



**DINAMIKUS GEOMETRIAI RENDSZER BEVEZETÉSE
A GÉPÉSZMÉRNÖK HALLGATÓK MŰSZAKI
ÁBRÁZOLÁS OKTATÁSÁBA**

doktori (PhD) értekezés

Nagyné Kondor Rita

Debreceni Egyetem
Természettudományi Doktori Tanács
Matematika- és Számítástudományok Doktori Iskola
Debrecen, 2007.

Ezen értekezést a Debreceni Egyetem TTK Matematika és Számítástudományi Doktori Iskola Matematika-didaktika programja keretében készítettem a Debreceni Egyetem TTK doktori (PhD) fokozatának elnyerése céljából.

Debrecen, 2007.

Nagyné Kondor Rita
jelölt

Tanúsítom, hogy Nagyné Kondor Rita doktorjelölt 2003.-2007. között a fent megnevezett Doktori Iskola Matematika-didaktika programjának keretében irányítással végezte munkáját. Az értekezésben foglalt eredményekhez a jelölt önálló alkotó tevékenységével meghatározóan hozzájárult. Az értekezés elfogadását javaslom.

Debrecen, 2007.

Dr. Kovács Zoltán
témavezető

Köszönetnyilvánítás

Köszönetet mondok Dr. Kovács Zoltánnak, témavezetőmnek a téma kidolgozásában nyújtott támogatásáért.

Köszönöm Dr. Ambrus Andrásnak, Bosnyák Ágnesnek, Dr. Kántor Sándornénak, Lavicza Zsoltnak és Rózsahegyiné Dr. Vásárhelyi Évának az értékes tanácsokat és a segítséget.

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés	1
2. Irodalmi előzmények	3
2.1. A matematikai ismeretszerzés	3
2.1.1. Tanulás - reprezentációk - megértés	3
2.1.2. Matematikai problémamegoldás	6
2.2. A térszemlélet és fejlesztése	8
2.3. A térgeometria tanításának, tanulásának nehézségei Szlovákiában és Magyarországon	12
2.4. Számítógép és dinamikus geometriai rendszerek az oktatásban	21
2.4.1. A matematika és az ábrázoló geometria számítógéppel segített oktatása	21
2.4.2. Új célok, új kérdések	24
2.4.3. A dinamikus geometriai rendszerek fő jellemzői	28
2.4.4. Alkalmazási lehetőségek	30
2.4.5. A tolás-húzás teszt	42
2.4.6. Dinamikus geometriai rendszerek használata az oktatásban	43
2.4.7. A kognitív technológiák alkalmazásának előnyei és veszélyei	45
3. A kutatás kérdései és módszerei	50
4. Hipotézisek	52
5. Az összehasonlító felmérés, az oktatási kísérlet és az eredmények	53
5.1. Az összehasonlító felmérés	54

5.1.1.	Eredmények és a leggyakrabban előforduló hibák	55
5.1.2.	Az összehasonlító felmérés tapasztalatai	61
5.2.	Az oktatási kísérlet	61
5.2.1.	Előzmények	61
5.2.2.	Az előzetes felmérés eredménye	62
5.2.3.	A tananyag leírása és elemzése	65
5.2.4.	A hallgatók gondolkodásmenetének elemzése egy feladat révén	72
5.2.5.	A hallgatók teljesítményének összehasonlítása a két zárthelyi dolgozatban	79
5.2.6.	A hallgatók teljesítményének összehasonlítása a késleltetett felmérésben	84
6.	Az eredmények a hipotézisek tükrében	93
7.	Összegzés	94
8.	Summary	95
9.	Irodalomjegyzék	97
10.	Függelékek	I
10.1.	1. függelék	I
10.2.	2. függelék	IV
10.3.	3. függelék	VIII
10.4.	4. függelék	XII
10.5.	5. függelék	XV
10.6.	6. függelék	XVIII

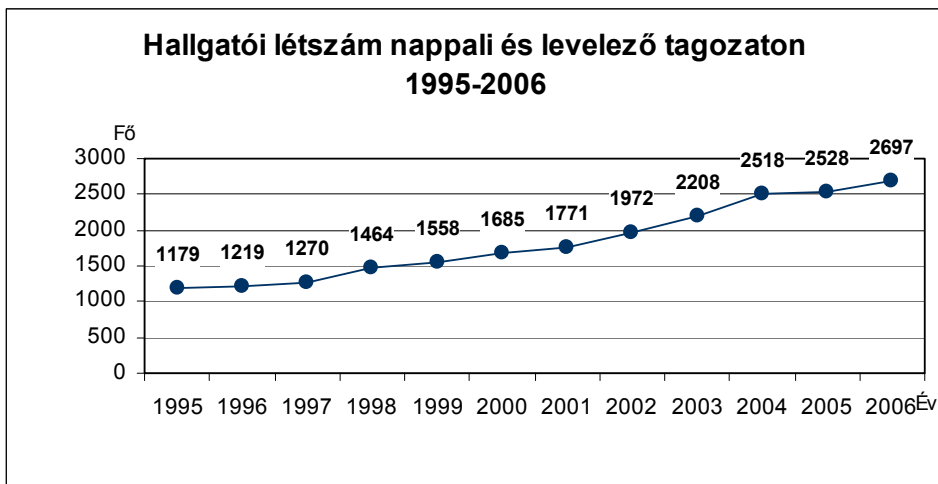
„Ha felismerik geometriai tudásuk gyakorlati alkalmazhatóságát, s megpillantják a technikai alkotásokban megnyilatkozó rengeteg geometriai ötletet, megtanulják majd becsülni a geometriai tudást, az alkotó ember egyik legértékesebb eszközét.”

(Kárteszi F.: Az olló geometriája, 1949)

1. Bevezetés

A XX. század második felétől az információs és kommunikációs technika térhódítása az oktatásban is megfigyelhető. A számítógép a számítástechnika órákon túl szerepet kap más tárgyak tanításában is. Megfelelően alkalmazva, segítségével megvalósítható a differenciált oktatás, a tanulók eltérő egyéni képességeihez történő alkalmazkodás – hiszen a számítógépes feladatoknál minden tanuló a saját tempójában haladhat előre –, így az oktatás hatékonyabbá tehető. Az ilyen tanórákra a tanuló-központúság a jellemző, szemben a hagyományos tanár-központú órákkal.

A Debreceni Egyetem Műszaki Karon – sok felsőoktatási intézményhez hasonlóan – jelentkeznek a tömegoktatás nehézségei. A hallgatói létszám alakulását nappali és levelező tagozaton 1995 óta az 1. ábra mutatja (minden tanév októberében). A hallgatói létszám növekedése mellett a főállású oktatói létszám csökkent, nőtt az óraadók száma. E tény az oktatás optimális megszervezésénél gondot jelenthet. [111]



1. ábra: A hallgatói létszám alakulása 1995 óta [111]

Az 1. ábra mutatja, hogy egyre nagyobb számú hallgató kerül elsőévesként a főiskolára. A középiskolás matematikai ismereteik felmérésére minden elsőéves hallgatóval dolgozatot íratunk, melynek alapján elmondhatjuk, hogy hallgatóink előzetes ismereteiben nagy különbségek vannak. Egy részük nem tud megfelelni a korábban kialakított követelményrendszernek, lemaradását nem tudja behozni. E problémákra kínál egy lehetséges megoldást, támogatást a számítógép.

A Debreceni Egyetem Műszaki Karon kontrollcsoportos fejlesztő kísérletet hajtottunk végre két félévben, elsőéves nappali tagozatos gépészmérnök hallgatók részvételével ábrázoló geometria, illetve műszaki ábrázolás gyakorlaton, két-két gyakorlati csoportban. Az egyik csoportot dinamikus geometriai rendszer segítségével, a másikat hagyományosan, papír-ceruzás módszerrel oktattuk. A kiindulási állapotot a hallgatók térszemlélet-mérő feladatsorral vizsgált tudásszintje jelentette. A tanítási-tanulási folyamat eredményességének mérésére a félév során írt két zárthelyi dolgozat és a félév után írt késleltetett felmérés szolgált.

Továbbá összehasonlító felmérést végeztünk a térszemlélet és térgeometria témakörben elsőéves nappali tagozatos matematika tanár szakos hallgatók részvételével a pozsonyi Komenský Egyetemen és a Debreceni Egyetemen. Azért vizsgáltuk a matematika tanár szakos hallgatók teljesítményét, mivel akkor érhetünk el javulást a térszemlélet fejlesztésében, a térgeometria tanításában, ha a leendő tanárok e téren kompetensek lesznek.

Céljaink:

- Megfelelni a tantervi követelményeknek.
- Az ábrázoló geometria megértésének növelése.
- Megfelelni a tömegoktatás igényeinek.
- Hallgatóink egy részét felkészíteni az egyetemi szintre való bekerülésre.

2. Irodalmi előzmények

2.1. A matematikai ismeretszerzés

*„Az oktatásnak két követelménye van:
a szemléletesség és a tanulók öntevékenysége.”*

(Vágvölgyi B.: Az új anyag tanítása, 1904)

Az ábrázoló geometriát oktatók tapasztalata szerint [8] a hallgatók egy része egy-egy szerkesztést nem a szerkesztési lépések logikus egymásutánjában, hanem vonalak „kavalkádjaként” lát, feladatmegoldásaikat csak egyenesek, pontok előre betanult módon való szerkesztése jellemzi. Ha egy új – a begyakorlottól kissé eltérő – feladattal találkoznak, előtűnik, hogy a tudásuk felületes.

Több vizsgálat is megerősítette [18, 64] a matematikai megértéssel kapcsolatban azt, hogy az iskolai feladatok esetében működő matematikai tudás nehezen transzferálható a hétköznapi kontextusba. A tanárok minden nap tapasztalják, hogy a tanulók kémia- vagy fizikaórákon nem tudják azt, amit matematikából tanultak és a matematika órán még tudtak. Még a jobb tanulók is gyakran leblokkolnak, ha tudásukat újszerű helyzetben kell alkalmazniuk. [16]

2.1.1. Tanulás – reprezentációk – megértés

A matematikai gondolkodáshoz valamilyen módon reprezentálni kell a matematikai fogalmakat. A kommunikáció külső reprezentációt kíván nyelvi eszközök, írott szimbólumok, ábrák formájában. Bruner [11, 2] három reprezentációs síkot különít el:

- materiális (tárgyi),
- ikonikus (képi),
- szimbolikus (beszélt, írott nyelv).

Ezek mindegyike szerepet játszik az oktatási folyamat minden fázisában, állandó kölcsönhatásban vannak egymással. A fogalmak megértésénél az ikonikus sík jelentős szerepet játszik. Kísérletek tanúsága szerint a három reprezentációs sík összekapcsolása a tanulási folyamatot megkönnyíti a

tanulók számára. Ezt segíti elő a hagyományos szemléltetés, a számítógéppel készített interaktív feladatlap és a számítógépes animáció együttes alkalmazása, ahogy a Berta írásában szereplő példa mutatja. [9]

Gondolkodás esetén a pszichikumban való belső reprezentációról beszélünk. A külső reprezentáció megfigyelhető, a belső reprezentáció nem, a rá irányuló elemzések nagyszámú feltételezésen, következtetésen alapulnak. A kognitív tudomány alapállása szerint a külső és belső reprezentáció között létezik valamilyen kapcsolat; a külső matematikai reprezentációkat befolyásolja a belső reprezentáció jellege. A belső reprezentációk között is kapcsolatok vannak. Feltehetjük, hogy a belső reprezentációk megfelelő külső reprezentációk közötti kapcsolódások kiépítésén keresztül módosíthatók. Egy matematikai fogalmat akkor értünk meg, ha annak belső reprezentációja a reprezentációs hálózatunk részévé válik. A megfelelő módon reprezentált, a tudás más elemeivel sokféle kapcsolatban álló tudáselemet megértettnek, míg az elszigetelt, a fogalmi hálóba nem, vagy csak lazán bekapcsolódó elemeket meg nem értettnek, gyengén megértettnek tekintjük. A megértés nő, amint a struktúra bővebb és szervezettebb lesz. A megértés tehát a matematikai fogalmak közti kapcsolatok létrejöttét jelenti. A megértés fokát a kapcsolatok száma, erőssége jellemzi. [1] Horváth [35] szerint a megértés a gondolatok egybeszerveződése.

Vinner [106] fogalomképzetnek nevezi a fogalom nevéhez kapcsolt teljes kognitív struktúrát, mely tartalmazza a vizuális reprezentációkat, a belső kapcsolatokat, tulajdonságokat, tapasztalatokat, példákat. A példák, tapasztalatok jelentős szerepet játszanak a hatékony fogalomképzet kialakításában.

Lénárd [60] felhívja a figyelmet arra, hogy a látszólag azonos teljesítmény mögött a gondolkodás szempontjából jelentős különbség lehet. Hiszen lehetséges, hogy az egyik csupán mechanikus ismerettel rendelkezik – amely az emlékezés eredménye és azonnal csődöt mond, ha indokoltatásra kerül sor –, míg a másik rutinos tudású, amely megállja a helyét a belekérdezésnél, indokoltatásnál is. Minőségi különbség van a tanulás két fajtája, a mechanikus tanulás és az értelmes tanulás között. Skemp kísérletében [86] a vizsgált személyek az értelmes tanulással, fogalmi struktúrák segítségével megtanult anyagot nemcsak jobban megtanulták, de tovább is emlékeztek rá. A megértés a hatékony tanulás egyik alapfeltétele. Skemp szerint valamit megérteni annyit jelent, mint asszimilálni egy megfelelő „szkémába” (fogalmi struktúrába). A fogalmi struktúra megfelelő belső szerveződése is elősegítheti a jobb megértést, hiszen különálló szabályokra sokkal nehezebb emlékezni, mint egy integrált fogalmi rendszerre.

Főiskolánkon a hallgatói létszám növekedése és az oktatói létszám csökkenése miatt a számonkérés leginkább írásban történik ábrázoló geometriából. Szóbeli vizsgára csak akkor kerül sor, ha a hallgatónak már kétszer nem sikerült az írásbeli vizsga. Csak írásbeli dolgozat alapján nehéz eldönteni, hogy egy hallgató a szerkesztési lépéseket bemagolta, csak mechanikus ismerettel rendelkezik, vagy megértette a tananyagot. A késleltetett felméréssel erre próbáltunk fényt deríteni.

Piaget [75] szerint az egyén folyamatosan dolgozik egy egységes valóságkép felépítésén, aktív közreműködője az ismeretsajátításnak. A gyermek tanulási folyamata szerint egy saját maga által konstruált belső kognitív struktúra kiépítését jelenti. Az ismeretszerzési folyamat két mozzanata az asszimiláció és az akkomodáció. Az asszimiláció során az egyén a külső hatásokat építi be a meglévő ismeretrendszerbe. Az akkomodáció során a meglévő sémáit módosítja, vagy új sémát hoz létre a külvilág megértése céljából; ebben az esetben nem áll rendelkezésére a valóság feldolgozásához asszimilációs séma. Negroponte és munkatársai [70] a konstruktivista filozófia alapján a következő pedagógiai alapelvekről írnak:

- közvetlen felfedezés,
- közvetlen önkifejezés,
- közvetlen tapasztalat,
- multikulturális szemléletmód,
- többnyelvűség,
- multimodalitás.

A tanulók közti előzetes ismeretbeni, érdeklődésbeni, motivációs különbségek miatt e filozófia szerint [21] eredményes oktatási gyakorlatot megvalósítani csak olyan módszerrel lehet, amely a cselekvésen, az önálló ismeretszerzésen, a tudás önálló megkonstruálásán, eszközökben gazdag környezetben alapul. Wilson [109] konstruktív tanulási környezetnek olyan helyet nevez, ahol a tanulók a problémamegoldásban együtt dolgoznak, segítik egymást, változatos eszközöket és információforrásokat használnak. Ezzel szemben a főiskolán az idő szűkössége és a nagy hallgatói létszám miatt (120-180 fő előadásonként) a hallgatók az ábrázoló geometria előadásokon a tananyagot jórészt készen kapják. Az eddig említett, a megértést segítő alapelveket csak gyakorlaton van lehetőség alkalmazni.

Egy fogalom “természete a legteljesebben az adott fogalom más fogalmakhoz való specifikus kapcsolataiban bontakozik ki”, írja Vigotszkij [104, 304. o.] a fogalmak közti kapcsolatokra hívva fel a figyelmet. Vigotszkijnál a fogalom pszichológiai szempontból a szójelentés. A fogalomfejlődés tehát a szójelentés fejlődése. A fogalomfejlődéssel együtt jár a rendszer szerkezetének átalakulása is.

A fogalmak közötti kapcsolatok fontosságát hangsúlyozza Czeglédy is [14], arra hívva fel a figyelmet, hogy szükséges feltárni a fogalmak közötti kapcsolatot, majd rendszergráffal ábrázolni és a tananyagot ez alapján felépíteni [65], hiszen a fogalmak és a közöttük lévő kapcsolatok alkotják az egészet. Ha a gráf egy csúcsából nyíl mutat egy másikba, akkor az első fogalomra épül a második fogalom. Az ábrázoló geometria fogalmainak rendszergráffal történő ábrázolására a 5.2.6. fejezetben mutatunk egy példát.

Az ábrázoló geometria műveléséhez szükséges legfontosabb képesség – a térszemléleten túl – a fogalmakkal való műveletek végzésére irányuló képesség. A fogalmak megalkotásához szükség van a fogalomra vonatkozó tapasztalatokra, példákra. Ha a fogalmakat a tanulók nem tudják tapasztalatokhoz kötni, akkor általában alkalmazni sem tudják azt. Az eddigiek alapján elmondhatjuk, hogy a megértéshez fontos a stabil fogalomképzet kialakítása, a fogalmak közti kapcsolatok hangsúlyozása, a tanulók aktív közreműködése az ismeretelsajátításban.

2.1.2. Matematikai problémamegoldás

Lénárd [60, 43. o.] problémának nevezi azt a helyzetet, amelyben egy célt el akarunk érni, de a cél elérésének útja számunkra rejtve van. A problémamegoldás e rejtett út megkeresése.

A problémamegoldási folyamat során az egyes gondolkodási lépések kettős szerkezetűek. A gondolkodási lépések gondolkodási fázisok és gondolkodási műveletek egyidőben. A gondolkodási fázisok szerepét a problémamegoldás egésze határozza meg, a gondolkodási műveletek szerepét pedig a gondolkodási menet egy vagy két lépése. Tehát a problémamegoldási folyamat makrostruktúrája és mikrostruktúrája együttesen vesz részt a hosszabb gondolkodási folyamatot igénylő problémák megoldásában.

Pólya [76] a gyakorlati tapasztalatok általánosítása alapján a következő problémamegoldási fázisokat különítette el:

- a feladat megértése,
- tervkészítés,
- tervünk végrehajtása,
- a megoldás vizsgálata.

Lénárd [60] gondolkodási fázisai (a problémamegoldás makrostruktúrája):

- ténymegállapítás,
- a probléma módosítása,
- megoldási javaslat,
- kritika,
- mellékes mozzanatok említése,
- csodálkozás, tetszés,
- bosszankodás,
- kételkedés,
- a munka feladása.

Lénárd [60] gondolkodási műveletei (a problémamegoldás mikrostruktúrája):

- analízis,
- szintézis,
- elvonás (absztrahálás),
- összehasonlítás,
- elvont adatok összehasonlítása,
- összefüggések felfogása,
- kiegészítés,
- általánosítás (generalizálás),
- konkretizálás,
- rendezés,
- analógia.

Ez a felsorolás a gondolkodási műveletek összetettségének sorrendjét is mutatja, hiszen például az analógia az összefüggések felfogásának és a kiegészítésnek egymás utáni alkalmazása. A gondolkodási műveletek a problémamegoldás folyamatában előkészítik a gondolkodási fázisok eredményes alkalmazását. Akkor lehet sikeres a problémamegoldás, ha a tanuló alkalmazni tudja a megoldáshoz szükséges gondolkodási műveleteket és kreatív gondolkodása fejlett. A tanulók gondolkodási lépéseinek meghatározása írásos geometria, illetve ábrázoló geometria dolgozataik alapján nehéz.

Egy 2005-ben, iskolaigazgatók és magyar- illetve matematikatanárok körében végzett felmérés [87] szerint a tanulói képességek közül a problémamegoldó képességet a második legfontosabbnak ítélték meg. Tehát a problémamegoldó képesség fejlesztése a tanárok gondolkodásában nagyon fontos szerepet kap.

A geometriaoktatás egy lényeges célja a problémamegoldó képesség fejlesztése. Ebben segíthetnek a dinamikus geometriai rendszerek például a toló-húzó teszttel és a nyomvonal rajzolással. [107]

2.2. A térszemlélet és fejlesztése

Az ábrázoló geometria tanításának céljai közt szerepel a térszemlélet fejlesztése is, ezért e fejezetben a térszemlélet fogalmának meghatározásával és a térszemlélet fejlesztésének lehetőségeivel foglalkozunk. Bárdné [8, 47. o.] több évtizedes tapasztalata alapján azt állítja, hogy az ábrázoló geometria számonkéréseken nyújtott teljesítmény összefügg a hallgatók térszemléleti képességeivel, ezért is fontos a térszemlélettel foglalkoznunk.

Séra és munkatársai [83, 19. o.] „térszemléleten két- és háromdimenziós alakzatok észlelésének és az észlelt információk és viszonylatok megértésének és téri problémák megoldására való felhasználásának képességét” értik, Haanstra [31, 88. o.] és mások meghatározásaira támaszkodva.

Gardner [25] szerint nem létezik egységes intelligencia, hanem mindenki többféle elkülönült intelligenciával rendelkezik. Hétféle intelligenciát különít el: nyelvi, logikai-matematikai, téri, zenei, testi-kinesztetikus, interperszonális és intraperszonális intelligenciát. A téri intelligencia Gardnernél [25, 9. o.] „a téri világról való mentális modell kialakítására és e modell használatával való manőverezésre és tevékenységre való képesség”. Gardner többszörös intelligencia elméletét

Maier továbbfejlesztette [63], a téri intelligenciának öt ágát különböztetve meg:

- térbeli érzékelés: a függőleges és vízszintes irány meghatározása zavaró információk mellett;
- vizualizáció: azon helyzetek ábrázolásának képessége, amikor az összetevők egymáshoz képest változnak;
- mentális forgatás: háromdimenziós testek elforgatása gondolatban;
- térbeli relációk: egy test részei közötti kapcsolatok felismerésének képessége;
- térbeli orientáció: adott térbeli helyzetbe beleélés képessége.

Vásárhelyi [99] geometriai térszemléleten a képességek, készségek olyan matematikailag irányított komplex együttesét érti, amely lehetővé teszi:

- a térbeli alakzatok alakjának, nagyságának, helyzetviszonyának pontos elképzelését;
- a látott, vagy elképzelt alakzatoknak a geometria törvényeire épülő egyértelmű ábrázolását;
- az egyértelműen ábrázolt alakzatok helyes rekonstrukcióját;
- a különböző térbeli (matematikai, műszaki stb.) problémák konstruktív megoldását, a megoldás képi, vagy nyelvi megfogalmazását.

A továbbiakban térszemléleten Vásárhelyi [99] által megfogalmazott képességet értjük. A feladatok csoportosításnál Séra és munkatársai [83] ajánlását követve a tevékenység oldaláról közelítjük meg a térszemléleti problémákat. A feladattípusok:

- vetületi ábrázolás és vetületolvasás: háromdimenziós alakzatok kétdimenziós vetületi képeinek megállapítása és megrajzolása;
- rekonstrukció: vetületi képek alapján kell megalkotni a tárgy axonometrikus képét;
- szerkezet átlátása: a viszonylatok, arányok megjelenítésén keresztül a belső szemléleti kép kialakítása;

- kétdimenziós vizuális térelképzelés: síkidomokat kell képzeletben felvágni, és a részeket újra összerakni;
- térbeli alakzat felismerése és megjelenítése: hiányos vizuális információ alapján kell a tárgyat, illetve helyzetét azonosítani, megjeleníteni;
- háromdimenziós alakzatok összetartozó részeinek felismerése, párosítása: két vagy több részre darabolt, egyszerű térbeli alakzat összetartozó részeinek felismerése és párosítása axonometrikus rajzai alapján;
- háromdimenziós alakzat képzeleti forgatása: alakzatot két nézőpontból ábrázolt képe alapján kell azonosítani mentális reprezentációk manipulálásával;
- tárgy képzeleti manipulálása: tárgyi tevékenység fázisainak képzeleti követése;
- téri konstrukciós képesség: háromdimenziós alakzatok egymáshoz viszonyított helyzetének a téri reprezentációk manipulációja alapján való értelmezése;
- dinamikalátás: állókép alapján a téri alakzat részeinek mozgását képzeletben követni kell.

Séra és munkatársai [83] arról számolnak be, hogy a térszemlélet általános és középiskolai fejlesztésében az elmúlt évtizedekben nem sikerült jelentős eredményt elérni. A sikertelenség két oka szerintük, hogy „a térszemlélet mint sajátos vizuális képesség szerkezete és fejlődése nem kellőképpen ismert és a térábrázolás és –érzékelés fejlesztésére használt pedagógiai programok nem eléggé hatékonyak”. [83, 150-151. o.] A következő néhány bekezdés a térszemlélet fejlesztésének néhány lehetőségéről számol be.

Kirby és Boulter kutatása [46] a vetületek, tükrözések, forgatások ismeretét nyújtó geometriai oktatás 13-14 éves kanadai gyerekek vizualizációs képességére gyakorolt pozitív hatásáról számol be. Az eredmények alapján arra következtettek, hogy a téri képességtesztek alapján hátrányban levőknél javítható e képesség, ha a geometriaoktatás eléggé alapos.

Lord alsóéves egyetemistákkal alkalmazott 14 hetes, alkalmanként 30 perces gyakorlást, amelyek között olyan feladatok is voltak, ahol háromdimenziós geometriai mintákat kellett képzeletben elmetszeni, majd

az így kapott kétdimenziós felületeket lerajzolni. [61] Az utótesztben javult a téri tudatosság, a teljesítmény.

Horváth és munkatársai szerint [36] a geometria tanításában-tanulásában nagy segítséget jelentenek a kézzel fogható modellek. A test alaki tulajdonságainak számbavétele mellett a különböző nézeteit ábrázolni, majd a képekből a testet elképzelni a modell alapján sokkal könnyebb. A térbeli szemléltető eszközök helyes használata és gyakori tanulmányozása olyan belső térlátást eredményezhet, amely lehetővé teszi a térbeli viszonyok önálló elképzelését. Bárdné tapasztalatai szerint még az egyetemi képzésben is sokat segít a modellezés, mert fölgyorsítja a „belső látás” kialakulását. [8, 12. o.]

Vásárhelyi arról ír [99], hogy a dinamikus geometriai rendszerekkel létrehozható interaktív feladatlapok emlékeztetnek a konkrét modellre és a tárgyi manipulációval szerzett tapasztalatok megszerzése után átvezetnek az ikonikus reprezentációhoz. Hiszen egy dinamikus geometriai program használatával elérhetjük, hogy az alakzat elforduljon, több oldalát, vetületét láthassuk. Így segíthet elkülöníteni a modellhez kötődő tulajdonságokat az általános jellemzőktől, hozzájárulhat a rajzolvasás és készítés fejlesztéséhez.

Vásárhelyi szerint [102] a modellek alkalmazásánál négy periódust célszerű kialakítani:

- modellekkel;
- modellekkel és a modell képével (például számítógépes animációval);
- ábrával és a hozzá elkészített modellel vagy animált képpel;
- csak ábrák segítségével történő problémamegoldás.

Bakó [5] azt vizsgálta, hogy a térgeometria oktatásában milyen feltétel mellett segít a számítógép használata. Az elvégzett kísérletek eredménye alapján arra a következtetésre jutott, hogy a térgeometriai alapfogalmak elsajátításában, a testek megismerésénél továbbra is szükség van a makettek használatára. Az alapkészségek kialakulása után, a térbeli intelligencia fejlesztésénél már szerepet kaphat a számítógép hetedikes korosztálytól kezdve. Úgy találta, hogy az általa Internetre fejlesztett játékos számítógépes programmal a Maier [63] által megadott készségek mindegyike fejleszthető. Ugyanakkor azt tapasztalta, hogy nem szabad túlzásba vinni a számítógép használatát; a tanári magyarázatra, makettek használatára, önálló munkára is szükség van.

A számítógépes programok közül még a Veszprémi Egyetemen [85] készített számítógépes térszemlélet fejlesztő programra hívjuk fel a figyelmet, melyet iskolásoknak ajánlanak a fejlesztők. Hasznos, hogy a program interaktív, lehetőség van az alakzatok egérrel történő forgatására és animációk használatára. Segítséget nyújt többek között a szerkezetátlátás, az alakzatok képzeleti transzformációja, a térbeli alakzat felismerése és megjelenítése és a vetületképzés terén.

Abban mindenki egyetért, hogy a térszemlélet céltudatos fejlesztése fontos feladat, hiszen a tanulók geometriatudását az elméleti ismeretek és a térbeli képességek egységében kell értelmeznünk és fejlesztenünk. Minden képesség, így a térszemlélet is fejleszthető a megfelelő életkorban, a megfelelő tanítási stratégiával.

2.3. A térgeometria tanításának, tanulásának nehézségei Szlovákiában és Magyarországon

Negyven évvel ezelőtt a szlovákiai középiskolákban még jelentős figyelmet szenteltek a térgeometria, de főképp az ábrázoló geometria tanításának. Mára már ez a két témakör szinte teljesen eltűnt a tantervekből. Ábrázoló geometriával kizárólag a választható tantárgyak között találkozhatunk, vagy még ott sem. A térgeometria tananyaga pedig csupán néhány tanítási órára korlátozódott. Gyakran hallani olyan magyarázatokat, hogy ennek oka az időhiány, vagy hogy a tanárok nem szívesen fognak hozzá e kényes témakör tanításához. [10]

A térgeometria a matematikatanítás egyik legproblematisabb része. Ennek egyik oka, hogy már az egyszerű alapfogalmak között is bonyolult összefüggések vannak. A tanár feladata az, hogy megfelelő mértékben motiválja, felkeltse a tanulók érdeklődését a térgeometria iránt. Mérlegelnie kell a munkalehetőségeket a tanítási órákon, figyelembe kell vennie a tanulók korábban szerzett tudását. Nagyon fontos azonban a témakör megfelelő felépítése is. [33]

Magyarországon Kárteszi Ferenc már 1972-ben [45] írt a térgeometria tanítási nehézségeiről:

A térgeometria tanítása csak a síkgeometria után következik. A síkgeometriával foglalkoznak először, mintha a síkot tartalmazó tér nem is létezne. Ezért jelentkezik a térszemlélet idejekorán való fejlesztésének elmulasztása miatti nehézségek. Sok tanár annyira fél ezektől a nehézségektől, hogy halasztgatja, elsieti a térgeometria tanítását. E rész tanítása a tanárnak és megtanulása a tanulónak más-más nehézséget okoz.

A tanulók térszemlélete – a tanterv térgeometriában szerény részaránya következtében – általában gyöngye. A gyors és jól szemléltető ábra táblára rajzoláshoz kevés tanár ért. Az időben és ismeretanyagban szétválasztott sík- és térgeometria a térszemlélet optimális életkorban való fejlesztésének elmulasztására vezet. Pedig a térszemlélet nagymértékben fejleszthető. Az iskola feladata e képességek fejlesztése, és a tanár kötelessége az erre alkalmas klasszikus és modern módszerek elsajátítása. Hiszen a térszemlélet fejletlenségét a magas színvonalú elméleti tudás nem pótolja.

Vásárhelyi [102] arról ír, hogy a szemléltetés pedagógiai gyakorlatában előforduló hibák is akadályozzák az elemzést és az általánosítást:

- a megfigyelés és az absztrakt gondolkodás elszakadása,
- a szemléltető anyag túlszűfolttsága,
- speciális helyzet, stb.

Magyarországon az általános iskolai geometriaoktatás elsődleges feladata a geometriai szemléletmód, a képi gondolkodás, a sík- és térbeli tájékozódási képesség fejlesztése. A geometriai fogalmak, szerkesztések, transzformációk sikeres elsajátításához nélkülözhetetlen a rajzkészség – adott életkornak megfelelő – szintje. Általános iskolásokkal végzett felmérés [23] mutatja, hogy a tanulók geometriatudása a felső tagozat tanéveiben folyamatosan gyarapodik és mélyül. Noha a térszemlélet szerepe a magasabb évfolyamokon nő, a 8. osztályos tanulóknál sem éri el a várt fejlettségi szint 40 százalékát, az ötödikesek pedig nagyon alacsony teljesítményt értek el a felmérés térszemlélet tesztjén. Tehát a geometriaoktatás szempontjából a térszemlélet fejlesztése a jelenleginél nagyobb figyelmet érdemelne.

Tompa cikkében [91] arról számol be, hogy az 1995-98. évi magyarországi gimnáziumi matematika érettségiben a tanulók miként teljesítettek. Az érettségi feladatai a következő témakörökből kerültek ki:

- százalék, elsőfokú és másodfokú egyenletek,
- logaritmus, trigonometrikus egyenletek, függvények,
- számelméleti problémák,
- síkgeometria, koordináta-geometria, geometriai számítások,
- térgeometria, helymeghatározás,

- vektorok, trigonometria,
- bizonyítandó tételek.

A beszámoló szerint a térgeometriai ismeretekben olyan alacsony szinten teljesítenek a tanulók, hogy ha minden témakörből egy bizonyos kompetenciát külön-külön is be kellene mutatniuk ahhoz, hogy meglegyen a matematika érettségi érdemjegyük, akkor sok tanuló megbukna.

Hasonló felmérést Szlovákiában is végeztek. Danihelová gyűjteménykötetében [19] többek között arról számol be, milyen eredményeket értek el az 1999-2000. évi matematika érettségén 320 szlovákiai gimnáziumi osztály tanulói. Az érettségi feladatai Szlovákiában nyolc témakörből kerültek ki:

- halmazelmélet és logika,
- számelmélet,
- kombinatorika és valószínűség számítás,
- sorozatok és függvények,
- egyenletek, egyenlőtlenségek és egyenletrendszerek,
- analitikus geometria,
- síkgeometria,
- térgeometria.

A felmérésből kiderül, hogy a diákok tudásszintje matematikából nagyon alacsony. Az egyes témakörökben elért eredményesség 38,56% és 61,11% között mozog. Legtöbb hiányosság a térgeometriai feladatok megoldásánál figyelhető meg. Meggondolandó, mi az oka annak, hogy mindig a térgeometria a legnehezebb feladat az érettségén?

Magyarországon és Szlovákiában is az általános iskola alacsonyabb évfolyamain a tanulók életkori sajátosságának megfelelően döntő szerepe van a tapasztalatszerzésnek, manipulációnak. A középiskolában egyre inkább a fogalmi sík és a tárgy deduktív jellege kerül előtérbe. Természetesen továbbra sem nélkülözhető a tapasztalatra és a tevékenységre épülő feldolgozás sem, elsősorban a matematikából lassan haladó tanulók esetében. A tanulók absztrakciós szintjében nagyok a különbségek, ezért is fontos, hogy

szükség esetén a tárgyi, képi megjelenítés sorra kerüljön. A matematika tantárgy taneszközeire vonatkozó szakmai ajánlás a 9-12. évfolyam számára a geometria anyagrészhez minimális demonstrációs eszköznek faliképet, írásvetítő fóliát, körzőt, vonalzót és kúpszeleteket ír elő. Minimális tevékenykedtető eszköznek a diákoknak körzőt, vonalzót, sík- és térgeometriai modellezőt, zsebszámológépet; ajánlott tevékenykedtető eszköznek pedig számítógépes programokat, az Internetet és oktató CD-ket javasol.

A szlovákiai középiskolákban mind a magyar, mind a szlovák tannyelvűekben, általában egyféle tankönyvsorozatot használnak, természetesen az iskola jellegének megfelelően. A matematika kerettanterv szerint a heti minimálisan kötelező óraszám gimnáziumban 4-4-3-3. [7, 26, 32] Szlovákiában az egyes témakörökre felhasználható óraszámok a gimnáziumban [93, 94]:

GINNÁZIUM	1. évfolyam	2. évfolyam	3. évfolyam	4. évfolyam
Bevezetés a matematikába	20	0	0	0
Számelmélet	14	0	0	0
Függvények, egyenletek, egyenlőtlenségek	40	54	0	46
Geometria	20	60	83	0
Kombinatorika, valószínűség számítás és statisztika	24	0	0	20
Kiegészítő tananyag	6	10	8	16
Felmérő	8	8	8	8

Az egyes témakörökre felhasználható óraszámok Szlovákiában

A térgeometria oktatásra javasolt óraszám a szlovákiai gimnáziumokban 45 óra. Ebből 20 óra a 2. évfolyamban, míg a fennmaradt 25 óra a 3. évfolyam első felében van.

1. évfolyam	2. évfolyam	3. évfolyam	4. évfolyam
	Tételek kölcsönös helyzete.	Tételek kölcsönös helyzete, távolsága, szöge; számítással és szerkesztéssel.	
		Hasáb, henger felszíne, térfogata. Cavalieri-elv.	
		Gúla, kúp, csomagtűz, csomagtűz felszíne, térfogata.	
		Gömb felszíne, térfogata. Szabályos testek. Egyébe írt testek.	

A térgeometria oktatására javasolt tartalom Szlovákiában

Magyarországon 5 tankönyvsorozat van a 9-12. osztályban. A tankönyvek kiválasztásánál a tanárnak vagy az iskolának azt kell eldönteni, hogy milyen módszertani felfogás szerint készült tankönyvet akar használni. Választhatnak olyat, amelyik munkáltató jellegű, választhatnak hagyományosabb felépítésű tankönyvet, amelyik tartalmazza a szükséges ismereteket, valamint kidolgozott feladatokat. Választhatnak olyan tankönyvet is [15], ahol a tananyag feldolgozás módja egyszerre teszi lehetővé a középszintű és az emelt szintű érettségire való felkészülést.

Magyarországon a középiskolai matematika kerettanterv szerint a 9-12. évfolyamon 3-3-3-4 a minimálisan kötelező matematikaórák száma a gimnáziumokban. A tantervben a kerettanterv kiegészítésekor törekednek arra, hogy a tananyag spirális felépítése fokozottan érvényesüljön. Emellett fontosnak tartják a fogalmak kialakításában az induktív módszer alkalmazását. A tanterv tartalmazza a kerettanterv által meghatározott tananyagot és annak az órakeret kb. 20%-át kitöltő kiegészítését és részletezését. Az egyes témakörök tanítási sorrendjét a tantervnek nem feladata meghatározni, ezt a tanterv alapján készülő tanmenet rögzíti. Az alábbi táblázat az egyik tanterv alapján [52] az egyes témakörökre felhasználható óraszámokat tartalmazza. Ezek a tanmenet elkészítése során, ahol szakmailag indokolt, átcsoportosíthatók a hozzá tartozó anyagrészekkel együtt.

GIMNÁZIUM	9. évfolyam	10. évfolyam	11. évfolyam	12. évfolyam
Gondolkodási módszerek	6	6	10	15
Számtan, algebra	38	40	31	23
Függvények, sorozatok	15	12	14	25
Geometria	39	39	40	45
Valószínűség, statisztika	5	8	10	10
Évvégi ismétlés	6	6	6	10
Összesen	111	111	111	128

Az egyes témakörökre felhasználható óraszámok Magyarországon

Magyarországon a különböző tantervek alapján a geometria oktatására javasolt óraszám [13, 15, 51, 89, 95, 96, 105]:

	9. évfolyam	10. évfolyam	11. évfolyam	12. évfolyam
Kosztolányi	39	39	40	45
Czapáry	21+3	31	40	43
Hajdú	36	36	40	? ⁽¹⁾
Hajnal	24	26 < ⁽²⁾	33 < ⁽²⁾	30 < ⁽²⁾
Vancsó	29	33	35	? ⁽¹⁾

A geometria oktatására javasolt óraszámok Magyarországon

(1) E két tankönyvcsaládhoz még nem jelent meg a tanári segédkönyv a 12. évfolyamon az összehasonlító felmérésünk idején 2005-ben.

(2) Ez a tanmenetjavaslat csak a minimum óraszámokat adja meg, a fennmaradó órák elosztását témakörök szerint a tanárra bízva, aki az adott osztály ismeretében oszthatja el. A tanár az előző évben szerzett tapasztalatai alapján dönthet, hogy ezt az időt gyakorlásra, vagy a könyvben is megtalálható kiegészítő (apró betűs) részekben felvetett kérdések, témák feldolgozására fordítja-e.

Ezen belül a térgeometria oktatására javasolt óraszám és tartalom:

	9. évfolyam		10. évfolyam	
Kosztolányi	2	Tételek kölcsönös helyzete. Nevezetes ponttálmazok a térben.	3-8	Hasonló testek felszínének, térfogatának aránya.
Czapáry	1		3	
Hajdú	1		4-5	Térbeli számítások szögfüggvények segítségével. Vektorok alkalmazása térben.
Hajnal	1		4-5	
Vancsó	1		3-4	

	11. évfolyam		12. évfolyam	
Kosztolányi	0	-	21	Tételek kölcsönös helyzete, távolsága, szöge.
Czapáry	0		21	Hasáb, henger felszíne, térfogata. Cavalieri-elv.
Hajdú	1		? ⁽¹⁾	Gúla, kúp, csomkagúla, csomkakúp felszíne, térfogata.
Hajnal	0		16 < ⁽²⁾	
Vancsó	0		? ⁽¹⁾	Gömb felszíne, térfogata. Szabályos testek. Egymásba írt testek.

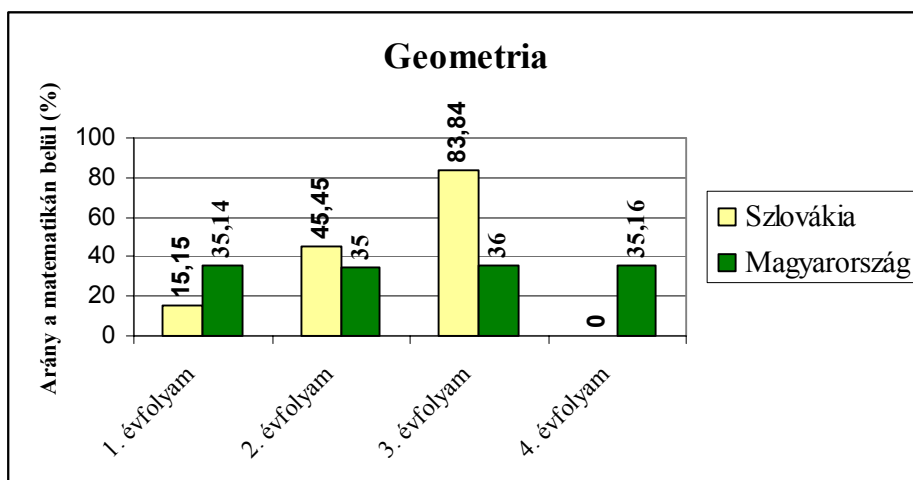
A térgeometria oktatásra javasolt óraszámok és tartalmak Magyarország

Az összehasonlításnál a Magyarországi 9., 10., 11. és 12. évfolyam helyett az egyértelműség érdekében 1., 2., 3. és 4. évfolyamot írunk. A heti minimálisan kötelező matematika órák száma Szlovákiában az 1. és 2. évfolyamon több, a 4. évfolyamon pedig kevesebb, mint Magyarországon, de a négy évfolyamon összesen mindkét országban 163. A következő diagramok a geometria illetve a térgeometria arányát mutatják a matematikához, illetve a geometriához viszonyítva. A százalékos arányokat minden esetben a tantervek alapján számoltuk ki. A térgeometria arányának kiszámolásához a Kosztolányi tanterv óraszámait [52] vettük figyelembe.

(1) E két tankönyvcsaládhoz még nem jelent meg a tanári segédkönyv a 12. évfolyamon az összehasonlító felmérésünk idején 2005-ben.

(2) Ez a tanmenetjavaslat csak a minimum óraszámokat adja meg, a fennmaradó órák elosztását témakörök szerint a tanárra bízva, aki az adott osztály ismeretében oszthatja el. A tanár az előző évben szerzett tapasztalatai alapján dönthet, hogy ezt az időt gyakorlásra, vagy a könyvben is megtalálható kiegészítő (apró betűs) részekben felvetett kérdések, témák feldolgozására fordítja-e.

Az első diagram a matematika órán belül a geometria arányát mutatja a két országban:



2. ábra: A geometria aránya a matematikán belül ⁽³⁾ ⁽⁴⁾

A geometria aránya a többi matematika témakörhöz képest Magyarországon az 1. és 4. évfolyamon magasabb, 2. és 3. évfolyamon pedig alacsonyabb, mint Szlovákiában. A 3. évfolyamnál nagy az eltérés (47,84%), hiszen Szlovákiában ekkor szinte egész évben csak geometriát tanulnak. Magyarországon közel azonos a négy évfolyamon a geometria órák száma, Szlovákiában viszont az 1.-3. évfolyamon egyre nő, a 4. évfolyamon pedig nincs geometria.

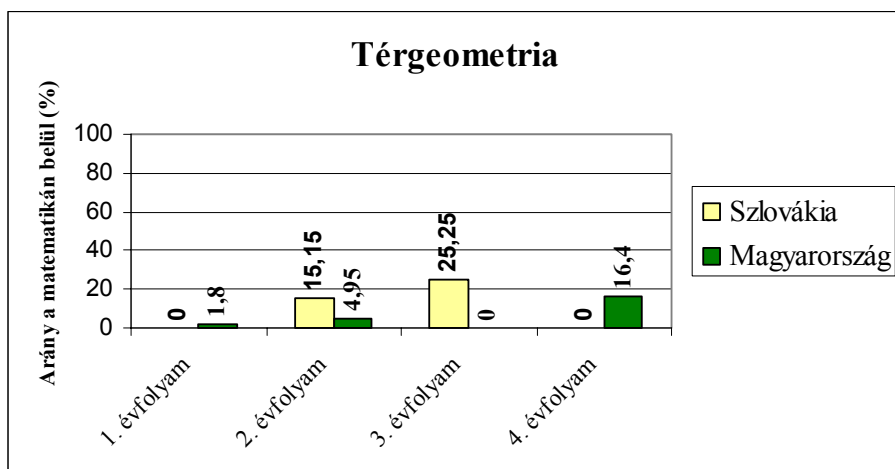
	1. évfolyam	2. évfolyam	3. évfolyam	4. évfolyam	Összesen
Szlovákia	-	20	25	-	45
Magyarország	1-2	3-8	-	16-21	21-31

A térgeometria oktatására javasolt óraszám a két országban ⁽³⁾ ⁽⁴⁾

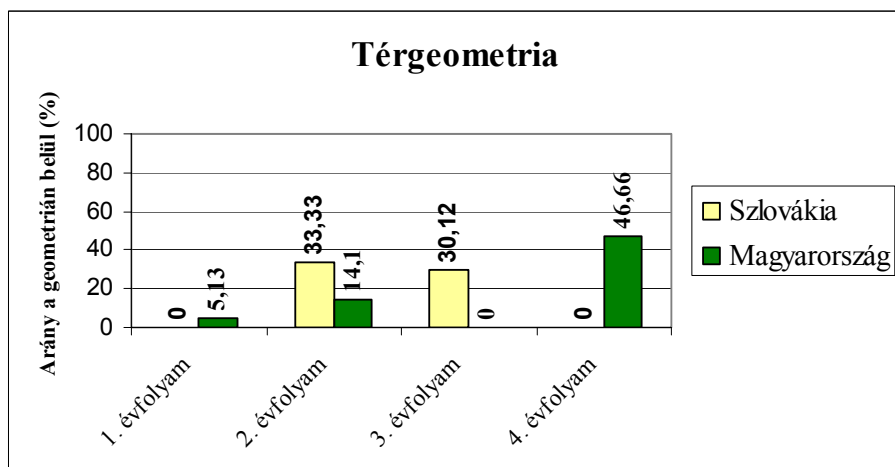
(3) Mindkét országban igaz természetesen, hogy utolsó évben az ismétlésnél és az érettségi előkészítésnél előjönnek a geometriai, térgeometriai ismeretek, a térgeometriai problémák megoldása.

(4) A geometria illetve a térgeometria százalékos arányát nehéz megbecsülni, hiszen a jó tanárok a síkgeometriai problémák – transzformációk, mértani helyek – tárgyalásakor kitérnek a térbeli esetekre is. A trigonometriában is sok térgeometriai alkalmazási feladat található.

A következő két diagram a térgeometria százalékos arányát mutatja a matematikán, majd a geometrián belül a tantervek alapján a két országban:



3. ábra: A térgeometria aránya a matematikán belül [52] ⁽³⁾⁽⁴⁾



4. ábra: A térgeometria aránya a geometrián belül [52] ⁽³⁾⁽⁴⁾

(3) Mindkét országban igaz természetesen, hogy utolsó évben az ismétlésnél és az érettségi előkészítésnél előjönnek a geometriai, térgeometriai ismeretek, a térgeometriai problémák megoldása.

(4) A geometria illetve a térgeometria százalékos arányát nehéz megbecsülni, hiszen a jó tanárok a síkgeometriai problémák – transzformációk, mértani helyek – tárgyalásakor kitérnek a térbeli esetekre is. A trigonometriában is sok térgeometriai alkalmazási feladat található.

Szlovákiában 14 órával több jut a térgeometria oktatására gimnáziumban akkor is, ha Magyarországon a legmagasabb javasolt óraszámot vesszük e témakörhöz. Abban az esetben, ha Magyarországon a javasolt legalacsonyabb óraszámot vesszük, akkor négy év alatt a szlovákiai diákoknak 24-gyel több térgeometria órájuk van! Az oktatásra javasolt tartalom ugyanaz, de ezt Szlovákiában a 2. és 3. évfolyamon tanítják, Magyarországon pedig 1., 2. és 4. évfolyamon. Összességében elmondhatjuk, hogy a térgeometria oktatására mindkét országban kevés idő jut. Az 5.1. fejezetben vizsgáljuk ennek hatását, beszámolunk egy összehasonlító felmérésről, mely egy szlovákiai és egy magyarországi egyetem elsőéves matematika szakos hallgatóinak térszemléletét és térgeometriai ismeretét vizsgálja.

2.4. Számítógép és dinamikus geometriai rendszerek az oktatásban

2.4.1. A matematika és az ábrázoló geometria számítógéppel segített oktatása

„A számítógép olyan dolgokkal kapcsolatban kényszerít bennünket gondolkodásra, melyekről számítógép nélkül is rég el kellett volna gondolkodnunk.”

(Schupp, H., 1993, [28]-ban)

Az információs és kommunikációs technika (IKT) nem szűkíthető le a számítógép, az Internet használatára. Mindent magában foglal, amit a tanítási-tanulási folyamat közben a tanár vagy a tanuló alkalmaz. Vaníček [97] ezért a „kognitív technológiák” kifejezést használja az információs és kommunikációs technológiák helyett a számítógéppel támogatott oktatás esetében.

A Magyar Válasz az Információs Társadalom kihívásaira szakértői anyag 1999-ben olyan új pedagógiáról ír, amely szerint „a hagyományos, főleg instrukción alapuló tanárközpontú tanulás-tanítás helyett diák-központú tanulási környezetek kialakítására van szükség”. [6, 49. o.]

„Bár a közoktatás és a felsőoktatás gyakran emlegetett távolsága a felsőoktatásban tetőző expanzióval csökkenni látszik, úgy véljük, a hétköznapi tapasztalatok tömegesség-élményén túl az ágazati közeledés

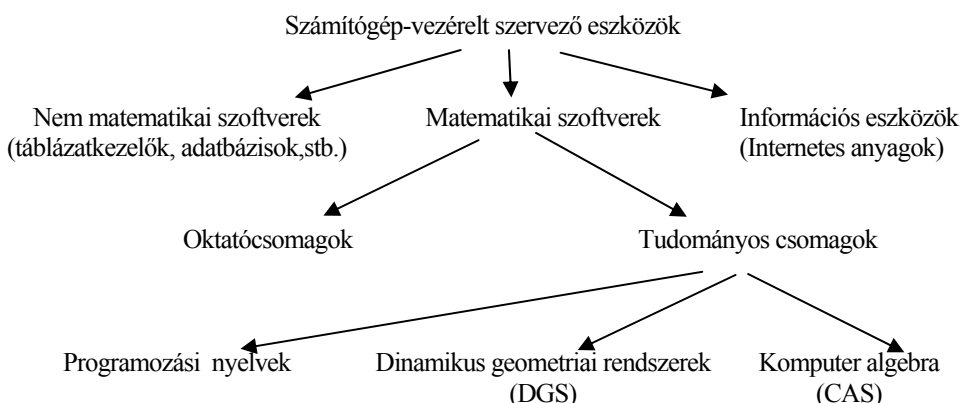
megkérdőjelezhető. Számolni kell azzal, hogy felsőoktatás-pedagógia nem létezik abban az értelemben, amiként a rendszer alacsonyabb szintjein. A felsőoktatásban többnyire pedagógiai végzettség nélkül oktatunk, történeti hagyományok és szokásjog szerint, laikus meggyőződéseinket szentesítve és intézményesítve. Felsőoktatás-pedagógiá(i)nk kimunkálására az „IKT-korszak” feltétlenül inspirációt jelent.” – írja Huszár. [40, 5. o.]

Az IKT oktatásban való elterjedésével kapcsolatban Gawlick [28] arról ír, hogy át kell gondolnunk, hogy melyek azok a célok, munkamódok, amelyeket nem szabad tovább fenntartanunk, melyek azok, amelyeket feltétlenül fenn kell tartanunk és melyek azok, amelyek hozzáadódnak az oktatáshoz. Leértékelődik a formális tudás – hiszen a számítógép ezt gyorsabban és jobban tudja –, felértékelődik a problémamegoldás képessége.

Vásárhelyi [101] felhívja a figyelmet arra, hogy a tanulási folyamat tervezése során az elérendő célokból kell kiindulnunk – cél az adott tetszőleges tantárgyi témakör ismeretanyagának minél jobb színvonalon történő elsajátítása –, majd ezekhez kell kiválasztanunk az alkalmazni kívánt eszközöket és módszereket, például a számítógépet. A jelenleg legelterjedtebbnek mondható frontális osztálymunkához képest új pedagógiai módszerekre, más jellegű előkészületekre van szükség. Az alkalmazási lehetőségeket a tanári tevékenység oldaláról megközelítve Vásárhelyi munkája alapján három csoportba sorolhatjuk:

- a számítógép, mint a tanár előkészítő munkáját, információszerzését, kapcsolattartását segítő eszköz,
- a számítógép, mint a tanítási órát segítő eszköz,
- a számítógép, mint tanár. [100]

A következő ábrán Perjésiné munkája alapján [74, 30. o.] a számítógépes eszközök egy lehetséges csoportosítása látható:



5. ábra: A számítógép-vezérelt szervező eszközök [74, 30. o.]

A tudományos csomagok közül a programozási nyelvek főként az informatikus hallgatókat segíthetik a matematikai ismeretszerzésben. A dinamikus geometriai rendszerekről, használatukról az oktatásban a későbbiekben írunk. A számítógép algebrai rendszerek szimbolikus, numerikus és grafikus műveletek végzésére képesek. [74]

A számítógép algebrai rendszerek használatával kapcsolatban Buchberger [12] ír a White-Box/Black-Box elvről, amely elv a dinamikus geometriai rendszerek esetében is alkalmazható. Amikor a tanulók elsajátították egy eljárás lépéseit (White-box fázis), a CAS segítségével az eljárást egy lépésben is elvégezhetik (Black-Box fázis). Buchberger szerint segítheti a megértést, ha néha fordítva járunk el: először az eljárást Black-Box-ként alkalmazzuk, ez után következik a White-Box, az eljárás részleteinek megismerése.

A Pécsen 2002-2007 között Klincsik, Sárvári és Lavicza által szervezett konferenciák [114] közvetlen célja, hogy a számítógép algebrai rendszerek és a dinamikus geometriai rendszerek oktatásban történő eredményes alkalmazásának kutatásával foglalkozók megismerjék egymás munkáját, hiszen Magyarországon sokan foglalkoznak e programok oktatásban történő eredményes felhasználásának elősegítésével, de ezek az erőfeszítések általában egymástól függetlenül történnek. Második cél a közös gondolkodás e rendszerek oktatásban betöltött szerepének növelése, a rendszerek eredményesebb alkalmazása érdekében. A harmadik cél az oktatásban való alkalmazás elterjesztéséhez való hozzájárulás.

A Monge-projekciós szerkesztések számítógépes támogatását célul kitűző kezdeményezések, programok közül itt néhányat emelünk

csak ki. Egyik számítógépes program cseh fejlesztésű. [112] E programmal lehetőségünk van a szerkesztések elvégzésére Monge-projekcióban. Egy másik program magyar fejlesztésű. Ez a program segíti a tanár munkáját a Monge-projekció elméletének oktatásában és a gyakorlásnál, az elemek közti kapcsolatok megértésében is az interaktivitás segítségével. [55] A fejlesztő, Kovács írásában [54] arról számol be, hogy az anyagnak szinte minden részét könnyebben értették meg a hallgatók a számítógépes csoportban. Kiemelkedően hasznosnak ítélte meg a program használatát a pont, egyenes, sík ábrázolásával kapcsolatos alapismeretek tárgyalásánál, mert itt a program interaktivitása a táblán nagyon nehezen volt kivitelezhető. Meggyőződése, hogy a számítógépes csoport mélyebb tudásra tett szert a félév alatt, mint a hagyományos szerkesztőeszközökkel dolgozó csoport. Mindkét programban a szerkesztések BMP formátumban menthetők el, interaktív feladatlapok nem készíthetők. A Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetemen (Természettudományi Kar, Matematika Intézet, Geometria Tanszék) Nagyné Szilvási Márta készített két java appletet az ábrázoló geometriához (csonkagúla) és a térbeli transzformációkhoz (csonkagúlák kompozíciója). [113] A Szent István Egyetem Ybl Miklós Építéstudományi Karán (Ábrázolás- és Számítástechnikai Tanszék, Rajz és Ábrázoló Geometria Tanszéki Csoport) számítógépes animációkat használnak ábrázoló geometria előadáson. [115] A szerkesztésekhez a Cabri programot használják, főként a lépésenkénti lejátszás és a tolás-húzás teszt lehetőségeket. [53]

2.4.2. Új célok, új kérdések

A geometriai problémamegoldás útja a rajzoknál kezdődik, hiszen a helyes következtetéshez pontos rajzok szükségesek. Az oktatásban és a gyakorlatban nélkülözhetetlen a korrekt ábra. A számítógépes rajzoló programok ezt a célt támogatva segítenek a szerkesztéseknél, új lehetőségeket nyitnak meg a geometria tanításában: gyorsan, pontosan, a bemeneti adatokat rugalmasan változtatva lehet rajzok sokaságát előállítani, megkönnyítve ezzel a geometria felfedezésének útját.

László, az Euklides dinamikus geometriai rendszer egyik fejlesztője [58] a dinamikus geometriai rendszereket (DGS - Dynamic Geometry System) „geometriai szemléletű grafikus szerkesztő-

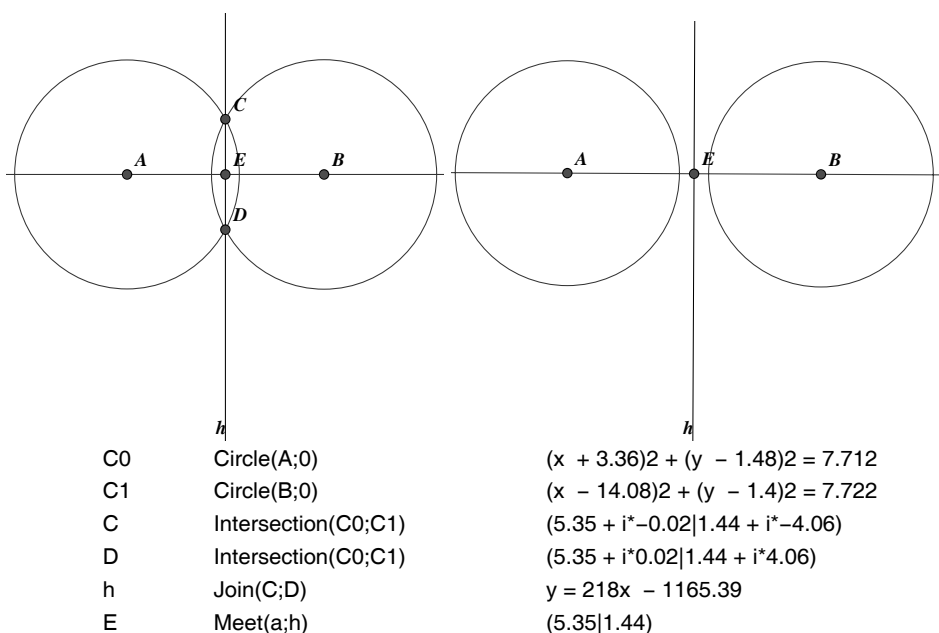
programok”-ként határozza meg, melyek a „CAD-rendszerekkel tekinthetők leginkább rokonnak, ám szemléletmódjukban sokkal erőteljesebben támogatják a matematika művelését és oktatását.”

Ezek a rendszerek nem csupán egy statikus ábra létrehozását támogatják, hiszen a program tárolja a szerkesztési lépéseket, az ábrákat dinamikus egységnek tekinti. Ez azt jelenti, hogy egy alakzat helyének változtatásakor az összes olyan alakzat helye is változni fog, amelyeket belőle szerkesztettünk. A mozgatás során így megfigyelhető az alakzatok egymásra építettsége, a szerkesztési folyamat. [50, 79, 80] A legismertebb DGS-ek: Cabri, Cinderella, Euklid, Euklides, GeoGebra, Geometer's Sketchpad.

Az új eszközök új tartalmakat, lehetőségeket, célokat adnak, új eddig ismeretlen kérdések, megoldások, válaszutak lehetőségét vetik fel. [57]

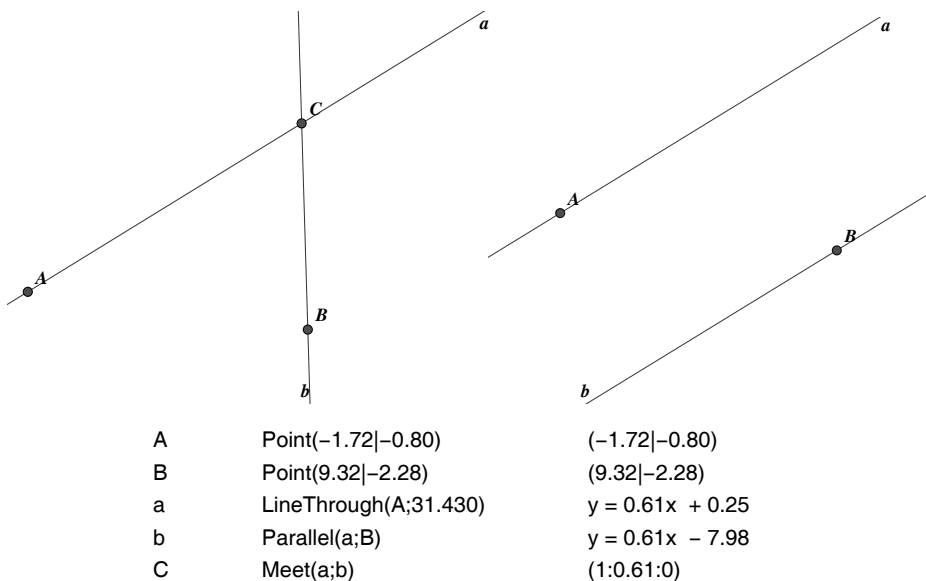
A DGS-ek alkalmazása egy fontos kérdést vet fel: mennyire marad elvégezhető a szerkesztés a bemeneti adatok változtatása után? A *Cinderella* válasza erre a kérdésre, két példával illusztrálva:

Tekintsük a következő esetet: Rajzoljunk két kört, amelyek egymást metszik két pontban. E két pontot kössük össze egy egyenessel (ez lesz a két kör hatványvonala). A körök mozgatásakor ez az egyenes is elmozdul, de mindig merőleges lesz a két kör középpontját összekötő egyenesre. De vajon mi történik, ha a két kör középpontja a két sugár összegénél távolabb kerül egymástól? A DGS-ek egy részénél a két metszéspont eltűnik, és az egyenes is. Más részükénél a program nem engedi meg a két kör ilyen mozgatását. A *Cinderella* ekkor is megszerkeszti a hatványvonalat, mert a számolásokat komplex számokkal végzi, s a két kör (nem végtelen távoli) metszéspontjait és az ezekre illeszkedő (már valós) egyenest ekkor is megtalálja. Ez a példa mutatja, hogy a komplex számokkal való számolás bevezetése igen leegyszerűsíti a geometriai szerkesztéseket az eltűnő metszéspontok kiküszöbölésével.



6. ábra: Hatványvonal szerkesztése

Az euklideszi síkon két egyenes metszi egymást, ha nem párhuzamosak. Két metsző egyenes lehet, hogy párhuzamos lesz, ha a szerkesztés néhány elemét elmozdítjuk. Ez a következő problémához vezethet: Mi lesz azokkal az egyenesekkel, amelyeket ez a metszéspont és egy másik pont határozott meg? Az ilyen egyeneseknek párhuzamosaknak kellene ezután lennie a két adott egyenessel, de ehelyett eltűnnek, mivel a meghatározó pontjai többé már nem határozzák meg őket. Hogyan kerülhetjük el ezt a helyzetet? A *Cinderella* a projektív síkon végzi a számításokat, ezért a két párhuzamos egyenes végtelen távoli metszéspontját tudja értelmezni homogén koordinátákkal. A harmadik egyenest ezekkel párhuzamosan fogja megrajzolni, az adott végtelen távoli ponton keresztül. [49]



7. ábra: Metsző egyenesek euklideszi és projektív síkon

Az alkalmazó szempontjából a fontos megállapítás az, hogy a *Cinderella* a számításokat a komplex projektív síkon végzi. [49] Didaktikai szempontból ez az általános- és középiskolában zavaró lehet, hiszen az előző szerkesztés elvégezhetősége egy középiskolásnak is problémát okozhat, de az egyetemi, főiskolai oktatásban kifejezetten hasznos.

A *Cinderella* Java nyelven íródott. A webböngészőkben közvetlenül futtatható interaktív ábrákat, feladatlapokat generálhatunk. (Az interaktív feladatlapokról a következő fejezetekben részletesebben szólnunk.) Nincs szükség a *Cinderella* telepítésre a hallgatók számítógépein, az interaktív feladatlapok működéséhez a feladatokon kívül egy speciális állományt kell csak a szerveren elhelyezni és a hallgatói számítógépek mindegyikén kell lenni Java 1.4.2-nek vagy újabb verziónak. Ezt a lehetőséget kihasználva az órákon a hallgatók az Internetről dolgozhatnak. Mivel pénzügyi nehézségek miatt a főiskolánkon a *Cinderella* vagy egyéb DGS a hallgatók számára nem érhető el, a feladatlapként való elmentés lehetősége döntő motiváció a *Cinderella* mellett, egyebek közt ezért választottuk ezt a programot.

A DGS-ek háromféle pontot különböztetnek meg [103, 3. o., 57]:

- bázispont: a rajzfelületen bárhol tetszőlegesen kiválasztott pont (2 szabadsági fok),
- objektumra illesztett pont: egy alakzat egyik pontja (1 szabadsági fok),
- metszéspont: két alakzat metszéspontja.

László ír [57] arról, hogy a *Cinderella* nem választja szét élesen a bázispont, a metszéspont és az objektumra illesztett pont fogalmát. A metszéspont az objektumra illesztett pontból származik, mint két objektumra illesztett pont. Tudjuk kezdeményezni pont felvételét, majd objektumra vagy metszési helyre vonszolhatjuk, ettől függően bázispont, objektumra illesztett pont vagy metszéspont lesz belőle. Animáció vagy nyomvonal készítésekor nem tehetjük meg bármely bázisponttal, hogy végigfusson valamely objektumon, hacsak nem rá illeszkedő pont. Ez a különbség a pont jelöléséből sem látszik, sőt néha nem is jól működik, mert a program bázispontnak veszi és mozgatáskor helyben hagyja. Ezeket a hiányosságokat a program számos előnye mellett jelentéktelennek tartottuk; a programot megfelelőnek tartottuk az ábrázoló geometria, majd a műszaki ábrázolás segítésére.

2.4.3. A dinamikus geometriai rendszerek fő jellemzői

A DGS-ek általában a következő lehetőségeket nyújtják [80]:

- a) Dinamikus adatkezelés: A DGS nemcsak konkrét statikus ábrák elkészítését teszi lehetővé, hanem a szerkesztés lépéseit raktározza, mely lépéseket a bemeneti adatok változtatása után is végrehajt tolás-húzás tesztel. Például képesek leszünk ellenőrizni a három magasságvonala egy pontra való illeszkedésére vonatkozó tényt nem csupán egy háromszögre, hanem a háromszögek egy igen nagy halmazára is. Így el lehet kerülni, hogy az ábra egyes részei között olyan szembeötlő összefüggések legyenek, amelyeket a feladat nem ír elő. [76]
- b) Nyomvonal rajzolása: A kész szerkesztésben egy alapelemet végigfuttathatunk egy azt tartalmazó körön vagy egyenesen és ennek hatására a DGS egy (az előbbi alapelemtől függő) pont mozgásának pályáját megrajzolja. Lehetőség nyílik így adott tulajdonságú pontthalmazok keresésére.

- c) Animáció: Az előző lehetőséghez kapcsolódva a pont mozgását, a szerkesztés változását mozgó animációként is megjeleníti a DGS. Van olyan DGS, amely lehetőséget nyújt arra, hogy a fázisokat egyidejűleg megjelenítsük (Euklides). [57]
- d) Szerkesztőeszközök korlátozása.
- e) Automatikus tételellenőrzés: A beépített automatikus tételellenőrző funkció az illeszkedésre vonatkozó tételek vizsgálatánál lehet segítségünkre.
- f) Összehasonlító geometria: A szerkesztések elvégezhetők gömbön és Poincare-féle körmodellben is.
- g) Interaktív feladatlapok készítése: Az interaktív weblapok segítségével tanulóknak szóló feladatok, útmutatások, szerkesztési segédletek készíthetők, illetve lehetőség nyílik a távoktatás megvalósítására is. Vásárhelyi [99] írása alapján interaktív feladatlapon nemcsak olyan elektronikus anyagot értünk, ahol a tanuló a feladatnál szabályozhatja a kész demonstráció lejátszási sebességét, hanem az „online” segítséget kínáló elektronikus tanulóprogramot is.
- h) A szerkesztési lépések visszajátszása: Az elkészített szerkesztés lépéseit újra lejátszathatjuk a programmal.
- i) Makrók: Ha a részszerkesztés be- és kimenő adatait definiáljuk, rögzítjük, a későbbiekben ezt felhasználhatjuk egy lépésben.
- j) Fóliák: Az objektumok képzeletbeli átlátszó fóliákra csoportosíthatók, majd ezek külön kezelhetők (elrejthetők, átszínezhetők stb.). E lehetőséggel egyelőre csak az Euklides rendelkezik. [57]

A tolás-húzás teszt és a nyomvonal rajzolási lehetőség együttes alkalmazása lehetővé tesz heurisztikus problémamegoldási stratégiákat. [28, 38]

Az alkalmazási lehetőségek igen sokfélék, hiszen a web-alapú oktatás megvalósítható tanárral illetve tanár nélkül; a tanórai kereteken kívül segítségül lehetnek e programok a tehetséggondozásban, a felzárkóztatásban vagy a matematikatanulást újrakezdők támogatásában.

A geometria oktatásában a számítógépes rajzolóprogramok használatával a célunk lehet a pontos és szép ábrák készítése által a hatékony szemléltetés (hiszen sok feladathoz nehéz a táblán igazán szemléletes ábrát készíteni), a jobb megértés segítése, a tanulók

kreativitásának fejlesztése és az órák érdekesebbé tétele. Az egyszerűbb szerkesztéseket (mint például adott ponton át adott egyenessel párhuzamos, rá merőleges szerkesztése, szakasz felezőpontjának szerkesztése) egy lépésben elvégezhetjük, így több idő jut a feladat elemzésére, diszkusszióra, sejtések megfogalmazására.

2.4.4. Alkalmazási lehetőségek

Az előző részben említett tulajdonságok miatt a DGS-ek a kreativitás fejlesztésének eszközei. A geometria és az ábrázoló geometria oktatásában való alkalmazási lehetőségek közül a következőkről szólnunk részletesebben:

- a) Diszkusszió, a határesetek vizsgálata (dinamikus adatkezelés).
- b) Ponthalmazok keresése (nyomvonal rajzolósi lehetőség).
- c) Animáció.
- d) Szerkesztőeszközök korlátozása.
- e) Automatikus tételellenőrzés.
- f) Összehasonlító geometria.
- g) Interaktív feladatlapok, web-alapú oktatás.

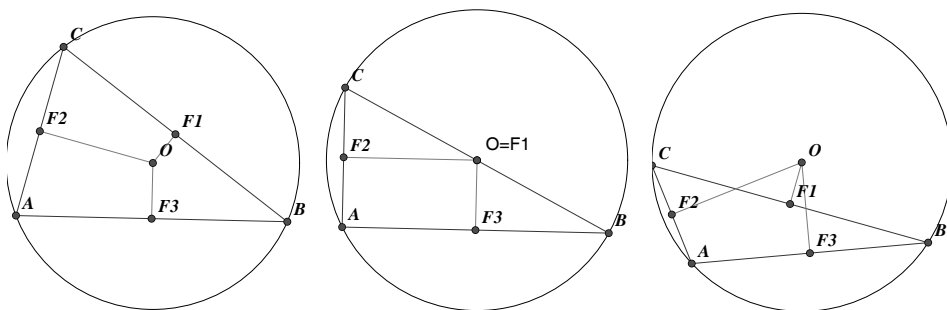
Minden alkalmazási lehetőséget egy-két *Cinderellában* kidolgozott példával illusztrálunk. [66]

a) Egy geometriai feladat megoldása során gondolnunk kell arra is, hogy a kiindulási adatoktól függően módosulhatnak a szerkesztési eljárások vagy maga a szerkeszthetőség. Szükséges megvizsgálni, hogyan alakul a feladat megoldása, megoldhatósága, ha nem általános, hanem speciális eseteket tekintünk.

Az „egérvezérelt” interaktív geometriai programok segítségével a szerkesztés befejezése után egy kiválasztott alapelem az egér segítségével tetszőleges irányba elmozdítható, és az egész szerkesztés következetesen változik ennek hatására. Így lehetővé válik a rajz dinamikus viselkedésének a vizsgálata akár az általános iskola 8. osztályától kezdve.

1. Példa: *A háromszögben az oldalfelező merőlegesek metszéspontja a háromszög köré írt kör középpontja. Vizsgáljuk meg a tolás-húzás teszt segítségével, hogy e középpont elhelyezkedése hogyan függ a háromszög legnagyobb szögétől! (8. osztály)*

Diszkusszió: Ha a háromszög hegyesszögű, akkor a köré írt kör középpontja a háromszögön belül van; ha derékszögű, akkor a köré írt kör középpontja az átfogó felezőpontja; ha tompaszögű, akkor a pont a háromszögön kívül van. (8. ábra)



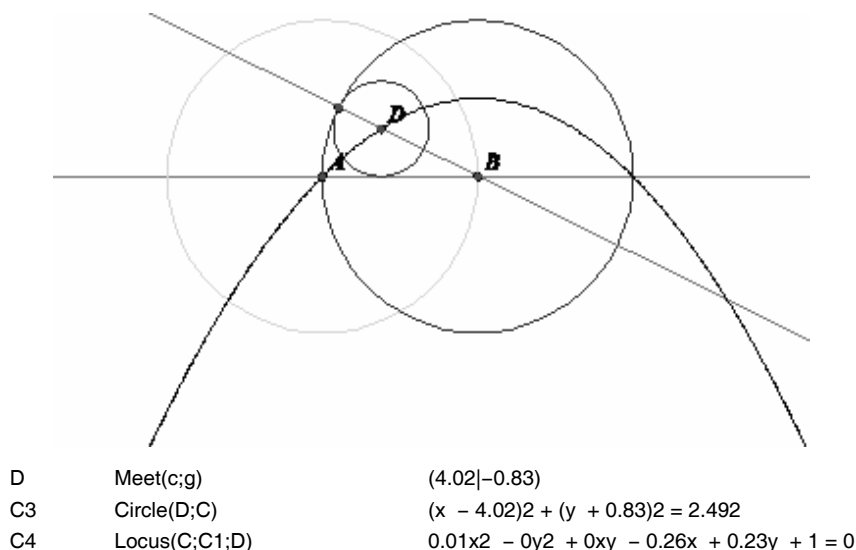
8. ábra: A háromszög köré írt kör középpontjának elhelyezkedése

b), c) A DGS-ek legkézenfekvőbb alkalmazási lehetősége a ponthalmazok keresése, a mértani helyes feladatok. E lehetőség segíti a tanulók dinamikus szemléletének kialakulását, fejlődését. Célunk a sejtéshez juttatás, a megérés segítése és a motiváció. A példák nyomvonal rajzoltatással illetve animációval történő megoldásánál a problémamegoldási képesség fejlesztésének Wittmann szerinti [2] alaptételei is megvalósulnak, hiszen az ismeretszerzés felfedeztető tanulás révén történik a számítógép segítségével, a tanulók maguk is vethetnek fel problémákat és az automatizált gondolatmenetek kizárólagos alkalmazása háttérbe szorul. A tanulókat a feladat megoldása előtt és közben ösztönözzük az indoklásokra, sejtésekre, önálló munkára.

A feltételek elhagyásának módszere gyakran használt megoldástípus a geometriában. Ha több feltételt kielégítő pontok halmazát kell megkeresnünk, akkor sorban külön-külön megkeressük az egyes feltételeknek megfelelő ponthalmazokat, majd azok közös részét képezzük.

2. példa: Pólya klasszikus feladata: a gótikus ablak: Az AB szakasz és két körív, AC és BC háromszögletű idomot zár be. Az egyik kör középpontja A, a másiké B, és mindkét kör átmege a másik középpontján. Írjunk a háromszögletű idomba mind a három határvonalat érintő kört. [77]

A feltételek elhagyásának módszerével a feladat az az érdekes probléma, hogy találjunk két feltételt teljesítő kört (tehát amely érinti az egyik kört és a szakaszt). Ha megadjuk az érintési pontot, mondjuk a körön, középpontos hasonlósággal megszerkeszthető a keresett kör. (9. ábra)



9. ábra: A „gótikus ablak” feladat és a szerkesztési lista

Ha ezen a problémán a diák túljutott, akkor kerestetheti a programmal a megoldások halmazát, miközben az érintési pont mozog a körön. Nemcsak a kapott ábra alapján sejtheti, hogy paraboláról van szó, hanem a szerkesztési lista kiíratásával fel is ismerheti a parabola egyenletét. Ez persze csak a feladat elemzése, a tényleges szerkesztés a Pitagorasz-tétel segítségével történik.

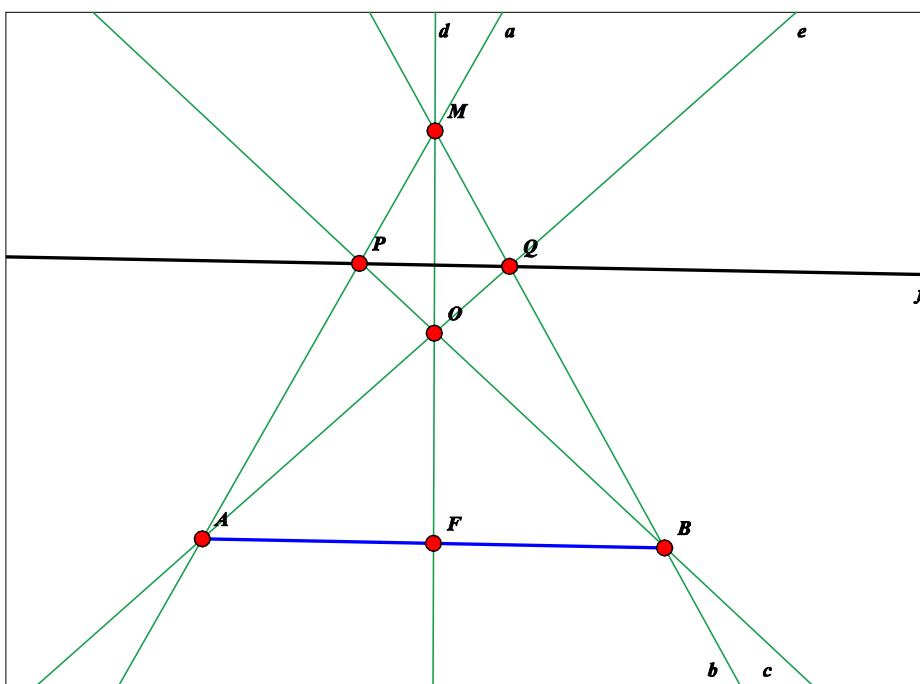
d) A kreativitás fejlesztésének egyik eszköze az ismert problémák újfajta szabályok szerinti megközelítése. Jó példa erre a geometriában a szerkesztés szabályainak megváltoztatása, például a szerkesztőeszközök korlátozása.

Példaként három lehetőség:

- a) a szerkesztésnél csak a vonalzó használatát engedjük meg;
- b) a régi, ismert szerkesztéseket végezzük el csak körzővel (Mascheroni-féle szerkesztés);
- c) adott egy körvonal a középpontjával együtt, és csak vonalzó használatát engedélyezzük (Steiner-féle szerkesztés).

Az interaktív feladatok kitűzésekor a tanár szabályozhatja a rendelkezésre álló szerkesztőeszközöket. E lehetőséget akár 8. osztálytól kezdve használhatjuk; célunk a szerkesztés elvégzése a program segítségével.

3. Példa. Adott az AB szakasz F felezőpontjával és a P pont. Szerkesszünk a P ponton át párhuzamost az AB egyenessel, csak vonalzóval. [90] (10. ábra)

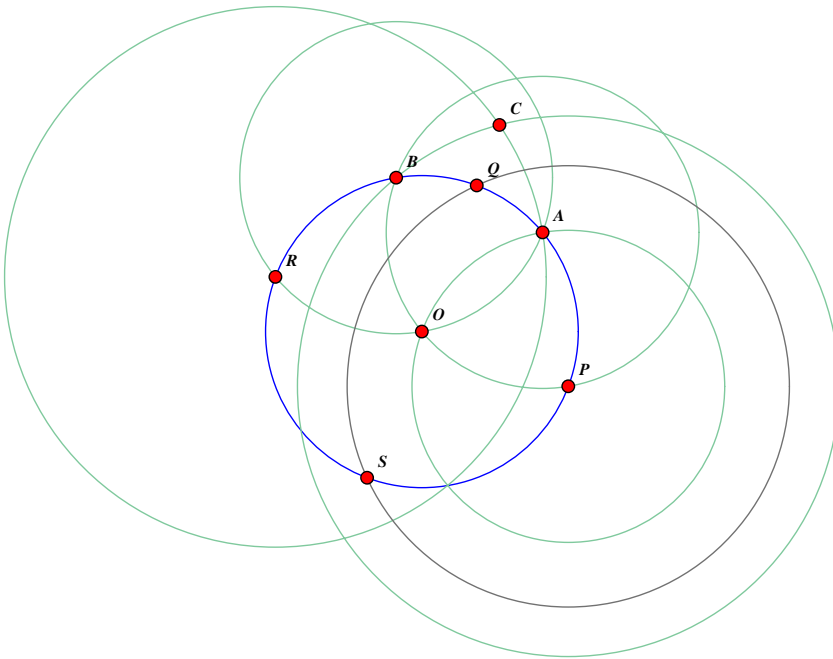


10. ábra: P -n át párhuzamos szerkesztése AB -vel, csak vonalzóval

Ez az ábra egyúttal azt is mutatja, hogy miképp lehet vonalzóval megszerkeszteni az AB szakasz felezőpontját, ha adva van az AB egyenessel párhuzamos egyenes.

4. Példa. *Napoleon-feladat: négyzet szerkesztése körbe csak körzővel.*
[73, 243-244. o.] (11. ábra)

A négyzet csúcsai: P , Q , R , S .



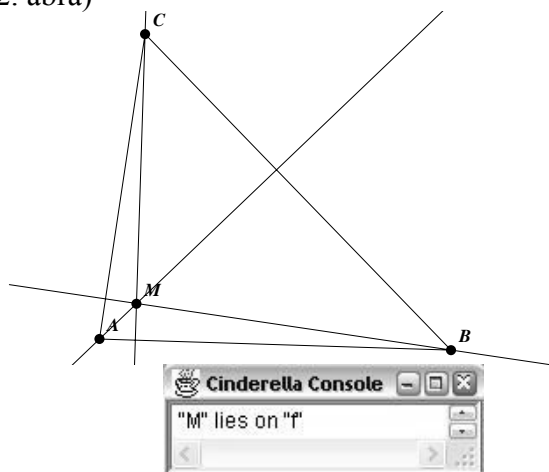
11. ábra: Napoleon-feladat

e) A bizonyítások tanítása során három fázist különböztetünk meg:

- tételek megsejtése;
- bizonyítási ötlet megtalálása, bizonyítási stratégiák, módszerek alkalmazása;
- bizonyítás rögzítése, leírása; reflexió. [2]

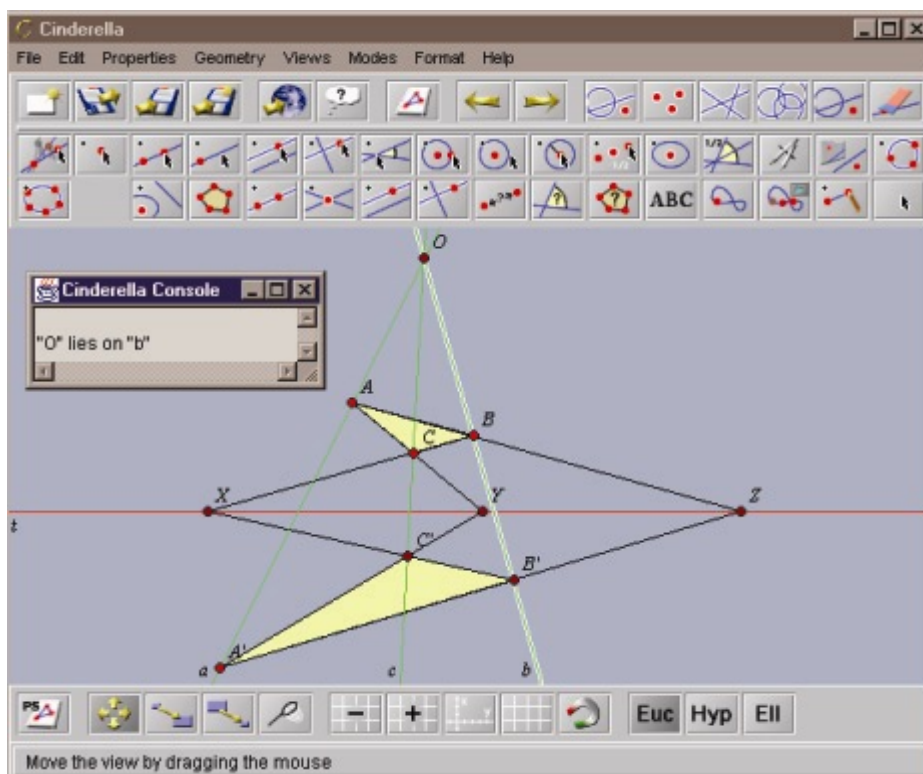
Az illeszkedésre vonatkozó tételek érvényességéről meggyőződhetnek a diákok a programba beépített automatikus tételellenőrző funkció révén. A program főként a bizonyítás első fázisában használható az általános iskola 8. osztályától kezdve. Célunk a sejtéshez juttatás.

5. Példa: *Bármely háromszög magasságvonalai egy pontban metszik egymást. (12. ábra)*



12. ábra: A háromszög magasságvonalai

6. Példa: *Desargues-tétel: ha két háromszög oldalaira nézve perspektív, akkor csúcsaira nézve is az. (13. ábra)*



13. ábra: Desargues-tétel

A bizonyítás a matematikában szigorúan deduktív, formális eljárás. A matematikaoktatásban azonban érvényre kell jutnia a bizonyítás másik fontos jellemzőjének is, a „megértés” jellegnek. Ebben az esetben a bizonyítás inkább a „megindoklást” jelenti. Az, hogy mikor fogadható el a megindoklás „bizonyításként” függ a korosztálytól és a feladat nehézségi fokától is. [3] Elschenbroich [20] írása nyomán a bizonyítások alábbi típusait különböztetjük meg:

- evidencia „bizonyítás”
 - kísérleti „bizonyítás”
 - dinamikus invariancia „bizonyítás”
- preformális bizonyítás
 - tartalmi-szemléletes bizonyítás
 - cselekvésorientált bizonyítás
 - vizuális-dinamikus bizonyítás
- formális („tudományos”) bizonyítás

A kísérleti „bizonyításnál” véges számú példán keresztül kerül igazolásra a bizonyítás. Ez természetesen nem általános érvényű bizonyítás. A tartalmi-szemléletes bizonyítás szerkesztések és műveletek végzése, amelyek során intuitíven felismerhető, hogy a műveletek a példák egy egész osztályára is alkalmazhatók, és ebből bizonyos következtetések adódnak. [20]

A DGS alkalmazásával a bizonyítások köre is bővül a dinamikus invariancia „bizonyítás”-sal és a vizuális-dinamikus bizonyítással. Dinamikus invariancia-„bizonyítás”: a pontok mozgása során a gyerekek „átélnék” bizonyos invariancia helyzeteket, amelyek számukra a mozgatással szerzett tapasztalatok révén nyilvánvalóak. E „bizonyítás” alkalmazható például a Thalesz-tételnél, Pitagorasz-tételnél, a háromszögbe írt kör középpontjának vizsgálatakor. A vizuális-dinamikus bizonyítás a „Miért van ez így?” kérdésre is választ ad a mozgatás segítségével. E bizonyítás alkalmazható az előző felsoroláson túl a mértani/számtani közép vizsgálatakor. [20]

f) Az összehasonlító geometria a matematika többszemponútú megközelítését valósítja meg. Az iskolában tanult euklideszi geometriáról is teljesebb, pontosabb képet kapunk, ha bepillantunk egyéb geometriai rendszerekbe.

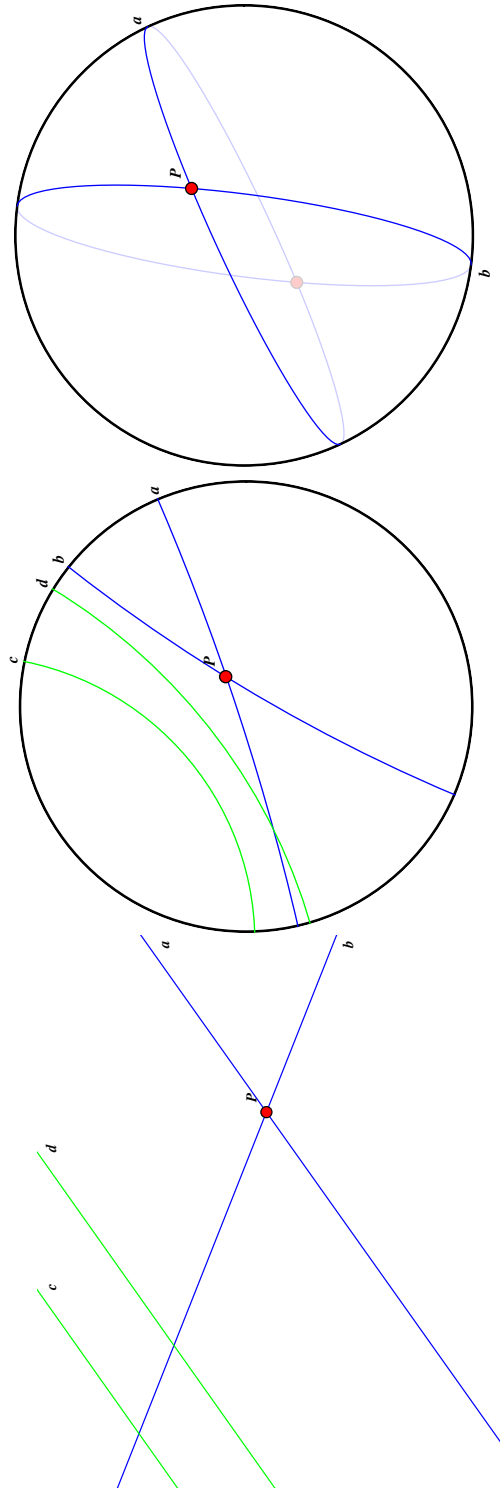
A *Cinderella* lehetőséget nyújt szerkesztések elvégzésére gömbön (egyszeres elliptikus geometriában) és Poincare-féle körmodellben (hiperbolikus geometriában) [48, 69] akár 8. osztálytól.

7. Példa. *Vizsgálja meg DGS segítségével, hogy két különböző egyenesnek hány közös pontja lehet euklideszi, hiperbolikus és (egyszeres) elliptikus geometriában!* (14. ábra)

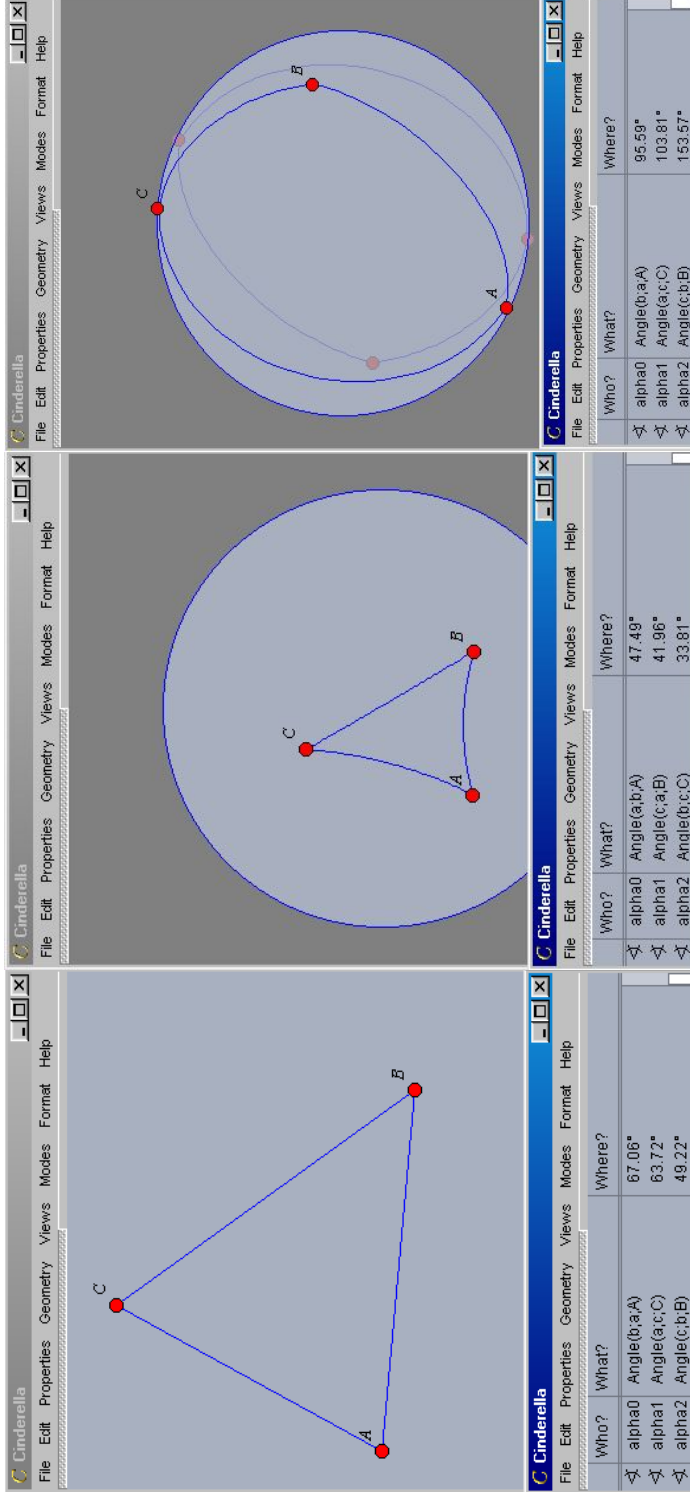
- Az euklideszi geometriában legfeljebb 1.
- A hiperbolikus geometriában legfeljebb 1.
- Az (egyszeres) elliptikus geometriában 1.

8. Példa. *Mekkora a háromszög belső szögeinek összege euklideszi, hiperbolikus és (egyszeres) elliptikus geometriában?* (15. ábra)

- Az euklideszi geometriában 180° .
- A hiperbolikus geometriában 180° -nál kisebb.
- Az elliptikus geometriában 180° -nál nagyobb.



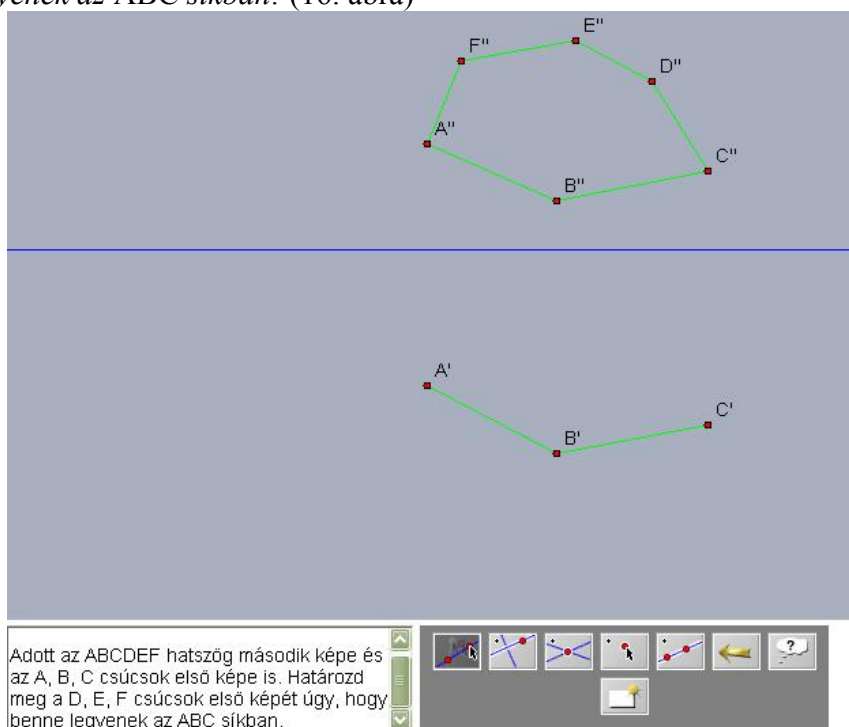
14. ábra: Két különböző egyenes közös pontja euklideszi, hiperbolikus és elliptikus geometriában

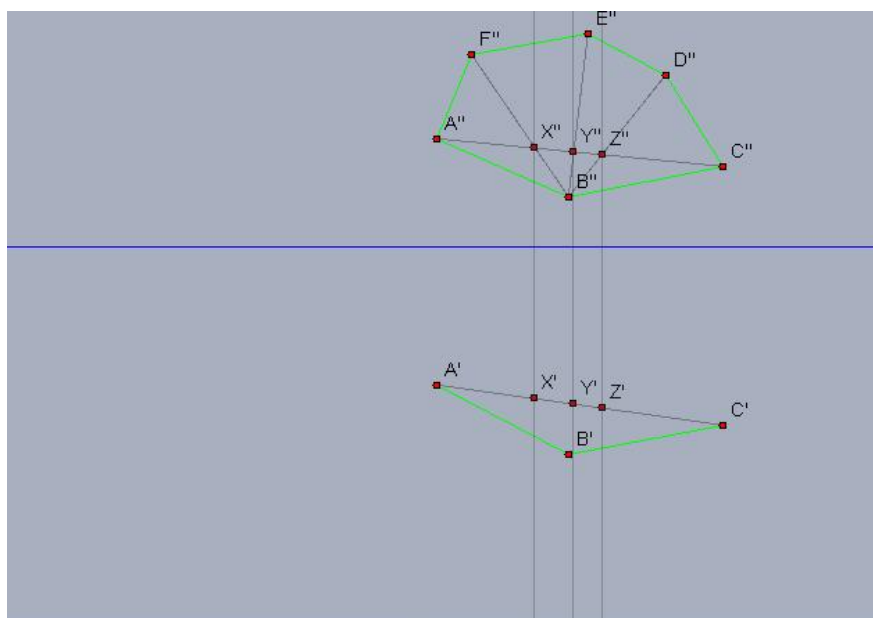


15. ábra: A háromszög belső szögeinek összege euklideszi, hiperbolikus és elliptikus geometriában

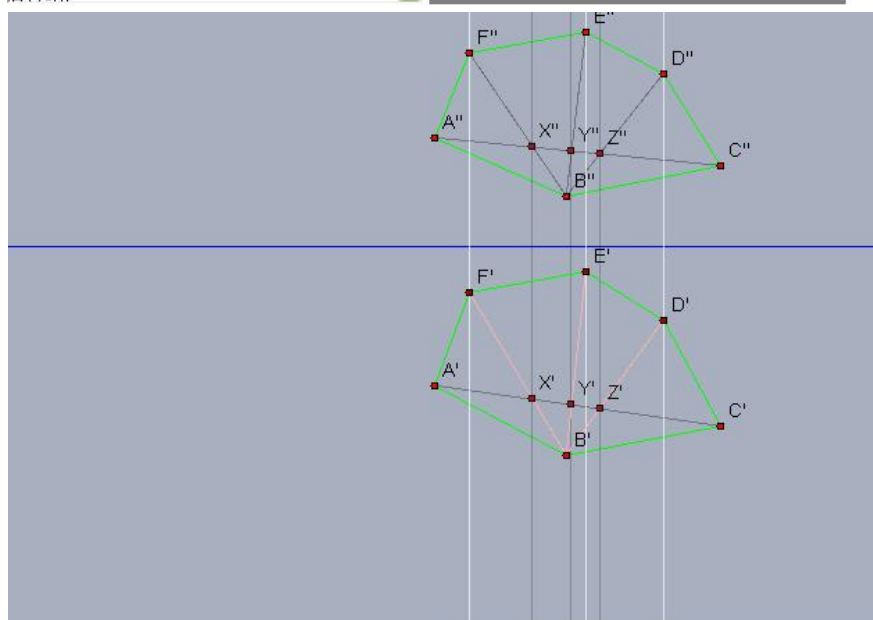
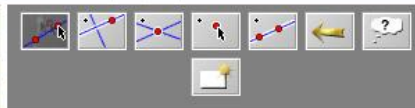
g) Mivel minden szerkesztés kimenthető interaktív weblapként, a tanulóknak lehetőségük nyílik a szerkesztések gyakorlására és a számonkérés is megvalósítható ilyen módon. A tanár beállíthatja a kiinduló objektumok és a kívánt objektumok halmazát a szerkesztéshez. Ezután kimentheti a feladatot a szerkesztőeszközök korlátozott halmazával. (Például: ha egy olyan feladatot szeretne adni a diákoknak, amelyben a merőleges szerkesztését egy körzővel és egy vonalzóval kell elvégezni, akkor ehhez egy interaktív feladatlapot kell csak elkészítenie.) Így tanulóknak szóló feladatok, útmutatások, szerkesztési segítségek készíthetők. Az útmutatások célja kettős. Az első: segítséget nyújtani a diáknak egy bizonyos feladat megoldásában. A második: fejleszteni a diák abbéli készségét, hogy a jövőben önállóan tudjon feladatokat megoldani, Pólya tanácsát követve. [76] Az útmutatások a következő példában először általánosak. Ha szükséges, áttérünk konkrétabb útmutatásokra. Fokozatosan következnek a speciálisabb útmutatások, hogy a munkának minél nagyobb részét a tanuló végezhesse el. Lehetőség van a szerkesztési feladatok megoldásának automatikus ellenőrzésére is.

9. Példa: *Adott az ABCDEF hatszög második képe és az A, B, C csúcsok első képe is. Határozza meg a D, E, F csúcsok első képét úgy, hogy benne legyenek az ABC síkban!* (16. ábra)

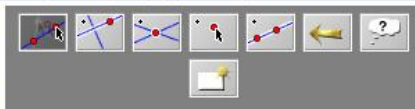




A B csúcsból húzott átlók segítségével.
 - Az A''C'' átlónak és a B''F'', B''E'', B''D''
 átlónak a metszéspontjait jelöljük X'', Y'',
 Z''-vel. Ezeknek keresd meg az első képeit
 A'B'C'-n!



- Keresd meg a B'X' átló metszeteit az F''-n
 átmenő rendezővel!
 - Ez lesz F'. A többi pontot hasonlóan
 szerkesztjük



16. ábra: A 9. példa és a hozzá tartozó szerkesztési segítségek

h), i), j) A feladatok megoldásánál azonban nem csak a végeredmény fontos, hanem tanulságos a gondolkodásnak az az útja is, amely a megoldáshoz vezetett. Ennek elemzése fejleszti a gondolkodókészséget. A szerkesztési lépések lejátszásának lehetőségét az általunk használt *Cinderella* verzió nem támogatja, az elkészített feladatlapoknál csak a megoldási lépések visszavonására (undo), illetve újbóli elvégzésére volt lehetőség, így a megoldás menete csak e korlátok között követhető nyomon. A makró és a fóliakészítés lehetőségét szintén nem támogatja e verzió.

2.4.5. A tolás-húzás teszt

A DGS lényege, hogy a szerkesztés nem a pillanatnyi statikus ábrával azonos, hanem a szerkesztési struktúrát, a geometriai objektumok leszármazási rendszerét jelenti. Az objektumok egy része szabadon mozgatható, tolás-húzás tesztben megfigyelhető az ábra jónéhány tulajdonsága.

A DGS-től származó visszaigazolás kölcsönhatást biztosít a geometria képi és elméleti szempontjai között. Ha a megszerkesztett ábra a tolás-húzás tesztben nem tartja meg a várt alakját, az azt jelenti, hogy a szerkesztési folyamatnak helytelennek kell lennie. [56]

Hölzl [39] kétféle módot különböztet meg a tolás-húzás teszt közvetítő funkcióinak vizsgálatában: egyrészt a teszt módként, másrészt a keresési módként való alkalmazást. Az első esetben egy szerkesztésről a tanuló ellenőrzi, hogy megtartja-e az elvárt tulajdonságot tolás-húzás teszt alatt. A második esetben a tanulók új tulajdonságokat ismernek fel. Ekkor a tolás-húzás tesztben a szerkesztést olyan szempontok szerint kell kiértékelniük, amelyeket még nem ismernek. Annak megfigyelése, hogy a tanulók hogyan végzik a tolás-húzás tesztet, betekintést biztosít a megismerő képességükbe.

Arzarello és munkatársai [4] is megfigyelték, hogy a tanulók hogyan használják a számítógép egerét a nyitott problémák megoldási folyamata során. Ez alapján a következő tolás-húzás teszteket találták:

- Vándorló húzás: a bázispontok véletlenszerű mozgatása annak érdekében, hogy valamilyen szabályszerűséget felismerjenek.
- Kötött húzás: részben mozgatható (objektumon lévő) pont mozgatása.

- Irányított húzás: a bázispontok mozgatása annak érdekében, hogy egy speciális alakzatot kapjanak.
- Hamis pálya-húzás: egy bázispont mozgatása, mely egy olyan nyomvonalon mozog, amelyet a felhasználó esetleg nem ismer fel.
- Vonal húzás: egy mértani hely mentén új pontok rajzolása annak érdekében, hogy az ábra a feltételeket megőrizze.
- Csatolt húzás: egy pontnak egy objektumhoz való csatolása és az objektumon való mozgatása.
- Húzás teszt: egy mozgatható vagy részben mozgatható pont mozgatása annak eldöntésére, hogy az objektum megőrzi-e a kiindulási sajátosságait. A húzás teszt egy feltételezés ellenőrzését szolgálja.

A DGS-ekben a tolás-húzás teszt erősíti a tanulóknak az elemek közti logikai kapcsolatot. Támogatja a sejtések létrejöttét, lehetővé teszi a felfedezési fázishoz való visszacsatolást és így támogatja a bizonyítékok szerepét. Lehetőségünk van az egymás után elvégzett szerkesztési lépések visszavonására is, így elemezhető a szerkesztés, megmutathatók a logikai hibák, a helytelen feltételezések. Ezekkel a lehetőségekkel segíti a program a fogalmak tisztázását, az oktató és a hallgató számára is felszínre hozza a hallgatók gondolatmenetében rejlő hibákat, segíti a gyenge pontok felfedezését.

2.4.6. Dinamikus geometriai rendszerek használata az oktatásban

Napjainkban megfigyelhető a számítógéppel segített tanulás és tanítás világméretű elterjedése. A DGS-ek az oktatás elemeivé váltak külföldön (Például: München – Műszaki Egyetem (Cinderella)) és a magyarországi főiskolákon, egyetemeken is (Például: Budapest, Debrecen, Nyíregyháza, Szeged). Néhány magyarországi általános- és középiskolában is használnak ilyen programokat, például:

Makó – Általános Iskola (Euklides)

Sopron – Berzsényi Dániel Evangélikus Gimnázium (Cabri)

Békéscsaba – Vásárhelyi Pál Műszaki Szakközépiskola (Cabri) [88]

Ambrus cikkében [3, 4. o.] az új technológiák felhasználása esetén két lehetőséget különböztet meg: az automatizálást és a kompenzálást. Az automatizálás a különböző számítások, a szerkesztési lépések számítógéppel történő elvégzését jelenti. Kompenzálás esetében a technológia a normál emberi képességeket egészíti ki; olyan lehetőségeket biztosít, melyeket papír-ceruza rajzzal nem tudunk elérni. De nem csak valamilyen normálistól eltérő hiányosság korrigálása lehet a kompenzálás, hiszen kompenzálásról beszél akkor is, amikor egy DGS segítségével készített ábrán a tolás-húzás teszt segítségével szerkesztések sorozatát vizsgáljuk meg.

Laborde [56] osztályozta a feladatokat aszerint a szerep szerint, melyet a feladat tervezője tulajdonít a DGS-nek (nála a Cabri-nak), valamint a várt változás foka szerint. A négyféle típus:

- A feladatot nem változtatjuk meg formailag, a megoldási stratégia nem különbözik lényegesen a hagyományos papír-ceruzás megoldástól. A DGS rajzolási lehetőségének kihasználása. Példa: 2.4.4. fejezet 3. példája.
- A programot vizuális megerősítőként használjuk [72] a tulajdonságok megfigyelését célzó feladatoknál, a diákok feltevéskészítésének elősegítésére. A DGS tolás-húzás tesztjének kihasználása. Példa: 2.4.4. fejezet 1. példája.
- A program módosítja a feladat megoldási stratégiáit néhány DGS szerkesztési eszköz használatának segítségével. Példa: 2.4.4. fejezet 2. példája.
- A feladat csak DGS-sel értelmes (például Black-Box feladatok). A DGS szerkesztési eszközeinek és a tolás-húzás tesztjének a kihasználása. Példa: 2.4.4. fejezet 7. példája.

Gyakorlatainkon főként az első két típust használtuk.

A technológia nem csak eszköze az oktatási rendszernek, hanem kölcsönhatásban van a rendszer minden összetevőjével. Laborde megfigyelései szerint [56] a DGS alkalmazása a megfigyeléses feladatoknál a diákok és a feladatok matematikai tartalma közötti kapcsolatra volt hatással, a hagyományostól eltérő DGS feladatoknál (a DGS feladattípusok osztályozásában a 2.-4. feladattípusoknál) pedig az egész didaktikai rendszerre hatással volt, sőt az idővel való gazdálkodást is befolyásolta.

Noss és Hoyles [71] szerint a számítógépes környezet formálja a diákok feladatmegoldási stratégiáját. Graumann [30] felveti a kérdést,

hogy magával hoz-e a DGS egy újfajta geometriát az oktatásban, hiszen többek közt a papír-ceruzás geometriával szemben a DGS-ek a pont három változatát is megkülönböztetik.

A Michigani Egyetemen vizsgálták a DGS hatékonyságát a középiskolai geometria oktatásában. [59] Három középiskolai osztályban végezték a kísérletet. Arra a kérdésre keresték a választ, hogy a DGS és az új típusú feladatok hogyan befolyásolják a diákok érvelési technikáit és milyen hatása van e feladatoknak a diákok gondolkodására, a geometria tanulására.

A DGS alkalmazásának két különböző lehetőségét használták a kísérletben:

- az egyik feladatban a szerkesztési feladatot a diákoknak a program segítségével kellett megoldaniuk,
- a másik feladatban egy már megszerkesztett ábrát kellett változtatniuk a megoldáshoz.

Az első típusnál a diákoknak kell megszerkeszteni az ábrát, így e feladatnál szükség van a szoftver használatának ismeretére, míg a második feladat megoldásához nincs szükség jelentős programismeretre. Sajnos a projektet félbehagyták.

Oktatási kísérletünkben a fent említett két lehetőség közül főként az elsőt alkalmaztuk, majd a feladat megoldása után a feladat elemzésénél önállóan kísérletezhettek a hallgatók.

2.4.7. A kognitív technológiák alkalmazásának előnyei és veszélyei

„A gépi számítás tehermentesíti az elmét és megszabadítja a felesleges rutinmunkától.”

(Freudenthal, H.: Mathematik als pädagogische Aufgabe, 1973)

A fenti idézet igen fontos érv a kognitív technológiák mellett az ábrázoló geometria oktatásában, hiszen a hagyományos szerkesztéssel végzett rutin tevékenységek – mint például a merőlegesek, párhuzamosok szerkesztése – elvonhatják a figyelmet a gondolkodástól, a munka érdemi részétől.

Az Organisation of Economic Co-operation and Development pedagógiai kutatóközpontja a Centre for Educational Research and Innovation 1999 és 2002 között 23 ország részvételével nemzetközi kutatást szervezett „Információs és kommunikációs technológiák és a tanulás minősége” címmel. A vizsgálatok alapján az alábbi következtetésekre jutottak [42, 43, 44, 88]:

- Míg az OECD országokban a számítógépek alkalmazása a jó iskolák privilégiuma, Magyarországon a számítógép használata az oktatásban önmagában is jelentős módszertani fejlesztési lehetőségeket nyit meg, az infrastruktúra javítása komolyan hat a pedagógiai munka színvonalára. A számítógéppel segített tanítás sokoldalúan felhasználható eszköznek bizonyult, amellyel mind a hagyományos frontális, mind a konstruktivista, az önálló tudásszerzésen és differenciált, egyéni és csoportmunkán alapuló képzés megvalósítható.
- Rogers [81] szerint egy oktatási újítás elterjedésére jellemző, hogy néhány tanár – a tantestület 2,5%-a – bemutatja az új módszereket, egy kisebb csoport – a tanárok 13,5%-a – azonnal követi őket; az ő lelkesedésükre kezdi használni az újítást a 34%, míg a többiek csak külső ösztönzésre csatlakoznak vagy sohasem veszik át az új módszereket. Magyarországon az informatikai újítások elterjedése nem követi a szokásos modellt, mert nincs rá idő. A kampányszerű gépesítést és képzést gyors pedagógiai innováció követte.
- Elsősorban a tanárok képzettségétől függ az új technológia bevezetésének sikere. Ha ők kompetensen és lelkesen élnek a digitális taneszközök által nyújtott lehetőségekkel, a diákok is megszerzik az alapvető számítógépes ismereteket, készségeket.
- Fennáll a veszélye annak, hogy a számítógép tovább növeli a különbséget a kedvező és kedvezőtlen anyagi körülmények között élő tanulók között. Ezért az iskola feladata a hátrányos helyzetű diákok számára a pozitív megkülönböztetés biztosítása a tanóra utáni számítógép-használattal és személyre szabott feladatokkal. (Egy 1999-es magyarországi felmérés során [62] a vizsgált általános- és középiskolák között lényegében nem találtak olyan iskolát, ahol ne lenne a tanulók számára hozzáférhető számítógép, bár az iskolák 51%-ában húsz vagy kevesebb géphez férhetnek hozzá a diákok.)

- A számítógéppel segített tanítás és tanulás akkor is jól működik, ha a rendelkezésre álló oktatási anyagok nem elég jó minőségűek, mivel a tanári munka a döntő.

A Magyar Gallup Intézet 2002-ben vizsgálta [62] az általános- és középiskolai pedagógusok jövőképét az oktatással és az egyes technológiai eszközökkel kapcsolatban. A megkérdezett tanárok 36%-a egyetértett azzal, hogy a számítógép pozitív hatásai kellően ellensúlyozzák az esetleges rossz hatásokat. Minden negyedik tanár gondolta úgy, hogy hatékonyabbak azok a tanárok az iskolában, akik számítógépen alapuló technológiát használnak. 39%-uk úgy vélte, hogy jobb oktatómunkát végezne akkor, ha számítógépen alapuló technológiát használna a felkészüléshez. A pedagógusok 70%-a a számítógép előnyének tartotta, hogy a diákok munkái tetszetősebbek, amikor számítógéppel dolgoznak, 60%-uk tartotta úgy, hogy a diákok számára a számítógép használata a rutin feladatok között felüdülést jelent. 54%-uk a leginkább hátrányosnak azt tartotta, hogy a diákok nem vigyáznak kellően a számítógépekre. A másik hátrány (41% szerint), hogy a diákok könnyebben tudnak csalni. A tanárok 10%-a tartotta hátránynak azt, hogy a számítógépet nehéz használni. Kevesen értettek egyet (15%) azzal, hogy a számítógép eltereli a tanulók figyelmét. A tanárok 22%-a ad olyan feladatokat a tanulóknak, amelyekhez az órán kell számítógépet használniuk, 39%-a az órai munkán kívüli számítógépes feladatokat ad.

Földes esettanulmányának [22] tanúsága szerint a számítógép szerencsés használata nemcsak hasznos elméleti és gyakorlati ismereteket közvetít, de akár a mentális fejlődéshez is hozzájárulhat. A számítógéppel támogatott iskolai foglalkozásokon megfigyelt magatartásokat más órákkal összevetve olyan jellemzők adódtak, amelyek kapcsolatba hozhatók a kreatív számítógépes tevékenység jótékony hatásával. Ezek:

- Türelem, igényesség: A számítógéppel dolgozó diákok általában tökéletességre törekednek.
- A tévedések korrekciójának lehetősége: A tévedések nyomtalanul eltüntethetők.
- Kreativitás, alkotókedv, önbizalom.
- Önálló tanulás, önálló felfedezés.

Hölzl [38] szintén beszámol arról, hogy a Cabri interaktivitása a tanulókat kitartásra sarkallta.

Heugl [34] a szimbolikus számításokat végző rendszerekkel kapcsolatban jegyzi meg, hogy a kísérletező fázis a hagyományos matematikaoktatásban gyakran hiányzik. Laborde szerint [56] a számítógépek a kísérletezés lehetőségével kedveznek az absztrakciós folyamatoknak, hiszen a többszöri kísérlettel segítenek megkülönböztetni a fogalomhoz tartozó tulajdonságokat azoktól a tulajdonságoktól, amelyek csak a kontextushoz kapcsolódnak.

A diákok előzetes ismeretei, motivációja nagyon különböző. A hagyományos oktatás egyik problémája, hogy nehezen tudja kezelni ezeket a különbségeket. Tóth felhívja a figyelmet [92] arra, hogy a lassú tanulók az átlagos tanulókhoz igazodó szokásos tanítási menet sebességével nem tudnak lépést tartani. Csak rövid ideig képesek figyelni, ezért szokásosnál gyakrabban szükséges változtatni a tanítási módszereinket. Az anyag kisebb részekre bontása, a gyakori visszajelzés segítségükre lehet, emiatt az interaktív számítógépes oktatással igen jó eredményeket lehet elérni.

A számítógép alkalmazása lehetővé teszi azt, hogy a tanulók saját tempójukban haladjanak, így nem maradnak le a többiektől és nem unatkoznak. Amíg a tanulók a programmal foglalkoznak, a tanár figyelemmel kísérheti a gyengébb tanulók munkáját, illetve kiegészítő feladatokat adhat a gyorsabb tempóban haladó tanulóknak. [100] A diák saját maga szabhatja meg a tanulás ütemét, a számítógépes program biztosítja a személyes élményen alapuló tanulást, fejleszti a problémamegoldó képességet.

Gawlick [29] arról ír, hogy a kutatók tapasztalata szerint a számítógépes gyakorlat előkészítése jóval időigényesebb a hagyományos gyakorlatokénál és a tanár feladata összetettebb. Bármilyen újítás bevezetésének hatására egy adott tananyag megtanítása több időt vesz igénybe a hagyományos tanórához képest – írja Laborde. [56] Laborde azt állítja továbbá, hogy a technológia beillesztése az oktatásba hosszú folyamat. A diákok általában szívesen fogadják a számítógépes gyakorlatot, nagy kedvvel és belső motiváltsággal vesznek részt az ilyen foglalkozásokon. Kis [47] arról ír, hogy nemcsak a számítógéppel segített oktatás megszervezése, hanem az így született alkotások értékelése is sajátos szakértelmet igényel, viszont a számítógéppel modellezett tanulási környezetben az értékelés életszerűbb: a tanuló tudásáról nem csak azt tudjuk meg, mennyire gazdag és pontos, hanem azt is, hogy használható-e, ha az életben szükség van rá.

Sárvári [82] tapasztalatai alapján arra figyelmeztet, hogy az előadásokon nem szabad túlzásba vinni a multimédiás eszközök használatát, mivel az előre elkészített és bemutatott munkalap kevésbé hatékony.

Arzarello és munkatársai szerint [4] ha csak egy szoftvert bocsátunk rendelkezésre, a használók nem fogják annak előnyét automatikusan érezni és nem tudják a program által biztosított előnyöket kiaknázni. Ekkor a program akadályává válhat az empirikus gondolkodásmódról az elméleti szintű gondolkodási módra történő átállásnak, mert lehetővé teszi, hogy az elgondolás igazolását anélkül hajtsa végre, hogy az elméleti megfontolásokat használni kéne. Emiatt nagyon fontos a tanári irányítás. Kis szintén beszámol [47] arról, hogy előfordult, hogy a tanulók a miérteket figyelmen kívül hagyták, csak a tevékenységükre figyeltek, aminek következtében ugyan eljutottak a kívánt végeredményhez, de nem tudatosult, hogy valójában mit csináltak. Többnyire csak az elméleti számonkéréskor derült ki, hogy az említett esetben csak látszateredmény született a számítógépes órán.

Csiba felhívja a figyelmet [17] arra, hogy előfordulhat, hogy a tanuló képes lesz megoldani egy feladatot egy matematikai szoftverrel úgy, hogy a korrekt matematikai levezetéshez szükséges apparátus nem alakult ki. E miatt papír-ceruzás módszerrel képtelen lesz a feladat megoldására.

Hölzl [37] figyelmeztet a DGS használatával kapcsolatban arra, hogy előfordulhat, hogy a tanulók a gyakorlati megoldás előállításával foglalkozhatnak, nem pedig a feladat elméleti meggondolásával, így eltérhetnek a céltól. A feladattól való eltérésre, illetve az eszközök elvárttól eltérő felhasználására figyelmeztet még néhány további kísérlet is. [29, 41]

Az ismertetett nehézségeket a tanárnak figyelembe kell vennie, lehetőség szerint ki kell küszöbölnie a tanórák tervezésekor, hiszen a tanár felkészültsége, hozzáállása a számítógéppel segített matematikaoktatást is befolyásolja. Az előbbi kutatások alapján elmondhatjuk, hogy a matematikai szoftverek – megfelelő használat esetén – segítik a megértést, fontos segédeszközök lehetnek az ismeretek elsajátításában.

3. A kutatás kérdései és módszerei

A térszemlélet, a számítógéppel segített oktatás, a dinamikus geometriai rendszerek használata valamint a matematika didaktika szakirodalmának kritikus áttanulmányozása és a hipotézisek megfogalmazása után összehasonlító felmérést végeztünk a térszemlélet és térgeometria témakörben Bosnyák Ágnessel, a révkomáromi Selye János Egyetem oktatójával 94 fő elsőéves nappali tagozatos matematika tanár szakos hallgató részvételével a pozsonyi Komenský Egyetemen és a Debreceni Egyetemen a 2005/06. tanév első félév szeptemberében. Azért vizsgáltuk a matematika tanár szakos hallgatók teljesítményét, mert akkor érhetünk el javulást a térszemlélet fejlesztésében, a térgeometria tanításában, ha a leendő tanárok e téren kompetensek lesznek.

Továbbá a Debreceni Egyetem Műszaki Karon kontrollcsoportos fejlesztő kísérletet hajtottunk végre egy tanítási-tanulási stratégia kipróbálására a 2004/05. és a 2006/07. tanév első félévében. Az oktatási kísérletet 80 fő elsőéves nappali tagozatos gépészmérnök hallgatóval végeztük ábrázoló geometria, illetve műszaki ábrázolás gyakorlaton, két-két gyakorlati csoportban. [68] Az egyik csoportot DGS segítségével, a másikat anélkül oktattuk. Mindkét csoportot ugyanaz az oktató tanította a gyakorlaton (az előadást egy másik oktató vezette), az oktatással igyekeztünk párhuzamosan haladni a két csoportban. A gyakorlatokat oly módon próbáltuk szervezni, hogy egyik oktatásmód se jusson előnyhöz. Így reményeink szerint viszonylag megbízható kijelentésekhez jutottunk. A Warneke által meghatározott oktatási mezőben [108] terveztük az órákat, azzal a különbséggel, hogy tankönyvet nem használtunk (néhány fontosnak tartott könyvet ajánlott irodalomként jelölt meg az előadást vezető oktató):

- beillesztés a folyó oktatásba,
- párhuzamos oktatás,
- megértésre orientált munka,
- tankönyv,
- tanterv.

A DGS használatával folyó ábrázoló geometria oktatáshoz létrehoztunk egy *Cinderella* feladatlapokból álló, a gyakorlatok anyagát magában foglaló weblapot, e tananyagrendszert két féléven át kipróbáltuk, hatékonyságát folyamatosan vizsgáltuk. Az általunk

kidolgozott, az ábrázoló geometria, illetve műszaki ábrázolás tárgyak oktatására alkalmas tananyagrendszer a 2004/05. tanév tapasztalatai alapján a 2006/07. tanévben módosítottuk, korrigáltuk.

Adatgyűjtési módszereink a következők:

- előzetes felmérés,
- két zárthelyi dolgozat,
- késleltetett felmérés,
- kérdőíves felmérés,
- hallgatónk munka közbeni megfigyelése,
- az egyes hallgatókkal való óra közbeni foglalkozások tapasztalatai,
- a hallgatókkal való egyéni beszélgetések,
- a hallgatói dokumentumok (házi rajzok) elemzése.

A kiindulási állapotot a hallgatók térszemlélet-mérő feladatsorral vizsgált tudásszintje jelentette. A tanítási-tanulási folyamat eredményességének mérésére a félév során írt két zárthelyi dolgozat és a félév után 4 illetve 5 hónappal írt, gyakorlati feladatokból álló késleltetett felmérés szolgált, melyeket pontozással értékeltünk. Az eredmények összehasonlító vizsgálata e dolgozatok alapján történt. Továbbá kérdőíves felmérést végeztünk a hallgatók véleményének megismeréséhez.

Kérdéseink, amelyekre az összehasonlító felmérés és az oktatási kísérlet kapcsán választ kerestünk:

- Milyen szinten van az elsőéves nappali tagozatos matematika tanár szakos egyetemi hallgatók térszemlélete, térgeometriai ismerete a pozsonyi Komenský Egyetemen és a Debreceni Egyetemen?
- Hogyan használhatók fel a DGS-sel készített feladatlapok az oktatás hatékonyságának növelésére? Mik a DGS-sel készített feladatlapok ábrázoló geometriában való használatának nehézségei, veszélyei?
- Hatékonyabb-e az ábrázoló geometria illetve a műszaki ábrázolás oktatása DGS-sel készített interaktív feladatlapokkal; jobb eredményt érnek-e el a számítógéppel tanuló hallgatók a hagyományos zárthelyi dolgozatokon?

- A technológia alkalmazása hogyan változtatja meg a hallgató feladatmegoldási stratégiáját? A tolás-húzás teszt és az “undo” használatából milyen következtetéseket lehet levonni a hallgató gondolkodására, feladatmegoldási stratégiájára, gondolatmenetére és ez milyen összefüggésben van a hallgató eredményességével?
- Van-e különbség a számítógéppel tanuló és a papír-ceruzás csoport között az oktatás után 4 illetve 5 hónappal ábrázoló geometriai fogalmainak maradandóságát illetően, illetve mely fogalmak a „gyenge láncszemek” a hallgatóknál és szükséges-e az ábrázoló geometriai fogalmi struktúra fokozottabb megerősítése?
- Hogyan viszonyulnak a hallgatók a számítógéppel történő ábrázoló geometria oktatáshoz?

4. Hipotézisek

Hipotézisünk az összehasonlító felméréssel kapcsolatosan:

1. hipotézis a matematika tanár szakos egyetemi hallgatók térszemléletéről és térgeometriai ismeretéről

A matematika tanár szakos nappali tagozatos egyetemi hallgatók a pozsonyi és a debreceni egyetemen is jól teljesítenek a térszemlélet és a térgeometriai ismeretek felmérésére irányuló dolgozatban.

Hipotéziseink az oktatási kísérlettel kapcsolatosan:

1. hipotézis a DGS-sel készített feladatlapok oktatásba történő bevezetéséről

A DGS-sel készített feladatlapok didaktikailag jól átgondolt használatával az ábrázoló geometria elsajátításának színvonala emelkedik. A tanár szempontjából a rendszer alkalmazása megnöveli az órákra való felkészülés idejét.

2. hipotézis a hallgatói teljesítmények változásáról

A számítógéppel segített gyakorlatok hatására, a DGS-sel készített interaktív feladatlapokat alkalmazva hallgatóink ábrázoló geometriából

mélyebb tudásra tesznek szert. A törvényesen adott oktatási követelmény elsajátítását, a hagyományos, papír-ceruzás feladatok megoldását legalább olyan jól, vagy jobban elvégzik, mint a hagyományos, papír-ceruzás módszerrel tanulók.

3. hipotézis a hallgatók feladatmegoldási stratégiájának változásáról

A számítógépes csoport hallgatói szívesebben kísérleteznek, hiszen a helytelen elemek eltüntetésének nincsenek olyan következményei, mint a papír-ceruzás szerkesztéseknél.

4. hipotézis az ábrázoló geometriai fogalmak maradandóságáról

A számítógépes csoport jobban teljesít a késleltetett felmérőn, mint a papír-ceruzás csoport, fogalmaik maradandóbbak.

5. hipotézis a hallgatói attitűdök változásáról

A DGS-sel készített feladatlapok oktatásba történő bevezetésének hatására a tanulás motivációs szintje nő, a számítógépes feladatlapok használata a hallgatók nagy részének vonzó.

5. Az összehasonlító felmérés, az oktatási kísérlet és az eredmények

Az első alfejezetben egy összehasonlító felmérésről számolunk be a térszemlélet és térgeometria témakörből egy szlovákiai és egy magyarországi egyetemen. Bosnyák Ágnessel, a révkomáromi Selye János Egyetem oktatójával 94 fő elsőéves matematika tanár szakos hallgató tudását mértük fel a pozsonyi Komenský Egyetemen és a Debreceni Egyetemen. Arra a kérdésre kerestük a választ, hogy az elsőéves matematika tanár szakos egyetemi hallgatók térszemlélete, térgeometriai ismerete is olyan hiányos-e, mint az érettségiző középiskolásoké, amiről Danihelová [19] és Tompa [91] írnak cikkeikben; vagy Shea és munkatársai [84] kutatása alapján – mivel matematika tanár szakosok – jó téri képességgel rendelkeznek.

A második alfejezetben a Debreceni Egyetem Műszaki Karon végzett oktatási kísérletünkről és a kísérlet tanulságairól számolunk be. Az utolsó fejezet tartalmazza az összegzést, a tapasztalatainkat.

5.1. Az összehasonlító felmérés

Összehasonlító felmérésünket 2005. szeptemberében végeztük elsőéves nappali tagozatos matematika tanár szakos egyetemi hallgatók körében a pozsonyi Komenský Egyetemen és a Debreceni Egyetemen. A hallgatók térszemléletét és térgeometriai ismeretét mértük fel és hasonlítottuk össze. A pozsonyi egyetemen 43 hallgató, a debreceni egyetemen 51 hallgató írta meg a felmérést.

Shea és munkatársai a matematika és a térszemlélet kapcsolatáról végzett kísérletükben [84] azt állítják, hogy az intellektuálisan tehetséges serdülők jobb téri, mint verbális képességekkel valószínűbben találhatók meg a mérnöki, számítógép-tudományi és matematikai területen. Noha Danihelová [19] és Tompa [91] az érettségiző középiskolások gyenge térszemléletéről és térgeometriai ismeretéről számolnak be, mi Shea és munkatársai [84] kutatásai alapján az elsőéves matematika tanár szakos egyetemi hallgatóktól jó teljesítményt várunk a felmérésen.

Az összehasonlító felmérés feladatsorát úgy állítottuk össze, hogy a térszemlélet fontos komponensei benne legyenek. Az utolsó két feladattal a hallgatók problémamegoldó képességét is szeretnénk volna felmérni. A feladatsor első öt feladata Séra-Kárpáti-Gulyás: A térszemlélet című könyvben szerepel [83], az ötödik feladaton kisebb változtatást hajtottunk végre. Az összehasonlító felmérés feladatait az 1. függelék tartalmazza.

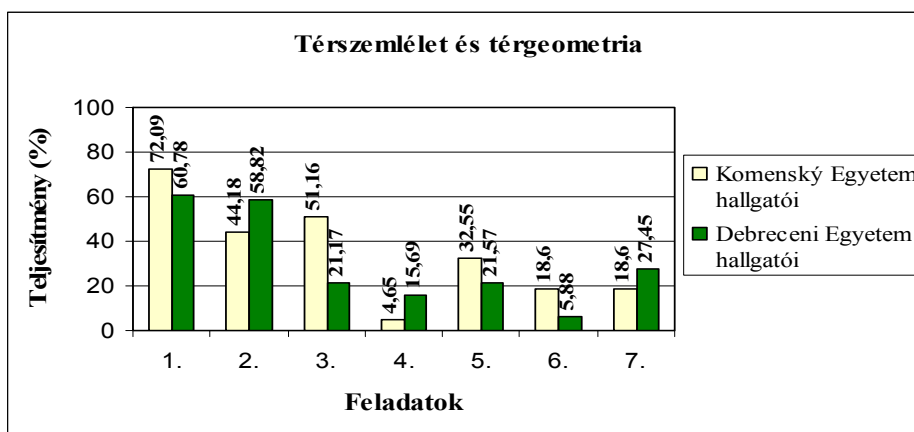
Séra és munkatársai [83] elméletét követve az általunk fontosabbnak tartott feladattípusok alapján állítottuk össze a feladatsort. Az első feladat a tárgy képzeleti manipulálására irányul. Olyan tárgyi tevékenység fázisainak képzeleti követése a feladat, amely a test összetett térbeli transzformációiból áll. A második feladat a vetületi ábrázolás és vetületolvasás típushoz tartozik. A mozgásos élményanyag mobilizálásával, belső nézőpontváltással, vagy képzeleti forgatással, mentális reprezentációk manipulálásával háromdimenziós alakzat kétdimenziós vetületi képeinek előállítás és megrajzolása a feladat. Ezt a típust a konkréttól az absztrakt irányba mutató analitikus műveletek jellemzik. A harmadik feladat rekonstrukciós feladat. A vetületi képek alapján kell megalkotni a tárgy axonometrikus képét. A rekonstrukció során a tanuló szintetizálja a vetületi képek tanulmányozásával szerzett vizuális információkat. Három csatornán egyeztetve, belső nézőpontváltás sorozatával jön létre a térképzet. A negyedik és ötödik feladat a szerkezet átlátásának felmérésére irányul. Azt méri, hogy a belső szemléleti kép hogyan tükrözi a tárgy valódi téri viszonyait. A feladat megoldási

szintje a nézőpontból, illetve ábrázolásból adódó torzulások korrekciójának pontosságára utal. A negyedik feladatnál az eredmény rámutathat a „tárgyi kognitív térkép” pontosságára, az ötödik feladatnál pedig az észlelés és gondolkodás egyensúlyára, az észlelés és a fogalmi műveletek együttes munkájára. [83]

A hatodik és hetedik feladatnál nyújtott teljesítmény a hallgatók problémamegoldó képességét mutatja a térgeometriai feladatok megoldása terén. Ahhoz, hogy a hallgató ezeket a feladatokat meg tudja oldani tisztában kell lennie a témakörben használt fogalmakkal, a pontok, egyenesek, síkok tulajdonságaival. Ismernie kell a köztük levő összefüggéseket. E két feladat választ ad arra a kérdésre, milyen mértékben és hogyan sikerül a hallgatónak átlátni a térbeli viszonylatokat, mennyire pontosan tudja elképzelni a kocka és a szabályos hatoldalú gúla belsejét, szerkezetét.

5.1.1. Eredmények és a leggyakrabban előforduló hibák

Minden feladatra egy pontot adtunk, de csak a minden részfeladatban helyes megoldás esetén. Kisebb pontatlanság, kissé helytelen arányok esetén nem vontunk le pontot. A negyedik feladatnál a második kocka esetében két helyes útvonal is létezik, de a plusz megoldást nem értékeltük további ponttal. Az utolsó két feladatnál a testek csúcsainak jelölése a megadott betűkkel a hallgatók feladata. Ennél a két feladatnál csak a logikusan végigvezetett hibátlan számolás esetén járt a pont. A következő diagram a hallgatók teljesítményét mutatja a felmérőn:



17. ábra: A hallgatók teljesítménye a felmérőn

A következőkben a tipikus hibákat soroljuk fel. Egy hibát tipikusnak nevezünk, ha legalább a hallgatók 10%-a elkövette.

1. feladat:

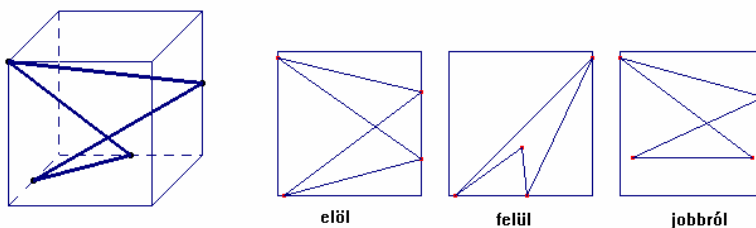
A Komenský Egyetem hallgatói 11,31%-kal jobban teljesítettek a tárgy képzeleti manipulálására irányuló a feladatnál. Mindkét csoportnál ennek a feladatnak a megoldása sikerült a legjobban.

- A Komenský Egyetem hallgatóinak 27,91%-a, a Debreceni Egyetem hallgatóinak 39,22%-a nem a megfelelő helyre rajzolta be a metszési vonalakat.

2. feladat:

A vetületábrázolásos feladatnál a Debreceni Egyetem hallgatói 14,64%-kal jobb eredményt értek el.

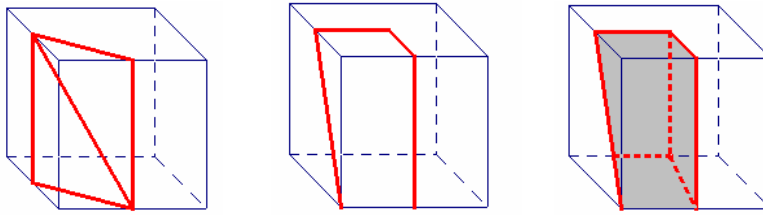
- A Komenský Egyetem hallgatóinak 34,88%-a, a Debreceni Egyetem hallgatóinak 21,57%-a nem tudta elképzelni a drótvázás alakzat egyes részeinek merőleges vetületeit.
- A Komenský Egyetem hallgatóinak 20,93%-a, a Debreceni Egyetem hallgatóinak 19,61%-a nem rajzolta meg mindegyik nézetet, vagy kihagyta az alakzat valamely részét.



3. feladat:

A rekonstrukciós feladatnál volt legnagyobb eltérés a két csoport között. A Komenský Egyetemen 29,99%-kal több hallgató tudta a helyes megoldást.

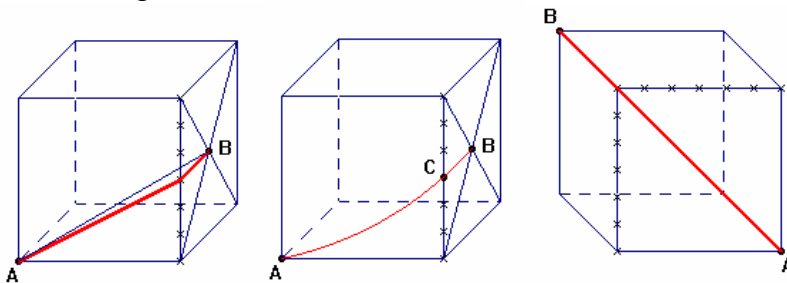
- A Komenský Egyetem hallgatóinak 46,51%-a, a Debreceni Egyetem hallgatóinak 78,83%-a a testet vetületi képe alapján hiányosan vagy helytelenül rekonstruálta. A Debreceni Egyetem hallgatóinak 45,1%-a a középső ábrán látható megoldást adta.



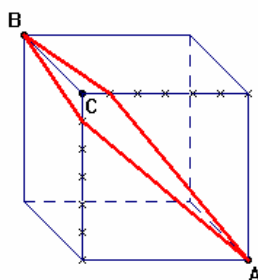
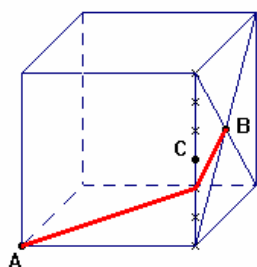
4. feladat:

A Komenský Egyetem hallgatói a „tárgyi kognitív térkép” pontosságára irányuló feladatnál teljesítettek a leggyengébben, 11,04%-kal rosszabbul sikerült megoldaniuk a feladatot, mint a Debreceni Egyetem hallgatóinak. A Debreceni Egyetem hallgatói is alacsony szintet értek el a szerkezet átlátásának felmérésénél. Tehát mindkét csoportra igaz, hogy a belső szemléleti kép nem tükrözi a tárgy valódi téri viszonyait elég pontosan.

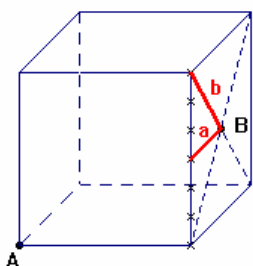
- A Komenský Egyetem hallgatóinak 51,16%-a, a Debreceni Egyetem hallgatóinak 45,1%-a egyik vagy mindkét kockánál azt a pontot választotta, amelyen keresztül, ha síkalakzatról lenne szó, az út a legrövidebb lenne.



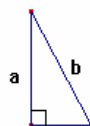
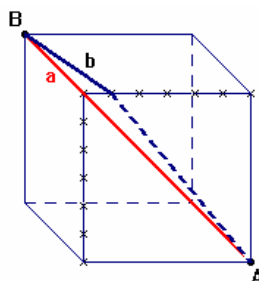
- A Komenský Egyetem hallgatóinak 11,63%-a, a Debreceni Egyetem hallgatóinak 13,73%-a a második kockánál csak egy megoldást adott.
- A Komenský Egyetem hallgatóinak 18,6%-a, a Debreceni Egyetem hallgatóinak 41,18%-a sejtette, hogy a legrövidebb út nem a C ponton keresztül vezet, és a hozzá lehető legközelebbi pontot választotta megoldásnak – indoklás nélkül.



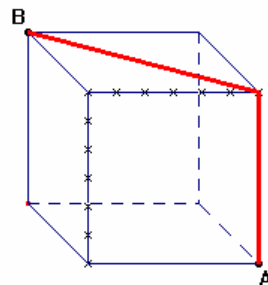
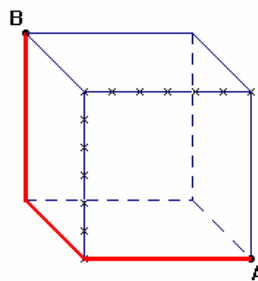
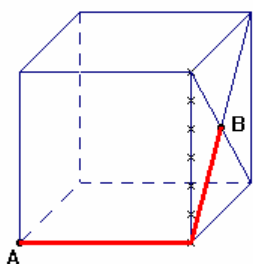
- Néhány „indoklás”:



„az a rövidebb, mint a b ”



„a derékszögű háromszögben a befogó rövidebb, mint az átfogó”

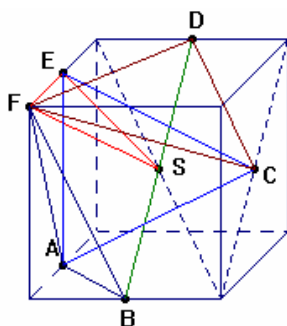


„Amelyik távolságok a legrövidebbek az egyes négyzetekben, azokból lesz a legrövidebb út A-ból B-be.”

5. feladat:

A Komenský Egyetem hallgatói közül 10,98%-kal többen oldották meg helyesen az észlelés és gondolkodás egyensúlyát mérő feladatot.

- A Komenský Egyetem hallgatóinak 27,91%-a, a Debreceni Egyetem hallgatóinak 19,61%-a anélkül, hogy bármit rajzolt volna, megnevezte az egyes síkidomokat – helytelenül.
- Azok, akik megpróbálták lerajzolni az egyes síkidomokat, 14-11 esetben mindegyik síkidomra helyes megoldást adtak. A Komenský Egyetem hallgatóinak 13,95%-a, a Debreceni Egyetem hallgatóinak 11,76%-a mindegyik alakzatot négyzetben próbálta elhelyezni, vagy a kockában kötötte össze az egyes pontokat, és az így kapott síkidomokat – mintha mindegyik berajzolt pont a kockában ugyanabban a síkban helyezkedne el – megnevezte.



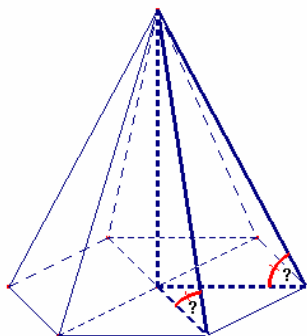
6. feladat:

A Debreceni Egyetem hallgatói e feladatban teljesítettek a leggyengébben, 12,72%-kal rosszabbul a Komenský Egyetem hallgatóinál.

- A Komenský Egyetem hallgatóinak 27,91%-a, a Debreceni Egyetem hallgatóinak 29,41%-a rajzolgatással próbálta megtalálni a megoldást, de helytelenül, 13,95%, illetve 19,61% még a BDG síkot sem tudta helyesen berajzolni, esetleg hozzá sem fogott a feladat megoldásához.

7. feladat:

Legkisebb eltérés a hallgatók problémamegoldó képességére rávilágító feladatnál volt a két csoport között: 8,85%-kal a Debreceni Egyetem hallgatói oldották meg jobban a feladatot. A 6. és 7. feladat alacsony teljesítési aránya mutatja, hogy a hallgatók problémamegoldó képessége gyenge a térgeometriai feladatok terén.



- A 7. feladat megoldásánál a Komenský Egyetem hallgatóinak 41,86%-a, a Debreceni Egyetem hallgatóinak 27,45%-a nem tudta pontosan meghatározni, melyik szög nagyságát kell kiszámolni. 18,6%-ban, illetve 29,41%-ban előfordult azonban olyan is, aki megtalálta a megfelelő szöget, de a nagyságát már nem tudta meghatározni.

A 3. feladatot kivéve a különbség a két egyetem hallgatóinak teljesítménye között nem haladta meg a 15%-ot. Mindkét egyetem hallgatói 2-2 feladat kivételével 50% alatt teljesítettek a felmérésen.

A tárgy képzeleti manipulálása, a vetületi ábrázolás és vetületolvasás, rekonstruálás viszonylag jól ment – bár a rekonstrukciós feladatnál a Debreceni Egyetem hallgatói sokkal rosszabbul szerepeltek. A vetületábrázolás a Debreceni Egyetem hallgatóinak ment jobban, a rekonstrukció viszont a Komenský Egyetem hallgatóinak. A tantervek összehasonlítása, a 4. feladatban és az utolsó feladatban nyújtott jobb teljesítmény alapján arra következtethetünk, hogy a Debreceni Egyetem hallgatói kissé jobban emlékeznek a fogalmakra, tételekre, hiszen ők nem olyan régen, a 4. évfolyamon is tanultak térgeometriát. Átlagban viszont a Komenský Egyetem hallgatói teljesítettek jobban, talán azért, mert ők a 3. évfolyamon szinte csak geometriát tanultak és térgeometriával is több órán át foglalkoztak, így jobban látják az összefüggéseket, a feladatmegoldásban nagyobb rutinra tettek szert. Összességében a 4., 5. és 6., 7. feladatot nagyon rosszul sikerült megoldani mindkét csoportnak, 35% alatt. Ez alapján azt a következtetést vonhatjuk le, hogy a szerkezet átlátása nem megy tökéletesen, a belső szemléleti kép pontatlan, nem tükrözi pontosan a tárgyak valódi téri viszonyait, az ábrázolásból adódó torzulások korrekciója nem elég pontos. Az utolsó két feladatnál nyújtott gyenge teljesítmény azt mutathatja, hogy a hallgatók jó részének problémamegoldó képessége a térgeometriai feladatoknál elég gyenge. Egyes hallgatók nincsenek tisztában a térgeometria témakörben használatos fogalmakkal sem (például az oldallap és alaplappal bezárt szög). Pedig a sík- és térgeometriai fogalmak és tételek a térszemlélet fejlesztése szempontjából igen lényegesek.

5.1.2. Az összehasonlító felmérés tapasztalatai

Shea és munkatársai [84] kutatásaival ellentétben mi úgy találtuk, hogy kísérletünk hallgatói hiába jelentkeztek matematika szakra a középiskola elvégzése után, mégsem rendelkeznek igazán jó téri képességgel, térszemlélettel. Sajnos Danihelová [19] és Tompa [91] eredményei igazolódtak be a matematika tanár szakos egyetemi hallgatóknál is, hiszen felmérőnkön a legtöbb feladatnál 50% alatt volt a teljesítmény. A problémára megoldást jelenthet a 2.2. fejezetben ismertetett, a kutatók által kipróbált és bevált módszerek alkalmazása az oktatásban a térszemlélet fejlesztésére.

A felmérőn kapott eredmények igazolják, hogy nagyon sok hallgatónak gondot okoz egy térbeli alakzat elképzelése és ez által a térgeometriai feladatok megoldása is. Ezért nagyon hasznos lenne a középiskolákban a térgeometria tanítását azzal kezdeni mindkét országban, hogy az eddignél több tanítási órát szentelnének a geometriai testek modelljeinek és az egyetemi képzésben néhány ismétlő-rendszerítő órát vagy akár egy félévet fordítanának a térszemléletre, térgeometriai ismeretek összefoglalására, térgeometriai feladatok megoldására.

E felmérésben a hallgatók teljesítményét írásbeli dokumentumok alapján értékeltük. A jövőben tervezzük hallgatói interjúk készítését és további kérdőíves felmérés elvégzését is a problémák pontosabb feltárása és az okok keresése végett.

5.2. Az oktatási kísérlet

5.2.1. Előzmények

A Debreceni Egyetem Műszaki Karon az ábrázoló geometria oktatása gépészmérnök szakon nappali tagozaton 2004-ig egyetlen félévben, heti 2 óra előadás és 2 óra gyakorlat keretében történt. 2005-től indult a gépészmérnök BSc képzés. A képzési idő nappali tagozaton hatról hét félévre bővült. Az ábrázoló geometria tárgy neve műszaki ábrázolás lett, az óraszám csökkent heti 1 óra előadásra és 2 óra gyakorlatra. A tematika változatlan maradt. Felmerül a kérdés, hogy ilyen feltételek mellett hogyan lehetne az oktatást hatékonyabbá tenni?

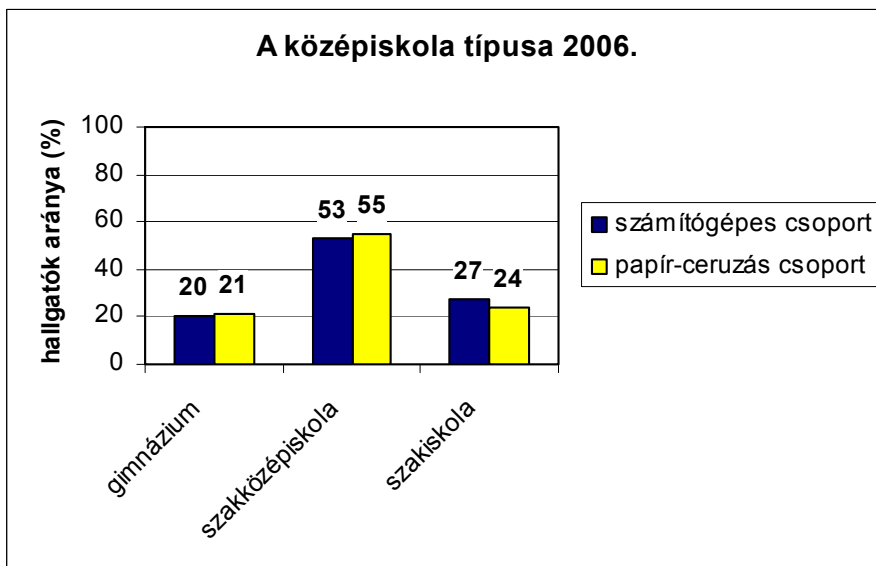
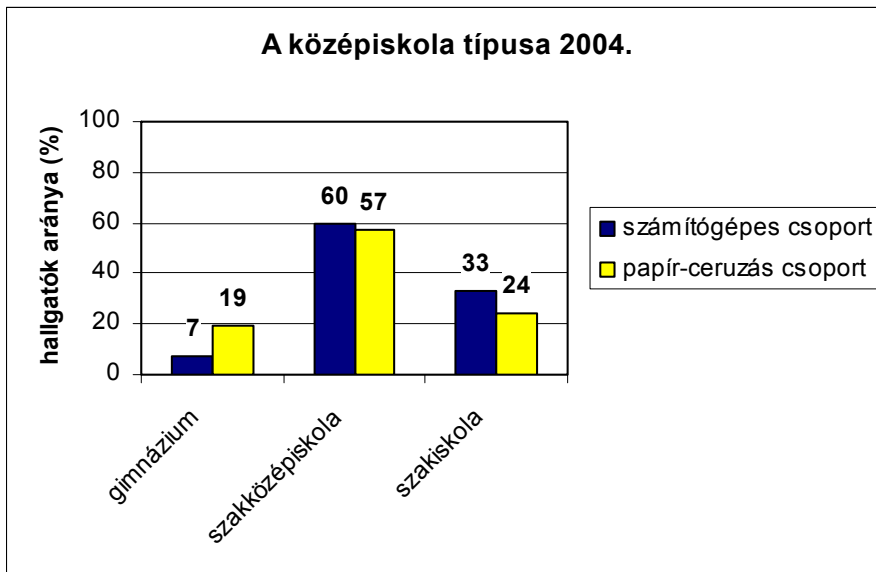
Hallgatóink részéről felmerült az igény arra, hogy a szerkesztéseket ne csak papíron kelljen elvégezniük, hiszen majdani munkájuknál a gyakorlatban is különböző számítógépes programokat fognak használni. Évek óta lehetőségük van a házi rajzokat szerkesztőprogrammal elkészíteni és lemezen vagy CD-n beadni. A 2004/05. tanév I. félévétől a számítógépet a gyakorlaton is használják a tanítási órát segítő eszközként. Magyarországon az informatika iskolai tantárgy az általános- és középiskolákban, így a főiskolai hallgatók már rendelkeznek megfelelő alapismeretekkel.

A 2004. előtti években főiskolánkon ábrázoló geometria órán papíron ceruzával szerkesztettek a hallgatók. Gyakran előfordult, hogy az órákon jól szereplő hallgatók a zárthelyi dolgozatokban és a félév végén lévő számonkérésnél rosszul teljesítettek. A gondolatmenetükben rejlő hibák, elméleti hiányosságaik csak ekkor kerültek felszínre.

Az ábrázoló geometria tananyag elsajátításához rendszeres tanulás szükséges. Erre úgy ösztönöztük hallgatóinkat, hogy a két zárthelyi dolgozat megfelelő teljesítése esetén megajánlottuk az érdemjegyet.

5.2.2. Az előzetes felmérés eredménye

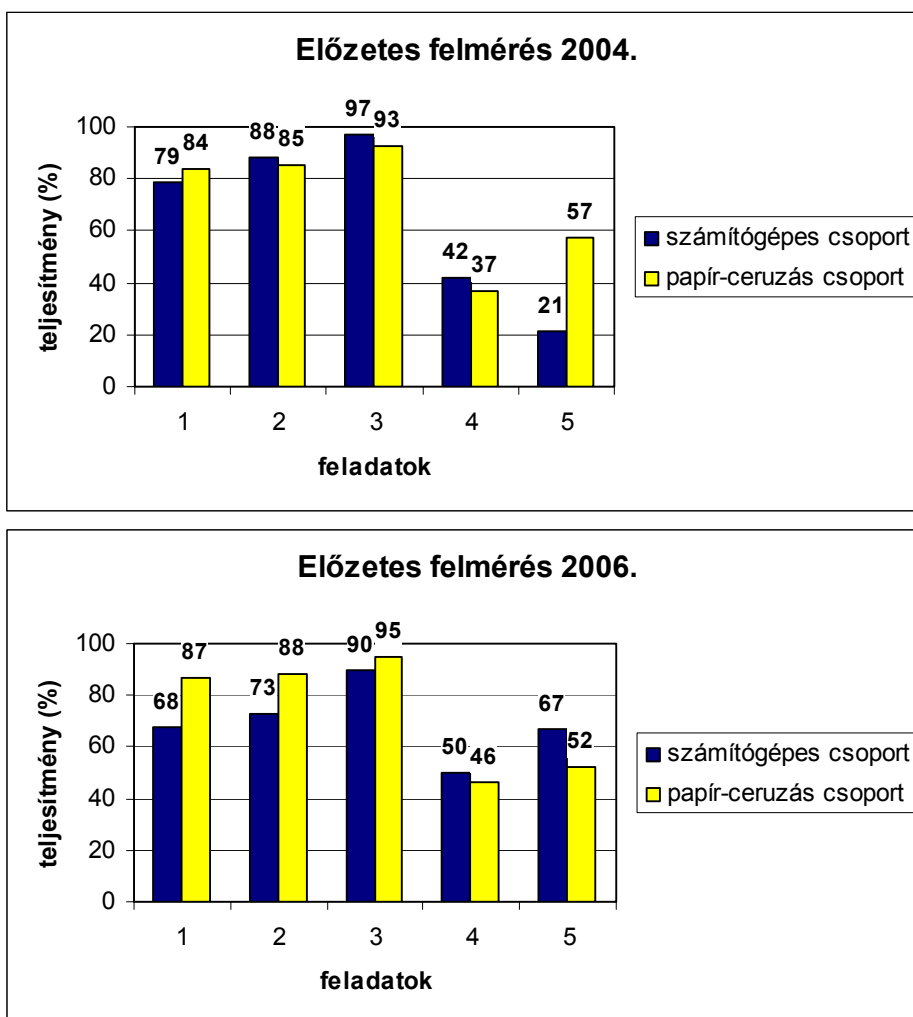
Félév elején az első tanítási héten vizsgáltuk, hogy van-e jelentős különbség a hallgatók térszemléletében, előzetes ábrázoló geometriai alapismereteiben. Vizsgáltuk a hallgatók középiskolájának típusát is, amely alapján a két csoport között jelentős különbséget nem találtunk. A hallgatók arányát a középiskola típusa szerint a 18. ábra mutatja.



18. ábra: A középiskola típusa

A hallgatók előzetes ismereteinek felmérése az első oktatási héten írásban történt. A felmérő megírására 50 percük volt. Az előzetes felmérés feladatait a 2. függelék tartalmazza ([24, 98]). Shea és munkatársai a matematika és a térszemlélet kapcsolatáról végzett kísérletükben [84] azt állítják, hogy az intellektuálisan tehetséges serdülők jobb téri, mint verbális képességekkel valószínűbben találhatók meg a mérnöki, számítógép-tudományi és matematikai területen. Ez

alapján hallgatóinktól jó eredményt vártunk. A hallgatók előzetes felmérésen nyújtott teljesítményét a 19. ábra mutatja.



19. ábra: Az előzetes felmérés eredménye

A feladatokat Séra és munkatársai [83] által kidolgozott kategóriákba soroljuk. Az első feladat a tárgy képzeleti manipulálására irányult. A második feladatban háromdimenziós alakzat képzeleti forgatására volt szükség. A harmadik és az ötödik feladat a vetületi ábrázolás és vetületolvasás. A harmadik feladatban belső nézőpontváltással háromdimenziós alakzatok kétdimenziós vetületi képeinek megállapítása, az ötödikben a megrajzolása a feladat. A

negyedik feladat rekonstrukciós feladat, a vetületi képek alapján kell megalkotni a tárgy axonometrikus képét.

Az előzetes felmérésnél megfigyelhető a két csoport közel hasonló teljesítménye. 2004-ben a legnagyobb különbség az utolsó feladatban található, ahol a (leendő) papír-ceruzás csoport teljesített jobban. 2006-ban pedig az első feladatnál a legnagyobb az eltérés, 19%-kal a (leendő) papír-ceruzás csoport teljesített jobban. Mindkét csoportot figyelembe véve a 3. feladat sikerült a legjobban mindkét tanévben, ahol a testeket kellett a vetületi képekkel összepárosítani. A feladat nehezítése végett több vetületi kép volt megadva, mint ahány test. A 4. és 5. feladat hasonló a 3. feladathoz, csak itt hiányzott a test illetve a vetületi kép. Ennek ellenére mégis ez a két feladat sikerült a leggyengébben.

Az Európai Unió által 2004-ben készített jelentés szerint az újonnan csatlakozó országokban a háztartások 66%-a nem rendelkezik számítógéppel és 81%-ának nincs Internet hozzáférése. Ennek ellenére az Internet felhasználók száma 60%-kal nőtt. Magyarországon 2001 óta az Internet felhasználók aránya 8%-ról 22%-ra nőtt. Az utolsó gyakorlaton hallgatóink kitöltötték a 6. függelékben található kérdőívet. A kérdőívre adott válaszok szerint 2004-ben a számítógépes csoportunk hallgatóinak 75%-a, 2006-ban 60%-a fér hozzá az Internethez otthon vagy a kollégiumban, ami az országos átlaghoz képest jó arány. Ez azért fontos, mert a számítógépes gyakorlatokon használt interaktív feladatlapokat akár otthonról is elérhetik, így óra után átnézhetik az órán elvégzett szerkesztéseket vagy gyakorolhatnak az Internet segítségével. A házi feladatok megoldása is felkerül utólag az Internetre.

5.2.3. A tananyag leírása és elemzése

Az ábrázoló geometria illetve a műszaki ábrázolás tantárgy rövid tematikája:

MONGE-FÉLE ÁBRÁZOLÁS

képalkotás, vetítési módok, Monge-féle képsíkrendszer, térelemek ábrázolása, speciális helyzetű térelemek, rekonstrukció, illeszkedés

METSZÉSI ALAPFELADATOK

dőféspont szerkesztése speciális és általános esetben, síkok és síklemezek metszészvonala

METRIKUS ALAPFELADATOK

merőlegesség, távolság- és szögfeladatok, képsíktranszformációk, szemléletes kép szerkesztése képsíktranszformációval, láthatóság

SÍKLAPÚ TESTEK

síklapú testek ábrázolása, síkmetszésük, síklapú testek áthatása

FORGÁSFELÜLETEK

Forgásfelületek származtatása, ábrázolásuk, forgásfelületek síkmetszése, áthatása

Az ábrázoló geometria illetve a műszaki ábrázolás tárgy vizsgajeggyel zárul. A vizsgára bocsátás feltételét az előadást vezető oktató határozta meg: a két, általa összeállított – a főiskola ábrázoló geometria feladatbankjából származó – zárthelyi dolgozat 40% feletti teljesítése és a hibátlan, határidőre beadott házi rajzok elkészítése. A zárthelyi dolgozatokon a szerkesztés hagyományos módon, papíron ceruzával történt az előadáson. A számonkérésben a filozófiánk az egységes és a tanterv által előírt papírceruzás számonkérés, hogy biztosak lehessünk afelől, hogy a számítógéppel tanuló hallgatóink képesek megoldani a feladatokat a majdani hagyományos vizsga-körülmények között is. [17] A dolgozatok elméleti kérdést nem tartalmaztak, csak feladatokat. A féléven át tartó folyamatos tanulás elősegítése érdekében a két zárthelyi dolgozat 90% feletti teljesítése esetén jeles, 75%-90% közötti teljesítése esetén jó vizsgajegyet ajánlottunk meg.

A félév során az előadás hagyományos módon, számítógép nélkül zajlott. A gyakorlaton két csoporthoz egy számítógépes termet kaptunk, így az egyik csoport DGS-sel készített feladatlapokkal dolgozott az órákon, míg a másik csoport papíron ceruzával, hagyományos szerkesztőeszközökkel végezte a szerkesztéseket. Figyeltünk arra, hogy a két csoport ugyanazokat a feladatokat oldja meg és ugyanazokat a papír, ceruzás házi feladatokat kapták. A különbség a program nyújtotta rajzolási lehetőségekben rejlik. A két csoport feladatai nagy részének megoldási stratégiája nem különbözik lényegesen. Ez a Laborde által írt első típusú feladatok jellemzője. [56] A számítógépes csoport feladatainál a számítógéppel végzett szerkesztésen kívül a mozgatás (tolás-húzás teszt) áll előtérben. Ez a Laborde által írt második típusú feladatok jellemzője.

A gyakorlat segítésére általunk választott DGS-ben, a *Cinderellában* minden szerkesztés kimenthető interaktív feladatlapként. A tanár beállíthatja a kiinduló objektumok és a kívánt objektumok halmazát. Ezután elmentheti a feladatot a szerkesztőeszközök korlátozott használatával. Mivel a megoldás menetét nem, csak a kívánt objektumok halmazát kell beállítanunk, a

program többféle megoldási menetet is elfogad, amely a helyes megoldáshoz vezet. A feladatlaphoz csatolhatók útmutatások, szerkesztési segítség.

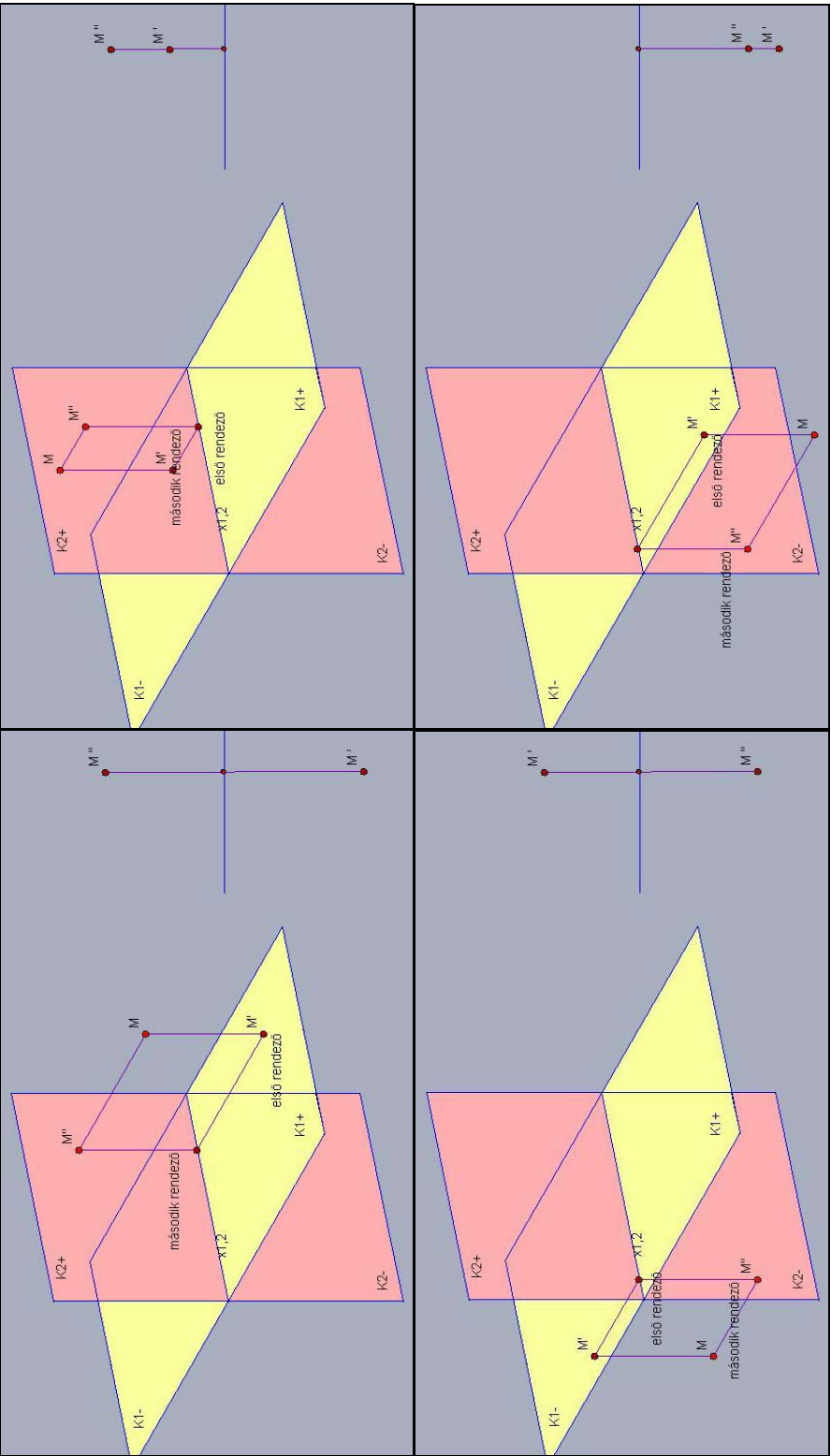
A feladatlapokon kívül néhány további feladat lépésenkénti megoldása is felkerült az Internetre: 2006-ban az órán papír-ceruzás módszerrel megoldott feladatokhoz a projektorral való tanári útmutatás innen történt, illetve a házi feladatok megoldási lépései is itt találhatók meg (a házi feladat beadását követően). 2004-ben még írásvetítővel történt a tanári útmutatás. A számítógépes gyakorlatokon használt weblapot, melyről a feladatlapok elérhetők a CD-melléklet tartalmazza.

A számítógépes csoportban a számítógépes munka tárgyi feltételei: 2004-ben még két számítógépnél páros munkában dolgoztak; 2006-ban már minden hallgatónak jutott egy számítógép. A kérdőívre adott válaszok szerint hallgatónk ismernek, használtak már néhány számítógépes szerkesztő, rajzoló programot (ArchiCAD, AutoCAD, PowerPoint), így nem esett nehezükre e program működésének elsajátítása sem. Az interaktív feladatlapon a szerkesztőeszközök használatát 10 perc alatt elsajátították. A számítógépes csoporttal gyorsabban tudtunk haladni, hiszen az alapszerkesztéseket a program pillanatok alatt elvégezte.

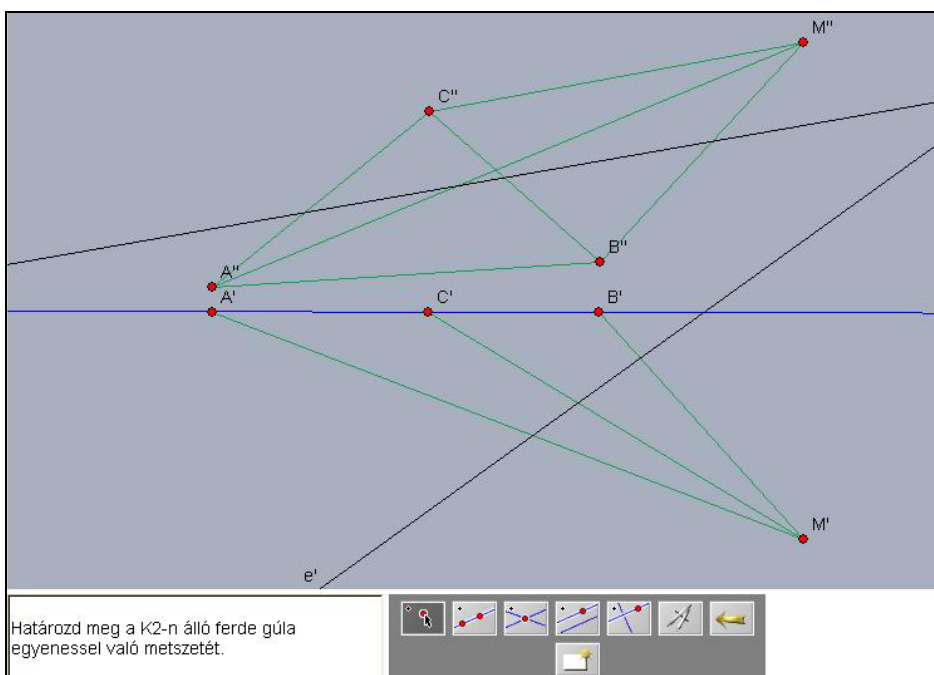
A szerkesztés áttekinthetőségének segítésére a segédvonalakat, rendezőket általában szürke színűre, az $x_{1,2}$ tengelyt kék színűre, a végeredményt pedig piros vagy fekete színűre állítottuk be, de még jó néhány színt használtunk. Ennek ellenére a bonyolultabb szerkesztések kissé átláthatatlanok lettek. Főként a két képsík-transzformációt igénylő szemléletes kép szerkesztésénél merült fel ez a probléma. A Buchbergertől [12] származó White-Box/Black-Box elv ilyen feladatoknál alkalmazható lett volna modulok/makrók segítségével, de az általunk használt *Cinderella* verzió nem támogatta a makrók készítését. Wurnig [110] arról számol be a CAS-t használó diákokkal kapcsolatban, hogy a modulok alkalmazása a jó tanulók esélyeit növeli, ugyanakkor a gyengébbek terheit is növeli; a kevésbé tehetségesek sokszor alkalmazzák a modulokat a belső szerkezet igazi megértése nélkül.

A bonyolultabb szemléletes képek szerkesztését papíron végezték el a hallgatónk. Az órákra jellemző volt a számítógép és a füzet párhuzamos használata. Helyes megoldás esetén a következő szöveges értékelést írta a program: ***** Jó a megoldásod! *****. Ez a személyes élményen alapuló tanulást is hivatott biztosítani.

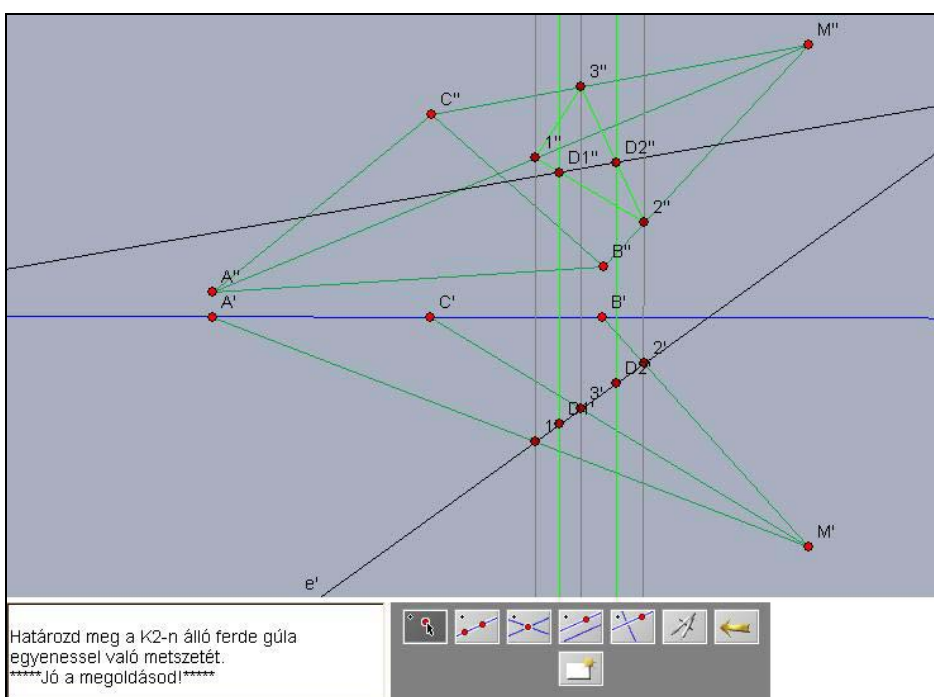
A 20. ábra képei a program dinamikus jellegének kihasználását mutatják. A bal oldalon az M pontot mozgatva a jobb oldali vetületi képen nyomon követhetjük a pont ábrázolását, ha pontunk az I., II., III. illetve IV. térsíkjában helyezkedik el. A 21. ábra egy feladatlap felépítését mutatja, a 22. ábra pedig a helyes megoldását.



20. ábra: Pont ábrázolása



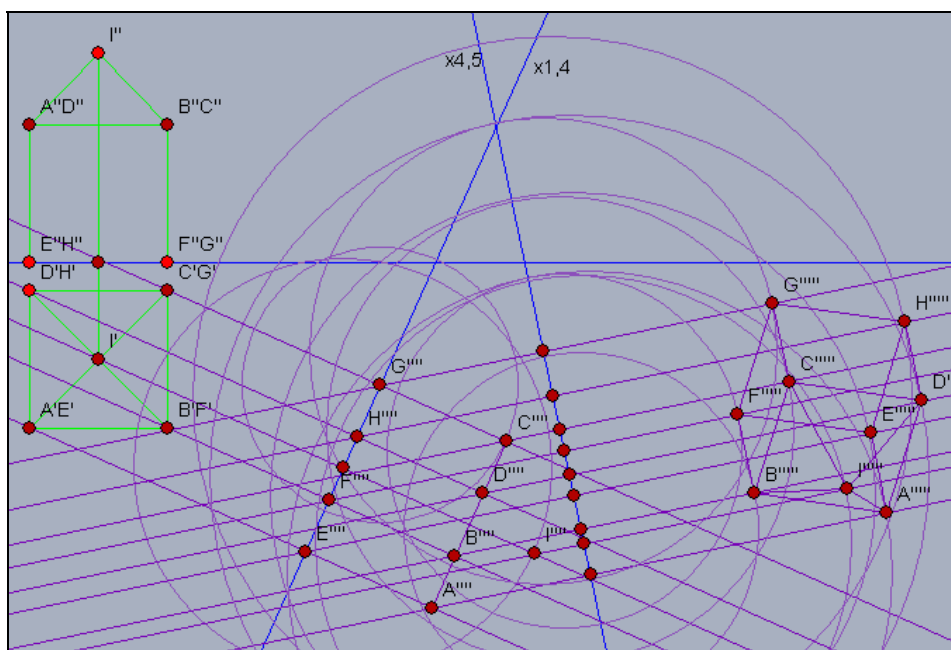
21. ábra: Egy feladatlap felépítése



22. ábra: A feladat megoldása

A gyakorlatok felépítését, rövid leírását a CD-melléklet tartalmazza. A láthatóság megjelenítésére szolgáló ikon (amivel be lehetne színezni a látható lapokat testek áthatásánál vagy a nem látható éleket szaggatott vagy halványabb vonallal lehetne jelölni) a programban ugyan jelen van, de a feladatlpra nem lehet átvinni. (Ennek hátránya a 2004. évi dolgozatban majd megfigyelhető lesz.) Ezért a számítógépes csoportban a láthatósággal kapcsolatos feladatok közül néhányat papíron szerkesztettünk meg, a számítógépes feladatok esetében pedig megbeszéltük a láthatóságot. A 2004. évi tapasztalatok alapján főként a láthatósággal kapcsolatos feladatok megoldási módját változtattuk. Több ilyen feladatot szerkesztettünk papíron, közben a tanári útmutatás projektorral történt. Az útmutatás képei felkerültek az Internetre így a hallgatók otthonról is elérhették azokat.

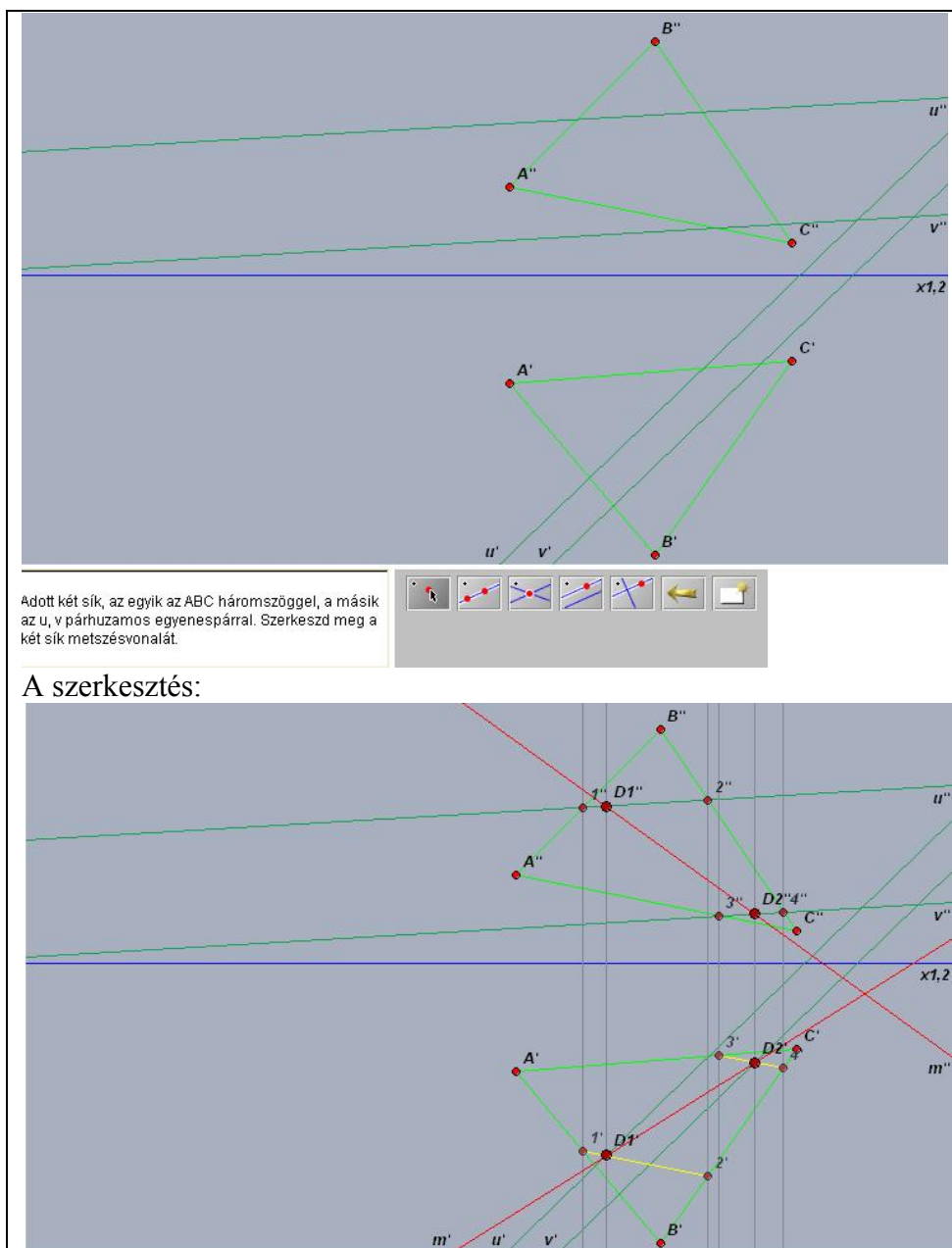
A 23. ábra példa egy olyan feladatra, ahol az ábra már kissé átláthatatlan és a láthatóságot sem tudjuk meghatározni:



23. ábra: Szemléletes kép szerkesztése

A szerkesztővonalak ugyan eltüntethetők a programban, de a program által generált feladatlapon már nem. Ezért ha csak feladatlaponkat használunk, akkor a használatuk egy korlátja a szerkesztés bonyolultsága. A főiskolai követelményszintig jól alkalmazhatók a feladatlaponkat, de bonyolultabb áthatástervezéseknél kevésbé. A

következő feladathoz 2004-ben – mivel a hallgatók a programmal nem tudnak láthatóságot szerkeszteni – a szerkesztés befejeztével a 24. ábrán látható feladatlapot adtuk. E feladatlapon határozták meg a láthatóságot és a szerkesztés menetét is ide írták utólag.



24. ábra: Feladatlap a láthatóság szerkesztéséhez

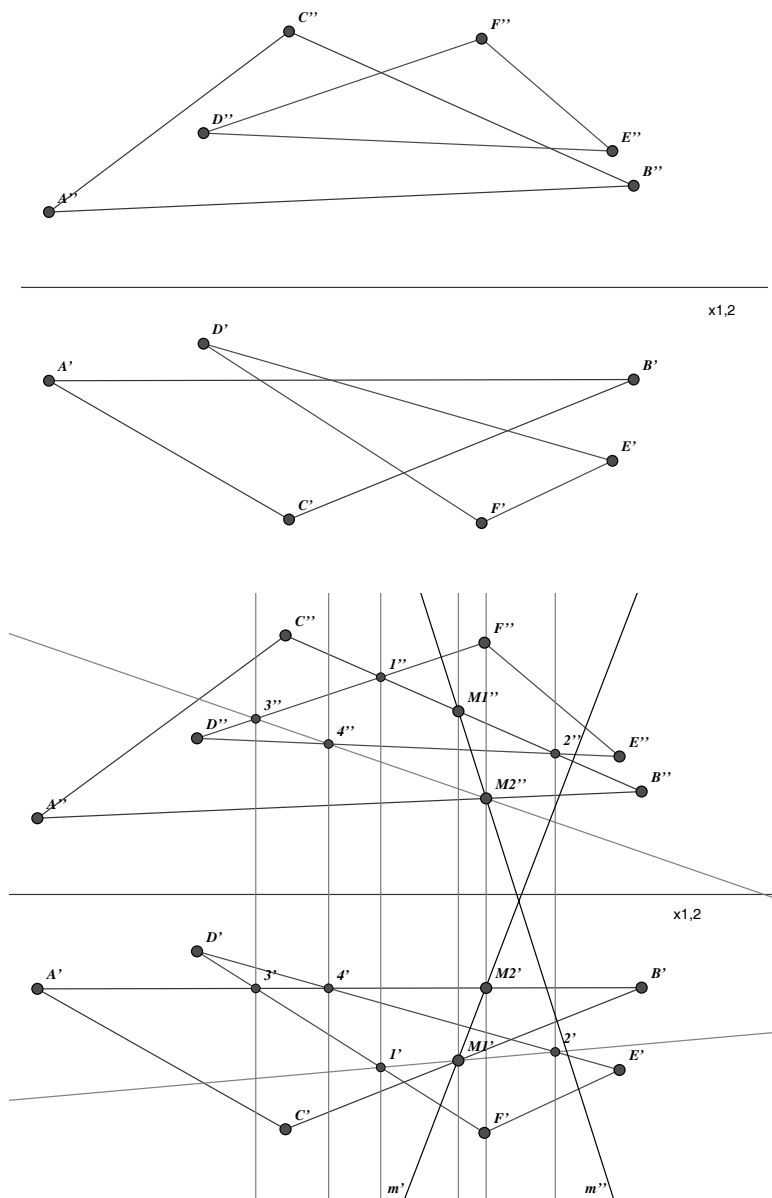
5.2.4. A hallgatók gondolkodásmenetének elemzése egy feladat révén

2004. decemberében a számítógépes csoportból három olyan hallgató munkáját kísértük figyelemmel és elemeztük, akik kitűnnek a többiek közül. [67] Mindhárom hallgató a csoportjuk átlagától jobban teljesített az első – papír-ceruzás – zárthelyi dolgozatban, ezért választottuk őket és vizsgáltuk, hogy van-e jelentős különbség a munkamódszerükben, a feladat megoldási idejében, a számítógépes szerkesztés lehetőségeinek kihasználásában dinamikus geometriai környezet esetén. A hallgatók önállóan dolgoztak.

Három hallgató munkájából következtetést levonni nem lehet, de mint esettanulmány érdekes lehet. Fizikai korlátok miatt most csak ennyi hallgató munkáját tudtuk nyomon követni, de a továbbiakban tervezzük több kitűzött feladat és a megoldási kísérletek lépéseinek szisztematikus elemzése alapján következtetések levonását, több hallgató munkájának követését. Az itt leírt kísérlettel a célunk a hallgatók eredménye mögötti háttér feltárása volt. A feladat megoldási folyamatra próbáltunk visszakövetkeztetni a tévutak számából, ami nem egyszerű feladat, hiszen a gondolkodási folyamatba nehéz betekinteni. Azt vizsgáltuk, hogy egy DGS funkcióinak használata során az elemi tevékenységek végrehajtásából (főként az egérhasználat), az elkövetett hibákból mennyire lehet következtetni a feladat megértésére, a hallgató tudására, gondolkodásmenetére.

Az előző részben szóltunk róla, hogy a láthatósággal kapcsolatos feladatok közül többet papíron szerkesztettünk meg órán, a számítógépes feladatok esetében pedig megbeszéltük a láthatóságot, mint a következő feladatnál is.

Feladat: Szerkessze meg az ABC és DEF síkok metszésvonalát!



25. ábra: A feladat megoldása

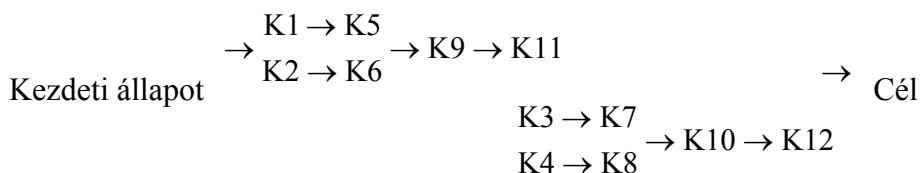
Egy probléma megoldása azt jelenti, hogy a kezdő állapotból a közbeeső tagok meghatározása révén egy következtetési lánc segítségével eljutunk a célig [2]:

<i>Kezdeti állapot:</i>	<i>Közbeeső tagok:</i>	<i>Cél:</i>
$x_{1,2}$ tengely, ABC háromszög és DEF háromszög két képe	K1: C''B'' és D''F'' metszéspontja: 1'' K2: C''B'' és D''E'' metszéspontja: 2'' K3: A'B' és D'F' metszéspontja: 3' K4: A'B' és D'E' metszéspontja: 4' K5: 1' K6: 2' K7: 3'' K8: 4'' K9: 1'2' és B'C' metszéspontja: M1' K10: 3'4'' és A''B'' metszéspontja: M2'' K11: M1'' K12: M2'	m metszésvonal két képe

Ábrázoló geometriai eszközök:

- A1: fedő egyenespárok módszere
(dőféspont szerkesztéséhez)
- A2: illeszkedő elemek képei is illeszkednek
- A3: a rendezők merőlegesek $x_{1,2}$ -re

Egy lehetséges megoldási lánc:



A K1, K2 illetve K3, K4 megoldási lépések felcserélésétől eltekintve ugyanazt a megoldási utat követték mindhárman. A második dőféspontot (M2) célszerű az első képből kiindulva megszerkeszteni, míg az elsőnél (M1) mindegy, hogy melyik képből indulnak ki. Ez először nem tűnt fel nekik, csak amikor eljutottak az M2 szerkesztésének végére. A két dőféspont megtalálása között ezért telt el viszonylag sok idő. A következő táblázatok mutatják, hogy a hallgatók hányszor kattintottak egy-egy ikonra, hány pontot és egyenest szerkesztettek, továbbá a szerkesztésre fordított időt.

A feladatban rendelkezésre álló ikonok	A hallgató	B hallgató	C hallgató
 Pont hozzáadása	8	13	0
 Elem mozgatása	1	0	0
 Körző használata	1	0	0
 Pontokat összekötő egyenes megadása	5	6	3
 Egyenesek metszéspontjának megadása	0	0	9
 Párhuzamos egyenes megadása	2	1	0
 Merőleges egyenes megadása	6	5	6
 Utolsó művelet visszavonása (Undo)	7	6	1
 Új szerkesztés	0	0	0

Hányszor kattintott az adott ikonra

	A hallgató		B hallgató		C hallgató		A szerkesztéshez szükséges
	rajzolt	visszavont	rajzolt	visszavont	rajzolt	visszavont	
Pont	18	6	15	3	13	1	12
Egyenes	11	1	13	3	10	0	10

Hány pontot, egyenest rajzolt

	A hallgató	B hallgató	C hallgató
Egyik dőfspont 1. és 2. képe megszerkesztéséig eltelt idő	06:07	01:31	02:53
Másik dőfspont 1. és 2. képe megszerkesztéséig eltelt idő	10:52	05:46	06:29
Összes idő	11:10	06:12	07:02

A szerkesztésre fordított idő

Az Arzarello és munkatársai által írt cikkben [4] említett tolás-húzás tesztípusok e feladat megoldásánál is hasznosak lehetnek. A dőfspont szerkesztésénél gyakorlatokon általában a 2. képből indultak ki a hallgatók. E feladatnál M2-t az első képből kiindulva szerkeszthetik meg, vagy a 2. képen meghosszabbítják a $D''F''$ és a $D''E''$ egyeneseket.

A harmadik lehetőséget a tolás-húzás teszt adja: a D'' pontot az A''B''C'' háromszögön kívülre húzva M1-hez hasonlóan szerkeszthető M2. De a tolás-húzás tesztet csak az A hallgató használta. Általában elmondható, hogy hallgatóink körében a tolás-húzás teszt használata alig volt tapasztalható. Feltevéseik ellenőrzéséhez jellemzőbb volt rájuk a visszavonás és a törlés, hiszen a hibás elemek egy egérgattintással nyomtalanul eltüntethetők. Arzarello és munkatársai is arról számoltak be, hogy kezdetben számos kísérletben azt lehetett megfigyelni, hogy a tanulók alig alkalmazták a tolás-húzás tesztet. Ezt a megfigyelést tapasztalták a legkülönbözőbb iskolai szinteken dolgozó tanulókkal végzett kísérletek alkalmával.

Megfigyeléseink szerint a hallgatók által használt visszavonás (undo) típusai a következők lehetnek:

- Kísérletezés: Ez a típus szolgálja a hallgató feltételezéseinek, ötleteinek ellenőrzését. A számítógép nagyobb lehetőséget ad a kísérletezéshez, hiszen a nem megfelelő elemek hamar eltüntethetők, más egyenesekbe nem rádirozunk bele akaratunkon kívül, mint a papíros szerkesztéseknél. Ez azonban nem jelenti azt, hogy megfelelő tudás nélkül, csak kísérletezéssel is meg lehet oldani a feladatokat.
- Logikai (elméleti) hiba miatt: Ilyenkor papíron is elkövetné a hibát a hallgató.
- A szoftver hibás használata után történt a visszavonás: Ebben az esetben papíron nem követné el a hibát.

A helytelenül berajzolt egyeneseket a hallgatók rögtön visszavonták, az ilyen hibát rögtön észrevették, mivel ezek az egyenesek általában a merőleges- illetve párhuzamos-rajzoló ikon helytelen használatából eredtek. (Nem az az egyenes volt kijelölve a szerkesztési lépés előtt, amelyre merőlegest vagy párhuzamost szerettek volna állítani.) Ez a harmadik visszavonási típusra példa. A következő táblázat mutatja, hogy melyik típusú visszavonást hányszor alkalmazták a hallgatók.

	A hallgató	B hallgató	C hallgató
Kísérletezés	4	4	0
Logikai hiba	2	1	0
Szoftver hibás használata	1	1	1

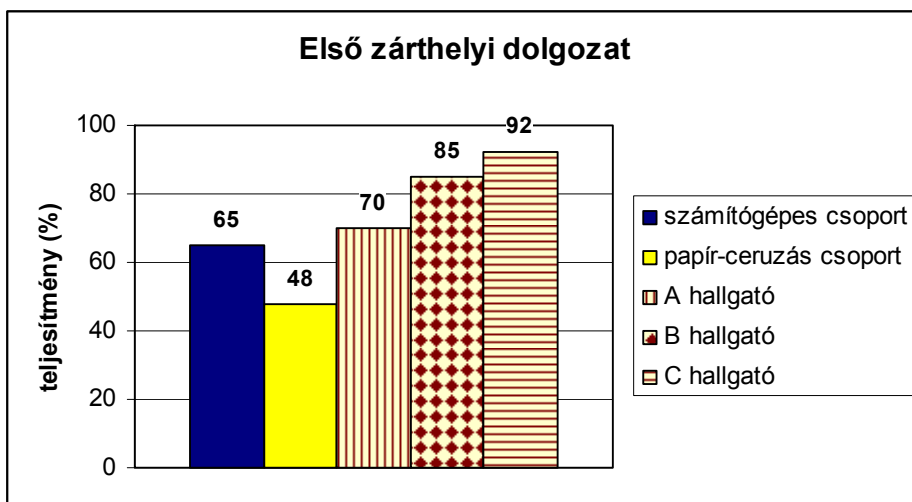
A visszavonás típusai

A fenti táblázat szerint a visszavonás a C hallgatóra volt legkevésbé jellemző, ő csak egy lépést vont vissza. Nála telt el a legkevesebb idő a két főcspont megtalálása között (4 percnél kevesebb idő). Az ő munkája volt leginkább tudatos, az első zárthelyi dolgozatban is ő érte el hármójuk közül a legjobb eredményt. Bár a szerkesztésre felhasznált összes idő nála több volt, mint a B hallgatónál, ez azt mutathatja, hogy míg a B hallgató kapkodott, sok elemet meggondolatlanul rajzolt be, majd visszavont, addig a C hallgató minden szerkesztési lépése előtt gondolkodott. A B hallgatónak összesen 6, az A hallgatónak pedig 7 visszavonása volt a meggondolatlanul végrehajtott lépések miatt, vagy a tanácstalanság, próbálgatások miatt. A B hallgatóra talán inkább a meggondolatlanság, a kapkodás volt jellemző, míg az A hallgatóra a tanácstalanság, hiszen a B hallgató majdnem feleannyi idő alatt oldotta meg a feladatot. A sok visszavonás utalhat az illető viselkedésére, habitusára, de a feladatmegoldási szokását is jellemezheti.

A metszéspont rajzolásához az A és B hallgató kizárólag a pont rajzoló ikont használta, a C hallgató viszont a két egyenes közös pontját meghatározó ikont.

A C hallgató munkájában a nagyobb tudatosság, biztosabb háttértudás abban is megmutatkozik, hogy míg a többiek a párhuzamos- és merőleges szerkesztő ikont vegyesen használták, ő csak a merőleges rajzoló ikonnal dolgozott, a rendező egyenesek azon tulajdonsága alapján, hogy azok merőlegesek az $x_{1,2}$ -tengelyre.

A 26. ábra a három hallgató teljesítményét mutatja az első zárthelyi dolgozatban.



26. ábra: A három hallgató teljesítménye az első dolgozatban

Az első – papír-ceruzás – zárthelyi dolgozatban 2004. októberében az A hallgató teljesítménye 70%, a B hallgatóé 85%, a C hallgatóé 92%. Itt az A hallgatónál főként logikai hibák voltak, radirozás nyoma is látható. A B hallgatónál több radirozás látszik (ami a kísérletezésre utal) és ábrái eléggé pontatlanok. Számítógéppel nem fordulnak elő a szerkesztés pontatlanságából adódó hibák, vagy az, hogy a szerkesztés nem fér ki a lapra, ami a hagyományos csoportban gyakori jelenség. Tehát a B hallgatónak a számítógép segít a feladatmegoldásban, nála beigazolódott Noss és Hoyles [71] állítása, miszerint a számítógépes környezet formálja a feladatmegoldási stratégiát. A C hallgatónál radirozás nem látszik. Neki mindegy, hogy számítógéppel vagy ceruzával dolgozik, mindkettővel helyesen szerkeszt. Tehát az A és B hallgató valószínűleg kísérletező típus, a C hallgató elméleti.

Érdekes megfigyelni, hogy mindhárom hallgató a csoportjuk átlagától jobban teljesített az első zárthelyi dolgozatban – a nem-számítógépes csoport átlagáról nem is beszélve – és az előbb elemzett feladatot mindhárman hibátlanul oldották meg, mégis jelentős különbség volt a vizsgált feladatnál a munkamódszerükben, a feladat megoldási idejében, a számítógépes szerkesztés lehetőségeinek kihasználásában. Kísérletünkben is látszik, hogy milyen különbség van a hallgatók feladatmegoldási tempója között. Ebből adódik egy konklúzió, amit sokan hangsúlyoztak már: a differenciált oktatás fontossága.

Kísérletünkben a program használatának segítségével feltárhattuk a hallgatók nehézségeit a feladatmegoldásban. A visszavonás, kísérletezés, próbálgatás, tanáctalanság a jó teljesítmény mögötti bizonytalan háttértudásra utalhat. A sok visszavonás oka lehet a begyakorolt lépések automatikus, gondolkodás nélküli végrehajtása (a két döféspont megtalálása közt viszonylag sok idő eltelt). A kísérlet tanulsága alapján jövőben fontos a feladatok megoldásánál a tudatosság fokozása, a megoldási lánc kidolgozása és tudatos végrehajtása a hallgatóknál minden feladatnál.

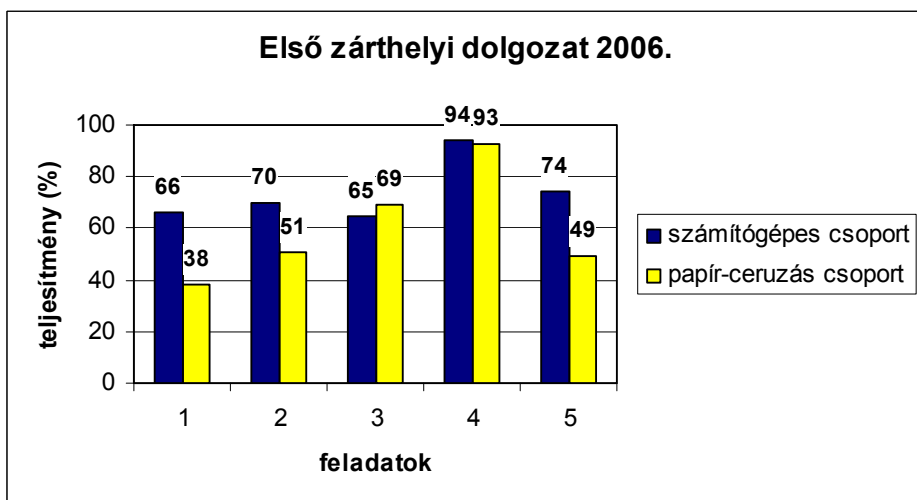
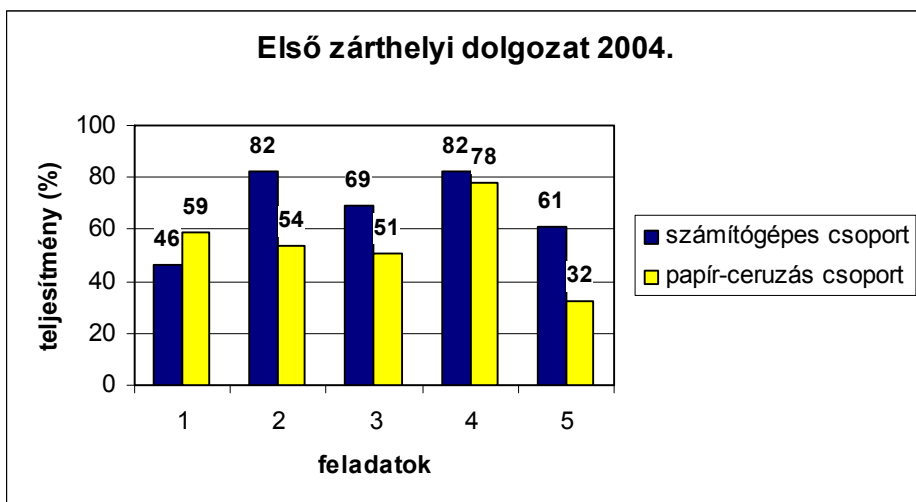
5.2.5. A hallgatók teljesítményének összehasonlítása a két zárthelyi dolgozatban

Az első zárthelyi dolgozat megírása 2004-ben a 8., 2006-ban a 9. tanítási héten, a második zárthelyi dolgozat megírása 2004-ben és 2006-ban is a 14. tanítási héten történt, a kísérlet eredményességének mérésére. A két zárthelyi dolgozat feladatát és pontozását az előadásokat vezető oktató állította össze. Csak azokat a hallgatókat vettük figyelembe, akik mindkét zárthelyi dolgozatot megírták és rendszeresen látogatták az órákat: a számítógépes csoportban 2004/05. tanévben 15 fő, 2006/07. tanévben 15 fő a papír-ceruza csoportban 2004/05. tanévben 21 fő 2006/07. tanévben 29 fő.

Az első zárthelyi dolgozat feladatait és a pontozást a 3. függelék tartalmazza.

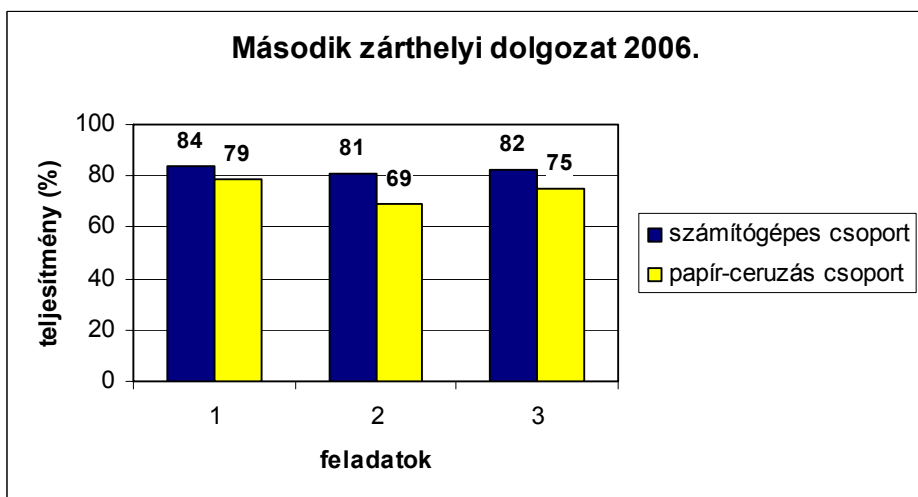
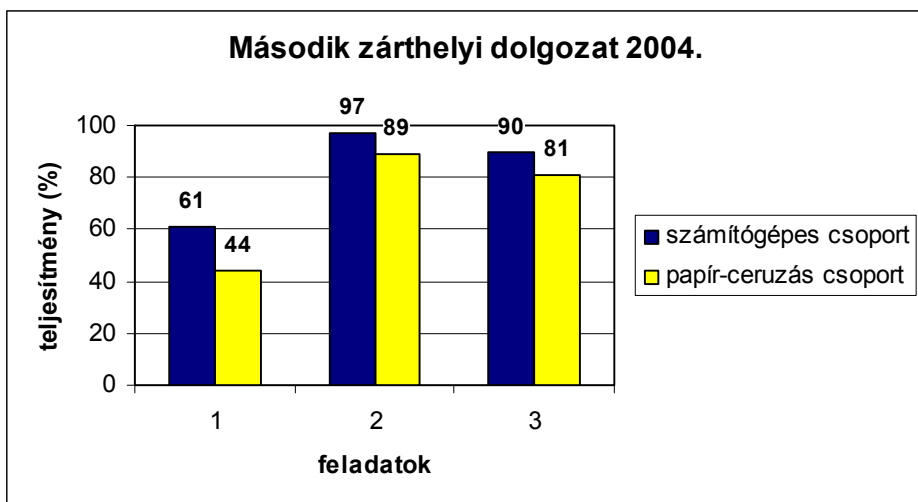
A számítógépes csoport dolgozata pontosabb, kissé igényesebb is lett; jobban sikerült mindkét évben. Viszont 2004-ben a láthatóság megállapítását a feladatok végén többször rontották el, mint a papír-ceruza csoport hallgatói. 2006-ban már tanulva ebből, nagyobb figyelmet fordítottunk a láthatóság megállapításának gyakorlására a számítógépes csoportban. A 27. ábra mutatja a hallgatók teljesítményét az első zárthelyi dolgozatban.

Az 1. feladatnál csak két dőfspontot kellett szerkeszteni, így a láthatóságra arányosan több pont járt. Éppen e miatt a számítógépes csoport itt rosszabbul teljesített 2004-ben, mint a papír-ceruza csoport. A 4. feladat sikerült mindkét csoportnak a legjobban mindkét évben. Az előzetes felmérésben ezt a típusú feladatot 2004-ben a számítógépes csoport 21%-ra, a papír-ceruza csoport 57%-ra teljesítette; 2006-ban 57% és 52% volt a teljesítési arány. Itt viszont 7 hét elteltével 2004-ben a számítógépes csoport teljesítménye 82%-ra, a papír-ceruza csoporté 78%-ra nőtt; 2006-ban 94%-ra és 93%-ra nőtt.



27. ábra: Az első zárthelyi dolgozat eredménye

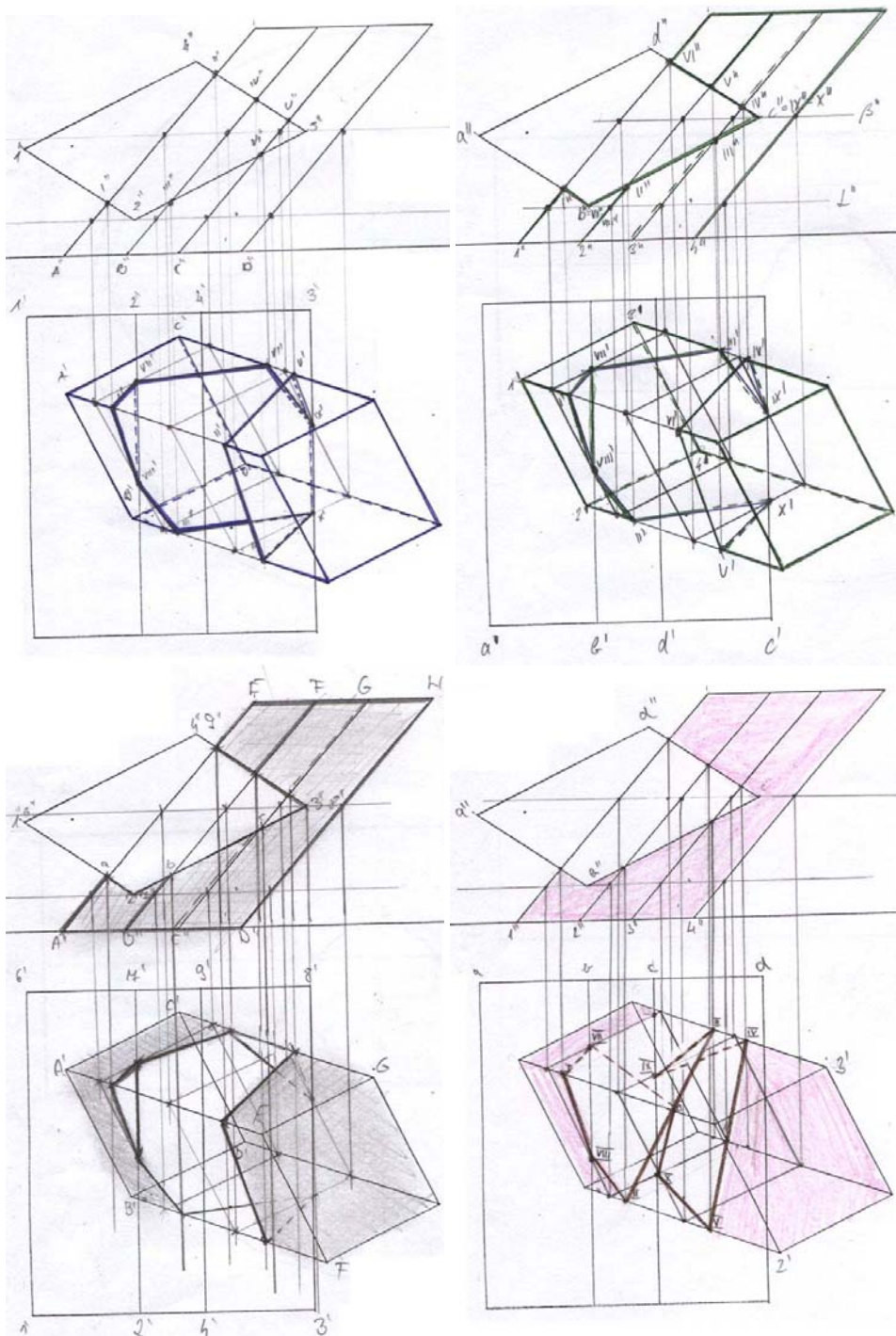
A második zárthelyi dolgozat feladatait és pontozását a 4. függelék tartalmazza. A számítógépes csoport második zárthelyi dolgozata mindkét évben minden feladatnál jobban sikerült, bár nincsenek olyan nagy eltérések, mint az előző dolgozat néhány feladatánál. A 28. ábra mutatja a hallgatók teljesítményét a második zárthelyi dolgozatban. 2004-ben a láthatóság megállapítását e dolgozatban is többször rontották el a számítógépes csoport tagjai, mint a papír-ceruzás csoporté. A láthatóságot a 3. feladatban rontották el a legtöbben; a 29. ábra erre a feladatra mutat 4 hallgatói megoldást, kettőt a számítógépes és kettőt a papír-ceruzás csoportból.



28. ábra: A második zárthelyi dolgozat eredménye

Mindkét dolgozat alapján elmondhatjuk, hogy az adott oktatási feladatok elsajátítását, a törvényesen kitűzött célokat a számítógép segítségével tanuló csoport jobban teljesítette, mint a kontrollcsoport.

Számítógéppel nem fordul elő, hogy a szerkesztés pontatlanságából adódóan három, egy egyenesen lévő pont nem esik egy egyenesre, ami képsíktranszformációnál a hagyományos csoportban gyakori jelenség.



29. ábra: Hallgatói megoldások a harmadik feladatra

A kérdőívre adott válaszok alapján kiderült és beszélgetéseink alkalmával is elmondták a hallgatók: szívesen vették, hogy számítógéppel dolgozhattak, könnyebbnek tartották így a szerkesztést. A gyakorlatokon használt weblapot otthonról illetve a kollégiumból átlagban hetente egyszer keresték fel. Egy hallgató sem írt negatív véleményt és csak egy hallgató írta, hogy a kurzus elején nehéznek találta a program használatát.

Néhány hallgatói vélemény:

„Számítógépen sokkal jobb dolgozni, mint papíron. Sokkal könnyebb az ábrákat elkészíteni. Gyorsabban tudtunk dolgozni és több feladatot tudtunk megoldani.”

„Gyorsabban haladtunk és nagyobb rutinra tettünk szert. Sokkal gördülékenyebben tudtuk a feladatokat vizsgán megoldani.”

„A számítógépes rajzoló program elsöre idegennek és nehéznek tűnt. Ezután az óra elég színvonalas és jó volt. Szerintem jó volt ez a kurzus.”

„Szerintem hasznos volt ez a számítógépes gyakorlat, mert átláthatóbb és gyorsabb volt a szerkesztés.”

„Hasznos, jobban érthető, könnyebb, gyorsabb tanulás.”

Megjegyezzük azonban, hogy egy 2000-ben az Egyesült Királyságban, matematika tanár szakos egyetemi hallgatók körében készült felmérés szerint [78] a matematika megértéséhez minden hallgató fontosnak tartotta a papír-ceruza módszert. Povey és Ransom ebből azt a következtetést vonták le, hogy a leendő tanárok félnek attól, hogy a számítógép miatt elvesztik az irányítást a diákok órai tevékenysége felett. A papír-ceruza módszerrel látják biztosítottnak azt, hogy az irányítást kézben tartásuk.

5.2.6. A hallgatók teljesítményének összehasonlítása a késleltetett felmérésben

Elsőéves gépészmérnök hallgatókkal késleltetett felmérést végeztünk a hallgatók ábrázoló geometriai fogalmakról való emlékeinek felmérésére az oktatás után 4 hónappal 2005 áprilisában, illetve 5 hónappal 2007 májusában. Az így szerzett tapasztalatok alapján azt szerettük volna vizsgálni, hogy van-e jelentős különbség a számítógéppel ábrázoló geometriát tanult és a papír-ceruzás csoport között, mely fogalmak a „gyenge láncszemek” a hallgatóknál illetve hol szükséges az ábrázoló geometriai fogalmi struktúra fokozottabb megerősítése.

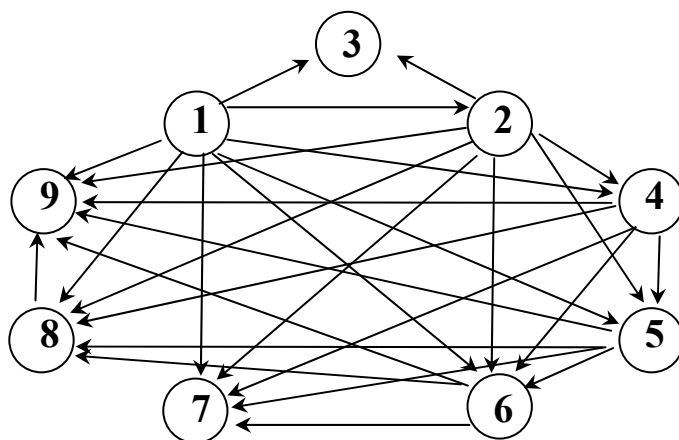
A számítógépes csoportból 2005-ben 14 fő, 2007-ben 10 fő, a papír-ceruzás csoportokból 2005-ben 14 fő, 2007-ban 17 fő írta meg a felmérőt. A feladatsor 3 feladatból állt. A feladatok megoldásához 50 perc állt a hallgatók rendelkezésére. A késleltetett dolgozat feladatait az 5. melléklet tartalmazza.

A feladatok a következő fogalmakra épültek:

1. rendező
2. pont ábrázolása
3. fedőpontpár ábrázolása
4. egyenes ábrázolása
5. egyenesre illeszkedő pont ábrázolása
6. egyenesek metszéspontjának szerkesztése
7. fedőegyenespár ábrázolása
8. sík ábrázolása
9. síkra illeszkedő elemek ábrázolása
10. láthatóság meghatározása
11. sík és egyenes dőfspontjának szerkesztése
12. két sík metszéspontjának szerkesztése
13. síklapú test egyenessel való metszése
14. síklapú test síkkal való metszése
15. áthatási pontok összekötése

16. síklapú testek áthatásának szerkesztése (ha a(z egyik) hasáb oldalélei vetítőegyenese(k))

Mind a 16 fogalom rendszergráfjának felrajzolása már nagy terjedelmű lenne, ezért a 30. ábrán csak az 1.-9. fogalmakét – az első feladat rendszergráfját – rajzoljuk meg. [14]



30. ábra: Az első feladat megoldásához szükséges rendszergráf

Az 1.-16. fogalmak kapcsolatára mutat rá a relációmátrix:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1	-	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	0	-	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
3	0	0	-	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	0	1
4	0	0	0	-	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
5	0	0	0	0	-	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
6	0	0	0	0	0	-	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1
7	0	0	0	0	0	0	-	0	0	0	1	1	1	1	0	0
8	0	0	0	0	0	0	0	-	1	1	1	1	1	1	1	1
9	0	0	0	0	0	0	0	0	-	1	1	1	1	1	1	1
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-	1	1	1	1	0	1
11	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-	1	1	1	0	1
12	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-	1	1	0	1
13	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-	1	0	1
14	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-	0	1
15	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-	1
16	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-

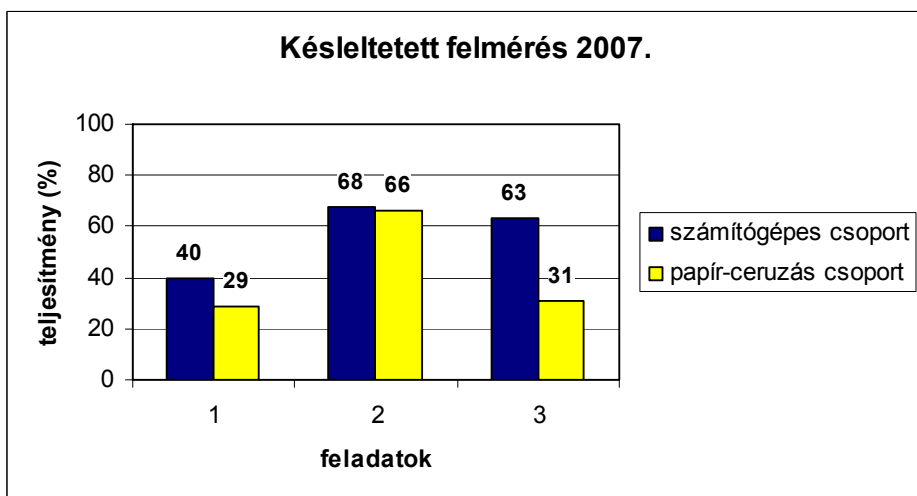
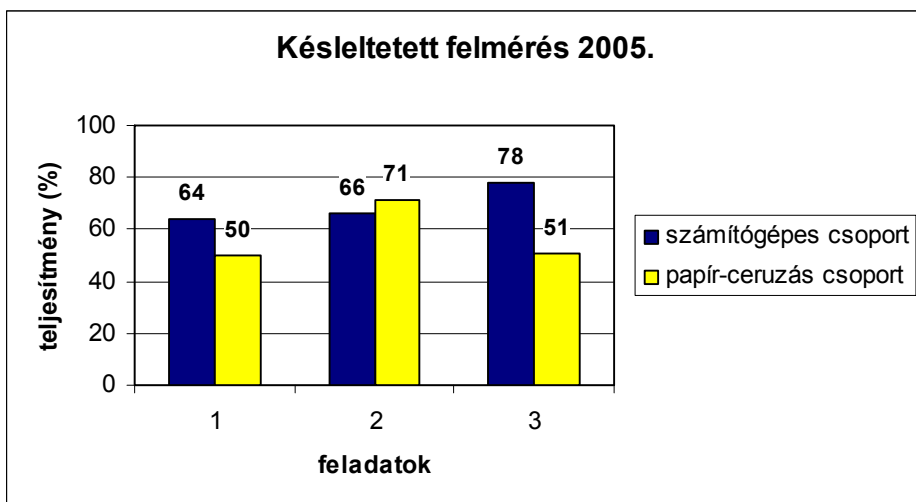
Az első feladatban a sík ábrázolásához (8.) szükség van az 1., 2., 4., 5., 6. fogalmakra, azaz a rendező ismeretére, pont, egyenes ábrázolására, egyenesre illeszkedő pont ábrázolására és egyenesek metszéspontjának meghatározására. A sík ábrázolása (8.) szükséges – egyebek közt – a síkra illeszkedő elemek ábrázolásához (9.), de 9.-hez ismernünk kell még az 1., 2., 4., 5., 6. fogalmakat is.

A mátrixból látszik, hogy a 3. fogalomra csak a 10.-nél (láthatóság meghatározása) lesz szükség, a 7. fogalomra pedig csak a 11.-nél (sík és egyenes dőfspontjának szerkesztése). Mégis logikusabb a fedőpontpár ábrázolását (3.) a pontok ábrázolása (2.) után, a fedőegyenespár ábrázolását (7.) pedig az egyenesek metszéspontjának szerkesztése (6.) után tanítani.

A 10. fogalom (láthatóság meghatározása) és a 15. fogalom (áthatási pontok összekötése) kitüntetett szerepet játszik a fogalmak sorrendjében, mivel a sík és egyenes dőfspontjának (11.), két sík metszéspontjának (12.), síklapú test egyenessel való metszésének (13.) és síklapú testek áthatásának (16.) szerkesztése elsajátítható, sőt rendszerbe is építhető nélküle. E feladatoknál a láthatóságot a szerkesztés befejeztével utólag határozzuk meg. A feladatoknál természetesen csak akkor teljes a szerkesztés, csak akkor kapnak a hallgatók maximális pontot, ha a 11., 12., 13., 14. és 16. szerkesztése után a láthatóságot (10.) is meghatározzák.

A áthatási pontok összekötésénél (15.) hasonló a helyzet, hiszen az áthatási pontok szerkesztését (16.) természetesen az összekötés (15.) előtt kell elvégezni, mégis a síklapú testek áthatására vonatkozó feladat akkor teljes, ha az áthatási pontok összekötése megtörtént. Ezek után következhet a láthatóság meghatározása (10.).

A hallgatók százalékos teljesítményét mutatja feladatonként a 31. ábra:

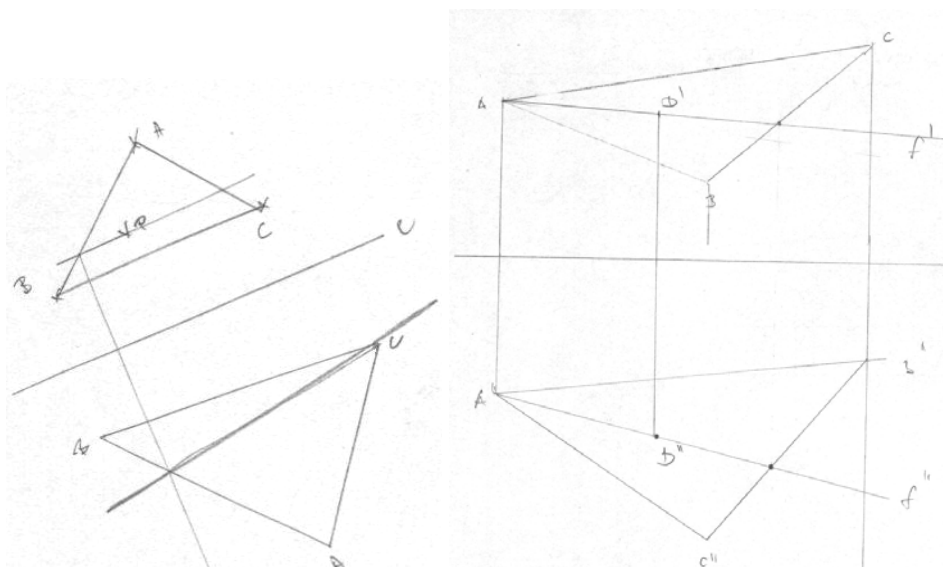


31. ábra: A késleltetett felmérés eredménye

Az 1. feladatot a számítógépes csoport teljesítette jobban mindkét évben. E hallgatók 64%-a 2005-ben, 40%-a 2007-ben, a papír-ceruzás csoport hallgatóinak 50%-a 2005-ben, 29%-a 2007-ben hibátlanul oldotta meg a feladatot, tehát feltételezhetjük, hogy ők a fogalmakat a síkra illeszkedő elemek ábrázolásáig (9.) elsajátították, megértették és kialakult a helyes fogalomrendszerük is.

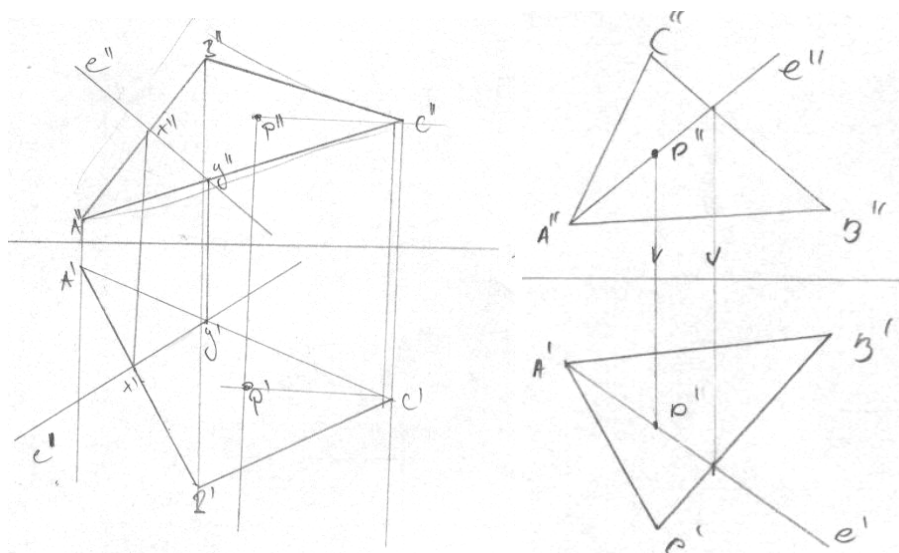
A 32. és 33. ábra négy hallgatói megoldást mutat az 1. feladatra. Az A hallgató a síkot sem tudta ábrázolni, hiszen az A, a B és a C pontok két képe nem egy rendezőre illeszkedik. A háromszögek csúcsainak helytelen elnevezése (ABC kétszer is szerepel A'B'C' és

A''B''C'' helyett) is arra utal, hogy az A hallgatónak komoly hiányosságai vannak a Monge-projekció terén. Az egyenes egyik pontját próbálta az általa síknak vélt háromszögre illeszteni, ami azt mutatja, hogy homályos emlékei maradtak az órai szerkesztésekről, de már az 1. fogalommal sincs igazán tisztában. Ilyen esetet szerencsére csak 3 hallgatónál tapasztaltunk. A B hallgató az egyenest és a pontot helyesen illesztette a „háromszögre”, de ez a háromszög nem határoz meg egy síkot, hiszen a C'' ponttal egy rendezőn a B pont van, a B'' ponttal egy rendezőn pedig a C. A B hallgatónak is problémái vannak a háromszög csúcsainak elnevezésével.



32. ábra: Az A és B hallgató megoldása

A C hallgató a síkot helyesen vette fel, rajta az egyenest helyesen ábrázolta, de a P pontot már nem sikerült a síkra illeszteni, hiszen a P pontot tartalmazó egyenesnek csak az egyik pontja illeszkedik a síkra, tehát a 9. fogalom még nála sem teljesen világos. A D hallgató hibátlanul oldotta meg az 1. feladatot, az A, B, C csúcsok képeinek elnevezése helyes, a P pont és az e egyenes illeszkedik az ABC síkra.



33. ábra: A C és D hallgató megoldása

A 2. feladatnál a papír-ceruzás csoportok hallgatói teljesítettek jobban, 2005-ben e csoport 36%-a hibátlanul oldotta meg a feladatot, de csak 29%-a oldotta meg az előző feladatot is hibátlanul. 2007-ben a papír-ceruzás csoport 53%-a hibátlanul oldotta meg a feladatot, de csak 12%-a oldotta meg az előző feladatot is hibátlanul. A számítógépes csoportból 2005-ben 29% teljesített hibátlanul e feladatban és ők az előző feladatot is maximálisan teljesítették. Csak róluk – akik mindkét feladatot hibátlanul oldották meg – mondhatjuk el, hogy a fogalmak a két sík metszésvonalának szerkesztéséig (12.) beépültek a fogalomrendszerükbe. Akiknek csak a 2. feladat sikerült, az előző nem – amelynek fogalmaira e feladat foglmai is épülnek –, azok valószínűleg a szerkesztési lépéseket tartalom nélkül tanulták be, így e fogalmak nem alkotnak rendszert. 2005-ben a számítógépes csoportból a legtöbb hallgatónak (43%) a láthatóság meghatározása (10.) jelentett problémát (erről a későbbiekben még szólnunk), a metszésvonalat (12.) meg tudták határozni, míg a hagyományos csoport 21%-a a metszésvonalat sem tudta helyesen megszerkeszteni. 2007-ben a 2. feladatnál a láthatóság meghatározása a számítógépes csoport 30%-ának okozott gondot, a hagyományos csoport 35%-a a metszésvonalat sem tudta helyesen megszerkeszteni.

A 3. feladatnál a legnagyobb az eltérés a két csoport teljesítménye között (2005-ben 27%, 2007-ben 32%). A feladatot hibátlanul megoldani 2005-ben a számítógépes csoport 29%-ának, 2007-ben 30%-ának, 2005-ben a papír-ceruzás csoport 7%-ának, 2007-ben 6%-ának sikerült. Közülük a számítógépes csoportból 2005-ben 7%, 2007-ben 10% oldotta meg

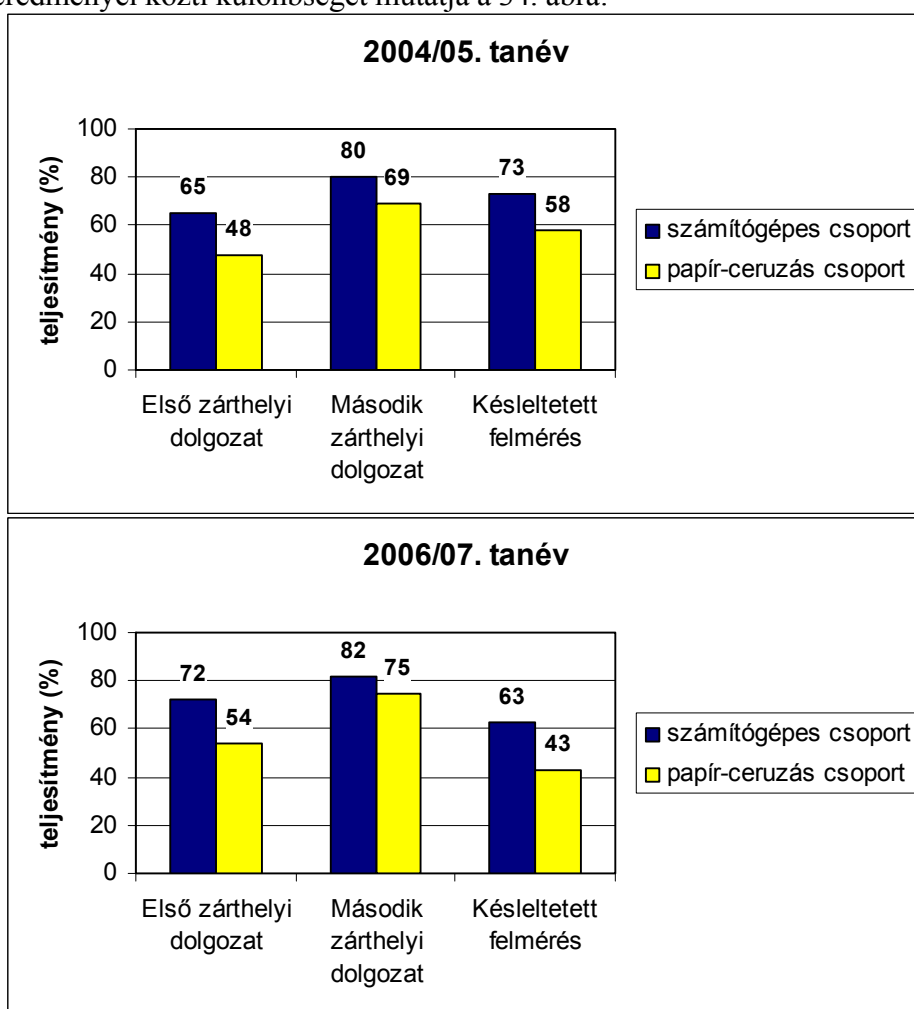
mindhárom feladatot kifogástalanul, tehát nekik teljes és maradandó a 16 fogalomról a fogalomrendszerük, hiszen az oktatás után 4 illetve 5 hónappal emlékeznek rá és alkalmazni tudják. A papír-ceruzás csoportból senkinek sem sikerült teljesen hibátlanul megoldani mindhárom feladatot. A számítógépes csoportból legtöbben (2005-ben 29%, 2007-ben 20%) a láthatóság meghatározásánál (10.) akadtak el, az áthatási pontokat (16.) hibátlanul megszerkesztették. Az előző feladatnál is megfigyelhettük, hogy 2005-ben a számítógépes csoportnak gondot okoz a láthatóság meghatározása. Ennek oka a használt számítógépes programban keresendő, hiszen míg a program a tanult összes ábrázoló geometriai ismeret elsajátításában hasznos és hatékony segítségnek bizonyult, a láthatóság ábrázolását nem támogatta, így a gyakorlatokon a szerkesztések befejeztével megbeszéltük a láthatóságot, majd a hallgatók a füzetbe rögzítették. A 3. feladatnál a hagyományos csoport nagy része már az áthatási pontok (16.) szerkesztésénél elakadt, így a láthatóság meghatározásáig el sem jutott. Noha sokan közülük az előző feladatot – 12. fogalom – hibátlanul megoldották, a 11. és 12. fogalmakat mégsem tudták alkalmazni a 3. feladatnál. Ebből arra következtethetünk, hogy a 11. és 12. fogalom nem épült igazán be a fogalmi rendszerükbe, ami akadályozza az alkalmazást. A következő táblázat a teljesen hibátlan és a csak láthatóság szerkesztésében (10.) hibát elkövetett hallgatók százalékos arányát mutatja az egyes feladatokban:

2005.	1.	2.		Első két feladat		3.		Mindhárom feladat	
	hibátlan	hibátlan	láthatóság rossz csak	hibátlan	láthatóság rossz csak	hibátlan	láthatóság rossz csak	hibátlan	láthatóság rossz csak
Számítógépes csoport	64	29	43	29	14	29	29	7	21
Papír-ceruzás csoport	50	36	43	29	7	7	14	0	7

2007.	1.	2.		Első két feladat		3.		Mindhárom feladat	
	hibátlan	hibátlan	láthatóság rossz csak	hibátlan	láthatóság rossz csak	hibátlan	láthatóság rossz csak	hibátlan	láthatóság rossz csak
Számítógépes csoport	40	40	30	30	0	30	20	10	0
Papír-ceruzás csoport	29	53	6	12	6	6	0	0	0

A táblázat alapján elmondhatjuk, hogy a számítógépes csoport hallgatóinak 43%-a 2005-ben, 30%-a 2007-ben, a papír-ceruzás csoport hallgatóinak 36%-a 2005-ben, 18%-a 2005-ben az 1. és 2. feladatot hibátlanul vagy csak láthatósági hibával oldotta meg, tehát az ő fogalomrendszerük a 12.

fogalomig teljes, illetve csak a 10. fogalom okoz nekik nehézséget. Mind a három feladatot hibátlanul vagy láthatósági hibával 2005-ben az első csoport 28%-ának, 2007-ben 10%-ának sikerült megoldania. Valószínűleg ők a felsorolt összes fogalmat megértették, alkalmazni tudják, bár néhányuknál a 10. fogalommal gondok vannak. Sajnos a többiek nem boldogultak valamelyik feladattal és nem tudtak kigondolni könnyebben megoldható rokon feladatot, amelynek az eredményét felhasználhatták volna segítségként e feladatok megoldásához. [76] Érdekes megfigyelni, hogy a számítógépes csoportból azok oldották meg az áthatási pontok szerkesztését (16.) helyesen, akik az 1.- 12. fogalmakra épülő 2. feladatot is hibátlanul teljesítették. A két zárthelyi dolgozat és a késleltetett felmérés eredményei közti különbséget mutatja a 34. ábra:



34. ábra: A két zárthelyi dolgozat és a késleltetett felmérés eredménye

A késleltetett felmérés eredményét a zárthelyi dolgozatokkal összevetve azt látjuk, hogy a papír-ceruzás csoport teljesítménye mindkét év mindhárom dolgozatánál a számítógépes csoport teljesítménye alatt maradt. 4 illetve 5 hónappal az oktatás befejezése után a számítógépes csoport teljesítménye a 2004/05. tanévben 7%-kal, a 2006/07. tanévben 19%-kal, a papír-ceruzás csoport teljesítménye a 2004/05. tanévben 11%-kal, a 2006/07. tanévben 32%-kal csökkent. A 34. ábrán megfigyelhetjük, hogy 2007-ben a késleltetett felmérésen mindkét csoport rosszabbul teljesített, mint 2005-ben. Ennek oka lehet az előadás heti óraszámának kettőről egyre csökkentése, illetve az a tény is, hogy 2007-ben az oktatás befejezése után több mint egy hónappal később írták a késleltetett felmérőt a hallgatók 2005-höz képest.

A felmérés alapján elmondhatjuk, hogy a hallgatóknak több mint a fele a 12. fogalom megértéséig sem jutott el, ezért már az első 12 fogalomnál érdemes több időt szánni a fogalmak rendszerezésére, mert a ráfordított idő későbbi tanulmányaikban megtérül.

Az eredmények alapján megállapíthatjuk, hogy a számítógép, a DGS-sel készített interaktív feladatlapok használata az oktatás eredményességét növeli, segít a helyes fogalomrendszer kialakításában, hiszen akik a két sík metszésvonaláig (12.) rendszerezni tudták a fogalmakat, azoknak sikerült a síklapú testek áthatásáig (16.) is kiépíteni a helyes fogalomrendszert. A 2004. év tanulságai alapján a láthatóság szerkesztésének tanítására nagyobb figyelmet fordítottunk a számítógépes csoportnál. Ennek következtében a 2006/07. tanévi dolgozatoknál kevesebb láthatóság szerkesztéssel kapcsolatos hibát követtek el.

A fogalmak közötti kapcsolatokra nagyobb hangsúlyt helyezve fogalmaik tartósabbak és jobban alkalmazhatók lesznek. Törekednünk kell a fogalmak elmélyítésére, rendszerezésére. Czeglédy [14, 112. o.] írja a következőket: „fontos a rendszerszemlélet kialakítása a tanulási-tanítási folyamatban, mert ha rendszerben gondolkodunk, rendszerszemlélet szerint tanulunk, kevesebb szimbólumot kell észben tartanunk, és ugyanakkor több információval rendelkezünk, fogalmaink tartósabbak, transzferálhatóbbak, alkalmazhatóbbak lesznek és több oktatási, nevelési, képzési célt tudunk így megvalósítani, mint a rendszer nélküli tanulás esetén.”

6. Az eredmények a hipotézisek tükrében

Eredmény az összehasonlító felméréssel kapcsolatosan:

1. eredmény a matematika tanár szakos egyetemi hallgatók térszemléletéről és térgeometriai ismeretéről

Shea és munkatársai [84] kutatásaival ellentétben mi úgy találtuk, hogy a matematika tanár szakos nappali tagozatos egyetemi hallgatók a pozsonyi és a debreceni egyetemen nem rendelkeznek igazán jó térszemlélettel. Felmérőnkön a tárgy képzeleti manipulálására irányuló feladatot kivéve 50% alatt volt az egyik vagy mindkét csoport teljesítménye. A felmérésen kapott eredmények igazolják, hogy nagyon sok hallgatónak gondot okoz egy térbeli alakzat elképzelése és ezáltal a térgeometriai feladatok megoldása is.

Eredmények az oktatási kísérlettel kapcsolatosan:

1. eredmény a DGS-sel készített feladatlapok oktatásba történő bevezetéséről

A 2004/05. tanév első félévétől alkalmaztuk a DGS-sel készített feladatlapokat ábrázoló geometria majd műszaki ábrázolás gyakorlatokon. Az általunk létrehozott feladatlapokat tartalmazó weblapot Internetről érték el a hallgatók. A tananyagot a 2004/05. tanévi használat tanulságai alapján módosítottuk, javítottuk. A használat eredményességét két tanévben két-két zárthelyi dolgozattal és egy-egy késleltetett felméréssel mértük, melyek alapján elmondhatjuk, hogy minőségi javulást érhetünk el a DGS alkalmazásával. A számítógéppel történő oktatás megszervezése az oktatónak lényegesen több időbe kerül, a DGS hatékony alkalmazása folyamatos fejlesztőmunkát igényel, de a dolgozatok eredménye mutatja, hogy a befektetett munka megtérül.

2. eredmény a hallgatói teljesítmények változásáról

A hagyományos, papír-ceruzás első és második zárthelyi dolgozatban megfigyelhető, hogy a számítógépes csoport hallgatói jobban teljesítenek, mint a papír-ceruzás módszerrel tanulók. Az első zárthelyi dolgozatban a teljesítmények közti különbség 17% 2004-ben, 18% 2006-ban. A második zárthelyi dolgozatban 11% 2004-ben, 7% 2006-ban a különbség.

3. eredmény a hallgatók feladatmegoldási stratégiájának változásáról

A számítógépes csoportban inkább jellemző volt, hogy a hallgatók segítették egymást, javították egymás hibáit. Jellemzőbb volt rájuk még a kísérletezés, hiszen a hibás elemek egy egérekattintással nyomtalanul eltüntethetők. A papír-ceruzás csoport tagjai inkább a tanári segítségre, instrukcióra vártak, ha munkájukban elakadtak. Tehát a számítógép önállóságra ösztönözte a hallgatókat. Heugl kutatásaihoz [34] hasonlóan mi is úgy találtuk, hogy a kísérletező fázis a hagyományos, papír-ceruzás csoportnál gyakran hiányzott.

4. eredmény az ábrázoló geometriai fogalmak maradandóságáról

A hallgatók ábrázoló geometriai fogalmakról való emlékeinek felmérésére az oktatás után a 2004/05. tanévben 4 hónappal, a 2006/07. tanévben 5 hónappal késleltetett felmérést végeztünk. Az eredmények alapján megállapíthatjuk, hogy a DGS-sel készített interaktív feladatlapok használata az oktatás eredményességét növeli, segít a helyes fogalomrendszer kialakításában.

5. eredmény a hallgatói attitűdök változásáról

A DGS-sel készített feladatlapok oktatásba történő bevezetésének hatására a tanulás motivációs szintje nő, a feladatlapok használata a hallgatók nagy részének vonzó. A kérdőívre adott válaszok alapján elmondhatjuk, hogy a hallgatók szívesen dolgoztak számítógéppel, könnyebbnek tartották így a szerkesztést. A gyakorlatokon használt weblapot otthonról illetve a kollégiumból átlagban hetente egyszer keresték fel.

7. Összegzés

Oktatási kísérletünk célja a dinamikus geometriai rendszerrel készített feladatlapoknak a gépészmérnök hallgatók ábrázoló geometria, majd műszaki ábrázolás tantárgyak oktatásába történő bevonása volt. Ehhez a térszemlélet, a számítógéppel segített oktatás, a dinamikus geometriai rendszerek valamint a matematika didaktika szakirodalmának áttanulmányozása után kontrollcsoportos fejlesztő kísérletet hajtottunk végre az új oktatási stratégia kipróbálására, valamint összehasonlító felmérést végeztünk a térszemlélet és térgeometria témakörben. A dinamikus geometriai rendszerrel generált feladatlapokból álló, a

gyakorlatok anyagát magában foglaló tananyagrendszer elkészítésekor, kipróbálásakor figyelembe vettük a szakirodalom javaslatait, a 2004/05. tanév tapasztalatai alapján a tananyagrendszert módosítottuk, korrigáltuk.

Eddigi eredményeink alapján megállapíthatjuk, hogy a dinamikus geometriai rendszerrel készített interaktív feladatlapok használata az ábrázoló geometria és a műszaki ábrázolás oktatásának eredményességét növeli, a hallgatók teljesítménye és motivációs szintje nő. A számítógépes csoport hallgatóira jellemzőbb a kísérletezés és az egymás munkájának segítése a gyakorlatokon.

A számítógép és az Internet oktatásban történő alkalmazásának problémái közül egyik lényeges dolog a számítógépes laborok leterheltsége. A nehézségek ellenére hasznos lenne a számítógép alkalmazása a levelező oktatásban is, ahol nagyon kevés idő van a szerkesztésre, hiszen egy félévben 10 tanítási óra (5 előadás és 5 gyakorlat) áll rendelkezésre gépészmérnök szakon az ábrázoló geometria oktatására. A DGS-sel készített interaktív feladatlapok levelező ábrázoló geometria gyakorlatokra történő bevezetésére javasolt tartalmakat a CD-melléklet tartalmazza.

A mostani tapasztalatok alapján a számítógépes feladatlapok javítása, fejlesztése és ezek segítségével a gyakorlatok még hatékonyabbá tétele a jövő feladata. A jövőben tervezzük hallgatói interjúk készítését a problémák pontosabb feltárása végett.

8. Summary

The aim of our educational research was to draw in the worksheets made by the dynamic geometry system into the education of the Descriptive geometry and then the Technical representation subjects of the mechanical engineer students. To reach this after surveying of the literature of the spatial ability, the computer aided education, the dynamic geometry systems and Mathematics Didactics we executed a controlgrouped developing research for trying out the new educational research and we executed a comparative survey in the subject of the spatial ability and spatial geometry. At the creating and trying out of the curriculum made up of the dynamic geometry system generated worksheets that include the material of the practises we took into consideration the offers of the literature and we modified and corrected the curriculumsystem according to the experiences of the 2004/05 school year.

According to our results we can state that the usage of the interactive worksheets made by the dynamic geometry systems increases the efficiency of the education of the Descriptive geometry and the Technical representation, the motivation level and the performance of the students is growing. For the students of the computer group it is more typical that they test and that they help each other's work on the practises.

One of the important things from the problems of the computer and internet usage in the education is that the computer labs are very full. On the contrary the difficulties it would be useful to use the computer in the corresponding education as well, where it is such a short time for constructing, as there is only 10 teaching lessons in one semester for teaching the Descriptive geometry.

According to the current experiences the task of the future is the correcting, developing of the computer worksheets and by the help of these to make the practises more effective. In the future we plan to make interview's with the students to reveal the problems more punctual.

9. Irodalomjegyzék

1. Ambrus A. (2002). *A problémamegoldás tanításának elméleti alapjai*, Új Pedagógiai Szemle, 10.
2. Ambrus A. (1995). *Bevezetés a matematikadidaktikába*, ELTE Eötvös Kiadó, Budapest
3. Ambrus G. (2001). *Szükséges-e szemléletváltás az új technológiák megjelenésével a matematikaoktatásban?* A Matematika Tanítása, 9(1), 3-6.
4. Arzarello, F. és mtsai (2002). *A cognitive analysis of dragging practises in Cabri environments*, ZDM 34(3), 66-72.
5. Bakó, M. (2006). *Utilisation de l'ordinateur pour le développement de la vision spatiale*, Thèse En Co-Tutelle, L'école doctorale CLESCO, Université Paul Sabatier, Toulouse et de L'école doctorale de Mathématiques et Informatiques, Université de Debrecen, <http://www.inf.unideb.hu/~mariabako/kocka>
6. Bakonyi P. és mtsai (1999). *Magyar Válasz az Információs Társadalom kihívásaira*, Szakértői anyag, <http://www.iif.hu/~lengyel/valasz/>
7. Bálint, L. – Sádecká, V. (1999). *Vzdelávaci štandard pre 2. stupeň základnej školy*, Ministerstvo školstva Slovenskej republiky, číslo 546/994, Bratislava
8. Bárdné Feind T. (2002). *A vizuális mérnöki kommunikáció alapjainak elsajátítási folyamata*, PhD disszertáció, Budapest
9. Berta T. (2003). *Combination of traditional and computer based tools in mathematics education*, ZDM 35(1), 2-6.
10. Božek, M. (1990). *Základy geometrie v priestore*, SPN, Bratislava
11. Bruner, J. S. (1968). *Az oktatás folyamata*, Tankönyvkiadó, Budapest
12. Buchberger, B. (1989). *Should Students Learn Integration Rules?* RISC-Linz Series no. 89-07.0, 10-17.
13. Czapáry E. – Czapáry E. (2002). *Útmutató és tanmenetjavaslat*, Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest
14. Czegléd I. (1988). *Matematikai fogalomrendszerek tanítása*, Acta Academiae Pedagogicae Nyíregyháziensis, Matematika, 105-113.
15. Czegléd, I. és mtsai (2005). *Tanmenet*, Műszaki Könyvkiadó, Budapest
16. Csapó B. (szerk.) (2002). *Az iskolai tudás*, Osiris Kiadó, Budapest
17. Csiba P. (2005). *Számítógépek a matematika oktatásában*, II. Felvidéki Matematikai Szakmódszertani Doktorandusz Konferencia

- Konferenciakötete, Pont Társadalomtudományi folyóirat 1. – Matematikai Szakmódszertani különszám
18. D. Balogh I. (2002). *Problémamegoldás, alkalmazás és tudásátvitel a középiskolában*, Iskolakultúra, 1, 51-61.
 19. Danihelová, H. (2000). *Maturita po novom - Zborník z celoslovenského seminára*, Metodické centrum mesta Bratislavy, Bratislava
 20. Elschenbroich, H.-J. (1999). *Anschaulich(er) Beweisen mit dem Computer?* B. G. Teubner Stuttgart, Leipzig, 61-68.
 21. Fehér P. *Konstruktív pedagógiai kísérletek számítógéppel*, <http://felis.elte.hu/dept/hu/edu.jegyzet.html>
 22. Földes P. (2001). *Informatika az innovatív pedagógiai gyakorlatban*, Új Pedagógiai Szemle, <http://www.oki.hu>
 23. Frei L. (2004). *Az általános iskolai geometriatudás és a rajzkészség fejlődése*, Iskolakultúra, 11, 17-28.
 24. French, T. E. – Vierck, C. J. (1978). *The Fundamentals of Engineering Drawing and Graphic Technology*, McGraw-Hill Book Company, New York
 25. Gardner, H. (1983). *Frames of mind: the theory of multiple intelligences*, Basic Books, New York
 26. Gavora, P. (2001). *Úvod do pedagogického výskumu*, UK, Bratislava
 27. Gawlick, T. (szerk.) (2000a). *Lernprozesse mit Dynamischer Geometrie-Software*, Vechtaer Fachdidaktische Forschungen Und Berichte, Heft 3, Hochschule Vechta
 28. Gawlick, T. (2000b). *DGS – quo vadis?* Gawlick (2000a)-ban
 29. Gawlick, T. (2002). *On Dynamic Geometry Software in the Regular Classroom*, ZDM 34(3), 85-92.
 30. Graumann, G. és mtsai (1996). *Tendenzen der Geometriedidaktik der letzten 20 Jahre*, Journal für Mathematik-Didaktik, 17(3-4), 163-237.
 31. Haanstra, F. H. (1994). *Effects of art education on visual-spatial and aesthetic perception: two meta-analysis*, Rijksuniversiteit Groningen, Groningen
 32. Hanula, M. (2001). *Vzdelávací štandard s exemplifikačnými úlohami z matematiky pre gymnázium – štvorročné štúdium*, ŠPÚ, Bratislava
 33. Hejný, M. és mtsai (1989). *Teória vyučovania matematiky*, SPN, Bratislava
 34. Heugl, H. (1996). *Symbolic computation systems in the classroom*, The International Derive Journal, 3(1), 1-10.

35. Horváth Gy. (1984). *A tartalmas gondolkodás*, Tankönyvkiadó, Budapest
36. Horváth J. – Kiss A. – Horváth L. (1991). *Néhány gondolat a térszemlélet fejlesztéséről*, Szombathelyi Berzsenyi Dániel Tanárképző Főiskola Tudományos Közleményei, VIII. Módszertani dolgozatok, Szombathely
37. Hölzl, R. (1995). *Eine empirische Untersuchung zum Schülerhandeln mit Cabri-Géomètre*, Journal für Mathematik-Didaktik, 16(1-2), 79-113.
38. Hölzl, R. (1994). *Im Zugmodus der Cabri-Geomètrie*, Deutscher Studien-Verlag, Weinheim
39. Hölzl, R. (2001). *Using dynamic geometry software to add contrast to geometric situations – a case study*, International Journal of Computers for Mathematical Learning, 6, 63-86.
40. Huszár Zs. (2005). *Információs kompetenciát igénylő új műfajok mint válaszkísérletek a tömegoktatás módszertani problémáira*, Informatika a Felsőoktatásban 2005, 216-217.
41. Jones, K. (1999). *Students interpretations of a Dynamic Geometry Environment*, European Research in Mathematics Education, 249-262.
42. Kárpáti A. (2003). *Az informatika hatása az iskola szervezésére, kommunikációs és oktatási-nevelési kultúrájára*, Új Pedagógiai Szemle, 5, 38-49.
43. Kárpáti A. (2001). *Az informatikai kompetencia fejlesztése*, Új Pedagógiai Szemle, 7-8, 63-68.
44. Kárpáti A. *Sulinet – Pedagógia világszerte – tananyag az önálló tanuláshoz*, http://edutech.elte.hu/multiped/szst_02/szst_02.pdf
45. Kárteszi F. (1972). *A geometriatanítás korszerűsítéséről*, Tankönyvkiadó, Budapest
46. Kirby, J. R. – Boulter, D. R. (1997). *Spatial ability and transformational geometry*, Paper presented at the European Association for Research in Learning and Instruction, Athens, 11.
47. Kis P. *A matematikai programcsomagok alkalmazása, haszna és veszélyei*, <http://ip.gallup.hu/szak/matek.htm>
48. Kortenkamp, U. H. (1999). *Euklidische und Nicht-Euklidische Geometrie in Cinderella*, Institut für Theoretische Informatik Zürich
49. Kortenkamp, U. H. (1999). *Foundations of Dynamic Geometry*, Ph. D. Thesis, Swiss Federal Institute of Technology Zürich
50. Kortenkamp, U. H. – Richter-Gerber, J. *Geometry and education in the internet age*, <http://www.cinderella.de>
51. Kosztolányi J. (2003). *Tanmenet*, Mozaik Kiadó, Szeged

52. Kosztolányi J. (2000). *Tantárgyi tanterv a kerettanterv alapján készülő helyi tantervekhez. Matematika 9-12. évfolyam*, Mozaik Kiadó, Szeged
53. Kovács, A. Zs. (2005). *Dependency structure based dynamic descriptive geometry*, Konstruktív Geometria Konferencia, Balatonföldvár,
<http://www.math.bme.hu/~kongeo/konf05/abstracts.pdf>
54. Kovács E. (1999). *Az ábrázoló geometria számítógéppel segített oktatásának tapasztalatai*, Informatika a Felsőoktatásban '99 Országos Konferencia, Debrecen, 828-833.
55. Kovács, E. – Hoffmann, M. (1997). *Computer Aided Teaching of Descriptive Geometry*, Conference on Applied Informatics, Eger-Nosztvaj, 179-183.
56. Laborde, C. (2001). *Integration of technology in the design of geometry tasks with Cabri-geometry*, International Journal of Computers for Mathematical Learning, 6, 283-317.
57. László I. (2003). *Dinamikus geometriai rendszerek összevetése felhasználói (és fejlesztői) szemmel*, Cseresznyeérési Konferencia, Pollack Mihály Műszaki Főiskolai Kar, Pécs
58. László I. (2005). *Szingularitások és kezelésük a dinamikus geometriai rendszerekben*, <http://xml.inf.elte.hu/~mathdid>
59. Lavicza Zs. (2003). *A dinamikus geometriai- és a számítógép algebrái rendszerek alkalmazásainak vizsgálata a Michigan Egyetemen*, Cseresznyeérési Konferencia, Pollack Mihály Műszaki Főiskolai Kar, Pécs
60. Lénárd F. (1971). *A problémamegoldó gondolkodás*, Akadémiai Kiadó, Budapest
61. Lord, T. R. (1985). *Enhancing the visuo-spatial aptitude of students*, Journal of Research in Science Teaching, 22(5), 395-405.
62. Magyar Gallup Intézet (2002). *Pedagógusok a digitális, információs tudásszerzés szükségességéről és új módjairól*,
<http://ip.gallp.hu/kutat/isk030201.pdf>
63. Maier, P. H. (1998). *Spatial geometry and spatial ability – How to make solid geometry solid? Cohors-Fresenborg és mtsai (szerk.): Selected Papers from the Annual Conference of Didactics of Mathematics*, Osnabrueck, 63-75.
64. Molnár Gy. (2001). *Az életszerű feladat-helyzetekben történő problémamegoldás vizsgálata*, Magyar Pedagógia, 3, 347-372.
65. Nagy J. (1979). *Köznevelés és rendszerszemlélet*, OOK Veszprém

66. Nagy-Kondor, R. (2004). *Dynamic geometry systems in teaching geometry*, Teaching Mathematics and Computer Science, 2/1, 67-80.
67. Nagy-Kondor, R. (2007). *The background of students' performance*, Teaching Mathematics and Computer Science, 4/2, 295-305.
68. Nagyné Kondor R. (2005). *Dinamikus geometriai rendszer a mérnök hallgatók oktatásában*, II. Felvidéki Matematikai Szakmódszertani Doktorandusz Konferencia Konferenciakötete, Pont Társadalomtudományi folyóirat 1. – Matematikai Szakmódszertani különszám, 1-7.
69. Nagyné Kondor R. (2006). *Összehasonlító geometria*, Debreceni Műszaki Közlemények, 1, 63-73.
70. Negroponte, N. – Resnick, M. – Cassell, J. (1997). *Creating a Learning Revolution*,
<http://www.unesco.org/education/educprog/lwf/doc/portfolio/opinion8.htm>
71. Noss, R. – Hoyles, C. (1996). *Windows on Mathematical Meanings: Learning Cultures and Computers*, Kluwer Academic, Dordrecht
72. Pea, R. D. (1985). *Beyond Amplification: Using the Computer to Reorganise Mental Functioning*, Educational Psychologist, 20(4), 167-182.
73. Perelman, J. I. (1953). *Szórakoztató geometria*, Művelt Nép Könyvkiadó, Budapest
74. Perjésiné Hámosi I. (2003). *Az Internet és a komputer-algebrai rendszerek bevezetése gépészmérnökök matematika oktatásába*, PhD disszertáció, Debrecen
75. Piaget, J. (1993). *Az értelem pszichológiája*, Gondolat Kiadó, Budapest
76. Pólya Gy. (1969). *A gondolkodás iskolája*, Gondolat Kiadó, Budapest
77. Pólya Gy. (1985). *A problémamegoldás iskolája*, Tankönyvkiadó, Budapest
78. Povey, H. – Ransom, M. (2000). *Some undergraduate students' perceptions of using technology for mathematics: Tales of resistance*, International Journal of Computers for Mathematical Learning, 5, 47-63.
79. Richter-Gerbert, J. (1999). *The interactive software Cinderella*, Springer
80. Richter-Gerbert, J. – Kortenkamp, U. H. (2000). *Benutzerhandbuch für die interaktive Geometrie-Software Cinderella Version 1.2*, Springer

81. Rogers, E. M. (1995). *Diffusion of innovations*, Free Press, New York
82. Sárvári Cs. (2001). *A számítógép-algebrai rendszerek szerepe a matematikai gondolkodás fejlesztésében*, Iskolakultúra, 3, 20-27.
83. Séra L. – Kárpáti A. – Gulyás J. (2002). *A térszemlélet*, Comenius Kiadó, Pécs
84. Shea, D. L. – Lubinski, D. – Benbow, C. P. (2001). *Importance of assessing spatial ability in intellectually talented young adolescents: A 20-year longitudinal study*, Journal of Educational Psychology, 93, 604-614.
85. Sik-Lányi, C. – Lányi, Zs. – Tilinger, Á. (2003). *Using Virtual Reality to Improve Space and Depth Perception*, Journal of Information Technology Education, 2, 291-303.
86. Skemp, R. R. (1975). *A matematikatanulás pszichológiája*, Gondolat Kiadó, Budapest
87. Somfai Zs. *A problémamegoldó kompetencia fejlesztése*, <http://www.oki.hu/oldal.php?tipus=cikk&kod=Hidak-Problemamegoldo>
88. Szalay S. (szerk.) (2003). *Informatikai eszközök a matematika oktatásában*, Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest
89. Számadó L. – Békéssy Sz. (2002). *Útmutató és tanmenetjavaslat*, Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest
90. Szőkefalvi Nagy Gy. (1968). *A geometriai szerkesztések elmélete*, Akadémiai Kiadó, Budapest
91. Tompa K. (2001). *A matematika érettségi eredményeinek elemzése*, Iskolakultúra, 9, 108-115.
92. Tóth L. (2000). *Pszichológia a tanításban*, Pedellus Tankönyvkiadó, Debrecen
93. *Učebné osnovy gymnázia – štvorročné štúdium*, Ministerstvo školstva Slovenskej republiky, číslo 155/99-41, Bratislava, (1999).
94. *Učebné osnovy gymnázia – osemročné štúdium*, Ministerstvo školstva Slovenskej republiky, číslo 1797/97-15, Bratislava (1997).
95. Urbán J. (2004). *Tanmenet*, Mozaik Kiadó, Szeged
96. Vancsó Ö. (2005). *Tanmenet*, Műszaki Könyvkiadó, Budapest
97. Vaníček, J. (1999). *Experience of the Preparation of Mathematics Teacher Students With CAL of Constructive Geometry*, Sborník příspěvků Medacta99. Nitra: UKF, 144-149.
98. Varga L. (1999). *Térszemlélet-fejlesztés kockával kapcsolatos feladatokkal*, JGYF Kiadó, Szeged
99. Vásárhelyi É. *A geometriai térszemlélet fejlesztése dinamikus geometriai programmal*,

- <http://ikon.inf.elte.hu/~kid/ELEMIMAT/BLOKK2003/terszemlelet/TERSZEML.HTML>
100. Vásárhelyi É. (2002). *A számítógép a matematika oktatásában*, Országos Közoktatási Intézet, Budapest, <http://xml.inf.elte.hu/~mathdid>
 101. Vásárhelyi É. *A számítógéppel segített tanulás gyakorlata*, <http://xml.inf.elte.hu/~mathdid>
 102. Vásárhelyi É. *A vizuális reprezentáció fontossága a matematika-oktatásban*, <http://ikon.inf.elte.hu/~kid/ELEMIMAT/BLOKK2003/vizualis/VIZUALIS.HTML>
 103. Vásárhelyi É. (szerk.) (1998). *Cabri geometria*, Kézikönyv a Cabri-geomètre interaktív geometria jegyzet 1.8-as magyar változatához, Bolyai János Matematikai Társulat, Budapest
 104. Vigotszkij, L. Sz. (1971). *Gondolkodás és beszéd*, Akadémiai Kiadó, Budapest
 105. Vincze I. (2001). *Tanmenet*, Mozaik Kiadó, Szeged
 106. Vinner, S. (1983). *Concept definition, concept image and the notion of function*, International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 14(3), 293-305.
 107. Vogel, H. (1999). *Aspekte zum Einsatz Dynamischer Geometrie Software im Unterricht*, 4th International Conference on Applied Informatics, Eger-Noszvaj, 179-186.
 108. Warneke, K. (2000). *Zum geplanten Unterricht mit und ohne Dynamische Geometrie-Software (DGS)*, In Gawlick (2002a)
 109. Wilson, B. G. (1995). *Metaphors for Instruction: Why we talk about learning environments*, Educational Technology, 35(5), 25-30.
 110. Wurnig, O. (2002). *Hogyan integráljuk a matematikaoktatásba a számítógépalgebrai rendszereket kézi számítógépek (TI-89/82) felhasználásával*, International Symposium Anniversary of Pollack Mihály Engineering Faculty, Pécs, 1-13.
 111. Zeke É. A. (szerk.) (2005). *Debreceni Egyetem Műszaki Főiskolai Kar, Jubileumi Évkönyv, 40 év*
 112. Descriptive geometry program: <http://www.volny.cz/plavjanik/dge.html>
 113. Java applet az ábrázoló geometriához: <http://www.math.bme.hu/~szilvasi>
 114. Konferenciák a Pécsi Egyetem Pollack Mihály Műszaki Főiskolai Karán: http://matserv.pmmf.hu/index.php?menu=konf_arc_hu
<http://matserv.pmmf.hu/cadgme>

115. Oktatási segédlet a Szent István Egyetem Ybl Miklós
Építéstudományi Karán: <http://www.asz.ymmf.hu/>

Néhány ismertebb DGS:

Cabri Geometry, <http://www.cabri.com>

Cinderella, <http://www.cinderella.de>

Euklides, <http://www.euklides.hu>

GeoGebra, <http://www.geogebra.at>

Geometer's Sketchpad, <http://www.keypress.com/sketchpad/index.html>

A szerző publikációs jegyzéke:

Referált nemzetközi folyóiratban megjelent cikkek

- [1] Nagy-Kondor, R. (2004). *Dynamic geometry systems in teaching geometry*, Teaching Mathematics and Computer Science, 2/1, 67-80.
- [2] Nagy-Kondor, R. (2005). *Special Characteristics of Engineer Students' Knowledge of Functions*, International Journal for Mathematics Teaching and Learning, 10, 1-9.
- [3] Nagy-Kondor, R. (2007). *The background of students' performance*, Teaching Mathematics and Computer Science, 4/2, 295-305.

Lektorált folyóiratban megjelent cikkek

- [4] Nagyné Kondor R. (2003). *Dinamikus geometriai rendszerek a geometria oktatásában*, Iskolakultúra, 12, 67-73.
- [5] Nagy-Kondor, R. (2005). *The Use of Computer to Increase Efficiency in Education*, Debreceni Műszaki Közlemények, 1, 33-37.
- [6] Nagyné Kondor R. (2006). *Összehasonlító geometria*, Debreceni Műszaki Közlemények, 1, 63-73.
- [7] Nagy-Kondor, R. (2006). *Computer-aided Search for Point Sets*, Debreceni Műszaki Közlemények, 4, 57-62.
- [8] Nagyné Kondor R. (2006). *Számítógépek a matematikaoktatásban*, Pedagógiai Műhely, 4, 63-66.

Konferenciakiadványban megjelent lektorált cikkek

- [9] Nagyné Kondor R. (2003). *Számítógéppel támogatott interaktív módszerek a geometria tanításában*, XXVI. Országos Tudományos Diákköri Konferencia Konferenciakötete, 129.
- [10] Nagyné Kondor R. (2003). *A Cinderella program használata a geometria tanításában*, Cseresznyeérési Konferencia Konferenciakötete, 1-16.
- [11] Nagyné Kondor R. (2005). *Dinamikus geometriai rendszer a mérnök hallgatók oktatásában*, II. Felvidéki Matematikai Szakmódszertani Doktorandusz Konferencia Konferenciakötete, Pont Társadalomtudományi folyóirat 1. – Matematikai Szakmódszertani különszám, 1-7.

Lektorált jegyzetek, oktatási segédletek

- [12] Nagyné Kondor R. (2003). *Válogatott zárthelyi feladatok matematikából*, DE MFK
- [13] Nagyné Kondor R. (2003). *Válogatott zárthelyi feladatok matematikából Megoldások*, DE MFK
- [14] Kocsis I. – Nagyné Kondor R. (2007). *Lineáris programozás a gyakorlatban*, DE ATC MK

Nemzetközi konferencián tartott előadások

- [15] Nagy-Kondor, R. (2004). *Characteristics of knowledge in functions application at engineer students*, Varga Tamás Days on Mathematics Education, Budapest
- [16] Nagyné Kondor R. (2004). *Dinamikus geometriai rendszer a mérnök hallgatók oktatásában*, II. Felvidéki Matematikai Szakmódszertani Doktorandusz Konferencia, Révkomárom, Szlovákia

Egyéb konferencián tartott előadások

- [17] Nagyné Kondor R. (2003). *A Cinderella program használata a geometria tanításában*, Cseresznyeéri Konferencia, PMMF, Pécs
- [18] Nagyné Kondor R. (2003). *Számítógéppel támogatott interaktív módszerek a geometria tanításában*, OTDK, Kecskemét

Referált nemzetközi folyóirathoz benyújtott cikkek

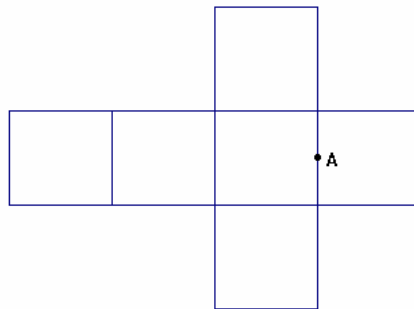
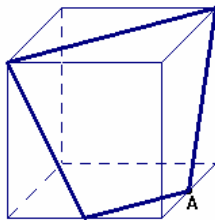
- [19] Bosnyák, Á. – Nagy-Kondor, R. *The spatial ability and spatial geometrical knowledge of university students majored in mathematics*, Acta Didactica Universitatis Comenianae (közlésre benyújtva)
- [20] Nagy-Kondor, R. *The results of a delayed test*, The International Journal for Technology in Mathematics Education (közlésre benyújtva)
- [21] Nagy-Kondor, R. *Using dynamic geometry software at technical college*, Mathematics and Computer Education (közlésre benyújtva)

10. Függelékek

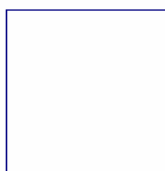
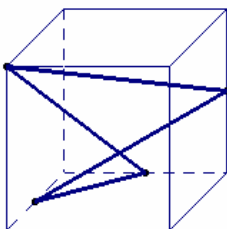
10.1. 1. függelék

Az összehasonlító felmérés feladatai:

- 1. feladat:** A feladatlapon látható testet egy síklappal metszettük el. A metszési vonalakat vastag, folytonos vonallal jelöltük be a test felszínén. Rajzolja be a test kiterített hálójába a sík és a felület metszési vonalait! A síkmetszet egy pontjának megfelelőjét a hálóba is berajzoltuk.



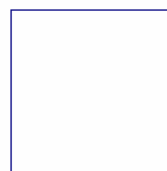
- 2. feladat:** A feladat egy kocka belsejébe beépített drótvázás alakzat axonometrikus képét tartalmazza. Az alakzat csúcspontjai egyben a befoglaló kocka csúcsai vagy oldalfelező pontjai. Hogyan látszik ez az alakzat előlről, felülről és jobbról?



Előlről

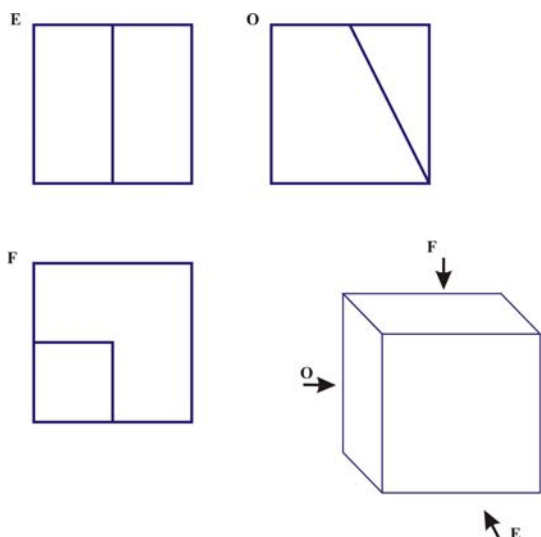


Felülről

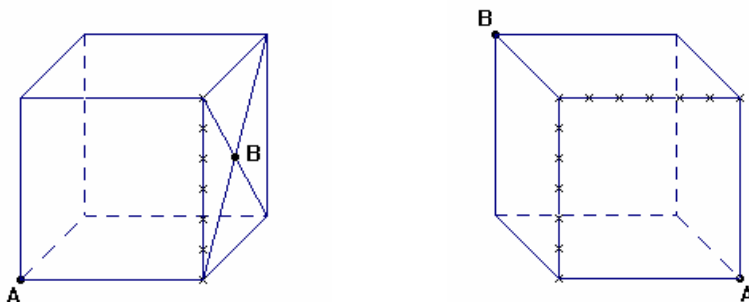


Jobbról

3. feladat: Az ábrán egy síklapokkal csonkolt test vetületi képe látható. Rekonstruálja a testet a látszati képe megrajzolásával! Csak a látható éleket rajzolja meg!

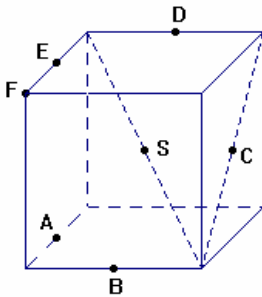


4. feladat: A feladatlapon látható testek élei egyenlő hosszúságúak. Egy katicabogár szeretne eljutni a testek felszínén a lehető legrövidebb úton A pontból a B pontba. Az x-szel megjelölt élpontok melyikén kell áthaladnia? A megoldást indokolja!

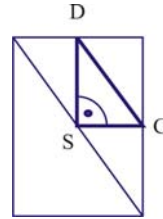


- 5. feladat:** A kockába berajzolt pontok a kockák csúcspontjai, oldalfelező pontjai, lapközepppontja vagy a testátló felezőpontja. Milyen síkidomot kapunk, ha a megadott pontokat összekötjük? Rajzolja le a síkidomokat!

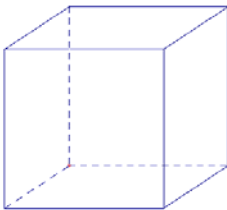
Mintafeladat: SCD - derékszögű háromszög



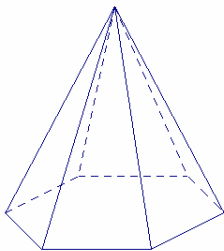
BAF
 SEF
 $BSD = ?$
 FDC
 EAC



- 6. feladat:** Adott az $ABCDEFGH$ a élhosszúságú kocka. Határozza meg az E pont távolságát a BDG síktól!



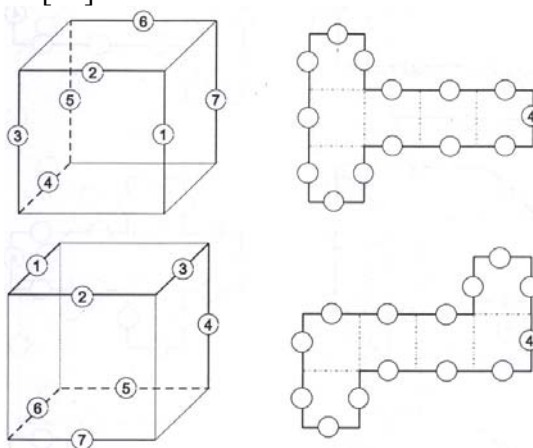
- 7. feladat:** Egy $ABCDEFV$ szabályos hatoldalú gúla méretei: $|AB| = a = 4$ cm,
 $|AV| = b = 6$ cm. Határozza meg a gúla oldallapja és alaplaja által bezárt szög nagyságát!



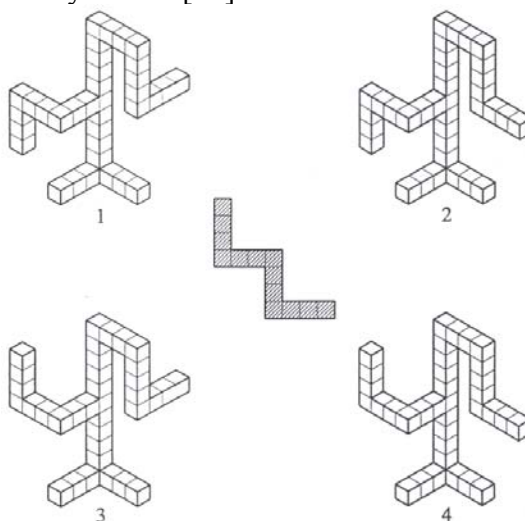
10.2. 2. függelék

Az előzetes felmérés feladatai:

1. Egy kocka hálózátát határolóvonala mentén körülvágtuk, majd a hajlítások elvégzése után az egymás mellé kerülő „vágásvonalakat” összeragasztottuk. Az így keletkezett kocka axonometrikus rajzán a „ragasztott” éleket vastag vonallal jelöltük és megszámoztuk. Jelölje a hálózaton azonos számmal a ragasztáskor egymás mellé kerülő „vágásvonalakat”! [98]



2. A képen látható testek közül melyik számozott test fér át a vonalkézással jelölt nyíláson? [98]

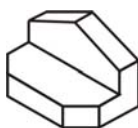


3. Párosítsa össze a testeket és a vetületi képeket! [24]

1



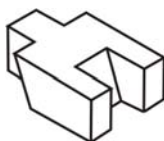
2



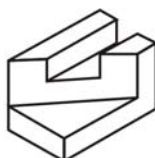
3



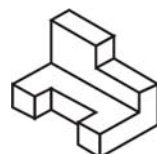
4



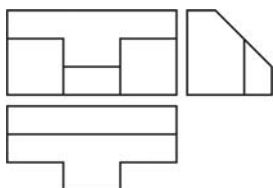
5



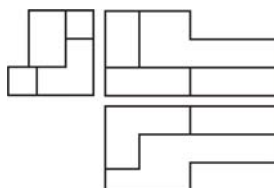
6



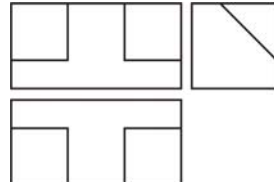
a



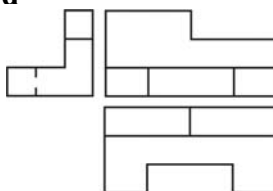
b



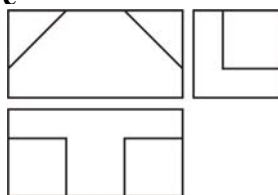
c



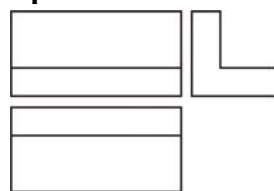
d



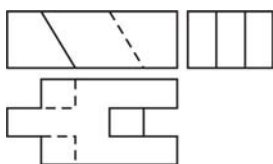
e



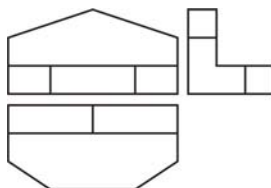
f



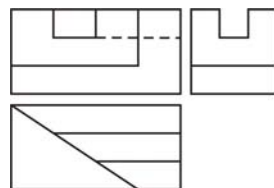
g



h

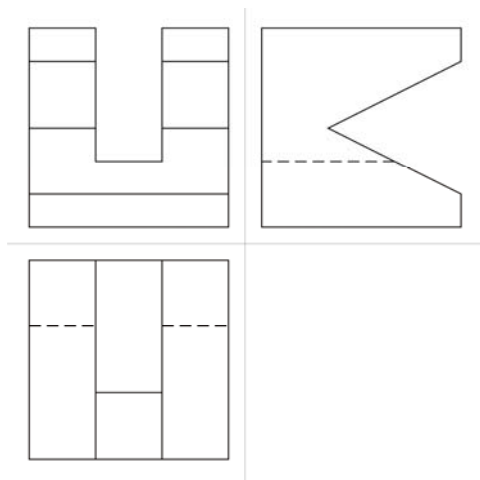


i

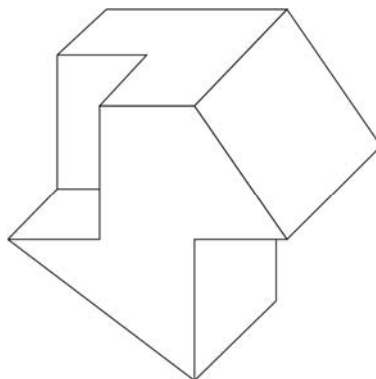


1	
2	
3	
4	
5	
6	

4. Készítsen szemléletes rajzot a vetületek alapján!



5. Készítse el a megadott test vetületeit!



Az előzetes felmérés pontozása:

$$\begin{array}{l} 1. \quad 1. \text{ ábrán jó megoldásonként: } 1 \text{ Pont (13-szor)} \\ \quad 2. \text{ ábrán jó megoldásonként: } \frac{1 \text{ Pont (13-szor)}}{26 \text{ Pont}} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 2. \quad \text{Jó megoldásonként: } 2 \text{ Pont (2-szer)} \\ \quad (\text{Hibás megoldásonként 2 Pont levonás}) \frac{}{4 \text{ Pont}} \end{array}$$

$$3. \quad \text{Jó megoldásonként: } \frac{1 \text{ Pont (6-szor)}}{6 \text{ Pont}}$$

$$4. \quad \text{Helyes megoldás: } \frac{6 \text{ Pont}}{6 \text{ Pont}}$$

Kisebb pontatlanság, helytelen arányok esetén csak részpontot kaphat.

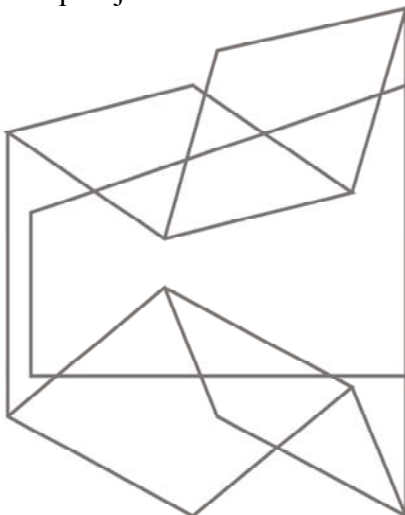
$$5. \quad \text{Vetületenként: } \frac{1 \text{ Pont (3-szor)}}{3 \text{ Pont}}$$

Arányokban való eltérés esetén is megkapja a pontot.

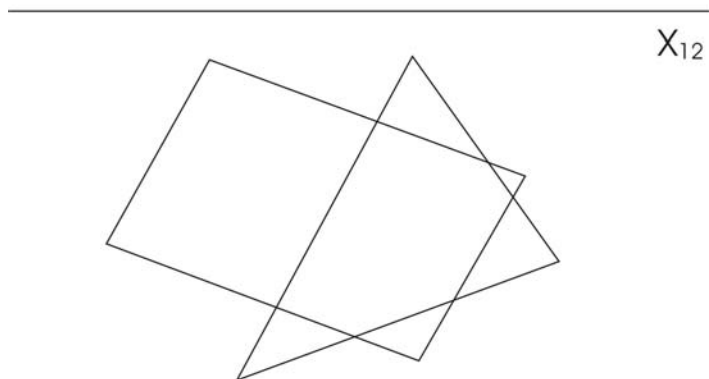
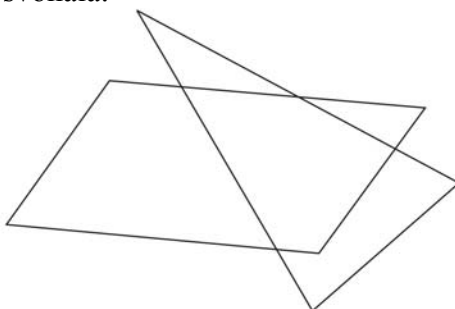
10.3. 3. függelék

Az első dolgozat feladatai:

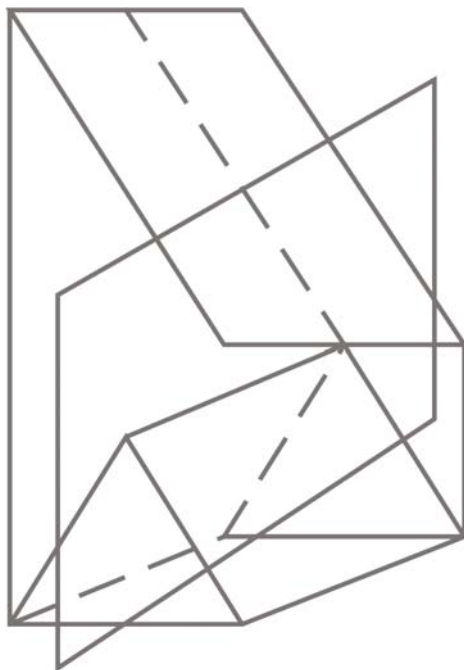
1. Síkok és egyenes döféspontja:



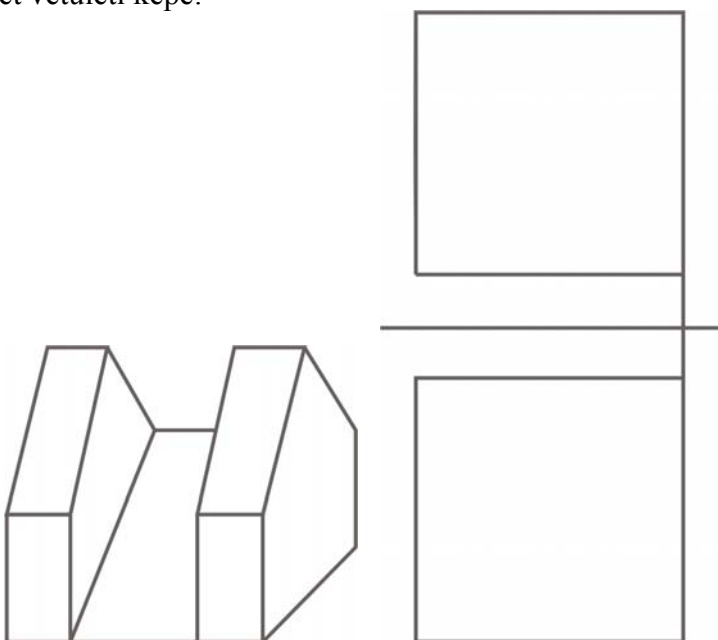
2. Két sík metszésvonala:



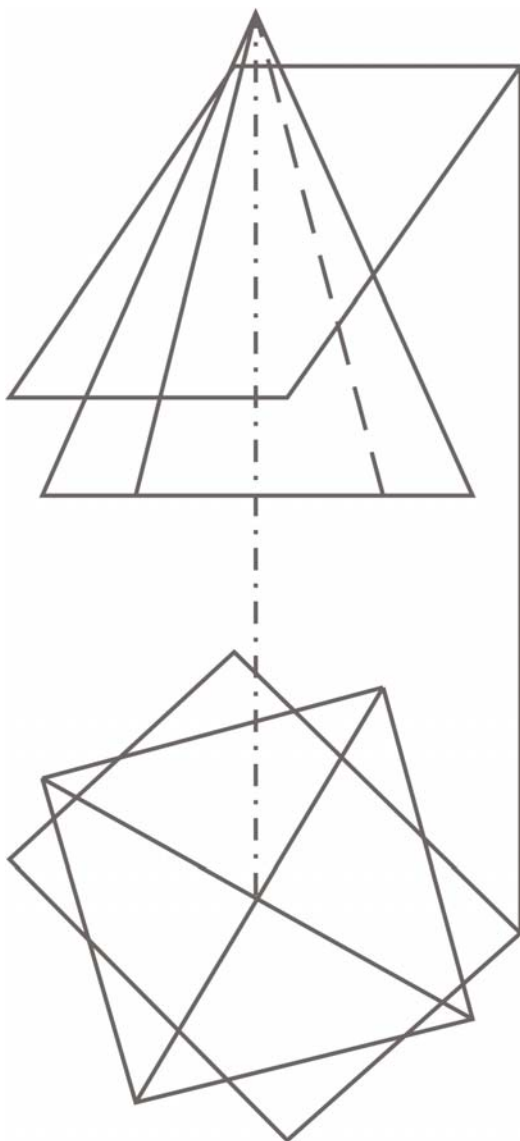
3. Hasáb és egyenes metszéspontjai:



4. Test két vetületi képe:



5. Gúla síkmetszete:



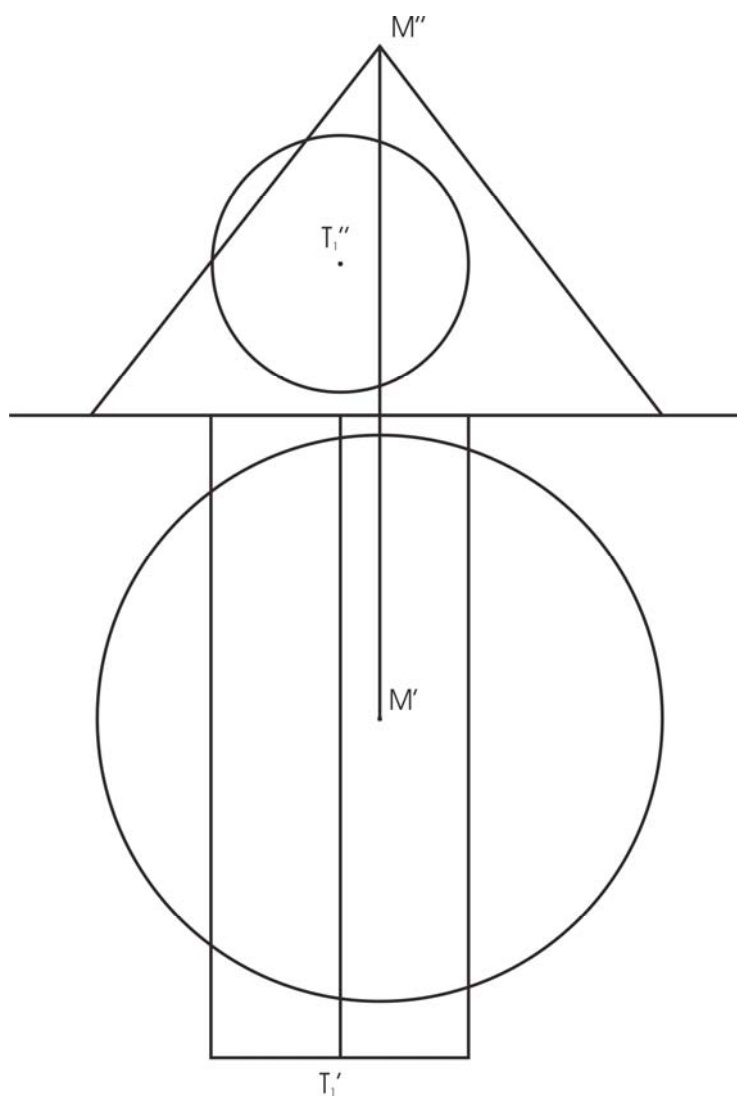
Az első dolgozat pontozása:

1.	D1 szerkesztése:	2	Pont
	D2 szerkesztése:	2	Pont
	I. képen láthatóság:	5	Pont
	II. képen láthatóság:	5	Pont
		<u>14</u>	Pont
2.	D1 szerkesztése:	2	Pont
	D2 szerkesztése:	2	Pont
	I. képen láthatóság:	4	Pont
	II. képen láthatóság:	4	Pont
		<u>12</u>	Pont
3.	Vetítősík illesztése az egyenesre:	1	Pont
	Síkmetszet meghatározása:	3	Pont
	D1 szerkesztése:	1	Pont
	D2 szerkesztése:	1	Pont
	I. képen láthatóság:	2	Pont
	II. képen láthatóság:	2	Pont
		<u>10</u>	Pont
4.	I. kép:	3	Pont
	II. kép:	3	Pont
		<u>6</u>	Pont
5.	Gúla transzformációja:	3	Pont
	Sík transzformációja:	2	Pont
	Metszéspontok IV. képe a gúla alkotóin:	1	Pont
	Metszéspontok IV. képe az alaplapon:	2	Pont
	Metszéspontok I. képe:	5	Pont
	Metszéspontok II. képe:	5	Pont
	I. képen láthatóság:	4	Pont
	II. képen láthatóság:	6	Pont
		<u>28</u>	Pont

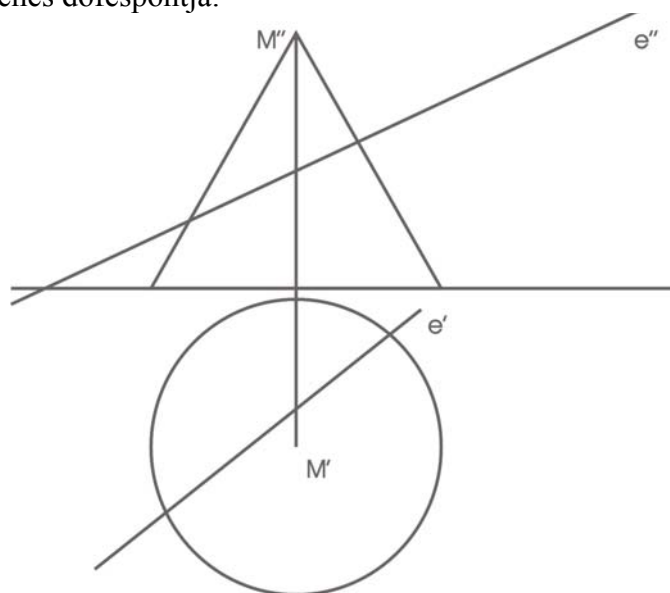
10.4. 4. függelék

A második dolgozat feladatai:

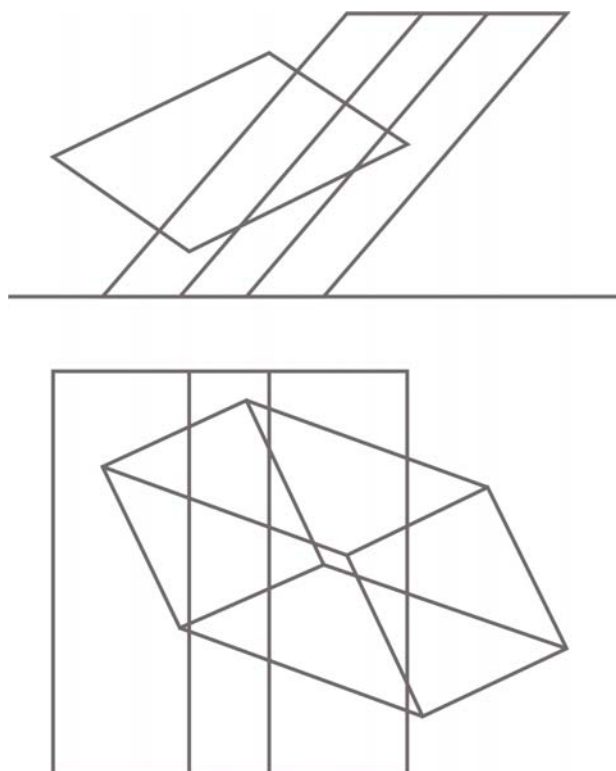
1. Kúp és henger áthatása:



2. Kúp és egyenes dőléspontja:



3. Két hasáb áthatása. Láthatóság a vízszintes hasáb eltávolítása után:



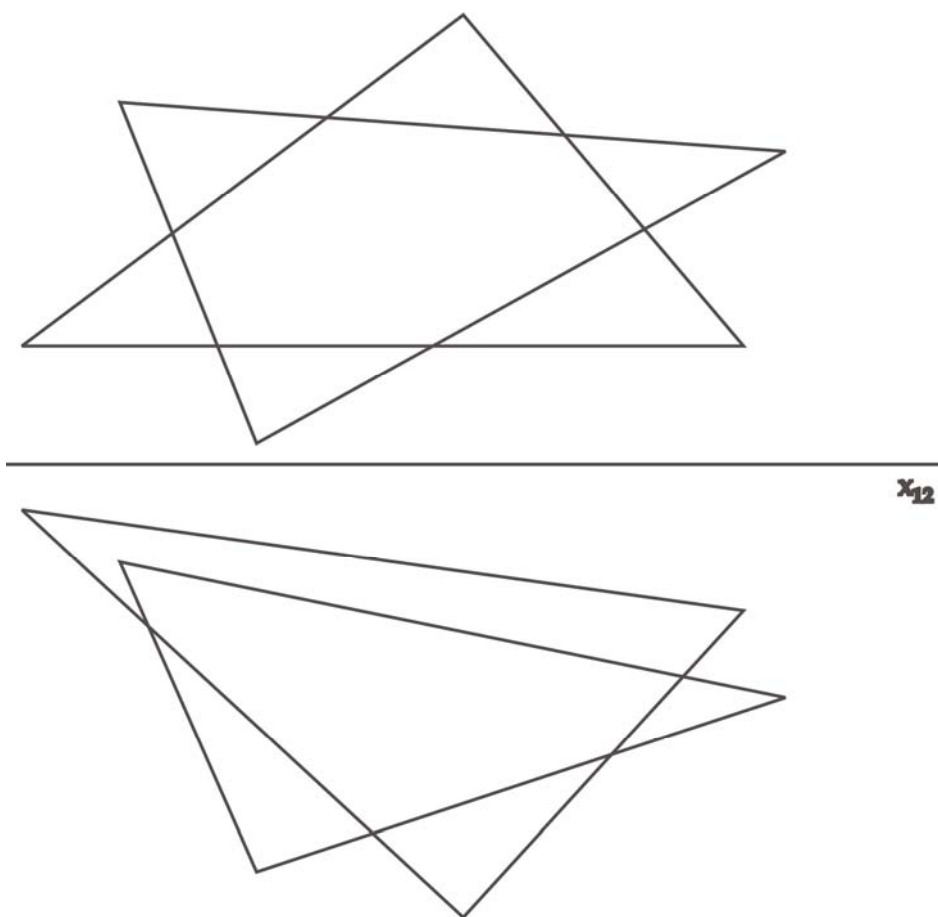
A második dolgozat pontozása:

1.	Kontúrpontok a II. képen:	6	Pont
	Kontúrpontok az I. képen:	12	Pont
	Általános áthatási pontok:	6	Pont
	I. képen láthatóság:	6	Pont
		<u>30</u>	<u>Pont</u>
2.	Nyompont I. képe:	2	Pont
	Segédegyenes I. képe:	4	Pont
	Segédegyenes II. képe:	2	Pont
	Nyomvonal I. képe:	3	Pont
	Alkotók:	2	Pont
	D1, D2 szerkesztése:	3	Pont
	I. képen láthatóság:	2	Pont
	II. képen láthatóság:	2	Pont
		<u>20</u>	<u>Pont</u>
3.	I. képen rögtön szerkeszthető áthatási pontok:	6	Pont
	I. képen segédsíkkal szerkeszthető áthatási pontok:	8	Pont
	Összekötési háló:	5	Pont
	Összekötés:	2	Pont
	I. képen láthatóság:	8	Pont
	II. képen láthatóság:	1	Pont
		<u>30</u>	<u>Pont</u>

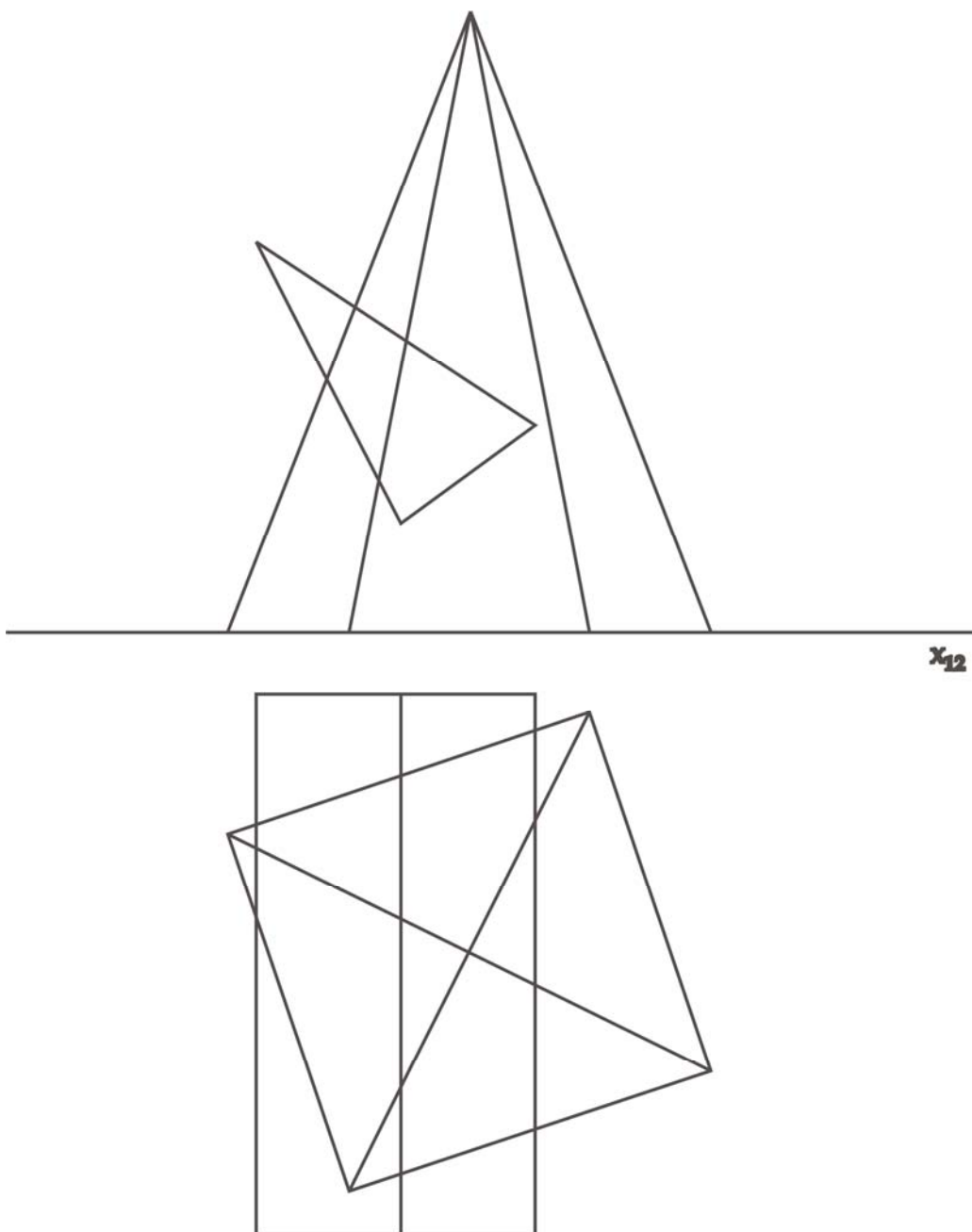
10.5. 5. függelék

A késleltetett felmérés feladatai:

1. Vegyen fel pontot és egyenest 3 ponttal megadott síkon Monge-projekcióban!
2. Szerkessze meg a két sík metszésvonalát!



3. Szerkessze meg a síklapú testek áthatását!



A késleltetett felmérés pontozása:

1. Síkon egyenes, pont felvétele: $\frac{1 \text{ Pont}}{1 \text{ pont}}$

2. D1 szerkesztése: 1 Pont
D2 szerkesztése: 1 Pont
I. képen láthatóság: 1 Pont
II. képen láthatóság: $\frac{1 \text{ Pont}}{4 \text{ Pont}}$

3. I. képen rögtön szerkeszthető áthatási pontok: 2 Pont
I. képen segédsíkkal szerkeszthető áthatási pontok: 2 Pont
Összekötési háló, összekötés: 1 Pont
I., II. képen láthatóság: $\frac{2 \text{ Pont}}{7 \text{ Pont}}$

10.6. 6. függelék

A kérdőív:

1. Mi a véleménye a számítógépes ábrázoló geometria /műszaki ábrázolás/ órákról?
2. Tanórákon kívül van-e Internet hozzáférése?
3. Hányszor kereste fel a honlapot, amelyről órákon dolgoztunk és milyen célból?
4. Milyen számítógépes szerkesztő programot használt már?
5. Van-e valamilyen javaslata a számítógépes ábrázoló geometria /műszaki ábrázolás/ órákkal kapcsolatban?

DINAMIKUS GEOMETRIAI RENDSZER BEVEZETÉSE A GÉPÉSZMÉRNÖK HALLGATÓK MŰSZAKI ÁBRÁZOLÁS OKTATÁSÁBA

Értekezés a doktori (Ph.D.) fokozat megszerzése érdekében
a matematika tudományágban

Írta: Nagyné Kondor Rita
okleveles matematika-ábrázoló geometria-informatika szakos tanár

Készült a Debreceni Egyetem Matematika és Számítástudományok doktori iskolája
(Matematika-didaktika programja) keretében

Témavezető: Dr. Kovács Zoltán

A doktori szigorlati bizottság:

elnök:	Dr.	
tagok:	Dr.	
	Dr.	

A doktori szigorlat időpontja: 200...

Az értekezés bírálói:

Dr.	
Dr.	
Dr.	

A bírálóbizottság:

elnök:	Dr.	
tagok:	Dr.	
	Dr.	
	Dr.	
	Dr.	

Az értekezés védésének időpontja: 200...