Doktori (PhD) értekezés tézisei

Valószínűségi modellek aszimptotikus tulajdonságai

Fórián László
Témavezető: Prof. Dr. Fazekas István

Debreceni Egyetem
Informatikai Tudományok Doktori Iskola
Debrecen, 2026

Bevezetés

A disszertációban aszimptotikus eredményeket mutattunk be néhány valószínűségi modellre vonatkozóan.

Az eredmények egy része a hálózatelmélethez kapcsolódik. Ez az elmélet hatalmas fejlődésen ment át Barabási Albert-László úttörő cikkei nyomán [2]. A kutatások során egyrészt modelleket vizsgáltak matematikai eszközökkel, másrészt empirikusan is elemezték a nagy hálózatokat. Mi a disszertációban az előbbihez, a matematikai módszerhez csatlakoztunk.

A hálózatelméletben általában időben változó gráfokat alkalmaznak modellek leírására. Lényegesen különbözőek a módszerek akkor, ha az időt diszkrétnek tekintik, illetve ha folytonosnak.

A disszertációban abból a tényből indulunk ki, hogy egy szociális hálózatban általában vannak egymással szorosan együttműködő kis csoportok. Ezeket mi klikkekkel, azaz olyan részgráfokkal írjuk le, amelyekben bármely két csúcsot él köt össze.

Bevezettünk két új hálózatfejlődési modellt, amelyek klikkeken alapulnak. Először vizsgáltunk egy folytonos idejű, általános, többtípusú Crump-Mode-Jagers-féle elágazó folyamat által vezérelt modellt. Az elágazó folyamat szempontjából az egyedek a klikkek, egyedek típusát a klikkméret adta. Aszimptotikus tételeket bizonyítottunk a klikkek számára vonatkozólag, illetve a kihalás valószínűségére is kaptunk eredményt.

Másrészt diszkrét idejű hálózatfejlődési modelleknek egy paraméteres családját is tanulmányoztuk. A gráf fejlődése itt k-klikkek konstrukcióján és törlésén alapult. Martingálelméleti módszerekkel kaptunk hagyományos és funkcionális határérték-tételeket.

Mindkét fenti esetben pontos matematikai bizonyításokat adtunk, de szimulációs kísérletekkel is alátámasztottuk az eredményeket.

Klasszikus terület az érmedobási kísérlet, és ebben a leghosszabb tiszta fej sorozat vizsgálata. Itt a kezdeti eredményeket olyan nagy magyar tudósok érték el, mint Rényi Alfréd, Erdős Pál és Révész Pál. A dolgozatban egy érmedobással kapcsolatos eredményt is bemutattunk: adtunk egy új közelítést a leghosszabb, legfeljebb T-szennyezett fej sorozatok hosszának eloszlására. Itt egyrészt matematikai tételt igazoltunk, másrészt szimulációval is szemléltettük, hogy a mi közelítésünk felülmúlja a korábbi szakirodalmi eredményeket.

1. fejezet

Egy folytonos idejű, N-interakciókat leíró hálózatfejlődési modell

Az 1. fejezet [5] cikkünk eredményeit tartalmazza. Bemutattunk egy folytonos idejű hálózatfejlődési modellt, amely N-interakciókat ír le, így a csúcsok által alkotott klikkeket tekintettük. A modell alapegységei, egyedei a csapatok, azaz $1, 2, \ldots, N$-klikkek, ahol N tetszőlegesen nagy, de rögzített szám. Egy többtípusú elágazó folyamat segítségével írtuk le a hálózat fejlődését. A többtípusú elágazó folyamatok értelmezésében az n-klikkeket n típusú egyedeknek tekintjük. Kezdetben, a $t = 0$ időpillanatban csupán egyetlen klikk létezik, melynek mérete az $1, 2, \ldots, N$ bármelyike lehet. Ezt a klikket ősnek nevezzük. Az ős utódokat hoz létre, melyek szintén lehetnek $1, 2, \ldots, N$-klikkek. Ezen utódok is létrehozzák a saját utódaikat, stb. Minden klikkhez tartozik egy 1 paraméterű Poisson folyamat. Az n-klikkek ezen folyamatai függetlenek és azonos eloszlásúak. Ha $\Pi_n(t)$ értéke eggyel növekszik, akkor megjelenik egy új csúcs és ez az n-klikk j különböző csúcsához

$q_{n,j}$ valószínűséggel csatlakozik, ahol $0 \le q_{n,j} \le 1$, $j = 0, 1, \ldots, n$, és $\sum_{j=0}^{n} q_{n,j} = 1$. (Feltesszük, hogy $q_{N,N} = 0$, mert N a legnagyobb klikkméret.) Így annak valószínűsége, hogy egy i típusú ős j típusú utódot képez, azaz j-klikk jön létre, $p_{i,j} = q_{i,j-1}$, $j = 1, 2, \ldots, i+1$.

Egy i-klikk λ_i élettartamát (azaz szaporodóképes fázisának hosszát) az $l_i(t) = b + c\xi_i(t)$ kockázati ráta határozza meg, ahol $b \ge 0$, $c > 0$ rögzített konstansok és $\xi_i(t)$ az i-klikk összes utódainak száma a t időpillanatig. $m_{i,j}(t) = \mathbb{E}\xi_{i,j}(t)$ az i típusú egyed j típusú utódainak átlagos száma a t ideig. Jelölje M az $m_{ij}(t)$ függvények $m_{ij}^*(t)$ Laplace transzformáltjainak mátrixát.

Folytonos idejű hálózatfejlődési modellünk matematikai leírása után legfontosabb eredményeink a következők voltak:

Tegyük fel, hogy a $(p_{i,j})_{i,j=1}^{N}$ mátrix irreducibilis és aciklikus. Bevezetünk egy $A(\kappa)$ mátrixot, mely a-tól és b-től függ. Tegyük fel, hogy $A(0) > 1$, azaz a folyamat szuperkritikus. Legyen α az M által meghatározott Malthusi paraméter.

Ekkor jelöljük $\mathbf{v} = (v_1, \ldots, v_N)^\top$-nel az $M(\alpha)$ mátrix 1 sajátértékhez tartozó sajátvektorát, amely $v_1 + \cdots + v_N = 1$ módon van normálva. Legyen $\mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_N)^\top$ az $M(\alpha)$ azon bal sajátvektora, melyre $u_1 v_1 + \cdots + u_N v_N = 1$. $A(\alpha)$ a Laplace-transzformáltak által meghatározott és

$$-A'(\alpha) = D(\alpha) = \sum_{l,j=1}^{N} u_l v_j \left(-m_{l,j}^*(\alpha)\right)'.$$

A következő eredményekben a ${}_kW$ mennyiségek m.b. nemnegatívak, $\mathbb{E}({}_kW) = 1$, illetve ${}_kW$ m.b. pozitív a túlélés eseménye mellett. Legyen n rögzített, $1 \le n \le N$.

1. Tétel. *Jelölje ${}_kT(t)$ a t ideig megszületett n-klikkek számát, ha az ős k-klikk, $k = 1, 2, \ldots, N$. Ekkor*

$$\lim_{t\to\infty} e^{-\alpha t}{}_kT(t) = {}_kW \frac{v_k u_n}{\alpha\left(-A'(\alpha)\right)}$$

majdnem biztosan $k = 1, 2, \ldots, N$ esetén.

2. Tétel. *Jelölje* ${}_k\hat{T}(t)$ *a* t *időpillanatban életben lévő* n*-klikkek számát, ha az ős* k*-klikk,* $k = 1, 2, \dots, N$*. Ekkor*

$$\lim_{t\to\infty} e^{-\alpha t}\,{}_k\hat{T}(t) = {}_kW \frac{v_k u_n A(\alpha)}{(-A'(\alpha))}$$

majdnem biztosan $k = 1, 2, \dots, N$ *esetén.*

Legyen $\mathbb{M}$ az összes utódok átlagos számaiból álló mátrix. Ekkor $\mathbb{M} = (m_{i,j}(\infty))_{i,j=1}^{N} = A(0)\,(p_{i,j}(\infty))_{i,j=1}^{N}$.

3. Tétel. *Jelölje* s_i *a kihalás valószínűségét, ha az ős* i *típusú egyed volt. Legyen* $\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_N)$*. Tegyük fel, hogy* $(p_{i,j}(\infty))_{i,j=1}^{N}$ *irreducubilis és aciklikus mátrix. Legyen* ϱ *az* $\mathbb{M}$ *Perron-Frobenius gyöke. Ha* $\varrho \leq 1$*, akkor* $s_1 = s_2 = \cdots = s_N = 1$*. Ha* $\varrho > 1$*, akkor* $s_1 < 1, s_2 < 1, \dots, s_N < 1$*. Az* $\mathbf{s}$ *mindegyik esetben az alábbi vektoregyenlet legkisebb nemnegatív megoldása:*

$$\mathbf{s} = \mathbf{f}(\mathbf{s}),$$

ahol $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_N)$ *és az* f_k *függvények az utódeloszlás generátorfüggvényei (melyek az 1.5.1 alszakaszban kerültek kiszámításra).*

Első két eredményünk leírja a t időpontig megszületett összes k-klikkek számának, illetve a t időpontban életben lévő k-klikkek számának aszimptotikus viselkedését. Hasonló eredményeink vannak az 1. fejezetben egy rögzített csúcs fokszámára is. Tételeink empirikus alátámasztásához szimulációkat is végeztünk, melyek eredményei az 1.6 szakaszban szerepelnek.

2. fejezet

Egy diszkrét idejű, klikkeken alapuló hálózatfejlődési modell

A második fejezet [6] cikkünk alapján íródott. Egy diszkrét idejű hálózatfejlődési modellt vizsgáltunk, amelynek egyedei a k-klikkek és a hálózat fejlődése k-klikkek konstrukcióján és törlésén alapul, ahol $k \geq 2$ rögzített egész.

Az $n = 0$ időpontban a kezdeti hálózat k csúcsú üres gráf, mely nem tartalmaz éleket. Az első lépésben, azaz az $n = 1$ időpillanatban összekötjük a k db csúcsot, és így kapunk egyetlen k-klikket. A második lépés a következő. Kiválasztunk két csúcsot véletlenszerűen, jelölje őket v_1 és v_2. Ezután hozzáadunk a gráfhoz egy új csúcsot és két k-klikket készítünk. Az első k-klikk csúcsai a meglévő $k+1$ csúcs, kivéve v_1-et, míg a második k-klikk csúcsait a már létező $k+1$ csúcs adja v_2-t kivéve. Ezután az eredeti k-klikket töröljük.

Ezután minden egyes lépésben kiválasztunk a már meglévő csúcsok közül k db-ot véletlenszerűen (diszkrét egyenletes eloszlás szerint).

Amennyiben ezek nem alkotnak k-klikket, akkor konstruálunk egy új k-klikket ezen csúcsokkal (azaz összekötjük őket $\binom{k}{2}$ új éllel). A másik esetben, ha ez a k csúcsból álló részgráf egy k-klikk, akkor ez a k-klikk törlésre kerül, viszont a csúcsait felhasználjuk két új k-klikk készítéséhez úgy, mint a második lépésben. Azaz egy új csúcsot adunk hozzá a gráfhoz és ezt, illetve az épp kitörölt klikk k csúcsát felhasználva két új k-klikket készítünk olyan módon, mint a második lépésben.

Modellünk leírását követően bizonyítottunk egy határérték-tételt a csúcsok számára, illetve a gráf csúcsai számának aszimptotikus normalitását is beláttuk. Ezután megadtunk egy aszimptotikus tételt modellünk csúcsainak számára is.

4. Tétel. *Ha $n \to \infty$, a gráf V_n csúcsainak számára teljesül az alábbi majdnem biztos konvergencia-tulajdonság:*

$$\frac{V_n}{\left[\frac{(k+1)!}{2}\right]^{\frac{1}{k+1}} n^{\frac{2}{k+1}}} \to 1.$$

Ezt az alábbi formában is írjuk:

$$V_n \sim \left[\frac{(k+1)!}{2}\right]^{\frac{1}{k+1}} n^{\frac{2}{k+1}}, \qquad \textit{majdnem biztosan} \quad n \to \infty.$$

5. Tétel. *Az alábbi aszimptotikus normalitási tulajdonság teljesül:*

$$\frac{1}{n^{\frac{1}{k+1}}} \left(V_n - \left[\frac{(k+1)!}{2}\right]^{\frac{1}{k+1}} n^{\frac{2}{k+1}} \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathcal{N}\left(0, \frac{1}{2k+1} \left[\frac{(k+1)!}{2}\right]^{\frac{1}{k+1}}\right),$$

ha $n \to \infty$, ahol $\Rightarrow$ az eloszlásbeli konvergenciát jelöli.

6. Tétel. *Ha a $d_n(v)$ jelölést használjuk a rögzített v csúcs fokszámára az n időpontban, akkor*

$$d_n(v) \sim k(k+1) \left[\frac{2}{(k+1)!}\right]^{\frac{1}{k+1}} n^{\frac{k-1}{k+1}}$$

Szimulációkat is végeztünk, hogy kísérleti úton is alátámasszuk előbbi három, csúcsok számáról és fokszámokról szóló eredményünket.

Bebizonyítottunk egy funkcionális határeloszlást-tételt (invarianciaelvet) a gráf csúcsainak számára és többdimenziős funkcionális határeloszlás-tételeket csúcsok fokszámaira. Jelölje $[nt]$ az nt mennyiség egész részét. A csúcsok számának tanulmányozásához tekintsük a $V_{[nt]}$, $t \in [0,1]$ folyamatot, ahol V_n a csúcsok száma. A $V_{[nt]}$ folyamat trajektóriái benne vannak a $D[0,1]$ térben, azaz nincs másodfajú szakadásuk.

7. Tétel.

$$\frac{\binom{V_{[nt]}}{k+1} - \binom{[nt]}{2}}{n^{\frac{2k+1}{k+1}}} \Rightarrow \int f(s)\, dW(s),$$

ahol

$$f(s) = \frac{\left(\frac{(k+1)!}{2}\right)^{\frac{k}{2k+1}}}{(k!)^{\frac{1}{2}}} \cdot s^{\frac{3k+1}{2(k+1)}},$$

$W(s)$, $s \in [0,1]$, a Wiener-folyamat, és $\Rightarrow$ jelöli a gyenge konvergenciát a $D[0,1]$ térben, a Szkorohod-topológiában.

Többdimenziós funkcionális határeloszlás-tételeket is kaptunk a csúcsok fokszámaira. A gráf m db csúcsának együttes viselkedését tanulmányoztuk, ahol m egy rögzített egész.

8. Tétel. *Tekintsük a v_l, $l = 1, \dots, m$ csúcs esetén a következő martingál-differenciákat:*

$$X_{n,i}^{(v_l)} = \frac{1}{n^{\frac{k-1}{2(k+1)}}} \left[\mathbb{I}_{A_i^{(v_l)}} - \mathbb{E}\left(\mathbb{I}_{A_i^{(v_l)}} | \mathcal{F}_{i-1} \right) \right],$$

ahol $A_i^{(v_l)}$ az az esemény, hogy kiválasztjuk a v_l a csúcsot az i-edik lépésben, de az nem a két kivételes csúcs egyike. Definiáljuk $t \in [0,1]$-re az

$$Y_n^{(v_l)} = \sum_{i=1}^{[nt]} X_{n,i}^{(v_l)}$$

mennyiséget. Legyenek v_1, v_2, …, v_m különböző csúcsok. Ekkor

$$\left(Y_n^{(v_1)}, \dots, Y_n^{(v_m)}\right) \Rightarrow \left(\int f\, dW_1, \dots, \int f\, dW_m\right),$$

ahol $W_1, \dots, W_m$ független Wiener-folyamatok,

$$f(x) = k^{\frac{1}{2}} \left[\frac{2}{(k+1)!}\right]^{\frac{1}{2(k+1)}} x^{-\frac{1}{k+1}}$$

pedig Helland [8] cikkének (3.4) feltételében szereplő függvény, és $\Rightarrow$ jelöli a gyenge konvergenciát a szorzat Szkorohod-topológiában a $D[0,1] \times \cdots \times D[0,1]$ téren.

9. Tétel. *Legyen $k = 2$ és v_1, v_2, …, v_m különböző csúcsok. Ha*

$$Z_n^{(v_l)} = \frac{1}{n^{\frac{1}{6}}} \left(d_{[nt]}(v_l) - 2 \cdot 3^{\frac{2}{3}} [nt]^{\frac{1}{3}}\right), \quad t \in [0,1],$$

$l = 1, \dots, m$-re, akkor

$$\left(Z_n^{(v_1)}, \dots, Z_n^{(v_m)}\right) \Rightarrow \left(\int f\, dW_1, \dots, \int f\, dW_m\right).$$

Itt $W_1, \dots, W_m$ független Wiener-folyamatok,

$$f(x) = 2^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{-\frac{1}{6}} \cdot x^{-\frac{1}{3}},$$

és $\Rightarrow$ a gyenge konvergenciát jelöli a szorzat Szkorohod topológiában a $D[0,1] \times \cdots \times D[0,1]$ térben.

Továbbá

$$\left(V_n^{(v_1)}, \dots, V_n^{(v_m)}\right) \Rightarrow \mathcal{N}_m\left(\mathbf{0}, 2 \cdot 3^{\frac{2}{3}} \mathbf{I}_m\right),$$

ahol

$$V_n^{(v_l)} = \frac{1}{n^{\frac{1}{6}}} \left(d_n(v_l) - 2 \cdot 3^{\frac{2}{3}} n^{\frac{1}{3}}\right), \quad l = 1, \dots, m,$$

$\mathcal{N}_m\left(\mathbf{0}, 2 \cdot 3^{\frac{2}{3}} \mathbf{I}_m\right)$ m-dimenziós, többváltozós normális eloszlás, és $\mathbf{I}_m$ az $m \times m$ típusú egységmátrix. Tehát a csúcsok fokszámainak együttes eloszlása aszimptotikusan normális és különböző csúcsok fokszámai aszimptotikusan függetlenek.

A 4–6. tételeink Backhausz és Móri [3] eredményeinek kiterjesztései. Viszont a 7–9. tételek minden k-ra újak, beleértve a [3] cikk által tanulmányozott $k = 2$ speciális esetet is. A 7. tétel egy funkcionális határeloszlás-tétel a gráfunk csúcsainak számára. A 8. és a 9. tétel pedig több csúcs együttes eloszlására vonatkozó funkcionális határeloszlás-tételek.

3. fejezet

Egy új közelítés a leghosszabb, legfeljebb T-szennyezett fej szériák hosszának eloszlására

A 3. fejezet [7] cikkünk eredményeit tartalmazza. Az fej-írás érmedobási kísérletet vizsgáljuk. Legyen p a fej dobás valószínűsége, $q = 1 - p$ pedig az írásé. Itt p rögzített, $0 < p < 1$. Ekkor a kísérlet leírható az $X_1, X_2, \ldots, X_N$ független, azonos eloszlású valószínűségi változókkal, melyek eloszlása $P(X_i = 1) = p$, $P(X_i = 0) = q = 1-p$, $i = 1, 2, \ldots, N$.

Új közelítést adtunk a leghosszabb, legfeljebb T-szennyezett fej sorozat hosszának eloszlására. Megmutattuk, hogy $T > 0$-ra a becslésünk hibája $\mathcal{O}\left(1/(\log(n))^2\right)$, ahol log az $1/p$ alapú logaritmust jelöli. Legyen továbbá $R_n(T)$ a leghosszabb, legfeljebb T-szennyezett, első n dobásnál kezdődő sorozat hossza.

A fejezet fő eredménye az alábbi:

10. Tétel. *Legyen $T \geq 1$ egész és legyen*

$$\begin{aligned}
\tilde{c}_n(T) &= \log(qn) + T\log(\log(qn)) + \\
&+ T^2 \frac{\log(\log(qn))}{c\log(qn)} - \frac{T}{cq_0\log(qn)} - \frac{T^3}{2c}\left(\frac{\log(\log(qn))}{\log(qn)}\right)^2 + \\
&+ T^2 \frac{\log(\log(qn))}{cq_0(\log(qn))^2} + T^3 \frac{\log(\log(qn))}{(c\log(qn))^2} + \\
&+ \left(T\log\left(\frac{q}{p}\right) - \log(T!)\right) \cdot \\
&\cdot \left(1 + \frac{T}{c\log(qn)} - T^2 \frac{\log(\log(qn))}{c(\log(qn))^2}\right),
\end{aligned}$$

ahol log *jelöli az $1/p$ alapú logaritmust, $c = \ln(1/p)$, illetve* ln *a természetes, e alapú logaritmus, és*

$$q_0 = \frac{2q}{2 + Tq - q}.$$

Jelölje $[\tilde{c}_n(T)]$ a $\tilde{c}_n(T)$ egész részét, $\{\tilde{c}_n(T)\}$ pedig $\tilde{c}_n(T)$ tört részét, azaz $\{\tilde{c}_n(T)\} = \tilde{c}_n(T) - [\tilde{c}_n(T)]$. Ekkor

$$\begin{aligned}
&P(R_n(T) - [\tilde{c}_n(T)] < l) = \\
&\qquad = \exp\left(-p^{(l - \{\tilde{c}_n(T)\})\left(1 - \frac{T}{c\log(qn)} + T^2 \frac{\log(\log(qn))}{c(\log(qn))^2}\right)}\right) \cdot \\
&\qquad\qquad \cdot \left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{(\log n)^2}\right)\right)
\end{aligned}$$

minden l egész számra.

Láttuk, hogy $T > 0$-ra a közelítés hibája Arratia, Gordon és Waterman [1] munkájában $\mathcal{O}\left(\log(\log(n))/\log(n)\right)$, volt, tehát tételünk jelentősen javította ezt a korábbi eredményt. Ezen tételünket szintén szimulációkkal támasztottuk alá.

Irodalomjegyzék

[1] Arratia, R.; Gordon, L.; Waterman, M. S., The Erdős-Rényi Law in Distribution, for Coin Tossing and Sequence Matching. *Ann. Statist.* **18(2)**, *2008*, 539–570. https://doi.org/10.1214/aos/1176347615

[2] Barabási, A.-L.; Albert, R., Emergence of scaling in random networks. Science, 286, 509–512, 1999.

[3] Backhausz, Á., Móri, T. F. A random graph of moderate density. *Electronic Communications in Probability*, **27**, *2022*, 1–12. https://doi.org/10.1214/21-ECP444

[4] Fazekas, I., Barta, A., A continuous-time network evolution model describing 2- and 3-interactions, *Mathematics,* **9**, 2021, 3143. https://doi.org/10.3390/math9233143

[5] Fazekas, I., Barta, A., Fórián, L., Porvázsnyik, B., A continuous-time network evolution model describing N-interactions, *AIMS Mathematics*, 2024, **9** (12), 35721-35742. https://doi.org/10.3934/math.20241695

[6] Fazekas, I., Fórián, L., A family of network evolution models with moderate density. *Stat. Papers* **66** (105), 2025. https://doi.org/10.1007/s00362-025-01712-y

[7] Fazekas, I., Fazekas, B., Fórián, L., On the convergence rate for the longest at most T-contaminated runs of heads. *Entropy* **27** (1), 33, 2025.
https://doi.org/10.3390/e27010033

[8] Helland, I. S., Central Limit Theorems for Martingales with Discrete or Continuous Time. *Scandinavian Journal of Statistics*, Vol. 9, No. 2, 1982, pp. 79–94

[9] T. F. Móri, S. Rokob, A random graph model driven by time-dependent branching dynamics, *Ann. Univ. Sci. Budapest. Sect. Comp.*, **46**, 2017, 191–213.

Publikációk és konferencia-előadások listája

A dolgozat alapjául szolgáló publikációk

1. Fazekas, I., Fórián, L., A family of network evolution models with moderate density. *Statistical Papers* **66**, 105, 2025. (SJR: Q2)
   https://doi.org/10.1007/s00362-025-01712-y

2. Fazekas, I., Fazekas, B., Fórián, L., On the convergence rate for the longest at most T-contaminated runs of heads. *Entropy* **27**, 1, 33, 2025. (SJR: Q2)
   https://doi.org/10.3390/e27010033

3. Fazekas, I., Barta, A., Fórián, L., Porvázsnyik, B., A continuous-time network evolution model describing N-interactions. *AIMS Mathematics* **9**, 12, 35721-35742, 2024. (SJR: Q2)
   https://doi.org/10.3934/math.20241695

Egyéb publikációk

4. Fazekas, I., Fórián, L., Barta, A., Deep learning from noisy labels with some adjustments of a recent method. *Infocomm. J.* **15**, 9-12, 2023. (SJR: Q3)
https://doi.org/10.36244/ICJ.2023.5.2

5. Fazekas, I., Barta, A., Fórián, L., Ensemble noisy label detection on MNIST. *Ann. Math. Inform.* **53**, 125-137, 2021. (SJR: Q3)
https://doi.org/10.33039/ami.2021.03.015

6. Vincze, Cs., Varga, A., Oláh, M., Fórián, L., On computable classes of equidistant sets: equidistant functions. *Miskolc Math Notes* **19**, 1, 677-698, 2018. (SJR: Q3)
https://doi.org/10.18514/MMN.2018.2145

7. Vincze, Cs., Varga, A., Oláh, M., Fórián, L., Lőrinc, S., On computable classes of equidistant sets: finite focal sets. *Involve* **11**, 2, 271-282, 2018.
https://doi.org/10.2140/involve.2018.11.271

Konferencia-előadások listája

1. Fazekas I., Barta A., Fórián L., Ensemble noisy label detection on MNIST, *The 1st Conference on Information Technology and Data Science*, Debreceni Egyetem, Debrecen, 2020. November 6–8.

2. Fazekas I., Barta A., Fórián L., Label noise handling on MNIST with neural networks, *8th International Conference on Mathematics and Informatics*, Sapientia Erdélyi Magyar Tudományegyetem, Târgu Mureş (Marosvásárhely), 2021. September 9–10.

3. Fazekas I., Fórián L., Barta A., Deep learning from noisy labels with some adjustments of a recent method, *The 12th Internatio-*

nal Conference on Applied Informatics, Eszterházy Károly Katolikus Egyetem, Eger, 2023. March 2–4.

4. Fazekas I., Fórián L., A family of random graph evolution models with moderate density, *The 2024 IEEE 3rd Conference on Information Technology and Data Science*, Debreceni Egyetem, Debrecen, 2024. Augusztus 26–27.

5. Fazeka, I., Fórián L., A family of network evolution models with moderate density, *10th International Mathematics and Informatics Conference on Distance and Critical Points*, Sapientia Erdélyi Magyar Tudományegyetem, Târgu Mureş (Marosvásárhely), 2025. September 8–12.

DEBRECENI EGYETEM
EGYETEMI ÉS NEMZETI KÖNYVTÁR
H-4002 Debrecen, Egyetem tér 1, Pf.: 400
Tel.: 52/410-443, e-mail: publikaciok@lib.unideb.hu

Nyilvántartási szám: DEENK/24/2026.PL
Tárgy: PhD Publikációs Lista

Jelölt: Fórián László
Doktori Iskola: Informatikai Tudományok Doktori Iskola
MTMT azonosító: 10085982

A PhD értekezés alapjául szolgáló közlemények

Idegen nyelvű tudományos közlemények külföldi folyóiratban (3)

1. Fazekas, I., **Fórián, L.**: A family of network evolution models with moderate density.
   Stat. Pap. 66 (5), 1-18, 2025. ISSN: 0932-5026.
   DOI: http://dx.doi.org/10.1007/s00362-025-01712-y
   IF: 1.1 (2024)

2. Fazekas, I., Fazekas, B., **Fórián, L.**: On the Convergence Rate for the Longest at Most T-Contaminated Runs of Heads.
   Entropy. 27 (1), 1-9, 2025. EISSN: 1099-4300.
   DOI: http://dx.doi.org/10.3390/e27010033
   IF: 2 (2024)

3. Fazekas, I., Barta, A., **Fórián, L.**, Porvázsnyik, B.: A continuous-time network evolution model describing N-interactions.
   MATH. 9 (12), 35721-35742, 2024. ISSN: 2473-6988.
   DOI: http://dx.doi.org/10.3934/math.20241695
   IF: 1.8

További közlemények

Idegen nyelvű tudományos közlemények hazai folyóiratban (3)

4. Fazekas, I., **Fórián, L.**, Barta, A.: Deep Learning from Noisy Labels with Some Adjustments of a Recent Method.
   Infocommun. J. 15 (Special), 9-12, 2023. ISSN: 2061-2079.
   DOI: http://dx.doi.org/10.36244/ICJ.2023.5.2
   IF: 0.9

5. Fazekas, I., Barta, A., **Fórián, L.**: Ensemble noisy label detection on MNIST.
   Ann. Math. Inform. 53, 125-137, 2021. ISSN: 1787-5021.
   DOI: http://dx.doi.org/10.33039/ami.2021.03.015

DEBRECENI EGYETEM
EGYETEMI ÉS NEMZETI KÖNYVTÁR
H-4002 Debrecen, Egyetem tér 1, Pf.: 400
Tel.: 52/410-443, e-mail: publikaciok@lib.unideb.hu

6. Vincze, C., Varga, A., Oláh, M., **Fórián, L.**: On computable classes of equidistant sets: equidistant functions.
   Miskolc Math. Notes. 19 (1), 677-689, 2018. ISSN: 1787-2405.
   IF: 0.468

<u>Idegen nyelvű tudományos közlemények külföldi folyóiratban</u> (1)

7. Vincze, C., Varga, A., Oláh, M., **Fórián, L.**, Lőrinc, S.: On computable classes of equidistant sets: finite focal sets.
   Involve. 11 (2), 271-282, 2018. ISSN: 1944-4176.
   DOI: http://dx.doi.org/10.2140/involve.2018.11.271

A közlő folyóiratok összesített impakt faktora: 6,268
A közlő folyóiratok összesített impakt faktora (az értekezés alapjául szolgáló közleményekre): 4,9

A DEENK a Jelölt által a Tudóstérbe feltöltött adatok bibliográfiai és tudománymetriai ellenőrzését a tudományos adatbázisok és a Journal Citation Reports Impact Factor lista alapján elvégezte.

Debrecen, 2026.01.20.

Short thesis for the degree of doctor of philosophy (PhD)

Asymptotic Properties of Probabilistic Models

László Fórián
Supervisor: Prof. Dr. István Fazekas

University of Debrecen
Doctoral School of Informatics
Debrecen, 2026

Introduction

In the dissertation, we presented asymptotic results for some probabilistic models.

Some results are related to network theory. This theory has undergone a huge improvement following the pioneering papers of Albert-László Barabási [2]. During the research, models were studied using mathematical tools, while large networks were analyzed empirically. In the dissertation, we have joined the former line of research, the mathematical method.

In network theory, models are usually represented by graphs that evolve over time. The methods are significantly different in the case of discrete-time and continuous-time models.

In the dissertation, we start from the fact that social networks typically contain small groups of closely interacting individuals. We described these groups with cliques, i.e. sub-graphs in which every pair of vertices is connected by an edge.

We introduced two new network evolution models based on cliques of nodes. First, we considered a continuous time model that was governed by a general multi-type Crump-Mode-Jagers branching process. The type of the individuals was given by the clique size. In terms of the branching process, the individuals are the cliques and the type of each individual was given by the size of the clique. We proved asymptotic theorems for the number of cliques and we also obtained a result for the probability of extinction.

On the other hand, we also studied a parametrized family of discrete-time network evolution models. The evolution of the graph was based on constructions and deletions of k-cliques. Using martingale-theoretic methods, we obtained classical and functional limit theorems.

In both of the above cases, we provided precise mathematical proofs, but we also supported the results with simulation experiments.

The coin tossing experiment is a classical field of study, particularly the length of the longest pure head run. The initial results in this field were achieved by leading Hungarian scientists, such as Alfréd Rényi, Pál Erdős and Pál Révész. In the thesis, we also show a result in connection with coin tossing: we gave a new approximation for the distribution of the length of the longest at most T-contaminated head runs. Here, we first proved a mathematical theorem, and then we illustrated through simulations that our approach outperforms the previous results in the literature.

Chapter 1

A continuous-time network evolution model describing N-interactions

Chapter 1 includes the results of our paper [5]. We introduced a continuous-time network evolution model that described N-interactions, so we considered the cliques of nodes. The model was based on teams as individuals, i.e. cliques of size $1, 2, \ldots, N$, where N is an arbitrarily large but fixed number. We have used a multi-type branching process to describe the evolution of the network. In terms of multi-type branching processes, an n-clique is considered as an individual of type-n. At the initial time $t = 0$ there is one team, and the size of this team can be $1, 2, \ldots, N$. This team is called the ancestor. This ancestor team produces offspring teams which can also be cliques of sizes $1, 2, \ldots, N$. Then these children teams also produce their own children teams, and so on. Any team has its Poisson process $\Pi_n(t)$ of rate 1. These reproduction processes of the teams of size n are independent and identically distributed. When $\Pi_n(t)$ jumps, then a new vertex appears and we connect it to certain vertices of the generic n-clique. The new vertex will be connected to j vertices of the generic n-clique with probability $q_{n,j}$, where $0 \le q_{n,j} \le 1$, $j = 0, 1, \dots, n$, and $\sum_{j=0}^{n} q_{n,j} = 1$. (We assume that $q_{N,N} = 0$ because the largest team is of size N.) Then the probability that an i-type ancestor produces a j-type child, i.e. a j-clique, is $p_{i,j} = q_{i,j-1}$, $j = 1, 2, \dots, i+1$.

The life length λ_i of an i-clique is given by the $l_i(t) = b + c\xi_i(t)$ hazard rate, where $b \ge 0$, $c > 0$ are fixed constants and $\xi_i(t)$ is the number of all children of the generic i-clique up to time t. $m_{i,j}(t) = \mathbb{E}\xi_{i,j}(t)$ is the expected number of type-j offspring of a type-i parent up to time t. Let us use the notation M for the matrix of the $m^*_{ij}(t)$ Laplace transforms of the functions $m_{ij}(t)$.

After the mathematical description of our continuous-time network evolution model, the most important results were the following:

Assume that the matrix $(p_{i,j})_{i,j=1}^{N}$ is irreducible and acyclic. Assume that $A(0) > 1$, that is, the process is supercritical. Let α be the Malthusian parameter determined by the matrix M. If α is the Malthusian parameter, then we denote by $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_N)^\top$ the right eigenvector of $M(\alpha)$ corresponding to eigenvalue 1 and normalized as $v_1 + \dots + v_N = 1$. Let $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_N)^\top$ be the left eigenvector of $M(\alpha)$ satisfying $u_1 v_1 + \dots + u_N v_N = 1$. $A(\alpha)$ is given by the Laplace transforms and

$$-A'(\alpha) = D(\alpha) = \sum_{l,j=1}^{N} u_l v_j \left(-m^*_{l,j}(\alpha)\right)'.$$

In the following results, the quantity ${}_kW$ is a.s. non-negative, $\mathbb{E}({}_kW) = 1$, and ${}_kW$ is a.s. positive on the event of survival. Let n be fixed, $1 \le n \le N$.

Theorem 1. *Let us use the notation ${}_kT(t)$ for the number of all n-cliques being born up to time t if the ancestor of the network was a k-clique, $k = 1, 2, \dots, N$. Then*

$$\lim_{t\to\infty} e^{-\alpha t}\,{}_kT(t) = {}_kW \frac{v_k u_n}{\alpha\left(-A'(\alpha)\right)}$$

almost surely for $k = 1, 2, \ldots, N$.

Theorem 2. *Let us use the notation* ${}_k\hat{T}(t)$ *for the number of all* n*-cliques alive at time* t *if the ancestor of the network was a* k*-clique,* $k = 1, 2, \ldots, N$. *Then*

$$\lim_{t\to\infty} e^{-\alpha t} {}_k\hat{T}(t) = {}_kW \frac{v_k u_n A(\alpha)}{(-A'(\alpha))}$$

almost surely for $k = 1, 2, \ldots, N$.

Let $\mathbb{M}$ be the matrix of the expected total offspring number of our process. Then $\mathbb{M} = (m_{i,j}(\infty))_{i,j=1}^{N} = A(0)\,(p_{i,j}(\infty))_{i,j=1}^{N}$.

Theorem 3. *Let us denote by* s_i *the probability of extinction when the ancestor of the network is an* i*-type object. Let* $\mathbf{s} = (s_1, \ldots, s_N)$. *Assume that* $(p_{i,j}(\infty))_{i,j=1}^{N}$ *is an irreducible acyclic Markov transition matrix. Denote by* ϱ *the Perron–Frobenius root of* $\mathbb{M}$. *If* $\varrho \le 1$, *then* $s_1 = s_2 = \cdots = s_N = 1$. *If* $\varrho > 1$, *then* $s_1 < 1, s_2 < 1, \ldots, s_N < 1$. *In any case,* $\mathbf{s}$ *is the smallest non-negative solution of the vector equation*

$$\mathbf{s} = \mathbf{f}(\mathbf{s}),$$

where $\mathbf{f} = (f_1, \ldots, f_N)$ *and the functions* f_k *are the generating functions of the offspring distributions. (defined in Section 1.5.1).*

The first and second result describe the asymptotic behavior of the k-cliques being born and being alive at time t. We have similar results in [5] for the degree of a fixed vertex as well. We also have empirical support for our theorems, simulaton results were presented in Section 1.6.

Chapter 2

A discrete-time network evolution model based on cliques

Chapter 2 was based on our paper [6]. We studied a discrete-time network evolution model that is based on constructions and deletions of k-cliques, where $k \geq 2$ is a fixed integer.

The initial graph at time $n = 0$ contains k vertices and no one edge. In the first step, i.e. when the time is $n = 1$, we connect the k vertices to obtain a single k-clique. The second step is the following. We choose two vertices uniformly at random, let us denote them by v_1 and v_2. Then we add a new vertex and construct two new k-cliques. The vertices of the first k-clique are the existing $k + 1$ vertices but v_1, while the vertices of the second k-clique are the existing $k + 1$ vertices but v_2. Then the original k-clique is deleted.

Later on, in each step, we choose k vertices uniformly at random from the existing vertices. If they do not form a k-clique, then we construct a new k-clique on these vertices (i.e. we connect them using

$\binom{k}{2}$ new edges). In the other case, when the sub-graph consisting of the k vertices chosen is a k-clique, then that k-clique is deleted but its vertices are used to construct two new k-cliques as in the second step. That is a new vertex is added to the graph and using this new vertex and the k vertices of the just deleted k-clique, two new k-cliques are created in the same way as in the second step.

After the description of the evolution of the model, we obtained the limit of the number of vertices as well as the asymptotic normality of the number of vertices. We also calculated the asymptotic degree of the vertices.

Theorem 4. *As $n \to \infty$, the following almost sure convergence holds for V_n, the number of vertices in the graph after n steps:*

$$\frac{V_n}{\left[\frac{(k+1)!}{2}\right]^{\frac{1}{k+1}} n^{\frac{2}{k+1}}} \to 1.$$

We also write this property as

$$V_n \sim \left[\frac{(k+1)!}{2}\right]^{\frac{1}{k+1}} n^{\frac{2}{k+1}}, \qquad \textit{almost surely as} \quad n \to \infty.$$

Theorem 5. *We have*

$$\frac{1}{n^{\frac{1}{k+1}}}\left(V_n - \left[\frac{(k+1)!}{2}\right]^{\frac{1}{k+1}} n^{\frac{2}{k+1}}\right) \Rightarrow \mathcal{N}\left(0, \frac{1}{2k+1}\left[\frac{(k+1)!}{2}\right]^{\frac{1}{k+1}}\right)$$

as $n \to \infty$, where $\Rightarrow$ denotes convergence in distribution.

Theorem 6. *If we use the notation $d_n(v)$ for the degree of a fixed vertex v at time n, then we have*

$$d_n(v) \sim k(k+1)\left[\frac{2}{(k+1)!}\right]^{\frac{1}{k+1}} n^{\frac{k-1}{k+1}}.$$

We performed simulation studies as well, to support the previous three results.

We also proved a functional limit theorem (invariance principle) for the number of vertices in our graphs and multidimensional functional limit theorems for the degrees of vertices. Let $[nt]$ denote the integer part of nt. To study the number of vertices, we shall consider the process $V_{[nt]}$, $t \in [0,1]$, where V_n is the number of vertices. The trajectories of $V_{[nt]}$ belong to the space $D[0,1]$, i.e. they have no discontinuity of the second kind.

Theorem 7.
$$\frac{\binom{V_{[nt]}}{k+1} - \binom{[nt]}{2}}{n^{\frac{2k+1}{k+1}}} \Rightarrow \int f(s)\, dW(s),$$
where
$$f(s) = \frac{\left(\frac{(k+1)!}{2}\right)^{\frac{k}{2k+1}}}{(k!)^{\frac{1}{2}}} \cdot s^{\frac{3k+1}{2(k+1)}},$$
$W(s)$, $s \in [0,1]$, is the Wiener process, and $\Rightarrow$ denotes weak convergence in the space $D[0,1]$ with respect to the Skorohod topology.

We also obtained multidimensional functional limit theorems for the degrees of vertices. We studied the joint behaviour of m vertices, where m is a fixed positive integer.

Theorem 8. *Consider the following martingale differences for the vertex v_l, $l = 1, \ldots, m$:*

$$X_{n,i}^{(v_l)} = \frac{1}{n^{\frac{k-1}{2(k+1)}}} \left[\mathbb{I}_{A_i^{(v_l)}} - \mathbb{E}\left(\mathbb{I}_{A_i^{(v_l)}} | \mathcal{F}_{i-1} \right) \right],$$

where $A_i^{(v_l)}$ is the event that we choose the vertex v_l in the i^{th} step, but it is not one of the two exceptional vertices. Let us define for $t \in [0,1]$

$$Y_n^{(v_l)} = \sum_{i=1}^{[nt]} X_{n,i}^{(v_l)}.$$

Let v_1, v_2, $\ldots$, v_m be different vertices. Then we have

$$\left(Y_n^{(v_1)}, \ldots, Y_n^{(v_m)} \right) \Rightarrow \left(\int f\, dW_1, \ldots, \int f\, dW_m \right),$$

where $W_1, \ldots, W_m$ are independent Wiener processes,

$$f(x) = k^{\frac{1}{2}} \left[\frac{2}{(k+1)!} \right]^{\frac{1}{2(k+1)}} x^{-\frac{1}{k+1}}$$

is the function in the condition (3.4) of [8], and $\Rightarrow$ denotes weak convergence with respect to the product Skorohod topology in the space $D[0,1] \times \cdots \times D[0,1]$.

Theorem 9. *Let $k = 2$ and let v_1, v_2, $\ldots$, v_m be different vertices. Let*

$$Z_n^{(v_l)} = \frac{1}{n^{\frac{1}{6}}} \left(d_{[nt]}(v_l) - 2 \cdot 3^{\frac{2}{3}} [nt]^{\frac{1}{3}} \right), \quad t \in [0,1],$$

for $l = 1, \ldots, m$. Then we have

$$\left(Z_n^{(v_1)}, \ldots, Z_n^{(v_m)} \right) \Rightarrow \left(\int f \, dW_1, \ldots, \int f \, dW_m \right),$$

where $W_1, \ldots, W_m$ are independent Wiener processes,

$$f(x) = 2^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{-\frac{1}{6}} \cdot x^{-\frac{1}{3}},$$

and $\Rightarrow$ denotes weak convergence with respect to the product Skorohod topology in the space $D[0,1] \times \cdots \times D[0,1]$.

Moreover, we have

$$\left(V_n^{(v_1)}, \ldots, V_n^{(v_m)} \right) \Rightarrow \mathcal{N}_m \left(\mathbf{0}, 2 \cdot 3^{\frac{2}{3}} \mathbf{I}_m \right),$$

where

$$V_n^{(v_l)} = \frac{1}{n^{\frac{1}{6}}} \left(d_n(v_l) - 2 \cdot 3^{\frac{2}{3}} n^{\frac{1}{3}} \right), \quad l = 1, \ldots, m,$$

$\mathcal{N}_m \left(\mathbf{0}, 2 \cdot 3^{\frac{2}{3}} \mathbf{I}_m \right)$ denotes the m-dimensional multivariate normal distribution and $\mathbf{I}_m$ is the identity matrix of size $m \times m$. So the joint distribution of the degrees of vertices is asymptotically normal and the degrees of different vertices are asymptotically independent.

Our Theorems 4–6 are extensions of the results of [3]. However, Theorems 7–9 are new for any value of k, including the particular case of $k = 2$ studied in [3]. Theorem 7 is a functional limit theorem for the number of vertices in our graph. Theorems 8 and 9 are multidimensional functional limit results for the joint distribution of the degrees of several fixed vertices.

Chapter 3

A new approximation for the distribution of the longest at most T-contaminated runs of heads

Chapter 3 contains the results of our paper [7]. We considered the coin tossing experiment. Let p be the probability of heads and $q = 1 - p$ be the probability of tails. Here p is a fixed number with $0 < p < 1$. The experiment can be decribed by the independent identically distributed random variables $X_1, X_2, \ldots, X_N$ with distribution $P(X_i = 1) = p$ and $P(X_i = 0) = q = 1 - p$, $i = 1, 2, \ldots, N$.

We gave a new approximation for the distribution of the length of the longest at most T-contaminated head run. We showed that for $T > 0$ the rate of the approximation in our new result is $\mathcal{O}\left(1/(\log(n))^2\right)$, where log denotes the logarithm to base $1/p$. Let $R_n(T)$ be the length of the longest at most T-interrupted runs of heads starting in the first n tosses. The main result in this topic is the following:

Theorem 10. *Let $T \geq 1$ be an integer. Let*

$$\begin{aligned}
\tilde{c}_n(T) &= \log(qn) + T\log(\log(qn)) + \\
&+ T^2 \frac{\log(\log(qn))}{c\log(qn)} - \frac{T}{cq_0\log(qn)} - \frac{T^3}{2c}\left(\frac{\log(\log(qn))}{\log(qn)}\right)^2 + \\
&+ T^2 \frac{\log(\log(qn))}{cq_0(\log(qn))^2} + T^3 \frac{\log(\log(qn))}{(c\log(qn))^2} + \\
&+ \left(T\log\left(\frac{q}{p}\right) - \log(T!)\right) \cdot \\
&\cdot \left(1 + \frac{T}{c\log(qn)} - T^2\frac{\log(\log(qn))}{c(\log(qn))^2}\right),
\end{aligned}$$

where log *denotes the logarithm to base $1/p$, $c = \ln(1/p)$,* ln *denotes the natural logarithm to base e, and $q_0 = \frac{2q}{2+Tq-q}$. Let $[\tilde{c}_n(T)]$ denote the integer part of $\tilde{c}_n(T)$, while $\{\tilde{c}_n(T)\}$ denotes the fractional part of $\tilde{c}_n(T)$, i.e. $\{\tilde{c}_n(T)\} = \tilde{c}_n(T) - [\tilde{c}_n(T)]$. Then*

$$\begin{aligned}
&P(R_n(T) - [\tilde{c}_n(T)] < l) = \\
&\qquad = \exp\left(-p^{(l-\{\tilde{c}_n(T)\})\left(1-\frac{T}{c\log(qn)}+T^2\frac{\log(\log(qn))}{c(\log(qn))^2}\right)}\right) \cdot \\
&\qquad\qquad \cdot \left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{(\log n)^2}\right)\right)
\end{aligned}$$

for any integer l.

We saw that for $T > 0$ the rate of the approximation offered by [1] was $\mathcal{O}(\log(\log(n))/\log(n))$, so our result considerably improved the former result. Simulation studies were also presented to provide empirical support for our theorem.

Bibliography

[1] Arratia, R.; Gordon, L.; Waterman, M. S., The Erdős-Rényi Law in Distribution, for Coin Tossing and Sequence Matching. *Ann. Statist.* **18(2)**, *2008*, 539–570. https://doi.org/10.1214/aos/1176347615

[2] Barabási, A.-L.; Albert, R., Emergence of scaling in random networks. Science, 286, 509–512, 1999.

[3] Backhausz, Á., Móri, T. F. A random graph of moderate density. *Electronic Communications in Probability*, **27**, *2022*, 1–12. https://doi.org/10.1214/21-ECP444

[4] Fazekas, I., Barta, A., A continuous-time network evolution model describing 2- and 3-interactions, *Mathematics,* **9**, 2021, 3143. https://doi.org/10.3390/math9233143

[5] Fazekas, I., Barta, A., Fórián, L., Porvázsnyik, B., A continuous-time network evolution model describing N-interactions, *AIMS Mathematics*, 2024, **9** (12), 35721-35742. https://doi.org/10.3934/math.20241695

[6] Fazekas, I., Fórián, L., A family of network evolution models with moderate density. *Stat. Papers* **66** (105), 2025. https://doi.org/10.1007/s00362-025-01712-y

[7] Fazekas, I., Fazekas, B., Fórián, L., On the convergence rate for the longest at most T-contaminated runs of heads. *Entropy* **27** (1), 33, 2025.
https://doi.org/10.3390/e27010033

[8] Helland, I. S., Central Limit Theorems for Martingales with Discrete or Continuous Time. *Scandinavian Journal of Statistics*, Vol. 9, No. 2, 1982, pp. 79–94

[9] T. F. Móri, S. Rokob, A random graph model driven by time-dependent branching dynamics, *Ann. Univ. Sci. Budapest. Sect. Comp.*, **46**, 2017, 191–213.

List of publications and conference talks

List of publications related to the dissertation

1. Fazekas, I., Fórián, L., A family of network evolution models with moderate density. *Statistical Papers* **66**, 105, 2025. (SJR: Q2)
https://doi.org/10.1007/s00362-025-01712-y

2. Fazekas, I., Fazekas, B., Fórián, L., On the convergence rate for the longest at most T-contaminated runs of heads. *Entropy* **27**, 1, 33, 2025. (SJR: Q2)
https://doi.org/10.3390/e27010033

3. Fazekas, I., Barta, A., Fórián, L., Porvázsnyik, B., A continuous-time network evolution model describing N-interactions. *AIMS Mathematics* **9**, 12, 35721-35742, 2024. (SJR: Q2)
https://doi.org/10.3934/math.20241695

List of other publications

4. Fazekas, I., Fórián, L., Barta, A., Deep learning from noisy labels

with some adjustments of a recent method. *Infocomm. J.* **15**, 9-12, 2023. (SJR: Q3)
https://doi.org/10.36244/ICJ.2023.5.2

5. Fazekas, I., Barta, A., Fórián, L., Ensemble noisy label detection on MNIST. *Ann. Math. Inform.* **53**, 125-137, 2021. (SJR: Q3)
https://doi.org/10.33039/ami.2021.03.015

6. Vincze, Cs., Varga, A., Oláh, M., Fórián, L., On computable classes of equidistant sets: equidistant functions. *Miskolc Math Notes* **19**, 1, 677-698, 2018. (SJR: Q3)
https://doi.org/10.18514/MMN.2018.2145

7. Vincze, Cs., Varga, A., Oláh, M., Fórián, L., Lőrinc, S., On computable classes of equidistant sets: finite focal sets. *Involve* **11**, 2, 271-282, 2018.
https://doi.org/10.2140/involve.2018.11.271

List of conference talks

1. Fazekas, I., Barta, A., Fórián, L., Ensemble noisy label detection on MNIST, *The 1st Conference on Information Technology and Data Science*, University of Debrecen, Debrecen, 6–8 November, 2020

2. Fazekas, I., Barta, A., Fórián, L., Label noise handling on MNIST with neural networks, *8th International Conference on Mathematics and Informatics*, Sapientia Hungarian University of Transylvania, Târgu Mureş (Marosvásárhely), 9-10 September, 2021

3. Fazekas, I., Fórián, L., Barta, A., Deep learning from noisy labels with some adjustments of a recent method, *The 12th International Conference on Applied Informatics*, Eszterházy Károly Catholic University, Eger, 2-4 March, 2023

4. Fazekas, I., Fórián, L., A family of random graph evolution models with moderate density, *The 2024 IEEE 3rd Conference on Information Technology and Data Science*, University of Debrecen, Debrecen, 26-27 August, 2024

5. Fazekas, I., Fórián, L., A family of network evolution models with moderate density, *10th International Mathematics and Informatics Conference on Distance and Critical Points*, Sapientia Hungarian University of Transylvania, Târgu Mureş (Marosvásárhely), 8-12 September, 2025

UNIVERSITY of DEBRECEN

UNIVERSITY AND NATIONAL LIBRARY
UNIVERSITY OF DEBRECEN
H-4002 Egyetem tér 1, Debrecen
Phone: +3652/410-443, email: publikaciok@lib.unideb.hu

Registry number: DEENK/24/2026.PL
Subject: PhD Publication List

Candidate: László Fórián
Doctoral School: Doctoral School of Informatics
MTMT ID: 10085982

List of publications related to the dissertation

Foreign language scientific articles in international journals (3)

1. Fazekas, I., **Fórián, L.**: A family of network evolution models with moderate density.
   Stat. Pap. 66 (5), 1-18, 2025. ISSN: 0932-5026.
   DOI: http://dx.doi.org/10.1007/s00362-025-01712-y
   IF: 1.1 (2024)
2. Fazekas, I., Fazekas, B., **Fórián, L.**: On the Convergence Rate for the Longest at Most T-Contaminated Runs of Heads.
   Entropy. 27 (1), 1-9, 2025. EISSN: 1099-4300.
   DOI: http://dx.doi.org/10.3390/e27010033
   IF: 2 (2024)
3. Fazekas, I., Barta, A., **Fórián, L.**, Porvázsnyik, B.: A continuous-time network evolution model describing N-interactions.
   MATH. 9 (12), 35721-35742, 2024. ISSN: 2473-6988.
   DOI: http://dx.doi.org/10.3934/math.20241695
   IF: 1.8

List of other publications

Foreign language scientific articles in Hungarian journals (3)

4. Fazekas, I., **Fórián, L.**, Barta, A.: Deep Learning from Noisy Labels with Some Adjustments of a Recent Method.
   Infocommun. J. 15 (Special), 9-12, 2023. ISSN: 2061-2079.
   DOI: http://dx.doi.org/10.36244/ICJ.2023.5.2
   IF: 0.9
5. Fazekas, I., Barta, A., **Fórián, L.**: Ensemble noisy label detection on MNIST.
   Ann. Math. Inform. 53, 125-137, 2021. ISSN: 1787-5021.
   DOI: http://dx.doi.org/10.33039/ami.2021.03.015

UNIVERSITY of DEBRECEN
UNIVERSITY AND NATIONAL LIBRARY
UNIVERSITY OF DEBRECEN
H-4002 Egyetem tér 1, Debrecen
Phone: +3652/410-443, email: publikaciok@lib.unideb.hu

6. Vincze, C., Varga, A., Oláh, M., **Fórián, L.**: On computable classes of equidistant sets: equidistant functions.
   Miskolc Math. Notes. 19 (1), 677-689, 2018. ISSN: 1787-2405.
   IF: 0.468

Foreign language scientific articles in international journals (1)

7. Vincze, C., Varga, A., Oláh, M., **Fórián, L.**, Lőrinc, S.: On computable classes of equidistant sets: finite focal sets.
   Involve. 11 (2), 271-282, 2018. ISSN: 1944-4176.
   DOI: http://dx.doi.org/10.2140/involve.2018.11.271

Total IF of journals (all publications): 6,268
Total IF of journals (publications related to the dissertation): 4,9

The Candidate's publication data submitted to the Tudóstér have been validated by DEENK on the basis of the Journal Citation Report (Impact Factor) database.

20 January, 2026