A tétel alkalmazásaként megadjuk a (0.3) $(\gamma\left(\frac{x+1}{y}\right) + \gamma\left(\frac{y+1}{x}\right) = \gamma\left(\frac{x+1}{x}\right) + \gamma\left(\frac{y+1}{y}\right))$, (0.11) $(\gamma(x(y+1)) + \gamma(y(x+1)) = \gamma(x(x+1)) + \gamma(y(y+1)))$, (0.4) $(F(x) + G(y) = P(x+y) + Q\left(\frac{x}{y}\right))$ és (0.13) $(\gamma(x+y) + \gamma\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) = \gamma\left((x+y)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)\right) + \gamma(1))$ egyenletek megoldását.

A DLSz tétel a **G. N. de Bruijn** által bevezetett differencia-tulajdonságra adott tisztán algebrai példa. De Bruijn [14]-ben definiálta a differencia-tulajdonság fogalmát.

Jensen-függvények

Legyenek X, Y egyértelműen 2-osztható Abel-csoportok. Egy $j : X \rightarrow Y$ függvényt **Jensen-függvénynek** nevezzük, ha megoldása a

$$2j\left(\frac{x+y}{2}\right) = j(x) + j(y) \quad (x, y \in X). \quad (5.1)$$

függvényegyenletnek.

A Jensen-függvény fogalmát **J. L. W. V. Jensen** vezette be [54].

Ha I és J valós intervallumok, az $f : I \rightarrow J$ függvény megoldása az

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x) + f(y)}{2} \quad (x, y \in I)$$

függvényegyenletnek, akkor azt mondjuk, hogy az f függvény **Jensen-függvény I -n**. Így látható, hogy a Jensen-függvények is homomorfizmusok.

Az alábbi Tétel ([03], 44. oldal, 12. Tétel) mutatja, hogy a Jensen-függvények elég általános körülmények között kvázi-additív függvények. (Egy függvényt kvázi-additívnek nevezünk, ha az értelmezési tartományán egy additív függvénytől csupán egy konstans tagban tér el.)

5.2 Tétel (Aczél-Dhombres) *Legyen $(S, +)$ egy kommutatív félcsoport és $(G, \cdot)$ egy csoport. A $g, h, k : S \rightarrow G$ függvények pontosan akkor megoldásai a*

$$k(x + y) = g(x)h(y) \quad (x, y \in S)$$

függvényegyenletnek, ha az alábbi alakúak:

$$\begin{aligned} g(x) &= af(x) & (x \in S) \\ h(y) &= f(y)b & (y \in S) \\ k(t) &= af(t)b, & (t \in S + S) \end{aligned}$$

ahol $f : (S, +) \rightarrow (G, \cdot)$ egy homomorfizmus, $a, b \in G$ konstansok.

Az 5.2. Tételből kapjuk, hogy ha $J : \mathbb{T}_+ \rightarrow Y$ egy Jensen-függvény, ahol $\mathbb{T}$ egy rendezett test, Y egy egyértelműen 2-osztható Abel-csoport, akkor létezik egy $a : \mathbb{T}_+ \rightarrow Y$ additív függvény és egy $c \in Y$ konstans, melyekkel

$$J(x) = a(x) + c \quad (x \in \mathbb{T}_+).$$

Így kapjuk, hogy ha az $f : \mathbb{T} \rightarrow Y$ függvény olyan, hogy minden $\lambda \in \mathbb{T}_+ \setminus \{1\}$ esetén az $x \mapsto \Delta_\lambda f(x)$ ($x \in \mathbb{T}_+$) módon definiált függvény előáll egy additív függvény és egy konstans összegeként, akkor létezik egy $a : \mathbb{T}_+ \rightarrow Y$ additív függvény, $l : \mathbb{T}_+ \rightarrow Y$ logaritmikus függvény és $c \in Y$ konstans úgy, hogy $f(x) = a(x) + l(x) + c$ minden $x \in \mathbb{T}_+$ esetén.

Végül érdemes megjegyezni, hogy ha $a : \mathbb{T}_+ \rightarrow Y$ egy tetszőleges additív függvény, akkor az $A : \mathbb{T} \rightarrow Y$

$$A(x) \doteq \begin{cases} a(x), & \text{ha } x > 0; \\ 0, & \text{ha } x = 0; \\ -a(-x), & \text{ha } x < 0; \end{cases}$$

módon definiált függvény egyértelmű módon létező additív kiterjesztése az a függvénynek a $\mathbb{T}$ testre.

A függvényegyenletek megoldása során a DLSz tételnek a fenti - az eredetivel elvivalens - változatait fogjuk használni.

A Jensen-függvényekre vonatkozó eredmények megtalálhatóak a [03], [57], [01] monográfiákban.

A DLSz tétel általánosítása

Legyenek $(X; +)$, $(Y; +)$ olyan struktúrák, melyekben az $+$: $(x, x) \mapsto x + x$ egy unér művelet. Az $a : X \rightarrow Y$ függvényt **2-additív**nek nevezzük, ha

$$a(x + x) = a(x) + a(x) \quad (x \in X).$$

Ha $(X; \cdot)$ egy grupoid $\cdot : (x, y) \mapsto xy$ binér algebrai művelettel, $(Y; +)$ egy a csoport, akkor használni fogjuk a Δ_λ differencia-operátort, amely tetszőleges $\lambda \in X$ esetén egy $f : X \rightarrow Y$ függvényhez a $\Delta_\lambda f : X \rightarrow Y$

$$\Delta_\lambda f(x) \doteq f(\lambda x) - f(x) \quad (x \in X)$$

módon definiált függvényt rendeli.

Az egységelemes $(X; \cdot)$ algebrai struktúra egységelemének azt az egyértelműen létező, 1 módon jelölt elemet nevezzük, amelyre

$$1x = x1 = x \quad (x \in X).$$

5.3 Tétel Legyen $(X; +, \cdot)$ egy kétműveletes algebrai struktúra, ahol $+$ egy unér, $\cdot$ egy binér algebrai művelet úgy, hogy a $\cdot$ művelet egységelemes 1 egységelemmel, továbbá a $\cdot$ bal-disztributív a $+$ műveletre nézve, azaz

$$\lambda(x + x) = \lambda x + \lambda x \quad (\lambda, x \in X).$$

Legyen továbbá $(Y; +)$ egy Abel-csoport, $f : X \rightarrow Y$ egy függvény. Ekkor az alábbi állítások ekvivalensek:

1. Létezik egy $\{a_\lambda : X \rightarrow Y \mid \lambda \in X, a_\lambda \text{ 2-additív} \}$ függvénycsalád és egy $c : X \rightarrow Y$ függvény úgy, hogy minden $\lambda \in X$ esetén

$$\Delta_\lambda f(x) = a_\lambda(x) + c(\lambda) \quad (x \in X).$$

2. Létezik egy $a : X \rightarrow Y$ 2-additív, egy $l : X \rightarrow Y$ logaritmikus függvény és egy $d \in Y$ konstans, melyekkel

$$f(x) = a(x) + l(x) + d \quad (x \in X).$$

Ha teljesül 1., vagy 2., akkor teljesülnek az alábbiak:

- a. $a(x) = a_2(x)$ minden $x \in X$ esetén.
- b. $a_\lambda(x) = \Delta_\lambda a_2(x)$ minden $\lambda, x \in X$ esetén.
- c. $l(x) = c(x)$ minden $x \in X$ esetén.

Bizonyítás. A továbbiakban használni fogjuk a $2 \doteq 1+1 \in X$ és a $2x \doteq x+x$ jelöléseket. Ekkor a $2x$ kifejezést egyaránt lehet összegként is és szorzatként is értelmezni, azonban a kétféle értelmezés bal-disztributivitás miatt ugyanazt az elemet definiálja. Azt is érdemes megjegyezni, hogy $\lambda(2x) = 2(\lambda x)$ tetszőleges $\lambda, x \in X$ esetén, ugyanis

$$\lambda(2x) = \lambda(x+x) = \lambda x + \lambda x = 2(\lambda x),$$

így x helyére 1 -et írva kapjuk, hogy a $2 \in X$ elem minden $\lambda \in X$ elemmel kommutál, azaz $2\lambda = \lambda 2$.

Tegyük fel, hogy az $f : X \rightarrow Y$ függvény rendelkezik a **1.** tulajdonsággal. Ekkor az a_λ függvények 2 -additivitása alapján kapjuk, hogy

$$a_\lambda(2x) = 2a_\lambda(x) \quad (x \in X), \quad (5.2)$$

azonban **1.** miatt

$$a_\lambda(x) = f(\lambda x) - f(x) - c(\lambda) \quad (\lambda, x \in X), \quad (5.3)$$

így (5.2) és (5.3) alapján kapjuk, hogy

$$\underbrace{f(\lambda(2x)) - f(2x) - c(\lambda)}_{a_{\lambda(2x)}} = \underbrace{(f(\lambda x) - f(x) - c(\lambda))}_{a_\lambda(x)} + \underbrace{(f(\lambda x) - f(x) - c(\lambda))}_{a_\lambda(x)}. \quad (5.4)$$

Definiáljuk a δ_2 differencia-operátort tetszőleges $f : X \rightarrow Y$ függvény esetén

$$\delta_2 f(x) \doteq f(2x) - 2f(x) \quad (x \in X)$$

módon. Az (5.4)-ből rendezéssel kapjuk, hogy $f(\lambda(2x)) - 2f(\lambda x) = f(2x) - 2f(x) - c(\lambda)$, azaz

$$\delta_2 f(\lambda x) = \delta_2 f(x) - c(\lambda) \quad (\lambda, x \in X). \quad (5.5)$$

Hajtsuk végre az (5.5)-ben az $x \leftarrow 1$ helyettesítést, így kapjuk, hogy

$$\delta_2 f(\lambda) = f(2) - f(1) - c(\lambda) \quad (\lambda \in X). \quad (5.6)$$

Az (5.6) egyenletben hajtsuk végre a $\lambda \leftarrow x$, majd szintén az (5.6)-ben a $\lambda \leftarrow \lambda x$ helyettesítést. Így az alábbi egyenleteket kapjuk

$$\begin{aligned} \delta_2 f(x) &= f(2) - f(1) - c(x), \\ \delta_2 f(\lambda x) &= f(2) - f(1) - c(\lambda x), \end{aligned} \quad (x, \lambda \in X) \quad (5.7)$$

az (5.7)-et az (5.5)-be helyettesítve kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} f(2) - f(1) - c(\lambda x) &\stackrel{(5.7)}{=} \delta_2 f(\lambda x) \stackrel{(5.5)}{=} \delta_2 f(x) - c(\lambda) \stackrel{(5.7)}{=} \\ &= f(2) - f(1) - c(x) - c(\lambda) \quad (\lambda, x \in X), \end{aligned}$$

így a c függvény logaritmikus. Az (5.6) alapján kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} f(2) - f(1) - c(\lambda) &\stackrel{(5.6)}{=} \delta_2 f(\lambda) = (f(2\lambda) - f(\lambda)) - f(\lambda) = \\ &= a_2(\lambda) + c(2) - f(\lambda) \quad (\lambda \in X), \end{aligned}$$

amiből rendezéssel kapjuk, hogy

$$f(\lambda) = a_2(\lambda) + c(\lambda) \underbrace{-f(2) + f(1) + c(2)}_d \quad (\lambda \in X), \quad (5.8)$$

azaz teljesül a **2.** állítás, továbbá az **a.**, **c.** állítások is teljesülnek.

Tegyük fel, hogy teljesül a **2.** állítás. Ekkor

$$\Delta_\lambda f(x) = \Delta_\lambda a(x) + l(\lambda) \quad (\lambda, x \in X), \quad (5.9)$$

így elegendő belátni, hogy az $a_\lambda \doteq \Delta_\lambda a$ ($\lambda \in X$) módon definiált függvénycsalád 2-additív. Ez azonban igaz, mivel

$$\begin{aligned} \delta_2 \Delta_\lambda a(x) &= \delta_2(a(\lambda x) - a(x)) = \delta_2 a(\lambda x) - \delta_2 a(x) = \\ &= [a(\lambda(x+x)) - (a(\lambda x) + a(\lambda x))] - [a(x+x) - (a(x) + a(x))] = 0, \end{aligned}$$

így az **1.** állítás is teljesül.

Tegyük fel, hogy **1.**, vagy **2.** teljesül. Mivel már korábban láttuk, hogy az **1.** állítás teljesülése maga után vonja az **a.** és **c.** állítások teljesülését, így elegendő belátni, hogy a **b.** is teljesül. Ez azonban igaz, mivel

$$\begin{aligned} a_\lambda(x) + c(\lambda) &\stackrel{\mathbf{1.}}{=} \Delta_\lambda f(x) \stackrel{(5.8)}{=} \Delta_\lambda(a_2(x) + c(x) + d) = \\ &= \Delta_\lambda a_2(x) + c(\lambda) \quad (\lambda, x \in X). \end{aligned}$$

☐

5.4 Következmény Legyen $(X; +, \cdot)$ egy kétműveletes algebrai struktúra, ahol $+$, $\cdot$ binér algebrai műveletek úgy, hogy a $\cdot$ művelet egységelemes 1 egységelemmel, továbbá a szorzás balról disztributív az összeadásra nézve, azaz

$$\lambda(x+x) = \lambda x + \lambda x \quad (\lambda, x, y \in X).$$

Legyen $(Y; +)$ egy Abel-csoport, $\{a_\lambda : X \rightarrow Y | \lambda \in X\}$ 2-additív függvények családjá úgy, hogy a_2 additív, $c : X \rightarrow Y$ egy függvény. Ekkor ha az $f : X \rightarrow Y$ egy olyan függvény, amelyre $\Delta_\lambda f(x) = a_\lambda(x) + c(\lambda)$ minden $\lambda, x \in X$ esetén, akkor teljesülnek a következő állítások:

1. Az a_λ függvények additívak minden $\lambda \in X$ esetén.

2. Létezik $a : X \rightarrow Y$ additív függvény, $l : X \rightarrow Y$ logaritmikus függvény és $d \in Y$ konstans, melyekkel

$$f(x) = a(x) + l(x) + d \quad (x \in X),$$

továbbá $a = a_2$ és $l = c$.

Bizonyítás. 1. az 5.3. Tétel b. állítása alapján kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} a_\lambda(x + y) &\stackrel{\text{b.}}{=} \Delta_\lambda[a_2(x + y)] = \Delta_\lambda[a_2(x) + a_2(y)] = \\ &= \Delta_\lambda a_2(x) + \Delta_\lambda a_2(y) = a_\lambda(x) + a_\lambda(y) \quad (\lambda, x, y \in X). \end{aligned}$$

2. Nyilvánvaló. $\square$

5.5 Következmény Legyen $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ egy olyan mérhető függvény, amelyhez létezik egy $a : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ additív függvény és egy $c : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ függvény úgy, hogy

$$\Delta_\lambda f(x) = a(x) + c(\lambda) \quad (\lambda, x \in \mathbb{R}_+).$$

Ekkor léteznek $p, q, d \in \mathbb{R}$ konstansok, melyekkel

$$f(x) = qx + p \log(x) + d \quad (x \in \mathbb{R}_+).$$

Bizonyítás. Az 5.4. Következmény alapján létezik $a : X \rightarrow Y$ additív függvény, $l : X \rightarrow Y$ logaritmikus függvény és $d \in Y$ konstans, melyekkel

$$f(x) = a(x) + l(x) + d \quad (x \in X),$$

továbbá $a = a_2$ és $l = c$. Mivel az f függvény mérhető, így az $a(x) = \Delta_2 f(x) - c(2)$ ($x \in \mathbb{R}_+$) függvény mérhető, de ekkor az $l(x) = f(x) - a(x) - d$ ($x \in \mathbb{R}_+$) függvény is mérhető, így a bizonyítás teljes. $\square$

A DLSz tétel egységelemes gyűrűk esetén is érvényes, így ha egy $f : \mathbb{Z}_+ \rightarrow \mathbb{Z}$ függvény olyan, hogy a $\Delta_\lambda f$ függvény egy additív függvény és egy konstans összege, akkor az f függvény egy additív függvény, egy logaritmikus függvény és egy konstans összege.

Az Olkin-Baker egyenlet megoldása

A DLSz tétel alkalmazhatóságát az úgynevezett Olkin-Baker féle függvényegyenlet megoldásával szemléltetjük.

Lukács karakterizálja a gamma-eloszlásokat oly módon, hogy az X és Y független pozitív és folytonos valószínűségi változók pontosan akkor gamma-eloszlásúak, ha az $X + Y$ és $\frac{X}{Y}$ valószínűségi változók függetlenek [69]. **Olkin**

javasolja a gamma-eloszlás karakterizációját függvényegyenletek segítségével [73]. A karakterizációban, ahogy azt a karakterizációs tétel egyértelműen adja [71], az

$$f(x)g(y) = p(x+y)q\left(\frac{x}{y}\right) \quad (x, y \in \mathbb{R}_+),$$

úgynevezett Olkin-Baker függvényegyenlet játsza a kulcsszerepet, ahol $f, g, p, q : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ mérhető függvények, melyek legfeljebb egy nullmértékű halmazon vesznek fel a 0 értéket.

Ezt az egyenletet **Baker** oldotta meg először [06], belátva, hogy ekkor

$$f(x)g(x)p(x)q(x) \neq 0 \quad (x \in \mathbb{R}_+)$$

is teljesül. **Lajkó Károly** megmutatta, hogy a fenti függvényegyenlet egyszerűen megoldható a DLSz-tétel alkalmazásával ([59]). Az alábbi egyszerű számolás mutatja, hogy ezek az eredmények általánosabb körülmények között is érvényesek.

5.6 Tétel *Legyen $\mathbb{T}$ egy rendezett test, Y egy Abel-csoport.*

1. *Az $F, G, P, Q : \mathbb{T}_+ \rightarrow Y$ függvények pontosan akkor megoldásai az*

$$F(x) + G(y) = P(x+y) + Q\left(\frac{x}{y}\right) \quad (x, y \in \mathbb{T}_+) \quad (0.4)$$

függvényegyenletnek, ha

$$\begin{aligned} F(x) &= a(x) + l_1(x) + c_1 \\ G(x) &= a(x) + l_2(x) + c_2 \\ P(x) &= a(x) + l_1(x) + l_2(x) + c_3 \\ Q(x) &= l_1\left(\frac{x}{x+1}\right) - l_2(x+1) + c_4 \end{aligned} \quad (x \in \mathbb{T}_+), \quad (5.10)$$

ahol $a : \mathbb{T}_+ \rightarrow Y$ additív függvény, $l_1, l_2 : \mathbb{T}_+ \rightarrow Y$ logaritmikus függvények, $c_1, c_2, c_3, c_4 \in Y$ olyan konstansok, amelyekre $c_1 + c_2 = c_3 + c_4$.

2. *Az $F, G, P, Q : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ mérhető függvények pontosan akkor megoldásai az*

$$F(x) + G(y) = P(x+y) + Q\left(\frac{x}{y}\right) \quad (x, y \in \mathbb{R}_+) \quad (0.4^*)$$

függvényegyenletnek ha

$$\begin{aligned} F(x) &= qx + p_1 \log(x) + c_1 \\ G(x) &= qx + p_2 \log(x) + c_2 \\ P(x) &= qx + p_1 \log(x) + p_2 \log(x) + c_3 \\ Q(x) &= p_1 \log\left(\frac{x}{x+1}\right) - p_2 \log(x+1) + c_4 \end{aligned}$$

ahol $q, p_1, p_2, c_i \in Y$ ($i = 1, 2, 3, 4$) konstansok úgy, hogy $c_1 + c_2 = c_3 + c_4$.

Bizonyítás.

1. Tegyük fel, hogy az $F, G, P, Q : \mathbb{T}_+ \rightarrow Y$ függvények megoldásai a (0.4) függvényegyenletnek. Ekkor a tetszőleges $\lambda \in \mathbb{T}_+$ esetén a

$$P_\lambda \doteq \Delta_\lambda P, \quad F_\lambda \doteq \Delta_\lambda F, \quad G_\lambda \doteq \Delta_\lambda G$$

módon definiált függvények megoldásai a

$$P_\lambda(x + y) = F_\lambda(x) + G_\lambda(y) \quad (x, y \in \mathbb{T}_+) \quad (5.11)$$

függvényegyenletnek. Ebből 5.2. tétel alapján kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} P_\lambda(x) &= a_\lambda(x) + d_1(\lambda) + d_2(x) \\ F_\lambda(x) &= a_\lambda(x) + d_1(\lambda) \\ G_\lambda(x) &= a_\lambda(x) + d_2(\lambda) \end{aligned} \quad (x, y \in \mathbb{T}_+),$$

ahol tetszőleges $\lambda \in \mathbb{T}_+$ esetén $a_\lambda : \mathbb{T}_+ \rightarrow Y$ additív függvény, $d_1, d_2 : \mathbb{T}_+ \rightarrow Y$ függvények. Így a 5.1. Tétel (DLsz Tétel) alapján kapjuk, hogy az F, G, P függvények valóban az (5.10)-ben megadott alakúak.

A (0.4) függvényegyenletben hajtsuk végre az $y \leftarrow 1$ helyettesítést. Így kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} Q(x) &= F(x) - P(x + 1) + G(1) = \\ &= [a(x) + l_1(x) + c_1] - [a(x + 1) + l_1(x + 1) + l_2(x + 1) + c_3] + [a(1) + c_2], \end{aligned}$$

azaz teljesül az **1.** állítás.

2. állítás a 5.5. Következmény alapján nyilvánvaló. $\square$

6. A (0.3) $(\gamma(\frac{x+1}{y}) + \gamma(\frac{y+1}{x}) = \gamma(\frac{x+1}{x}) + \gamma(\frac{y+1}{y}))$ és a (0.11) $(\gamma(x(y+1)) + \gamma(y(x+1)) = \gamma(x(x+1)) + \gamma(y(y+1)))$ egyenletek megoldása

A (0.3) függvényegyenlet megoldása

A (0.3) függvényegyenletet az Olkin-Baker egyenletre vezetjük vissza. Az eredmény közös munka Lajkó Károllyal és a [44]-ben publikáltuk.

6.1 Tétel (T. Glavosits, K. Lajkó) *Legyen $\mathbb{T}$ egy rendezett test, Y egy additív Abel-csoport, $\gamma : \mathbb{T}_+ \rightarrow Y$ függvény egy megoldása a*

$$\gamma\left(\frac{x+1}{y}\right) + \gamma\left(\frac{y+1}{x}\right) = \gamma\left(\frac{x+1}{x}\right) + \gamma\left(\frac{y+1}{y}\right) \quad (x, y \in \mathbb{T}_+) \quad (0.3)$$

függvényegyenletnek. Ekkor teljesülnek a következők.

1. A $Q, F : \mathbb{T}_+ \rightarrow Y$

$$\begin{aligned} Q(x) &\doteq -\frac{1}{2} \left[\gamma(1+x) + \gamma\left(1 + \frac{1}{x}\right) \right] \\ F(x) &\doteq \frac{1}{2} \left[\gamma(1+x) - \gamma\left(1 + \frac{1}{x}\right) \right] \end{aligned} \quad (x \in \mathbb{T}_+),$$

módon definiált függvények megoldásai az

$$F(x) + F(y) = \gamma(x+y) + Q\left(\frac{x}{y}\right) \quad (x, y \in \mathbb{T}_+)$$

függvényegyenletnek, ami az additív módon írt Olkin-Baker egyenlet speciális esete.

2. *Létezik olyan $l_3 : \mathbb{T}_+ \rightarrow Y$ logaritmikus, $a : \mathbb{T}_+ \rightarrow Y$ additív függvény és $c_3 \in Y$ konstans, melyekkel*

$$\gamma(x) = a(x) + l_3(x) + c_3 \quad (x \in \mathbb{T}_+),$$

továbbá az a additív függvény rendelkezik az alábbi tulajdonsággal.

$$a\left(x + \frac{1}{x}\right) = a(2) \quad (x \in \mathbb{T}_+). \quad (6.1)$$

3. *Ha $a : \mathbb{T}_+ \rightarrow Y$ egy olyan additív függvény, amely rendelkezik a (6.1) tulajdonsággal, akkor a azonosan zérus függvény.*

4. Létezik olyan $l_3 : \mathbb{T}_+ \rightarrow Y$ logaritmusikus függvény és $c_3 \in Y$ konstans, melyekkel

$$\gamma(x) = l_3(x) + c_3 \quad (x \in \mathbb{T}_+). \quad (6.2)$$

A megfordítás triviális módon teljesül.

5. Ha a $\gamma : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ függvény mérhető megoldása a (0.3) függvényegyenletnek tetszőleges $x, y \in \mathbb{R}_+$ esetén, akkor léteznek $q_3, c_3 \in \mathbb{R}$ konstansok, melyekkel

$$\gamma(x) = q_3 \log(x) + c_3 \quad (x \in \mathbb{R}_+).$$

(A megfordítás triviális.)

Bizonyítás.

1. Hajtsuk végre a (0.3) egyenletben az $x \leftarrow \frac{x}{y}$, $y \leftarrow \frac{1}{y}$ helyettesítést. Így kapjuk, hogy

$$\gamma(x+y) + \gamma\left(\frac{y+1}{x}\right) = g\left(1 + \frac{y}{x}\right) + \gamma(1+y) \quad (y \in \mathbb{T}_+). \quad (6.3)$$

Cseréljük meg az x és az y szerepét a (6.3)-ban, majd az így kapott egyenletet adjuk hozzá a (6.3)-hoz. Így kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} 2\gamma(x+y) = \gamma\left(1 + \frac{y}{x}\right) + \gamma\left(1 + \frac{x}{y}\right) + \gamma(1+x) + \gamma(1+y) - \\ - \gamma\left(\frac{x+1}{y}\right) - \gamma\left(\frac{y+1}{y}\right) \quad (x \in \mathbb{T}_+). \end{aligned} \quad (6.4)$$

Definiáljuk a $Q, F : \mathbb{T}_+ \rightarrow Y$ függvényeket az 1. állításban látott módon. Ekkor (6.4) alapján kapjuk, hogy teljesül az 1. állítás.

2. Az állítás az 5.6. Tétel (additív Olkin-Baker egyenlet általános megoldását tartalmazó tétel) közvetlen következménye. Egyszerűen adódik, hogy ekkor (6.1) is teljesül.

3. A (6.1) egyenletben végezzük el az $x \leftarrow 2x$ helyettesítést. Így kapjuk, hogy

$$a\left(2x + \frac{1}{2x}\right) = a(2) \quad (x \in \mathbb{T}_+). \quad (6.5)$$

Adjuk hozzá a (6.5) egyenletet saját magához, így kapjuk, hogy

$$a\left(4x + \frac{1}{x}\right) = a(4) \quad (x \in \mathbb{T}_+). \quad (6.6)$$

Vonjuk ki a (6.6) egyenletből a (6.1) egyenletet, így kapjuk, hogy tetszőleges $x \in \mathbb{T}_+$ esetén $a(3x) = a(2)$, amiből $x \leftarrow \frac{x}{3}$ helyettesítéssel kapjuk, hogy $a(x) = a(2)$. Ekkor azonban

$$a(2) = a(x) = a\left(\frac{x}{2}\right) + a\left(\frac{x}{2}\right) = a(2) + a(2) \quad (x \in \mathbb{T}_+),$$

így $a(2) = 0$, amiből kapjuk, hogy az $a(x) = a(2) = 0$ tetszőleges $x \in \mathbb{T}_+$ esetén.

4. a 3. és a 2. közvetlen következménye.

Az **5.** állítás abból következik, hogy a γ függvény mérhetősége maga után vonja a

$$\lambda \mapsto \Delta_\lambda \gamma(x) \doteq \gamma(\lambda x) - \gamma(x) \quad (\gamma \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R} \text{ rögzített})$$

módon definiált függvény mérhetőségét. $\boxtimes$

A (0.11) függvényegyenlet megoldása

A (0.11) egyenlet megoldása először a [43]-ben szerepel. Pexider változata megtalálható [45]-ben, ami közös munka Lajkó Károllyal. A (0.11) függvényegyenletet az (0.13) egyenletre vezetjük vissza.

6.2 Tétel *Legyen $\mathbb{T}$ egy rendezett test, Y egy Abel-csoport, $\gamma : \mathbb{T}_+ \rightarrow Y$ egy függvény. Ekkor az alábbi állítások ekvivalensek.*

1. *A γ függvény megoldása a*

$$\begin{aligned} \gamma(x(y+1)) + \gamma(y(x+1)) &= \\ &= \gamma(x(x+1)) + \gamma(y(y+1)) \quad (x, y \in \mathbb{T}_+) \end{aligned} \quad (0.11)$$

függvényegyenletnek.

2. *A γ függvény megoldása a (0.12) egyenletnek, azaz*

$$\gamma\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) + \gamma(x+y) = \gamma\left(\frac{x}{y} \left(\frac{x}{y} + 1\right)\right) + \gamma\left(\frac{y}{x} \left(\frac{y}{x} + 1\right)\right) \quad (x, y \in \mathbb{T}_+).$$

3. *A γ függvény megoldása a (0.13) egyenletnek, azaz*

$$\begin{aligned} \gamma(x+y) + \gamma\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) &= \\ &= \gamma\left((x+y) \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)\right) + \gamma(1) \quad (x, y \in \mathbb{T}_+). \end{aligned} \quad (0.13)$$

4. *Létezik $l_3 : \mathbb{T}_+ \rightarrow Y$ logaritmikus függvény, $c_3 \in Y$ konstans, melyekkel*

$$\gamma(x) = l_3(x) + c_3 \quad (x \in \mathbb{T}_+). \quad (6.7)$$

Bizonyítás.

1. $\Rightarrow$ 2. Tegyük fel, hogy a γ függvény megoldása a (0.11) egyenletnek. A (0.11) egyenletben hajtsuk végre az $y \leftarrow \frac{1}{y}$ helyettesítést, majd az így kapott egyenletet adjuk hozzá az (0.11) egyenlethez. Ekkor rendezés után kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} & \gamma\left(x\left(\frac{1}{y}+1\right)\right) + \gamma\left(y\left(\frac{1}{x}+1\right)\right) + \gamma\left(\frac{x+1}{y}\right) + \gamma\left(\frac{y+1}{x}\right) - \\ & - \gamma(x(x+1)) - \gamma(y(y+1)) - \gamma\left(\frac{1}{y}\left(\frac{1}{y}+1\right)\right) - \gamma\left(\frac{1}{x}\left(\frac{1}{x}+1\right)\right) = 0 \\ & (x, y \in \mathbb{T}_+). \end{aligned} \quad (6.8)$$

A (0.11) egyenletben végezzük el az $x \leftarrow \frac{x}{y}$, $y \leftarrow \frac{1}{y}$ helyettesítést, majd az így kapott egyenletet adjuk hozzá a (0.11) egyenlethez. Így rendezés után kapjuk hogy

$$\begin{aligned} & 2\gamma\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) + 2\gamma(x+y) - 2\gamma\left(\frac{x}{y}\left(\frac{x}{y}+1\right)\right) - 2\gamma\left(\frac{y}{x}\left(\frac{y}{x}+1\right)\right) = \\ & = \gamma\left(x\left(\frac{1}{y}+1\right)\right) + \gamma\left(y\left(\frac{1}{x}+1\right)\right) + \gamma\left(\frac{y+1}{x}\right) + \gamma\left(\frac{x+1}{y}\right) - \\ & - \gamma\left(\frac{1}{y}\left(\frac{1}{y}+1\right)\right) - \gamma\left(\frac{1}{x}\left(\frac{1}{x}+1\right)\right) - \gamma(y(y+1)) - \gamma(x(x+1)) \\ & (x, y \in \mathbb{T}_+). \end{aligned} \quad (6.9)$$

A (6.8) és a (6.9) egyenletek alapján kapjuk, hogy a γ függvény megoldása a (0.12) egyenletnek.

2. $\Rightarrow$ 3. Tegyük fel, hogy a γ függvény megoldása a (0.12) egyenletnek. A (0.12) egyenletben végezzük el az $y \leftarrow \frac{y}{x+y}$ helyettesítést. Így kapjuk, hogy γ függvény megoldása a (0.13) függvényegyenletnek.

3. $\Rightarrow$ 4. Tegyük fel, hogy a γ függvény megoldása a (0.13) egyenletnek. A (0.13) egyenletben hajtsuk végre az $x \leftarrow \frac{x}{2}$, $y \leftarrow \frac{x}{2}$ helyettesítést. Így kapjuk, hogy

$$\gamma(x) + \gamma\left(\frac{4}{x}\right) = \gamma(4) + \gamma(1) \quad (x \in \mathbb{T}_+). \quad (6.10)$$

A (6.10) egyenletben hajtsuk végre az $x \leftarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ helyettesítést. Ekkor rendezés után kapjuk, hogy

$$\gamma\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) + \gamma\left(\frac{4xy}{x+y}\right) = \gamma(4) + \gamma(1) \quad (x \in \mathbb{T}_+). \quad (6.11)$$

A (6.11) egyenletet összevetve a (0.13) egyenlettel kapjuk, hogy

$$\gamma(x+y) - \gamma\left(\frac{4xy}{x+y}\right) + \gamma(4) = \gamma\left(\frac{(x+y)^2}{xy}\right) \quad (x, y \in \mathbb{T}_+). \quad (6.12)$$

A (6.12) egyenletből kapjuk, hogy a $\gamma_\lambda \doteq \Delta_\lambda \gamma$ ($\lambda \in \mathbb{T}_+$) módon definiált γ_λ függvény megoldása a (0.14) függvényegyenletnek, azaz

$$\gamma_\lambda(x+y) = \gamma_\lambda\left(\frac{4xy}{x+y}\right) \quad (x, y \in \mathbb{T}_+). \quad (0.14)$$

A (0.14) egyenletben hajtsuk végre az $x \leftarrow x(x+y)$, $y \leftarrow y(x+y)$ helyettesítést. Így kapjuk, hogy

$$\gamma_\lambda((x+y)^2) = \gamma_\lambda(4xy) \quad (x, y \in \mathbb{T}_+). \quad (6.13)$$

A (6.13) egyenletben hajtsuk végre az $x \leftarrow \frac{x}{2}$, $y \leftarrow \frac{y}{2}$ helyettesítést. Így kapjuk, hogy

$$\gamma_\lambda\left(\left(\frac{x+y}{2}\right)^2\right) = \gamma_\lambda(xy) \quad (x, y \in \mathbb{T}_+). \quad (6.14)$$

A (6.14) valós-valós környezetben éppen a **Daróczy Zoltán** professzor által kitűzött **B. 4456.** számú versenyfeladat. A feladat megoldása során alkalmazott módszer most nem alkalmazható, mivel a négyzetgyök vonás kivezet $\mathbb{T}_+$ -ból. Defináljuk az $f, g : \mathbb{T}_+ \rightarrow Y$ függvényeket

$$f(x) \doteq \gamma_\lambda\left(\left(\frac{x}{2}\right)^2\right), \quad g(x) \doteq \gamma_\lambda(x) \quad (x \in \mathbb{T}_+)$$

módon. Az f és g függvények megoldásai a

$$f(x+y) = g(xy) \quad (x, y \in \mathbb{T}_+) \quad (0.15)$$

függvényegyenletnek, amiből a 4.6. Tétel alapján kapjuk, hogy a g függvény - és így a γ_λ függvény konstans $\mathbb{T}_+$ -on. Ekkor $\gamma_\lambda(x) = \gamma_\lambda(1)$, azaz

$$\gamma(\lambda x) = \gamma(x) + \gamma(\lambda) - \gamma(1).$$

Ebből kapjuk, hogy a γ függvény valóban (6.7) alakú,

$$l_3(x) \doteq \gamma(x) - \gamma(1) \quad (x \in \mathbb{T}_+)$$

logaritmikus függvénnyel.

4. $\Rightarrow$ 1. implikáció triviális módon teljesül. $\boxtimes$

6.3 Következmény Ha a $\gamma : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ mérhető megoldása a

$$\gamma(x(y+1)) + \gamma(y(x+1)) = \gamma(x(x+1)) + \gamma(y(y+1)) \quad (x, y \in \mathbb{R}_+) \quad (0.11)$$

függvényegyenletnek, akkor léteznek $q_3, c_3 \in \mathbb{R}$ konstansok, melyekkel

$$\gamma(x) = q_3 \log(x) + c_3 \quad (x \in \mathbb{R}_+).$$

(A megfordítás triviális.)

7. Kiterjesztési tételek

Bevezetés

A fejezet két fő részből áll. Az első részben megadjuk egy korlátozott Pexider-additív függvényegyenlet általános megoldását abban az esetben, amikor az additivitás az $\mathbb{T}_+^2$ egy részkúpján teljesül. A disszertációban szereplő egyenletek megoldásához csak ezt az eredményt alkalmazzuk, nevezetesen a 7.7. Tételt, így minden más, ebben a fejezetben szereplő eredmény csak kitekintés jellegű. Szintén a fejezet első részében megadjuk a korlátozott Pexider-additív függvényegyenlet általános megoldását abban az esetben, amikor az additivitás a G^2 egy nyílt részhalmazán teljesül, ahol $G = G(+; \leq)$ egy archimedeszien rendezett, egyértelműen p -osztható Abel-csoport, a G -n illetve a G^2 -en értelmezett topológia közvetlenül a rendezésből van származtatva.

A bizonyítás során alkalmazott gondolatmenet analóg a **M. Kuczma** könyvében látottakkal [57], azonban vannak lényeges különbségek. Kuczma a könyvében egyaránt foglalkozik Pexider-additív, illetve korlátozott additív függvényegyenletekkel, azonban korlátozott Pexider-additív függvényegyenletekkel nem foglalkozik. A másik különbség az, hogy Kuczma $\mathbb{R}^N$ bizonyos részhalmazait $\mathbb{R}$ -be képező függvényeket vizsgál általánosabb struktúrákon értelmezett függvények vizsgálatának igénye nélkül. Végül Kuczma az additív függvények kiterjesztését Jensen-függvények kiterjesztésére vezeti vissza. Az általunk alkalmazott módszerrel egy additív függvényt egy intervallumról az egész struktúrára terjesztjük ki Jensen-függvény bevezetése nélkül.

Kuczma [57] (355. oldal a 13.3 Pexider equations) foglalkozik Pexider-additív függvényegyenletekkel, (372. oldal Theorem 13.6.1) megadja a korlátozott additív függvényegyenlet megoldását abban az esetben, amikor az $f : D \subset \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ ismeretlen függvény kielégíti az $f(x + y) = f(x) + f(y)$ függvényegyenletet minden $(x, y) \in G$ esetén, ahol G az $(\mathbb{R}^N)^2$ egy összefüggő nyílt halmaza, $D = D_1 \cup D_2 \cup D_3$, ahol a D_i halmazok

$$\begin{aligned} D_1 &\doteq \{x \in \mathbb{R}^N | \exists y \in \mathbb{R}^N : (x, y) \in G\}, \\ D_2 &\doteq \{y \in \mathbb{R}^N | \exists x \in \mathbb{R}^N : (x, y) \in G\}, \\ D_3 &\doteq \{z \in \mathbb{R}^N | \exists (x, y) \in G : z = x + y\} \end{aligned}$$

módon vannak definiálva.

Ha $G = G(+)$ egyértelműen p -osztható rendezett Abel-csoport, akkor sűrű. Ennek a fejezet második részében megmutatjuk, hogy az első rész fő tételei, nevezetesen a 7.2. Tétel (1. Kiterjesztési tétel), az 7.4. Tétel (Unicitás tétel) és a 7.5. Tétel (2. Kiterjesztési tétel) érvényesek maradnak, ha bennük egyértelműen p -osztható csoportok helyett sűrű csoportokat használunk. A kapott tételek **Rimán János** kiterjesztési tétele [74] (1976) általánosításának is tekinthetők.

A kiterjesztési tételek története megtalálható **Graham** és **Butler** szerkesztésében megjelent The Mathematics of Paul Erdős című könyv IV. részében (Geometry) az **Aczél János** és **Losonczi László** által írt: Extension of functional Equations c. fejezetben [49]. A kiterjesztési tételek vizsgálatát **Erdős Pál** kezdeményezte. Kezdetben a kutatások célja az volt, hogy egy f valós számok részhalmazán értelmezett valós értékű függvényhez, melyre $f(x+y) = f(x) + f(y)$ teljesül minden $(x, y) \in D \subset \mathbb{R}^2$ esetén a D halmaz bizonyos tipikus megválasztása mellett, létezik-e olyan F $\mathbb{R}$ -en értelmezett additív függvény, amely a f kiterjesztése, azaz $f(x) = F(x)$ minden $x \in \mathcal{D}_f$ esetén. **Aczél János** és **Erdős Pál** 1965-ben megjelent [04] cikkükben a kiterjesztést a $D = (D_+ \cup \{0\})^2$ halmazról végzik el.

Aczél János 1966-ban megjelent [01] könyvében szerepel először a kvázikiterjesztés fogalma. Egy a additív függvényt egy f függvény kvázikiterjesztésének nevezünk egy I intervallumon, ha $I \subset \mathcal{D}_f$ és f a -tól csak egy konstans tagban különbözik I -n.

Daróczy Zoltán és **Losonczi László** 1967-ben megjelent [25] cikkükben a kiterjesztést a $D = \mathbb{R}_+^2$ halmazról, illetve az origó egy nyílt környezetéről végzik. Ebben a cikkben jelennek meg először a D_x , D_y , D_{x+y} jelölések.

Székelyhidi László 1972-ben megjelent [83] cikkében általánosítja Daróczy Zoltán és Losonczi László fenti eredményét abban az esetben, amikor $D \subset \mathbb{R}^2$ egy tetszőleges nyílt halmaz, $D_0 = D_x \cup D_y \cup D_{x+y}$, $f : D_0 \rightarrow \mathbb{R}$ egy olyan függvény, amelyre $f(x+y) = f(x) + f(y)$ minden $(x, y) \in D$ esetén.

Rimán János 1976-ban írt [74] cikkében szerepel először az additív Pexider-egyenlet vizsgálata, ahol az additivitás egy $D \subset \mathbb{R}^2$ nyílt halmazon teljesül.

Végül érdemes megjegyezni, hogy minden archimedeszien rendezett test - mint additív csoport egyértelműen p osztható tetszőleges p prímszám esetén. Minden egyértelműen p -osztható csoport egyúttal sűrű is, azonban léteznek olyan sűrű csoportok, amelyek egy p prím esetén sem egyértelműen p -oszthatóak.

A $C_{\xi, \eta}$ kúpról

Legyen $\mathbb{T}$ egy rendezett test, $\xi, \eta \in \mathbb{T} \cup \{+\infty\}$ úgy, hogy $0 \leq \xi < \eta \leq +\infty$. Defináljuk a $C_{\xi, \eta} \subset \mathbb{T}_+^2$ kúpot az alábbi módon.

$$C_{\xi, \eta} \doteq \begin{cases} \{(x, y) \in \mathbb{T}_+^2 \mid \xi x < y < \eta x\}, & \text{ha } \xi \in \mathbb{T}_+ \cup \{0\}, \eta \in \mathbb{T}_+; \\ \{(x, y) \in \mathbb{T}_+^2 \mid \xi x < y\}, & \text{ha } \eta = +\infty. \end{cases}$$

A $\mathbb{T}^2$ halmaz egy kétdimenziós vektor tér a $\mathbb{T}$ test felett a vektorműveletek szokásos - kordinátánkénti - értelmezése mellett. Azt mondjuk, hogy a nemüres $C \subset \mathbb{T}^2$ halmaz

- konvex, ha $\lambda x + (1 - \lambda)y \in C$ minden $x, y \in C$ és $\lambda \in]0, 1[$ esetén.

- kúp, ha $\lambda x \in C$ minden $\lambda \in \mathbb{T}_+$ és $x \in C$ esetén.
- konvex kúp, ha $\lambda x + \mu y \in C$ minden $x, y \in C$ és $\lambda, \mu \geq 0$ esetén, melyekre $\lambda^2 + \mu^2 > 0$.

Ha G egy rendezett csoport, akkor (a, b) a $G \times G = G^2$ szorzathalmaz egy elemét, míg $]a, b[\doteq \{x \in G \mid a < x < b\}$ a G csoport a kezdőpontú és b végpontú nyílt intervallumát fogja jelenteni. Szintén fogjuk használni a

$$\mathcal{S}(x, y, \varepsilon) \doteq]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\times]y - \varepsilon, y + \varepsilon[\subset \mathbb{T}^2$$

jelölést négyzetek számára, ahol $x, y \in \mathbb{T}$, $\varepsilon \in \mathbb{T}_+$.

A következő lemmában összegyűjtjük a $C_{\xi, \eta}$ néhány tulajdonságát.

7.1 Lemma *Legyen $\mathbb{T}$ egy rendezett test, $\xi \in \mathbb{T}_+ \cup \{0\}$, $\eta \in \mathbb{T}_+ \cup \{+\infty\}$ úgy, hogy $0 \leq \xi < \eta \leq +\infty$. Ekkor teljesülnek a következők.*

1. $C_{\xi, \eta}$ egy konvex-kúp, így konvex is és kúp is.
2. Minden $(x, y) \in C_{\xi, \eta}$ esetén létezik $\varepsilon \in \mathbb{T}_+$ úgy, hogy $\mathcal{S}(x, y, \varepsilon) \subset C_{\xi, \eta}$.
3. Minden $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ esetén létezik négyzetek olyan $S_0, \dots, S_n$ sorozata, melyekre
 - a. $S_0 = \mathcal{S}(x_1, y_1, \varepsilon)$, $S_n = \mathcal{S}(x_2, y_2, \varepsilon)$,
 - b. $S_k \subset C_{\xi, \eta}$ minden $k = 1, \dots, n$ esetén,
 - c. $S_k \cap S_{k+1} \neq \emptyset$ minden $k = 1, \dots, n-1$ esetén.

Bizonyítás. A bizonyítást csak abban az esetben végezzük el, amikor $\xi, \eta \in \mathbb{T}_+$. A többi esetben az állítások analóg módon igazolhatóak.

1. Legyenek $(x, y), (u, v) \in C_{\xi, \eta}$, $\lambda, \mu \geq 0$ úgy, hogy $\lambda^2 + \mu^2 > 0$. Az általánosság csorbítása nélkül feltehetjük, hogy $\lambda > 0$. Ekkor kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} (x, y) \in C_{\xi, \eta} &\implies \xi x < y < \eta x &\implies \lambda \xi x < \lambda y < \lambda \eta x, \\ (u, v) \in C_{\xi, \eta} &\implies \xi u < v < \eta u &\implies \mu \xi u < \mu v < \mu \eta u. \end{aligned}$$

Adjuk össze a fenti két egyenletet, így kapjuk, hogy

$$\xi(\lambda x + \mu u) < \lambda y + \mu v < \eta(\lambda x + \mu u),$$

azaz $\lambda(x, y) + \mu(u, v) \in C_{\xi, \eta}$.

2. Az **1.** alapján elegendő belátni, hogy létezik $\varepsilon \in \mathbb{T}_+$ úgy, hogy

$$\begin{aligned} (x - \varepsilon, y - \varepsilon) &\in C_{\xi, \eta}, & (x + \varepsilon, y - \varepsilon) &\in C_{\xi, \eta}, \\ (x + \varepsilon, y + \varepsilon) &\in C_{\xi, \eta}, & (x - \varepsilon, y + \varepsilon) &\in C_{\xi, \eta}, \end{aligned}$$

azaz

$$\begin{aligned}\xi(x - \varepsilon) < y - \varepsilon < \eta(x - \varepsilon), & \quad \xi(x + \varepsilon) < y - \varepsilon < \eta(x + \varepsilon), \\ \xi(x + \varepsilon) < y + \varepsilon < \eta(x + \varepsilon), & \quad \xi(x - \varepsilon) < y + \varepsilon < \eta(x - \varepsilon).\end{aligned}$$

A fenti egyenlőtlenségek teljesüléséhez elegendő megválasztani a $\varepsilon > 0$ elemet úgy, hogy az $\xi(x + \varepsilon) < y - \varepsilon$ és $y + \varepsilon < \eta(x - \varepsilon)$ egyenlőtlenségek teljesüljenek, ami ekvivalens az alábbi egyenlőtlenséggel

$$\varepsilon < \min \left(\frac{y - \xi x}{\xi + 1}, \frac{\eta x - y}{\eta + 1} \right).$$

3. Legyenek $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in C_{\xi, \eta}$. Ekkor a **2.** alapján léteznek olyan $\varepsilon \in \mathbb{T}_+$, amellyel $S(x_1, y_1, \varepsilon), S(x_2, y_2, \varepsilon) \subset C_{\xi, \eta}$. Az általánosság csorbitása nélkül feltehetjük, hogy $x_1 < x_2$. Defináljuk az S_k négyzeteket

$$S_k \doteq S \left(\frac{n-k}{n}x_1 + \frac{k}{n}x_2, \frac{n-k}{n}y_1 + \frac{k}{n}y_2, \varepsilon \right) \quad (k = 0, \dots, n),$$

ahol $n \in \mathbb{Z}_+$ rögzített, de egyelőre még tetszőleges konstans. Ekkor az **a.** és **b.** teljesülnek. Az $n \in \mathbb{Z}_+$ értékét úgy kell megválasztanunk, hogy a **c.** is teljesüljön. Ehhez elegendő, ha

$$\begin{aligned} & \left] \frac{n-k}{n}x_1 + \frac{k}{n}x_2 - \varepsilon, \frac{n-k}{n}x_1 + \frac{k}{n}x_2 + \varepsilon \right[\cap \\ & \cap \left] \frac{n-(k+1)}{n}x_1 + \frac{k+1}{n}x_2 - \varepsilon, \frac{n-(k+1)}{n}x_1 + \frac{k+1}{n}x_2 + \varepsilon \right[\neq \emptyset, \end{aligned}$$

ehhez pedig elegendő, ha az

$$\frac{n-(k+1)}{n}x_1 + \frac{k+1}{n}x_2 - \varepsilon < \frac{n-k}{n}x_1 + \frac{k}{n}x_2 + \varepsilon,$$

egyenlőtlenség teljesül, amihez elegendő a

$$\frac{x_2 - x_1}{n} < 2\varepsilon, \quad (7.1)$$

teljesülése. A $\mathbb{T}$ test archimedeszi rendezettsége miatt az $n \in \mathbb{Z}_+$ mindig megválasztható úgy, hogy (7.1) teljesüljön. $\square$

Kiterjesztési tételek egyértelműen p -osztható csoportokon

Egy rendezett $G = G(+, \leq)$ csoportot archimédeszien rendezettnek nevezünk, ha minden $x, y \in G_+ \doteq \{g \in G \mid 0 < g\}$ elemekhez létezik $n \in \mathbb{Z}_+$ úgy, hogy

$$y < nx \doteq \underbrace{x + \dots + x}_{n\text{-tagú összeg}}.$$

Legyen $G = G(+)$ egy csoport, $p \in \mathbb{Z}_+$ egy prím. A G csoportot egyértelműen egyértelműen p -oszthatónak nevezzük, ha minden $x \in G$ esetén egyértelműen létezik $y \in G$ úgy, hogy $x = ny$. Az egyértelműen létező y elemet $\frac{x}{p}$ módon fogjuk jelölni.

1. Kiterjesztési Tétel p -osztható csoportokon

7.2 Tétel Legyen $G = G(+)$ egy archimedeszien rendezett egyértelműen p -osztható Abel-csoport, $Y = Y(+)$ egy Abel-csoport, $\varepsilon \in G_+$. Ha $f :] - 2\varepsilon, 2\varepsilon[\rightarrow Y$ olyan, hogy

$$f(x + y) = f(x) + f(y) \quad (x, y \in] - \varepsilon, \varepsilon[). \quad (7.2)$$

Ekkor teljesülnek a következők.

1. Létezik $f_1 :] - 2p\varepsilon, 2p\varepsilon[\rightarrow Y$ függvény úgy, hogy
 - a. $f_1(x + y) = f_1(x) + f_1(y)$ minden $x, y \in] - p\varepsilon, p\varepsilon[$ esetén,
 - b. $f_1(x) = f(x)$ minden $x, y \in] - 2\varepsilon, 2\varepsilon[$ esetén.
2. Létezik $a : G \rightarrow Y$ additív függvény úgy, hogy $f(x) = a(x)$ minden $x \in] - 2\varepsilon, 2\varepsilon[$ esetén.

Bizonyítás.

1. Legyen f olyan, mint a tételben. Ekkor $f(px) = pf(x)$ $\left(x \in \left]-\frac{\varepsilon}{p}, \frac{\varepsilon}{p}\right]\right)$, amiből kapjuk, hogy

$$f(x) = pf\left(\frac{x}{p}\right) \quad (x \in] - \varepsilon, \varepsilon[). \quad (7.3)$$

Definiáljuk az $f_1 :] - 2p\varepsilon, 2p\varepsilon[\rightarrow Y$ függvényt

$$f_1(x) \doteq pf\left(\frac{x}{p}\right) \quad (x \in] - 2p\varepsilon, 2p\varepsilon[) \quad (7.4)$$

módon. Ekkor (7.3) alapján kapjuk, hogy

$$f_1(x) = f(x) \quad (x \in] - \varepsilon, \varepsilon[), \quad (7.5)$$

illetve

$$\begin{aligned} f_1(x + y) &= pf\left(\frac{x + y}{p}\right) = p\left(f\left(\frac{x}{p}\right) + f\left(\frac{y}{p}\right)\right) = \\ &= pf\left(\frac{x}{p}\right) + pf\left(\frac{y}{p}\right) = f_1(x) + f_1(y) \quad (x, y \in] - p\varepsilon, p\varepsilon[), \end{aligned} \quad (7.6)$$

azaz az **a.** állítást bebizonyítottuk.

Legyen $z \in] - 2\varepsilon, 2\varepsilon[$. Ekkor léteznek $u, v \in] - \varepsilon, \varepsilon[$ úgy, hogy $z = u + v$. Ha $z \in] - \varepsilon, \varepsilon[$, akkor az $u = z, v = 0$ választás megfelelő. Ha $z \in [\varepsilon, 2\varepsilon[$, akkor a G archimedeszi rendezettsége alapján kapjuk, hogy létezik $k \in \mathbb{Z}_+$ úgy, hogy $\frac{\varepsilon}{p^k} < 2\varepsilon - z$. Ekkor

$$z = z - \varepsilon + \varepsilon = \left(z - \varepsilon + \frac{\varepsilon}{p^k} \right) + \left(\varepsilon - \frac{\varepsilon}{p^k} \right) \doteq u + v,$$

ahol $u, v \in] - \varepsilon, \varepsilon[$. A $z \in] - 2\varepsilon, \varepsilon[$ eset az előző esettel analóg.

A (7.6), (7.5) és (7.2) alapján kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} f_1(z) = f_1(u + v) &\stackrel{(7.6); p \geq 2}{=} f_1(u) + f_1(v) \stackrel{(7.5)}{=} f(u) = f(v) = \\ &\stackrel{(7.2)}{=} f(u + v) = f(z), \end{aligned}$$

így a **b.** állítást is bebizonyítottuk.

2. Az **1.** állítás felhasználásával k szerinti teljes indukcióval kapjuk, hogy minden $k \in \mathbb{Z}_+$ esetén létezik egy $f_k : I_k \doteq] - 2p^k\varepsilon, 2p^k\varepsilon[\rightarrow Y$ függvény úgy, hogy

a. $f_k(x + y) = f_k(x) + f_k(y)$ minden $(x, y \in] - p^k\varepsilon, p^k\varepsilon[)$ esetén.

b. $f_k(x) = f_{k-1}(x)$ minden $x \in I_{k-1}$ esetén,

($f_0 \doteq f$), ami teljessé teszi a bizonyítást. $\square$

Legyen X egy nemüres halmaz, $D \subset X^2$. Ekkor legyenek

$$\begin{aligned} D_x &\doteq \{u \in X \mid \exists v \in X : (u, v) \in D\}, \\ D_x &\doteq \{v \in X \mid \exists u \in X : (u, v) \in D\}, \\ D_{x+y} &\doteq \{z \in X \mid \exists (u, v) \in X : z = u + v\}. \end{aligned}$$

7.3 Tétel Legyen $G = G(+)$ egy rendezett Abel-csoport, $Y = Y(+)$ egy Abel-csoportok, $x_0, y_0 \in G$, $\varepsilon \in G_+$, továbbá legyen

$$D \doteq]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[\times]y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon[\quad \text{és} \quad \tilde{D} \doteq] - \varepsilon, \varepsilon[\times] - \varepsilon, \varepsilon[.$$

Ha az $f : D_{x+y} \rightarrow Y$, $g : D_x \rightarrow Y$, $h : D_y \rightarrow Y$ függvények megoldásai a

$$f(x + y) = g(x) + h(y) \quad (x, y \in D) \tag{7.7}$$

Pexider-egyenletnek, akkor létezik $\tilde{f} : \tilde{D}_{x+y} \rightarrow Y$ függvény úgy, hogy

$$\tilde{f}(x + y) = \tilde{f}(x) + \tilde{f}(y) \quad (x, y \in \tilde{D}), \tag{7.8}$$

továbbá

$$\begin{aligned} f(z) &= \tilde{f}(z - (x_0 + y_0)) + g(x_0) + h(y_0) & (z \in D_{x+y}), \\ g(u) &= \tilde{f}(u - x_0) + g(x_0) & (u \in]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[), \\ h(v) &= \tilde{f}(v - y_0) + h(y_0) & (v \in]y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon[). \end{aligned} \quad (7.9)$$

Bizonyítás. Defináljuk az $\tilde{f} : D_{x+y} \rightarrow Y$; $\tilde{g}, \tilde{h} :]-\varepsilon, \varepsilon[\rightarrow Y$ függvényeket

$$\begin{aligned} \tilde{f}(x) &\doteq f(x_0 + y_0 + x) - (g(x_0) + h(y_0)) & (x \in D_{x+y}), \\ \tilde{g}(x) &\doteq g(x_0 + x) - g(x_0) & (x \in]-\varepsilon, \varepsilon[), \\ \tilde{h}(x) &\doteq h(y_0 + x) - h(y_0) & (x \in]-\varepsilon, \varepsilon[) \end{aligned}$$

módon. Ekkor egyrészt

$$f(x_0 + y_0) = g(x_0) + h(y_0),$$

így kapjuk, hogy

$$\tilde{f}(x + y) = \tilde{g}(x) + \tilde{h}(y) \quad (x, y \in]-\varepsilon, \varepsilon[).$$

Másrészt

$$\tilde{f}(x) = \tilde{f}(x + 0) = \tilde{g}(x) + \tilde{h}(0) = \tilde{g}(0) + \tilde{h}(x) \quad (x \in]-\varepsilon, \varepsilon[),$$

amiből $\tilde{g}(0) = \tilde{h}(0) = 0$ miatt kapjuk az állítást. $\square$

Unicitás Tétel p -osztható csoportokon

7.4 Tétel Legyen $G = G(+)$ egy archimedeszien rendezett Abel-csoport, amely egyértelműen p osztható valamely p pozitív egész prím esetén, $Y = Y(+)$ egy Abel-csoport. Legyenek $x_0 \in G$, $\varepsilon \in G_+$, $c, c_1, c_2 \in Y$ konstansok, $a, a_1, a_2 : G \rightarrow Y$ additív függvények. Ekkor teljesülnek a következők.

1. Ha $a(x) = c$ minden $x \in]-\varepsilon, \varepsilon[$ esetén, akkor $c = 0$ és $a(x) = 0$ minden $x \in G$ esetén.
2. Ha $a(x) = c$ minden $x \in]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[$ esetén, akkor $c = 0$ és $a(x) = 0$ minden $x \in G$ esetén.
3. Ha az $f :]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[$ függvény olyan, hogy

$$\begin{aligned} f(x) &= a_1(x) + c_1 \\ f(x) &= a_2(x) + c_2 \end{aligned} \quad (x \in]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[),$$

akkor $a_1 = a_2$ és $c_1 = c_2$.

Bizonyítás.

1. Létezik $u, v \in]-\varepsilon, \varepsilon[$ úgy, hogy $u + v \in]-\varepsilon, \varepsilon[$. Legyen például $u \doteq \frac{\varepsilon}{p}$, $v \doteq \frac{\varepsilon}{p^2}$. Ekkor

$$0 < u + v = \frac{p\varepsilon + \varepsilon}{p^2} = \frac{(p+1)\varepsilon}{p^2} < \frac{2p\varepsilon}{p^2} \leq \frac{p^2\varepsilon}{p^2} = \varepsilon.$$

Így kapjuk, hogy $c = a(u + v) = a(u) + a(v) = c + c$, amiből kapjuk, hogy $c = 0$ és így $a(x) = 0$ minden $x \in]-\varepsilon, \varepsilon[$ esetén.

Legyen $x \in G$ tetszőleges. Ekkor a G csoport archimedeszi rendezettség alapján kapjuk, hogy létezik $k \in \mathbb{Z}_+$ úgy, hogy $\frac{x}{p^k} \in]\varepsilon, \varepsilon[$. Ekkor

$$a(x) = p^k a\left(\frac{x}{p^k}\right) = p^k 0 = 0,$$

amiből kapjuk, hogy $a(x) = 0$ minden $x \in G$ esetén.

2. Legyen $z \in]-\varepsilon, \varepsilon[$ tetszőleges.

$$a(z) = a(x_0 + z) - a(x_0) = c - a(x_0).$$

Ebből **1.** alapján kapjuk, hogy $c - a(x_0) = 0$, $a(x) = 0$ minden $x \in G$ esetén, de ekkor $c = 0$.

3. A **2.** közvetlen következménye. $\square$

2. Kiterjesztési tétel p -osztható csoportokon.

7.5 Tétel Legyen $G = G(+)$ egy archimedeszien rendezett Abel-csoport, amely egyértelműen p osztható valamely p pozitív egész prím esetén, $Y = Y(+)$ egy Abel-csoport. Legyenek $x_0, y_0 \in G$, $x_0, y_0 \in G$, $\varepsilon \in G_+$

$$f :]x_0 + y_0 - 2\varepsilon, x_0 + y_0 + 2\varepsilon[\rightarrow Y,$$

$$g :]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[\rightarrow Y,$$

$$h :]y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon[\rightarrow Y$$

függvények úgy, hogy

$$f(x + y) = g(x) + h(y) \quad (x, y \in S(x_0, y_0, \varepsilon)). \quad (7.10)$$

Ekkor egyértelműen létezik egy $a : G \rightarrow Y$ additív függvény és $c, d \in Y$ konstansok úgy, hogy

$$f(x) = a(x) + c + d \quad (x \in]x_0 + y_0 - 2\varepsilon, x_0 + y_0 + 2\varepsilon[),$$

$$g(y) = a(y) + c \quad (y \in]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[),$$

$$h(z) = a(z) + d \quad (z \in]y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon[).$$

Bizonyítás. Az állítás a 7.3.Tétel, 7.2.Tétel (1. Kiterjesztési Tétel p -osztható csoportokon), és a 7.4.Tétel (Unicitás Tétel p osztható csoportokon) tételek alapján nyilvánvaló. $\square$

Alkalmazás (Pexider-additív függvényegyenlet kúpon)

Ha $\mathbb{T}$ egy archimedeszien rendezett test, akkor $\mathbb{T} = \mathbb{T}(+)$ egy olyan archimedeszien rendezett Abel-csoport, amely minden pozitív egész p prímszám esetén egyértelműen p osztható, így az előző rész tételei alkalmazhatóak olyan korlátozott Pexider-additív egyenletek általános megoldásainak a meghatározására, ahol az additivitás a $\mathbb{T}^2$ valamely részhalmazán teljesül.

7.6 Tétel *Legyen $\mathbb{T}$ egy archimedeszien rendezett test, $Y = Y(+)$ egy Abel-csoport, $\xi \in \mathbb{T}_+ \cup \{0\}$ $\eta \in \mathbb{T}_+ \cup \{+\infty\}$ úgy, hogy $\xi < \eta$. Az $f, g, h : \mathbb{T}_+ \rightarrow Y$ pontosan akkor megoldásai az*

$$f(x+y) = g(x) + h(y) \quad (x, y \in C_{\xi, \eta})$$

függvényegyenletnek, ha

$$\begin{aligned} f(x) &= a(x) + c + d \\ g(x) &= a(x) + c \\ h(x) &= a(x) + d \end{aligned} \quad (x \in \mathbb{T}_+),$$

ahol $a : \mathbb{T} \rightarrow Y$ additív függvény, $c, d \in Y$ konstansok.

Bizonyítás. A bizonyítás a 7.1. Lemma és a 7.5 Tétel (2. Kiterjesztési tétel) alapján nyilvánvaló. $\square$

A fenti kiterjesztési tétel alkalmazását a (0.7) egyenlet megoldásával szemléltetjük.

7.7 Tétel *Legyen $\mathbb{T}$ egy archimedeszien rendezett test, Y egy Abel-csoport, $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ olyan nemnegatív elemei $\mathbb{T}$ -nek, melyekre $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$. A $P, Q, R : \mathbb{T}_+ \rightarrow Y$ függvények pontosan akkor megoldásai a*

$$P((\alpha + \gamma)x + (\beta + \delta)y) = Q(\alpha x + \beta y) + R(\gamma x + \delta y) \quad (x, y \in \mathbb{T}_+) \quad (0.7)$$

függvényegyenletnek, ha

$$\begin{aligned} P(x) &= a(x) + c + d, \\ Q(x) &= a(x) + c, \\ R(x) &= a(x) + d \end{aligned} \quad (x \in \mathbb{T}_+), \quad (7.11)$$

ahol $a : \mathbb{T} \rightarrow Y$ additív függvény, $c, d \in Y$ konstansok.

Bizonyítás. Legyenek a $P, Q, R : \mathbb{T}_+ \rightarrow Y$ függvények megoldásai a (0.7) függvényegyenletnek, ahol az $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ olyan nemnegatív elemei $\mathbb{T}$ -nek, melyekre $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$.

A (0.7) egyenletben az alábbi helyettesítést fogjuk alkalmazni.

$$\begin{aligned} P((\alpha + \gamma)x + (\beta + \delta)y) &= Q(\underbrace{\alpha x + \beta y}_u) + R(\underbrace{\gamma x + \delta y}_v), \\ x \leftarrow \frac{\delta u - \beta v}{\alpha\beta - \beta\gamma} &> 0 \quad y \leftarrow \frac{\alpha v - \gamma u}{\alpha\delta - \beta\gamma} > 0. \end{aligned} \quad (7.12)$$

Megmutatjuk, hogy

$$P(u + v) = Q(u) + R(v) \quad (u, v \in C_{\xi, \eta}) \quad (7.13)$$

teljesül a $\xi \in \mathbb{T}_+ \cup \{0\}$ és $\eta \in \mathbb{T}_+ \cup \{+\infty\}$ megfelelő megválasztása esetén. Mivel $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$, így $\alpha\delta - \beta\gamma > 0$, vagy $\alpha\delta - \beta\gamma < 0$.

1. $\alpha\delta - \beta\gamma > 0$. Ekkor $\alpha \neq 0$ és $\delta \neq 0$.

a. Ha $\beta \neq 0$, akkor a $\xi = \frac{\gamma}{\alpha}$, $\eta = \frac{\delta}{\beta}$ választás megfelelő.

b. Ha $\beta = 0$, akkor a $\xi = \frac{\gamma}{\alpha}$, $\eta = +\infty$ választás megfelelő.

2. $\alpha\delta - \beta\gamma < 0$. Ekkor $\beta \neq 0$ és $\gamma \neq 0$.

a. Ha $\alpha \neq 0$, akkor a $\xi = \frac{\delta}{\beta}$, $\eta = \frac{\gamma}{\alpha}$ választás megfelelő.

b. Ha $\alpha = 0$, akkor a $\xi = \frac{\delta}{\beta}$, $\eta = +\infty$ választás megfelelő.

A (7.13) egyenletből a 7.6. Tétel alapján teljesül az állítás. $\square$

Kiterjesztési tételek archimedeszien rendezett sűrű Abel-csoporton

7.8 Definíció Egy $X = X(+; \leq)$ rendezett csoportot **sűrűnek** nevezünk, ha minden $x, y \in X$, $x < y$ esetén

$$]x, y[\doteq \{z \in X \mid x < y < z\} \neq \emptyset.$$

Az $]x, y[$ halmazt **nyílt intervallumnak** nevezzük x és y végpontokkal.

7.9 Megjegyzés Legyen X egy rendezett csoport. Ekkor a következő állítások ekvivalensek:

1. Minden $a, b \in X$, $a < b$ esetén $]a, b[\neq \emptyset$.

2. Minden $\varepsilon \in X^+$ esetén $]0, \varepsilon[\neq \emptyset$.

Euklideszi osztás tétele, intervallumok összege

Fontos eszköz számunkra **Euklidesz** tétele. Ez egy legalább 2300 éves eredmény, így nyilván nem új. A bizonyítását achimedeszien rendezett sűrű Abel-csoportok esetére csak a teljesség és hízagmentesség miatt írjuk le. Ez a tétel része a reguláris egyetemi, főiskolai számelmélet tananyagának, euklideszi gyűrűk, így például $\mathbb{Z}$ vagy $\mathbb{R}[x]$ esetén [82]. Az eredeti eredmény a Sztoikheia-ban jelent meg [34] VII könyv, 2. tétel, ahol Euklidesz két pozitív egész legnagyobb közös osztóját határozza meg iterált kivonások segítségével. A módszer euklideszi algoritmus néven ismert.

A következő tétel bizonyításához használni fogjuk az alábbi jelölést. Ha $z \in \mathbb{Z}_+$, $y \in X$ akkor zx jelöli az $y + \dots + y$ z -tagú összeget; ha $z = 0$, akkor $zy \doteq 0$; ha $z \in \mathbb{Z}_-$, akkor $zy \doteq (-z)(-y)$.

Használni fogjuk az abszolút érték fogalmát, melyet

$$|x| \doteq \max\{x, -x\} \quad (x \in X)$$

módon értelmezzük.

7.10 Tétel (Euklidesz) *Ha X egy archimedeszien rendezett Abel-csoport, akkor minden $x \in X$ és $y \in X_+$ esetén egyértelműen léteznek olyan $n \in \mathbb{Z}$ és $r \in X$ elemek, amelyekkel*

$$x = ny + r, \quad \text{ahol} \quad 0 \leq r < y.$$

Bizonyítás. Először az egzisztencia részt bizonyítjuk. Megmutatjuk, hogy ha $x \in X$ és $y \in X_+$ akkor létezik $n \in \mathbb{Z}$ amelyre

$$ny \leq x < (n+1)y.$$

Ha $x > 0$, akkor $n \doteq \min\{n \in \mathbb{Z}_+ | x < (n+1)y\}$, $r \doteq x - ny$ megfelelő.

Ha $x = 0$, akkor $n \doteq 0$, $r \doteq 0$ megfelelő.

Ha $x < 0$, akkor, ha létezik olyan $z \in \mathbb{Z}$, amelyre $zx = y$, akkor $n \doteq z$ és $r \doteq 0$ megfelelőek. Ha azonban minden $z \in \mathbb{Z}$ esetén $zx \neq y$, akkor

$$n \doteq \max\{n \in \mathbb{Z}_- | ny < x\} = -\min\{(-n) \in \mathbb{Z}_+ | -x < (-n)y\}, \quad r \doteq x - ny$$

megfelelő.

Az unicitás rész bizonyításához tegyük fel, hogy léteznek $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$, $r_1, r_2 \in X$ elemek úgy, hogy

$$\begin{aligned} x &= n_1 y + r_1, & \text{ahol} & \quad 0 \leq r_1 < y \\ x &= n_2 y + r_2, & \text{ahol} & \quad 0 \leq r_2 < y. \end{aligned} \tag{7.14}$$

Nyilvánvaló, hogyha $n_1 = n_2 \Leftrightarrow r_1 = r_2$. Indirekt módon tegyük fel, hogy $r_1 \neq r_2$. Ekkor $|r_2 - r_1| < y$, illetve $1 \leq |n_1 - n_2|$. Így a (7.14) két egyenletét egymásból kivonva, majd mindkét oldal abszolútértékét véve kapjuk, hogy $y \leq |n_1 - n_2|y = |r_2 - r_1| < y$, ami ellentmondás. $\square$

A következő tétel szintén nem új eredmény, bevezető analízis kurzusokon szokott elhangozni abban az esetben, amikor az archimedeszien rendezett sűrű Abel-csoport szerepét a valós számok teste tölti be. A bizonyítás itt is csak a hézagmentességre törekvés miatt szerepel.

7.11 Tétel (Intervallumok összege) *Legyen X egy rendezett sűrű Abel-csoport. Legyenek $a, b, c, d \in X$ olyanok, hogy $a < b$ és $c < d$. Ekkor teljesülnek a következők.*

1. $]a, b[+]c, d[\subset]a + c, b + d[$.
2. Ha $\alpha, \beta \in X_+$, akkor $]0, \alpha + \beta[\subset]0, \alpha[+]0, \beta[$.
3. $]a + c, b + d[=]a, b[+]c, d[$.

Bizonyítás.

1. Nyilvánvaló.

2. Az általánosság csorbítása nélkül feltehetjük, hogy $\alpha \leq \beta$. Legyen $x \in]0, \alpha + \beta[$. Ekkor két eset van.

a. Ha $x \in]0, \alpha[$, akkor X sűrűsége miatt létezik $y \in X$ úgy, hogy $y \in]0, x[$. Ekkor azonban

$$x = (x - y) + y \in]0, \alpha[+]0, \alpha[\subset]0, \alpha[+]0, \beta[.$$

b. Ha $x \in]\alpha, \alpha + \beta[$, akkor $x - \alpha \in]0, \beta[$. Az X sűrűsége miatt létezik $u \in X$ úgy, hogy $u \in]0, \alpha[\cap]0, \alpha + \beta - x[$. Ekkor azonban

$$x = \alpha + (x - \alpha) = (\alpha - u) + (x - \alpha + u) \in]0, \alpha[+]0, \beta[.$$

3. A 2. pont alapján kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}]a + c, b + d[&=]0, (b - a) + (d - c)[+ \{a + c\} \subset \\ &\subset (]0, b - a[+ \{a\}) + (]0, d - c[+ \{c\}) =]a, b[+]c, d[. \end{aligned}$$

Végül az 1. és a 3.-ból következik a tétel állítása. $\square$

1. Kiterjesztési tétel archimedeszien rendezett sűrű Abel-csoporton

7.12 Tétel Legyen X egy archimedeszien rendezett sűrű Abel-csoport, Y egy Abel-csoport, $f :] - 2\varepsilon, 2\varepsilon[\rightarrow Y$ egy olyan függvény, amelyre

$$f(x + y) = f(x) + f(y) \quad (x, y \in] - \varepsilon, \varepsilon[). \quad (7.15)$$

Definiáljuk az $a : X \rightarrow Y$ függvényt

$$a(x) \doteq nf(y_0) + f(r)$$

módon, ahol $y_0 \in]0, \varepsilon[$ tetszőlegesen rögzített, $x \in X$ tetszőleges, $x = ny_0 + r$ valamely $n \in \mathbb{Z}$ és $r \in X$ esetén úgy, hogy $0 \leq r < y_0$. Ekkor teljesülnek a következő állítások.

1. a additív.
2. $f(x) = a(x)$ minden $x \in] - \varepsilon, \varepsilon[$ esetén.
3. $f(x) = a(x)$ minden $x \in] - 2\varepsilon, 2\varepsilon[$ esetén.

Bizonyítás.

1. Az a függvény az X csoport sűrűsége és a 7.10. Tétel (Euklideszi osztás tétele) alapján korrekt. Legyenek ehhez $x, y \in X$. Az euklideszi maradékos osztás segítségével kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} x &= n_1 y_0 + r_1, & 0 \leq r_1 < y_0 \\ y &= n_2 y_0 + r_2, & 0 \leq r_2 < y_0. \end{aligned} \quad (7.16)$$

Ekkor

$$x + y = (n_1 + n_2)y_0 + r_1 + r_2 \doteq (n_1 + n_2)y_0 + r_3, \text{ ahol } 0 \leq r_3 < 2y_0.$$

Ekkor két eset van.

a. $0 \leq r_3 < y_0$. Ekkor

$$\begin{aligned} a(x + y) &= (n_1 + n_2)f(y_0) + f(r_3) = (n_1 + n_2)f(y_0) + f(r_1 + r_2) \stackrel{(7.15)}{=} \\ &= [n_1 f(y_0) + f(r_1)] + [n_2 f(y_0) + f(r_2)] = a(x) + a(y). \end{aligned}$$

b. $y_0 \leq r_3 < 2y_0$, azaz $0 \leq r_3 - y_0 < y_0$. Ekkor egyrészt

$$x + y = (n_1 + n_2 + 1)y_0 - (r_3 + y_0), \quad (7.17)$$

másrészt, mivel $r_3 - y_0 \in]\varepsilon, \varepsilon[$ és $y_0 \in] - \varepsilon, \varepsilon[$, így

$$f(r_3) = f(r_3 - y_0) + f(y_0). \quad (7.18)$$

Így kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
 a(x+y) &\stackrel{(7.17)}{=} (n_1+n_1+1)f(y_0) + f(r_3-y_0) = \\
 &= (n_1+n_2)f(y_0) + [f(r_3-y_0) + f(y_0)] \stackrel{(7.18)}{=} (n_1+n_2)f(y_0) + f(r_3) = \\
 &= (n_1+n_2)f(y_0) + f(r_1+r_2) \stackrel{(7.15)}{=} (n_1+n_2)f(y_0) + f(r_1) + f(r_2) = \\
 &= [n_1f(y_0) + f(r_1)] + [n_1f(y_0) + f(r_1)] = a(x) + a(y).
 \end{aligned}$$

2. Legyen $x \in]-\varepsilon, \varepsilon[$. Ekkor euklideszi osztással kapjuk, hogy léteznek $n \in \mathbb{Z}$ és $r \in X$ úgy, hogy

$$x = ny_0 + r \quad \text{ahol} \quad 0 \leq r < y_0.$$

Ekkor három eset van.

a. $x \in [0, \varepsilon[$. Ekkor

$$a(x) = nf(y_0) + f(r) \stackrel{(7.15)}{=} f(ny_0) + f(r) \stackrel{(7.15)}{=} f(ny_0 + r) = f(x).$$

b. $x \in]-\varepsilon, 0[$ és $ny_0 \in]-\varepsilon, 0[$. Ekkor az **a.**-ban látott gondolatmenet alkalmazható.

c. $x \in]-\varepsilon, 0[$ és $ny_0 < -\varepsilon$. Ekkor egyrészt

$$ny_0 < x < (n+1)y_0, \quad \text{és} \quad (n+1)y_0 \in]-\varepsilon, 0[,$$

amiből kapjuk, hogy

$$(n+1)f(y_0) = f((n+1)y_0). \quad (7.19)$$

Másrészt $(y_0 - r) \in]0, \varepsilon[$, $r \in]0, \varepsilon[$, így $f(y_0) = f(y_0 - r) + f(r)$, de $f(y_0 - r) = -f(r - y_0)$, amelyekből kapjuk, hogy

$$f(r) = f(r - y_0) + f(y_0). \quad (7.20)$$

Így kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
 a(x) &= nf(y_0) + f(r) \stackrel{(7.20)}{=} nf(y_0) + f(r - y_0) + f(y_0) \\
 &= (n+1)f(y_0) + f(r - y_0) \stackrel{(7.19)}{=} f((n+1)y_0) + f(r - y_0) \stackrel{(7.15)}{=} \\
 &= f(ny_0 + r) = f(x).
 \end{aligned}$$

3. Legyen $x \in]-2\varepsilon, 2\varepsilon[$. Ekkor a 7.11. Tétel (Intervallumok összege) alapján $] - 2\varepsilon, 2\varepsilon[=] - \varepsilon, \varepsilon[+] - \varepsilon, \varepsilon[$, így léteznek $u, v \in] - \varepsilon, \varepsilon[$ úgy, hogy $x = u + v$. Ekkor **2.** alapján kapjuk, hogy

$$f(x) = f(u + v) \stackrel{(7.15)}{=} f(u) + f(v) \stackrel{2.}{=} a(u) + a(v) = a(u + v) = a(x).$$

☒

Unicitás-tétel archimedeszien rendezett sűrű Abel-csoporton

7.13 Tétel Legyen X egy archimedeszien rendezett sűrű Abel-csoport, Y egy Abel-csoport. Legyenek $x_0 \in G$, $\varepsilon \in G_+$; $c, c_1, c_2 \in Y$ konstansok, $a, a_1, a_2 : G \rightarrow Y$ additív függvények. Ekkor teljesülnek a következők.

1. Ha $a(x) = c$ minden $x \in] - \varepsilon, \varepsilon[$ esetén, akkor $c = 0$ és $a(x) = 0$ minden $x \in G$ esetén.
2. Ha $a(x) = c$ minden $x \in]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[$ esetén, akkor $c = 0$ és $a(x) = 0$ minden $x \in G$ esetén.
3. Ha az $f :]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[$ függvény olyan, hogy

$$\begin{aligned} f(x) &= a_1(x) + c_1 \\ f(x) &= a_2(x) + c_2 \end{aligned} \quad (x \in]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[),$$

akkor $a_1 = a_2$ és $c_1 = c_2$.

Bizonyítás.

1. Legyen $u \in]0, \varepsilon[$, $v \in]0, u[$. Ekkor $u - v \in]0, \varepsilon[$, így

$$c = a(u) = a(v + (u - v)) = a(v) + a(u - v) = c + c,$$

amiből kapjuk, hogy $c = 0$

Legyen $x \in X$. Ekkor a 7.10. Tétel alapján kapjuk, hogy létezik $n \in \mathbb{Z}$ és $r \in X$ úgy, hogy

$$x = nu + r \quad \text{ahol} \quad 0 \leq r < u.$$

Ekkor

$$a(x) = na(u) + a(r) = n \cdot 0 + 0 = 0.$$

A **2.** és **3.** állítások bizonyítása ugyanúgy történik, mint ahogy azt tettük a 7.4. Tétel esetén. ☒

2. Kiterjesztési tétel archimedeszien rendezett sűrű Abel-csoporton

7.14 Tétel Legyen X egy archimedeszien rendezett sűrű Abel-csoport, Y egy Abel-csoport, $x_0, y_0 \in X$, $\varepsilon \in X_+$, az

$$\begin{aligned} f &:]x_0 + y_0 - 2\varepsilon, x_0 + y_0 + 2\varepsilon[\rightarrow Y, \\ g &:]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[\rightarrow Y, \\ h &:]y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon[\rightarrow Y \end{aligned}$$

függvények olyanok, hogy

$$f(x + y) = g(x) + h(y) \quad (x, y \in S(x_0, y_0, \varepsilon)). \quad (7.21)$$

Ekkor egyértelműen létezik egy $a : X \rightarrow Y$ additív függvény és $c, d \in Y$ konstansok úgy, hogy

$$\begin{aligned} f(x) &= a(x) + c + d & (x \in]x_0 + y_0 - 2\varepsilon, x_0 + y_0 + 2\varepsilon[), \\ g(y) &= a(y) + c & (y \in]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[), \\ h(z) &= a(z) + d & (z \in]y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon[) \end{aligned}$$

Bizonyítás. A bizonyítás a 7.3. Tétel és a 7.12. Tétel alapján nyilvánvaló. $\square$

Kiterjesztési tétel archimédeszien rendezett csoport nyílt részhalmazain.

Legyen $X = X(+)$ egy algebrai struktúra $+$ binér algebrai művelettel, továbbá legyen $D \subset X^2$. Ekkor definiáljuk a D_x , D_y , D_{x+y} halmazokat az alábbi módon

$$\begin{aligned} D_x &\doteq \{u \in X \mid \exists v \in X : (u, v) \in D\}, \\ D_x &\doteq \{v \in X \mid \exists u \in X : (u, v) \in D\}, \\ D_{x+y} &\doteq \{z \in X \mid \exists (u, v) \in D : z = u + v\}. \end{aligned}$$

7.15 Jelölés Legyen $X = X(+)$ egy rendezett csoport, $Z \in \{X, X^2\}$. Definíáljuk a $B(x, \varepsilon) \subset Z$ halmazt

$$B(x, \varepsilon) \doteq \begin{cases}]x - \varepsilon, x + \varepsilon[, & \text{ha } x \in X; \\]x_1 - \varepsilon, x_1 + \varepsilon[\times]x_2 - \varepsilon, x_2 + \varepsilon[, & \text{ha } x \in X^2 \text{ és } x = (x_1, x_2) \end{cases}$$

módon tetszőleges $x \in Z$ és $\varepsilon \in X_+$ esetén.

7.16 Definíció Legyen $X = X(+)$ egy rendezett csoport, $Z \in \{X, X^2\}$, $D \subset Z$.

- Egy $x_0 \in Z$ elemet a D halmaz **belső pontjának** nevezünk, ha létezik $\varepsilon \in X_+$ úgy, hogy $B(x_0, \varepsilon) \subset D$.
- A D halmazt **nyílt**nak nevezünk, ha minden pontja belső pont.
- Egy $D \subset Z$ halmazt **összefüggő**nek nevezünk, ha minden $x, y \in D$ esetén létezik $B_i = B(x_i, \varepsilon_i)$ ($i = 0, 1, \dots, n$) véges sorozat úgy, hogy
 1. $B_i \subset D$ minden $i = 0, 1, \dots, n$ esetén.
 2. $x \in B_0, y \in B_n$.
 3. $B_{i-1} \cap B_i \neq \emptyset$ minden $i = 1, \dots, n$ esetén.
- A $D \subset Z$ nemüres nyílt halmaz egy $C \subset D$ részhalmazát a D halmaz egy **komponensének** nevezzük, ha C a D -nek egy tartalmazásra nézve maximális nyílt összefüggő részhalmaza.

7.17 Tétel Legyen $X = X(+)$ egy rendezett csoport, $Z \in \{X, X^2\}$ és $D \subset Z$ egy nemüres nyílt halmaz.

1. D a komponenseinek a diszjunkt úniója.
2. Ha Z szeperábilis, azaz van megszámlálható sűrű részhalmaza, például X archimédeszien rendezett Abel-csoport, amely egyértelműen p -osztható valamely p pozitív egész prím esetén, akkor D -nek megszámlálható komponense van.

Bizonyítás.

1. Legyen Z és D olyanok, mint a tételben. Mivel $D \subset Z$ nemüres nyílt. Definiáljuk a $\mathcal{B}$ halmazcsaládot

$$\mathcal{B} \doteq \{B \subset D \mid B = B(x, \varepsilon), x \in D, \varepsilon \in X_+\} \doteq \{B_\alpha \mid \alpha \in \Gamma\}$$

módon.

Definiálunk a $\mathcal{B}$ halmazon egy $\sim$ -mal jelölt ekvivalenciarelációt az alábbi módon. $B_\alpha \sim B_\beta$ akkor és csakis akkor, ha létezik B_{α_i} ($i = 0, 1, \dots, n$) véges sorozat úgy, hogy

- a. $B_{\alpha_0} = B_\alpha, B_{\alpha_n} = B_\beta$.
- b. $B_{\alpha_{i-1}} \cap B_{\alpha_i} \neq \emptyset$ minden $i = 1, 2, \dots, n$ esetén.

Ennek az ekvivalencia relációnak a hatására az $\mathcal{B}$ halmaz ekvivalencia-osztályokra esik szét. Az egy ekvivalencia-osztályba tartozó B_α halmazok úniói lesznek a D halmaz komponensei.

2. Legyen Y az Z egy megszámlálható sűrű részhalmaza, és legyen $B \subset Z$ egy nemüres nyílt halmaz $\{D_\alpha\}_{\alpha \in \Gamma}$ komponensekkel. Ekkor minden $\alpha \in \Gamma$ esetén létezik egy $B_\alpha \doteq B(x_\alpha, \varepsilon_\alpha) \subset D_\alpha$ halmaz. Ekkor, ha $\alpha \neq \beta$, akkor

$B_\alpha \cap B_\beta = \emptyset$. Mivel Y sűrű X -ben, ezért minden B_α -hoz létezik egy $y_\alpha \in Y$ úgy, hogy $y_\alpha \in B_\alpha$. Így a $\{B_\alpha\}_{\alpha \in \Gamma}$ halmazcsaládot injektív módon beleképeztük az Y halmazba, ami mutatja az állítás teljesülését.

Most megmutatjuk, hogy ha X archimédeszien rendezett Abel-csoport, amely egyértelműen p -osztható valamely p pozitív egész prím esetén, akkor X^2 -nek van megszámlálható sűrű részhalmaza. Legyen ehhez $(x_0, y_0) \in X_+^2$ és

$$Y \doteq \left\{ (rx_0, sy_0) \mid r = \frac{m}{p^k}, s = \frac{n}{p^l}, \text{ ahol } m, n \in \mathbb{Z}; k, l \in \mathbb{Z}_+ \cup \{0\} \right\}.$$

Ekkor Y egy megszámlálható sűrű részhalmaza X^2 -nek. $\square$

3. Kiterjesztési tétel archimédeszien rendezett sűrű Abel-csoporton

7.18 Tétel Legyen X egy archimédeszien rendezett sűrű Abel-csoport, $D \subset X^2$ egy nyílt halmaz $\{D_\alpha \mid \alpha \in \Gamma\}$ komponensekkel, Y egy Abel-csoport. Legyenek $f : D_{x+y} \rightarrow Y$, $g : D_x \rightarrow Y$, $h : D_y \rightarrow Y$ függvények.

1. Ha az f , g , h függvények megoldásai a

$$f(x+y) = g(x) + h(y) \quad ((x, y) \in D) \quad (7.22)$$

függvényegyenletnek akkor léteznek $a_\lambda : X \rightarrow Y$ additív függvények és $c_\lambda, d_\lambda \in Y$ konstansok, melyekkel

$$\begin{aligned} f(z) &= a_\alpha(z) + c_\alpha + d_\alpha & (z \in (D_\alpha)_{x+y}), \\ g(u) &= a_\alpha(u) + c_\alpha & (u \in (D_\alpha)_x), \\ h(v) &= a_\alpha(v) + d_\alpha & (v \in (D_\alpha)_y). \end{aligned} \quad (7.23)$$

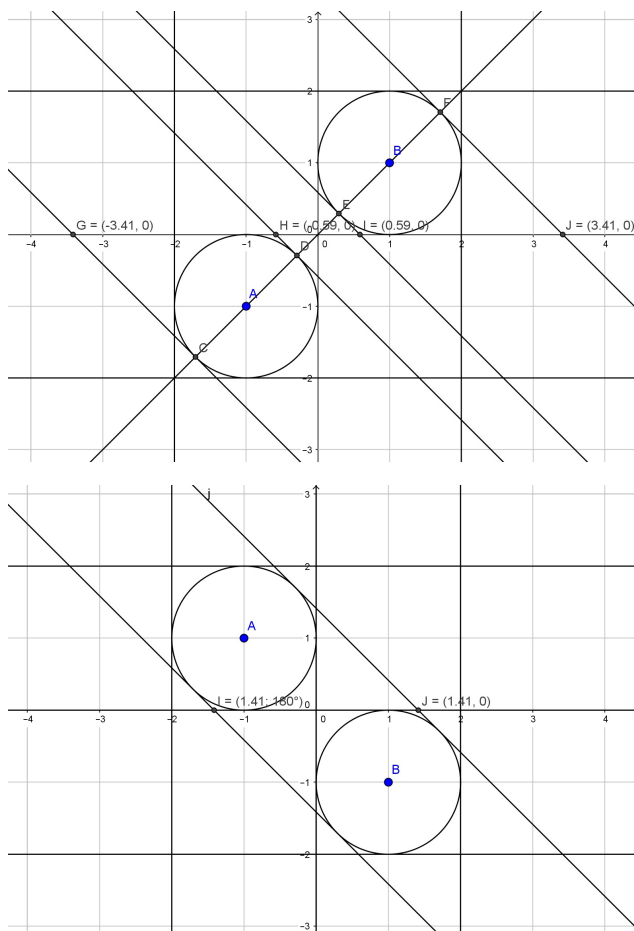
Továbbá, ha $\alpha, \beta \in \Gamma$ úgy, hogy $\alpha \neq \beta$, akkor teljesülnek a következők.

- a. Ha $(D_\alpha)_{x+y} \cap (D_\beta)_{x+y} \neq \emptyset$, akkor $a_\alpha = a_\beta$ és $c_\alpha + d_\alpha = c_\beta + d_\beta$.
- b. Ha $(D_\alpha)_x \cap (D_\beta)_y \neq \emptyset$, akkor $a_\alpha = a_\beta$ és $c_\alpha = c_\beta$.
- c. Ha $(D_\alpha)_y \cap (D_\beta)_y \neq \emptyset$, akkor $a_\alpha = a_\beta$ $d_\alpha = d_\beta$.

2. Ha $a_\lambda : X \rightarrow Y$ additív függvények és $c_\lambda, d_\lambda \in Y$ konstansok úgy, hogy **a.**, **b.** és **c.** teljesül, az f , g , h függvényeket (7.23) szerint definiáljuk, akkor teljesül (7.22).

Bizonyítás.

- 1. Az állítás az 7.14. Tétel és az 7.13. Tétel alapján teljesül.
- 2. Rögzített $\alpha \in \Gamma$ esetén $f(x+y) = g(x) + h(y)$ minden $(x, y) \in D_\alpha$. Az f , g , h függvények jóldefiniáltságát az **a.**, **b.** és **c.** teljesülése garantálja. $\square$



7.19 Példa Ebben a példában X és Y szerepét egyaránt $\mathbb{R} = \mathbb{R}(+)$ tölti be.

1. Legyen $D \subset \mathbb{R}^2$ D_1, D_2 komponensekkel, ahol

$$D_1 \doteq \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x+1)^2 + (y+1)^2 < 1\},$$

$$D_2 \doteq \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-1)^2 + (y-1)^2 < 2\}.$$

Ekkor kapjuk, hogy

$$(D_1)_x =]-2, 0[, \quad (D_1)_y =]-2, 0[,$$

$$(D_2)_x =]0, 2[, \quad (D_2)_y =]0, 2[.$$

továbbá

$$\begin{aligned}(D_1)_{x+y} &=]-2 - \sqrt{2}, -2 + \sqrt{2}[, \\ (D_2)_{x+y} &=]2 - \sqrt{2}, 2 + \sqrt{2}[.\end{aligned}$$

Így az $f(x+y) = g(x) + h(y)$ $((x, y) \in D)$ függvényegyenlet általános megoldása

$$\begin{aligned}f(z) &= \begin{cases} a_1(z) + c_1 + c_2, & \text{ha } z \in (D_1)_{x+y} =]2 - \sqrt{2}, -2 + \sqrt{2}[; \\ a_2(z) + d_1 + d_2, & \text{ha } z \in (D_2)_{x+y} =]2 - \sqrt{2}, 2 + \sqrt{2}[; \end{cases} \\ g(u) &= \begin{cases} a_1(u) + c_1, & \text{ha } u \in (D_1)_x =]-2, 0[; \\ a_2(u) + d_1, & \text{ha } u \in (D_2)_x =]0, 2[; \end{cases} \\ h(v) &= \begin{cases} a_1(v) + c_2, & \text{ha } v \in (K_1)_y =]-2, 0[; \\ a_2(v) + d_2, & \text{ha } v \in (K_2)_y =]0, 2[; \end{cases}\end{aligned}$$

ahol az $a_1, a_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvények tetszőleges additív függvények, a $c_1, c_2, d_1, d_2 \in \mathbb{R}$ tetszőleges konstansok.

2. Legyen $D \subset \mathbb{R}^2$ D_1, D_2 komponensekkel, ahol

$$\begin{aligned}D_1 &\doteq \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x+1)^2 + (y-1)^2 < 1\}, \\ D_2 &\doteq \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-1)^2 + (y+1)^2 < 2\}.\end{aligned}$$

Ekkor kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}(D_1)_x &=]-2, 0[, & (D_1)_y &=]0, 2[, \\ (D_2)_x &=]0, 2[, & (D_2)_y &=]-2, 0[,\end{aligned}$$

továbbá

$$(D_1)_{x+y} = (D_2)_{x+y} =]-\sqrt{2}, +\sqrt{2}[.$$

Így az $f(x+y) = g(x) + h(y)$ $((x, y) \in D)$ függvényegyenlet általános megoldása

$$\begin{aligned}f(z) &= a(z) + c_1 + c_2, \text{ ha } z \in (D_1)_{x+y} = (D_2)_{x+y} =]-\sqrt{2}, +\sqrt{2}[; \\ g(u) &= \begin{cases} a(u) + c_1, & \text{ha } u \in (D_1)_x =]-2, 0[; \\ a(u) + d_1, & \text{ha } u \in (D_2)_x =]0, 2[; \end{cases} \\ h(v) &= \begin{cases} a(v) + c_2, & \text{ha } v \in (D_1)_y =]0, 2[; \\ a(v) + d_2, & \text{ha } v \in (D_2)_y =]-2, 0[; \end{cases}\end{aligned}$$

ahol $a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ egy tetszőleges additív függvény, a $c_1, c_2, d_1, d_2 \in \mathbb{R}$ konstansok pedig olyanok, hogy $c_1 + c_2 = d_1 + d_2$.

**8. A (0.6) $(g(x(y+1)) + f(x) = g(y(x+1)) + f(y))$ egyenlet és a
(0.10) $(G_1(xy+x) + F_1(y) = G_2(x+y) + F_2(xy))$ Davidson egyenlet**

A (0.6) egyenlet megoldása

Az (0.6) egyenletet a (0.8) $(g_\lambda(\mu xy+x) + g_\mu(xy+y) = g_\mu(\lambda xy+y) + g_\lambda(xy+x))$ egyenletre, ez utóbbit a (0.9) $(g_2(2xy+x) + g_2(xy+y) = g_2(2xy+y) + g_2(xy+x))$ egyenletre vezetjük vissza. Bár ez utóbbi egyenlet általános megoldását nem ismerjük, csak az eredeti (0.6) egyenletből származó mellékfeltételek felhasználásával tudjuk megoldani. Ebben a fejezetben is használni fogjuk a Δ_λ operátort, ami tetszőleges $f: \mathbb{T}_+ \rightarrow Y$ függvényhez a

$$\Delta_\lambda f(x) \doteq f(\lambda x) - f(x) \quad (x \in \mathbb{T}_+)$$

módon definiált függvényt rendeli tetszőleges $\lambda \in \mathbb{T}_+$ esetén.

8.1 Tétel *Legyen $\mathbb{T}$ egy archimedeszien rendezett test, Y egy Abel-csoport. Tekintsük a*

$$g(x(y+1)) + f(x) = g(y(x+1)) + f(y) \quad (x, y \in \mathbb{T}_+) \quad (0.6)$$

függvényegyenletet $g, f: \mathbb{T}_+ \rightarrow Y$ ismeretlen függvényekkel. Ekkor teljesülnek a következő állítások

1. *Ha a $g, f: \mathbb{T}_+ \rightarrow Y$ függvények megoldásai a (0.6) egyenletnek, és a g_λ, g_μ függvényeket*

$$g_\lambda \doteq \Delta_\lambda g, \quad g_\mu \doteq \Delta_\mu g$$

módon definiáljuk tetszőleges $\lambda, \mu \in \mathbb{T}_+ \setminus \{1\}$ esetén, akkor a kapott függvények kielégítik a

$$\begin{aligned} g_\lambda(\mu xy + x) + g_\mu(xy + y) &= \\ &= g_\mu(\lambda xy + y) + g_\lambda(xy + x) \quad (x, y \in \mathbb{T}_+) \end{aligned} \quad (0.8)$$

egyenletet. Ebből $\lambda = \mu = 2$ speciális esetben kapjuk a

$$\begin{aligned} g_2(2xy + x) + g_2(xy + y) &= \\ &= g_2(2xy + y) + g_2(xy + x) \quad (x, y \in \mathbb{T}_+) \end{aligned} \quad (0.9)$$

egyenletet.

2. Tegyük fel, hogy a $\{g_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{T}_+ \setminus \{1\}}$ egy olyan tetszőleges függvénysereg, amely megoldása a (0.8) függvényegyenlet-rendszernek. Ekkor ha létezik olyan $\lambda \in \mathbb{T}_+ \setminus \{1\}$, amelyre

$$g_\lambda(x) = a_\lambda(x) + c_\lambda \quad (x \in \mathbb{T}_+), \quad (8.1)$$

ahol $a_\lambda : \mathbb{T} \rightarrow Y$ additív függvény és $c_\lambda \in Y$ konstans, akkor a $\{g_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{T}_+ \setminus \{1\}}$ függvénysereg minden tagja (8.1) alakú, továbbá ekkor $a_\lambda = \Delta_\lambda a_2$ minden $\lambda \in \mathbb{T}_+$ esetén.

3. Ha a (g, f) pár megoldása a (0.6) egyenletnek, akkor a $g_2 \doteq \Delta_2 g$ módon definiált függvény megoldása a

$$\begin{aligned} g_2 \left(w \left(\frac{x \left(\frac{2z+1}{z+1} y + 1 \right)}{w+1} + 1 \right) \right) + g_2 \left(z \left(\frac{y(x+1)}{z+1} + 1 \right) \right) = \\ = g_2 \left(z \left(\frac{y \left(\frac{2w+1}{w+1} x + 1 \right)}{z+1} + 1 \right) \right) + g_2 \left(w \left(\frac{x(y+1)}{w+1} + 1 \right) \right) \end{aligned} \quad (x, y, z, w \in \mathbb{T}_+) \quad (8.2)$$

függvényegyenletnek.

4. A g_2 függvény megoldása a (8.2) és a (0.9) egyenleteknek, akkor megoldása a

$$\begin{aligned} g_2(2z + 9w) + g_2(z + w) = \\ = g_2(2z + w) + g_2(z + 9w) \quad (z, w \in \mathbb{T}_+) \end{aligned} \quad (8.3)$$

egyenletnek is.

5. Ha a g_2 függvény megoldása a (8.3) és a (0.9) egyenleteknek, akkor létezik $a : \mathbb{T}_+ \rightarrow Y$ additív függvény és $c \in Y$ konstans, melyekkel

$$\Delta_2 g_2(x) = a(x) + c \quad (x \in \mathbb{T}_+).$$

6. Ha a g_2 egy olyan függvény, amely megoldása a (0.9) egyenleteknek, továbbá létezik $a : \mathbb{T}_+ \rightarrow Y$ additív függvény és $c \in Y$ konstans, melyekkel $\Delta_2 g_2(x) = a(x) + c$ ($x \in \mathbb{T}_+$), akkor $c = 0$, továbbá létezik $c_2 \in Y$ konstans, melyekkel

$$g_2(x) = a_2(x) + c_2 \quad (x \in \mathbb{T}_+),$$

ahol $a_2 = a$.

7. Ha a g, f függvények megoldásai a (0.6) egyenletnek, akkor

$$\begin{aligned} g(x) &= a(x) + l_2(x) + c_1, \\ f(x) &= -a(x) + l_2\left(\frac{x}{x+1}\right) + c_2 \quad (x \in \mathbb{T}_+) \end{aligned} \quad (8.4)$$

alakúak, ahol $a : \mathbb{T} \rightarrow Y$ additív függvény, $l_2 : \mathbb{T}_+ \rightarrow Y$ logaritmikus függvény, $c_1, c_2 \in Y$ konstansok. A megfordítás szintén teljesül.

8. Ha a $g, f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ függvények mérhető megoldásai a

$$g(x(y+1)) + f(x) = g(y(x+1)) + f(y) \quad (x, y \in \mathbb{R}_+) \quad (0.6^*)$$

függvényegyenletnek, akkor a

$$\begin{aligned} g(x) &= px + q_2 \log(x) + c_1, \\ f(x) &= -px + q_2 \log\left(\frac{x}{x+1}\right) + c_2 \quad (x \in \mathbb{R}_+) \end{aligned} \quad (8.5)$$

alakúak, ahol $p, q_2, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ konstansok. A megfordítás szintén teljesül.

Bizonyítás.

1. A bizonyítás során tetszőleges $\lambda \in \mathbb{T}_+$ esetén használni fogjuk a $\Delta_\lambda^x, \Delta_\lambda^y$ differencia operátorokat, amely tetszőleges $f : \mathbb{T}_+^2 \rightarrow Y$ függvényhez az alábbi módon definiált $\Delta_\lambda^x f, \Delta_\lambda^y f : \mathbb{T}_+^2 \rightarrow Y$ függvényeket rendeli

$$\begin{aligned} \Delta_\lambda^x f(x, y) &\doteq f(\lambda x, y) - f(x, y), \\ \Delta_\mu^y f(x, y) &\doteq f(x, \mu y) - f(x, y) \end{aligned} \quad (x, y, \lambda, \mu \in \mathbb{T}_+).$$

Tegyük fel, hogy az $f, g : \mathbb{T}_+ \rightarrow Y$ függvények megoldásai a (0.6) egyenletnek és legyenek $\lambda, \mu \in \mathbb{T}_+ \setminus \{1\}$ tetszőlegesen rögzített elemek. Ekkor kapjuk, hogy

$$\Delta_\mu^y \Delta_\lambda^x g(xy + x) + \Delta_\mu^y \Delta_\lambda^x f(x) = \Delta_\mu^y \Delta_\lambda^x g(xy + y) + \Delta_\mu^y \Delta_\lambda^x f(y) \quad (x, y \in \mathbb{T}_+),$$

amiből egyszerű számolással kapjuk, hogy a g_λ, g_μ függvények valóban megoldásai a (0.8) egyenletnek.

2. Legyenek $\lambda, \mu \in \mathbb{T}_+ \setminus \{1\}$ olyanok, hogy a g_λ, g_μ függvények megoldásai a (0.8) egyenletnek, továbbá a g_λ függvény a (8.1)-ben megadott alakú (azaz egy additív függvény és egy konstans összege). Ekkor kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \underbrace{g_\lambda(\mu xy + x)}_{a_\lambda(\mu xy) + a_\lambda(x) + c_\lambda} + g_\mu(xy + y) &= \\ &= g_\mu(\lambda xy + y) + \underbrace{g_\lambda(xy + x)}_{a_\lambda(xy) + a_\lambda(x) + c_\lambda} \quad (x, y \in \mathbb{T}_+). \end{aligned} \quad (8.6)$$

A (8.6) egyenletből $x \leftarrow \frac{x}{y}$ helyettesítéssel kapjuk, hogy

$$a_\lambda(\mu x) + g_\mu(x + y) = g_\mu(\lambda x + y) + a_\lambda(x) \quad (x, y \in \mathbb{T}_+). \quad (8.7)$$

Ekkor két esetet kell vizsgálnunk.

a. Legyen $\lambda > 1$ és $0 < \mu < 1$. Ekkor (8.7) alapján kapjuk, hogy

$$g_\mu(x + y) = g_\mu(\lambda x + y) + a_\lambda((1 - \mu)x) \quad (x, y \in \mathbb{T}_+). \quad (8.8)$$

Definiáljuk a $H : \mathbb{T}_+ \rightarrow Y$ függvényt

$$H(x) \doteq -a_\lambda\left(\frac{1 - \mu}{\lambda - 1}x\right) \quad (x \in \mathbb{T}_+)$$

módon. Így kapjuk, hogy

$$g_\mu(\lambda x + y) = g_\mu(x + y) + H((\lambda - 1)x) \quad (x, y \in \mathbb{T}_+),$$

amiből a 7.7. Tétel alapján kapjuk, hogy a g_μ függvény egy additív függvény és összege.

b. Legyen $0 < \lambda < 1$ és $\mu > 1$. Ekkor (8.7) alapján kapjuk, hogy

$$a_\lambda((\mu - 1)x) + g_\mu(x + y) = g_\mu(\lambda x + y) \quad (x, y \in \mathbb{T}_+). \quad (8.9)$$

Definiáljuk a $H : \mathbb{T}_+ \rightarrow Y$ függvényt

$$H(x) \doteq -a_\lambda\left(\frac{\mu - 1}{1 - \lambda}x\right) \quad (x \in \mathbb{T}_+).$$

módon. Így kapjuk, hogy

$$g_\mu(x + y) = H((1 - \lambda)x) + g_\mu(\lambda x + y) \quad (x, y \in \mathbb{T}_+),$$

amiből a 7.7. Tétel alapján kapjuk, hogy a g_μ függvény egy additív függvény és egy konstans összege.

Végül tegyük fel, hogy valamelyik, így mindegyik g_λ függvény (8.1) alakú, azaz egy additív függvény és egy konstans összege. A (0.8) egyenletben írjunk μ helyére 2-öt. Így kapjuk, hogy

$$g_\lambda(2xy + x) + g_2(xy + y) = g_2(\lambda xy + y) + g_\lambda(xy + x) \quad (x, y \in \mathbb{T}_+).$$

Felhasználva (8.1)-et kapjuk, hogy $a_\lambda(xy) = a_2(\lambda xy) - a_2(xy)$ minden $x, y \in \mathbb{T}_+$ esetén, amiből az $x \leftarrow \frac{x}{y}$ helyettesítéssel éppen a bizonyítandó $a_\lambda = \Delta_\lambda a_2$ összefüggést kapjuk.

3. A (0.6) egyenletben végezzük el az $x \leftarrow z$, $y \leftarrow x$ helyettesítést. Így kapjuk, hogy

$$g(z(x+1)) + f(z) = g(x(z+1)) + f(x) \quad (x, z \in \mathbb{T}_+).$$

A kapott egyenletben a z változóra alkalmazzuk a Δ_2 differencia operátort. Ekkor kapjuk, hogy

$$g_2(z(x+1)) = g(x(2z+1)) - g(x(z+1)) - f_2(z) \quad (x, z \in \mathbb{T}_+).$$

A kapott egyenletben végezzük el az $x \leftarrow \frac{x}{z+1}$ helyettesítést. Így kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} g_2\left(z\left(\frac{x}{z+1} + 1\right)\right) &= g\left(x\frac{2z+1}{z+1}\right) - g(x) - f_2(z) = \\ &= \Delta_{\frac{2z+1}{z+1}}g(x) - f_2(z) \quad (x, z \in \mathbb{T}_+). \end{aligned} \quad (8.10)$$

A (8.10) egyenletből kapjuk az

$$\begin{aligned} \Delta_{\frac{2\omega+1}{\omega+1}}g(x) &= g_2\left(\omega\left(\frac{x}{\omega+1} + 1\right)\right) + f_2(\omega) \quad (x, \omega \in \mathbb{T}_+), \\ \Delta_{\frac{2z+1}{z+1}}g(x) &= g_2\left(z\left(\frac{x}{z+1} + 1\right)\right) + f_2(z) \quad (x, z \in \mathbb{T}_+) \end{aligned} \quad (8.11)$$

egyenleteket.

A (8.11) megfelelő egyenletben rendre elvégezve az $x \leftarrow x\left(\frac{2z+1}{z+1}y + 1\right)$, $x \leftarrow y(x+1)$, $x \leftarrow y\left(\frac{2\omega+1}{\omega+1}x + 1\right)$, $x \leftarrow x(y+1)$ helyettesítéseket, kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} g_{\frac{2w+1}{w+1}}\left(x\left(\frac{2z+1}{z+1}y + 1\right)\right) &= g_2\left(w\left(\frac{x\left(\frac{2z+1}{z+1}y + 1\right)}{w+1} + 1\right)\right) + f_2(w), \\ g_{\frac{2z+1}{z+1}}(y(x+1)) &= g_2\left(z\left(\frac{y(x+1)}{z+1} + 1\right)\right) + f_2(z), \\ g_{\frac{2z+1}{z+1}}\left(y\left(\frac{2w+1}{w+1}x + 1\right)\right) &= g_2\left(z\left(\frac{y\left(\frac{2w+1}{w+1}x + 1\right)}{z+1} + 1\right)\right) + f_2(z), \\ g_{\frac{2w+1}{w+1}}(x(y+1)) &= g_2\left(w\left(\frac{x(y+1)}{w+1} + 1\right)\right) + f_2(w). \end{aligned} \quad (8.12)$$

A (0.8) egyenletben végezzük el a $\lambda \leftarrow \frac{2w+1}{w+1}$, $\mu \leftarrow \frac{2z+1}{z+1}$ helyettesítést. Ekkor kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} g_{\frac{2w+1}{w+1}}\left(x\left(\frac{2z+1}{z+1}y + 1\right)\right) &+ g_{\frac{2z+1}{z+1}}(y(x+1)) = \\ &= g_{\frac{2z+1}{z+1}}\left(y\left(\frac{2w+1}{w+1}x + 1\right)\right) + g_{\frac{2w+1}{w+1}}(x(y+1)) \quad (x, y, z, w \in \mathbb{T}_+). \end{aligned} \quad (8.13)$$

A (8.13) és a (8.12) együtt éppen a (8.2) egyenletet eredményezik.

4. A (8.2)-ban végezzük el az $x \leftarrow w + 1$, $y \leftarrow z + 1$ helyettesítést. Így kapjuk, hogy

$$g_2(w(2z + 3)) + g_2(z(w + 3)) = g_2(z(2w + 3)) + g_2(w(z + 3)) \quad (z, w \in \mathbb{T}_+).$$

A kapott egyenletben végezzük el a $w \leftarrow 3w$, $z \leftarrow \frac{z}{3}$ helyettesítést, amiből kapjuk, hogy

$$g_2(w(2z + 9)) + g_2(z(w + 1)) = g_2(z(2w + 1)) + g_2(w(z + 9)) \quad (z, w \in \mathbb{T}_+).$$

A kapott egyenletből a (0.9) egyenletet is felhasználva kapjuk, hogy

$$g_2(w(2z + 9)) = \underbrace{g_2(z(2w + 1)) - g_2(z(w + 1))}_{g_2(w(2z+1)) - g_2(w(z+1))} + g_2(w(z + 9)) \quad (z, w \in \mathbb{T}_+),$$

azaz

$$g_2(2wz + 9w) + g_2(wz + w) = g_2(2wz + w) + g_2(wz + 9w) \quad (z, w \in \mathbb{T}_+).$$

A kapott egyenletben végrehajtva a $z \leftarrow \frac{z}{w}$ helyettesítést éppen a bizonyítandó (8.3) egyenletet kapjuk.

5. Végezzük el a (8.3) egyenletben a $z \leftarrow 9w$, $w \leftarrow 2z$ helyettesítést. Így kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} g_2(18(z + w)) + g_2(2z + 9w) = \\ = g_2(2(z + 9w)) + g_2(9(2z + w)) \quad (z, w \in \mathbb{T}_+). \end{aligned} \quad (8.14)$$

Vonjuk ki a (8.14) egyenletből a (8.3) egyenletet. Ekkor az alábbi egyenletet kapjuk:

$$\begin{aligned} \underbrace{[g_2(18(z + w)) - g_2(z + w)]}_{\Delta_{18g_2}(z+w)} = \underbrace{[g_2(2(z + 9w)) - g_2(z + 9w)]}_{\Delta_2g_2(z+9w)} + \\ + \underbrace{[g_2(9(2z + w)) - g_2(2z + w)]}_{\Delta_9g_2(2z+w)} \quad (z, w \in \mathbb{T}_+). \end{aligned} \quad (8.15)$$

Definiáljuk az $F, H : \mathbb{T}_+ \rightarrow Y$ függvényeket

$$F(x) \doteq \Delta_{18g_2}\left(\frac{1}{17}x\right), \quad H(x) \doteq \Delta_9g_2\left(\frac{1}{8}x\right) \quad (x \in \mathbb{T}_+)$$

módon. Ekkor (8.15) alapján kapjuk, hogy

$$F(17z + 17w) = \Delta_2g_2(z + 9w) + H(16z + 8w) \quad (z, w \in \mathbb{T}_+),$$

amiből a 7.7. Tétel alapján kapjuk az állítást.

6. A (0.9) egyenletben alkalmazzuk a Δ_2 differencia-operátort az x változóra és alkalmazzuk az **5.** állítást mely szerint $\Delta_2 g_2(x) = a(x) + c$ minden $x \in \mathbb{T}_+$ esetén, ahol a additív függvény, $c \in Y$ konstans. Így kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \underbrace{\Delta_2 g_2(2xy + x) + g_2(2xy + y) - g_2(xy + y)}_{a(2xy) + a(x) + c} &= \\ &= g_2(4xy + y) - g_2(2xy + y) + \underbrace{\Delta_2 g_2(xy + x)}_{a(xy) + a(x) + c} \quad (x, y \in \mathbb{T}_+). \end{aligned}$$

amiből átrendezéssel kapjuk, hogy

$$(2g_2 + a)(2xy + y) = (g_2 + a)(xy + y) + g_2(4xy + y) \quad (x, y \in \mathbb{T}_+).$$

A kapott függvényegyenletben végezzük el az $x \leftarrow \frac{x}{y}$ helyettesítést és definiáljuk az $F, G : \mathbb{T}_+ \rightarrow Y$ függvényeket

$$F(x) \doteq (2g_2 + a)\left(\frac{1}{3}x\right), \quad G(x) \doteq (g_2 + a)\left(\frac{1}{2}x\right) \quad (x \in \mathbb{T}_+)$$

módon. Ekkor kapjuk, hogy

$$F(6x + 3y) = G(2x + 2y) + g_2(4x + y) \quad (x, y \in \mathbb{T}_+).$$

A kapott egyenletre alkalmazva a 7.7. Tételt kapjuk az állítást.

7. Az **1.**, **2.**, **3.**, **4.**, **5.**, **6.** állítások alapján kapjuk, hogy minden $\lambda \in \mathbb{T}_+$ esetén létezik $a_\lambda : \mathbb{T}_+ \rightarrow Y$ additív függvény és $c_\lambda \in Y$ konstans, melyekkel

$$\Delta_\lambda g(x) = a_\lambda(x) + c_\lambda \quad (x \in \mathbb{T}_+).$$

Ebből az 5.1. Tétel (DLSz tétel) alapján kapjuk, hogy létezik $a : \mathbb{T}_+ \rightarrow Y$ additív, $l_2 : \mathbb{T}_+ \rightarrow Y$ logaritmikus függvény és $c_2 \in Y$ konstans melyekkel

$$g(x) = a(x) + l_2(x) + c_1 \quad (x \in \mathbb{T}_+). \quad (8.16)$$

Végezzük el a (0.6) egyenletben az $y \leftarrow 1$ helyettesítést, majd fejezzük ki f -et g -vel. Így kapjuk, hogy

$$f(x) = g(x + 1) - g(2x) + f(1) \quad (x \in \mathbb{T}_+). \quad (8.17)$$

A (8.16) és a (8.17) egyenletből kapjuk, hogy az f is a (8.5)-ban megadott alakú $c_2 = a(1) - l_2(2) + f(1)$ konstanssal.

8. Ha a g függvény mérhető, akkor a $\Delta_2 g$ és a $g - \Delta_2 g$ függvények is mérhetőek, amiből már következik az állítás. $\square$

A Davison-egyenlet visszavezetése a (0.6) egyenletre

A (0.10) $(G_1(xy+x)+F_1(y)=G_2(x+y)+F_2(xy))$ egyenlet tanulmányozását (pontosabban annak egyetlen ismeretlen függvényt tartalmazó változatát) **T. M. K. Davison** javasolta 1979-ben a 17-dik ISFE (Oberwolfach) konferencián [31], abban az általános esetben, amikor az ismeretlen függvény egy K (kommutatív) testen van értelmezve, és egy kommutatív testbe képez, a függvényegyenlet minden $x, y \in K$ esetén teljesül. Ezen a konferencián [08] **W. Benz** megadta a függvényegyenlet folytonos megoldásait (valós-valós esetben) - bebizonyítva, hogy a folytonos megoldások előállnak egy additív függvény és egy konstans összegeként. Ezt követően majdnem 20 éven keresztül nem született új eredmény.

Lajkó Károly megmutatta, hogy az egy ismeretlen függvényt tartalmazó Davison-egyenlet $\mathbb{R}$ -en visszavezethető az

$$f(x+y-xy)+f(xy)=f(x)+f(y) \quad (x, y \in \mathbb{R}) \quad (8.18)$$

Hosszú egyenletre ($f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ismeretlen függvénnel), amelyet **Hosszú Miklós** ismertetett először az International Symposium on Functional equation Zakopane (Lengyelország), 1967. október konferencián [52]. Az (8.18) egyenletet először **D. Blanusa** [10], illetve **Daróczy Zoltán** [22], [21] oldották meg közel egy időben. Az egyenlettel kapcsolatban megjelentek még az alábbi cikkek: **Swiatak** [80]. **T. M. K. Davison** [28], megmutatta, hogy a (8.18) egyenletnek $f: \mathbb{T} \rightarrow Y$ ismeretlen függvénnel, ahol $\mathbb{T}$ egy legalább 5-elemű test, Y egy Abel-csoport, csak olyan megoldásai vannak, amelyek előállnak egy additív függvény és egy konstans összegeként. Megemlítem még **T. M. K. Davison** és **Redlin** [32] cikkét.

A Hosszú-féle függvényegyenlet, annak Pexider, illetve általánosított változatai azóta is sokat kutatott területe a függvényegyenletek elméletének [29], [30], [37], [36], [48], [58], [78], [79], [80], [63].

Kuczma könyvében ([57] 374. oldal, Theorem 13.7.1) a Hosszú-egyenlet megoldását a **Hosszú-ciklus** alkalmazásával ismerteti.

Lajkó Károly megadta az egy ismeretlen függvényt tartalmazó Davison-egyenlet általános megoldását abban az esetben, amikor az ismeretlen $f: K \rightarrow Y$ függvény teljesíti az egy ismeretlen függvényt tartalmazó Davison-egyenletet tetszőleges $x, y \in K$ esetén, ahol K egy legalább 5-elemű test, Y egy Abel-csoport [60].

A Davison-egyenlet Pexider változatának $\mathbb{R}_+$ feletti megoldása **R. Girgensohn** és **K. Lajkó** nevéhez fűződik [41].

Most megmutatjuk, hogy a Davison egyenlet visszavezethető a (0.6) $(g(x(y+1))+f(x)=g(y(x+1))+f(y))$ egyenletre tetszőleges $x, y \in \mathbb{T}_+$ esetén, ahol $\mathbb{T}$ egy archimedeszien rendezett test. A megoldás során felhasználjuk a (0.15) $(f(x+y)=g(xy))$ egyenletet is.

8.2 Tétel A $G_i, F_i : \mathbb{T}_+ \rightarrow Y$ ($i = 1, 2$) függvények pontosan akkor megoldásai a

$$G_1(xy + x) + F_1(y) = G_2(x + y) + F_2(xy) \quad (x, y \in \mathbb{T}_+), \quad (0.10)$$

függvényegyenletnek, ha

$$\begin{aligned} G_1(x) &= a(x) + l(x) + c_1 \\ G_2(x) &= a(x) + c_2 \\ F_1(x) &= a(x) + l\left(\frac{x}{x+1}\right) + c_3 \\ F_2(x) &= a(x) + l(x) + c_4 \end{aligned} \quad (x \in \mathbb{T}_+),$$

ahol $a : \mathbb{T} \rightarrow Y$ additív függvény, $l : \mathbb{T}_+ \rightarrow Y$ logaritmikus függvény, $c_1, c_2, c_3, c_4 \in Y$ olyan konstansok, amelyekre $c_1 + c_3 = c_2 + c_4$.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy a $G_i, F_i : \mathbb{T}_+ \rightarrow Y$ függvények megoldásai a Davison-egyenletnek tetszőleges $x, y \in \mathbb{T}_+$ esetén. Ekkor

$$G_1(xy + x) + F_1(y) = G_2(x + y) + F_2(xy) = G_1(xy + y) + F_1(x) \quad (x, y \in \mathbb{T}_+).$$

Így a $(G_1, -F_1)$ függvények megoldásai a

$$g(x(y + 1)) + f(x) = g(y(x + 1)) + f(y) \quad (x, y \in \mathbb{T}_+) \quad (0.6)$$

egyenletnek. Így a 3.2. Tétel alapján kapjuk, hogy létezik $a : \mathbb{T} \rightarrow Y$ additív, $l_1 : \mathbb{T}_+ \rightarrow Y$ logaritmikus függvény és $c_1, c_3 \in Y$ konstansok úgy, hogy

$$\begin{aligned} G_1(x) &= a(x) + l_1(x) + c_1 \\ F_1(x) &= a(x) + l\left(\frac{x}{x+1}\right) + c_3 \end{aligned} \quad (x \in \mathbb{T}_+). \quad (8.19)$$

A (8.19) és a (0.10) egyenletekből kapjuk, hogy

$$(G_2 - a)(x + y) = (-F_2 + a + l)(xy) + c_1 + c_3 \quad (x, y \in \mathbb{T}_+).$$

Definiáljuk az $f, g : \mathbb{T}_+ \rightarrow Y$ függvényeket

$$\begin{aligned} f(x) &\doteq (G_2 - a)(x) \\ g(x) &\doteq (-F_2 + a)(x) + c_1 + c_3 \end{aligned} \quad (x \in \mathbb{T}_+)$$

módon. Ekkor az f, g függvények megoldásai a

$$f(x + y) = g(xy) \quad (x, y \in \mathbb{T}_+) \quad (0.15)$$

egyenletnek, amiből a 4.6. Tétel alapján kapjuk, hogy létezik $c_2 \in Y$ úgy, hogy

$$(G_2 - a)(x) = (-F_2 + a + l)(x) + c_1 + c_3 = c_2 \quad (x \in \mathbb{T}_+),$$

így $-c_4 = c_2 - (c_1 + c_3)$ választással éppen a bizonyítandó állítást kapjuk. $\square$

9. A (0.1) $(G_1(\frac{x+1}{y}) + F_1(y) = G_2(\frac{y+1}{x}) + F_2(x))$ és a (0.5) $(G_1(x(y+1)) + F_1(x) = G_2(y(x+1)) + F_2(y))$ egyenletek megoldása

Ebben a fejezetben, a korábbi fejezetek eredményei alapján megadjuk a (0.1) és a (0.5) függvényegyenletek megoldását. Mindkét egyenlet megoldása (valós-valós környezetben) megtalálható az [43] OTDK dolgozatomban. A (0.1) egyenlet megoldása (általános esetben) közös munka **Lajkó Károly**val [44].

9.1 Tétel (T. Glavosits, K. Lajkó) *Megadjuk a (0.1) egyenlet általános, illetve mérhető megoldását.*

1. Legyen $\mathbb{T}$ egy rendezett test, Y egy egyértelműen 2-osztható Abel-csoport. A $G_i, F_i : \mathbb{T}_+ \rightarrow Y$ ($i = 1, 2$) függvények pontosan akkor megoldásai a

$$G_1\left(\frac{x+1}{y}\right) + F_1(y) = G_2\left(\frac{y+1}{x}\right) + F_2(x) \quad (x, y \in \mathbb{T}_+) \quad (0.1)$$

függvényegyenletnek, ha

$$\begin{aligned} G_1(x) &= l_1(x) + l_2(x+1) + l_3(x) + d_1, \\ F_1(x) &= l_1(x(x+1)) + l_2(x) - l_3\left(\frac{x+1}{x}\right) + d_2, \\ G_2(x) &= l_1(x) + l_2(x+1) - l_3(x) + d_3, \\ F_2(x) &= l_1(x(x+1)) + l_2(x) + l_3\left(\frac{x+1}{x}\right) + d_4 \end{aligned}$$

alakúak tetszőleges $x \in \mathbb{T}_+$ esetén, ahol $l_i : \mathbb{T}_+ \rightarrow Y$ ($i = 1, 2, 3$) logaritmikus függvények, $d_j \in Y$ ($j = 1, 2, 3, 4$) konstansok úgy, hogy $d_1 + d_2 = d_3 + d_4$.

2. A $G_i, F_i : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ ($i = 1, 2$) függvények pontosan akkor mérhető megoldásai a

$$G_1\left(\frac{x+1}{y}\right) + F_1(y) = G_2\left(\frac{y+1}{x}\right) + F_2(x) \quad (x, y \in \mathbb{R}_+) \quad (0.1^*)$$

függvényegyenletnek, ha

$$\begin{aligned} G_1(x) &= p_1 \log(x) + p_2 \log(x+1) + p_3 \log(x) + d_1, \\ F_1(x) &= p_1 \log(x(x+1)) + p_2 \log(x) - p_3 \log\left(\frac{x+1}{x}\right) + d_2, \\ G_2(x) &= p_1 \log(x) + p_2 \log(x+1) - p_3 \log(x) + d_3, \\ F_2(x) &= p_1 \log(x(x+1)) + p_2 \log(x) + p_3 \log\left(\frac{x+1}{x}\right) + d_4 \end{aligned}$$

alakúak tetszőleges $x \in \mathbb{R}_+$ esetén, ahol $p_i \in \mathbb{R}$ ($i = 1, 2, 3$); $d_j \in \mathbb{R}$ ($j = 1, 2, 3, 4$) konstansok úgy, hogy $d_1 + d_2 = d_3 + d_4$.

Bizonyítás.

1. Tegyük fel, hogy a $G_i, F_i : \mathbb{T}_+ \rightarrow Y$ ($i = 1, 2$) függvények megoldásai a (0.1) függvényegyenletnek. Ekkor az 1.2. Tétel, a 3.2. Tétel és a 6.1. Tétel alapján kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} G_1(x) &= g(x) + \gamma(x) = \\ &= [l_1(x) + l_2(x+1) + c_1] + [l_3(x) + c_3], \\ F_1(x) &= f(x) - \gamma\left(\frac{x+1}{x}\right) = \\ &= [l_1(x(x+1)) + l_2(x) + c_2] - \left[l_3\left(\frac{x+1}{x}\right) + c_3\right], \\ G_2(x) &= g(x) - \gamma(x) = \\ &= [l_1(x) + l_2(x+1) + c_1] - [l_3(x) + c_3], \\ F_2(x) &= f(x) + \gamma\left(\frac{x+1}{x}\right) = \\ &= [l_1(x(x+1)) + l_2(x) + c_2] + \left[l_3\left(\frac{x+1}{x}\right) + c_3\right]. \end{aligned} \quad (x \in \mathbb{T}_+)$$

2. állítás bizonyítása analóg az **1.** állítás bizonyításával. $\square$

9.2 Tétel Megadjuk a (0.5) függvényegyenlet általános és mérhető megoldását.

1. Legyen $\mathbb{T}$ egy archimedeszien rendezett test, Y egy egyértelműen 2-osztható Abel-csoport. A $G_i, F_i : \mathbb{T}_+ \rightarrow Y$ ($i = 1, 2$) függvények pontosan akkor megoldásai a

$$G_1(x(y+1)) + F_1(x) = G_2(y(x+1)) + F_2(y) \quad (x, y \in \mathbb{T}_+) \quad (0.5)$$

függvényegyenletnek ha

$$\begin{aligned} G_1(x) &= a(x) + l_2(x) + l_3(x) + d_1, \\ F_1(x) &= -a(x) + l_2\left(\frac{x}{x+1}\right) - l_3(x(x+1)) + d_2, \\ G_2(x) &= a(x) + l_2(x) - l_3(x) + d_3, \\ F_2(x) &= -a(x) + l_2\left(\frac{x}{x+1}\right) + l_3(x(x+1)) + d_4 \end{aligned}$$

alakúak tetszőleges $x \in \mathbb{T}_+$, ahol $a : \mathbb{T} \rightarrow Y$ additív függvény, $l_i : \mathbb{T}_+ \rightarrow Y$ ($i = 1, 2$) logaritmikus függvények, $d_j \in Y$ ($j = 1, 2, 3, 4$) konstansok úgy, hogy $d_1 + d_2 = d_3 + d_4$.

2. A $G_i, F_i : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ ($i = 1, 2$) függvények pontosan akkor mérhető megoldásai a

$$G_1(x(y+1)) + F_1(x) = G_2(y(x+1)) + F_2(y) \quad (x, y \in \mathbb{R}_+) \quad (0.5^*)$$

függvényegyenletnek ha

$$G_1(x) = qx + p_2 \log(x) + p_3 \log(x) + d_1,$$

$$F_1(x) = -qx + p_2 \log\left(\frac{x}{x+1}\right) - p_3 \log(x(x+1)) + d_2,$$

$$G_2(x) = qx + p_2 \log(x) - p_3 \log(x) + d_3,$$

$$F_2(x) = -qx + p_2 \log\left(\frac{x}{x+1}\right) + p_3 \log(x(x+1)) + d_4$$

alakúak tetszőleges $x \in \mathbb{R}_+$ esetén, ahol ahol $q, p_2, p_3, d_i \in \mathbb{R}$ ($i = 1, 2, 3, 4$) konstansok úgy, hogy $d_1 + d_2 = d_3 + d_4$.

Bizonyítás.

1. Tegyük fel, hogy a $G_i, F_i : \mathbb{T}_+ \rightarrow Y$ ($i = 1, 2$) függvények megoldásai a (0.5) függvényegyenletnek. Ekkor az 1.3. Tétel, a 8.1. Tétel és a 6.2. Tétel alapján kapjuk, hogy a G_i, F_i függvények az alábbi alakúak:

$$\begin{aligned} G_1(x) &= g(x) + \gamma(x) = \\ &= [a(x) + l_2(x) + c_1] + [l_3(x) + c_3], \\ F_1(x) &= f(x) - \gamma(x(x+1)) = \\ &= [-a(x) + l_2\left(\frac{x}{x+1}\right) + c_2] - [l_3(x(x+1)) + c_3], \\ G_2(x) &= g(x) - \gamma(x) = \\ &= [a(x) + l_2(x) + c_1] - [l_3(x) + c_3], \\ F_2(x) &= f(x) + \gamma(x(x+1)) = \\ &= [-a(x) + l_2\left(\frac{x}{x+1}\right) + c_2] + [l_3(x(x+1)) + c_3] \end{aligned} \quad (x \in \mathbb{T}_+).$$

2. állítás bizonyítása analóg az **1.** állítás bizonyításával. $\square$

10. Lezárások és belsőképzések kommutativitása

Bevezetés

A fejezetben található eredmények közös munka **Pataki Gergellyel**. A fejezet célja két általános tétel bemutatása lezárásokkal és belsőképzésekkel kapcsolatban. Ezek a tételek monoton lezárások, illetve belsőképzések fixpontjai és bizonyos kommutatív tulajdonságai közötti összefüggéseket fogalmazzák meg. A szükséges hálóméleti illetve univerzális algebrai ismeretek megtalálhatóak a [81], [09], [18] illetve a [15] könyvekben. A tételek alkalmazását vektortereken értelmezett nevezetes lezárásokra vonatkozó ismert összefüggések bizonyításán keresztül szemléltetjük.

Azt mondjuk, hogy az A részhalmaza a B halmaznak, ha minden $a \in A$ esetén $a \in B$ is teljesül, továbbá ezt a tényt $A \subset B$ módon jelöljük. Az X halmaz összes részhalmazát $\mathcal{P}(X)$ fogja jelölni.

Azt mondjuk, hogy az $\mathcal{A}$ halmazcsalád zárt a tetszőleges únióképzésre nézve, ha $\bigcup \mathcal{B} \in \mathcal{A}$ minden $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ esetén. Az $\mathcal{A}$ halmazcsalád zárt a láncúnióra nézve, ha $\bigcup \mathcal{B} \in \mathcal{A}$ minden $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ esetén, ahol a $\mathcal{B}$ halmazcsalád lineárisan rendezett a tartalmazásra nézve. Azt mondjuk, hogy az $\mathcal{A}$ halmazcsalád zárt a véges únióra nézve, ha $\bigcup \mathcal{B} \in \mathcal{A}$ minden $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ esetén, ahol a $\mathcal{B}$ halmazcsalád véges, esetleg üres halmaz.

10.1 Definíció Legyen X egy halmaz és legyen $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(X)$.

- Ha a $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(X)$ egy olyan halmazcsalád, amelyre $\emptyset \in \mathcal{C}$, $X \in \mathcal{C}$ és $\mathcal{C}$ zárt a metszetképzésre nézve, akkor az $(X, \mathcal{C})$ párt **lezárási rendszernek**, vagy lezárási térnek nevezzük, a $\mathcal{C}$ halmazcsaládot *protopológiának*, vagy *Moore halmazcsaládnak* X -en, a $\mathcal{C}$ halmazcsalád elemeit *zárt halmazoknak* nevezzük.
- Egy $(X, \mathcal{C})$ lezárási rendszert **konvex struktúrának** nevezzük, ha a $\mathcal{C}$ halmazcsalád zárt a láncúnióra nézve.
- A $\mathcal{C}$ halmazcsaládot **topológiának** nevezzük az X halmazon, illetve az $(X, \mathcal{C})$ párt *topológikus térnek* nevezzük, ha $\emptyset \in \mathcal{C}$, $X \in \mathcal{C}$ és a $\mathcal{C}$ halmazcsalád zárt az únióra és a véges metszetképzésre nézve.

Azt mondjuk, hogy a $\Psi : \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(X)$ függvény

- **expanzív**, ha $Y \subset \Psi(Y)$ minden $Y \in \mathcal{P}(X)$ esetén.
- **kontraktív**, ha $\Psi(Y) \subset Y$ minden $Y \in \mathcal{P}(X)$ esetén.
- **idempotens**, ha $\Psi(\Psi(Y)) \doteq \Psi^2(Y) = \Psi(Y)$ minden $Y \in \mathcal{P}(X)$ esetén.
- **monoton**, ha $\Psi(Y) \subset \Psi(Z)$ minden $Y, Z \in \mathcal{P}(X)$, melyekre $Y \subset Z$.

- **additív**, if $\Psi(Y \cup Z) = \Psi(Y) \cup \Psi(Z)$ minden $Y, Z \in \mathcal{P}(X)$ esetén.
- **multiplikatív**, ha $\Psi(Y \cap Z) = \Psi(Y) \cap \Psi(Z)$ minden $Y, Z \in \mathcal{P}(X)$ esetén.
- **normált**, ha $\Psi(\emptyset) = \emptyset$.

10.2 Definíció Legyen X egy halmaz és legyenek $\Psi : \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(X)$, $\psi : \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(X)$ függvények.

- A Ψ függvényt **monoton lezárásnak** nevezzük, ha *expanzív, idempotens és monoton*.
- Az additív monoton lezárást **Kuratowski-lezárásnak** nevezzük.
- Azt mondjuk, hogy a ψ függvény egy **belsőképző operátor**, ha *kont-raktív, idempotens és monoton*.

10.3 Megjegyzés Jól ismert eredmény, ha X egy halmaz, $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(X)$ egy halmazcsalád, a $\text{Cl}, \text{Int} : \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(X)$, függvényeket és a $\text{Fix}(\text{Cl}), \text{Fix}(\text{Int}) \subset \mathcal{P}(X)$ halmazcsaládokat az alábbi módon definiáljuk

$$\begin{aligned}\text{Cl}(Y) &\doteq \bigcap \{Z \in \mathcal{C} \mid Y \subset Z\} & (Y \in \mathcal{P}(X)), \\ \text{Int}(Y) &\doteq \bigcup \{Z \in \mathcal{C} \mid Y \subset Z\} & (Y \in \mathcal{P}(X)), \\ \text{Fix}(\text{Cl}) &\doteq \{Y \in \mathcal{P}(X) \mid Y = \text{Cl}(Y)\}, \\ \text{Fix}(\text{Int}) &\doteq \{Y \in \mathcal{P}(X) \mid Y = \text{Int}(Y)\},\end{aligned}\tag{10.1}$$

akkor teljesülnek a további állítások

1. Ha a $\mathcal{C}$ halmazcsalád egy protopológia X -en, akkor a (10.1) módon definiált Cl függvény egy monoton lezárást úgy, hogy $\text{Cl}(\emptyset) = \emptyset$.

Megfordítva, ha a $\text{Cl} : \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(X)$ egy monoton lezárást úgy, hogy $\text{Cl}(\emptyset) = \emptyset$, akkor a (10.1) módon definiált $\text{Fix}(\text{Cl})$ halmazcsalád egy protopológia X -en.

2. Ha a $\mathcal{C}$ egy olyan protopológia X -en, amely zárt a véges únióra nézve, akkor a (10.1) módon definiált Cl függvény egy olyan Kuratowski-lezárást, amelyre $\text{Cl}(\emptyset) = \emptyset$.

Megfordítva, ha a $\text{Cl} : \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(X)$ egy olyan Kuratowski lezárást, amelyre $\text{Cl}(\emptyset) = \emptyset$, akkor a (10.1) módon definiált $\text{Fix}(\text{Cl})$ halmazcsalád egy olyan protopológia X -en, amely zárt a véges únióra nézve.

3. Ha a $\mathcal{C}$ halmazcsalád egy topológia X -en, akkor a (10.1) módon definiált Int függvény egy olyan belsőképzés, amelyre $\text{Int}(X) = X$ és multiplikatív.

Megfordítva, ha a $\text{Int} : \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(X)$ függvény egy olyan belsőképzés, amelyre $\text{Int}(X) = X$, akkor a (10.1) módon definiált $\text{Fix}(\text{Cl})$ halmazcsalád egy topológia X -en.

A lezárási rendszer, konvex struktúra, topológia, monoton lezáras, Kuratowski-lezáras, belső képzés, Cl és Int függvények fogalmak, illetve a rájuk vonatkozó tények megtalálhatóak [84]-ben, illetve [55]-ben.

10.4 Példa Legyen $X = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ és definiáljuk a $\Psi : \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(X)$ függvényt az alábbi módon

$$\Psi(Y) = Y \cup \{\sup(Y)\} \quad (Y \subset X).$$

Ekkor a Ψ függvény expanzív és idempotens, de nem monoton. Például legyen $A =]0, 1[$ és $B =]0, 1[\cup]1, 2[$. Ekkor $\Psi(A) =]0, 1]$, $\Psi(B) =]0, 1[\cup]1, 2]$. Így $A \subset B$, azonban $\Psi(A) \subset \Psi(B)$ nem teljesül.

További hasznos példák találhatók az alábbi könyvekben [84], [55], [13], [12].

Idézzük fel az alábbi jól-ismert tételt [57] 127. oldal (Theorem 5.1.8).

Tétel Legyen $A \subset \mathbb{R}^N$ egy konvex zárt halmaz. Ekkor A egyenlő az A -t tartalmazó összes olyan zárt feltér metszetével, melyek az A támasztó hipersíkjai által vannak meghatározva.

Definiáljuk az $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subset \mathbb{R}^N$ halmazcsaládokat az alábbi módon.

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \{H \subset \mathbb{R}^N \mid H \text{ egy zárt féltére } \mathbb{R}^N\text{-nek}\}, \\ \mathcal{B} &= \{H \subset \mathbb{R}^N \mid H \text{ egy zárt féltére } \mathbb{R}^N\text{-nek}\}. \end{aligned}$$

Ekkor sem az $\mathcal{A}$ halmazcsalád, sem a $\mathcal{B}$ halmazcsalád nem lezárási rendszer, ennek ellenére van értelme tanulmányozni a $\Phi_{\mathcal{A}}, \Phi_{\mathcal{B}} : \mathcal{P}(\mathbb{R}^N) \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R}^N)$

$$\begin{aligned} \Phi_{\mathcal{A}}(Y) &= \bigcap \{A \in \mathcal{A} \mid Y \subset A\} \quad (Y \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^N)), \\ \Phi_{\mathcal{B}}(Y) &= \bigcap \{B \in \mathcal{B} \mid Y \subset B\} \quad (Y \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^N)) \end{aligned}$$

módon definiált függvényeket. Jelölje $\mathcal{F}$ az $\mathbb{R}^N$ zárt, $\mathcal{G}$ az $\mathbb{R}^N$ nyílt részhalmazainak a halmazát. Ekkor feltehetően teljesülnek a következők:

$$\begin{aligned} \Phi_{\mathcal{A}}(F) &= \text{co}(F), & \Phi_{\mathcal{A}}(G) &= (\text{cl} \circ \text{co})(G), \\ \Phi_{\mathcal{B}}(F) &= \text{co}(F), & \Phi_{\mathcal{B}}(G) &= \text{co}(G) \end{aligned}$$

minden $F \in \mathcal{F}, G \in \mathcal{G}$ halmaz esetén.

10.5 Definíció Legyen X egy halmaz és legyen $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ egy tetszőleges halmazcsalád. Defináljuk a $\Phi_{\mathcal{A}}, \phi_{\mathcal{A}} : \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(X)$ függvényeket az alábbi módon.

$$\begin{aligned}\Phi_{\mathcal{A}}(Y) &\doteq \bigcap \{A \in \mathcal{A} \mid Y \subset A\}, \\ \phi_{\mathcal{A}}(Y) &\doteq \bigcup \{A \in \mathcal{A} \mid A \subset Y\}\end{aligned}\quad (Y \in \mathcal{P}(X)).$$

A $\Phi_{\mathcal{A}}$ függvényt az $\mathcal{A}$ halmazcsalád által generált monoton lezárásnak, az $\psi_{\mathcal{A}}$ függvényt az $\mathcal{A}$ halmazcsalád által generált monoton belsőképzésnek nevezzük.

Lezáráások és belsőképezések alapvető tulajdonságai

Ha $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ egy halmazcsalád, akkor az $\mathcal{A}$ halmazcsalád $\Psi : \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(X)$ függvény általi képét $\Psi[\mathcal{A}] \doteq \{\Psi(A) \mid A \in \mathcal{A}\}$ módon definiáljuk.

10.6 Lemma Legyenek $\Psi, \Omega : \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(X)$ függvények. Ekkor teljesülnek a következő állítások.

M Ha a Ψ függvény monoton, akkor

$$\Psi\left(\bigcap \mathcal{A}\right) \subset \bigcap \Psi[\mathcal{A}], \quad \bigcup \Psi[\mathcal{A}] \subset \Psi\left(\bigcup \mathcal{A}\right).$$

Legyenek $\Psi, \Omega : \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(X)$ függvények. Jelöljük $\Psi \preceq \Omega$ módon azt a tényt, ha $\Psi(Y) \subset \Omega(Y)$ minden $Y \in \mathcal{P}(X)$ esetén.

10.7 Lemma Legyenek $\Psi, \Omega, \psi, \omega : \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(X)$ függvények. Ekkor teljesülnek a következő állítások.

O1 Ha a Ψ függvény monoton, az Ω függvény expanszív, akkor

$$\Psi \preceq \Psi \circ \Omega, \quad \Psi \preceq \Omega \circ \Psi.$$

Ha a Ψ függvény expanszív, az Ω függvény monoton, akkor

$$\Omega \preceq \Psi \circ \Omega, \quad \Omega \preceq \Omega \circ \Psi.$$

Ha a ψ függvény kontraktív, az ω függvény monoton, akkor

$$\psi \circ \omega \preceq \omega, \quad \omega \circ \psi \preceq \omega.$$

Ha a ψ függvény monoton, az ω függvény kontraktív, akkor

$$\psi \circ \omega \preceq \psi, \quad \omega \circ \psi \preceq \psi.$$

O2 Ha a Ψ függvény monoton és idempotens, az Ω függvény expanszív úgy, hogy $\Omega \preceq \Psi$, továbbá a ψ függvény kontraktív és az ω függvény monoton és idempotens úgy, hogy $\omega \preceq \psi$, akkor

$$\Psi \circ \Omega = \Omega \circ \Psi = \Psi, \quad \psi \circ \omega = \omega \circ \psi = \omega.$$

Bizonyítás. **O1** triviális.

O2 Az **O1** alapján kapjuk, hogy

$$\Psi \preceq \Psi \circ \Omega, \quad \Psi \preceq \Omega \circ \Psi, \quad \psi \circ \omega \preceq \omega, \quad \omega \circ \psi \preceq \omega.$$

Mivel a Ψ és ω függvény monoton és idempotens, továbbá $\Omega \preceq \Psi$ és $\omega \preceq \psi$, így szintén kapjuk, hogy

$$\Psi \circ \Omega \preceq \Psi \circ \Psi = \Psi, \quad \Omega \circ \Psi \preceq \Psi \circ \Psi = \Psi, \quad \omega = \omega \circ \omega \preceq \omega \circ \psi, \quad \omega = \omega \circ \omega \preceq \psi \circ \omega.$$

□

Legyen $\Psi : \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(X)$ egy függvény. Egy $A \in \mathcal{P}(X)$ halmazt a Ψ függvény fix halmazának nevezzük, ha $\Psi(A) = A$. A Ψ függvény összes fix halmazának a halmazát $\text{Fix}(\Psi)$ módon jelöljük.

10.8 Lemma Legyen X egy halmaz és legyen $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ egy tetszőleges halmazcsalád. Ekkor

G1 A $\Phi_{\mathcal{A}}$ függvény egy monoton lezárás, a $\phi_{\mathcal{A}}$ függvény egy monoton belső-képzés X -en.

Bizonyítás. **G1** Legyen az $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ halmazcsalád tetszőleges. Ekkor triviális módon kapjuk, hogy a $\Phi_{\mathcal{A}}$ függvény expanszív és monoton. Ekkor kapjuk, hogy

$$\Phi_{\mathcal{A}}(Y) \subset \Phi_{\mathcal{A}}^2(Y) \quad (Y \in \mathcal{P}(X)).$$

Érdemes megjegyezni, hogy

$$\mathcal{A} \subset \text{Fix}(\Phi_{\mathcal{A}}). \quad (10.2)$$

Így szintén kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \Phi_{\mathcal{A}}^2(Y) &= \Phi_{\mathcal{A}}\left(\bigcap\{A \in \mathcal{A} \mid Y \subset A\}\right) \stackrel{\text{M}}{\subset} \\ &\subset \bigcap \Phi_{\mathcal{A}}[\{A \in \mathcal{A} \mid Y \subset A\}] = \bigcap \{\Phi_{\mathcal{A}}(A) \mid A \in \mathcal{A}, Y \subset A\} \stackrel{(10.2)}{=} \\ &= \bigcap \{A \in \mathcal{A} \mid Y \subset A\} = \Phi_{\mathcal{A}}(Y) \quad (Y \in \mathcal{P}(X)). \end{aligned}$$

Az állítás a $\phi_{\mathcal{A}}$ függvény esetén hasonlóan bizonyítható. □

10.9 Lemma Legyenek $\Psi, \psi, \Omega : \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(X)$ függvények. Ekkor teljesülnek a következő állítások.

F1 A Ψ függvény akkor és csakis akkor idempotens, ha

$$\text{Fix}(\Psi) = \{\Psi(Y) \mid Y \in \mathcal{P}(X)\}.$$

F2 Ha a Ψ és Ω függvények egyidejűleg expanzívak, vagy kontraktívak, akkor

$$\text{Fix}(\Psi \circ \Omega) = \text{Fix}(\Psi) \cap \text{Fix}(\Omega).$$

F3 Ha Ψ függvény egy monoton lezáras, a ψ függvény egy monoton belsőképzés, akkor

$$\Psi = \Phi_{\text{Fix}(\Psi)}, \quad \psi = \phi_{\text{Fix}(\psi)}.$$

F4 Ha a Ψ függvény egy monoton lezáras, a ψ függvény egy monoton belsőképzés, akkor a $\text{Fix}(\Psi)$ halmazcsalád zárt a metszetképzésre nézve, a $\text{Fix}(\psi)$ halmazcsalád zárt az únióképzésre nézve.

Bizonyítás.

F1 Tegyük fel, hogy a Ψ függvény idempotens és legyen

$$\mathcal{A} \doteq \{\Psi(Y) \mid Y \in \mathcal{P}(X)\}.$$

Ha $A \in \text{Fix}(\Psi)$, akkor $A = \Psi(A)$, így $A \in \mathcal{A}$. Megfordítva, ha $A \in \mathcal{A}$, akkor létezik $B \in \mathcal{P}(X)$ úgy, hogy $A = \Psi(B)$. Mivel a Ψ függvény idempotens, így $\Psi(A) = \Psi^2(B) = \Psi(B) = A$, amiből kapjuk, hogy $A \in \text{Fix}(\Psi)$.

Tegyük fel, hogy $\mathcal{A} = \text{Fix}(\Psi)$ és legyen $Y \in \mathcal{P}(X)$ egy tetszőleges halmaz. Ekkor $\Psi(Y) \in \mathcal{A} = \text{Fix}(\Psi)$, amiből kapjuk, hogy $\Psi^2(Y) = \Psi(Y)$, így a Ψ függvény idempotens.

F2 A határozottság kedvéért tegyük fel, hogy a Ψ és az Ω függvények expanzívak és $Y \in \text{Fix}(\Psi \circ \Omega)$. Ekkor kapjuk, hogy

$$Y \preceq \Omega(Y) \preceq (\Psi \circ \Omega)(Y) = Y,$$

amiből következik, hogy $\Omega(Y) = Y$, azaz $Y \in \text{Fix}(\Omega)$, amiből szintén kapjuk, hogy $Y \in \text{Fix}(\Psi)$.

Ha a Ψ és Ω függvények kontraktívak, a bizonyítás hasonló módon végezhető el.

F3 Legyen $Y \in \mathcal{P}(X)$ egy tetszőleges halmaz. Ekkor egyrészt

$$\Phi_{\text{Fix}(\Psi)}(Y) \stackrel{\text{F1}}{=} \bigcap \{\Psi(Z) \mid Y \subset \Psi(Z), Z \in \mathcal{P}(X)\} \stackrel{Y \subset \Psi(Y)}{\subset} \Psi(Y).$$

Másrészt

$$\begin{aligned}
 \Psi(Y) &\stackrel{\mathbf{G1}, \mathbf{O1}}{\subset} \Psi(\Phi_{\text{Fix}(\Psi)}(Y)) \stackrel{\mathbf{F1}}{=} \\
 &= \Psi \left(\bigcap \{ \Psi(Z) \mid Y \subset \Psi(Z), Z \in \mathcal{P}(X) \} \right) \stackrel{\mathbf{M}}{\subset} \\
 &\subset \bigcap \Psi [\{ \Psi(Z) \mid Y \subset \Psi(Z), Z \in \mathcal{P}(X) \}] = \\
 &= \bigcap \{ \Psi^2(Z) \mid Y \subset \Psi(Z), Z \in \mathcal{P}(X) \} = \\
 &= \bigcap \{ \Psi(Z) \mid Y \subset \Psi(Z), Z \in \mathcal{P}(X) \} \stackrel{\mathbf{F1}}{=} \Phi_{\text{Fix}(\Psi)}(Y).
 \end{aligned}$$

F4 Legyen a $\mathcal{B} \subset \text{Fix}(\Psi)$ egy tetszőleges halmazcsalád. Ekkor kapjuk, hogy

$$\bigcap \mathcal{B} \subset \Psi \left(\bigcap \mathcal{B} \right) \stackrel{\mathbf{M}}{\subset} \bigcap \Psi[\mathcal{B}] = \bigcap \{ \Psi(B) \mid B \in \mathcal{B} \} = \bigcap \mathcal{B},$$

így $\Psi(\bigcap \mathcal{B}) = \bigcap \mathcal{B}$, azaz $\bigcap \mathcal{B} \in \text{Fix}(\Psi)$ és pontosan ezt kellett bizonyítani. $\square$

10.10 Lemma Legyen X egy halmaz és legyen $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ egy tetszőleges halmazcsalád. Ekkor teljesülnek az alábbi állítások.

G2 $\Phi_{\mathcal{A}}(\emptyset) = \bigcap \mathcal{A}$, $\Phi_{\mathcal{A}}(X) = X$, $\phi_{\mathcal{A}}(\emptyset) = \emptyset$, $\phi_{\mathcal{A}}(X) = \bigcup \mathcal{A}$.

G3 $\text{Fix}(\Phi_{\mathcal{A}}) = \{ \bigcap \mathcal{B} \mid \mathcal{B} \subset \mathcal{A} \}$, továbbá, $\mathcal{A} = \text{Fix}(\Phi_{\mathcal{A}})$ akkor és csak akkor, ha $\mathcal{A}$ zárt a metszetképzésre nézve.

$\text{Fix}(\phi_{\mathcal{A}}) = \{ \bigcup \mathcal{B} \mid \mathcal{B} \subset \mathcal{A} \}$, továbbá, $\mathcal{A} = \text{Fix}(\phi_{\mathcal{A}})$ akkor és csak akkor, ha $\mathcal{A}$ zárt az únióképzésre nézve.

Bizonyítás.

G2 triviális.

G3 Mivel $\mathcal{A} \subset \text{Fix}(\Phi_{\mathcal{A}})$ és $\text{Fix}(\Phi_{\mathcal{A}})$ zárt a metszetképzésre nézve, így kapjuk, hogy

$$\{ \bigcap \mathcal{B} \mid \mathcal{B} \subset \mathcal{A} \} \subset \text{Fix}(\Phi_{\mathcal{A}}).$$

Másrészt legyen $Y \in \text{Fix}(\Phi_{\mathcal{A}})$. Definiáljuk a $\mathcal{B}$ halmazcsaládot

$$\mathcal{B} \doteq \{ A \in \mathcal{A} \mid Y \subset A \}$$

módon. Ekkor kapjuk, hogy

$$Y = \Phi_{\mathcal{A}}(Y) = \bigcap \{ A \in \mathcal{A} \mid Y \subset A \} = \bigcap \mathcal{B}.$$

Így a fordított tartalmazás

$$\text{Fix}(\Phi_{\mathcal{A}}) \subset \{ \bigcap \mathcal{B} \mid \mathcal{B} \subset \mathcal{A} \}$$

szintén teljesül.

A $\phi_{\mathcal{A}}$ függvényre vonatkozó állítás analóg módon bizonyítható. $\square$

Monoton lezárások és belsőképzések kommutativitással kapcsolatos tulajdonságai

10.11 Tétel (T. Glavosits, G. Pataki) Legyen X egy halmaz, és legyenek Ψ, Ω monoton lezárások X -en. Ekkor az alábbi állítások ekvivalensek.

- a. $\text{Fix}(\Psi) \subset \text{Fix}(\Omega)$.
- b. $\Omega \preceq \Psi$.
- c. $\Psi \circ \Omega = \Psi$.
- d. $\Omega \circ \Psi = \Psi$.

Bizonyítás.

a. $\Rightarrow$ b. Tegyük fel, hogy teljesül az **a.** állítás és legyen $A \in \mathcal{P}(X)$. Ekkor

$$\Omega(A) \stackrel{\mathbf{O1}}{\subset} (\Omega \circ \Psi)(A) \stackrel{\mathbf{F1,a}}{=} \Psi(A),$$

azaz, a **b.** állítás szintén teljesül.

b. $\Rightarrow$ c., b. $\Rightarrow$ d. implikációk teljesülését az **O2** állítás garantálja.

c. $\Rightarrow$ a. Tegyük fel, hogy a **c.** állítás teljesül és legyen $A \in \text{Fix}(\Psi)$. Ekkor

$$A \subset \Omega(A) \stackrel{\mathbf{O1}}{\subset} (\Psi \circ \Omega)(A) \stackrel{\mathbf{c}}{=} \Psi(A) = A,$$

így $A = \Omega(A)$, azaz $\text{Fix}(\Psi) \subset \text{Fix}(\Omega)$, ami éppen az **a.** állítás.

d. $\Rightarrow$ a. Tegyük fel, hogy a **d.** állítás teljesül, és legyen $A \in \text{Fix}(\Psi)$. Ekkor

$$A \subset \Omega(A) \stackrel{\mathbf{O1}}{\subset} (\Omega \circ \Psi)(A) \stackrel{\mathbf{d}}{=} \Psi(A) = A,$$

így $A = \Omega(A)$, azaz $\text{Fix}(\Psi) \subset \text{Fix}(\Omega)$, ami éppen az **a.** állítás. $\square$

10.12 Tétel Legyen X egy halmaz és legyenek ψ, ω monoton belsőképzések X -en. Ekkor az alábbi állítások ekvivalensek.

- a. $\text{Fix}(\omega) \subset \text{Fix}(\psi)$.
- b. $\omega \preceq \psi$.
- c. $\psi \circ \omega = \omega$.
- d. $\omega \circ \psi = \omega$.

Bizonyítás. Analóg a 10.11. Tétel bizonyításával. $\square$

10.13 Tétel (T. Glavosits, G. Pataki) Legyen X egy halmaz és legyenek Ψ, Ω monoton lezárások X -en. Ekkor az alábbi állítások ekvivalensek.

- a. $\Omega[\text{Fix}(\Psi)] \subset \text{Fix}(\Psi)$.
- b. $\Psi \circ \Omega \preceq \Omega \circ \Psi$.
- c. $\Omega \circ \Psi$ idempotens.
- d. $\Omega \circ \Psi = \Phi_{\text{Fix}(\Psi) \cap \text{Fix}(\Omega)}$.

Bizonyítás.

a. $\Rightarrow$ b. Tegyük fel, hogy az **a.** állítás teljesül és legyen $A \in \text{Fix}(\omega)$. Ekkor érdemes megjegyezni, hogy

$$(\Omega \circ \Psi)(A) = \Omega(\Psi(A)) \stackrel{\mathbf{F1}}{\in} \Omega[\text{Fix}(\Psi)] \stackrel{\mathbf{a.}}{\subset} \text{Fix}(\Psi), \quad (10.3)$$

amiből a Ψ függvény expanzivitása és a $\Psi \circ \Omega$ függvény monotonítása alapján kapjuk, hogy

$$(\Psi \circ \Omega)(A) \stackrel{\mathbf{O1}}{\subset} (\Psi \circ \Omega)(\Psi(A))\Psi((\Omega \circ \Psi)(A)) \stackrel{(10.3)}{=} (\Omega \circ \Psi)(A),$$

azaz a **b.** állítás teljesül.

b. $\Rightarrow$ c. Tegyük fel, hogy a **b.** állítás teljesül. Ekkor

$$\Omega \circ \Psi \stackrel{\mathbf{O1}}{\preceq} (\Omega \circ \Psi)^2 = \Omega \circ (\Psi \circ \Omega) \circ \Psi \preceq \Omega \circ (\Omega \circ \Psi) \circ \Psi = \Omega^2 \circ \Psi^2 = \Omega \circ \Psi,$$

így a $\Omega \circ \Psi$ függvény idempotens.

c. $\Rightarrow$ d. Tegyük fel, hogy a **c.** állítás teljesül. Ekkor a $\Omega \circ \Psi$ függvény egy monoton lezárás. Így kapjuk, hogy

$$\Omega \circ \Psi \stackrel{\mathbf{F3}}{=} \Phi_{\text{Fix}(\Omega \circ \Psi)} \stackrel{\mathbf{F2}}{=} \Phi_{\text{Fix}(\Omega) \cap \text{Fix}(\Psi)},$$

ami bizonyítandó volt.

d. $\Rightarrow$ a. Tegyük fel, hogy a **d.** állítás teljesül. Ekkor a **G1** állítás alapján kapjuk, hogy a $\Omega \circ \Psi$ függvény idempotens. Legyen $A \in \Omega[\text{Fix}(\Psi)]$. Ekkor az **F1** állítás alapján létezik egy $B \in \mathcal{P}(X)$ halmaz úgy, hogy $A = (\Omega \circ \Psi)(B)$. Így kapjuk, hogy

$$(\Omega \circ \Psi)(A) = (\Omega \circ \Psi)^2(B) \stackrel{\mathbf{d}}{=} (\Omega \circ \Psi)(B) = A,$$

amiből kapjuk, hogy

$$A \in \text{Fix}(\Omega \circ \Psi) \stackrel{\mathbf{F2}}{=} \text{Fix}(\Omega) \cap \text{Fix}(\Psi) \subset \text{Fix}(\Psi),$$

azaz, $\Omega[\text{Fix}(\Psi)] \subset \text{Fix}(\Psi)$, ami éppen az **a.** állítás. $\square$

10.14 Tétel Legyen X egy halmaz és legyenek ψ, ω monoton belsőképzések X -en. Ekkor a következő állítások ekvivalensek.

- a. $\psi[Fix(\omega)] \subset Fix(\omega)$.
- b. $\psi \circ \omega \preceq \omega \circ \psi$.
- c. $\psi \circ \omega$ is idempotens.
- d. $\psi \circ \omega = \Phi_{Fix(\psi) \cap Fix(\omega)}$.

Bizonyítás. Analóg a 10.13. Tétel bizonyításával. $\square$

Alkalmazások

Ebben a fejezetben X egy $\mathbb{T}$ rendezett test feletti vektorteret fog jelölni. Legyen $n \in \mathbb{Z}_+$, $x_1, \dots, x_n \in X$, $\alpha_1 \dots \alpha_n \in \mathbb{T}$, és legyen $z \in X$ úgy, hogy

$$z = \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n. \quad (10.4)$$

Ekkor azt mondjuk, hogy a z elem az $x_1, \dots, x_n$ elemek **lineáris kombinációja** $\alpha_1 \dots \alpha_n$ együtthatókkal. Azt mondjuk, hogy a lineáris kombináció (10.4)-ben

- **konvex-kúp kombináció**, ha $\alpha_i > 0$ minden $i = 1 \dots, n$;
- **affin kombináció**, ha $\alpha_1 + \dots + \alpha_n = 1$;
- **konvex kombináció**, ha egyidejűleg konvex-kúp és affin kombináció;
- **cca kombináció**, ha $\alpha_1 + \dots + \alpha_n > 0$.

Legyen $n \in \mathbb{Z}_+$. Definiáljuk a lin_n , cocone_n , aff_n , co_n és $\text{cca}_n \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(X)$ függvényeket az alábbi módon.

$$\begin{aligned} \text{lin}_n(Y) &\doteq \{\alpha_1 y_1 + \dots + \alpha_n y_n \in X \mid \alpha_i \in F, y_i \in Y \text{ minden } i \in 1, \dots, n\}, \\ \text{cocone}_n(Y) &\doteq \{\alpha_1 y_1 + \dots + \alpha_n y_n \in \text{lin}_n(Y) \mid \alpha_i > 0 \text{ minden } i \in 1, \dots, n\}, \\ \text{aff}_n(Y) &\doteq \{\alpha_1 y_1 + \dots + \alpha_n y_n \in \text{lin}_n(Y) \mid \alpha_1 + \dots + \alpha_n = 1\}, \\ \text{co}_n(Y) &\doteq \text{cocone}_n(Y) \cap \text{aff}_n(Y), \\ \text{cca}_n(Y) &\doteq \{\alpha_1 y_1 + \dots + \alpha_n y_n \in \text{lin}_n(Y) \mid \alpha_1 + \dots + \alpha_n > 0\} \end{aligned}$$

tetszőleges $Y \in \mathcal{P}(X)$ esetén. Definiáljuk az Lin , Cocone , Aff , $\text{Co} \subset \mathcal{P}(X)$ halmazcsaládokat az alábbi módon.

$$\begin{aligned} \text{Lin} &\doteq \{Y \in \mathcal{P}(X) \mid \text{lin}_2(Y) \subset Y\}, \\ \text{Cocone} &\doteq \{Y \in \mathcal{P}(X) \mid \text{cocone}_2(Y) \subset Y\}, \\ \text{Aff} &\doteq \{Y \in \mathcal{P}(X) \mid \text{aff}_2(Y) \subset Y\}, \\ \text{Co} &\doteq \{Y \in \mathcal{P}(X) \mid \text{co}_2(Y) \subset Y\}, \\ \text{Cone} &\doteq \{Y \in \mathcal{P}(X) \mid \mathbb{T}_+ Y \subset Y\}, \end{aligned}$$

ahol $\mathbb{T}_+ Y \subset Y \doteq \{\alpha y | \alpha \in \mathbb{T}, \alpha > 0, y \in Y\}$.

Ekkor a lin , cocone , aff , co , cone konvex operátorok az alábbi módon definiálhatóak.

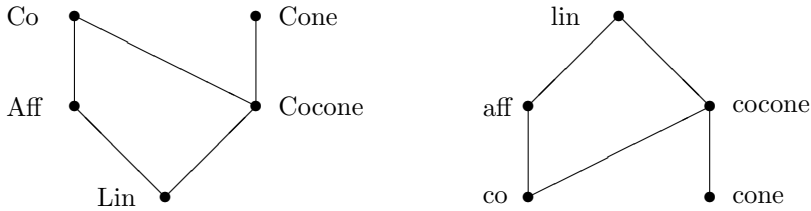
$$\text{lin} \doteq \Phi_{\text{Lin}}, \quad \text{cocone} \doteq \Phi_{\text{Cocone}}, \quad \text{aff} \doteq \Phi_{\text{Aff}}, \quad \text{co} \doteq \Phi_{\text{Co}}, \quad \text{cone} \doteq \Phi_{\text{Cone}}.$$

Könnyen látható, hogy ekkor

$$\begin{aligned} \text{lin}(Y) &= \bigcup_{n=1}^{\infty} \text{lin}_n(Y), & \text{cocone}(Y) &= \bigcup_{n=1}^{\infty} \text{cocone}_n(Y), \\ \text{aff}(Y) &= \bigcup_{n=1}^{\infty} \text{aff}_n(Y), & \text{co}(Y) &= \bigcup_{n=1}^{\infty} \text{co}_n(Y) \quad (Y \in \mathcal{P}(X)). \end{aligned}$$

A lin , aff , co , cone és cocone függvényekre vonatkozó ismeretek megtalálhatóak [07]-ban, illetve [66]-ban és and [75]-ban szintén.

A fenti halmazcsaládok, illetve konvex operátorok között fenálló rendezettségi kapcsolatokat az alábbi ábra Hasse-diagrammjai mutatják.



10.15 Definíció Defináljuk a $\text{cca} : \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(X)$ függvényt és a Cca függvénycsaládot az alábbi módon.

$$\text{cca} \doteq \text{cone} \circ \text{aff} \quad \text{and} \quad \text{Cca} \doteq \{\text{cca}(Y) | Y \in \mathcal{P}(X)\}$$

Az 10.11. **Tétel** alapján könnyen bizonyítható a következő tétel.

10.16 Tétel

	lin	aff	cocone	cca	co	cone
lin	lin	lin	lin	lin	lin	lin
aff	lin	aff			aff	
cocone	lin	cca	cocone	cca	cocone	cocone
cca	lin	cca			cca	
co	lin	aff	cocone	cca	co	
cone	lin		cocone	cca		cone

10.17 Megjegyzés Ebben a megjegyzésben összegyűjtöttük a cca függvény és a Cca halmazcsalád néhány érdekes tulajdonságát.

1. $cca(Y) = \bigcup_{n=1}^{\infty} cca_n(Y)$ minden $Y \in \mathcal{P}(X)$ esetén.
2. $cca^2 = \text{lin}$, mivel

$$\begin{aligned} cca^2 &= cca \circ cca = (\text{cone} \circ \text{aff}) \circ (\text{cone} \circ \text{aff}) = \\ &= \text{cone} \circ (\text{aff} \circ \text{cone}) \circ \text{aff} \stackrel{\text{Thm 10.20.}}{=} \text{cone} \circ \text{lin} \circ \text{aff} \stackrel{\text{Thm 10.16}}{=} \text{lin}. \end{aligned}$$

3. Ha az X vektortér null-dimenziós, vagy ekvivalens módon $X = \{0\}$, akkor

$$\text{lin} = \text{aff} = \text{co} = \text{cone} = \text{cocone} = cca,$$

így a cca függvény idempotens. Ha azonban az X vektortér legalább 1 dimenziós, akkor a cca függvény nem idempotens, így nem monoton lezárás. Ehhez legyen $b \in X \setminus \{0\}$ és $Y \doteq \{b\}$. Ekkor

$$cca(Y) = \mathbb{T}_+ \cdot \{b\} \neq \mathbb{T} \cdot \{b\} = \text{lin}(Y) = cca^2(Y).$$

4. $\text{cocone} \circ \text{aff} = cca$, mivel

$$\begin{aligned} \text{cocone} \circ \text{aff} &\stackrel{\text{Thm 10.19}}{=} (\text{cone} \circ \text{co}) \circ \text{aff} = \\ &= \text{cone} \circ (\text{co} \circ \text{aff}) \stackrel{\text{Thm 10.16}}{=} \text{cone} \circ \text{aff} = cca. \end{aligned}$$

5. A Cca halmazcsalád nem zárt a metszetképzésre nézve. Például legyen $X \doteq \mathbb{T}^2$, ahol $\mathbb{T}$ egy rendezett test. Ekkor

$$\begin{aligned} cca(\{(-1, 1), (1, 1)\}) \cap cca(\{(1, 1), (1, -1)\}) &= \\ = (\text{cone} \circ \text{aff})(\{(-1, 1), (1, 1)\}) \cap (\text{cone} \circ \text{aff})(\{(1, 1), (1, -1)\}) &= \\ = (\mathbb{T} \times \mathbb{T}_+) \cap (\mathbb{T}_+ \times \mathbb{T}) = \mathbb{T}_+^2 \doteq A. \end{aligned}$$

Megmutatjuk, hogy $A \notin Cca$. Indirekt módon tegyük fel, hogy $A \in Cca$. Ekkor létezik egy $Y \subset A$ halmaz úgy, hogy $cca(Y) = A$. Ekkor Y legalább 2-elemű. Legyen $(a, b), (c, d)$ két különböző eleme az Y halmaznak. Ekkor $a \neq c$, vagy $b \neq d$. Mondjuk $a \neq c$ és mondjuk $a < c$. Ekkor $1 < \frac{c}{a}$, ekkor létezik egy $\delta \in \mathbb{T}$ úgy, hogy $\frac{c}{a} = 1 + \delta$. Definiáljuk az $\alpha, \beta \in \mathbb{T}$ elemeket az alábbi módon.

$$\alpha \doteq \frac{1}{2}\delta + \frac{2}{3}, \quad \beta \doteq -\frac{2}{3}.$$

Ekkor egyrészt $\alpha + \beta = \frac{1}{2}\delta > 0$, így

$$\alpha(a, b) + \beta(c, d) = (\alpha a + \beta c, \alpha b + \beta d) \in cca(Y) = A.$$

Másrészt azonban

$$\begin{aligned}\alpha a + \beta c &= a \left(\alpha + \beta \frac{c}{a} \right) = a (\alpha + \beta(1 + \delta)) = a(\alpha + \beta + \beta\delta) = \\ &= a \left(\frac{1}{2}\delta - \frac{2}{3}\delta \right) = -\frac{a\delta}{6} < 0,\end{aligned}$$

ami ellentmondás.

A következő jól ismert lemma az affin és a lineáris részhalmazok közötti kapcsolatot mutatja.

10.18 Lemma *Legyen $A \subset X$ egy nemüres halmaz.*

1. *Ha $A \in \text{Aff}$, akkor $A - a = \{x - a | x \in A\} \in \text{Lin}$ minden $a \in A$ esetén.*
2. *Az A affin halmaz akkor és csak akkor lineáris, ha $0 \in A$.*

10.19 Tétel *Ha X egy rendezett $\mathbb{T}$ test feletti vektortér, akkor*

1. $\text{co}[\text{Cone}] \subset \text{Cone}$.
2. $\text{cone}[\text{Co}] \subset \text{Co}$.
3. $\text{Co} \cap \text{Cone} = \text{Cocone}$.
4. $\text{cone} \circ \text{co} = \text{co} \circ \text{cone} = \text{cocone}$.

Bizonyítás.

1. Legyen $A \in \text{Cone}$. Az általánosság csorbítása nélkül feltehetjük, hogy $A \neq \emptyset$. Megmutatjuk, hogy $\text{co}(A) \in \text{Cone}$. Ehhez legyen $\alpha \in \mathbb{T}_+$. Mivel $\alpha A \subset A$, így a co függvény szubadditivitása és monotonitása alapján kapjuk, hogy $\alpha \text{co}(A) = \text{co}(\alpha A) \subset \text{co}(A)$, így $\text{co}(A) \in \text{Cone}$, ami bizonyítandó volt.

2. Legyen $A \in \text{Co}$. Az általánosság csorbítása nélkül feltehetjük, hogy $A \neq \emptyset$. Megmutatjuk, hogy $\text{cone}(A) \in \text{Co}$. Ehhez legyen $x, y \in \text{Cone}(A)$ és $\lambda \in \mathbb{T}_+$. Ekkor léteznek $a_1, a_2 \in A$ és $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{T}_+$ úgy, hogy $x = \alpha_1 a_1$ és $y = \alpha_2 a_2$. Ekkor

$$\begin{aligned}\lambda x + (1 - \lambda)y &= \lambda \alpha_1 a_1 + (1 - \lambda) \alpha_2 a_2 = \\ &= (\lambda \alpha_1 + (1 - \lambda) \alpha_2) \left(\frac{\lambda \alpha_1}{\lambda \alpha_1 + (1 - \lambda) \alpha_2} a_1 + \frac{(1 - \lambda) \alpha_2}{\lambda \alpha_1 + (1 - \lambda) \alpha_2} a_2 \right) \in \text{Cone}(A),\end{aligned}$$

így az **1.** állítás teljesül.

3. Mivel $\text{Cocone} \subset \text{Co} \cap \text{Cone}$, így elegendő lesz megmutatni a fordított tartalmazás teljesülését. Ehhez legyen $A \in \text{Co} \cap \text{Cone}$, $x, y \in A$ and $\alpha, \beta \in \mathbb{T}_+$. Ekkor, mivel $A \in \text{Co}$ and $A \in \text{Cone}$, megállapíthatjuk, hogy

$$\alpha x + \beta y = (\alpha + \beta) \left(\frac{\alpha}{\alpha + \beta} x + \frac{\beta}{\alpha + \beta} y \right) \in A,$$

ami bizonyítandó volt.

4. Könnyen megkapható az (1), (2), (3) állításokból és a 10.13 **Tétel**ből. Ugyanis

$$\begin{aligned} \text{co} \circ \text{cone} &\stackrel{(1), 10.13.T}{=} \Phi_{\text{Co} \cap \text{Cone}} \stackrel{(3)}{=} \Phi_{\text{Cocone}} = \text{cocone}. \\ \text{cone} \circ \text{co} &\stackrel{(2), 10.13.T}{=} \Phi_{\text{Co} \cap \text{Cone}} \stackrel{(3)}{=} \Phi_{\text{Cocone}} = \text{cocone}. \end{aligned}$$

☐

10.20 Tétel *Ha X egy $\mathbb{T}$ rendezett test feletti vektortér, akkor*

1. $\text{aff}[\text{Cone}] \subset \text{Cone}$.
2. $\text{Aff} \cap \text{Cocone} = \text{Aff} \cap \text{Cone} = \text{Lin}$.
3. $\text{aff} \circ \text{cone} = \text{aff} \circ \text{cocone} = \text{lin}$.

Bizonyítás.

1. Legyen $A \in \text{Cone}$. Az általánosság csorbítása nélkül feltehetjük, hogy $A \neq \emptyset$. Megmutatjuk, hogy $\text{aff}(A) \in \text{Cone}$. Ehhez legyen $\alpha \in \mathbb{T}_+$. Az aff függvény monotonítása alapján kapjuk, hogy

$$\alpha \text{aff}(A) = \text{aff}(\alpha A) \subset \text{aff}(A),$$

így $\text{aff}(A) \in \text{Cone}$, ami bizonyítandó volt.

2. Mivel

$$\text{Lin} \subset \text{Aff} \cap \text{Cocone} \subset \text{Aff} \cap \text{Cone},$$

így elegendő megmutatni, hogy $\text{Aff} \cap \text{Cone} \subset \text{Lin}$. Ehhez legyen $A \in \text{Aff} \cap \text{Cone}$. Az általánosság csorbítása nélkül feltehetjük, hogy A nemüres. Legyen $x \in A$. Ekkor, mivel $A \in \text{Cone}$, így $2x \in A$ továbbá, mivel $A \in \text{Aff}$, így $0 = 2x + (-1)(2x) \in A$, amiből a 10.18. Lemma alapján kapjuk, hogy $A \in \text{Lin}$, ami bizonyítandó volt.

3. Az aff függvény monotonítása alapján könnyen kapjuk, hogy

$$\text{aff} \circ \text{cone} \preceq \text{aff} \circ \text{cocone} \preceq \text{lin} \circ \text{lin} = \text{lin},$$

így elegendő lesz igazolni, hogy $\text{lin} = \text{aff} \circ \text{cone}$. Mivel az **1.** állítás és a 10.13. Tétel alapján kapjuk, hogy

$$\text{aff} \circ \text{cone} \stackrel{(1), 10.13.T}{=} \Phi_{\text{Aff} \cap \text{Cone}} \stackrel{(2)}{=} \Phi_{\text{Lin}} = \text{line},$$

így a **3.** állítás teljesül. ☐

Most már a kompozícióképzés asszociativitását kihasználva könnyen teljes-sé tehető a Cayley táblázat.

	lin	aff	cocone	cca	co	cone
lin	lin	lin	lin	lin	lin	lin
aff	lin	aff	lin	lin	aff	lin
cocone	lin	cca	cocone	cca	cocone	cocone
cca	lin	cca	lin	lin	cca	lin
co	lin	aff	cocone	cca	co	cocone
cone	lin	cca	cocone	cca	cocone	cone

11. Lezárások geometriai alkalmazásai

Bevezetés

A fejezet témája a szabályos síkidomok és a szabályos testek szimmetria tulajdonságaival kapcsolatos problémák vizsgálata [38]. A szükséges ismereteket az alábbi könyvek tartalmazzák [17], [34] [35], [16],[85].

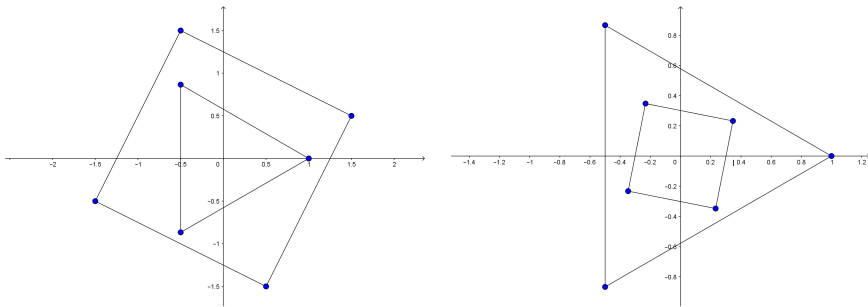
11.1 Probléma Jelölje P a sík egy rögzített pontját. Jelölje $\mathcal{F}_n$ a sík összes olyan szabályos n szögének a halmazát, amelynek középpontja a P pont, és jelölje F_n az $\mathcal{F}_n$ halmazcsalád egy tetszőlegesen rögzített elemét tetszőleges $n \in \mathbb{Z}_+$ esetén. Keressük az alábbi pontthalmazokat:

$$\Phi_{\mathcal{F}_m}(F_n) \doteq \bigcap \{Y \in \mathcal{F}_m \mid F_n \subset Y\} \quad (m \geq 3, n \geq 2),$$

$$\varphi_{\mathcal{F}_m}(F_n) \doteq \bigcup \{Y \in \mathcal{F}_m \mid Y \subset F_n\} \quad (m \geq 2, n \geq 3).$$

A $\Phi_{\mathcal{F}_m}(F_n)$ pontthalmaz meghatározását érintő kérdést a *Convexity & Application* konferencián ismertettem (2010. szeptember 5-10 Lengyelország, Iwonicz-Zdrój), majd a következő nap **Wolfgang Förg-Rob** megadta a megoldást. A duális síkbeli probléma ($\varphi_{\mathcal{F}_m}(F_n)$) analóg módon kezelhető.

A Problémát az alábbi ábrákkal szemléltetjük. Az ábrák most és a továbbiakban az $m = 4$, $n = 3$ esetet tartalmazzák.



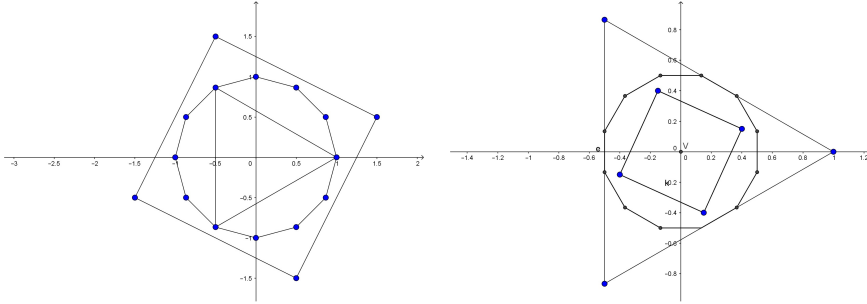
11.2 Tétel Megőrizve a fenti Probléma jelöléseit, a problémák megoldása a következő:

1. $\Phi_{\mathcal{F}_m}(F_n) \in \mathcal{F}_{\text{lkkt}(m,n)}$ tetszőleges $m \geq 3$, $n \geq 2$ esetén, azaz egy kicsit részletesebben, a $\Phi_{\mathcal{F}_m}(F_n)$ egy olyan szabályos $\text{lkkt}(m,n)$ -szög, amely az alábbi két tulajdonság által van meghatározva:

- Középpontja a rögzített P pont;

- Csúcspontjai között megtalálhatóak a rögzített szabályos F_n sokszög csúcspontjai.
2. $\varphi_{\mathcal{F}_m}(F_n) \in \mathcal{F}_{\text{lkkt}}(m,n)$ tetszőleges $m \geq 2$ $n \geq 3$ esetén, azaz egy kicsit részletesebben, a $\varphi_{\mathcal{F}_m}(F_n)$ egy olyan szabályos lkkt(m,n)-szög, amely az alábbi két tulajdonság által van meghatározva:
- Középpontja a rögzített P pont;
 - Oldalegyenesei között megtalálhatóak a rögzített szabályos F_n sokszög oldalegyenesei.

A Tétel eredményeit az alábbi ábrákkal szemléltetjük.



Bozzay Ádám javasolta, hogy vizsgáljuk a 11.2.Tétel 1. állításában az $m = 2$, a 11.2.Tétel 2. állításában az $n = 2$ eseteket, azaz a tartalmazott alakzat lehessen szabályos kétszög. Az eredeti probléma csak az $n \geq 3$, $m \geq 3$ eseteket foglalta magába. Szabályos kétszögnek a szakaszokat tekintjük. Egy szabályos kétszögnek két csúcsa és két oldalal van, a két oldala azonban egybeesik. Középpontja a szakaszfelezőpont.

A fenti problémát analóg módon értelmezzük 3 dimenziós alakzatok esetén. Ebben az esetben a síkbeli szabályos sokszögek szerepét a szabályos testek (platoni testek [34]) veszik át. Izgalmasabb a kérdés, ha a szabályos testek helyett félszabályos testeket (Archimedeszi testeket [85]) használunk. Bozzay Ádám javaslatát figyelembe véve a tartalmazott alakzatok között megengedjük, hogy alacsonyabb dimenziós szabályos alakzatok is szerepeljenek.

11.3 Probléma Legyen X egy nemüres halmaz (ponthalmaz), $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$, $G \in \mathcal{P}(X)$, továbbá legyen $\mathcal{T}$ az X halmaz traszformációinak egy csoportja. Defináljuk az $\mathcal{A}$ halmazcsaládot

$$\mathcal{A} \doteq \mathcal{TF} \doteq \{T[F] | T \in \mathcal{T}, F \in \mathcal{F}\}.$$

Célunk az alábbi ponthalmazok explicit megadása:

$$\begin{aligned}\Phi(\mathcal{F}, \mathcal{T}, G) &\doteq \Phi_{\mathcal{A}}(G) \doteq \bigcap \{A \in \mathcal{A} \mid G \subset A\}, \\ \varphi(\mathcal{F}, \mathcal{T}, G) &\doteq \phi_{\mathcal{A}}(G) \doteq \bigcup \{A \in \mathcal{A} \mid A \subset G\}.\end{aligned}$$

11.4 Megjegyzés *W. Förg-Rob az eredeti síkbeli problémát elemi geometriai eszközökkel oldotta meg. Az általunk közölt bizonyításban az általa megadott gondolatmenetet követjük azzal a különbséggel, hogy a felhasználjuk a sík pontjai és a komplex számok teste között fennálló alábbi jól ismert kapcsolatot.*

1. Ha rögzítünk a síkban egy Descartes féle koordinátarendszert, akkor a sík pontjainak halmaza és a komplex számok halmaza között kölcsönösen egyértelmű kapcsolatot létesít az $(x, y) \mapsto x + iy$ függvény.
2. Felhasználva az (1) állítást az origó körüli elforgatás egy 1 abszolútértékű komplex számmal való szorzással egyenértékű. Kissé részletesebben: legyen $\alpha \in \mathbb{R}$. Az α szöggel történő elforgatást

$$\varrho_{\alpha}([x, y]) \doteq \left(\begin{bmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right)^T \quad ([x, y] \in \mathbb{R}^2)$$

módon értelmezzük. Ekkor nyilvánvaló, hogy

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}(\varrho_{\alpha}[x, y]) + i\operatorname{Im}(\varrho_{\alpha}[x, y]) &= \\ &= (x + iy)(\cos(\alpha) + i\sin(\alpha)) \quad ([x, y] \in \mathbb{R}^2; \alpha \in \mathbb{R}),\end{aligned}$$

így az azonos középpontú elforgatások kompozíciója reprezentálható a megfelelő, 1 abszolútértékű komplex számok szorzataként.

Síkbeli forgatások tulajdonságai

Legyenek $n, k \in \mathbb{Z}_+$, továbbá

$$\begin{aligned}\varepsilon_{n,k} &\doteq \cos\left(\frac{2n\pi}{k}\right) + i\sin\left(\frac{2n\pi}{k}\right), \\ U_n &\doteq \{\varepsilon_{n,k} \mid k = 0, 1, \dots, n-1\}.\end{aligned}$$

Ekkor az U_n egy multiplikatív ciklikus részcsoportha a $\mathbb{C} \setminus \{0\} = (\mathbb{C} \setminus \{0\})(\cdot)$ csoportnak, továbbá $\varepsilon_{n,k}$ pontosan akkor generátor eleme az U_n csoportnak, ha $\operatorname{lko}(k, n) = 1$. Így az is nyilvánvaló, hogy $\mathbb{U}_m \mathbb{U}_n \subset \mathbb{U}_{\operatorname{lkk}(m,n)}$ minden $m, n \in \mathbb{Z}_+$ esetén. A következő tétel mutatja, hogy a fordított irányú tartalmazás is teljesül.

11.5 Tétel $\mathbb{U}_n \mathbb{U}_m = \mathbb{U}_{\operatorname{lkk}(n,m)}.$

Bizonyítás. Elegendő belátni, hogy $\varepsilon_{\text{lkkt}(n,m),1} \in \mathbb{U}_n \mathbb{U}_m$. Mivel

$$\text{lko} \left(\frac{m}{\text{lko}(m,n)}, \frac{n}{\text{lko}(m,n)} \right) = 1,$$

így léteznek $k, l \in \mathbb{Z}_+$ számok úgy, hogy

$$k \cdot \frac{m}{\text{lko}(m,n)} + l \cdot \frac{n}{\text{lko}(m,n)} = \frac{km + ln}{\text{lko}(m,n)} = 1. \quad (11.1)$$

Osszuk el a $k, l \in \mathbb{Z}_+$ számokat maradékosan n -el, illetve m -el, így kapjuk, hogy léteznek $p, q, r, s \in \mathbb{Z}_+ \cup \{0\}$ számok úgy, hogy

$$\begin{aligned} k &= pn + r & 0 \leq r < n, \\ l &= qm + s & 0 \leq s < m, \end{aligned} \quad (11.2)$$

Így (11.1) és (11.2) alapján kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \frac{r}{n} + \frac{s}{m} &= \frac{rm + sn}{nm} = \frac{(k - pn)m + (l - qm)n}{nm} = \frac{km + ln}{nm} - (p + q) = \\ &= \frac{1}{\text{lkkt}(m,n)} \left(\frac{km + ln}{\text{lko}(m,n)} \right) - (p + q) = \frac{1}{\text{lkkt}(m,n)} - (p + q). \end{aligned} \quad (11.3)$$

Mivel $\varepsilon_{n,r} \in \mathbb{U}_n$, $\varepsilon_{m,s} \in \mathbb{U}_m$, így (11.3) és a Moivre-tétel felhasználásával kapjuk, hogy

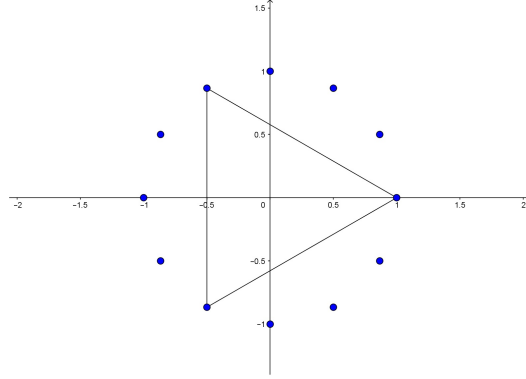
$$\begin{aligned} \varepsilon_{n,r} \varepsilon_{m,s} &= \cos \left(\left(\frac{r}{n} + \frac{s}{m} \right) 2\pi \right) + i \sin \left(\left(\frac{r}{n} + \frac{s}{m} \right) 2\pi \right) = \\ &= \cos \left(\frac{2\pi}{\text{lkkt}(n,m)} \right) + i \sin \left(\frac{2\pi}{\text{lkkt}(n,m)} \right) = \varepsilon_{\text{lkkt}(n,m),1}, \end{aligned}$$

ami bizonyítandó volt. $\square$

11.6 Tétel Legyenek $m, n \in \mathbb{Z}_+$, $m, n \geq 2$. Legyen P a sík egy rögzített pontja, és jelölje ϱ_α a P középpontú $\alpha \in \mathbb{R}$ szöggel történő elforgatást. Legyenek F_m és $F_{\text{lkkt}(m,n)}$ olyan szabályos sokszögek, amelyek középpontja a P pont. Ekkor teljesülnek a következő állítások.

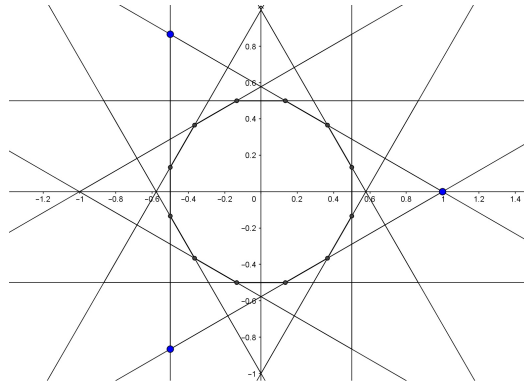
1. $\left\{ \varrho_{\frac{2j\pi}{m}} \circ \varrho_{\frac{2k\pi}{n}} \mid j = 0, 1, \dots, m-1; k = 0, 1, \dots, n-1 \right\} = \left\{ \varrho_{\frac{2l\pi}{\text{lkkt}(n,m)}} \mid l = 0, 1, \dots, \text{lkkt}(m,n) - 1 \right\}$.
2. Ha F_n és $F_{\text{lkkt}(m,n)}$ olyanok, hogy az $F_{\text{lkkt}(m,n)}$ csúcspontjai között szerepelnek az F_n csúcspontjai, az F_n csúcspontjait $A_0, A_1, \dots, A_{n-1}$, illetve az $F_{\text{lkkt}(m,n)}$ csúcspontjait $B_0, B_1, \dots, B_{\text{lkkt}(m,n)-1}$ jelöli, akkor

$$\begin{aligned} \left\{ \varrho_{\frac{2j\pi}{m}}(A_k) \mid j = 0, 1, \dots, m-1; k = 0, 1, \dots, n-1 \right\} = \\ = \{B_l \mid l = 0, 1, \dots, \text{lkkt}(n,m) - 1\}. \end{aligned}$$



3. Ha F_n és $F_{\text{lkkt}(m,n)}$ olyanok, hogy az $F_{\text{lkkt}(m,n)}$ oldalegyenesei között szerepelnek az F_n oldalegyenesei, az F_n oldalegyeneseit $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$, illetve az $F_{\text{lkkt}(m,n)}$ oldalegyeneseit $b_0, b_1, \dots, b_{\text{lkkt}(m,n)-1}$ jelöli, akkor

$$\begin{aligned} \{\varrho_{\frac{2j\pi}{n}}(a_k) | j = 0, 1, \dots, m-1; k = 0, 1, \dots, n-1\} = \\ = \{b_l | l = 0, 1, \dots, \text{lkkt}(n, m) - 1\}. \end{aligned}$$



Bizonyítás.

1. A 11.5. Tétel alapján nyilvánvaló.
2. Jelölje C a szabályos n -szög egy tetszőleges csúcsát. Ekkor az **1.** állítás

alapján kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
 \{\varrho_{\frac{2j\pi}{m}}(A_k)|j=0,1,\dots,m-1;k=0,1,\dots,n-1\} &= \\
 &= \{\varrho_{\frac{2j\pi}{m}} \circ \varrho_{\frac{2k\pi}{n}}(C)|j=0,1,\dots,m-1;k=0,1,\dots,n-1\} = \\
 &= \{\varrho_{\frac{2l\pi}{\text{lkkt}(m,n)}}(C)|l=0,1,\dots,\text{lkkt}(m,n)-1\} = \\
 &= \{B_l|l=0,1,\dots,\text{lkkt}(n,m)-1\},
 \end{aligned}$$

ami bizonyítandó volt.

3. Jelölje c a szabályos n -szög egy tetszőleges oldalegyenesét. Ekkor az **1.** állítás alapján kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
 \{\varrho_{\frac{2j\pi}{m}}(a_k)|j=0,1,\dots,m-1;k=0,1,\dots,n-1\} &= \\
 &= \{\varrho_{\frac{2j\pi}{m}} \circ \varrho_{\frac{2k\pi}{n}}(c)|j=0,1,\dots,m-1;k=0,1,\dots,n-1\} = \\
 &= \{\varrho_{\frac{2l\pi}{\text{lkkt}(m,n)}}(c)|l=0,1,\dots,\text{lkkt}(m,n)-1\} = \\
 &= \{b_l|l=0,1,\dots,\text{lkkt}(n,m)-1\},
 \end{aligned}$$

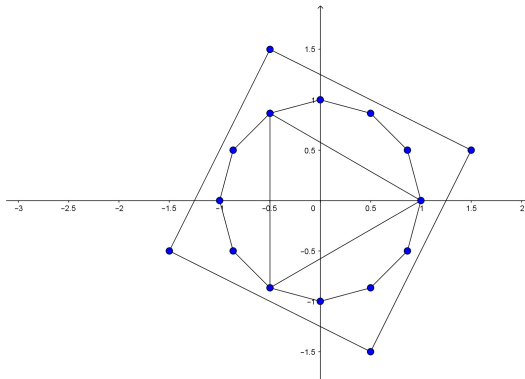
ami bizonyítandó volt. $\square$

A 11.2. Tétel bizonyítása

Először az **1.** állítást bizonyítjuk. Jelölje $F_{\text{lkkt}(m,n)}$ azt a szabályos $\text{lkkt}(m,n)$ szöget, amelynek középpontja a P pont és az $F_{\text{lkkt}(m,n)}$ csúcspontjai között szerepelnek a F_n csúcspontjai. A bizonyítás során felhasználjuk azt a tényt, hogy ha Y egy P középpontú szabályos m -szög, akkor Y invariáns ponthalmaza a P középpontú $\frac{2j\pi}{m}$ szöggel történő elforgatásnak tetszőleges $j=0,1,\dots,m-1$ esetén, azaz

$$\varrho_{\frac{2j\pi}{m}}[Y] = Y \quad (j=0,1,\dots,m-1). \quad (11.4)$$

Megmutatjuk, hogy $F_{\text{lkkt}(m,n)} \subset \Phi_{\mathcal{F}_m}(F_n)$.



Legyen $Y \in \mathcal{F}_m$ úgy, hogy $F_n \subset Y$. Ekkor A 11.6 Tétel **2.** állítása, illetve (11.4) alapján kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \{B_l | l = 1, 2, \dots, \text{lkkt}(m, n)\} &= \bigcup_{j=0}^{m-1} \bigcup_{k=0}^{n-1} \varrho_{\frac{2j\pi}{m}}(A_k) = \\ &= \bigcup_{j=0}^{m-1} \varrho_{\frac{2j\pi}{m}} \left[\bigcup_{k=0}^{n-1} \{A_k\} \right] \subset \bigcup_{j=0}^{m-1} \varrho_{\frac{2j\pi}{m}}[F_n] \subset \bigcup_{j=0}^{m-1} \varrho_{\frac{2j\pi}{m}}[Y] = Y, \end{aligned} \quad (11.5)$$

amiből, felhasználva a szabályos sokszögek konvexitását kapjuk, hogy

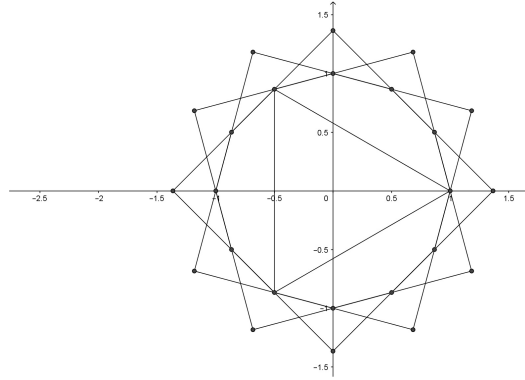
$$F_{\text{lkkt}(m,n)} = \text{co}(\{B_l | l = 1, 2, \dots, \text{lkkt}(m, n)\}) \subset \text{co}(Y) = Y,$$

így

$$F_{\text{lkkt}(m,n)} \subset \bigcap \{Y \in \mathcal{F}_m | F_n \subset Y\} \doteq \Phi_{\mathcal{F}_m}(F_n),$$

ami bizonyítandó volt.

Megmutatjuk, hogy $\Phi_{\mathcal{F}_m}(F_n) \subset F_{\text{lkkt}(m,n)}$.



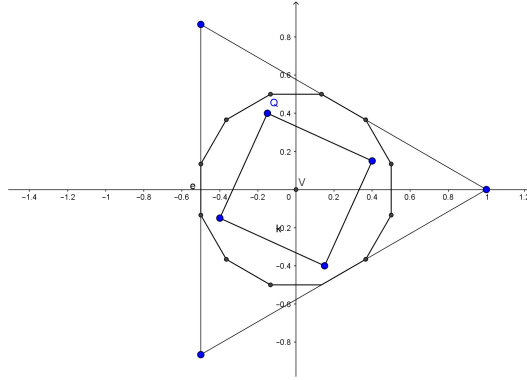
Legyenek $b_0, b_1, \dots, b_{\text{lkkt}(m,n)-1}$ az $F_{\text{lkkt}(m,n)}$ oldalegyenesei rögzített körüljárási irányban. Legyen $l \doteq \frac{\text{lkkt}(m,n)}{m}$ és jelölje Y_k a $b_k, b_{k+1l}, \dots, b_{k+(m-1)l}$ egyenesek által határolt szabályos m -szöget tetszőleges $k \in \{0, 1, \dots, l-1\}$ esetén. Ekkor, mivel $F_n \subset Y_k$, $Y_k \in \mathcal{F}_m$ és $\bigcap_{k=0}^{l-1} Y_k = F$. Így kapjuk, hogy

$$\Phi_{\mathcal{F}_m}(F_n) \doteq \bigcap \{Y \in \mathcal{F}_m | F_n \subset Y\} \subset \bigcap_{k=0}^{l-1} Y_k = F_{\text{lkkt}(m,n)},$$

a $\Phi_{\mathcal{F}_m}(F_n) \subset F_{\text{lkkt}(m,n)}$ tartalmazás is teljesül, amivel az **1.** állítás bizonyítása teljes.

Most bebizonyítjuk a 2. állítást. Jelölje $F_{\text{lkt}(m,n)}$ azt a szabályos $\text{lkt}(m,n)$ szöget, amelynek középpontja a P pont és oldalegyenesei között szerepelnek a F_n oldalegyenesei.

Megmutatjuk, hogy a $F_{\text{lkt}(m,n)} \subset \phi_{\mathcal{F}_m}(F_n)$ tartalmazás teljesül.



Legyen $Q \in F_{\text{lkt}(m,n)}$ tetszőleges pont és definiáljuk az $Y \in \mathcal{F}_m$ szabályos m -szöget az

$$Y \doteq \text{co} \left(\left\{ \varrho_{\frac{2k\pi}{m}}(Q) \mid k = 0, 1, \dots, m-1 \right\} \right)$$

módon. Ekkor, mivel $F_{\text{lkt}(m,n)}$ konvex és invariáns halmaza a $\varrho_{\frac{2k\pi}{m}}$ ($k = 0, 1, \dots, m-1$) transzformációknak, így

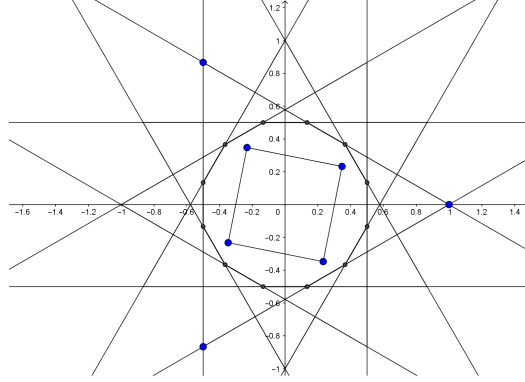
$$Y \subset \bigcap_{k=0}^{m-1} \varrho_{\frac{2k\pi}{m}}[F_n] \subset F_n, \quad \text{és} \quad Y \in \mathcal{F}_m,$$

ezért

$$Q \in \bigcup \{Y \in \mathcal{F}_m \mid Y \in F_n\} \doteq \varphi_{\mathcal{F}_m}(F_n),$$

azaz az $F_{\text{lkt}(m,n)} \subset \varphi_{\mathcal{F}_m}(F_n)$ tartalmazás teljesül.

Megmutatjuk, hogy a $\phi_{\mathcal{F}_m}(F_n) \subset F_{\text{lkk}t(m,n)}$ tartalmazás is teljesül.



Jelöljön H egy olyan félsíkot, amely tartalmazza az F_n rögzített szabályos n -szöget és határegyenese az F_n egyik oldalegyenese. Legyen továbbá $Y \in \mathcal{F}_m$ úgy, hogy $Y \subset F_n$. Ekkor (11.4), illetve 11.6. Tétel **3.** állítása alapján kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} Y &= \bigcap_{j=0}^{m-1} \varrho_{\frac{2j\pi}{m}}[Y] \subset \bigcap_{j=0}^{m-1} \varrho_{\frac{2j\pi}{m}}[F_n] = \bigcap_{j=0}^{m-1} \varrho_{\frac{2j\pi}{m}} \left[\bigcap_{k=0}^{n-1} \varrho_{\frac{2k\pi}{n}}[H] \right] = \\ &= \bigcap_{j=0}^{m-1} \bigcap_{k=0}^{n-1} (\varrho_{\frac{2j\pi}{m}} \circ \varrho_{\frac{2k\pi}{n}})[H] = \bigcap_{l=0}^{\text{lkk}t(m,n)-1} \varrho_{\frac{2l\pi}{\text{lkk}t(m,n)}}[H] = F_{\text{lkk}t(m,n)}, \end{aligned}$$

így

$$\phi_{\mathcal{F}_m}(F_n) \doteq \bigcup \{Y \in \mathcal{F}_m \mid Y \subset F_n\} \subset F_{\text{lkk}t(m,n)},$$

ami bizonyítandó volt, így a **11.2. Tétel** bizonyítása teljes.

12. A nemnegativitástartomány létezéséről

Bevezetés

A fejezetben ismertetett eredmények megtalálhatóak [47]-ben, közös munka Száz Árpáddal.

Ebben a fejezetben megmutatjuk, hogy egy X csoport tetszőleges B additív antiszimmetrikus részhalmaza pontosan akkor foglalható bele az X egy additív nemnegativitástartományába, ha X tökéletesen kancellatív, azaz minden D additív antiszimmetrikus részhalmaz és $x \in X \setminus D$ esetén $0 \notin ((B \cup \{x\}) \setminus \{0\})^\#$ vagy $0 \notin ((-B \cup \{x\}) \setminus \{0\})^\#$ ahol $Y^\#$ az $Y \subset X$ halmaz additív lezártját jelenti.

Megmutatjuk, hogy ha X egy kommutatív csoport, akkor X tökéletesen kancellatív tulajdonsága ekvivalens az X csoport végtelen kancellativitásával, amelyet az X csoport torziómentességével definiálunk. Így speciális esetként megkapjuk **Levi** [67] és **Lorenzen** tételét [68], lásd **Fuchs** [40] 36. és 39. oldal.

Additív csoport nemnegativitástartományának jelentőségét mutatja az alábbi jól ismert tény.

Legyen $X = X(+)$ egy kommutatív csoport. Legyen D az X egy 0-t tartalmazó additív nemnegativitástartománya. Defináljuk az $\leq$ relációt X -en az alábbi módon.

$$x \leq y \quad \Leftrightarrow \quad y - x \in D \quad (x, y \in X).$$

Ekkor $X(+, \leq)$ egy rendezett csoport.

Megfordítva, ha $X(+, \leq)$ egy rendezett kommutatív csoport, a $D \subset X$ részhalmazt

$$D \doteq \{x \in X \mid 0 \leq x\}$$

módon definiáljuk, akkor D egy 0-t tartalmazó additív nemnegativitástartománya az X csoportnak.

Analóg állítás érvényes testek esetén is. Legyen $\mathbb{T}$ egy (kommutatív) test, $D \subset \mathbb{T}$ egy részhalmaz, továbbá tekintsük az alábbi tulajdonságokat.

1. $D \cup (-D) = X$;
2. $D \cap (-D) = \{0\}$;
3. D additív, azaz $D + D \subset D$;
4. D multiplikatív, azaz $D \cdot D \subset D$;

Ha $\mathbb{T}$ egy (kommutatív) rendezett test, akkor a $D \doteq \{x \in \mathbb{T} \mid x \geq 0\}$ módon definiált halmaz rendelkezik a fenti 4 tulajdonsággal.

Megfordítva, Ha $D \subset \mathbb{T}$ egy olyan halmaz, amely rendelkezik a fenti 4 tulajdonsággal, akkor az

$$x \leq y \Leftrightarrow y - x \in D \quad (x, y \in X)$$

módon definiált $\leq$ relációval a $\mathbb{T}$ kommutatív test egy rendezett testté válik.

Ha a $\mathbb{T}$ testhez megadható olyan $\leq$ rendezési reláció $\mathbb{T}$ -n, amellyel a $\mathbb{T}$ egy rendezett test, akkor a $\mathbb{T}$ testet elrendezhetőnek nevezzük. A testek elrendezhetőségével kapcsolatban érdemes megjegyezni az Artin-Schreier tételt, mely szerint egy (kommutatív) test akkor és csak akkor elrendezhető, ha benne a (-1) nem írható fel négyzetösszeg formájában. Ennek megfelelően például a komplex számok $\mathbb{C}$ teste nem elrendezhető.

Nemnegativitástartomány, additív nemnegativitástartomány, kancellativitási tulajdonságok

12.1 Definíció Legyen $X = X(+)$ egy csoport és legyenek $D, A \subset X$ halmazok úgy, hogy $D \subset A$. Azt mondjuk, hogy az A halmaz **szimmetrikus**, ha $-A \subset A$.

Azt mondjuk, hogy a D halmaz

- **antiszimmetrikus**, ha $D \cap (-D) \subset \{0\}$.
- **additív**, ha $D + D \subset D$.
- az A halmaz egy **nemnegativitástartománya**, ha D antiszimmetrikus és $A = D \cup (-D)$.
- az A halmaz egy **additív nemnegativitástartománya**, ha nemnegativitástartománya A -nak és additív.

12.2 Megjegyzés Legyen $X = X(+)$ egy csoport.

1. Az $x \mapsto -x$ ($x \in X$) függvény injektivitása alapján kapjuk, hogy ha egy $A \subset X$ halmaznak létezik nemnegativitástartománya, akkor A szimmetrikus.
2. Ha egy A halmaznak létezik additív nemnegativitástartománya, abból még nem következik, hogy A additív.
3. Egy X csoport egy Y részhalmaza pontosan akkor részcsoportha X -nek, ha Y nemüres, additív és szimmetrikus.

12.3 Jelölés Legyen $X = X(+)$ egy csoport. Legyen $n \in \mathbb{Z}_+$, és $x_1, \dots, x_{n+1} \in X$ tetszőleges elemek. Ekkor

$$\sum_{i=1}^1 x_i = x_1, \quad \sum_{i=1}^{n+1} x_i = \sum_{i=1}^n x_i + x_{n+1} \quad (n \in \mathbb{Z}_+).$$

A $\sum_{i=1}^n x_i$ jelölés helyett néha az $x_1 + \dots + x_n$ jelölést alkalmazzuk.

Tetszőleges $x \in X$ elem $n \in \mathbb{Z}$ -szerezését az alábbi rekurzív definíció segítségével értelmezzük:

$$\begin{aligned} nx &\doteq \sum_{i=1}^n x, \text{ ha } n \in \mathbb{Z}_+, \\ nx &\doteq 0, \text{ ha } n = 0, \\ nx &\doteq (-n)(-x), \text{ ha } n < 0. \end{aligned}$$

12.4 Definíció Legyen $X = X(+)$ egy félcsoport, $A \subset X$. Ekkor az

$$A^\# \doteq \cap \{B \subset X \mid A \subset B \text{ és } B \text{ additív}\}$$

módon definiált halmazt az A halmaz **additív lezártjának**, vagy az A halmaz által generált félcsoportnak nevezzük.

12.5 Lemma Legyen $X = X(+)$ egy csoport. Ekkor teljesülnek a következők:

1. Az $A \subset X$ részhalmaz pontosan akkor additív, ha $A = A^\#$;
2. $A^\# = \{\sum_{i=1}^n a_i \mid n \in \mathbb{Z}_+; a_1, \dots, a_n \in A\}$ minden $A \subset X$ esetén;
3. $(B \setminus \{0\}) \cap -(B \setminus \{0\}) = (B \cap (-B)) \setminus \{0\}$ minden $B \subset X$ esetén;
4. Ha B egy 0-t nem tartalmazó additív részhalmaza X -nek, akkor B antiszimmetrikus;
5. Ha B egy additív antiszimmetrikus részhalmaza X -nek, akkor $B \setminus \{0\}$ szintén additív antiszimmetrikus, így $(B \setminus \{0\})^\# = B \setminus \{0\}$;
6. Ha B egy additív halmaz, $x \in X$, $B \cup \{x\}$ elemei kommutálnak, akkor

$$((B \cup \{x\}) \setminus \{0\})^\# = \{nx + b \mid n \in \mathbb{Z}_+ \cup \{0\}, b \in B \setminus \{0\}\} \cup \{nx \mid n \in \mathbb{Z}_+\}.$$

12.6 Jelölés Legyen $X = X(+)$ egy félcsoport. Definíáljuk az X_n ($n \in \mathbb{Z}_+$) és X_∞ halmazokat

$$\begin{aligned} X_n &\doteq \{x \in X \mid nx = 0\} \quad (n \in \mathbb{Z}_+), \\ X_\infty &\doteq \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n \end{aligned}$$

módon. Ekkor az X_n halmazhoz hozzátartozik a 0, és X -nek az összes olyan zérustól különböző elemei, amelyek rendje véges és osztója n -nek. Az X_∞ halmaz tartalmazza a 0-t és az X összes véges rendű elemét.

Az X csoportot **torziómentesnek** nevezzük, ha nem tartalmaz véges rendű elemet, azaz $X_\infty = \{0\}$.

12.7 Jelölés Legyen $X = X(+)$ egy csoport. Defináljuk az $F_B \subset X^2$ relációt

$$F_B(x) \doteq ((B \cup \{x\}) \setminus \{0\})^\# \quad (x \in X)$$

módon tetszőleges $B \subset X$ esetén.

12.8 Definíció Legyen $X = X(+)$ egy csoport. Azt mondjuk, hogy az $A \subset X$ részhalmaz

- **n -kancellatív**, ha $A \cap X_n \subset \{0\}$;
- **végtelen kancellatív**, ha $A \cap X_\infty \subset \{0\}$;
- **tökéletesen kancellatív**, ha tetszőleges $B \subset X$ additív antiszimmetrikus részhalmaz esetén

$$0 \notin F_B(x) \quad \text{vagy} \quad 0 \in F_B(-x) \quad (x \in A \setminus (B \cup (-B))).$$

12.9 Tétel (T. Glavosits, Á. Száz) Legyen $X = X(+)$ egy csoport. Ekkor teljesülnek a következők.

1. Ha $A \subset X$ tökéletesen kancellatív, akkor végtelen kancellatív.
2. Ha $A \subset X$ végtelen kancellatív, és A elemei kommutálnak, akkor A tökéletesen kancellatív.

Bizonyítás. 1. Tegyük fel, hogy $A \subset X$ tökéletesen kancellatív és legyen $x \neq 0$. Mivel $\emptyset$ az A halmaznak egy additív, antiszimmetrikus részhalmaza, így

$$0 \notin F_\emptyset(x) = \{x\}^\# \quad \text{vagy} \quad 0 \notin F_\emptyset(-x) = \{-x\}^\# \quad (x \in x \in A \setminus \{\emptyset \cup -\emptyset\}).$$

Mivel $A \setminus \{\emptyset \cup -\emptyset\} = A$, így az A halmaz végtelen kancellatív.

2. Indirekt módon tegyük fel, hogy A végtelen kancellatív, elemei kommutálnak, de nem tökéletesen kancellatív. Ekkor létezik egy $B \subset X$ additív, antiszimmetrikus halmaz és egy $x \in A \setminus (B \cup (-B))$, úgy hogy $0 \in F_B(x) \cap F_B(-x)$. Ekkor x nem lehet 0, mivel ellenkező esetben a 12.5. Lemma 5. állítása alapján

$$0 \in F_B(x) \cap F_B(-x) = F_B(0) = ((B \cup \{0\}) \setminus \{0\})^\# = (B \setminus \{0\})^\# = B \setminus \{0\},$$

ami lehetetlen. Definiáljuk a P , Q , R , S halmazokat az alábbi módon:

$$\begin{aligned} P &\doteq \{nx + b \mid n \in \mathbb{Z}_+ \cup \{0\}, b \in B \setminus \{0\}\}, & R &\doteq \{n(-x) \mid n \in \mathbb{Z}_+\}, \\ Q &\doteq \{n(-x) + b \mid n \in \mathbb{Z}_+ \cup \{0\}, b \in B \setminus \{0\}\}, & S &\doteq \{nx \mid n \in \mathbb{Z}_+\}. \end{aligned}$$

A 12.5. Lemma 6. állítása alapján

$$F_B(x) \cap F_B(-x) = (P \cup S) \cap (Q \cup R) = (P \cap Q) \cup (P \cap R) \cup (S \cap Q) \cup (S \cap R),$$

így az alábbi 4 eset valamelyike bekövetkezik:

$$\mathbf{a.} \ 0 \in P \cap Q, \quad \mathbf{b.} \ 0 \in P \cap R, \quad \mathbf{c.} \ 0 \in S \cap Q, \quad \mathbf{d.} \ 0 \in S \cap R.$$

Ha az **a.** teljesülne, akkor léteznének olyan $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}_+ \cup \{0\}$ és $b_1, b_2 \in B \setminus \{0\}$ elemek, melyekkel $0 = n_1x + b_1$ és $0 = n_2(-x) + b_2$. Nyilvánvaló módon $n_1 \neq 0$ és $n_2 \neq 0$. Mivel $n_1n_2x = -n_2b_1 \in -(B \setminus \{0\})$ és $n_1n_2x = n_1b_2 \in (B \setminus \{0\})$, amiből a 12.5. Lemma 3. állítása alapján kapjuk, hogy

$$n_1n_2x \in (B \setminus \{0\}) \cap -(B \setminus \{0\}) = (B \cap (-B)) \setminus \{0\} = \emptyset,$$

ami nyilvánvalóan ellentmondás.

A **b.**, **c.**, **d.**, esetek az **a.** esettel analóg módon bizonyíthatóak. $\boxtimes$

Nemnegativitástartomány és additív nemnegativitástartomány létezése

12.10 Tétel (T. Glavosits, Á. Száz) Legyen $X = X(+)$ egy csoport, $A \subset X$. Ekkor a következő állítások ekvivalensek.

1. A -nak létezik egy D nemnegativitástartománya.
2. A szimmetrikus és 2-kancellatív.
3. A -nak minden $B \subset A$ antiszimmetrikus részhalmaza belefoglalható az A -nak egy D nemnegativitástartományába.

Bizonyítás. 1. $\Rightarrow$ 2. Tegyük fel, hogy A -nak létezik egy D nemnegativitástartománya. A 12.2. Megjegyzés 1. állítása alapján kapjuk, hogy A szimmetrikus. Indirekt módon tegyük fel, hogy A -nak van egy D nemnegativitástartománya, azonban nem 2-kancellatív, azaz létezik egy $x \in X \setminus \{0\}$ 2-rendű eleme. Ekkor $x + x = 0$, amiből kapjuk, hogy $x = -x$. Mivel $A = D \cup (-D)$, így $x \in D$, vagy $x \in -D$. Tegyük fel, hogy $x \in D$. Ekkor a D antiszimmetrikus tulajdonsága alapján $x = -x \in D \cap (-D) \subset \{0\}$, ami ellentmondás. Az $x \in -D$ hasonlóképpen ellentmondásra vezet.

2.⇒3. Tegyük fel, hogy A szimmetrikus és 2-kancellatív, továbbá legyen B az A egy antiszimmetrikus részhalmaza. Ha a $C = A \setminus (B \cup (-B) \cup \{0\})$ halmaz nem üres, akkor ezen a halmazon definiáljuk a $\sim$ ekvivalencia-relációt az alábbi módon:

$$x \sim y \quad \Leftrightarrow \quad x = y \quad \text{vagy} \quad x = -y \quad (x, y \in C).$$

Az A halmaz 2-kancellativitása miatt minden ekvivalencia osztály pontosan két elemet tartalmaz. A kiválasztási axióma miatt létezik egy D' halmaz úgy, hogy a kapott ekvivalencia osztályok mindegyikéből pontosan egy elemet tartalmaz. Legyen

$$D \doteq \begin{cases} D' \cup B \cup \{0\}, & \text{ha } 0 \in A; \\ D' \cup B, & \text{ellenkező esetben.} \end{cases}$$

Ekkor D egy B -t tartalmazó nemnegativitástartomány A -nak.

3.⇒1. nyilvánvaló, mivel a $\emptyset$ egy additív antiszimmetrikus részhalmaza A -nak. $\square$

12.11 Tétel (T. Glavosits, Á. Száz) Legyen $X = X(+)$ egy tetszőleges csoport, $A \subset X$. Ekkor az alábbi állítások ekvivalensek:

1. A tökéletesen kancellatív.
2. Az A minden B additív antiszimmetrikus részhalmaza belefoglalható egy olyan $D \subset X$ additív antiszimmetrikus részhalmazba, amelyre $A \subset D \cup (-D)$.

Bizonyítás.

1.⇒2. Legyen A egy additív, antiszimmetrikus részhalmaza X -nek. Definiáljuk a $\mathcal{D} \subset \mathcal{P}(X)$ halmazcsaládot az alábbi módon:

$$\mathcal{D} \doteq \{Y \subset X \mid B \setminus \{0\} \subset Y, Y \text{ additív}, 0 \notin Y\}.$$

Ekkor $B \setminus \{0\} \in \mathcal{D}$, így $\mathcal{D} \neq \emptyset$. Legyen $\mathcal{L}$ egy $\mathcal{D}$ -beli halmazokból álló lánc. Mivel $\cup \mathcal{L} \in \mathcal{D}$, így a Zorn-lemma alapján kapjuk, hogy létezik $\mathcal{D}$ -nek egy D' maximális eleme.

Állítom, hogy $X \setminus (D' \cup (-D') \cup \{0\}) = \emptyset$. Indirekt módon tegyük fel, hogy létezik egy $x \in X \setminus (D' \cup (-D') \cup \{0\})$. Az $A \subset X$ tökéletes kancellativitása miatt

$$\begin{aligned} 0 \notin D_1 &\doteq ((D' \cup \{x\}) \setminus \{0\})^\# = (D' \cup \{x\})^\# \quad \text{vagy} \\ 0 \notin D_2 &\doteq ((D' \cup \{x\}) \setminus \{0\})^\# = (D' \cup \{-x\})^\#. \end{aligned}$$

$0 \notin D_1$ esetén $D_1 \in \mathcal{D}$, míg $0 \notin D_2$ esetén $D_2 \in \mathcal{D}$, így mindkét esetben ellentmondásba kerülünk a D' maximalitásával. Így a $D \doteq D' \cup \{0\}$ módon definiált

halmaz egy B -t tartalmazó olyan additív antiszimmetrikus részhalmaza X -nek, amelyre $A \subset D \cup (-D)$.

2. $\Rightarrow$ 1. Legyen B egy additív antiszimmetrikus részhalmaza A -nak és $x \in X \setminus (B \cup (-B))$. Legyen D egy B -t tartalmazó additív antiszimmetrikus részhalmaza X -nek úgy, hogy $A \subset D \cup (-D)$. Ekkor $x \in D$ vagy $-x \in D$. Tegyük fel, hogy $x \in D$. Ekkor a 12.5. Lemma 5. állítása alapján alapján:

$$((B \cup \{x\}) \setminus \{0\})^\# \subset (D \setminus \{0\})^\# = D \setminus \{0\},$$

így mivel $0 \notin D \setminus \{0\}$, így $0 \notin ((B \cup \{x\}) \setminus \{0\})^\#$. Hasonlóképpen látható, hogy a $-x \in D$ teljesülése a $0 \notin ((B \cup \{-x\}) \setminus \{0\})^\#$ teljesülését vonja maga után, azaz A tökéletesen kancellatív. $\square$

12.12 Tétel (Levi, Lorenzen) Legyen $X = X(+)$ egy kommutatív csoport. Ekkor a következő állítások ekvivalensek:

1. Az X csoportnak létezik additív nemnegativitástartománya.
2. Az X csoport végtelen kancellatív.
3. Az X csoport bármely $B \subset X$ antiszimmetrikus részhalmaza belefoglalható az X egy D additív nemnegativitástartományába.

Bizonyítás. A 12.9. Tétel alapján ha az X kommutatív csoport végtelen kancellatív, akkor tökéletesen kancellatív. A 12.11. Tétel alapján az X tökéletesen kancellatív csoport bármely antiszimmetrikus additív részhalmaza beleágyazható a csoport egy additív nemnegativitástartományába. Így az X csoportnak létezik additív nemnegativitástartománya. Végül, ha az X csoportnak létezik additív nemnegativitástartománya, akkor végtelen kancellatív. Ehhez indirekt módon tegyük fel, hogy az X csoportnak létezik D additív nemnegativitástartománya, ennek ellenére létezik olyan $x \neq 0$ eleme amelyhez létezik $n \in \mathbb{Z}_+$, amelyre x rendje n . Ekkor, mivel $x \neq 0$, így $n \geq 2$. Feltehetjük, hogy $x \in D$, ekkor $(n-1)x \in D$. Másrészt azonban $-x = (n-1)x \in (-D)$, így $-x \in D \cap (-D)$ és $-x \neq 0$, ami ellentmondás. $\square$

Az 12.12 Tételnek az **1. $\Leftrightarrow$ 2.** része megtalálható **Levi** [67] cikkében, illetve a **1. $\Leftrightarrow$ 3.** része **Lorenzen** [68] cikkében, lásd **Fuchs** [40] 36. és 39. oldalak.

12.13 Példa Ebben a példában a nemnegativitástartomány unicitását mutatjuk be ismert példákon keresztül.

1. Ha D egy 0 -t tartalmazó additív nemnegativitástartománya a $\mathbb{Z} = \mathbb{Z}(+)$ csoportnak, akkor $D \in \{\mathbb{Z}_+ \cup \{0\}, -(\mathbb{Z}_+ \cup \{0\})\}$.
2. Ha D egy 0 -t tartalmazó additív nemnegativitástartománya a $\mathbb{Q} = \mathbb{Q}(+)$ csoportnak, akkor $D \in \{\mathbb{Q}_+ \cup \{0\}, -(\mathbb{Q}_+ \cup \{0\})\}$

3. Legyen $D \subset \mathbb{R}$ olyan, hogy

$$D \cup (-D) = \mathbb{R}, \quad D \cap (-D) = \{0\}, \quad D + D \subset D, \quad D \cdot D \subset D.$$

Ekkor $D = \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$, azaz az $\mathbb{R}$ test egyértelmű módon elrendezhető.

Végül mutatunk egy kevésbé ismert példát.

4 Az $\mathbb{R} = \mathbb{R}(+)$ csoportnak létezik olyan D 0-t tartalmazó additív nemnegativitástartománya, amelyre $D \notin \{\mathbb{R}_+ \cup \{0\}, -(\mathbb{R}_+ \cup \{0\})\}$.

Ehhez tekintsük az alábbi módon definiált $B \subset \mathbb{R}$ halmazt.

$$B \doteq \{\sqrt{2}, -\sqrt{3}, 0\}^\# = \{n\sqrt{2} - m\sqrt{3} \mid n, m \in \mathbb{Z}_+ \cup \{0\}\}.$$

Ekkor a B halmaz az $\mathbb{R}$ csoport egy additív antiszimmetrikus részhalmaza, így a 12.12. Tétel alapján a B halmaz belefoglalható az $\mathbb{R}$ csoport egy D 0-t tartalmazó additív nemnegativitástartományába. Mivel a B halmaznak egyaránt van pozitív és negatív eleme (tekintettel az $\mathbb{R}$ csoport hagyományos rendezésére) így a D nemnegativitástartomány a $\mathbb{Q}_+ \cup \{0\}$ és a $\mathbb{Q}_- \cup \{0\}$ nemnegativitástartományoktól egyaránt különbözni fog.

13. Relációk páratlan szelekcióinak létezéséről

Bevezetés

A fejezetben ismertetett eredmények megtalálhatóak [46]-ben, közös munka Száz Árpáddal.

Ebben a fejezetben kritériumot adunk csoportok közötti reláció páratlan szelekciófüggvényének létezéséhez.

13.1 Definíció Legyen $F \subset X \times Y$ egy reláció, $f \subset X \times Y$ egy függvény. Azt mondjuk, hogy az f függvény az F reláció **szelekciófüggvénye**, ha értelmezési tartományaik megegyeznek, azaz $D_F = D_f$, továbbá minden $x \in D_F$ esetén $f(x) \in F(x)$.

13.2 Definíció Legyenek $X = X(+)$, $Y = Y(+)$ csoportok $f : D_f \subset X \rightarrow Y$ egy függvény úgy, hogy értelmezési tartománya szimmetrikus, azaz $-D_f \subset D_f$. Azt mondjuk, hogy az f függvény

- **páros**, ha $f(-x) = f(x)$ minden $x \in D_f$ esetén;
- **páratlan**, ha $f(-x) = -f(x)$ minden $x \in D_f$ esetén.

Idézzünk fel néhány fogalmat és jelölést, melyeket már az előző fejezetben is használtunk. Tetszőleges $X = X(+)$ csoport esetén legyen $X_2 \doteq \{x \in X \mid 2x = 0\}$, ahol $2x \doteq x + x$. Az X csoport egy A részhalmazát **2-kancellatív**nak nevezzük, ha $A \cap X_2 \subset \{0\}$.

Páratlan szelekciófüggvény létezése

13.3 Tétel (T. Glavosits, Á. Száz) Legyenek $X = (+)$, $Y = Y(+)$ csoportok, $F \subset X \times Y$ egy reláció. Ekkor az alábbi állítások ekvivalensek.

1. Az F relációnak létezik páratlan szelekciófüggvénye.
2. Teljesülnek a következők.
 - a. $f(x) \in Y_2$ minden $x \in D_F \cap X_2$ esetén.
 - b. $F(x) \cap -F(x) \neq \emptyset$ minden $x \in D_F \setminus X_2$ esetén.

Bizonyítás. $1 \Rightarrow 2$. Tegyük fel, hogy **1.** teljesül, azaz az F relációnak létezik egy f pártalan szelekciója. Legyen $x \in D_F \cap X_2$. Ekkor $x = -x$, amiből kapjuk, hogy $f(x) = f(-x) = -f(x)$, azaz $f(x) \in Y_2$. Azonban $f(x) \in F(x)$, így $F(x) \cap Y_2 \neq \emptyset$ tetszőleges $x \in D_F \cap X_2$ esetén, azaz **a.** teljesül.

Mivel f egy páratlan szelekciója az F relációnak, így $-f(x) = f(x)$, továbbá $-f(x) \in -F(x)$, $f(-x) \in F(-x)$, így $-f(x) = f(-x) \in -F(x) \cap F(-x)$ teljesül minden $x \in D_F$ esetén, így speciálisan minden $x \in D_F \setminus X_2$ esetén is, így a **b.** is teljesül.

2. $\Rightarrow$ 1. Tegyük fel, hogy **a.** és **b.** teljesülnek. Particionáljuk D_F -et két részre, legyenek

$$A \doteq D_F \cap X_2, \quad B \doteq D_F \setminus X_2.$$

Ekkor $D_F = A \cup B$, $A \cap B = \emptyset$, bár elképzelhető, hogy $A = \emptyset$ vagy $B = \emptyset$. Az általánosság csorbitása nélkül feltehetjük, hogy $A \neq \emptyset$ és $B \neq \emptyset$. Az A halmazon definiáljuk a $\varphi : A \rightarrow Y$ függvényt úgy, hogy teljesülön a

$$\varphi(x) \in F(x) \cap Y_2 \quad (x \in A).$$

Ez az **a.** és a kiválasztási axióma miatt lehetséges. Ekkor φ páratlan, mivel $x \in A$ esetén $x = -x$, azonban $\varphi(x) \in Y_2$, így $\varphi(x) = -\varphi(x)$, amiből kapjuk, hogy

$$\varphi(x) = -\varphi(x) = -\varphi(-x) \quad (x \in A).$$

A $B \subset D_F$ halmaz 2-kancellatív. Értelmezzünk a B halmazon egy ekvivalencia-relációt az alábbi módon:

$$x \sim y \Leftrightarrow x = y \text{ vagy } x = -y \quad (x, y \in B).$$

Ekkor B 2 elemű ekvivalencia osztályokra esik szét. Definiáljuk a $\psi : B \rightarrow Y$ függvényt úgy, hogy

$$\psi(x) = -\psi(-x) \in F(x) \cap -F(x) \quad (x \in B)$$

teljesüljön, ami a kiválasztási axióma és a **b.** miatt lehetséges. Ekkor ψ szintén páratlan és $\psi(x) \in F(x)$ minden $x \in B$ esetén. Végül definiáljuk az $f : D_F \rightarrow Y$ függvényt az alábbi módon:

$$f(x) \doteq \begin{cases} \varphi(x), & \text{ha } (x \in A); \\ \psi(x), & \text{ha } (x \in B). \end{cases}$$

Ekkor az f függvény valóban egy páratlan szelekciófüggvénye a F relációnak, azaz teljesül **1.** $\square$

Alkalmazás

13.4 Definíció Legyenek $X = X(+)$, $Y = Y(+)$ grupoidok (halmaz és egy a halmazon értelmezett algebrai művelet előírt tulajdonságok nélkül). Legyen $F \subset X \times Y$ egy reláció. Azt mondjuk, hogy az F reláció

- **szubadditív**, ha $F(x + y) \subset F(x) + F(y)$ minden $x, y \in D_F$ esetén;
- **szuperadditív** $F(x) + F(y) \subset F(x + y)$ minden $x, y \in D_F$ esetén;
- **additív** $F(x + y) = F(x) + F(y)$ minden $x, y \in D_F$ esetén, azaz egyidejűleg szub- és szuperadditív.

13.5 Definíció Legyenek X, Y halmazok, Y egy grupoid $F \subset X \times Y$ egy reláció, f az F egy szelekciófüggvénye. Az f függvényt az F reláció egy

- **reprezentáló szelekciófüggvényének** nevezzük, ha

$$F(x) = f(x) + F(0) \quad (x \in D_F).$$

(bal reprezentáló szelekciófüggvény);

- **normális reprezentáló szelekciófüggvényének** nevezzük, ha

$$\begin{aligned} F(x) &= f(x) + F(0), \\ F(x) &= F(0) + f(x) \end{aligned} \quad (x \in D_F).$$

A páratlan szelekciófüggvény létezésének jelentőségét az alábbi tétel mutatja:

13.6 Tétel Legyenek $X = X(+)$, $Y = Y(+)$ csoportok, $F \subset X \times Y$ egy reláció, $f : D_F \rightarrow Y$ egy függvény. Ha F szubadditív, vagy szuperadditív és az f függvény egy páratlan szelekciófüggvénye az F relációnak, akkor f egy normális reprezentáló szelekciófüggvénye F -nek.

Bizonyítás. A bizonyítást abban az esetben végezzük el, ha az F reláció szuperadditív. A szubadditív eset bizonyítása analóg.

Mivel az F reláció szuperadditív, így kapjuk, hogy

$$F(x) + F(y) \subset F(x + y) \quad (x, y \in X). \quad (13.1)$$

A (13.1) egyenletből $y \leftarrow 0$ helyettesítéssel kapjuk, hogy

$$f(x) + F(0) \subset F(x) + F(0) \subset F(x) \quad (x \in X). \quad (13.2)$$

A (13.1) egyenletből $x \leftarrow 0$, $y \leftarrow x$ helyettesítéssel kapjuk, hogy

$$F(0) + f(x) \subset F(0) + F(x) \subset F(x) \quad (x \in X). \quad (13.3)$$

A (13.1) egyenletből $y \leftarrow -x$ helyettesítéssel kapjuk, hogy

$$F(x) - f(x) = F(x) + f(-x) \subset F(x) + F(-x) \subset F(0) \quad (x \in X),$$

amiből rendezéssel kapjuk, hogy

$$F(x) \subset F(0) + f(x) \quad (x \in X). \quad (13.4)$$

A (13.1) egyenletből $x \leftarrow -x$, $y \leftarrow x$ helyettesítéssel kapjuk, hogy

$$-f(x) + F(x) = f(-x) + F(x) \subset F(-x) + F(x) \subset F(0) \quad (x \in X),$$

amiből rendezéssel kapjuk, hogy

$$F(x) \subset f(x) + F(0) \quad (x \in X). \quad (13.5)$$

A (13.3) és (13.4) eredményezik, hogy $F(x) = F(0) + f(x)$; a (13.2) és (13.5) eredményezik, hogy $F(x) = f(x) + F(0)$ tetszőleges $x \in X$ esetén, amivel a bizonyítás teljes. $\square$

14. Tartalmi összefoglaló

A disszertáció két fő részből áll. Az első részben függvényegyenletek általános megoldását keressük, a második rész lezárásokkal illetve relációkkal foglalkozik. Az első rész két legfontosabb függvényegyenlete a következő:

$$G_1\left(\frac{x+1}{y}\right) + F_1(y) = G_2\left(\frac{y+1}{x}\right) + F_2(x), \quad (0.1)$$

$$G_1(x(y+1)) + F_1(x) = G_2(y(x+1)) + F_2(y). \quad (0.5)$$

A (0.1) egyenletben az ismeretlen függvények a $G_i, F_i : \mathbb{T}_+ \rightarrow Y$ függvények, melyek a függvényegyenletet tetszőleges $x, y \in \mathbb{T}_+$ esetén elégítik ki, ahol $\mathbb{T}_+$ egy $\mathbb{T}$ rendezett test pozitív elemeinek a halmaza, Y egy egyértelműen 2-osztható Abel-csoport.

A (0.5) egyenletben az ismeretlen függvények a $G_i, F_i : \mathbb{T}_+ \rightarrow Y$ függvények, melyek a függvényegyenletet tetszőleges $x, y \in \mathbb{T}_+$ esetén elégítik ki, ahol $\mathbb{T}_+$ egy archimedeszien rendezett $\mathbb{T}$ test pozitív elemeinek a halmaza, Y egy egyértelműen 2-osztható Abel-csoport.

A 9. fejezetben megadjuk a (0.1) és a (0.5) egyenletek általános és mérhető megoldását. Mi most csak az általános megoldást mutatjuk be.

Tétel. (T. Glavosits, K. Lajkó) *Megadjuk a (0.1) és a (0.5) egyenletek általános megoldását.*

1. Legyen $\mathbb{T}$ egy rendezett test, Y egy egyértelműen 2-osztható Abel-csoport. A $G_i, F_i : \mathbb{T}_+ \rightarrow Y$ ($i = 1, 2$) függvények pontosan akkor megoldásai a (0.1) függvényegyenletnek tetszőleges $x, y \in \mathbb{T}_+$ esetén, ha

$$G_1(x) = l_1(x) + l_2(x+1) + l_3(x) + d_1,$$

$$F_1(x) = l_1(x(x+1)) + l_2(x) - l_3\left(\frac{x+1}{x}\right) + d_2,$$

$$G_2(x) = l_1(x) + l_2(x+1) - l_3(x) + d_3,$$

$$F_2(x) = l_1(x(x+1)) + l_2(x) + l_3\left(\frac{x+1}{x}\right) + d_4$$

alakúak tetszőleges $x \in \mathbb{T}_+$ esetén, ahol $l_i : \mathbb{T}_+ \rightarrow Y$ ($i = 1, 2, 3$) logaritmikus függvények, $d_j \in Y$ ($j = 1, 2, 3, 4$) konstansok úgy, hogy $d_1 + d_2 = d_3 + d_4$.

2. Legyen $\mathbb{T}$ egy archimedeszien rendezett test, Y egy egyértelműen 2-osztható Abel-csoport. A $G_i, F_i : \mathbb{T}_+ \rightarrow Y$ ($i = 1, 2$) függvények pontosan akkor megoldásai a (0.5) függvényegyenletnek tetszőleges $x, y \in \mathbb{T}_+$

esetén, ha

$$\begin{aligned} G_1(x) &= a(x) + l_2(x) + l_3(x) + d_1, \\ F_1(x) &= -a(x) + l_2\left(\frac{x}{x+1}\right) - l_3(x(x+1)) + d_2, \\ G_2(x) &= a(x) + l_2(x) - l_3(x) + d_3, \\ F_2(x) &= -a(x) + l_2\left(\frac{x}{x+1}\right) + l_3(x(x+1)) + d_4 \end{aligned}$$

alakúak tetszőleges $x \in \mathbb{T}_+$, ahol $a : \mathbb{T} \rightarrow Y$ additív függvény, $l_i : \mathbb{T}_+ \rightarrow Y$ ($i = 1, 2$) logaritmikus függvények, $d_j \in Y$ ($j = 1, 2, 3, 4$) konstansok úgy, hogy $d_1 + d_2 = d_3 + d_4$.

Most kísérjük nyomon a (0.1) függvényegyenlet megoldásának főbb állomásait.

Az 1. fejezetben megmutatjuk, hogy a (0.1) függvényegyenlet visszavezethető két egyszerűbb, kevesebb ismeretlen függvényt tartalmazó függvényegyenletre, nevezetesen érvényes az alábbi tétel:

Tétel. (T. Glavosits, K. Lajkó [44]) Legyen $\mathbb{T}$ egy rendezett test, Y egy egyértelműen 2-osztható Abel-csoport. A $G_i, F_i : \mathbb{T}_+ \rightarrow Y$ ($i = 1, 2$) függvények akkor és csak akkor megoldásai a (0.1) függvényegyenletnek minden $x, y \in \mathbb{T}_+$ esetén, ha

$$\begin{aligned} G_1(x) &= g(x) + \gamma(x), & F_1(x) &= f(x) - \gamma\left(\frac{x+1}{x}\right), \\ G_2(x) &= g(x) - \gamma(x), & F_2(x) &= f(x) + \gamma\left(\frac{x+1}{x}\right) \end{aligned}$$

alakúak minden $x \in \mathbb{T}_+$ esetén, ahol az $g, f : \mathbb{T}_+ \rightarrow Y$ függvények megoldásai a

$$g\left(\frac{x+1}{y}\right) + f(y) = g\left(\frac{y+1}{x}\right) + f(x) \quad (0.2)$$

függvényegyenletnek minden $x, y \in \mathbb{T}_+$ esetén, a $\gamma : \mathbb{T}_+ \rightarrow Y$ függvény megoldása a

$$\gamma\left(\frac{x+1}{y}\right) + \gamma\left(\frac{y+1}{x}\right) = \gamma\left(\frac{x+1}{x}\right) + \gamma\left(\frac{y+1}{y}\right) \quad (0.3)$$

függvényegyenleteknek minden $x, y \in \mathbb{T}_+$ esetén.

A (0.2) függvényegyenlet általános megoldása megtalálható a 3. fejezetben.

A (0.3) függvényegyenlet általános megoldása megtalálható a 6. fejezetben. A (0.3) egyenletet az

$$F(x) + G(y) = P(x + y) + Q\left(\frac{x}{y}\right) \quad (x, y \in \mathbb{T}_+) \quad (0.4)$$

úgynevezett Olkin-Baker függvényegyenletre vezetjük vissza. A (0.4) függvényegyenletben az $F, G, P, Q : \mathbb{T}_+ \rightarrow Y$ függvények az ismeretlen függvények. Ez utóbbi egyenlet könnyen megoldható a DLSz (Daróczy-Lajkó-Székelyhidi) Tétel segítségével.

A DLSz Tétel szerint ha egy $f : \mathbb{T}_+ \rightarrow Y$ függvény olyan, hogy minden $\lambda \in \mathbb{T}_+$ esetén a $\Delta_\lambda f : \mathbb{T}_+ \rightarrow Y$

$$\Delta_\lambda f(x) \doteq f(\lambda x) - f(x) \quad (x \in \mathbb{T}_+)$$

módon definiált függvény Jensen, akkor

$$f(x) = l(x) + j(x) \quad (x \in \mathbb{T}_+),$$

ahol $l : \mathbb{T}_+ \rightarrow Y$ egy logaritmikus függvény és $j : \mathbb{T}_+ \rightarrow Y$ Jensen-függvény, $\mathbb{T}$ egy rendezett test, Y egy egyértelműen 2-osztható Abel-csoport. A DLSz Tétel, illetve annak egy általánosítása megtalálható az 5. fejezetben.

A (0.5) egyenlet megoldásának fő állomásai: Az 1. fejezetben megmutatjuk, hogy a (0.5) egyenlet visszavezethető egyszerűbb, kevesebb ismeretlen függvényt tartalmazó függvényegyenletre, nevezetesen érvényes az alábbi tétel.

Tétel. Legyen $\mathbb{T}$ egy rendezett test, Y egy egyértelműen 2-osztható Abel-csoport. A $G_i, F_i : \mathbb{T}_+ \rightarrow Y$ ($i = 1, 2$) függvények akkor és csak akkor megoldásai a

$$G_1(x(y+1)) + F_1(x) = G_2(y(x+1)) + F_2(y) \quad (x, y \in \mathbb{T}_+) \quad (0.5)$$

függvényegyenletnek, ha

$$\begin{aligned} G_1(x) &= g(x) + \gamma(x), & F_1(x) &= f(x) - \gamma(x(x+1)), \\ G_2(x) &= g(x) - \gamma(x), & F_2(x) &= f(x) + \gamma(x(x+1)), \end{aligned} \quad (x \in \mathbb{T}_+),$$

ahol a $g, f : \mathbb{T}_+ \rightarrow Y$ függvények megoldásai a

$$g(x(y+1)) + f(x) = g(y(x+1)) + f(y) \quad (x, y \in \mathbb{T}_+), \quad (0.6)$$

függvényegyenletnek, a $\gamma : \mathbb{T}_+ \rightarrow Y$ függvény megoldása a

$$\gamma(x(y+1)) + \gamma(y(x+1)) = \gamma(x(x+1)) + \gamma(y(y+1)) \quad (x, y \in \mathbb{T}_+) \quad (0.11)$$

függvényegyenleteknek.

A (0.6) egyenlet általános megoldása megtalálható a 8. fejezetben. A megoldás során a DLSz Tételt alkalmazzuk. Ekkor meg kell mutatnunk, hogy a megoldás során kapott $g_\lambda \doteq \Delta_\lambda g$ függvény egy additív függvény és egy konstans összege. Ehhez elegendő megmutatni, hogy a g_2 függvény ($\lambda = 2$) függvény egy additív és egy konstans függvény összege. Ehhez elegendő lenne megoldani a

$$g_2(2xy + x) + g_2(xy + y) = g_2(2xy + y) + g_2(xy + y) \quad (0.9)$$

függvényegyenletet, ahol a g_2 ismeretlen függvény megoldása a (0.9) függvényegyenletnek tetszőleges $x, y \in \mathbb{T}_+$ esetén. A függvényegyenletet csak abban az esetben tudjuk megoldani, ha a benne szereplő g_2 függvény a (0.6) egyenletből származik $g_2 \doteq \Delta_2 g$ módon.

A megoldás során olyan korlátozott Pexider-additív függvényegyenletet kapunk, ahol az additivitás a $\mathbb{T}_+^2$ egy részkúpján teljesül. Ilyen típusú egyenlet általános megoldása megtalálható a 7. fejezetben.

A 7. fejezetben megadjuk az

$$f(x + y) = g(x) + h(y) \quad (x, y \in D)$$

korlátozott Pexider-additív függvényegyenlet általános megoldását, ahol $f : D_{x+y} \rightarrow Y$, $g : D_x \rightarrow Y$, $h : D_y \rightarrow Y$ az ismeretlen függvények, $G = G(+)$ egy archimedeszien rendezett sűrű Abel-csoport, $D \subset G^2$ egy nyílt halmaz és $Y = Y(+)$ egy Abel-csoport.

A (0.11) függvényegyenlet általános megoldása megtalálható a 6. fejezetben. A megoldás során felhasználjuk az

$$f(x + y) = g(xy) \quad (x, y \in \mathbb{T}_+) \quad (0.15)$$

függvényegyenletet, ahol az $f, g : \mathbb{T}_+ \rightarrow Y$ függvények az ismeretlen függvények. A (0.15) függvényegyenlet megoldása megtalálható a 4. fejezetben.

A disszertáció második része a 11., 12., 13. fejezeteket foglalja magába. A 11. fejezet célja monoton lezárások kommutativitásának a vizsgálata. A fejezet két fő eredménye az alábbi két tétel:

Tétel. (T. Glavosits, G. Pataki) *Legyen X egy halmaz, és legyenek Ψ, Ω monoton lezárások X -en. Ekkor az alábbi állítások ekvivalensek.*

- a. $Fix(\Psi) \subset Fix(\Omega)$.
- b. $\Omega \preceq \Psi$.
- c. $\Psi \circ \Omega = \Psi$.
- d. $\Omega \circ \Psi = \Psi$.

Tétel. (T. Glavosits, G. Pataki) Legyen X és legyenek Ψ, Ω monoton lezárások X -en. Ekkor az alábbi állítások ekvivalensek.

- a. $\Omega[\text{Fix}(\Psi)] \subset \text{Fix}(\Psi)$.
- b. $\Psi \circ \Omega \preceq \Omega \circ \Psi$.
- c. $\Omega \circ \Psi$ idempotens.
- d. $\Omega \circ \Psi = \Phi_{\text{Fix}(\Psi) \cap \text{Fix}(\Omega)}$.

Definiáljuk az $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ halmazcsalád által generált $\Phi_{\mathcal{A}} : \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(X)$ lezárás, illetve az $\mathcal{A}$ halmazcsalád által generált $\varphi_{\mathcal{A}} : \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(X)$ belsőképzés fogalmát az alábbi módon.

$$\begin{aligned}\Phi_{\mathcal{A}}(Y) &\doteq \{A \in \mathcal{A} \mid Y \subset A\} & (Y \in \mathcal{P}(X)), \\ \varphi_{\mathcal{A}} &\doteq \{A \in \mathcal{A} \mid A \subset Y\} & (Y \in \mathcal{P}(X)).\end{aligned}$$

A $\Phi_{\mathcal{A}}$ függvény egy monoton lezárás, a $\varphi_{\mathcal{A}}$ függvény egy monoton belsőképzés.

A kapott eredmények jól alkalmazhatóak a következő probléma megoldása során. Megadjuk egy $\mathbb{T}$ rendezett test feletti vektortéren értelmezett lineáris, affin, konvex, kúp és konvexkúp-lezárások által generált félcsoporthalmozatok leírását, ahol a félcsoporthalmozatok a kompozícióképzés.

A 11. fejezetben a halmazcsalád által generált lezárás és belsőképzés további alkalmazását mutatjuk be. Jelölje P a sík egy rögzített pontját. Jelölje $\mathcal{F}_n$ a sík összes olyan szabályos n szögének a halmazát, amelynek középpontja a P pont, és jelölje F_n az $\mathcal{F}_n$ halmazcsalád egy tetszőlegesen rögzített elemét tetszőleges $n \in \mathbb{Z}_+$ esetén. Keressük az alábbi ponthalmazokat:

$$\begin{aligned}\Phi_{\mathcal{F}_m}(F_n) &\doteq \bigcap \{Y \in \mathcal{F}_m \mid F_n \subset Y\} & (m \geq 3, n \geq 2), \\ \varphi_{\mathcal{F}_m}(F_n) &\doteq \bigcup \{Y \in \mathcal{F}_m \mid Y \subset F_n\} & (m \geq 2, n \geq 3).\end{aligned}$$

A $\Phi_{\mathcal{F}_m}(F_n)$ ponthalmaz meghatározását érintő kérdést a Convexity & Application konferencián ismertettem (2010. szeptember 5-10 Lengyelország, Iwonicz-Zdrój), majd a következő nap **Wolfgang Förg-Rob** megadta a megoldást. A duális síkbeli probléma ($\varphi_{\mathcal{F}_m}(F_n)$) analóg módon kezelhető. A kapott eredményeket az alábbi tétel tartalmazza.

Tétel. Megőrizve a fenti jelöléseket, a problémák megoldása a következő:

1. $\Phi_{\mathcal{F}_m}(F_n) \in \mathcal{F}_{\text{lkkt}(m,n)}$ tetszőleges $m \geq 3, n \geq 2$ esetén, azaz egy kicsit részletesebben, a $\Phi_{\mathcal{F}_m}(F_n)$ egy olyan szabályos $\text{lkkt}(m,n)$ -szög, amely az alábbi két tulajdonság által van meghatározva:

- Középpontja a rögzített P pont;

- Csúcspontjai között megtalálhatóak a rögzített szabályos F_n sokszög csúcspontjai.
- 2. $\varphi_{\mathcal{F}_m}(F_n) \in \mathcal{F}_{\text{lkkt}(m,n)}$ tetszőleges $m \geq 2$ $n \geq 3$ esetén, azaz egy kicsit részletesebben, a $\varphi_{\mathcal{F}_m}(F_n)$ egy olyan szabályos $\text{lkkt}(m,n)$ -szög, amely az alábbi két tulajdonság által van meghatározva:
 - Középpontja a rögzített P pont;
 - Oldalegyenesei között megtalálhatóak a rögzített szabályos F_n sokszög oldalegyenesei.

A 12. fejezetben csoport nemnegativitástartományának, illetve additív nemnegativitástartományának a létezését vizsgáljuk. Eredményeinket az alábbi tételek tartalmazzák.

Tétel. (T. Glavosits, Á. Száz [47]) Legyen $X = X(+)$ egy csoport. Ekkor teljesülnek a következők.

1. Ha $A \subset X$ tökéletesen cancellatív, akkor végtelen cancellatív.
2. Ha $A \subset X$ végtelen cancellatív, és A elemei kommutálnak, akkor A tökéletesen cancellatív.

Tétel. (T. Glavosits, Á. Száz [47]) Legyen $X = X(+)$ egy csoport, $A \subset X$. Ekkor a következő állítások ekvivalensek.

1. A -nak létezik egy D nemnegativitástartománya.
2. A szimmetrikus és 2-kancellatív.
3. A -nak minden $B \subset A$ antiszimmetrikus részhalmaza belefoglalható az A -nak egy D nemnegativitástartományába.

Tétel. (T. Glavosits, Á. Száz [47]) Legyen $X = X(+)$ egy tetszőleges csoport, $A \subset X$. Ekkor az alábbi állítások ekvivalensek:

1. A tökéletesen cancellatív.
2. Az A minden B additív antiszimmetrikus részhalmaza belefoglalható egy olyan $D \subset X$ additív antiszimmetrikus részhalmazba, amelyre $A \subset D \cup (-D)$.

A 13. fejezetben kritériumot adunk reláció páratlan szelekciófüggvényeknek létezéséről. A kapott eredményt az alábbi tétel tartalmazza.

Tétel. (T. Glavosits, Á. Száz [46]) Legyenek $X = (+)$, $Y = Y(+)$ csoportok, $F \subset X \times Y$ egy reláció. Ekkor az alábbi állítások ekvivalensek.

1. Az F relációnak létezik páratlan szelekciófüggvénye.
2. Teljesülnek a következők.
 - a. $f(x) \in Y_2$ minden $x \in D_F \cap X_2$ esetén.
 - b. $F(x) \cap -F(x) \neq \emptyset$ minden $x \in D_F \setminus X_2$ esetén.

15. Summary

The dissertation consists of two parts. In the first part we find the general solutions of some functional equations, in the second part we study closures and relations. The most important functional equations in the first part are the following equations.

$$G_1\left(\frac{x+1}{y}\right) + F_1(y) = G_2\left(\frac{y+1}{x}\right) + F_2(x), \quad (0.1)$$

$$G_1(x(y+1)) + F_1(x) = G_2(y(x+1)) + F_2(y). \quad (0.5)$$

The unknown functions $G_i, F_i : \mathbb{T}_+ \rightarrow Y$ satisfy the equation (0.1) for all $x, y \in \mathbb{T}_+$, where $\mathbb{T}_+$ is the set of all positive elements of an ordered field $\mathbb{T}$, Y is a uniquely 2-divisible Abelian group.

The unknown functions $G_i, F_i : \mathbb{T}_+ \rightarrow Y$ satisfy the equation (0.5) for all $x, y \in \mathbb{T}_+$, where $\mathbb{T}_+$ is the set of all positive elements of an archimedean ordered field $\mathbb{T}$, Y is a uniquely 2-divisible Abelian group.

In chapter 9 we give the general and measurable solutions of functional equations (0.1) and (0.5). Now we show only the general solution.

Theorem. (T. Glavosits, K. Lajkó) *We give the general solution of functional equations (0.1) and (0.5).*

1. Let $\mathbb{T}$ be an ordered field and let Y be a uniquely 2-divisible Abelian group. The functions $G_i, F_i : \mathbb{T}_+ \rightarrow Y$ ($i = 1, 2$) are solutions of the functional equation (0.1) for all $x, y \in \mathbb{T}_+$, if and only if they are of the form

$$\begin{aligned} G_1(x) &= l_1(x) + l_2(x+1) + l_3(x) + d_1, \\ F_1(x) &= l_1(x(x+1)) + l_2(x) - l_3\left(\frac{x+1}{x}\right) + d_2, \\ G_2(x) &= l_1(x) + l_2(x+1) - l_3(x) + d_3, \\ F_2(x) &= l_1(x(x+1)) + l_2(x) + l_3\left(\frac{x+1}{x}\right) + d_4 \end{aligned}$$

for all $x \in \mathbb{T}_+$, where the functions $l_i : \mathbb{T}_+ \rightarrow Y$ ($i = 1, 2, 3$) are logarithmic functions, $d_j \in Y$ ($j = 1, 2, 3, 4$) are constants such that $d_1 + d_2 = d_3 + d_4$.

2. Let $\mathbb{T}$ be an archimedean ordered field and let Y be a uniquely 2-divisible Abelian group. The functions $G_i, F_i : \mathbb{T}_+ \rightarrow Y$ ($i = 1, 2$) are solutions of functional equation (0.5) for all $x, y \in \mathbb{T}_+$ if and only if they

are of the form

$$\begin{aligned} G_1(x) &= a(x) + l_2(x) + l_3(x) + d_1, \\ F_1(x) &= -a(x) + l_2\left(\frac{x}{x+1}\right) - l_3(x(x+1)) + d_2, \\ G_2(x) &= a(x) + l_2(x) - l_3(x) + d_3, \\ F_2(x) &= -a(x) + l_2\left(\frac{x}{x+1}\right) + l_3(x(x+1)) + d_4 \end{aligned}$$

for all $x \in \mathbb{T}_+$, where the function $a : \mathbb{T} \rightarrow Y$ is an additive function, the functions $l_i : \mathbb{T}_+ \rightarrow Y$ ($i = 1, 2$) are logarithmic functions, $d_j \in Y$ ($j = 1, 2, 3, 4$) are constants such that $d_1 + d_2 = d_3 + d_4$.

Now let us review the main steps of the solution of functional equation (0.1).

In chapter 1 we show that the functional equation (0.1) can be reduced to simpler functional equations, as it is shown in the following Theorem.

Theorem. (T. Glavosits, K. Lajkó [44]) *Let $\mathbb{T}$ be an ordered field, Y be a uniquely 2-divisible Abelian group. The functions $G_i, F_i : \mathbb{T}_+ \rightarrow Y$ ($i = 1, 2$) satisfy the functional equation (0.1) for all $x, y \in \mathbb{T}_+$ if and only if they are of the form*

$$\begin{aligned} G_1(x) &= g(x) + \gamma(x), & F_1(x) &= f(x) - \gamma\left(\frac{x+1}{x}\right), \\ G_2(x) &= g(x) - \gamma(x), & F_2(x) &= f(x) + \gamma\left(\frac{x+1}{x}\right) \end{aligned}$$

for all $x \in \mathbb{T}_+$, where the functions $g, f : \mathbb{T}_+ \rightarrow Y$ satisfy the functional equation

$$g\left(\frac{x+1}{y}\right) + f(y) = g\left(\frac{y+1}{x}\right) + f(x) \quad (0.2)$$

for all $x, y \in \mathbb{T}_+$, and the function $\gamma : \mathbb{T}_+ \rightarrow Y$ satisfies the functional equation

$$\gamma\left(\frac{x+1}{y}\right) + \gamma\left(\frac{y+1}{x}\right) = \gamma\left(\frac{x+1}{x}\right) + \gamma\left(\frac{y+1}{y}\right) \quad (0.3)$$

for all $x, y \in \mathbb{T}_+$.

The general solution of functional equation (0.2) can be found in chapter 3.

The general solution of functional equation (0.3) can be found in chapter 6. The equation (0.3) is reduced to the following, so-called Olkin-Baker functional equation

$$F(x) + G(y) = P(x + y) + Q\left(\frac{x}{y}\right) \quad (x, y \in \mathbb{T}_+), \quad (0.4)$$

In functional equation (0.4) the functions $F, G, P, Q : \mathbb{T}_+ \rightarrow Y$ are the unknown functions. This equation can be easily solved by the DLSz Theorem (Daróczy-Lajkó-Székelyhidi).

Due to DLSz Theorem if $f : \mathbb{T}_+ \rightarrow Y$ is a function such that the function $\Delta_\lambda f : \mathbb{T}_+ \rightarrow Y$ defined by

$$\Delta_\lambda f(x) \doteq f(\lambda x) - f(x) \quad (x \in \mathbb{T}_+)$$

is a Jensen function for all $\lambda \in \mathbb{T}_+$, then

$$f(x) = l(x) + j(x) \quad (x \in \mathbb{T}_+)$$

where $l : \mathbb{T}_+ \rightarrow Y$ is a logarithmic function, and the function $j : \mathbb{T}_+ \rightarrow Y$ is a Jensen function (where $\mathbb{T}$ is an ordered field, Y is an uniquely 2-divisible Abelian group). The DLSz Theorem and the generalization of it can be found in chapter 5.

The other main functional equation in the first part of the dissertation is equation (0.5). In chapter 1 we show that the equation (0.5) can be reduced to simpler functional equations by the following Theorem.

Theorem. *Let $\mathbb{T}$ be an ordered field and let Y be a uniquely 2-divisible Abelian group. The functions $G_i, F_i : \mathbb{T}_+ \rightarrow Y$ ($i = 1, 2$) are the general solutions of the functional equation*

$$G_1(x(y+1)) + F_1(x) = G_2(y(x+1)) + F_2(y) \quad (x, y \in \mathbb{T}_+) \quad (0.5)$$

if and only if they are of the form

$$\begin{aligned} G_1(x) &= g(x) + \gamma(x), & F_1(x) &= f(x) - \gamma(x(x+1)), \\ G_2(x) &= g(x) - \gamma(x), & F_2(x) &= f(x) + \gamma(x(x+1)), \end{aligned} \quad (x \in \mathbb{T}_+),$$

where the functions $g, f : \mathbb{T}_+ \rightarrow Y$ satisfy the functional equation

$$g(x(y+1)) + f(x) = g(y(x+1)) + f(y) \quad (x, y \in \mathbb{T}_+), \quad (0.6)$$

and the function $\gamma : \mathbb{T}_+ \rightarrow Y$ satisfies the functional equation

$$\gamma(x(y+1)) + \gamma(y(x+1)) = \gamma(x(x+1)) + \gamma(y(y+1)) \quad (x, y \in \mathbb{T}_+). \quad (0.11)$$

The general solution of functional equation (0.6) can be found in chapter 8. For the proof we use the DLSz Theorem. We have to show that the obtained function $g_\lambda \doteq \Delta_\lambda g$ is the sum of an additive function and a constant. For this it would be enough to show that the function g_2 (the case $\lambda = 2$) is also the sum of an additive function and a constant. For this it is enough to solve the functional equation

$$g_2(2xy + x) + g_2(xy + y) = g_2(2xy + y) + g_2(xy + y), \quad (0.9)$$

where the unknown function g_2 satisfies the equation (0.9) for all $x, y \in \mathbb{T}_+$. We know the general solution of this equation only in the case, where the function g_2 can be derived from the equation (0.6) by the definition $g_2 = \Delta_2 g$.

During the proof we obtain a restricted Cauchy-additive functional equation, where the additivity is fulfilled on a sub-cone of the set $\mathbb{T}_+^2$. The general solution of functional equations of this type can be found in chapter 7.

In chapter 8. we give the general solution of the restricted Pexider-additive functional equation

$$f(x + y) = g(x) + h(y) \quad (x, y \in D)$$

where the functions $f : D_{x+y} \rightarrow Y$, $g : D_x \rightarrow Y$, $h : D_y \rightarrow Y$ are the unknown functions, $G = G(+)$ is an arhimedean ordered Abelian group, $D \subset G^2$ is an open set and $Y = Y(+)$ is an Abelian group.

The general solution of the functional equation (0.11) can be found in chapter 6. During the proof we use the functional equation

$$f(x + y) = g(xy) \quad (x, y \in \mathbb{T}_+), \quad (0.15)$$

where the functions $f, g : \mathbb{T}_+ \rightarrow Y$ are unknown. The solution of equation (0.15) can be found in chapter 4.

The second part of this dissertation consists of the chapters 11, 12, 13. The purpose of chapter 11 is the investigation of the commutativity of monotone closures. The two main results of this chapter are the following Theorems.

Theorem. (T. Glavosits, G. Pataki) *Let X be a set and let Ψ, Ω be monotone closures on the set X . Then the following statements are equivalent.*

- a. $Fix(\Psi) \subset Fix(\Omega)$.
- b. $\Omega \preceq \Psi$.
- c. $\Psi \circ \Omega = \Psi$.
- d. $\Omega \circ \Psi = \Psi$.

Theorem. (T. Glavosits, G. Pataki) *Let X be a set and let Ψ, Ω be monotone closures on the set X . Then the following statements are equivalent.*

- a. $\Omega[Fix(\Psi)] \subset Fix(\Psi)$.
- b. $\Psi \circ \Omega \preceq \Omega \circ \Psi$.
- c. $\Omega \circ \Psi$ is idempotent.
- d. $\Omega \circ \Psi = \Phi_{Fix(\Psi) \cap Fix(\Omega)}$.

Define the closure $\Phi_{\mathcal{A}} : \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(X)$ generated by the family $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ and define the inner-operator $\varphi_{\mathcal{A}} : \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(X)$ generated by the family $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ as

$$\begin{aligned}\Phi_{\mathcal{A}}(Y) &\doteq \{A \in \mathcal{A} | Y \subset A\} & (Y \in \mathcal{P}(X)), \\ \varphi_{\mathcal{A}} &\doteq \{A \in \mathcal{A} | A \subset Y\} & (Y \in \mathcal{P}(X)).\end{aligned}$$

respectively. Then the function $\Phi_{\mathcal{A}}$ is a monotone closure, and the family $\varphi_{\mathcal{A}}$ is a monotone inner-operator.

As an application of the above concepts and Theorems we give the full description of the semigroup generated by the linear, affine, convex, cone and convex-cone closures defined on a vector space over an ordered field $\mathbb{T}$.

In chapter 11 we give an additional application of the closure and inner operation generated by a set-family. Let P be an arbitrarily fixed point of the plane. Let us denote by $\mathcal{F}_n$ the set of all P centered regular n -gons in the plane. Let $F_n \in \mathcal{F}_n$ be also arbitrarily fixed. We want to find the following set of points.

$$\begin{aligned}\Phi_{\mathcal{F}_m}(F_n) &\doteq \bigcap \{Y \in \mathcal{F}_m | F_n \subset Y\} & (m \geq 3, n \geq 2), \\ \varphi_{\mathcal{F}_m}(F_n) &\doteq \bigcup \{Y \in \mathcal{F}_m | Y \subset F_n\} & (m \geq 2, n \geq 3).\end{aligned}$$

The problem concerning the point-set $\Phi_{\mathcal{F}_m}(F_n)$ was proposed first by myself at the conference Convexity & Application, 5-10 September, 2010, Iwonicz-Zdrój (Poland). On the following day **Wolfgang Förg-Rob** gave the solution. The dual problem in the plane, concerning the point-set $(\varphi_{\mathcal{F}_m}(F_n))$, can be solved analogously. The following Theorem shows the obtained results.

P *reserving the previous notations, we can state that*

1. $\Phi_{\mathcal{F}_m}(F_n) \in \mathcal{F}_{\text{lcm}(m,n)}$ for all $m \geq 3$, $n \geq 2$, or in details, $\Phi_{\mathcal{F}_m}(F_n)$ is a regular $\text{lcm}(m,n)$ -gon, which is determined by the following two properties:
 - Its center is the point P ;
 - The vertices of the fixed polygon F_n can be found among the vertices of it.

2. $\varphi_{\mathcal{F}_m}(F_n) \in \mathcal{F}_{\text{lcm}(m,n)}$ for all $m \geq 2$, $n \geq 3$, or in details, the $\varphi_{\mathcal{F}_m}(F_n)$ is a regular $\text{lcm}(m,n)$ -gon, which is determined by the following two properties:
- Its center is the point P ;
 - The sides of the fixed polygon F_n can be found among the sides of it.

In chapter 12 we investigate the existence of the non-negativity domain and the existence of the additive non-negativity domain of a group. Our results are presented in the following Theorems.

Theorem. (T. Glavosits, Á. Száz [47]) *Let $X = X(+)$ be a group. Then the following statements hold.*

1. *If the subset $A \subset X$ is perfectly cancellable, then it is infinitely cancellable.*
2. *If the subset $A \subset X$ is infinitely cancellable, and the elements of A commute with each other, then A is perfectly cancellable.*

Theorem. (T. Glavosits, Á. Száz [47]) *Let $X = X(+)$ be a group and let $A \subset X$. Then the following statements are equivalent.*

1. *There exists a non-negativity domain D of the set A .*
2. *The set A is symmetric and 2-cancellable.*
3. *All antisymmetric subsets B of the set A can be extended to a non-negativity domain D of the set A .*

Theorem. (T. Glavosits, Á. Száz [47]) *Let $X = X(+)$ be an arbitrary group and let $A \subset X$. Then the following statements are equivalent.*

1. *The set A is perfectly cancellable.*
2. *All additive and antisymmetric subsets B of the set A can be extended to an additive antisymmetric subset D such that $A \subset D \cup (-D)$.*

In chapter 13 we give a criterion of the existence of an odd selection of a relation $R \subset X \times Y$, where X and Y are groups. The following Theorem presents the obtained result.

Theorem. (T. Glavosits, Á. Száz [46]) *Let $X = (+)$ and $Y = Y(+)$ be groups and let $F \subset X \times Y$ be a relation. Then the following statements are equivalent.*

1. *There exists an odd selection of the relation F .*
2. *The following statements hold*
 - a.** $f(x) \in Y_2$ for all $x \in D_F \cap X_2$.
 - b.** $F(x) \cap -F(x) \neq \emptyset$ for all $x \in D_F \setminus X_2$.

Hivatkozások

- [01] J. **Aczél**, Lectures on Functional Equations and Their Applications, *Academic Press, New York-London*. (1966) [Mathematics in Science and Engineering, Vol. 19].
- [02] J. **Aczél**, it 28. Remark, Report of Meeting. The Twenty-second International Symposium on Functional Equations (December 16-December 22, 1984, Oberwolfach, Germany), *Aequationes Math.* **29** (1985) p.101.
- [03] J. **Aczél**, J. **Dhombres**, Functional equations in several variables, *Cambridge University Press* (1989).
- [04] J. **Aczél**, P. **Erdős**, The non-existence of a Hamel-basis and the general solution of Cauchy's functional equation for nonnegative numbers, *Publ. Math. Debrecen* **12** (1965) 259–265.
- [05] B. C. **Arnold**, E. **Castillo**, J. M. **Sarabia**, Conditionally Specified Distributions, Lecture Notes in Statistics, *Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York-London-Paris-Hong Kong-Budapest* **73** (2006).
- [06] J. A. **Baker**, On the functional equation $f(x)g(x) = p(x+y)q\left(\frac{x}{y}\right)$, *Aequationes Math.* **14** (1976) 493–506.
- [07] A. **Barvinok**, A Course in Convexity, *American Mathematical Society* (2002).
- [08] W. **Benz**, P191R1. Remark, *Aequationes Math.* **20** (1980) 307.
- [09] G. **Birckhoff**, T. C. **Bartee**, A modern algebra a számítógéptudományban, *Műszaki könyvkiadó* (**1974**).
- [10] D. **Blanusa**, The functional equation $f(x+y-xy)+f(xy)=f(x)+f(y)$, *Aequationes Math.* **5** (1970) 63–70.
- [11] J. M. **Borwein**, P. B. **Borwein**, Pi and AGM. A study in Analytic Number Theory and Computational Complexity, *John Wiley and Sons., New York* (1987),
- [12] A.M. **Bruckner**, J.B. **Bruckner**, B.S. **Thomson**, Elementary Real Analysis, *Prentice-Hall* (2001).
- [13] A.M. **Bruckner**, J.B. **Bruckner**, B.S. **Thomson**, Real Analysis, *Prentice-Hall* (1997).
- [14] N. G. de **Bruijn**, Functions whose differences belong to a given class, *Nieuw Arch. Wisk.* **23/2** (1951) 194–218.
- [15] B. **Burris**, H. P. **Sankappanavar**, Bevezetés az univerzális algebrába, *Tankönyvkiadó, Budapest* (**1988**).

- [16] J. H. **Conway**, H. **Burgiel**, C. **Goodman-Strauss** The Symmetries of Things, *Taylor & Francis Group* (2008).
- [17] H. S. M **Coxeter**, Regular Polytopes, *Pitman* (1947).
- [18] G. **Czédli**, Hálóelmélet, *JATEPress, Szeged* (1999).
- [19] Z. **Daróczy**, Functional equations involving quasi-arithmetic means and their Gauss composition, *Annales Univ. Sci, Budapest* **27** (2007) 45–55
- [20] B4456 (Javasolta Daróczy Zoltán) KöMaL. (2012)/5.
- [21] Z. **Daróczy**, On the general solution of the functional equation $f(xy) + f(x + y - xy) = f(x) + f(y)$, *Publ. Math. Debrecen* **15** (1964) 52–86.
- [22] Z. **Daróczy**, Über die Funktionalgleichung $f(x + y - xy) + f(xy) = f(x) + f(y)$, *Aequationes Math.* **6** (1971) 130–132.
- [23] Z. **Daróczy**, K. **Lajkó**, R. **Lovas**, Gy. **Maksa**, Zs. **Páles**, Functional equations involving means, *Acta. Math. Hungarica* **116**/1-2 (2002) 79–87.
- [24] Z. **Daróczy**, K. **Lajkó**, L. **Székelyhidi**, Functional equations on ordered fields, *Publ. Math. Debrecen* **24** (1977) 173–179.
- [25] Z. **Daróczy**, L. **Losonczi**, Über die Erweiterung der auf einer Punktmenge additiven Funktionen, *Publ. Math. Debrecen* **14** (1967) 239–245.
- [26] Z. **Daróczy**, Gy. **Maksa**, Zs. **Páles**, Functional equations involving means and their Gauss composition, *Am. Math. Society* **134**/2 (2006) 521–530.
- [27] Z. **Daróczy**, Zs. **Páles**, Gauss-composition of means and the solution of the Matkowski-Sutó problem, *Publ. Math. Debrecen* **61**/1-2 (2002) 157–218.
- [28] T. M. K. **Davison**, The complete solution of Hosszús functional equation over a field, *Aequationes Math.* **11** (1974) 273–276.
- [29] T. M. K. **Davison**, On the functional equation $f(m + n - mn) + f(mn) = f(m) + f(n)$, *Aequationes Math.* **11** (1974) 206–211.
- [30] T. M. K. **Davison**, On Hosszús's functional equation, *mathematics Institute, university of Warwick, Coventry, England* (April 1974)
- [31] T. M. K. **Davison**, 191. Problem, *Aequationes* **20** (1980) 306.
- [32] T. M. K. **Davison**, L. **Redlin**, Hosszús functional equation over rings generated by their units, *Aequationes Math.* **21** (1980) 121–128.
- [33] B. R. **Ebanks**, Solution of Some Functional Equations Involving Symmetric Means, *Publ. Math. Debrecen* **61**./3-4 (2002) 579–588.

- [34] **Euklidesz**, $\Sigma\tau\omicron\iota\chi\epsilon\iota\alpha$, (i.e. 300 körül). Magyarul: **Euklidesz**, Mayer Gyula fordításában, *Gondolat* (1983).
- [35] **L.Fejes Tóth**, Regular figures, *Pergamon* (1964).
- [36] **I. Fenyő**, On the general solution of a functional equation in the domain of distributions *Aequationes Math.* **3** (1969) 236–246.
- [37] **I. Fenyő**, Über die Funktional gleichung

$$f(a_0 + a_1x + a_2y + a_3xy) + g(b_0 + b_1x + b_2y + b_3xy) = h(x) + h(y), \quad (15.1)$$
Acta Math. Hung. **21** (1970) 35–46.
- [38] **W. Förg-Rob**, **T. Glavosits**, On regular polygons and Platonic solids, *In preparation*.
- [39] **E. Fried**, Absztrakt algebra - elemi úton, Műszaki Könyvkiadó, Budapest (1975).
- [40] **L. Fuchs**, Partially Ordered Algebraic Systems, *Pergamon Press Oxford* (1963)
- [41] **R. Girgensohn**, **K. Lajkó**, A functional equation of Davison and its generalization, *Aequationes Math.* **60** (2000) 219–224.
- [42] **T. Glavosits**, Függvényegyenletek megoldása iterációval, *OTDK dolgozat, Miskolc* (2003) Témavezető: Z. Daróczy.
- [43] **T. Glavosits**, Karakterizációs problémákból származó függvényegyenletek általános megoldása, *OTDK dolgozat, Budapest* (2005) Témavezető: K. Lajkó.
- [44] **T. Glavosits**, **K. Lajkó**, The general solution of a functional equation related to the characterisation of bivariate distributions, *Aequationes Math.* **70** (2005) 88–100.
- [45] **T. Glavosits**, **K. Lajkó**, Pexiderization of some logarithmic functional equations, *Publ. Math. Debrecen* **89/3** (2016) 355–3064.
- [46] **T. Glavosits**, **Á. Száz**, On the existence of odd selections, *Adv. Stud. Contemp. Math. (Kyungshang)* **8** (2004) 155–164.
- [47] **T. Glavosits**, **Á. Száz**, On the existence of nonnegativity domains of subsets of groups, *Demonstr. Math.* **37** (2004) 505–516.
- [48] **E. Głowacki**, **M. Kuczma**, Some remarks on Hosszú's functional equation on intergers, *Uniw. Śląski w Katowicach Prace Nauk. Prace Mat.* **9** (1979) 53–63.

- [49] Edited by R. L. **Graham**, J. **Nesetril**, S. **Butler**, The Mathematics of Paul Erdős I, *Springer Part IV. Geometry*, J. **Aczél**, L. **Losonczi**, Section: Extension of Functional Equations (2013) 447–460.
- [50] G. **Hamel**, Eine Basis aller Zahlen und die unstetigen Lösungen der Functionalgleichung $f(x+y)=f(x)+f(y)$, *Math. Ann.* **60** (1905) 459–462.
- [51] G. H. **Hardy**, J. E. **Littlewood**, Gy. **Pólya** Inequalities, *Cambridge: Cambridge University Press* (1978),
- [52] M. **Hosszú**, A remark on the dependence of functions *Zeszyty Naukowe Uniwersytetu Jagiellońskiego, Prace matematyczne*, **14** (1970) 127–129.
- [53] A. **Járai**, On measurable solution of functional equations, *Publ. Math. Debrecen* **26** (1979) 17–35.
- [54] J. L. W. V. **Jensen**, Sur les fonctions convexes et les inégalités entre les valeurs Moyennes, *Acta Math.* **30**/1 (1906) 175–193.
- [55] J.L. **Kelley**, General Topology, *Springer-Verlag* (1975).
- [56] E. **Kiss**, Bevezetés az algebrába. Typotex, Budapest (2007)
- [57] M. **Kuczma**, An introduction to the theory of functional equations and inequalities. Cauchy’s equation and Jensen’s inequality, *Birkhäuser Basel* (2008).
- [58] K. **Lajkó**, Applications of extensions of additive functions, *Aequationes Math.* **11** (1974) 68–76.
- [59] K. **Lajkó**, Remark to a paper by J. A. Baker, *Aequationes Math.* **19** (1979) 227–231.
- [60] K. **Lajkó**, Remarks on a problem of Davison, Report of Meeting, *Aequationes Math.* **56** (1998) 289.
- [61] K. **Lajkó**, Functional equations in the theory of conditionally specified distributions, *Publ. Math. Debrecen* **58**/1-2 (2001) 141–148.
- [62] K. **Lajkó**, On a functional equation of Alsina and García-Roig, *Publ. Math. Debrecen* **52**/1-2 (1998) 507–515.
- [63] K. **Lajkó**, Gy. **Maksa**, F. **Mészáros**, On a generalized Hosszú functional equation, *Publ. Math. Debrecen* **74**/1-2 (2009) 101–106.
- [64] K. **Lajkó**, F. **Mészáros**, Density function solution of a functional equation, *47th ISFE, Gargnano, Italy* (2009).
- [65] S. **Lang**, Algebra, *Springer-Verlag New York* (2002)
- [66] I. E. **Leonard**, J. E. **Lewis** Geometry of convex sets, *Wiley* (2016).

- [67] F. W. **Levi**, Arithmetische Gesetze im Gebiete diskreter Gruppen, *Rend. Circ. Mat. Palermo* **35** (1913) 225–236.
- [68] P. **Lorenzen**, Abstrakte Begründung der multiplikativen Idealtheorie, *Math. Z.* **45** (1939) 533–553.
- [69] E. **Lukács**, A characterization of the gamma distribution, *Ann. Math. Statist.* **26** (1995) 319–324.
- [70] Gy. **Maksa**, On the functional equation $f(x + y) + g(xy) = h(x) + h(y)$, *Publ. Math. Debrecen* **241/2** (1977) 25–29.
- [71] F. **Mészáros**, K. **Lajkó**, Functional equations and characterization problems *VDM Verlag Dr. Müller* (2011).
- [72] S. **Narumi**, On the General Forms of Bivariate Frequency Distributions which are Mathematically Possible when Regression and Variation are Subjected to Limiting Conditions, I, II., *Biometria* **15** (1923) 77–88, 209–221.
- [73] I. **Olkin**, P 138, *Aequationes Math.* **12** (1975) 290–292.
- [74] J. **Rimán**, On an extension of Pexider equation, *Zbornik Radova Math. Inst. Beograd N. S.* **1/9** (1976) 65–72.
- [75] R. Tyrrell **Rockafellar**, Convex Analysis, *Princeton Press* (1970).
- [76] C. G. **Small**, Functional Equations and How to Solve Them, *Springer Science+Business Media*, (2007)
- [77] L. **Surányi**, Algebra. Typotex, Budapest (1998)
- [78] H. **Swiatak**, On the functional equation $f(x + y - xy) + f(xy) = f(x) + f(y)$, *Math. Vesnik* **5(20)** (1968) 177–182.
- [79] H. **Swiatak**, Remarks on the functional equation $f(x + y - xy) + f(xy) = f(x) + f(y)$, *Aequationes Math.* **1** (1968) 239–241.
- [80] H. **Swiatak**, A proof of the equivalence of the equation $f(x + y - xy) + f(xy) = f(x) + f(y)$ and Jensen's functional equation, *Aequationes Math.* **6** (1971) 24–29.
- [81] G. **Szász**, Bevezetés a hálóelméletbe, *Akadémia Kiadó* (1959).
- [82] J. **Szendrei**, Algebra és számelmélet. Nemzedékek Tudása Tankönyvkiadó, Budapest (2001)
- [83] L. **Székelyhidi**, The general representation of an additive function on an open point set, *Magyar Tud. Akad. Mat. Fiz. Oszt. Közl.* **21** (1972).
- [84] M. L. J. **Van De Vel**, Theory of Convex Structures, *NORTH-HOLLAND AMSTERDAM LONDON NEW YORK TOKYO* (1993).
- [85] H. **Weyl**, Symmetry, *Princeton University Press* (1952).

Előadások listája

1. *The general solution of a functional equation related to the characterisation of bivariate distributions*. International Students' Conference, 2005. február 9-13. Szczyrk (Lengyelország)
2. *The general solutions of functional equations*, International Student Conference of Analysis, 2006. február 6. Síkfőkút (Magyarország)
3. *Beszámoló az egyetemi éveim alatti kutatómunkámról*, Tanszéki szeminárium, 2006. február 17. Debrecen (Magyarország)
4. *A késő újkőkori tiszai meander és meandrikus motívumainak jellegzetességei*, (Közös előadás Richter Évával) Csalog József Emlékkonferencia, 2008. november 10. Szentes (Magyarország)
5. *Hahn-Banach-féle kiterjesztési tétel bizonyítása infimális konvolúcióval*, Intézeti szeminárium, 2009. november 12. Debrecen (Magyarország)
6. *The infimal convolution and its applications*, The 6th International Students' Conference of Analysis, 2010. január 31.-február 3. Síkfőkút (Magyarország)
7. *Szemléltető példák a monoton additív függvények kiterjesztési tételeihez II*, Tanszéki szeminárium, 2010. május 21.-24. Síkfőkút (Magyarország)
8. *The infimal convolution can be used to prove some dominated monotone additive extension theorems*, 8th Joint Conference on Mathematics and Computer Science, 2010. július 14.-17. Komárno (Szlovákia)
9. *A Hahn-Banach-féle kiterjesztés egyértelműségének karakterizációja infimális konvolúció alkalmazásával*, Bolyai János Emlékkonferencia, 2010. augusztus 30.-szeptember 4., Budapest-Marosvásárhely (Magyarország-Románia)
10. *Closures and conveyity*, Conveyity & Applications, 2010. szeptember 5.-10. Iwonicz Zdrój (Lengyelország)
11. *Examples and counter examples concerning the uniqueness of Hahn-Banach extension*, Conference on Inequalities and Applications 10. 2010 szeptember 19.-25.
12. *Conveyity and Symmetry* 7th International Students' Conference on Analysis, 2011. február 5.-8.
13. *The general solution of a functional equation*, 12th Debrecen-Katowice Winter Seminar of Functional Equations and Inequalities, 2012. január 25.-28. Hajdúszoboszló (Magyarország)

14. *Series* (Közös előadás Blahota Istvánnal) International Students' Conference on Analysis, 2012. január 28.-31. Síkfőkút (Magyarország)
15. *Egy függvényegyenlet általános megoldása*, Tanszéki szeminárium, 2012. május 26.-29. Síkfőkút (Magyarország)
16. *On the Davidson functional equation*, The 13th Katowice-Debrecen Winter Seminar on Functional Equations and Inequalities, 2013. január 30.-február 2. Zakopane (Lengyelország)
17. *Functional equations and exercises*, The 9th Students' Conference on Analysis, 2013. február 2.-5. Uston (Lengyelország)
18. *Problémák rendezett struktúrákon I*, Intézeti szeminárium, 2016. március 2. Miskolc (Magyarország)
19. *Problémák rendezett struktúrákon II, Lezárások, Belsőképzések és alkalmazásaik*, Intézeti szeminárium, 2016. november 16. Miskolc (Magyarország)