



A geometriai transzformációk tárgyalásának egy módja a
tanárképzésben

doktori (PhD) értekezés

Krisztin Német István

Debreceni Egyetem
Természettudományi Kar
Debrecen, 2007

Ezen értekezést a Debreceni Egyetem TTK Matematika- és Számítás-tudományok Doktori Iskola Matematika-Didaktika programja keretében készítettem a Debreceni Egyetem TTK doktori (PhD) fokozatának elnyerése céljából.

Debrecen, 2007. június 28.

Krisztin Német István

Tanúsítom, hogy Krisztin Német István doktorjelölt 1999-2007 között a fent megnevezett Doktori Iskola Matematika-Didaktika programjának keretében irányításommal végezte munkáját. Az értekezésben foglalt eredményekhez a jelölt önálló alkotó tevékenységével meghatározóan hozzájárult. Az értekezés elfogadását javasolom.

Debrecen, 2007. június 28.

Dr. Horváth Jenő
témavezető

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés	1
2. Az egybevágósággal kapcsolatos axiómacsoport típusai	4
3. Előzetes megjegyzések	7
4. Definíciók	11
5. Centrális nyújtás, tengelyes affinitás, centrális-tengelyes kollineáció	16
6. Hasonlóság, affinitás, kollineáció	25
6.1. Alaptételek	25
6.2. Kapcsolat a hagyományos felépítéssel	27
6.3. Előállítás kéttényezős szorzatként	30
6.4. Osztályozás	36
7. További témakörök	38
8. A téma oktatásával kapcsolatos megjegyzések	42
9. Fixpont, invariáns egyenes	51
9.1. Hasonlóság	51
9.2. Kollineáció	56
10. Axiomatikus háttér	67
10.1. Axiómák	67
10.2. A Tükrözési axiómák gyengítése	73
Irodalomjegyzék	91
Függelék	96
Köszönetnyilvánítások	98

1. Bevezetés

Disszertációnkban az alapvető geometriai transzformációk – egybevágóság, hasonlóság, affinitás, kollineáció, inverzió – tanárképzésbeli oktatásának egy módjáról foglaljuk össze gondolatainkat. Az érintett témákat, feldolgozásukat a tanárképző főiskolai geometriaoktatás keretei határozták meg, mert oktatási tapasztalatainkat a Szegedi Tudományegyetem Juhász Gyula Pedagógusképző Karán, ill. jogelődjén, a Juhász Gyula Tanárképző Főiskolán szereztük.

A geometriai transzformációk hagyományos tárgyalásában az egybevágóságot távolságtartó transzformációként definiáljuk, a hasonlóságot pedig olyan transzformációként, melynél a képpontok távolságának és az eredeti pontok távolságának aránya állandó (pl. az Irodalomjegyzék [15] tankönyve).

Pelle Béla a tanárképző főiskolák számára írt „Geometria” tankönyvében ([44]), és ennek átdolgozott kiadásában ([45]) a hagyományostól eltérő módon vezeti be ezeket a fogalmakat. A síkratükrözés alapfogalmára és a Tükrözési axiómákra alapozva a tér, ill. a sík egybevágóságát mint síkra, ill. egyenesre vonatkozó tükrözések szorzatát definiálja. A hasonlóságot pedig centrális nyújtás és egybevágóság szorzataként értelmezi. A kétféle definiálási mód közötti különbséget röviden úgy fogalmazhatjuk meg, hogy a hagyományos definíció egy tulajdonságával határozza meg a fogalmat, az utóbbi pedig „konstruktívan”, vagyis módszert ad a leképezés megadására. A konstruktív módszer azonban nem folytatódik [44]-ben a további alapvető leképezések, az affinitások és a kollineációk vizsgálatánál. ([45]-ben nem szerepelnek ezek a témakörök.)

A hagyományos tárgyalásmódban az euklideszi síkon az affinitást a sík egyenestartó transzformációjaként definiáljuk, a tengelyes affinitást pedig tengellyel rendelkező affinitásként. A klasszikus projektív síkgeometriában a kollineációt a sík egyenestartó transzformációjaként definiáljuk, a centrális (tengelyes) kollineációt pedig centrummal (tengellyel) rendelkező kollineációként.

[44]-ben a szerző a projektív geometria („a végtelen távoli elemekkel kibővített euklideszi sík és tér”) felől közelíti meg ezeket a fogalmakat ([44] 44. fejezet 329-338. o.). Először a két sík közötti projektív leképezést értelmezi, két sík közötti kölcsönösen egyértelmű, egyenes- és kettősviszonytartó hozzárendelésként. Majd affinitásnak nevez olyan projektív leképezést, amelynél az egyik sík végtelen távoli egyenese a másik sík végtelen távoli egyenesébe megy át. Egy sík önmagára való projektív leképezését centrális kollineációnak nevezi, ha van egy fixpontokból álló egyenese. A tengelyes affinitást pedig olyan centrális kollineációként definiálja, melynek centruma a végtelenben van, tengelye pedig a végesben.

Disszertációnkban a fent említett konstruktív, szorzatokra épülő módszert fogjuk tanulmányozni. Megvizsgáljuk axiomatikus alapjait, továbbá azt, hogy hogyan lehet ezt a módszert az affinitások és a kollineációk témakörére alkalmazni. Nagyrészt a síkbeli leképezésekkel foglalkozunk.

Első célunk, hogy a konstruktív definiálási módszert kiterjesszük az affinitás és a kollineáció fogalmára. E leképezéstípusok bevezetésében mind a hagyományos, mind a [44]-ben szereplő felépítéshez képest fordított utat fogunk járni. Először, a [44]-ben és [45]-ben megkezdett módszert folytatva, a centrális nyújtás fogalmához szorosan kapcsolódva, metrikus alapon definiáljuk a síkbeli tengelyes affinitást és a síkbeli centrális-tengelyes kollineációt. Majd az ily módon bevezetett speciális leképezések szorzataként definiáljuk az új, általánosabb leképezéstípusokat.

További célunk, hogy a hasonlóságra, az affinitásra és a kollineációra vonatkozó alapvető tételeket a Tükrözési axiómákkal, ill. az egybevágóságra vonatkozó tételekkel analóg formában, és analóg módszerekkel tárgyaljuk. Egységes, következetes fogalom-, tétel- és módszerrendszer kialakítására törekszünk.

Harmadik célunk a tárgyalás alapját képező Tükrözési axiómák és más axiómák kapcsolatának vizsgálata, a Tükrözési axiómák minél gyengébb alakban történő kimondása. De nem célunk a teljes, szigorú axiomatikus felépítés.

A disszertáció tartalma tehát a következőképpen alakul. Mivel egy, a hagyományostól eltérő axiómacsoporton alapul gondolatmenetünk, ezért a 2. fejezetben áttekintjük az egybevágósággal kapcsolatos axiómacsoport típusait, valamint a [44]-ben, [45]-ben szereplő Tükrözési axiómákat. A 3. fejezetben felsoroljuk a későbbiekben használt fogalmakat, továbbá áttekintjük a síkbeli egybevágóság fogalmára vonatkozó alapvető tételeket. A 4. fejezetben a centrális nyújtás, a tengelyes affinitás és a centrális-tengelyes kollineáció, valamint a hasonlóság, az affinitás és a kollineáció síkbeli definíciói szerepelnek. Az 5. és 6. fejezetben az előzőekben bevezetett leképezések alapvető tulajdonságait tárgyaljuk. A 7. fejezetben röviden vázoljuk a konstruktív tárgyalásmód alkalmazását az előzőekben említett leképezések térbeli megfelelőire, továbbá az inverzióra és a hiperbolikus sík körmodelljeire. A 8. fejezetben összefoglaljuk a téma oktatásával kapcsolatos megjegyzéseinket. A 9. fejezetben a hasonlóság és a kollineáció fixpontjára vonatkozó konstrukcióinkat ismertetjük. Végül az utolsó, a 10. fejezetben visszatérünk az alapokhoz, részletesen foglalkozunk a Tükrözési axiómák gyengítési lehetőségeivel, különös tekintettel a Dedekind-féle folytonossági axióma alkalmazására.

A disszertációban a [34], [35], [36], [37], [38] dolgozatokat, ill. az [1] dolgozat egyes részleteit foglaltuk össze, az azokban szereplő anyagot egységesítettük, némileg átdolgoztuk és több részlettel kibővítettük. A disszertáció ábrái a magyar fejlesztésű Euklides dinamikus geometriai szoftverrel ([70]) és a CorelDRAW grafikus szoftverrel ([71]) készültek; egyes számításoknál a CoCoA komputer-algebrai szoftvert ([69]) is felhasználtuk.

2. Az egybevágósággal kapcsolatos axiómacsoport típusai

A geometriai tanulmányok során – minden oktatási szinten – a geometriai leképezések közül először általában az egybevágóság (izometria) fogalmával ismerkednek meg a tanulók, hallgatók. A felsőoktatásban e fogalom axiomatikus alapjait is tárgyaljuk, rendszerint az első geometria kurzus elején.

Az euklideszi geometriában az egybevágósággal kapcsolatos axiómacsoportnak több típusa létezik. A következőkben röviden összefoglaljuk a szintetikus típusokat, néhány ismert magyar tanárképző főiskolai ([44], [45], [56], [59]) és egyetemi ([15], [16], [27], [31], [54], [55], [58], [61]) jegyzet, tankönyv, valamint egyéb művek ([2], [5], [6], [17], [18], [23], [26], [39], [40], [46], [50], [51]) alapján. Több csoportba sorolhatók a típusok.

Az első csoportba tartozóknál bizonyos alakzatok egybevágósága az alapfogalom, erre mondunk ki axiómákat:

1. Alapfogalom a szakaszok egybevágósága és a szögek egybevágósága.
Ez a klasszikus, a D. Hilbert nevéhez fűződő Egybevágósági axiómacsoport. ([16], [17], [18], [39], [40], [46], [54], [59], [61])
2. Alapfogalom a szakaszok egybevágósága. ([5], [6], [27])

A második csoport típusainál bizonyos leképezés az alapfogalom, erre mondunk ki axiómákat:

3. Alapfogalom a mozgás. ([15], [39], [40], [56], [58])
4. Alapfogalom a síkratükrözés. ([44], [45])

A harmadik csoport axiómaiban kapcsolat létesül a valós számokkal:

5. Pontok távolságára és szögek mértékére vonatkozó axiómákat és egy háromszögek egybevágóságára vonatkozó axiómát mondunk ki. ([26], [31], [40])
6. Pontok távolságára vonatkozó axiómák után a távolságtartó leképezésekre mondunk ki axiómát. ([23], [50], [51])

7. Pontok távolságára vonatkozó axiómák mellé itt a síkratükrözésre mondunk ki egy axiómát. ([55])

Külön kategóriát képvisel az a felépítés, ahol a „tükrözés” alapfogalmára egy sokkal általánosabb geometria, az ún. „metrikus” geometria épül: [2], [46].

Mivel a továbbiakban a [44]-ben és a [45]-ben található felépítéssel foglalkozunk, ezért itt felsoroljuk az ott szereplő, a síkratükrözés alapfogalmára kimondott Tükrözési axiómákat ([44] 21-22. o., [45] 17-18. o.):

„X. Bármely γ sík meghatároz a térben egy kölcsönösen egyértelmű leképezést, amelyet a γ síkra vonatkozó tükrözésnek nevezünk.

XI. A γ síkra vonatkozó tükrözés a γ sík pontjaihoz önmagát rendeli, a γ sík által meghatározott egyik féltér pontjaihoz a másik féltér pontjait, a képpontokhoz az eredeti pontokat, egy egyenes pontjaihoz egy egyenes pontjait rendeli.

XII. Ha a γ síkra vonatkozó tükrözés az α síkot a β síkba viszi át, akkor az α -hoz szimmetrikus pontokat β -hoz szimmetrikus pontokba viszi át.

XIII. A tér bármely két különböző pontjához egy és csak egy szimmetriasík tartozik.

XIV. A tér tetszőleges pontjából kiinduló két félegyeneshez egy és csak egy szimmetriasík tartozik.”

Két további axióma is szorosan kapcsolódik a síkratükrözés alapfogalmához, a szakaszokra, ill. szögekre vonatkozó Mérési axiómák ([44] 40. o., [45] 34. o. XV., ill. [44] 42. o., [45] 37. o. XV.*). Csak a szakaszokra vonatkozó állítást idézzük, a szögekre vonatkozó ennek analogonja. Előrebocsátjuk az egybevágóság fogalmát.

„Értelmezés: Két térbeli alakzatot egybevágónak nevezünk, ha tükrözések szorzatával egymásba vihetők át.” ([44] 199. o.; [45] 33., 190. o.)

„XV. Minden szakaszhoz hozzárendelhető egy pozitív valós szám, amelyet a szakasz hosszának nevezünk. Ha a hosszegység adott, akkor bármely A

kezdőpontú félegyenesen egy és csak egy olyan B pont található, melyre nézve az AB szakasz hossza egy adott pozitív szám. Egybevágó szakaszok hossza egyenlő. Egy szakaszt bármely belső pontja két olyan szakaszra bont fel, amelyek hosszának összege az eredeti szakasz hossza.”

Tárgyalásunkban a X., XI., XIII., XIV. axiómákat a fentiektől kissé eltérő formában használjuk, a XII. axióma helyett pedig másik állítást alkalmazunk:

- T1.** *Bármely síkratükrözés a térnek olyan egyenestartó, involutorikus transzformációja, melynek van fixsíkja, ami bármely rá nem illeszkedő pontot elválaszt a képétől.*
- T2.** *A tér bármely síkjához pontosan egy olyan síkratükrözés létezik, melynek fixsíkja az adott sík.*
- T3.** *A tér bármely két pontjához pontosan egy olyan síkratükrözés létezik, amelynél az adott pontok egymás képei.*
- T4.** *A tér bármely két közös kezdőpontú félegyeneséhez pontosan egy olyan síkratükrözés létezik, amelynél az adott félegyenesek egymás képei.*
- T5.** *Ha egy térzásló síkratükrözések két véges szorzatánál kapott képei megegyeznek, akkor a két szorzat egyenlő.*

Az axiómákkal részletesen foglalkozunk majd a 10. fejezetben.

3. Előzetes megjegyzések

Disszertációnkban – a 10. fejezet kivételével – az euklideszi geometria axiómarendszerére támaszkodunk. Előrebocsátunk néhány fogalmat és jelölést is.

A sík (tér) *transzformációján* a sík (tér) önmagára való, bijektív leképezését fogjuk érteni. Két leképezést *egyenlőnek* nevezünk, ha bármely pont esetén a két képpont egybeesik. Egy transzformációt *involutorikusnak* nevezünk, ha egyenlő inverzével. Egy leképezést *egyenestartónak* nevezünk, ha kollineáris pontok képei is kollineárisak.

Ha egy leképezésnél egy pont képe önmaga, akkor azt *fixpontnak*; ha egy alakzat (pl.: egyenes, sík, kör) minden pontja fix, akkor azt *fixalakzatnak*; ha egy alakzat (pl.: egyenes, sík, kör) képe önmaga, akkor azt *invariáns alakzatnak* nevezzük. Egy leképezés *tengelyén* a leképezés egy fixegyenesét értjük; egy leképezés *centrumán* pedig olyan pontot értünk, melyre illeszkedő egyenesek mind invariánsak a leképezésnél.

Síkszázlónak nevezzük egy nyílt félsík és egy, a határán levő zárt félegyenes unióját; *térzázlónak* nevezzük egy nyílt féltér és egy, a határán levő síkszázló unióját.

Az A és B különböző pontokra illeszkedő egyenest (AB) -vel jelöljük, az A kezdőpontú, B -t tartalmazó félegyenest pedig $[AB)$ -vel. Nagyrészt irányított szakaszokat használunk, a kivételeket külön jelezzük. Ezért az A és B pontokat összekötő szakaszt valamint az A kezdőpontú, B végpontú irányított szakaszt is AB -vel jelöljük. A velük kapcsolatos műveleteket a szokásos módon végezzük. Két egyenest *egyállásúnak* nevezünk, ha egybeesnek vagy párhuzamosak; három különböző egyenest *konkurrensnek* nevezünk, ha egy közös pontjuk van vagy páronként párhuzamosak egymással.

Az α síkra vonatkozó tükrözést T_α -val, az e egyenesre vonatkozó tengelyes tükrözést T_e -vel, az O pontra való középpontos tükrözést T_O -val, az O

centrumú, λ arányú centrális nyújtást pedig $N_{O,\lambda}$ -val jelöljük. Leképezések szorzását jobbról balra végezzük.

Az *osztó-* és *kettősvíszony* fogalmát majdnem teljesen a szokásos, szintetikus, metrikus módon vezetjük be. Elemi tulajdonságait és a Pappos-Steiner tételt is a hagyományos módon tárgyaljuk (pl. [15]). Az egyetlen különbség az, hogy az A, B, C különböző kollineáris pontok (ABC) osztóviszonyát az $\frac{AC}{BC}$ aránnyal definiáljuk, [28]-hoz hasonlóan. Ez a definíció szerepel [44]-ben is ([44] 141. old), de [44]-től eltérően esetünkben ez pontosan akkor negatív, ha C elválasztja A -t és B -t. Így az osztóviszony esetünkben az 1 értéket nem veheti fel. Az euklideszi sík ideális elemeinek hagyományos bevezetése után, a korábbi tulajdonságok megtartásával terjesztjük ki rájuk az osztó- és kettősvíszony fogalmát. Ha P ideális pont, a többi pedig közönséges, akkor $(ABP) := 1$, $(ABCP) := (ABC)$, $(ABPC) := (BAC)$, $(APBC) := (BCA)$, $(PABC) := (CBA)$.

Röviden áttekintjük még a síkbeli tengelyes tükrözés és egybevágóság fogalmait, alapvető tulajdonságait is, mert ezekhez fogjuk hasonlítani a többi síkbeli leképezés fogalmát, tulajdonságait, az analóg felépítés érdekében.

[44]-ben és [45]-ben a tengelyes tükrözés fogalma az alábbi módon kerül bevezetésre:

„4.3. Tétel: *Bármely α síkhoz van olyan γ sík, amelyre α -t tükrözve önmagába megy át.*” ([44] 24. o., [45] 21. o.)

„A γ síkra vonatkozó tükrözés által az α síkon a 4.3. Tétel szerint előállított leképezést a t -re vonatkozó síkbeli tengelyes tükrözésnek nevezzük.” ([44] 25. o. A t egyenes a két sík metszészvonala.)

„Ha egy α síkot t egyenesben metsző γ síkra történő tükrözés az α síkot önmagára képezi le, akkor az α sík e leképezését a t -re vonatkozó síkbeli tengelyes tükrözésnek nevezzük.” ([45] 22. o.)

A síkbeli tengelyes tükrözés tulajdonságai így a síkratükrözés megfelelő tulajdonságai lesznek. A T1.-T5. Tükrözési axiómákkal analóg állításokat külön tételekben soroljuk fel ([44] 25. o., [45] 22.-23. o.; ill. [34].)

3.1. Tétel. *Bármely tengelyes tükrözés a síknak olyan egyenestartó, involutorikus transzformációja, melynek van tengelye, ami bármely rá nem illeszkedő pontot elválaszt a képétől.*

3.2. Tétel. *A sík bármely egyeneséhez pontosan egy olyan tengelyes tükrözés létezik, melynek tengelye az adott egyenes.*

3.3. Tétel. *A sík bármely két pontjához pontosan egy olyan tengelyes tükrözés létezik, amelynél az adott pontok egymás képei.*

3.4. Tétel. *A sík bármely két közös kezdőpontú félegyeneséhez pontosan egy olyan tengelyes tükrözés létezik, amelynél az adott félegyenesek egymás képei.*

3.5. Tétel. *Ha egy síkzászló tengelyes tükrözések két véges szorzatánál kapott képei megegyeznek, akkor a két szorzat egyenlő.*

A síkratükrözés rendezés-, távolság- és szögtartó, így a síkbeli tengelyes tükrözés is rendelkezik ezen tulajdonságokkal. ([44] 27. o., 193. o., [45] 25. o., 185. o., ill. Mérési axiómák.)

3.6. Definíció. *A síkon egybevágóságnak nevezzük tengelyes tükrözések véges szorzatát.* ([44] 58. o.; [45] 57. o. Megjegyezzük, hogy e könyvek erre a fogalomra a „mozgás” elnevezést is használják.)

Az egybevágóság egyenes-, rendezés-, távolság- és szögtartása közvetlenül adódik a definícióból, mint a szorzat tényezőinek közös tulajdonsága. Az egybevágóságok további vizsgálatát az alábbi tételre alapozhatjuk:

3.7. Tétel. *Legyen adott a síkon két zászló. Pontosan egy olyan egybevágóság létezik, amelynél az első zászló képe a második.* ([45] 42.-43. o.; [44] 38. o., az utóbbi csak az egzisztencia.)

A tétel egzisztencia része könnyen adódik a 3.1.-3.4. Tételekből (van legfeljebb három olyan tengelyes tükrözés, melyek szorzata rendelkezik a kívánt tulajdonsággal), unicitás része pedig a 3.5. Tételből. A bizonyítás konstrukciójából kapjuk az alábbi tételt:

3.8. Tétel. *Minden síkbeli egybevágóság előáll legfeljebb három tengelyes tükrözés szorzataként. ([44] 38., 58. o.; [45] 43., 57. o.)*

Az euklideszi sík egybevágóságainak osztályozása, és a típusok tulajdonságainak tárgyalása ([44], [45] 11. fejezet) alapján mondhatjuk ki az alábbi két tételt. Az elsőben az identikus leképezést elfajult eltolásnak tekintjük; a másodikban a tükrözés szót összefoglaló értelemben használjuk, jelenthet pontra és egyenesre vonatkozó tükrözést is.

3.9. Tétel. *A sík minden egybevágósága vagy két tengelyes tükrözés szorzata, vagy egy tengelyes tükrözés és egy eltolás szorzata.*

3.10. Tétel. *A sík minden egybevágósága két tükrözés szorzata. Az egyik tükrözés tengelye, ill. centruma bizonyos feltételek mellett tetszőlegesen választható.*

E tételek fontos szerepet fognak játszani a 6.3. és a 9. fejezetben.

4. Definíciók

Az új leképezéstípusok definiálási módját a korábbiakéhoz igyekszünk kapcsolni. A tengelyes affinitás és a centrális-tengelyes kollineáció fogalmának bevezetésénél a centrális nyújtás fogalmához kapcsolódunk; az affinitásénál és a kollineációénál pedig a hasonlóságéhoz, egybevágóságéhoz ([36], [37]). Végig nagy hangsúlyt fektetünk az új fogalmak bevezetésének motivációjára.

A centrális nyújtás fogalmát az euklideszi Párhuzamossági axióma és a párhuzamos szelők tételeinek tárgyalása után vezetjük be, a hagyományos módon, centrumának és arányának megadásával. (Megjegyezzük, hogy kissé eltérünk [44] és [45] értelmezésétől – [44] 110. o.; [45] 105. o. –, mert ott az arány csak pozitív lehet.)

4.1. Definíció. *Legyen adott az euklideszi síkon egy C pont és egy $\lambda (\neq 0)$ valós szám. Centrális nyújtásnak nevezzük a következő leképezést. C legyen fix; más P pont képe legyen az a P' pont, melyre $CP' = \lambda CP$.*

Mondhatjuk, hogy centrális nyújtás esetén azt adjuk meg, hogy hogyan változik a pontok helyzete egy fixponthoz képest. A tengelyes affinitás bevezetésének motivációja az lehet, hogy olyan leképezést konstruáljunk, ahol egy fixegyeneshöz viszonyítjuk a pontok „mozgását”. Így véleményünk szerint a centrális nyújtás fenti definiálási módja mellé a tengelyes affinitást megadó módok közül az illik legjobban – az a „legtermészetesebb” –, ha tengelyének, irányának és arányának megadásával definiáljuk ezt a fogalmat. (Néhány középiskolai tankönyvben speciális, tengelyre merőleges irányú esete ezen a módon jelenik meg: [12], [13]). Ezt a módszert az teszi kissé bonyolulttá, hogy a tengellyel párhuzamos irány esetét külön kell kezelni.

4.2.a. Definíció. *Legyen adott az euklideszi síkon két, egymással nem párhuzamos egyenes, t és e , és egy $\lambda (\neq 0)$ valós szám. Általános tengelyes affinitásnak nevezzük a következő leképezést. t pontjai legyenek fixek; más P pont képe*

legyen az a P' pont, melyre $TP' = \lambda TP$, ahol T a t egyenes azon pontja, melyre (PT) egyállású e -vel.

4.2.b. Definíció. Legyen adott az euklideszi síkon két párhuzamos egyenes, t és e , e egyik irányítása, és egy $\lambda > 0$ valós szám. Speciális tengelyes affinitásnak nevezzük a következő leképezést. t pontjai legyenek fixek; más P pont képe legyen az a P' pont, melyre PP' hossza $\lambda d(t, P)$, és egyirányú, ill. ellentétes irányú e -vel, attól függően, hogy t nem választja el, ill. elválasztja P -t és e -t.

Az „általános”, ill. „speciális” jelzőket [28] nyomán használjuk. (Pl. [6]-ban az általános eset „feszítés”-ként, a speciális „nyírás”-ként szerepel.) Az osztóviszony fogalmának felhasználásával a P' -re vonatkozó metrikus feltétel a centrális nyújtás, ill. az általános tengelyes affinitás esetén más analóg formában is írható: $P \neq C$ esetén $(P'PC) = \lambda$, ill. $P \notin t$ esetén $(P'PT) = \lambda$. E formának a centrális-tengelyes kollineáció fogalmának megalkotása szempontjából lesz jelentősége.

A centrális-tengelyes kollineáció fogalma megalkotásának motivációja az lehet, hogy metrikus alapon olyan leképezést konstruáljunk, aminek centruma és tengelye is van. Ha meg akarjuk őrizni az egységességet – ha a definíciót az előzők mintájára akarjuk megalkotni –, akkor az a legtermészetesebb, hogy az új fogalmat a centrum, a tengely és az arány megadásával definiáljuk, továbbá, hogy megpróbáljuk „összekapcsolni” a korábbi definíciók módját.

Az első kísérlet a következő: Adott egy t egyenes, rajta kívül egy C pont, és egy $\lambda (\neq 0)$ szám. C és t pontjai legyenek fixek. Más P pont képe legyen az

a P' pont (CP) -n, melyre $\frac{CP'}{TP'} = \lambda \frac{CP}{TP}$ $((CTP') = \lambda(CTP))$, vagy amire

$CP' = \lambda CP$, attól függően, hogy (CP) metszi t -t T -ben, vagy párhuzamos vele.

Az euklideszi síkon azonban ez nem transzformáció, mivel az osztóviszony az euklideszi síkon nem lehet 1, így vannak pontok, amiknek nincs képe, és olyanok is, melyeknek nincs őse. Nevezetesen, P -nek pontosan akkor nincs képe, ha $(CTP) = \frac{1}{\lambda}$, és pontosan akkor nincs őse, ha $(CTP) = \lambda$. A párhuzas-

képe, ha $(CTP) = \frac{1}{\lambda}$, és pontosan akkor nincs őse, ha $(CTP) = \lambda$. A párhuzas-

mos szelők tételeivel könnyen igazolható, hogy az ilyen pontok mértani helye mindkét esetben egy t -vel párhuzamos egyenes, ami nem megy át C -n. [44] mintájára ezeket „eltűnési” és „irány” egyenesnek nevezzük. Ez a probléma az ideális elemek bevezetésével, vagyis az euklideszi síkról az ún. kibővített euklideszi síkra való áttéréssel „megszüntethető”.

A továbblépés előtt a tengelyes affinitás, a centrális nyújtás és az eltolás fogalmait kiterjesztjük (a hagyományos módon) az ideális elemekre is. A továbbiakban végig így tekintjük ezeket. Ekkor rámutathatunk, hogy mind-egyiknek van centruma és tengelye is, amelyek közül legalább az egyik ideális. Továbbá – ld. 5.4. és 5.5. Tételek – a fentiekén kívül nincs más ideális centrummal vagy tengellyel rendelkező egyenestartó transzformációja a síknak. Eszerint a centrális-tengelyes kollineáció fogalmát bevezethetjük úgy is, hogy csak a közösleges centrummal és tengellyel rendelkező leképezést definiáljuk külön, és ha valamelyik ideális, akkor a megfelelő korábbi leképezést nevezzük a hozzájuk tartozó centrális-tengelyes kollineációnak. Ha a centrum nincs a tengelyen, akkor erre a módszerre nincs szükség, mert az osztó- és kettősviszony fogalma, valamint a 4.2. Definíció utáni megjegyzés felhasználásával, egységes metrikus definíció is adható.

4.3.a. Definíció. *Legyen adott a kibővített euklideszi síkon egy t egyenes, rajta kívül egy C pont, és egy $\lambda (\neq 0)$ valós szám. Általános centrális-tengelyes kollineációnak nevezzük a következő leképezést. C és t pontjai legyenek fixek; más P pont képe legyen az a P' pont (CP) -n, melyre $(P'PCT) = \lambda$, ahol $T := (CP) \cap t$.*

Az adott állandót „karakterisztikus kettősviszony”-nak is nevezik, pl. [21]. Azonnal rámutathatunk, hogy ha t az ideális egyenes, akkor a C centrumú, λ arányú centrális nyújtást kapjuk, ha pedig C ideális, akkor a t tengelyű, $\frac{1}{\lambda}$ arányú és C irányú általános tengelyes affinitást. Sajnos, ha a centrum illeszkedik a tengelyre, akkor metrikus alapon nem tudjuk így összevonni a fogal-

makat. Sőt, közönséges tengely és centrum esetén nem is kínálkozik a korábbi eseteken alapuló, azokkal analóg, „könnyen megsejthető”, egyszerű definíció. Az általunk lentebb adott definícióban a centrum és a tengely mellett az ideális egyenes képét rögzítjük. E definíció mellett viszonylag könnyű az egyenestartás igazolása, továbbá későbbi konstrukcióinkban (9. fejezet, kollineációk fixpontja) is jól használható.

4.3.b. Definíció. *Legyen adott a kibővített euklideszi síkon egy t egyenes, rajta egy C pont.*

Ha C és t is ideális, akkor a hozzájuk tartozó speciális centrális-tengelyes kollineációkon a C irányú eltolásokat értjük.

Ha t közönséges és C ideális, akkor a hozzájuk tartozó speciális centrális-tengelyes kollineációkon a t tengelyű speciális tengelyes affinitásokat értjük.

Ha t és C is közönséges, akkor legyen adva még egy t -vel párhuzamos f közönséges egyenes. Ekkor speciális centrális-tengelyes kollineációnak nevezzük a következő leképezést. t pontjai legyenek fixek; más P pont esetén legyen $F := (CP) \cap f$. Ha P közönséges, akkor képe legyen az a P' pont

$$(CP)\text{-n, melyre } (CPP') = \frac{FC}{CP}; \text{ ha } P \text{ ideális, akkor pedig } P' := F.$$

Az „általános” és „speciális” jelzőket ismét [28] nyomán használjuk. (Pl. [5]-ben, [6]-ban, [46]-ban az általános esetre a „homológia”, a speciálisra pedig az „eláció” elnevezés található.) Az általános esetben, ha C és t is közönséges, a fent említett „eltűnési” egyenes az ideális egyenes őse, az „irány” egyenes pedig a képe. A speciális esetben is megjelennek ezen egyenesek, ha a tengely és a centrum is közönséges: P -nek pontosan akkor van ideális őse, ha P rajta van f -en; és pontosan akkor van ideális képe, ha rajta van f -nek C -re vonatkozó tükörképén. Ha a tengely vagy a centrum ideális, akkor az ideális egyenes invariáns.

Most az előzőekhez kapcsolódó „összetett” leképezések definíciói következnek. A minta az egybevágóság szorzatos fogalma, ezzel analóg lesz a hasonlóságé, majd az affinitásé és a kollineációé. Megjegyezzük, hogy két,

egymással ekvivalens lehetőség közül választhatunk. Az egyik definícióssorozat azt hangsúlyozza, hogy a következő leképezéshalmazt az előző halmaz bővítéseként értelmezzük: hasonlóságnak nevezzük egybevágóságok és centrális nyújtások véges szorzatát; affinitásnak nevezzük hasonlóságok és tengelyes affinitások véges szorzatát; kollineációnak nevezzük affinitások és centrális-tengelyes kollineációk véges szorzatát. A másik definícióssorozatban minden „általános” leképezést a korábban bevezetett, „elemi” leképezések szorzataként alkotunk meg. Véleményünk szerint ez utóbbi út mutat teljes analógiát az egybevágóság 3.6. Definíciójával, ezért ezt választjuk:

4.4. Definíció. Az *euklideszi síkon* hasonlóságnak nevezzük *tengelyes tükrözések és centrális nyújtások véges szorzatát*. A *centrális nyújtások arányai szorzatának abszolút értékét* nevezzük a *hasonlóság arányának*.

4.5. Definíció. Az *euklideszi síkon* affinitásnak nevezzük *centrális nyújtások és tengelyes affinitások véges szorzatát*.

4.6. Definíció. A *kibővített euklideszi síkon* kollineációnak nevezzük *centrális-tengelyes kollineációk véges szorzatát*.

Természetesen a bővítés folyamata itt is azonnal látszik, hiszen az identikus leképezés is centrális nyújtás, a tengelyes tükrözés is tengelyes affinitás, a centrális-tengelyes kollineáció fogalma pedig minden korábban említett leképezés fogalmát tartalmazza.

Itt jegyezzük meg, hogy [44]-ben és [45]-ben egy centrális nyújtás és egy egybevágóság szorzataként van definiálva a síkbeli hasonlóság ([44] 114. o., [45] 111. o). A térbeli esetben a tényezők már többes számban vannak ([44] 200. o., [45] 192. o). A hasonlóság aránya a hagyományos módon, a megfelelő szakaszok állandó arányként van értelmezve.

5. Centrális nyújtás, tengelyes affinitás, centrális-tengelyes kollineáció

Ebben a fejezetben megvizsgáljuk, hogyan lehet a centrális nyújtás, a tengelyes affinitás és a centrális-tengelyes kollineáció alapvető tulajdonságait úgy összefoglalni, hogy a tárgyalás minél jobban kiemelve az egymás közti analógiákat, ill. a tengelyes tükrözés megfelelő tulajdonságaival – 3.1.-3.4. Tételek – fennálló analógiákat ([36], [37]). Az állítások igazolására általában nem térünk ki, esetleg csak utalunk rájuk, hiszen ezek jól ismert, klasszikus gondolatmenetek. Néhány esetben – az egyenestartás és a „legfontosabb” tulajdonság (5.1.-5.3. Tételek) esetén – azonban vázoljuk is a bizonyítást, illusztrálva, hogy az analóg tulajdonságok levezetése hogyan történhet analóg módon. Így a definíciók, a tételek és a bizonyítások egységes rendszert alkotnak. A következő fejezetben hasonló elvek alapján tárgyaljuk majd a szorzatleképezéseket is.

Először az aránnyal kapcsolatos tulajdonságokról szólunk. Az 1 arányú centrális nyújtás, általános tengelyes affinitás és általános centrális tengelyes kollineáció egyaránt az identikus leképezés. A -1 arányú centrális nyújtás centrális tükrözés, a tengelyre merőleges irányú, -1 arányú általános tengelyes affinitás pedig tengelyes tükrözés. A λ arányú centrális nyújtások, általános tengelyes affinitások és általános centrális-tengelyes kollineációk inverzét kapjuk, ha az arányt $\frac{1}{\lambda}$ -ra változtatjuk. A speciális eseteknél az inverzet kapjuk, ha a kijelölt egyenes helyett tengelyre vonatkozó tükörképét tekintjük.

A következőkben azokat a tulajdonságokat soroljuk fel, melyek a tengelyes tükrözésre vonatkozó, 3. fejezetbeli 3.1.-3.4. Tételek analogonjai. (A 3.5. Tétel megfelelői később, a 6.1.-6.3. Tételekben jelennek majd meg.)

Az alábbiakban I.-IV.-ig jelölt tulajdonságok úgy foglalhatók össze, hogy az I. állítások első része a leképezések „legfontosabb”, nem metrikus jellemzőit tartalmazzák, a II., III., IV. állítások pedig a leképezések megadására adnak módokat. Az I.-ben szereplő jellemzőket azért mondhatjuk a „legfontosabbak-

nak”, mert a később következő 5.1.-5.3. Tételek szerint meghatározzák a leképezéseket.

Centrális nyújtás

I. Bármely centrális nyújtás az euklideszi sík olyan egyenestartó transzformációja, melynek van centruma; ez a pont pontosan akkor választ el egy P - P' pontpárt, ha az arány negatív; a leképezés pontosan akkor involutórikus, ha az arány ± 1 .

II. Az euklideszi síkon bármely O ponthoz és bármely $\lambda (\neq 0)$ valós számhoz pontosan egy olyan centrális nyújtás létezik, melynek centruma O és aránya λ .

III. Az euklideszi síkon bármely O ponthoz, és tőle különböző, de vele kollineáris P , P' pontokhoz pontosan egy olyan centrális nyújtás létezik, melynek O centruma, és P képe P' .

IV. Az euklideszi síkon bármely O ponthoz, és őt nem tartalmazó egyállású a , a' egyenesekhez pontosan egy olyan centrális nyújtás létezik, melynek O centruma, és a képe a' .

Tengelyes affinitás

I. Bármely tengelyes affinitás az euklideszi sík olyan egyenestartó transzformációja, melynek van tengelye; ez az egyenes pontosan akkor választ el egy P - P' pontpárt, ha az arány negatív; a leképezés pontosan akkor involutórikus, ha az irány nem párhuzamos a tengellyel, és az arány ± 1 .

II. Az euklideszi síkon bármely t és e egyenesekhez ($t \neq e$) és $\lambda (\neq 0)$ valós számhoz (ha $t \parallel e$, akkor e egyik irányítása is kell, és $\lambda > 0$) pontosan egy olyan tengelyes affinitás létezik, melynek tengelye t , iránya e , aránya λ .

III. Az euklideszi síkon bármely t egyeneshez és rá nem illeszkedő P , P' pontokhoz pontosan egy olyan tengelyes affinitás létezik, melynek t tengelye, és P képe P' .

IV. Az euklideszi síkon bármely t és e egyenesekhez ($t \neq e$), és t -től különböző, de vele konkurrens a , a' egyenesekhez, amik nem egyállásúak e -vel, pon-

tosan egy olyan tengelyes affinitás létezik, melynek t tengelye, iránya e , és a képe a' .

Centrális-tengelyes kollineáció

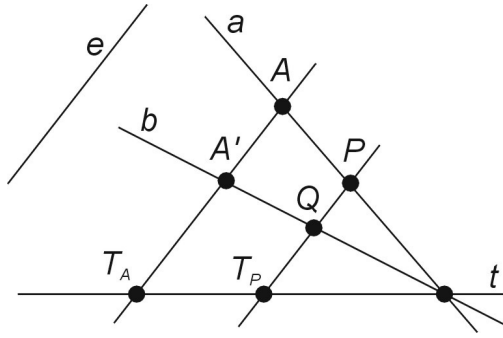
I. Bármely centrális-tengelyes kollineáció a kibővített euklideszi sík olyan egyenestartó transzformációja, melynek van centruma és tengelye; ez a pont és egyenes pontosan akkor választ el egy P - P' pontpárt, ha az arány negatív; a leképezés pontosan akkor involutórikus, ha a centrum nincs a tengelyen, és az arány ± 1 .

II. A kibővített euklideszi síkon bármely t egyeneshez, rá nem illeszkedő C ponthoz, és $\lambda (\neq 0)$ valós számhoz pontosan egy olyan általános centrális-tengelyes kollineáció létezik, melynek tengelye t , centruma C , aránya λ . Ha $C \in t$ és mindkettő közöséges, akkor bármely f közöséges egyenes esetén, ami t -vel párhuzamos, pontosan egy olyan speciális centrális-tengelyes kollineáció létezik, melynek tengelye t , centruma C , irányegyenese f . (Az eltolás, ill. a speciális tengelyes affinitás esetét itt mellőzzük.)

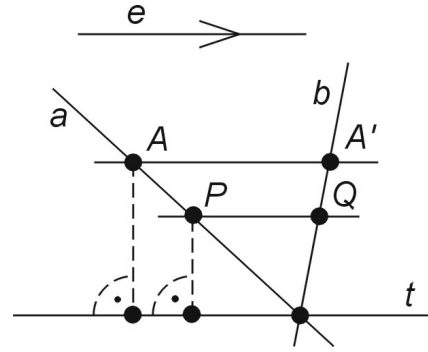
III. A kibővített euklideszi síkon bármely t egyeneshez, C ponthoz, és rájuk nem illeszkedő, de C -vel kollineáris P , P' pontokhoz pontosan egy olyan centrális-tengelyes kollineáció létezik, melynek t tengelye, C centruma, és P képe P' .

IV. A kibővített euklideszi síkon bármely t egyeneshez, C ponthoz, és rájuk nem illeszkedő, de t -vel konkurrens a , a' egyenesekhez, pontosan egy olyan centrális-tengelyes kollineáció létezik, melynek t tengelye, C centruma, és a képe a' .

Amint a bevezetőben említettük, vázoljuk a tengelyes affinitás és a centrális-tengelyes kollineáció egyenestartásának igazolását. A konstrukciók mintája a centrális nyújtás esetén alkalmazott jól ismert eljárás (pl. [44], ill. [45] 16.7. Tétel 110., ill. 106. o.). Először tekintsünk egy tengelyes affinitást. (1. és 2. ábra; a 4.2.a., b. Definíciók jelöléseit használjuk.) t , és az e -vel párhuzamos egyenesek nyilván invariánsak.



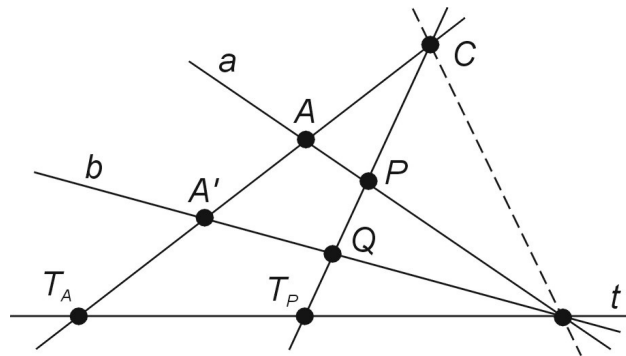
1. ábra



2. ábra

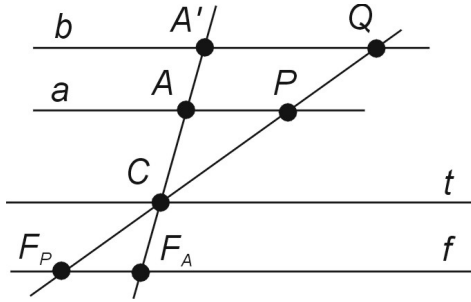
Tekintsünk egy a egyenest, $a \neq t$, $a \not\parallel e$. Legyen A a egy pontja ($A \notin t$), és jelölje A' A képét a tekintett tengelyes affinitásban. Legyen b az az egyenes, ami illeszkedik A' -re és konkurrens a -val és t -vel. Legyen P a egy tetszőleges pontja, Q pedig az pont b -n, amire $(PQ) \parallel e$. A párhuzamos szelők tételei (hasonló háromszögek) és a 4.2.a., b. Definíciók szerint P képe Q . Hasonlóan kapjuk, hogy b bármely pontjának őse a -n van. Tehát a tekintett tengelyes affinitásban a képe b . $\square$

A centrális-tengelyes kollineációk közül az előzők szerint már csak közös centrumú és tengelyű leképezést kell vizsgálnunk. t és a C -re illeszkedő egyenesek nyilván invariánsak. Legyen először $C \notin t$, és tekintsünk egy a egyenest, $a \neq t$, $C \notin a$ (3. ábra). Legyen A a egy pontja ($A \notin t$), és jelölje A' A képét a tekintett centrális-tengelyes kollineációban. Legyen b az az egyenes, ami illeszkedik A' -re, és konkurrens a -val és t -vel. Legyen P a egy tetszőleges pontja, Q pedig az pont b -n, amire $C \in (PQ)$. A Papposz-Steiner tétel és a 4.3.a. Definíció szerint P képe Q . Hasonlóan kapjuk, hogy b bármely pontjának őse a -n van. Tehát a tekintett centrális-tengelyes kollineációban a képe b .

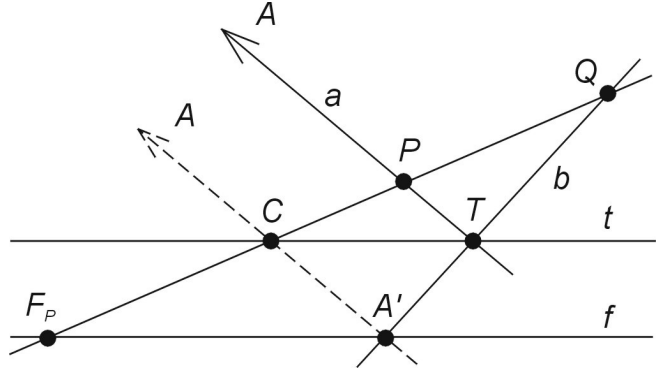


3. ábra

Legyen most $C \in t$; külön vizsgáljuk az $a \parallel t$ és az $a \nparallel t$ ($C \notin a$) eseteket. Ha $a \parallel t$ (4.ábra), akkor az előző eset jelöléseivel, a párhuzamos szelők tételeit (hasonló háromszögeket) és a 4.3.b. definíciót alkalmazva kapjuk, hogy a képe b . (Ha a az ideális egyenes, akkor képe nyilván f .) Az $a \nparallel t$ eset (5. ábra) csak annyiban különbözik az előzőtől, hogy A a ideális pontja legyen. $\square$



4. ábra



5. ábra

Szintén a párhuzamos szelők és a Papposz-Steiner tétel felhasználásával kapjuk a centrális nyújtás aránytartását, a tengelyes affinitás osztóviszonytartását és a centrális-tengelyes kollineáció kettősviszonytartását.

A következő tételek a leképezések centrumához, tengelyéhez kapcsolódó tulajdonságokról szólnak. Több okból is jelentősek felépítésünkben. Először is, mint fentebb említettük, az 5.1.-5.3. Tételek kiemelik a tárgyalt leképezések sok tulajdonsága közül a „legfontosabbakat”. Másodszor, az 5.2. és 5.7. Tételekből következik az ekvivalencia a tengelyes affinitás és a centrális-tengelyes kollineáció hagyományos és általunk tárgyalt definíciói között. Harmadszor, az 5.1.-5.7. Tételek teljessé teszik az egyenestartó transzformációk centrumával és tengelyével kapcsolatos ismereteket. Végül, az 5.7.-5.10. Tételek fontos segéd tételek lesznek a 6., 9. fejezetekben.

5.1. Tétel. *Ha az euklideszi sík egy egyenestartó transzformációjának van centruma, akkor az centrális nyújtás.*

5.2. Tétel. *Ha az euklideszi sík egy egyenestartó transzformációjának van tengelye, akkor az tengelyes affinitás.*

5.3. Tétel. *Ha a kibővített euklideszi sík egy egyenestartó transzformációjának van centruma és tengelye, akkor az centrális-tengelyes kollineáció.*

Ahogy előzetesen már említettük, ezek bizonyítását is vázoljuk. Azt kell igazolni, hogy teljesülnek a megfelelő, 4.1.-4.3. Definíciókban szereplő egyenlőségek. Az 5.1. Tétel esetében kapjuk, hogy ha a transzformáció nem az identikus leképezés, akkor a C centrumon kívül nincs másik fixpont, továbbá hogy a C -re nem illeszkedő egyenesek párhuzamosak a képükkel. Ebből pedig adódik, hogy $(P'PC)$ állandó. Az 5.2. Tétel esetében kapjuk, hogy ha a transzformáció nem az identikus leképezés, akkor a t tengelyen kívül nincs fixpont, továbbá, hogy t -n kívüli pontok esetén a (PP') egyenesek invariánsak és egyállásúak. Ebből pedig adódik, hogy ha ezek metszik t -t T -ben, akkor $(P'PT)$, ha párhuzamosak vele, akkor pedig $\frac{d(P, P')}{d(t, P)}$ állandó. Az 5.3. Tétel

esetében a korábbiak miatt már csak közösleges centrum és tengely esetén kell bizonyítani. Kapjuk, hogy ha a transzformáció nem az identikus leképezés, akkor a C centrumon és a t tengelyen kívül nincs fixpont. Továbbá, ha $C \notin t$ és a (PP') egyenes T -ben metszik t -t, akkor $(P'PCT)$ állandó; ha pedig $C \in t$, akkor van olyan t -vel párhuzamos f egyenes, hogy ha a (PP') egyenes F -ben metszi f -et, akkor $(CPP') = \frac{FC}{CP}$. $\square$

Itt említhetjük meg, hogy nem teljes az analógia a centrális nyújtásnak, a tengelyes affinitásnak és a centrális-tengelyes kollineációnak az I. pontokban felsorolt tulajdonságaihoz való viszonya, valamint a tengelyes tükrözésnek a 3.1. Tételben felsorolt tulajdonságaihoz való viszonya között. Ugyanis nemcsak a tengelyes tükrözés rendelkezik az ott felsorolt tulajdonságokkal, hanem bármely -1 arányú általános tengelyes affinitás. Szükségünk van további feltételre is, pl. hogy a tengelytől különböző invariáns egyenesei éppen az arra merőleges egyenesek.

A centrumra és a tengelyre vonatkozó egyéb tételek következnek.

5.4. Tétel. *Ha az euklideszi sík egy egyenestartó transzformációjánál egyenes és képe egyállású, akkor az centrális nyújtás vagy eltolás (pl. [5], [6]).*

5.5. Tétel. *Ha az euklideszi sík egy egyenestartó transzformációjánál pontot a képével összekötő egyenesek egyállásúak, akkor az tengelyes affinitás vagy eltolás (pl. [51]).*

Az 5.1., 5.4. és 5.2., 5.5. tételpárok nyomán kialakult sejtéshez kapcsolódva, ebben a felépítésben itt van a megfelelő hely annak a ténynek a megállapítására, hogy a centrum és a tengely léte „elválaszthatatlan”:

5.6. Tétel. *Ha a kibővített euklideszi sík egy egyenestartó transzformációjának van centruma, akkor van tengelye is, és fordítva.*

5.7. Tétel. *Ha a kibővített euklideszi sík egy egyenestartó transzformációjának van centruma vagy tengelye, akkor az centrális-tengelyes kollineáció.*

A klasszikus projektív geometriában az 5.6. Tételt általában a Desargues-tételből származtatják (pl. [5], [6], [28], [44]; [44] a Desargues-tétel igazolásánál körre vonatkozó polaritást is alkalmaz); más, direkt bizonyítás található pl. [8]-ban, [21]-ben, [51]-ben.

5.8. Tétel. *Ha az euklideszi síkon két háromszög megfelelő oldalegyenesei egyállásúak, akkor pontosan egy olyan centrális nyújtás vagy eltolás létezik, melynél az egyik háromszög képe a másik.*

5.9. Tétel. *Ha az euklideszi síkon két háromszög megfelelő csúcsait összekötő egyenesek egyállásúak, akkor pontosan egy olyan tengelyes affinitás vagy eltolás létezik, melynél az egyik háromszög képe a másik.*

5.10. Tétel. *Ha a kibővített euklideszi síkon két „háromszög” megfelelő csúcsainak egyenesei konkurrensak úgy, hogy közös pontjuk egyik háromszögnek sem csúcsa, akkor pontosan egy olyan centrális-tengelyes kollineáció létezik, amelynél az egyik háromszög képe a másik. Ha a kibővített euklideszi síkon két „háromszög” megfelelő oldalegyenes párjainak metszéspontjai kollineárisak úgy, hogy közös egyenesük egyik háromszögnek sem oldalegyenesese, akkor*

pontosan egy olyan centrális-tengelyes kollineáció létezik, amelynél az egyik háromszög képe a másik.

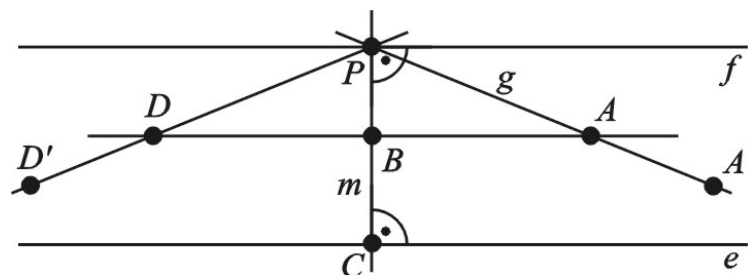
A kibővített euklideszi síkon „háromszögön” természetesen három nem kollineáris pont és egyeneseik unióját értjük.

E fejezet végén jegyezzük meg, hogy fontosnak tartanánk kiemelni az oktatás során a centrális nyújtás egyenestartásának és az euklideszi Párhuzamossági axióma állításának kapcsolatát. A Párhuzamossági axióma kimondása után a tankönyvek általában több, azzal ekvivalens állítást sorolnak fel, de a centrális nyújtás egyenestartása általában nem szerepel köztük. Ebben a Tükrözési axiómákra és szorzatokra épülő felépítésben különösen fontos lenne ezt is megemlíteni, két okból is. Az egyik az, hogy a hasonlóság fogalmát részben a centrális nyújtásra építjük. A másik az, hogy az egybevágóság fogalmát egy olyan (alap)fogalomra építettük – a síkratükrözésre –, melynek egyenestartóságát axiómában mondtuk ki. A centrális nyújtás egyenestartóságának az euklideszi Párhuzamossági axióma alapján történő igazolása megtörténik a felépítés során. Az ekvivalenciát ezek után a következő tétel adja:

5.11. Tétel. *Ha az euklideszi Párhuzamossági axióma állítása nem igaz, akkor van olyan centrális nyújtás, ami nem egyenestartó.*

E tételre pl. [22]-ben egy modellen történő bizonyítás található, mi itt most modell nélküli bizonyítást vázolunk. (Itt irányítás nélküli szakasz szerepel.)

Bizonyítás. (6. ábra) Tekintsünk az abszolút síkban egy P pontot, és egy P -re nem illeszkedő e egyenest. Legyen m a P -ből e -re állított merőleges, m és e metszéspontja C , f pedig a P -ből m -re állított merőleges.



6. ábra

Tudjuk, hogy f nem metszi e -t. Tegyük fel, hogy van a síkban f -től különböző, P -n átmenő, e -t nem metsző egyenes, jelöljük g -vel. Nyilván g -nek m -re való tükörképe (ami nem f) sem metszi e -t. Legyen A g egy pontja e és f között, D pedig A -nak m -re való tükörképe és $B := m \cap (AD)$, mely pont nyilván PC belső pontja. Tekintsük most azt a centrális nyújtást, aminek centruma P , és B -t C -be viszi. Ennél A és D képei e és f között maradnak, és m elválasztja őket, így – a Rendezési axiómák miatt – nem lehetnek kollineárisak C -vel. $\square$

6. Hasonlóság, affinitás, kollineáció

Ebben a fejezetben azt vizsgáljuk, hogy a hasonlóságra, az affinitásra és a kollineációra vonatkozó alapvető tételek hogyan jelennek meg felépítésünkben ([36], [37]).

6.1. Alaptételek

A leképezések egyszerűbb tulajdonságai közvetlenül adódnak a 4.4.-4.6. Definíciókból, mint a szorzat tényezőinek közös tulajdonságai, csakúgy, mint az egybevágóság esetében. Ezek hasonlóság esetén az egyenes-, rendezés-, arány-, szögtartás; affinitás esetén az egyenes-, rendezés-, osztóviszonytartás; kollineáció esetén pedig az egyenes-, elválasztás-, kettősviszonytartás. Azt is azonnal kapjuk, hogy mindegyik leképezés transzformáció; és hogy mindegyik leképezéshalmaz csoportot alkot a leképezésszorzás műveletére nézve úgy, hogy a később definiált leképezés csoportja részcsoportként tartalmazza az előzőt.

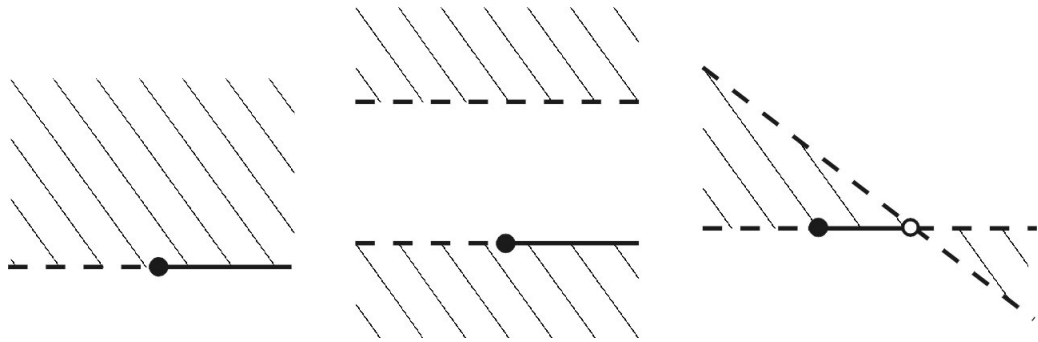
A további vizsgálatok a következő, ún. alaptételekre épülnek, amelyek a 3.5. Tétel, ill. az egybevágóságokra vonatkozó 3.7. Tétel analogonjai.

6.1. Tétel. *Legyen adott az euklideszi síkon két zászló, továbbá a félegyenesükön egy-egy pont. Pontosan egy olyan hasonlóság létezik, amelynél az első zászló képe a második zászló, az elsőn kijelölt ponté pedig a másodikon kijelölt pont.*

6.2. Tétel. *Legyen adott az euklideszi síkon két zászló, továbbá a félegyenesükön és a belsejükben is egy-egy pont. Pontosan egy olyan affinitás létezik, amelynél az első zászló képe a második zászló, az elsőn kijelölt pontoké pedig a másodikon kijelölt megfelelő pont.*

Ha ezen tételek kollineációkra vonatkozó analogonját szeretnénk megadni, akkor előbb ki kell terjesztenünk a félegyenes, a félsík és a zászló fogalmát. A kibővített euklideszi síkon két pont két részre osztja egyenesüket; egy ilyen

rész belsejének és az egyik határpontnak az unióját „félegyenes”-nek fogjuk nevezni. (Ezt a határpontot kezdőpontnak, a másikat végpontnak hívjuk.) Két egyenes két részre osztja a kibővített euklideszi síkot; „félsík”-nak fogunk nevezni egy ilyen (nyílt) síkrészt. A kibővített euklideszi síkon „zászló”-nak fogjuk nevezni egy „félsík” és egy, a határán levő olyan „félegyenes” unióját, melynek végpontja az egyenesek metszéspontja. (A 7. ábra néhány zászló-típust mutat.) Nyilvánvaló, hogy zászló kollineációnál kapott képe szintén zászló.



7. ábra

6.3. Tétel. *Legyen adott a kibővített euklideszi síkon két zászló, továbbá a félegyenesükön és a belsejükben is egy-egy pont. Pontosan egy olyan kollineáció létezik, amelynél az első zászló képe a második zászló, az elsőn kijelölt pontoké pedig a másodikon kijelölt megfelelő pont.*

Ezen tételek bizonyításai is analóg módon történnek, kivéve az utolsóét.

A 6.1.Tétel bizonyítása. A zászlókat jelölje Z , ill. V , a pontokat a félegyenesükön P , ill. Q . Legyen $\mathbf{M}$ az az egybevágóság, melyre $\mathbf{M}(Z) = V$. Majd tekintsük azt a centrális nyújtást, melynek centruma V félegyenesének kezdőpontja, és $\mathbf{M}(P)$ -t Q -ba viszi. Ekkor a két transzformáció szorzata a kívánt tulajdonságú lesz. Ha egy másik hasonlóság is ilyen, akkor a szög- és aránytartás miatt egyenlő az előzővel. $\square$

A 6.2.Tétel bizonyítása. A zászlókat jelölje Z , ill. V , a pontokat a félegyenesükön P , ill. Q , a pontokat a belsejükben R , ill. S . Legyen $\mathbf{H}$ az a hasonlóság, melyre $\mathbf{H}(Z) = V$ és $\mathbf{H}(P) = Q$. Majd tekintsük azt a tengelyes affinitást, mely-

nek tengelye a V félegyenesét tartalmazó egyenes, és $H(R)$ -ret S -be viszi. Ekkor a két transzformáció szorzata a kívánt tulajdonságú lesz. Ha egy másik affinitás is ilyen, akkor az egyenes- és osztóviszonytartás miatt egyenlő az előzővel. $\square$

A 6.1.Tétel bizonyítása. Először transzformáljuk a zászlókat egy-egy olyan centrális-tengelyes kollineációval, melynek eltűnési egyenese a zászló azon határegyenesé, amely nem tartalmazza a zászló félegyenesét. Így ezek a határegyenesek az ideális egyenesbe mennek át, a képzászlók pedig euklideszi zászlókba, ezért létezik olyan affinitás, amely az elsőt a másodikba, az elsőn levő pontokat pedig a másikon levő megfelelő pontokba viszi. Tehát két centrális-tengelyes kollineáció és egy affinitás szorzata rendelkezik a kívánt tulajdonságokkal. Ha egy másik kollineáció is ilyen, akkor az egyenes- és kettősviszonytartás miatt egyenlő az előzővel. $\square$

Természetesen a félegyenesek belsejére nincs igazán szükség, a rajtuk adott belső pont is elég. Ugyanez a helyzet az affinitás és a kollineáció eseténél a félsíkok belsejével is. Mégis szerepelnek, mert ezek a tételek, bizonyítások a fenti formájukban alkotnak egységes rendszert. Az újabb, általánosabb leképezéseket nem határozza meg egyértelműen a régi alakzat; egy-egy új pontra van ehhez szükség a zászlók félegyenesén és belsejében. (Több későbbi ábrán az áttekinthetőség miatt a zászlók belsejét éppen csak jelezzük.)

6.2. Kapcsolat a hagyományos felépítéssel

Csakúgy, mint a speciális leképezéseknél – 5.1.-5.3. Tételek –, az új, általános leképezések esetében is felmerülhet a kérdés, hogy melyik a „legfontosabb” tulajdonságuk.

6.4. Tétel. *Az abszolút sík bármely távolságtartó transzformációja egybevágóság.*

6.5. Tétel. *Az euklideszi sík bármely aránytartó transzformációja hasonlóság.*

6.6. Tétel. *Az euklideszi sík bármely egyenestartó transzformációja affinitás.*

6.7. Tétel. *A kibővített euklideszi sík bármely egyenestartó transzformációja kollineáció.*

E tételek felépítésünkben azt is jelentik, hogy nem lehetséges az egybevágóságok, hasonlóságok, affinitások, kollineációk halmazának bővítése, ha megkívánjuk a tételekben említett tulajdonságokat.

Továbbá e tételek a nevezetes leképezések hagyományos és konstruktív definícióinak ekvivalenciáját is biztosítják, ha a (kibővített) euklideszi síkon vizsgálódunk. Azért szorítkozunk az euklideszi geometriára, mert az affinitásokat, ill. a kollineációkat más, nem metrikus geometriákban is bevezetjük. (A tengelyes affinitás és a centrális-tengelyes kollineáció kétfajta definíciójának ekvivalenciájáról az 5.2. és az 5.7. Tételek kapcsán volt szó.)

A 6.4.-6.7. tételek igazolása ismert, hagyományos felépítésbeli módszerekkel történhet. A 6.4. Tétel esetében először a távolságtartásból kapjuk, hogy a leképezés egyenes- és rendezéstartó; majd a 3.7. Tétel bizonyításánál alkalmazott módszerrel, síkzászlok segítségével kapjuk, hogy az adott leképezés egyenlő három tengelyes tükrözés szorzatával. A 6.5. Tétel esetében az adott transzformáció és egy alkalmasan választott centrális nyújtás szorzata távolságtartó transzformáció, így az adott transzformáció egyenlő egy hasonlósággal. A 6.6. Tétel esetén először az egyenestartásból kapjuk, hogy a leképezés osztóviszonytartó; majd a 6.2. Tétel bizonyításánál alkalmazott módszerrel kapjuk, hogy a leképezés egyenlő egy hasonlóság és egy tengelyes affinitás szorzatával. A 6.7. Tétel bizonyítását két esetre bonthatjuk. Ha az ideális egyenes invariáns, akkor a 6.6. Tétel szerint az adott leképezés affinitás. Ha az ideális egyenes képe közösleges egyenes, akkor az adott transzformáció és egy alkalmasan választott centrális-tengelyes kollineáció szorzata affinitás, így az eredetileg adott leképezés kollineáció. $\square$

A 3.7., 6.1.-6.3. alaptételek hagyományos felépítésbeli analogonjai az alábbi állítások. Egybevágóság esetén:

Az (abszolút) síkon két olyan háromszöghöz, melyeknél a megfelelő oldalak egybevágók, pontosan egy olyan egybevágóság létezik, aminél az első háromszög csúcsainak képe a második háromszög megfelelő csúcsa.

A hasonlósággal kapcsolatos tételt több formában is találjuk:

I. Az euklideszi síkon két olyan háromszöghöz, melyeknél a megfelelő oldalak aránya állandó, pontosan egy olyan hasonlóság létezik, aminél az első háromszög csúcsainak képe a második háromszög megfelelő csúcsa. (pl. [51]).

II. Az euklideszi síkon két szakaszhoz pontosan egy irányítástartó és -váltó hasonlóság létezik, aminél az első szakasz képe a második (pl. [6], [39]).

III. Az euklideszi síkon két félsíkhoz és a határukon levő egy-egy szakaszhoz pontosan egy olyan hasonlóság létezik, aminél az első félsík képe a második félsík, az első szakaszé pedig a második szakasz (pl. [43]).

(Megjegyezzük, hogy sem [44], sem [45] nem szerepeltet ilyen jellegű tételt.)

Affinitás esetén:

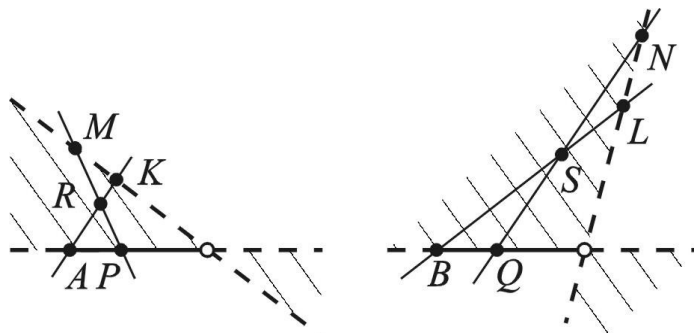
Az euklideszi síkon két háromszöghöz pontosan egy olyan affinitás létezik, aminél az első háromszög csúcsainak képe a második háromszög megfelelő csúcsa.

(Megjegyezzük, hogy [44] nem szerepeltet ilyen jellegű tételt.)

Kollineáció esetén:

A kibővített euklideszi síkon két általános helyzetű pontnégyeshez pontosan egy olyan kollineáció létezik, aminél az első alakzat pontjainak képe a második alakzat megfelelő pontja. (pl. [44] 334. o.)

Az egybevágóság, a hasonlóság és az affinitás esetében nyilvánvaló az ekvivalencia a 3.7., a 6.1, és a 6.2. tételekkel. A kollineáció eseténél a 8. ábráról leolvashatjuk, hogy az $APKM$ és $BQLN$ pontnégyesek ugyanazt a kollineációt határozzák meg, mint az adott zászlók és pontok, és fordítva. Közvetlen ekvivalenciát kapunk a 6.3. Tétellel, ha két általános helyzetű pontnégyes helyett két nem kollineáris ponthármast és egy rájuk nem illeszkedő egyenespárt említünk.



8. ábra

A 6.4.-6.7. tételek után a leképezések vizsgálta akár a hagyományos módon is folytatódhat. Mi itt a továbbiakban is a szorzatos módszert alkalmazzuk.

6.3. Előállítás kéttényezős szorzatként

A 6.1. és 6.2. Tételek bizonyításában szereplő konstrukciókból közvetlenül adódnak az alábbi tételek.

6.8. Tétel. *Az euklideszi síkon minden hasonlóság előáll egy egybevágóság és egy centrális nyújtás szorzataként. Ez utóbbi tényező centruma tetszőleges, aránya pedig egyenlő az adott hasonlóság arányával, tehát pozitív. Továbbá, egy hasonlóság pontosan akkor egybevágóság, ha aránya 1.*

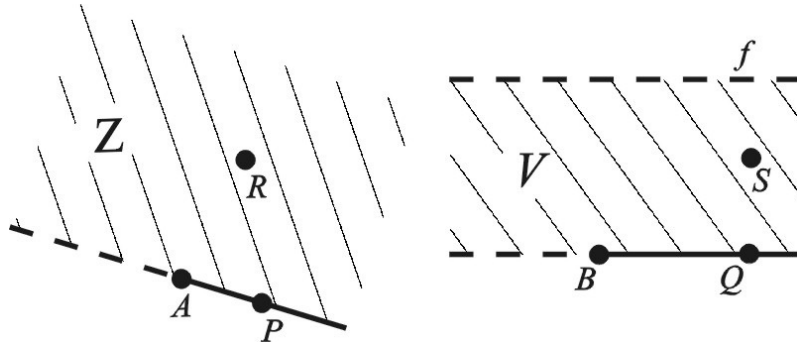
6.9. Tétel. *Az euklideszi síkon minden affinitás előáll egy hasonlóság és egy tengelyes affinitás szorzataként. Ez utóbbi tényező tengelye tetszőleges.*

A kollineációkra vonatkozóan több analóg tételt is kaphatunk. A 6.10. Tétel a 6.8., 6.9. Tételek analogonja lesz abból a szempontból, hogy a kollineációk halmaza az affinitásokénak bővítése. A 6.11. Tétel a 6.9. Tétel analogonja lesz abból a szempontból, hogy a hasonlóságok halmazát most nem az euklideszi, hanem a kibővített euklideszi síkon bővítjük. Ez a tétel fontos szerepet fog játszani a kollineációk fixpontjának konstruálásánál (9.2. Tétel). A 6.12. Tétel pedig az „elemi” tényezők számára vonatkozik, az egybevágóságok 3.8. Tételének analogonja.

6.10. Tétel. *A kibővített euklideszi síkon minden kollineáció előáll egy affinitás és egy centrális-tengelyes kollineáció szorzataként.*

Bizonyítás. (9. ábra) Ezt a tételt nem a 6.3. Tétel közvetlen következményeként kapjuk, hanem egy kicsit eltérő konstrukcióval. Ez lesz az a bizonyításmenet, ami a 6.1. és 6.2. Tételekével analóg. Tekintsünk egy kollineációt, és jelölje f az ideális egyenes képét. Legyen V egy olyan zászló, melynek félegyenese ideális pontban metszi f -et, a másik határegyenese pedig f . Jelölje Z a V zászló ősét az adott kollineációban, majd tekintsünk Z félegyenesén és belsőjében egy-egy pontot, P -t és R -et. E pontok képei az adott kollineációnál

legyenek rendre Q és S . Az f egyenes választása miatt ez a négy pont és a félegyenesek kezdőpontjai is mind közönségesek. (f lehet közönséges vagy ideális is.) Tekintsük most azt az affinitást, amely Z félegyenesét V -ébe viszi, P -t és R -et pedig rendre Q -ba és S -be. Tekintsük végül azt a centrális-tengelyes kollineációt, melynek tengelye a V félegyenesét tartalmazó egyenes, centruma S , és irányegyenese f . A két transzformáció szorzata a 6.3. Tétel szerint egyenlő az adott kollinációval. $\square$



9. ábra

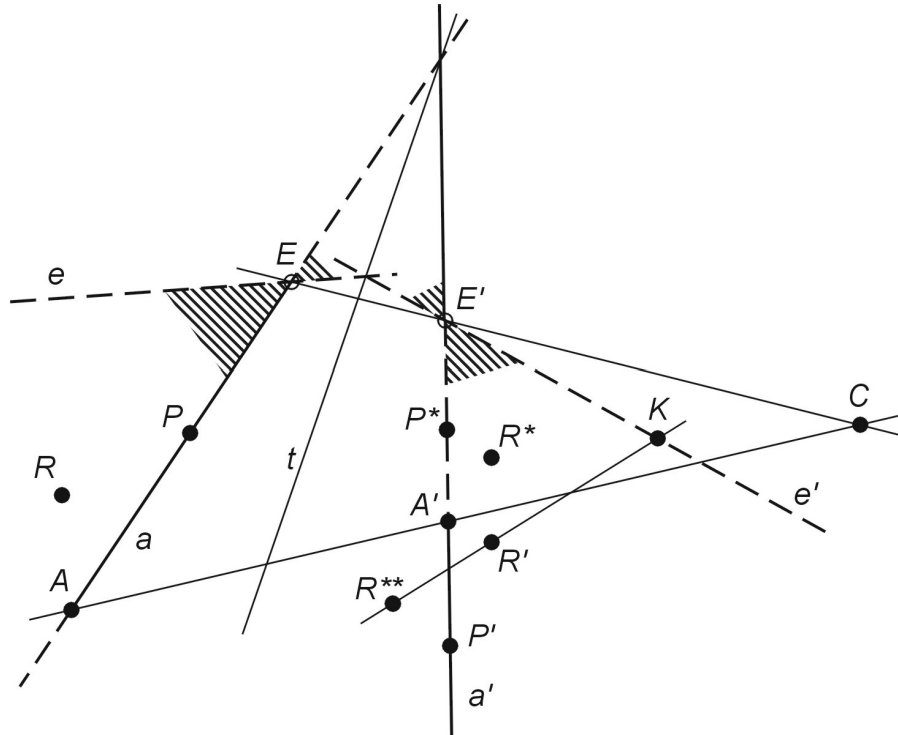
6.11. Tétel. *A kibővített euklideszi síkon minden kollineáció előáll egy hasonlóság és egy centrális-tengelyes kollineáció szorzataként. Ez utóbbi tényező pontosan akkor tengelyes affinitás, ha az ideális egyenes invariáns az adott kollineációnál.*

Bizonyítás. Kis módosítást hajtunk végre az előző konstrukción. A zászlók és a pontok választása után először ne affinitást tekintsünk, hanem csak egy olyan H hasonlóságot, amely Z félegyenesét V -ébe viszi, P -t pedig Q -ba. Ezután pedig azt a centrális-tengelyes kollineációt tekintsük, melynek tengelye a V félegyenesét tartalmazó egyenes, a $H(R)$ pontot S -be viszi, az ideális egyenest pedig f -be. $\square$

6.12. Tétel. *A kibővített euklideszi síkon minden kollineáció előáll legfeljebb három centrális-tengelyes kollineáció szorzataként.*

Bizonyítás. (10. ábra) Tekintsünk egy kollineációt, egy zászlót (félegyenesének kezdőpontja A , végpontja E , az (AE) egyenes a , másik határegyenese e) és egy-egy pontot a félegyenesén (P) és a belsejében (R), valamint ezek képeit a

kollineációnál (rendre A', E', a', e', P', R'). Legyen Φ_1 az a centrális-tengelyes kollineáció, melynek C centruma kollineáris az $A-A'$ és $E-E'$ pontpárokkal, t tengelye pedig konkurrens az $a-a'$ és $e-e'$ egyenespárokkal, továbbá A -t A' -be viszi. Legyen Φ_2 az a centrális-tengelyes kollineáció, melynek centruma A' , tengelye e' , továbbá $P^* := \Phi_1(P)$ -t P' -be viszi. (A 6.1. Tétel bizonyításában ez volt a centrális nyújtás.) Végül legyen Φ_3 az a centrális-tengelyes kollineáció, melynek tengelye a' , $R^{**} := \Phi_2\Phi_1(R)$ -et R' -be viszi, továbbá K centruma kollineáris az $R^{**}-R'$ pontpárral és illeszkedik e' -re. (A 6.2. Tétel bizonyításában ez volt a tengelyes affinitás.) A három transzformáció szorzata, $\Phi_3\Phi_2\Phi_1$, a 6.3. Tétel szerint egyenlő az adott kollinációval. (Elfajuló eset csak Φ_1 kapcsán fordulhat elő: pl. a centrumot meghatározó egyenesek egybeesnek. Ekkor induljunk ki másik zászlóból, hogy a nem kívánt egybeesés megszűnjön.) $\square$



10. ábra

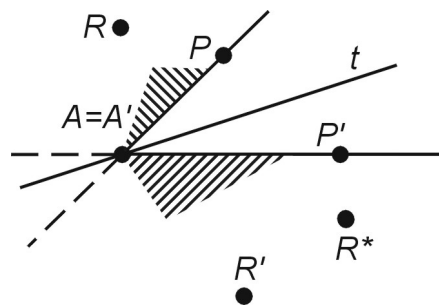
A négy leképezés definíciójában levő szorzat tényezőit más szempontból is vizsgáljuk. Célunk, hogy rendszerünk eszközeivel is megkapjuk a klasszikus tételt, hogy a kibővített euklideszi síkon minden kollineáció előáll legfeljebb két centrális-tengelyes kollineáció szorzataként. Ehhez felhasználjuk, hogy

minden olyan hasonlóságnak, ami nem egybevágóság, van egy fixpontja; továbbá, hogy minden kollineációnak van fixpontja vagy invariáns egyenese. E tételekre is konstruáltunk a szorzatos felépítéssel összhangban levő bizonyításokat. Ezek alapötlete viszonylag egyszerű, de a minden részletre kiterjedő bizonyítás hosszadalmas, főleg kollineációk esetén. Ezért ezeket az állításokat a felépítés áttekintése után, a 9. fejezetben külön fogjuk igazolni.

6.13. Tétel. *Az euklideszi síkon minden affinitás előáll két tengelyes affinitás szorzataként vagy egy eltolás és egy tengelyes affinitás szorzataként.*

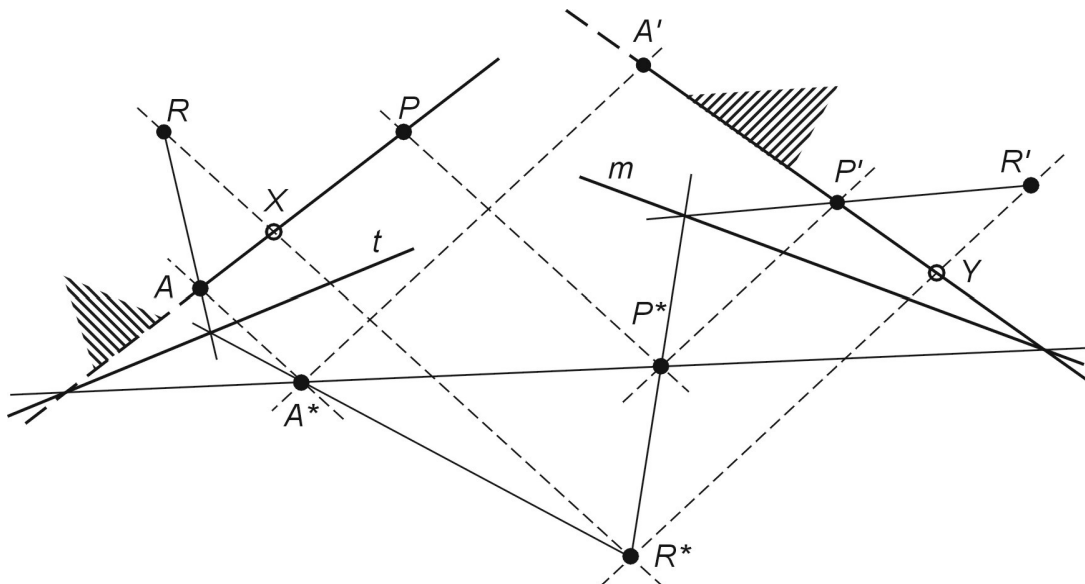
Bizonyítás. Ha az affinitás egybevágóság, akkor a 3.9. Tétel szerint két tengelyes tükrözés szorzataként vagy egy eltolás és egy tengelyes tükrözés szorzataként áll elő; a tengelyes tükrözés pedig tengelyes affinitás.

Ha az affinitás olyan hasonlóság, ami nem egybevágóság, akkor tekintsünk egy olyan zászlót, aminek kezdőpontja a hasonlóság fixpontja, A . Legyen P és R a zászló félegyenesének és belsejének egy-egy pontja, képeik az adott hasonlóságnál P' és R' , amik különböznek ősüktől. (11. ábra) Először tekintsünk egy olyan tengelyes affinitást, melynek t tengelye átmegy A -n, és P -t P' -be viszi. E leképezésnél R képe legyen R^* , ami nyilván nem R' . Majd tekintsük azt a tengelyes affinitást, melynek tengelye (AP') , és R^* -ot R' -be viszi. E két tengelyes affinitás szorzata a 6.2. Tétel szerint egyenlő az adott hasonlósággal.



11. ábra

Végül tekintsünk egy olyan affinitást, ami nem hasonlóság. A bizonyítás e részének elve [51]-ből származik. (A szereplő szakaszok nem irányítottak.) Válasszunk egy zászlót, továbbá a félegyenesén és a belsejében egy-egy pontot, P -t és R -et, a zászló félegyenesének kezdőpontja legyen A . (12. ábra)



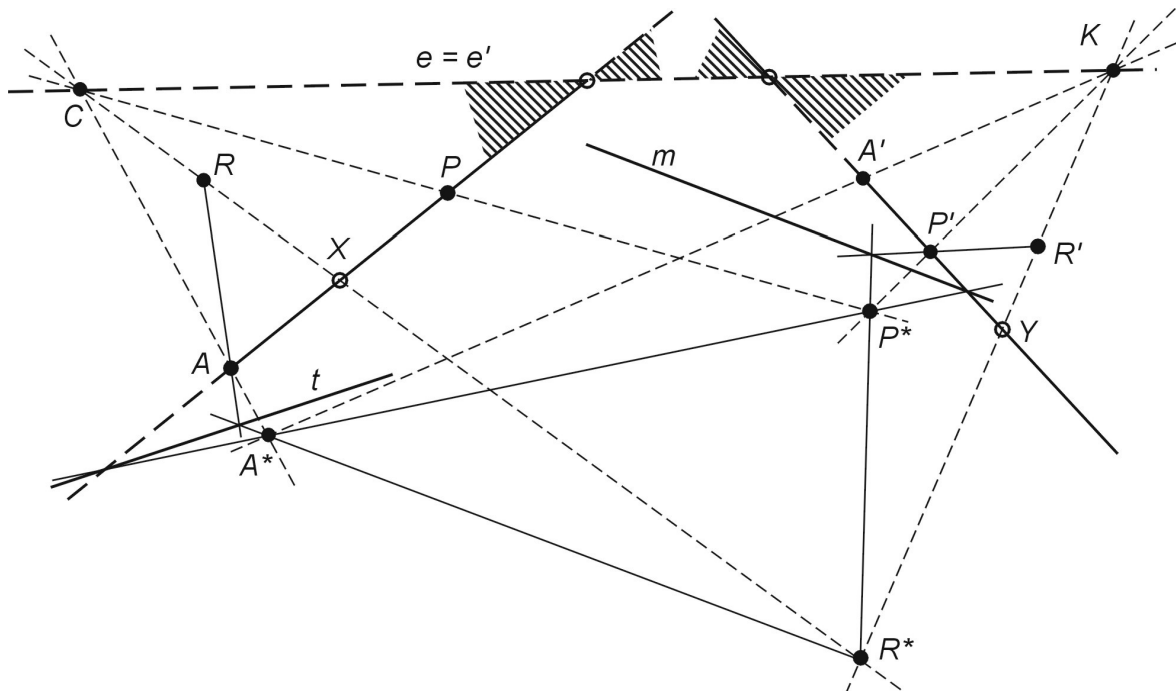
12. ábra

Tekintsük a zászló és a pontok affinitásnál kapott képeit: A' , P' , R' , továbbá az AP szakasz belsejében egy X , és az $A'P'$ szakaszon kívül, de az $(A'P')$ egyenesen egy Y pontot úgy, hogy (RX) és $(R'Y)$ messék egymást egy R^* pontban. (Ha esetleg (AP) és $(A'P')$ egybeesnének, válasszunk másik zászlót.) A^* , ill. P^* legyen az a pont, melyre $(AA^*) \parallel (RR^*)$, $(A'A^*) \parallel (R'R^*)$, ill. $(PP^*) \parallel (RR^*)$, $(P'P^*) \parallel (R'R^*)$. X és Y választása miatt $R^* \notin (A^*B^*)$. Az APR és $A^*P^*R^*$, ill. az $A^*P^*R^*$ és $A'P'R'$ háromszögpárokra – melyek közül legfeljebb az egyik egybevágó, hiszen az affinitás nem hasonlóság – alkalmazhatjuk az 5.9. Tételt. Így a t tengelyű, R -et R^* -ba vivő és az m tengelyű, R^* -ot R' -be vivő tengelyes affinitás szorzata – esetleg valamelyik tényező eltolás – a 6.2. Tétel szerint egyenlő az adott affinitással. $\square$

Az előző bizonyítás konstrukciói adták az ötletet a kollineációkra vonatkozó analóg tétel igazolásához.

6.14. Tétel. *A kibővített euklideszi síkon minden kollineáció előáll két centrális-tengelyes kollineáció szorzataként.*

Bizonyítás. Ha a kollineációnak fixpontja van (A), akkor az előző bizonyítás „hasonlóság” esetének módszerét alkalmazzuk (13. ábra). Ekkor a 6.3. Tétel alapján kapjuk, hogy a C centrumú, t tengelyű, P -t P' -be vivő, valamint a K



egyenlő az eredeti kollineációval. (Az R^* , A^* , P^* pontok konstrukciója ugyanaz, mint az előző tétel bizonyításának „affinitás” részében volt.)□

6.4. Osztályozás

A síkbeli hasonlóságok, affinitások és kollineációk osztályozása felépítésünkben a következőképpen történhet.

A hasonlóságok típusait, a fixpont felhasználásával, a 6.13. Tétel bizonyításában szereplő konstrukció mintájára kapjuk: Bármely olyan hasonlóság, ami nem egybevágóság, előáll egy, a fixpont körüli (esetleg nullszögű) elforgatás, vagy egy, a fixponton átmenő tengelyre való tükrözés és egy fixpont centrumú centrális nyújtás szorzataként. A 9. fejezetben, a fixpont konstruálásánál is utalunk majd e típusokra. (Megjegyezzük, hogy a síkbeli hasonlóságok osztályozására vonatkozó tétel nem szerepel sem [44]-ben, sem [45]-ben, de a két speciális transzformáció [45]-ben említésre kerül: [45], 111. o.)

Az affinitások, ill. kollineációk típusainak részletesebb vizsgálatánál általában a fix- és invariáns elemek vizsgálata a fő szempont (pl. [19], [24], [28], [31], [32], ill. [28]). Mi itt csak a 6.13. ill. 6.14. Tételek alapján történő osztályozást tekintjük.

Az affinitások típusait a 6.13. Tétel állításában szereplő tengelyes affinitások tengelyeinek helyzetéből kapjuk. Ha a két tengely metszi egymást, akkor metszéspontjuk fix a tengelyes affinitások szorzatánál. Egy ebből a fixpontból induló zászlóval kapjuk, hogy ekkor a szorzat előáll egy, a fixpont körüli forgatva (vagy tükrözve) nyújtás és egy, a fixponton átmenő tengelyű tengelyes affinitás szorzataként. Ha a két tengely párhuzamos egymással, akkor a tengelyek iránya fix a tengelyes affinitások szorzatánál, vagyis minden ilyen irányú egyenes párhuzamos a képével; továbbá minden ilyen irányú szakasz egybevágó a képével úgy, hogy eltolás viszi egyiket a másikba. Egy ilyen irányú félegyenesből induló zászlóval kapjuk, hogy ekkor a szorzat előáll egy eltolás és egy, az eredetiekkel párhuzamos tengelyű tengelyes affinitás szorzataként. Ha a két tengely egybeesik, akkor a tengelyes affinitások szorzata egy ugyanazon tengelyű tengelyes affinitás. Ugyanez a helyzet, ha a szorzatban a tenge-

lyes affinitás mellett elfajuló (identikus) eltolás szerepel. Tehát, bármely síkbeli affinitás egy eltolás és egy tengelyes affinitás szorzata, vagy egy forgatva (tükrözve) nyújtás és egy tengelyes affinitás szorzata; az egyik tényező lehet az identikus leképezés is.

A kollineációk típusait, az előzőkkel analóg módon, a 6.14. Tétel állításában szereplő centrális-tengelyes kollineációk tengelyeinek helyzetéből kapjuk. Ha a két tengely különböző, akkor metszéspontjuk fix a centrális-tengelyes kollineációk szorzatánál. Ha ez a pont közös, akkor egy ebből a pontból induló, a 6.10. és 6.11. Tételek bizonyításában szereplő zászlóval kapjuk, hogy ekkor a szorzat előáll egy, a fixpont körüli forgatva (vagy tükrözve) nyújtás és egy, a fixponton átmenő tengelyű centrális-tengelyes kollineáció szorzataként. Ha a fixpont ideális, akkor minden ilyen irányú közös szakasz egyállású a képével, így eltolás vagy centrális nyújtás viszi egyiket a másikba. Egy ilyen irányú félegyenesből induló, a 6.10. és 6.11. Tételek bizonyításában szereplő zászlóval kapjuk, hogy ekkor a szorzat előáll egy eltolás vagy egy centrális nyújtás és egy, a fixponton átmenő tengelyű centrális-tengelyes kollineáció szorzataként. Ha a két tengely egybeesik, akkor a centrális-tengelyes kollineációk szorzata egy ugyanazon tengelyű centrális-tengelyes kollineáció. Ugyanez a helyzet, ha a szorzatban az egyik tényező identikus. Tehát, bármely síkbeli kollineáció egy eltolás és egy centrális-tengelyes kollineáció szorzata, vagy egy forgatva (tükrözve) nyújtás és egy centrális-tengelyes kollineáció szorzata; az egyik tényező lehet az identikus leképezés is, a forgatás nullszögű is lehet.

7. További témakörök

A térbeli leképezések vizsgálata

A térbeli egybevágóság, ill. hasonlóság fogalma a síkratükörzés és a (térbeli) centrális nyújtás fogalmára épül. E fogalmak szorzatként történő definiálása és tulajdonságaik (alaptételek, osztályozás) vizsgálata a síkbeli esettel analóg módon történik, ezért itt nem részletezzük. Természetesen, a térbeli lehetőségek nagyobb száma miatt egyes részletek bonyolultabbak. (A térbeli egybevágóságokat, ill. hasonlóságokat osztályozó tétel [44]-ben nem szerepel. [45]-ben megemlítsre kerül az összes térbeli egybevágóság, a hasonlóságokat osztályozó tétel pedig igazolás nélkül szerepel: [45] 191.-192. o.)

A térbeli affinitások, ill. kollineációk témakörére is csak utalunk. A síkbeli fogalmaknak megfelelő planáris affinitás, térbeli affinitás, centrális-planáris kollineáció, térbeli kollineáció fogalmai a megfelelő síkbeli esettel analóg módon vezethetők be. A 6.2. és 6.3. Tételeknek megfelelő „zászlós” alaptételek is azokhoz hasonlóan tárgyalhatók. A térbeli zászlón 3 pont jelenik meg: egy-egy a félegyenes, a félsík és a féltér belsejében. A térbeli affinitás, ill. kollineáció szorzattényezőire vonatkozó tételek részben megváltoznak a megfelelő síkbeli 6.9.-6.12. Tételekhez képest. Érvényben marad a 6.10. Tétel térbeli megfelelője, a 6.12. Tétel térbeli megfelelőjében pedig csak annyi a változás, hogy eggyel nőhet a tényezők száma. A 6.9. és 6.11. Tételek térbeli megfelelői esetén jelentősebb a változás. Ennek az az oka, hogy bármely két szakasz hasonló, de vannak olyan háromszögek, amik nem. Ezért a 6.9. Tétel megfelelőjében a térbeli affinitás egy hasonlóság és két planáris affinitás szorzataként, a 6.11. Tétel megfelelőjében térbeli kollineáció egy hasonlóság, egy planáris affinitás és egy centrális-planáris kollineáció szorzataként áll elő.

Inverzió

Az eddig tárgyalt leképezések mellett fontos szerepet kap a felsőfokú geometriaoktatásban az inverzió is. Bizonyos értelemben ez is tekinthető

„centrummal”, „tengellyel” és „aránnal” rendelkező leképezésnek, tehát beletartozik az eddig vizsgált leképezés-sorozatba. Ezért az alábbiakban röviden áttekintjük, hogyan illeszthető be tárgyalása ebbe a felépítésbe.

A síkbeli inverziót általában az alapkörrel (a „tengellyel”) szokás megadni, de előfordul a „centrum” és az „arány” megadása is (pl.: [31]). Mi a második módot választjuk, mert ezzel az új fogalom megalkotása szervesen kapcsolódhat a centrális nyújtáshoz. Annál ugyanis az O fixponthoz képes egy P pont helyzetét úgy változtattuk, hogy az $\frac{OP'}{OP}$ hányados állandó legyen. Az inverzió bevezetésének motivációja az a kérdés lehet, hogy milyen leképezést kapnánk, ha a hányados helyett az OP és OP' szakaszok szorzatának állandóságát írnánk elő. Természetesen utalnunk kell rá, hogy egy ilyen típusú szorzat függ az egységszakasz választásától; a leképezés egyértelműsége miatt az állandónak is ilyen típusú mennyiségnek kell lennie. Így az euklideszi síkon egy O pont (a „pólus”) mellett nem egy számot, hanem egy r szakaszt rögzítünk. Ezután az inverzió definíciója természetesen a hagyományos: A $P(\neq O)$ pont képe az a P' pont $[OP)$ -n, amire $OP' \cdot OP = r^2$. (Ebben a definícióban irányítás nélküli szakaszokat tekintünk. r^2 az inverzió „hatványa”.)

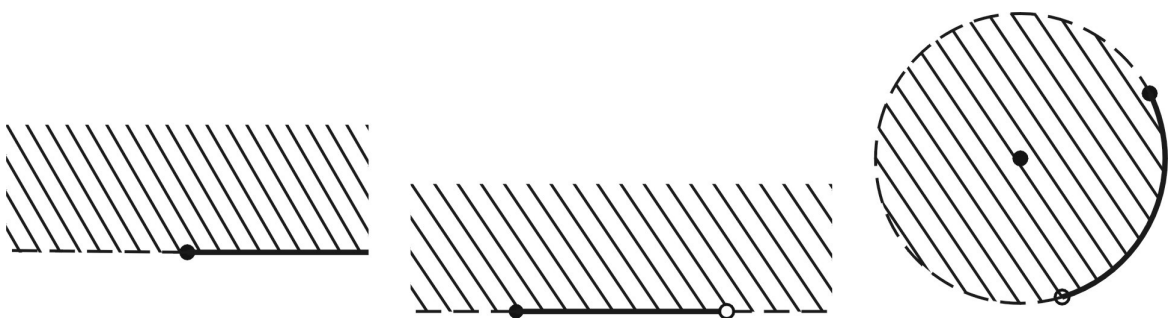
Az inverzió tulajdonságait ismét a 3.1-3.4 Tételekkel és az 5. fejezetbeli I.-IV. pontokkal analóg módon foglaljuk össze.

- I. *Bármely inverzió a pólustól megfosztott euklideszi sík involutorikus, „kör-egyenes”-tartó transzformációja, aminek van centruma és olyan fixköre („tengelye”), ami bármely rá nem illeszkedő pontot elvált a képétől.*
- II. *Az euklideszi síkon bármely O ponthoz és r szakaszhhoz pontosan egy olyan inverzió létezik, melynek pólusa O , hatványa r^2 . Az euklideszi sík bármely köréhez pontosan egy olyan inverzió létezik, melynek fixköre az adott kör.*
- III. *Az euklideszi síkon bármely O ponthoz, és két, tőle különböző, de egy O kezdőpontú félegyenesen levő ponthoz pontosan egy olyan inverzió létezik, melynek pólusa O , és az adott pontok egymás képei.*

IV. Az euklideszi síkon bármely két, nem egybevágó körhöz, vagy egy körhöz és egy olyan egyeshez, ami nem szelő pontosan egy olyan inverzió létezik, amelynél az adott alakzatok egymás képei. Ha az egyenes szelője a körnek, akkor két inverzió létezik közöttük, egymásra merőleges fixkörökkel.

A továbblépéshez bevezetjük az „egy ideális ponttal kiegészített euklideszi sík”, más néven „inverzív” (pl. [6]) vagy „Möbius” (pl. [43]) sík fogalmát, és kiterjesztjük rá az egyenes, az inverzió és a tengelyes tükrözés fogalmait. Ezek után, a 3.6., 4.4.-4.6. Definíciók mintájára, tengelyes tükrözések és inverziók véges szorzataként vezethetjük be a „kiegészített euklideszi sík” összetett leképezését. E leképezésre a „homográfia” elnevezés kínálkozna, de ezt a nevet csak a páros számú tényezőből álló szorzatra használja az irodalom, a páratlan tényezőt antihomográfiának nevezi (pl. [6]).

A korábbi „zászlós” alaptételek – 3.7., 6.1.-6.3. Tételek – analogonja is megfogalmazható, de előtte – csakúgy, mint a kollineációnál – ki kell terjeszteni a „zászló” fogalmát is. Egy kör-egyenes két pontja két részre bontja; ezeket nevezzük „félegyenes”-nek. Egy kör-egyenes a síkot két részre bontja; ezeket nevezzük „fél sík”-nak. Így a „kiegészített euklideszi síkon” is egy fél sík és egy, a határán levő, egyik végén zárt, a másikon nyílt félegyenes unióját nevezzük zászlónak (A 15. ábra néhány zászlótípust ábrázol.)

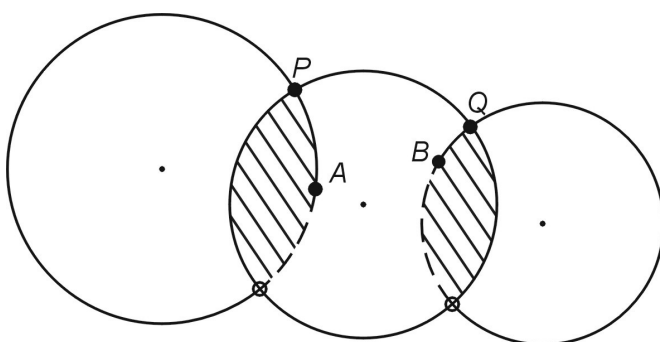


15. ábra

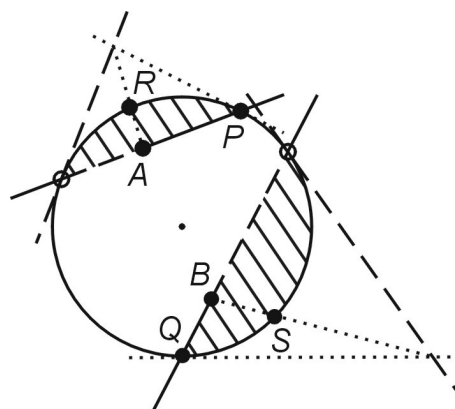
7.1. Tétel. Legyen adott a „kiegészített euklideszi síkon” két zászló, továbbá a félegyenesükön egy-egy pont. Pontosán egy olyan tengelyes tükrözésekből és inverziókból álló szorzat létezik, amelynél az első zászló képe a második zászló, az elsőn kijelölt ponté pedig a másodikon kijelölt pont.

A hiperbolikus síkgeometria körmodelljei

Az inverzió, ill. a centrális-tengelyes kollineációk tulajdonságainak fenti formában történt összefoglalása igen alkalmas arra, hogy a tengelyes tükrözés fogalmának modelli definiálása után igazoljuk a Tükrözési axiómák síkbeli megfelelőinek teljesülését a hiperbolikus síkgeometria Poincarè, ill. Cayley-Klein körmodelljeiben. Mi itt csak a 3.5. Tételre utalunk röviden. Ennek állítása a 7.1., ill. a 6.3. Tételből adódik a modelli zászlókhöz természetes módon kapcsolódó, megfelelő zászlók és pontok segítségével (16., 17. ábrák).



16. ábra



17. ábra

8. A téma oktatásával kapcsolatos megjegyzések

Véleményünk szerint az egységes felépítésre való törekvés egy nagyon fontos didaktikai elv. A fogalmak analóg módon történő definiálása segíti az új fogalom megértését, a fogalmak összekapcsolását. Továbbá, az analóg tulajdonságok kiemelése, ezek hasonló módon történő bizonyítása is nagyban hozzájárul az összefüggések megértéséhez. Ellenben, a menetközben történő radikális szemlélet-, módszerváltás zavart okozhat. Másrészt, egy módszer kizárólagos, „mindenáron” való alkalmazása is káros lehet.

Az egységre való törekvésen túl vannak más szempontok is, ami alapján eldöntjük, hogy egy témakört hogyan tanítunk, hogyan dolgozunk fel, egy-egy részproblémát milyen – a „fővonaltól” esetleg eltérő – módszerrel oldunk meg. Ilyen szempont lehet pl.: a tanulók előismerete, tudásszintje; a témakör feldolgozásához rendelkezésre álló időkeret; a vizsgált témakör más témákkal való kapcsolata; a módszerek hatékonysága, egyszerűsége vagy bonyolultsága; a tanár véleménye, tapasztalata az egyes módszerekről.

A módszerválasztás kapcsán nagyon találónak és tanulságosnak tartjuk a következő, H. S. M. Coxeter egyik könyvéből származó idézetet ([8] 127. o.):

„Gyakran előfordul, hogy az algebrai tételt könnyű bebizonyítani, a megfelelő „tisztá geometriai” bizonyítást megtalálni viszont csak nem kis találékonysággal lehet. Ezért sok matematikus inkább az algebrai eljárás felé hajlik, ezzel azt kockáztatva, hogy (például) a kúpszelet egy egész diáknemzedék szemében csupán egyfajta másodfokú egyenletnek tűnjék. Sok minden szól amellet, hogy a leghelyesebb minden feladatot elfogulatlanul, a legjobbnak ígérkező módszerrel megoldani. Az előző fejezetekben a tiszta, vagy „szintetikus” módszert követtük, de most helyreállítjuk az egyensúlyt, megmutatván hogyan kaphatjuk meg egyik-másik eredményünket analitikusan.”

Különösen fontosnak tartjuk a módszerek közötti egyensúlyra való törekvést. A képzésnek az is célja, hogy a hallgatók lehetőség szerint többféle eszközt, megoldási módot ismerjenek meg – azok előnyeivel és hátrányaival együtt –, amit majd alkalmazhatnak, ill. továbbadhatnak. A következőkben megpróbáljuk sorravenni, hogy a konstruktív módszer didaktikai és matematikai elveinek milyen következményei vannak, továbbá hogy hol és hogyan kapcsolható össze más módszerekkel.

1. A geometriai transzformációk konstruktív definíciói teljes összhangban vannak a függvények megszokott, elemi megadási módjával: a definíciók az értelmezési tartományt és a hozzárendelési szabályt rögzítik. Azonnal meg tudjuk adni, meg tudjuk „mutatni” bármely pont képét. Ezért konkrétabbak, „kézzelfoghatóbbak”, viszont hosszabbak, bonyolultabbak, mint a hagyományos definíciók. Utóbbiakban bizonyos tulajdonságokkal rendelkező függvényosztályt definiálunk. (Pl.: „a sík olyan egyenestartó transzformációja, aminek van tengelye”). Pont képének megadása csak egyéb, a definícióban nem szereplő tulajdonságok levezetése után lehetséges.

2. A konstruktív módszer nem a legáltalánosabb, nem a legkevesebbet kívánó formában vezeti be a fogalmakat. Minden leképezéstípus vizsgálata egy speciális esettel kezdődik; ennek jellemzése után következik a szorzatleképezés. A speciális felől haladni az általános felé szintén fontos didaktikai elv. Ha azonban a sok tulajdonság közül meg akarjuk határozni a legfontosabbakat – amik meghatározzák a leképezést – akkor ez külön vizsgálatot igényel. Ezzel a tárgyalás – a hagyományos felépítéssel összehasonlítva – hosszadalmasabbá, kevésbé „gazdaságossá” válik. A hagyományos felépítés az általános esettel kezd, a leképezés fő invariánsai közvetlenül a definícióban jelennek meg. Ez a mód az általánosítás, az analitikus jellemzés, a más geometriákban való megjelentetés szempontjából előnyösebb. A szorzatalakban való előállítás nem kell külön tételben vizsgálni, a megadással kapcsolatos alaptételek igazolásában megjelenik.

3. A 6.2. fejezetben érintettük a transzformációk hagyományos és konstruktív definícióinak egyenértékűségét. Véleményünk szerint az ekvivalencia említése, vizsgálata nemcsak elméletileg, hanem az oktatás szempontjából is fontos. Egybevágóság és hasonlóság esetén azért, mert a hallgatók közoktatásbeli tanulmányaik során más definíciót ismertek meg ezekre a fogalmakra, ill. tanárként más definíciót fognak majd tanítani. Affinitás és kollineáció esetén pedig azért, mert a hallgatók esetleges későbbi tanulmányai során más geometriákban más definíció vonatkozik rájuk. A különböző definíciótípusok zavart okozhatnak, ha nem tárgyaljuk kapcsolatukat.

A középiskolai tankönyvek az egybevágóságot a hagyományos módon, a távolságtartás tulajdonságával vezetik be (pl. [10], [12], [13], [14], [29], [30], [60]). A szerzők általában a geometriai transzformációk általános tárgyalásával kezdik a témakört a 9. osztályos tankönyvben, utána vezetik be az egybevágóság fogalmát, majd részletezik ennek speciális eseteit. Olyan is előfordul, hogy a tengelyes tükrözéssel kezdődik a témakör, majd a többi speciális egybevágósággal folytatódik, az egybevágóság definíciója pedig ezután kerül sorra. A tengelyes tükrözésekkel való előállítás is eltérően jelenik meg. Előfordul, hogy már a típusok fogalmait előkészítő példákban tengelyes tükrözések szorzatát vizsgálják. De általában a típusok definiálása és tulajdonságainak vizsgálata után kerül sor tengelyes tükrözésekkel való előállításukra, esetleg csak a 10. osztályban. Van olyan tankönyv is, ami nem érinti ezt a témát.

A hasonlóság definíciója kétféleképpen jelenik meg a különböző tankönyvekben: vagy az aránytartás tulajdonságával vezetik be ([10], [12], [60]), vagy centrális nyújtás és egybevágóság szorzataként definiálják ([13], [14], [29], [30]). Eltérések vannak a hasonlóság arányának fogalmával és a centrális nyújtás arányának előjelével kapcsolatban is.

Több szakköri füzet és egyéb, a közoktatás számára írt mű is foglalkozik a nevezetes leképezésekkel, pl.: [11], [43], [47], [48], [49], [50], [52], [63]. Ezekben is általában a hagyományos definíciók találhatók. Egyedül [11]-ben

vannak a speciális egybevágóságok tengelyes tükrözések szorzataként értelmezve.

Az egységes rendszer kialakítása érdekében az affinitás és a kollineáció fogalmait is metrikus alapon vezettük be úgy, hogy szorosan kapcsolódtunk a korábban tanult leképezések definícióihoz. A hallgatóknak ez természetes, hiszen erős bennük a leképezésekkel kapcsolatos metrikus gondolkodás. Ez azonban azt a téves képzetet is okozhatja, hogy ezeket a fogalmakat – sőt, az „egész” geometriát – kizárólag metrikus alapon lehet tárgyalni. Ezen segíthet, ha a megfelelő tételek után szólunk a hagyományos felépítéssel való kapcsolatról, a fő invariánsok kiemelésével. Ez lazítja a metrikus fogalmakhoz való kötődést, előkészíti az általánosítást, a más geometriák felé való nyitást.

A különböző definiálási módokat esetleg rögtön a fogalom bevezetésénél is lehet érinteni. A megfelelő speciális leképezések tárgyalása után az általános leképezés fogalmát egy-egy olyan tételre alapozhatjuk, amiben bizonyos tulajdonságok egyenértékűségét rögzítjük:

8.1. Tétel. *Az abszolút sík egy leképezésének alábbi tulajdonságai ekvivalensek egymással:*

- *Előáll véges sok tengelyes tükrözés szorzataként.*
- *Távolságtartó transzformáció.*

Az ilyen leképezést egybevágóságnak nevezzük.

8.2. Tétel. *Az euklideszi sík egy leképezésének alábbi tulajdonságai ekvivalensek egymással:*

- *Előáll egy egybevágóság és egy centrális nyújtás szorzataként.*
- *Előáll véges sok tengelyes tükrözés és centrális nyújtás szorzataként.*
- *Aránytartó transzformáció.*

Az ilyen leképezést hasonlóságnak nevezzük.

8.3. Tétel. *Az euklideszi sík egy leképezésének alábbi tulajdonságai ekvivalensek egymással:*

- *Előáll egy hasonlóság és egy tengelyes affinitás szorzataként.*

- Előáll véges sok tengelyes affinitás és centrális nyújtás szorzataként.
- Egyenestartó transzformáció.

Az ilyen leképezést affinitásnak nevezzük.

8.4. Tétel. A kibővített euklideszi sík egy leképezésének alábbi tulajdonságai ekvivalensek egymással:

- Előáll egy affinitás és egy centrális-tengelyes kollineáció szorzataként.
- Előáll véges sok centrális-tengelyes kollineáció szorzataként.
- Egyenestartó transzformáció.

Az ilyen leképezést kollineációnak nevezzük.

Ezek után a leképezések fenti tulajdonságai közül azt használjuk egy-egy további kérdés vizsgálatában, amelyik az adott esetre a legalkalmasabb.

4. Felépítésünkben nemcsak az egybevágóság definíciója tér el a közoktatásban szereplőtől, hanem annak axiomatikus alapja is. Persze az általános- és középiskolai tankönyvekben nincs explicit módon megjelenő axiómarendszer, de egy, a szemlélet alapján elfogadott, többé-kevésbé burkolt alap természetesen mindig van. Ez az alap – a fenti tankönyvek alapján – vagy a térbeli „mozgás”, vagy szakaszok, szögek „egybevágósága” (esetleg mindkettő), ill. ezek alapvető tulajdonságai. A tankönyvek ezek alapján vezetik be az egybevágóság, és a különböző tükrözések fogalmait. A Tükrözési axiómákon alapuló tárgyalásban pontosan az „ellenkező irányú” felépítéssel találkozunk a hallgatók: itt a síkratükrözésen alapul „minden”. Tehát pl. a tengelyes tükrözés fogalmának bevezetésénél a megszokott, felezőmerőlegest vagy térmozgást alkalmazó definíció helyett egy teljesen új formájú és szemléletű definíciót ismernek meg a hallgatók (3. fejezet, 8. o). Ez a „szemléletváltás” problémát jelent a hallgatóknak, különösen azért, mert rögtön a geometria-tanulmányok elején jelentkezik. Ezt a problémát talán csak később lehet feloldani, pl. amikor a Párhuzamossági axiómával ekvivalens állításokat tárgyaljuk. Ekkor bővebben lehet szót ejteni arról, hogy más axiómák is „létrehozhatják” ugyanazt a geometriát. Természetesen itt azzal a problémával is szembe kell nézni, hogy a hallgatók

mennyire vannak tisztában az axiómarendszer ún. „klasszikus” („szemléleten”, fizikai tapasztalatokon alapuló) és „modern” (definíciós, logikai) jelentésével ([65]).

5. A kollineációk tárgyalásánál is felmerül egy axiomatikus jellegű probléma Ezt a leképezést az „ideális elemekkel kibővített euklideszi sík”-on vezettük be, amit „projektív sík”-nak is nevezhetnénk, mert illeszkedési, rendezési és folytonossági struktúrája modellezi az ún. „valós (klasszikus) projektív sík” axiómarendszerét. Mi mégsem használtuk ezt a fogalmat, a következők miatt. Vizsgálataink során végig különbséget tettünk az ideális és a közönséges elemek között, továbbá a Tükrözési és Párhuzamossági axiómákon alapuló metrikus fogalmakat használtunk. A valós projektív síkon azonban (eredendően) nincsenek sem kitüntetett elemek, sem euklideszi alapú metrika. Ha a hallgató későbbi tanulmányai során találkozik a projektív geometria axiomatikus tárgyalásával, zavart okozhat a projektív sík fogalmának kétféle használata. Ha a centrális-tengelyes kollineációt csak az eltűnési egyenestől megfosztott euklideszi síkon definiálnánk, akkor megmaradnánk az euklideszi geometria keretei között. De ez körülményesebbé is tenné a tárgyalást, hiszen több ilyen leképezés szorzatánál több egyenest kellene kizárni. Természetesen a hagyományos axiomatikus projektív utat is választhatjuk, és csak a valós projektív sík geometriájának kiépítése után kapcsoljuk össze a kollineáció és a többi leképezés fogalmait (pl. [8], [28]).

6. A síkbeli és térbeli leképezések közötti kapcsolat is figyelmet érdemel. Külön a síkban és a térben ugyan egységes felépítést valósítottunk meg, de nincs „teljes” egység a sík és a tér között. Egyrészt nem „egyforma” pl. a síkbeli és térbeli egybevágóság definíciója: az egyikben tengelyes, a másikban síkratükrözés szerepel. Természetesen csak formailag nem egyezik meg, tartalmilag igen, hiszen a síkbeli tengelyes tükrözést síkratükrözéssel definiáljuk. (Ilyen fogalmi „kettősség” más felépítésben is előfordul. Pl. a hagyományos felépítésben szakaszok, szögek egybevágósága alapfogalom, más alakzatoké pedig az erre az alapfogalomra visszavezetett távolságtartó leképezésekkel van

definiálva.) A másik probléma az, hogy a síkbeli leképezéseket egy síkon belül definiáltuk, a térben két különböző sík között nem létesítenek kapcsolatot. Ezért a két sík közötti párhuzamos, ill. centrális vetítés külön, új típusú speciális leképezésként jelenik meg. Viszont felhasználásukkal össze lehet kapcsolni a sík- és térgeometriát úgy, hogy beillesztjük ezeket is a szorzatos felépítésbe: síkbeli tengelyes affinitást előállíthatunk síkok közötti térbeli tengely körüli elforgatás és párhuzamos vetítés szorzataként; síkbeli, közösleges centrumú és tengelyű centrális-tengelyes kollineációt pedig előállíthatunk síkok közötti térbeli tengely körüli elforgatás és centrális vetítés szorzataként. Így ezeket az előállításokat is felhasználhatjuk a leképezések vizsgálatában.

7. Eddig nem érintettünk azt a fontos kérdést, hogy mi lesz kör (kúpszelet) képe a leképezésekben. Ennek vizsgálata csak az affinitások, ill. kollineációk esetén okoz problémát. Kör (kúpszelet) affin, ill. kollineációs képének vizsgálata a hagyományos felépítésben részben vagy egészben analitikus geometriai módon történik. A konstruktív felépítésben is szükségünk van erre az eszközre. Kör tengelyes affinitásnál, ill. centrális-tengelyes kollineációnál kapott képének vizsgálatát csak körülményes módon tudjuk beilleszteni a szorzatos felépítésbe. Az előző pont végén említett, térbeli előállításokkal kapjuk, hogy kör képe tengelyes affinitásnál, ill. centrális-tengelyes kollineációnál egy körhenger-ill. körkúp felület és egy sík metszészvonala. Egyenes körhenger, ill. körkúp esetén a Dandelin-tételek megadják választ, hogy mi ez a metszet, a ferde esetre azonban nem. Affinitás esetén, kitérővel ugyan, de még választ kaphatunk ezen a módon. Ugyanis minden affinitás előállítható egy hasonlóság és egy merőleges tengelyes affinitás szorzataként (pl. [25], [41]); merőleges tengelyes affinitásnál pedig elérhető, hogy egyenes körhenger síkmetszete legyen a vizsgált kör képe. De kollineáció esetén általában már nem tudjuk biztosítani az egyenes körkúpot. Ferde körkúp síkmetszetének vizsgálata pedig mindenképpen igényel koordinátageometriai eszközöket is (Apollóniusz „szümptóma”-keresése; speciális síkkal pl. [53], általános esetben pl. [64]). A többi kúpszelet képének vizsgálatára pedig csak annyiban alkalmas a fenti módszer, hogy

levezethetjük: minden kúpszelethez van olyan centrális-tengelyes kollineáció – ellipszis esetén már tengelyes affinitás is –, ami őt körbe viszi. (Felhasználva, hogy minden kúpszelet előállítható egyenes körkúp – ellipszis esetén egyenes körhenger is jó – síkmetszeteként, pl. [15].) Természetesen, ez az eredmény elég több fontos témával kapcsolatban is: igazolható, hogy bármely két kúpszelethez van olyan kollineáció, aminél az egyik képe a másik; megoldhatók kúpszelet és egyenes metszésével, érintésével kapcsolatos feladatok; bizonyíthatók a Pascal és Brianchon tételek. (Hiszen ezeket körre „könnyen” megkaphatjuk; pl. Pascal [9], [41], Brianchon [9], [15], [44].)

Ha a kúpszeletek affin, ill. kollineációs képének vizsgálatát teljes általánosságában részletezni akarjuk, akkor ezt a kezdetektől fogva analitikusan tárgyaljuk. De véleményünk szerint, több szempontból ekkor is megéri egy speciális esetben – egyenes körhengert, ill. -kúpot feltételezve – a fenti, szorzatos módon választ keresni. Egyrészt motivációs céllal; másrészt nagyon szép példája a sík- és térgeometria összekapcsolásának; harmadrészt, sejtést fogalmazhatunk meg az általános esetre. Utána pedig – utalva arra, hogy nem minden esetben alkalmazható ez a módszer – természetes módon merül fel az analitikus mód, hiszen a sejtett képek egyenleteit ismerjük.

8. Részben ugyanez a helyzet a leképezések fixpontjával kapcsolatban is. A következő fejezetben ismertetünk a hasonlóságok és kollineációk fixpontjának létezésére egy szorzatokra épülő konstrukciót, aminek alapja a 3.10. Tétel. Mint látni fogjuk, a minden részletre kiterjedő bizonyítás – főleg kollineáció esetén – hosszadalmas. Ha nem akarunk mindent kirészletezni, akkor hasonlóság esetén viszonylag röviden megmutathatjuk a fixpont létét. Természetesen több más szintetikus módszer is rendelkezésre áll hasonlóság fixpontjával kapcsolatban. De a kollineációk fixpontját már mindenképpen analitikus úton érdemes keresni.

9. Itt említjük meg, hogy éppen az előzőekben említett, szintetikusan nehezen tárgyalható részek eredményeinek szemléltetésében nagyban segíthet egy dinamikus geometriai szoftver használata, pl. a magyar „Euklides”, a francia

„Cabri”, a német „Cinderella” ([70], [67], [68], [1]). Már pl. az eltolás és az elforgatás tárgyalása kapcsán haszonnal alkalmazható, amikor azt vizsgáljuk, hogy az őket előállító tükrözések tengelyei közül az egyik (bizonyos feltételek mellett) tetszőlegesen vehető fel. Egyenes, kör, kúpszelet képének vizsgálatakor is nagy segítséget nyújt a részletek mozgathatósága, mozgó pont nyomvonalának meghatározása, különösen affinitás, kollineáció és inverzió esetén. A hasonlóság (és a kollineáció) fixpontjára adott konstrukciónk papíron, táblán nehezen elképzelhető részletei is hatásosan, az alapötletet megvilágító módon jeleníthetők meg ezzel az eszközzel.

9. Fixpont, invariáns egyenes

9.1. Hasonlóság

A síkbeli valódi hasonlóságok fixpontja létezésének többféle bizonyítása ismeretes. Paralelogrammát felhasználó, klasszikus bizonyítás: pl. [6], [20], [31], [41], [51], [52], [55]. A fixpont meghatározása körökkel irányítástartó esetben: pl. [5], [39], [42], [52], [66] ([52]-ben Apollóniusz-körrel az általános eset is). Koordinátageometriai, lineáris algebrai módszer: pl. [3]. Szintén lineáris algebrai, az affinitások fixpontjára vonatkozó megfontolások: pl. [31], [32]. A folytonosság fogalmát felhasználó bizonyítás: pl. [5] (a térbeli esetre; a fixpont szerkesztése Apollóniusz-gömbbel). Szintén [5]-ben az irányításváltó esetre a klasszikustól eltérő konstrukció is szerepel.

Mi itt olyan bizonyítást adunk, amely szervesen kapcsolódik eddigi felépítésünkhöz ([36]). Konstrukciónk alapja a leképezések szorzat alakja, és a 3.10. Tétel. A bizonyítás 1. pontja (tengelyes tükrözés) az előzőekben utoljára említett, [5]-beli konstrukcióhoz hasonlít.

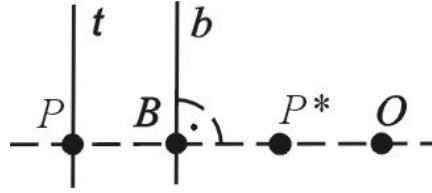
9.1. Tétel. *Az euklideszi síkon minden olyan hasonlóságnak, ami nem egybevágóság, pontosan egy fixpontja van.*

Bizonyítás. Tekintsünk egy nem 1 arányú hasonlóságot, amit a 6.8. Tétellel állítsunk elő $N_{O,\lambda}\mathbf{M}$ alakban, ahol $\mathbf{M}$ egybevágóság, $\lambda > 0$, $\lambda \neq 1$. A fixpont egzisztenciájának bizonyításánál a 3.10. Tétel alapján két fő esetet különböztetünk meg: 1. $\mathbf{M}$ tükrözés (tengelyes vagy centrális); 2. $\mathbf{M}$ két tükrözés szorzata (csúsztatva tükrözés, eltolás vagy elforgatás).

1. $\mathbf{M} = \mathbf{T}_b$, tengelyes tükrözés. (18. ábra) O -nak b -re való merőleges vetületét jelölje B . Az $N_{O,\lambda}\mathbf{T}_b$ szorzatnak P fixpontja lesz, ha $OP = \lambda OP^*$, ahol

$P^* := \mathbf{T}_b(P)$. A tükrözés miatt $BP^* = PB$, így $\frac{OP}{OP^*} = \frac{OB + BP}{OB - BP}$. Ez pontosan

akkor egyenlő λ -val, ha $BP = \frac{\lambda-1}{\lambda+1}OB$. Nyilván létezik ilyen P pont, és az előzőek szerint fixpontja az adott hasonlóságnak.



18. ábra

Ha tekintjük a P fixponton átmenő, (OP) -re merőleges t egyenest, akkor azonnal látszik, hogy az adott hasonlóság t -nek P kezdőpontú félegyeneseit invariánsan hagyja, a t által határolt félsíkokat pedig felcseréli. Így a 6.1. Tétel szerint $\mathbf{N}_{O,\lambda}\mathbf{T}_b = \mathbf{N}_{P,\lambda}\mathbf{T}_t$ tükrözve nyújtás.

Ha $\mathbf{M} = \mathbf{T}_B$ centrális tükrözés, akkor is az előző gondolatmenettel és képlettel kapjuk a P fixpontot. (OP) -nek a P kezdőpontú félegyenesei, és az általa határolt félsíkok is felcserélődnek, így a 6.1. Tétel szerint, most $\mathbf{N}_{O,\lambda}\mathbf{T}_B = \mathbf{N}_{P,-\lambda}$ centrális nyújtás.

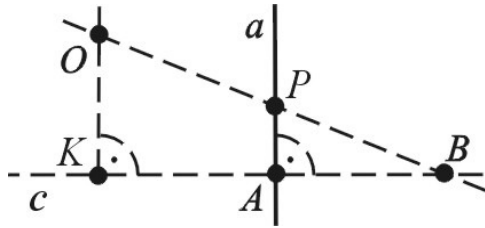
2. Az eltolás, elforgatás és csúsztatva tükrözés eseteket az előzőekre fogjuk visszavezetni. A második tükrözés tengelyét, ill. centrumát bizonyos feltételek mellett szabadon vehetjük fel. Azt vizsgáljuk, hogyan kell ezt felvenni ahhoz, hogy a rá való tükrözés és $\mathbf{N}_{O,\lambda}$ szorzatának fixpontja illeszkedjen az első tükrözés tengelyére. Ekkor ugyanis ez a pont az adott hasonlóságnál is fix lesz.

Legyen először $\mathbf{M}$ csúsztatva tükrözés, jelölje c $\mathbf{M}$ invariáns egyenesét. Tudjuk, hogy $\mathbf{M} = \mathbf{T}_B\mathbf{T}_a$, ahol $a \perp c$, $B \in c$, $B \notin a$ (19., 20. ábra). A felbontás nem egyértelmű, pl. B -t tetszőlegesen választhatjuk, csak az AB szakasz nagysága és iránya legyen állandó, ahol $A := a \cap c$. Jelölje P $\mathbf{N}_{O,\lambda}\mathbf{T}_B$ 1. esetben kapott fixpontját, K pedig O merőleges vetületét c -n. Célunk, hogy B -t úgy vegyük fel c -n, hogy P illeszkedjen a megfelelő a -ra. P pontosan akkor

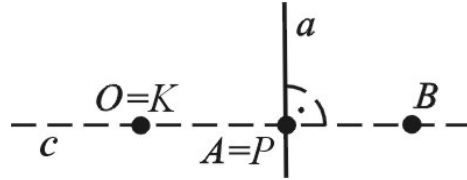
illeszkedik a -ra, ha $\frac{OB}{BP} = \frac{KB}{BA}$. (Ha $K \neq O$, akkor hasonló háromszögek miatt;

ha $K = O$, akkor pedig a megfelelő szakaszok egyenlősége miatt.) Válasszuk

B -t úgy, hogy $KB = \frac{1+\lambda}{1-\lambda} AB$. Ekkor az 1. eset miatt $P \in a$.



19. ábra



20. ábra

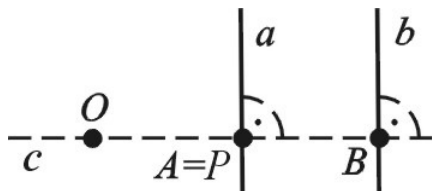
A centrális tükrözésnél kapott előállítás miatt a hasonlóság $N_{P,-\lambda} T_a = N_{P,\lambda} T_t$ tükrözve nyújtás, ahol t a P -n átmenő, a -ra merőleges egyenes.

Legyen másodszor M eltolás, jelölje c az O -ra illeszkedő invariáns egyenesét.

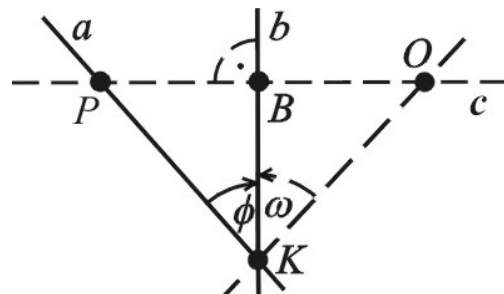
Tudjuk, hogy $M = T_b T_a$, ahol $a \perp c$, $b \perp c$ (21. ábra). A felbontás nem egyértelmű, pl. b -t tetszőlegesen választhatjuk, csak az AB szakasz nagysága és iránya legyen állandó, ahol $A := a \cap c$, $B := b \cap c$. Az előző esethez hasonló

módon kapjuk, hogy ha b -t úgy választjuk, hogy $OB = \frac{1+\lambda}{1-\lambda} AB$, akkor

$N_{O,\lambda} T_b$ 1. esetnél kapott fixpontja illeszkedni fog a -ra. Az 1. esetben a tengelyes tükrözésnél kapott előállítás miatt a hasonlóság most $N_{P,\lambda} T_t T_a = N_{P,\lambda}$ centrális nyújtás, mert itt $t = a$.



21. ábra



22. ábra

Végül legyen $\mathbf{M}$ elforgatás, jelölje K a fixpontját. Tudjuk, hogy $\mathbf{M} = \mathbf{T}_b \mathbf{T}_a$, ahol $K \in a, b$ (22. ábra). A felbontás nem egyértelmű, pl. b -t tetszőlegesen választhatjuk, csak ϕ nagysága és iránya legyen állandó, ahol ϕ a és b irányított szöge. Ha $O = K$, akkor ez a pont nyilván fix az adott hasonlóságnál. Ha $\phi = 0^\circ$, akkor $\mathbf{M}$ az identikus leképezés, ekkor O a hasonlóság fixpontja. Ha $|\phi| = 90^\circ$, akkor $\mathbf{M}$ középpontos tükrözés, az 1. esetben már vizsgáltuk. A továbbiakban legyen $O \neq K$ és $0^\circ < |\phi| < 90^\circ$. Most is az a cél, hogy b -t úgy vegyük fel, hogy $\mathbf{N}_{O,\lambda} \mathbf{T}_b$ 1. esetnél kapott fixpontja, P , illeszkedjen a megfelelő a -ra. Jelölje c az O -ból b -re állított merőleges egyenest, B pedig a metszéspontjukat. P pontosan akkor illeszkedik a -ra, ha $\frac{OB}{PB} = \frac{\operatorname{tg} \omega}{\operatorname{tg} \phi}$, ahol ω jelöli a (KO) és b egyenesek irányított szögét. ($|\omega| \neq 90^\circ$, mert $|\phi| \neq 90^\circ$.)

Válasszuk b -t úgy, hogy $\operatorname{tg} \omega = \frac{1+\lambda}{1-\lambda} \operatorname{tg} \phi$. Ekkor az 1. eset miatt $P \in a$. A tényleges tükrözésnél kapott előállítás miatt a hasonlóság most $\mathbf{N}_{P,\lambda} \mathbf{T}_t \mathbf{T}_a$, vagyis forgatva nyújtás az eredeti szöggel, hiszen $t \parallel b$.

Ezzel minden esetben megkonstruáltuk a fixpontot. A szorzatelőállításokból adódik, hogy más fixpont nincs. A fixpont unicitása természetesen az aránytartásból és a $\lambda \neq 1$ feltételből is adódik. $\square$

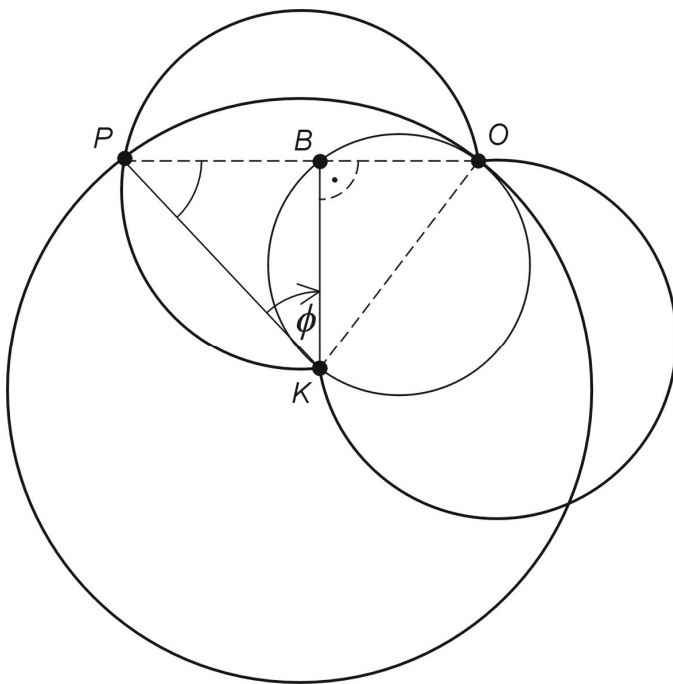
Megjegyezzük, hogy az egyes esetekben a bizonyítás szerkesztési eljárást is ad a fixpontra, ha adott az egység és a λ szakasz is. Az elforgatás és a csúsztatva tükrözés esetén más szerkesztés is adható. A $BP = \frac{\lambda-1}{\lambda+1} OB$

egyenlőségből kapjuk, hogy $OP = \frac{2\lambda}{\lambda+1} OB$, így P éppen B képe az O

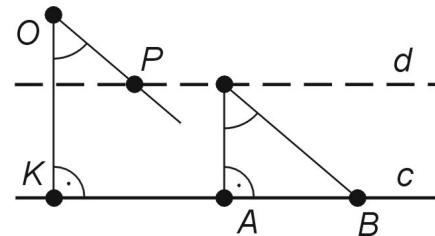
centrumú, $\frac{2\lambda}{\lambda+1}$ arányú centrális nyújtásnál. Az elforgatás esetében ez azt

jelenti, hogy miközben b „körbefordul” K -n, $\mathbf{N}_{O,\lambda} \mathbf{T}_b$ P fixpontjának mértani

helye éppen OK Thalész körének képe az előbb említett centrális nyújtásnál (22., 23. ábrák). Másrészt a P fixpont rajta van OK $90^\circ - |\phi|$ szögű látókörén is. A két kör metszéspontjai közül az lesz a keresett P fixpont, amire az OKP háromszög pozitív, ill. negatív körüljárású, attól függően, hogy ϕ pozitív, ill. negatív. Csúsztatva tükrözés esetében pedig, miközben B „végigfut” c -n, $N_{O,\lambda}T_B$ P fixpontjának mértani helye éppen c képe az előbb említett centrális nyújtásnál, d (19., 24. ábrák). Másrészt $(KOP) \sphericalangle = (APB) \sphericalangle$, ami AB segítségével szerkeszthető. (Itt OK -t és AB -t is irányítás nélkül tekintettük.)



23. ábra



24. ábra

A térbeli valódi hasonlóságok fixpontjának konstrukciója teljesen hasonló a síkbeli esethez. A gondolatmenet alapja a 3.10. Tétel következő analogonja: A tér minden egybevágósága előáll két tükrözés szorzataként úgy, hogy az egyik tükrözés fixalakzatát – ami lehet sík, egyenes vagy pont – bizonyos feltételek mellett tetszőlegesen választhatjuk. Ha egy térbeli valódi hasonlóságot előállítunk egy egybevágóság és egy centrális nyújtás szorzataként, akkor itt is az első tényező típusait kell sorra venni. Ha ez a tényező tükrözés, csúsztatva tükrözés, eltolás vagy tengely körüli elforgatás, akkor a pontosan ugyanazzal a

módszerrel, képlettel kapjuk a fixpontot, mint a megfelelő síkbeli esetben. Forgatva tükrözésnek, ill. csavarásnak nincs síkbeli megfelelője; ezek metsző síkra és egyenesre, ill. két kitérő egyenesre vonatkozó tükrözések szorzatai. Itt a forgatás, ill. a forgatás és eltolás módszereit alkalmazva kapjuk a fixpontot.

9.2. Kollineáció

Következik a síkbeli kollineációk fixpontjára, invariáns egyenesére vonatkozó tétel. Ezt leggyakrabban analitikus úton igazoljuk (pl.: [21], [28], [57]). Szintetikus bizonyításai is léteznek: a fixpont bizonyos kúpszeletek metszéspontjaként adódik pl. [4]-ben, [7]-ben, [62]-ben; [28]-ban pedig egy különleges bizonyítás szerepel, ami nagyrészt a Dedekind-féle folytonossági axiómán alapul.

Mi a hasonlóság fixpontjára vonatkozó fenti konstrukcióval analóg módszer alkalmazunk: A kollineációt három leképezés szorzatára bontjuk, és elérjük, hogy a második és harmadik leképezés szorzatának fixpontja az elsőnél is fix legyen ([38]). Itt is az egybevágóságokra vonatkozó 3.10. Tételben szereplő választhatóság lesz az alap.

9.2. Tétel. *A kibővített euklideszi síkon minden kollineációnak van fixpontja vagy invariáns egyenese.*

Bizonyítás. Affinitásnál az ideális egyenes invariáns. Centrális-tengelyes kollineációnál pl. a centrum fixpont. Nem affin és nem centrális-tengelyes kollineációk esetén a bizonyítást az alábbi három segédtételekre alapozzuk.

9.3. Segédétel. *A kibővített euklideszi sík minden nem affin, és nem centrális-tengelyes kollineációja előáll egy irányításváltó egybevágóság és egy speciális vagy egy olyan általános centrális-tengelyes kollineáció szorzataként, melynek aránya pozitív, de nem 1.*

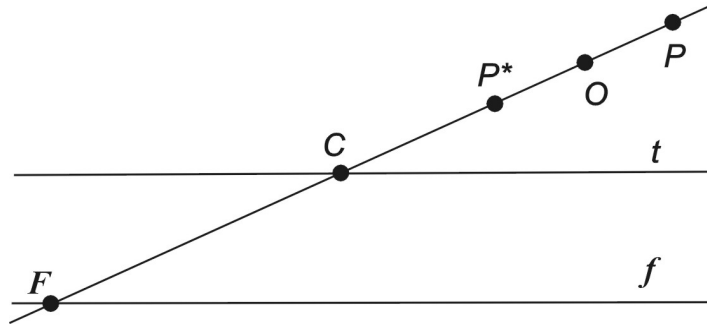
9.4. Segédétel. *Tekintsük egy olyan centrális tükrözés és egy olyan nem affin speciális centrális-tengelyes kollineáció szorzatát, melyek centrumai különbözők. A szorzatnak van közös fixpontja a centrumok egyenesén.*

9.5. Segédttétel. *Tekintsük egy olyan centrális tükrözés és egy pozitív, de nem 1 arányú olyan nem affin általános centrális-tengelyes kollineáció szorzatát, melyek centrumai különbözők. A szorzatnak van közös fixpontja a centrumok egyenesén.*

A 9.3. Segédttétel bizonyítása. Tekintsünk egy, a feltételeknek megfelelő Φ kollineációt. A 6.10. Tétel alapján Φ -t előállíthatjuk egy H hasonlóság és egy Φ_1 centrális-tengelyes kollineáció szorzataként úgy, hogy a H irányítástartása vagy -váltása nincs még meghatározva. Válasszuk most H -t irányításváltónak, arányát jelölje $\mu(>0)$, Φ_1 centrumát pedig jelölje C . H -t bontsuk fel egy M irányításváltó egybevágóság és egy C centrumú N centrális nyújtás szorzatára. N aránya lehet μ is és $-\mu$ is, később fogjuk megválasztani. N és Φ_1 szorzata egy olyan egyenestartó transzformáció, melynek C centruma, és melynél az ideális egyenes képe i' . Tehát – az 5.7. Tétel szerint – ez a szorzat is egy nem affin centrális-tengelyes kollineáció, Φ_2 , melynek centruma C , irányegyenese pedig i' . Ezzel – a 6.3. Tétel szerint – az eredeti Φ kollineációt előállítottuk az M irányításváltó egybevágóság és a Φ_2 nem affin centrális-tengelyes kollineáció szorzataként. A továbbiakban megmutatjuk, hogy N arányának megfelelő választásával elérhető, hogy Φ_2 speciális vagy pedig pozitív arányú általános centrális-tengelyes kollineáció legyen. Ha Φ_1 speciális centrális-tengelyes kollineáció, és $\mu=1$, akkor N arányát válasszuk 1-nek; ekkor Φ_2 egyenlő Φ_1 -gyel. Ha Φ_1 speciális centrális-tengelyes kollineáció, de $\mu \neq 1$, akkor Φ_2 olyan általános centrális-tengelyes kollineáció lesz, melynek aránya megegyezik N arányával. Ebben az esetben N arányát válasszuk μ -nek. Ha Φ_1 általános centrális-tengelyes kollineáció, akkor Φ_2 speciális vagy olyan általános centrális-tengelyes kollineáció, melynek aránya egyenlő Φ_1 és N arányainak szorzatával, attól függően, hogy ez a szorzat 1 vagy nem. Ekkor N arányát válasszuk úgy, hogy Φ_1 arányával való szorzata pozitív legyen. $\square$

A 9.4. Segédttétel bizonyítása. (25. ábra) A Φ_2 speciális centrális-tengelyes kollineáció centruma C , tengelye t , irányegyenese f , a tükrözés centruma O , $O \neq C$, és először legyen $O \notin t$. Olyan P közöséges pontot keresünk (CO) -n, melyre $\Phi_2(P^*) = P$, ahol $P^* := T_O(P)$. Ez pontosan akkor teljesül – a 4.3.b.

Definíció szerint –, ha $\frac{CP}{P^*P} = \frac{FC}{CP^*}$.



25. ábra

A tükrözés miatt $\frac{CP}{P^*P} = \frac{CO + OP}{2OP}$, $\frac{FC}{CP^*} = \frac{FC}{CO - OP}$. Legyen $x := \frac{OP}{CO}$, és

$c := \frac{FC}{CO} (\neq 0)$; c konstans, független P (CO) -n való helyzetétől. Ezeket felhasználva, $x \neq 0; 1$ esetén a fixpontra a következő feltételt kapjuk:

$$\frac{1+x}{2x} = \frac{c}{1-x}, \quad x^2 + 2cx - 1 = 0$$

Sem 0, sem 1 nem lehet gyök, mert $c \neq 0$. A diszkrimináns $4c^2 + 4 > 0$, tehát az egyenletnek két egymástól, 0-tól és 1-től különböző valós gyöke van:

$$x_{1,2} = -c \pm \sqrt{c^2 + 1}$$

$OP = xCO$ alapján megkapjuk a P közöséges fixpontot.

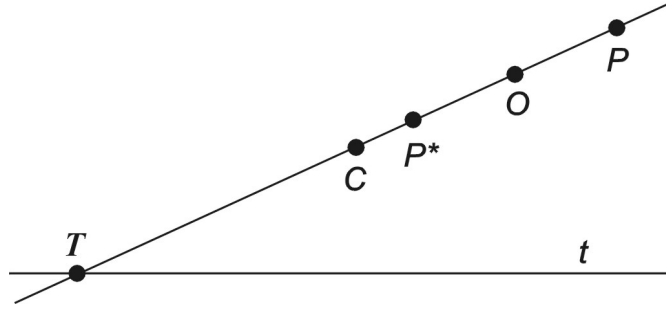
Ha $O \in t$, akkor O nyilván fixpont, és $\frac{OO}{FC} = 0$. Másrészt ekkor $c \rightarrow -\infty$

vagy $c \rightarrow \infty$ attól függően, hogy O az f -et tartalmazó félsíkban vagy a másikban tart t -hez. $\lim_{c \rightarrow \infty} (-c + \sqrt{c^2 + 1}) = \lim_{c \rightarrow -\infty} (-c - \sqrt{c^2 + 1}) = 0$. Tehát a fenti képlet

$O \in t$ esetén is – határértékként – fixpontot szolgáltat. $\square$

A 9.5. Segédttétel bizonyítása. (26. ábra) A Φ_2 általános centrális-tengelyes kollineáció centruma C , tengelye t , aránya $\lambda(> 0, \neq 1)$, a tükrözés centruma O , $O \neq C$, és $T := (CO) \cap t$, és először legyen T közös pont. Olyan P közös pontot keresünk (CO) -n, melyre $\Phi_2(P^*) = P$, ahol $P^* := \mathbf{T}_O(P)$. Ez

pontosan akkor teljesül – a 4.3.a. Definíció szerint –, ha $\frac{CP}{TP} = \lambda \frac{CP^*}{TP^*}$.



26. ábra

$\frac{CP}{TP} = \frac{CO + OP}{TO + OP}$, és a tükrözés miatt $\frac{CP^*}{TP^*} = \frac{CO - OP}{TO - OP}$. Legyen $x := \frac{OP}{CO}$,

$a := \frac{TO}{CO} (\neq 1)$; a konstans, független P (CO) -n való helyzetétől. Ezeket fel-

használva, $x \neq \pm a$ esetén a fixpontra a következő feltételt kapjuk:

$$\frac{1+x}{a+x} = \lambda \frac{1-x}{a-x}, \quad x^2 + \frac{\lambda+1}{\lambda-1}(a-1)x - a = 0$$

$x = \pm a$ esetén $a(a-1)\frac{2\lambda}{\lambda-1} = 0$, ill. $a(1-a)\frac{2}{\lambda-1} = 0$, így $\pm a$ pontosan akkor

gyök, ha $a = 0$. Ha $a = 0$, akkor a gyökök: $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{\lambda+1}{\lambda-1}$. $x_2 \neq 0$, így ez

a gyök fixpontot szolgáltat. $a = \frac{TO}{CO} = 0$ pontosan akkor, ha $T = O$, $O \in t$.

Ekkor O nyilván fixpont, így az $x_1 = 0$ gyök is fixpontot szolgáltat. Tegyük fel

ezután, hogy $a \neq 0$. Legyen $r := \frac{\lambda+1}{\lambda-1}$, és $s := a-1$. Így az egyenlet:

$$x^2 + rsx - (s+1) = 0$$

Diszkriminánsa $r^2s^2 + 4s + 4$, $r^2 > 0$. Ez utóbbi kifejezés diszkriminánsa

$$16(1-r^2) = -\frac{64\lambda}{(\lambda-1)^2}, \text{ ami } \lambda > 0 \text{ miatt negatív. Így a fixpontot meghatározó}$$

egyenlet diszkriminánsa pozitív, tehát az egyenletnek két egymástól és $\pm a$ -tól különböző valós gyöke van:

$$x_{1,2} = \frac{-rs \pm \sqrt{r^2s^2 + 4(s+1)}}{2}$$

Ha itt $s = -1$, vagyis $a = 0$, akkor éppen az $a = 0$ eset gyökeit kapjuk. Tehát ez a képlet a -tól függetlenül határozza meg a fixpontokat. $OP = xCO$ alapján megkapjuk a P közös fixpontot.

Ha T ideális pont, akkor a fixpontra vonatkozó feltétel – a 4.3.a. Definíció

szerint – $CP = \lambda CP^*$. $CO + OP = \lambda(CO - OP)$, tehát $\frac{OP}{CO} = \frac{\lambda-1}{\lambda+1} = \frac{1}{r}$. Más-

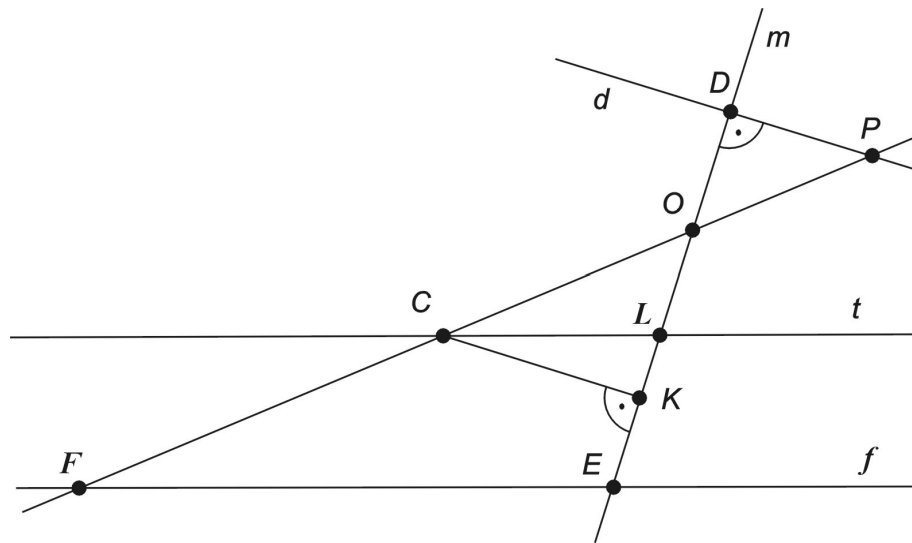
részt ekkor $s \rightarrow -\infty$ vagy $s \rightarrow \infty$ attól függően, hogy O a t -t tartalmazó félsíkban vagy a másikban tart a C -n átmenő t -vel párhuzamos egyeneshez. Ha

$$r > 0, \text{ akkor } \lim_{s \rightarrow \infty} \left(-rs + \sqrt{r^2s^2 + 4(s+1)} \right) = \lim_{s \rightarrow -\infty} \left(-rs - \sqrt{r^2s^2 + 4(s+1)} \right) = \frac{2}{r}.$$

Ha $r < 0$, akkor a négyzetgyökök előjelének felcserélésével ugyanezeket a határértékeket kapjuk. Tehát a fenti képlet akkor is fixpontot szolgáltat – határértékként –, ha T ideális pont. $\square$

A 9.2. Tétel bizonyításának folytatása. Legyen tehát Φ egy olyan kollineáció, ami nem affin és nem centrális-tengelyes kollineáció, és a 9.3. Segédétel alapján állítsuk elő $\Phi = \Phi_2 \mathbf{M}$ alakban, ahol $\mathbf{M}$ irányításváltó egybevágóság, Φ_2 pedig nem affin centrális-tengelyes kollineáció. $\mathbf{M}$ tengelyes tükrözés vagy csúsztatva tükrözés. Ha $\mathbf{M}$ tengelyes tükrözés, akkor a tengelyek metszéspontja fix. Legyen most $\mathbf{M}$ csúsztatva tükrözés, invariáns egyenese m , Φ_2 centruma C , tengelye t . Ha $C \in m$, akkor m invariáns egyenese Φ -nek is. Ha $m \perp t$ vagy $m \parallel t$, akkor t ideális pontja fix Φ -nél. A továbbiakban legyen m olyan, hogy $C \notin m$, $m \not\perp t$, és m a közös L pontban metszi t -t (27., 28.

1. eset: Φ_2 speciális centrális-tengelyes kollineáció. (27. ábra) Φ_2 -vel kapcsolatban ua. jelöléseket használjuk, mint a 9.4. Segédétel bizonyításánál. Legyen továbbá K C -nek m -re való merőleges vetülete; $E := f \cap m$; O : $O \in m$, $O \neq L$, egyébként tetszőleges; $D := d \cap m$. Az OD szakasz nagysága és iránya állandó, ezeket az $\mathbf{M}$ csúsztatva tükrözés meghatározza. Legyen P a $\Phi_2 \mathbf{T}_O$ szorzat egyik közös fixpontja (CO) -n. Célunk, hogy P illeszkedjen d -re. Ez pontosan akkor áll fenn, ha $\frac{OP}{CO} = \frac{OD}{KO}$.



A 9.4. Segédétel bizonyításának végén kaptuk, hogy $\frac{OP}{CO} = -c \pm \sqrt{c^2 + 1}$, ahol

$$c = \frac{FC}{CO}, \text{ ami most egyenlő } \frac{EL}{LO} \text{-val. Másrészt } \frac{OD}{KO} = \frac{\frac{OD}{EL}}{\frac{KL}{EL} + \frac{LO}{EL}}. \text{ Legyen}$$

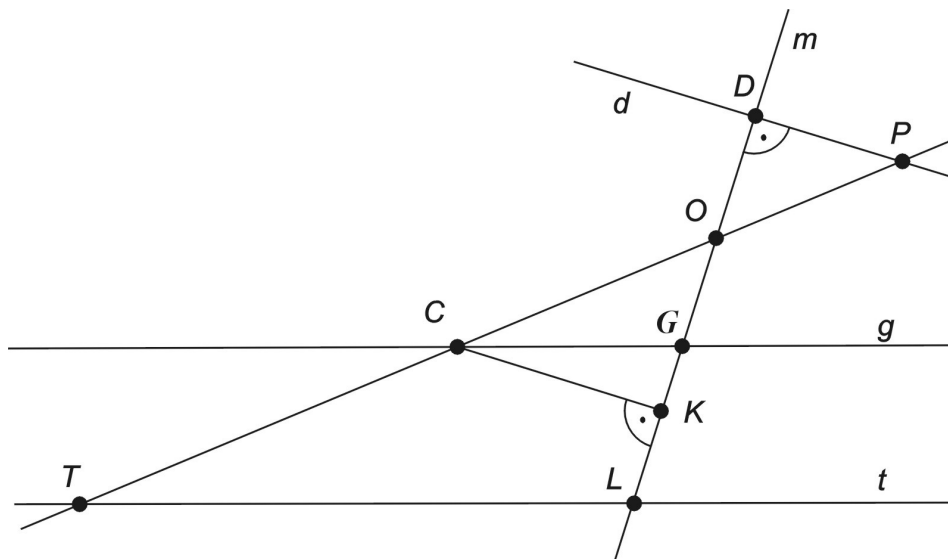
$\alpha := \frac{OD}{EL} (\neq 0)$ és $\beta := \frac{KL}{EL} (\neq 0)$; ezek konstansok, függetlenek O m -en való helyzetétől. $c \neq 0$; $-\frac{1}{\beta}$ esetén $P \in d$ feltétele:

$$-c \pm \sqrt{c^2 + 1} = \frac{\alpha}{\beta + \frac{1}{c}}, \quad 2\alpha\beta c^3 + (\alpha^2 + 2\alpha - \beta^2)c^2 - 2\beta c - 1 = 0$$

Sem 0, sem $-\frac{1}{\beta}$ nem gyök, mert $\alpha, \beta \neq 0$. Továbbá, az egyenlet harmadfokú, így van valós megoldása. $LO = \frac{1}{c}EL$ alapján választva O -t, teljesül a $P \in d$ illeszkedés. (Feltettük, hogy $O \neq L$; ez teljesül, mert itt L -től különböző O -t kapunk.) Ezzel a speciális centrális-tengelyes kollineáció esetét lezártuk.

2. eset: Φ_2 általános centrális-tengelyes kollineáció. (28. ábra.) Φ_2 -vel kapcsolatban ua. jelöléseket használjuk, mint a 9.5. Segédétel bizonyításánál. Legyen továbbá K C -nek m -re való merőleges vetülete; $g: C \in g, g \parallel t$; $G := g \cap m$; $O: O \in m, O \neq G$, egyébként tetszőleges; $D := d \cap m$. Az OD szakasz nagysága és iránya állandó, ezeket az $\mathbf{M}$ csúsztatva tükrözés meghatározza. Legyen P a $\Phi_2 \mathbf{T}_O$ szorzat egyik közös fixpontja (CO) -n. Célunk,

hogy P illeszkedjen d -re. Ez pontosan akkor áll fenn, ha $\frac{OP}{CO} = \frac{OD}{KO}$.



28. ábra

A 9.5. Segédétel bizonyításánál kaptuk: $\frac{OP}{CO} = \frac{-rs \pm \sqrt{r^2 s^2 + 4(s+1)}}{2}$, ahol

$$r = \frac{\lambda+1}{\lambda-1}, \quad s = \frac{TO}{CO} - 1. \quad \text{Itt} \quad \frac{TO}{CO} = \frac{LO}{GO} = \frac{\frac{LG}{OD}}{\frac{GK}{OD} + \frac{KO}{OD}} + 1. \quad \text{Legyen} \quad \alpha := \frac{LG}{OD} (\neq 0)$$

és $\beta := \frac{GK}{OD} (\neq 0)$; ezek konstansok, függetlenek O m -en való helyzetétől. Így

$$s = \frac{\alpha}{\beta + \frac{KO}{OD}}, \quad \text{ebből} \quad \frac{OD}{KO} = \frac{s}{\alpha - \beta s}. \quad s \neq \frac{\alpha}{\beta} \quad \text{esetén tehát} \quad P \in d \quad \text{feltétele:}$$

$$\frac{-rs \pm \sqrt{r^2 s^2 + 4(s+1)}}{2} = \frac{s}{\alpha - \beta s},$$

$$\beta(\beta + r)s^3 + (\beta^2 - 2\alpha\beta - \alpha r - 1)s^2 + \alpha(\alpha - 2\beta)s + \alpha^2 = 0$$

Sem $\frac{\alpha}{\beta}$, sem 0 nem gyök, mert $\alpha \neq 0$. Ha az egyenlet harmad- vagy elsőfokú, akkor van valós gyöke. Ha másodfokú, vagyis $\beta + r = 0$, és az új főegyüttható nem 0, akkor az egyenlet:

$$(r^2 + \alpha r - 1)s^2 + \alpha(\alpha + 2r)s + \alpha^2 = 0$$

Diszkriminánsa $\alpha^2(\alpha + 2r)^2 - 4(r^2 + \alpha r - 1)\alpha^2 = \alpha^2(\alpha^2 + 4) > 0$, így ekkor is van valós gyöke az egyenletnek. Még azt kell belátnunk, hogy az egyenlet legalább elsőfokú. Ha ez nem lenne igaz, akkor $r(r + \alpha) = 1$, $\alpha = -2r$ lenne, és így $-r^2 = 1$, ami nem lehet. $GO = \frac{1}{s}LG$ alapján választva O -t, teljesül a $P \in d$ illeszkedés. (Feltettük, hogy $O \neq G$. Ez teljesül, mert itt G -től különböző O -t kapunk.) Ezzel az általános centrális-tengelyes kollineáció esetét is lezártuk, a 9.2. Tételt beláttuk. $\square$

A hasonlóság fixpontjára vonatkozó tétel után, annak szerkesztése kapcsán említettünk bizonyos, a fixponttal kapcsolatos mértani helyet. Most ennek ana-

lóg eseteként, a 9.2. Tétel kiegészítéseként megvizsgáljuk a $\Phi_2 T_O$ szorzat fix-pontjainak mértani helyét, miközben O végigfut m -en. Ez a mértani hely nem olyan egyszerű, mint ami a hasonlóságnál volt, meghatározására analitikus módszert alkalmazunk.

1. eset: Φ_2 speciális centrális-tengelyes kollineáció. (27. ábra)

A koordinátarendszert a következőképpen vesszük fel: $L(0;0)$, $t: y=0$, $f: y=-1$. Legyen $C(k;0)$ ($k \neq 0$); $m: x+by=0$; $O(-bo;o)$ ($o \neq 0$). Ekkor $CO(-bo-k;o)$, $F\left(\frac{ok+k+bo}{o};-1\right)$, $FC\left(-\frac{k+bo}{o};1\right)$. Mivel $FC=cCO$, így $c=\frac{1}{o}$. Felhasználva a 9.4. Segédétel bizonyításának végén a P fixpontra kapott formulát:

$$OP = \left(-\frac{1}{o} \pm \sqrt{\frac{1}{o^2} + 1} \right) CO, \text{ ill. } P = L$$

attól függően, hogy $O \neq L$ ($o \neq 0$), ill. $O = L$ ($o = 0$). Legyen $P(x;y)$. Ekkor az első koordinátára:

$$x+bo = (-bo-k) \frac{-1 \pm \sqrt{1+o^2}}{o}, \text{ ill. } x=0$$

$$ox^2 + 2o^2xb - 2oxb - 2xk - 2b^2o^2 - 2bok - 2bo^2k - ok^2 = 0, \text{ ill. } x=0$$

A második koordinátára:

$$y-o = o \frac{-1 \pm \sqrt{1+o^2}}{o}, \text{ ill. } y=0$$

$$y^2 - 2yo + 2y - 2o = 0, \text{ ill. } y=0$$

Ezekből a "CoCoA" nevű komputer-algebrai szoftver ([56]) segítségével a következő egyenletet kapjuk $(x;y)$ -ra:

$$by^2 + xy + 2x + (k+2b)y = 0$$

A másodfokú polinom mátrixának vizsgálata adja, hogy ez egy hiperbola egyenlete: a mátrix determinánsa $\det(A) = \frac{k}{2} \neq 0$, a megfelelő aldetemináns $\det(A_{33}) = -\frac{1}{4} < 0$. A C -n átmenő egyenesek közül pontosan az aszimptotákkal párhuzamosoknak van egy közös pontjuk a hiperbolával. (CL) -nek egy pontja van a görbén – $L(0;0)$ –, így az egyik aszimptota párhuzamos az x -tengellyel, egyenlete $y = -2$. A többi (CO) egyenesnek $(O \in m, O \neq L)$ két pontja van a görbén, tehát a másik aszimptotának m -mel kell párhuzamosnak lennie, egyenlete $x + by = -k$. A C -n átmenő, m -mel párhuzamos egyenes s : $x + by = k$, és ennek hiperbolán levő pontja $S(k+b; -1)$. Ez a pont nem fixpont egyetlen O esetén sem.

2. eset: Φ_2 általános centrális-tengelyes kollineáció. (28. ábra)

A koordinátarendszert a következőképpen vesszük fel: $L(0;0)$, t : $y = 0$, $C(k;1)$. Legyen m : $x + by = 0$ ($k + b \neq 0$); $O(-bo;o)$ ($o \neq 1$); $G(-b;1)$. Így $CO(-bo-k;o-1)$, $T\left(\frac{ok+ob}{o-1};0\right)$, $TC\left(-\frac{k+bo}{o-1};1\right)$. Mivel $TC = sCO$, így $s = \frac{1}{o-1}$. Felhasználva a 9.5. Segédétel bizonyításának végén a P fixpontra kapott formulát:

$$OP = \frac{-\frac{r}{o-1} \pm \sqrt{\frac{r^2}{(o-1)^2} + \frac{4o}{o-1}}}{2} CO, \text{ ill. } OP = \frac{1}{r} CO$$

attól függően, hogy $O \neq G$ ($o \neq 1$), ill. $O = G$ ($o = 1$). Legyen $P(x;y)$. Így az első koordinátára:

$$x + bo = (-bo - k) \frac{-r \pm \sqrt{r^2 + 4o(o-1)}}{2(o-1)}, \text{ ill. } x + b = (-b - k) \frac{1}{r}$$

$$ox^2 - x^2 + 2xbo^2 - 2xbo - xbor - xkr - b^2o^2r - bokr - b^2o^2 - 2bo^2k - k^2o = 0,$$

$$\text{ill. } x = -\frac{rb + b + k}{r}$$

A második koordinátára:

$$y - o = (o - 1) \frac{-r \pm \sqrt{r^2 + 4o(o - 1)}}{2(o - 1)}, \text{ ill. } y = 1$$

$$y^2 - 2oy + ry - or + o = 0, \text{ ill. } y = 1$$

Ezekből a "CoCoA"-val most a következő egyenletet kapjuk $(x; y)$ -ra:

$$by^2 + xy + (r - 1)x + (k + br)y = 0$$

A másodfokú polinom mátrixának vizsgálata adja, hogy ez is egy hiperbola

egyenlete: a mátrix determinánsa $\det(A) = \frac{(r - 1)(b + k)}{4} = \frac{b + k}{2(\lambda - 1)} \neq 0$, a meg-

felelő alldetermináns $\det(A_{33}) = -\frac{1}{4} < 0$. A két aszimptota most is párhuzamos

t -vel, ill. m -mel, egyenleteik: $y = 1 - r$, ill. $x + by = -k - b$. Az s egyenes, ill.

az S pont definíciója ua., mint az előző esetben; egyenlete, ill. koordinátái

most: $s: x + by = k + b$, ill. $S\left(\frac{2k + br + b}{2}; \frac{1 - r}{2}\right)$. Ez a pont most sem fixpont

egyetlen O esetén sem.

Tehát a $\Phi_2 \mathbf{T}_O$ szorzat (közönséges) fixpontjainak mértani helye mindkét esetben egy hiperbola, kivéve annak egy pontját. $\square$

10. Axiomatikus háttér

Ebben a fejezetben megvizsgáljuk a Tükrözési axiómák és a többi axiómacsoport kapcsolatát ([34], [35]). Gondolatmenetünkben [44] és [45] Illeszkedési és Rendezési axiómákkal, továbbá a geometriai transzformációk általános tulajdonságaival foglalkozó fejezeteinek anyagára támaszkodunk. ([44] 13.-21. o.; [45] 7.-17. o.) Ebből a részből csak az Illeszkedési és Rendezési axiómákat soroljuk fel, mert azokat a [44]-ben és [45]-ben szereplőktől némileg eltérő formában mondjuk ki. Az idevágó tételek közül pedig csak a más felépítésben „Pasch axiómá”-nak nevezett állítást emeljük ki, mert a későbbiekben többször alkalmazzuk. A fejezetben irányítás nélküli szakaszokat használunk.

10.1. Axiómák

Illeszkedési axiómák:

- I1.** *A térben van legalább négy, nem kollineáris és nem komplanáris pont.*
- I2.** *Bármely két ponthoz pontosan egy olyan egyenes létezik, amely tartalmazza azokat.*
- I3.** *Bármely egyenesre legalább két pont illeszkedik.*
- I4.** *Bármely három, nem kollineáris ponthoz pontosan egy olyan sík létezik, ami tartalmazza azokat.*
- I5.** *Bármely síkra illeszkedik legalább három, nem kollineáris pont.*
- I6.** *Ha egy egyenes két pontja illeszkedik egy síkra, akkor az egyenes is illeszkedik arra a síkra.*

Rendezési axiómák:

- R1.** *A tér bármely P pontja a rá illeszkedő bármely egyenes P -től különböző pontjainak halmazát két nem üres, diszjunkt részhalmazzra bontja a következő módon:*

- két pont pontosan akkor tartozik különböző részhalmazba, ha P elválasztja őket,
- két pont pontosan akkor tartozik azonos részhalmazba, ha egyikük elválasztja P -t és a másikat.

R2. A tér bármely e egyenese a rá illeszkedő bármely sík e -re nem illeszkedő pontjainak halmazát két részhalmazra bontja a következő módon: két pont pontosan akkor tartozik különböző részhalmazba, ha szakaszuk metszi e -t.

R3. A tér bármely γ síkja a tér γ -ra nem illeszkedő pontjainak halmazát két részhalmazra bontja a következő módon: két pont pontosan akkor tartozik különböző részhalmazba, ha szakaszuk metszi γ -t.

10.1. Tétel. (Pasch): Legyen adott egy síkban három, nem kollineáris pont és egy egyenes, ami nem illeszkedik egyik adott pontra sem. Ha az egyenes metszi a pontok által meghatározott három szakasz egyikét, akkor a másik két szakasz közül is metsz pontosan egyet. (Sem [44]-ben sem [45]-ben nem szerepel.)

Tükrözési és Mérési axiómák:

Amint azt a 2. fejezetben említettük, a „síkra vonatkozó tükrözés” alapfogalmára a Tükrözési axiómák és a Mérési axiómák egyes részei vonatkoznak.

„**X.** Bármely γ sík meghatároz a térben egy kölcsönösen egyértelmű leképezést, amelyet a γ síkra vonatkozó tükrözésnek nevezünk.

XI. A γ síkra vonatkozó tükrözés a γ sík pontjaihoz önmagát rendeli, a γ sík által meghatározott egyik féltér pontjaihoz a másik féltér pontjait, a képpontokhoz az eredeti pontokat, egy egyenes pontjaihoz egy egyenes pontjait rendeli.

XII. Ha a γ síkra vonatkozó tükrözés az α síkot a β síkba viszi át, akkor az α -hoz szimmetrikus pontokat β -hoz szimmetrikus pontokba viszi át.

XIII. A tér bármely két különböző pontjához egy és csak egy szimmetriasík tartozik.

XIV. *A tér tetszőleges pontjából kiinduló két félegyeneshez egy és csak egy szimmetriasík tartozik.*” ([44] 21-22. o., [45] 17-18. o.)

„*Értelmezés: Két térbeli alakzatot egybevágónak nevezünk, ha tükrözések szorzatával egymásba vihetők át.*” ([44] 199. o.; [45] 33., 190. o.)

„**XV.** *Minden szakaszhoz hozzárendelhető egy pozitív valós szám, amelyet a szakasz hosszának nevezünk. Ha a hosszegység adott, akkor bármely A kezdőpontú félegyenesen egy és egy csak olyan B pont található, melyre nézve az AB szakasz hossza egy adott pozitív szám. Egybevágó szakaszok hossza egyenlő. Egy szakaszt bármely belső pontja két olyan szakaszra bont fel, amelyek hosszának összege az eredeti szakasz hossza.*” ([44] 40. o., [45] 34. o.)

„**XV*.** *Minden szöghöz hozzárendelhető egy nemnegatív valós szám, amelyet a szög mértékszámának nevezünk. Ha a szögegység a fok, akkor a nullaszöghöz a 0, az egyenesszöghöz a 180 mértékszámot rendeljük. Adott 0 és 180 közötti mértékszám esetén bármely O kezdőpontú félegyeneshez és arra nézve kijelölt félsíkban egy és csak egy olyan O kezdőpontú félegyenes található, melyhez tartozó szög mértékszáma az adott szám. Egybevágó szögek mértékszáma egyenlő. Bármely szöget a csúcsából induló és a szögtartományban haladó félegyenes két olyan szögre bont, amelyek mértékszámának összege az eredeti szög mértékszámával egyenlő.*” ([44] 42. o.; némileg eltérő formában [45] 37. o.)

Amint azt már a 2. fejezetben említettük, a fenti Tükrözési axiómákat kissé megváltoztatjuk. Elsőnek vesszük T1. néven a következő, XI.-nek megfelelő axiómát. Ebben adjuk meg ugyanis az alapfogalom legfontosabb tulajdonságait.

T1. *Bármely síkratükrözés a térnek olyan egyenestartó, involutorikus transzformációja, melynek van fixsíkja, ami bármely rá nem illeszkedő pontot elválaszt a képétől.*

Következnek a T2., T3. és T4. nevű, rendre a X.-nek, a XIII.-nak és a XIV.-nek megfelelő axiómák, amelyek az alapfogalom létezését, egyértelműségét és megadásának módjait rögzítik.

T2. *A tér bármely síkjához pontosan egy olyan síkratükrözés létezik, melynek fixsíkja az adott sík.*

T3. *A tér bármely két pontjához pontosan egy olyan síkratükrözés létezik, amelynél az adott pontok egymás képei.*

T4. *A tér bármely két közös kezdőpontú félegyeneséhez pontosan egy olyan síkratükrözés létezik, amelynél az adott félegyenesek egymás képei.*

A XII. tükrözési axióma helyett egy másik axiómát használunk. Előtte megjegyezzük, hogy az Illeszkedési, Rendezési és T1. axiómák alapján igazolhatjuk a síkratükrözés síktartását ([44] 23. o. [45] 20. o.) és rendezéstartását (10.10. Tétel). A síktartáshoz T1.-ből csak az egyenestartás kell.

T5. *Ha egy térzásló síkratükrözések két véges szorzatánál kapott képei megegyeznek, akkor a két szorzat egyenlő.*

A T5. axióma állítása alapvetően fontos szerepet tölt be az egybevágóságok vizsgálatában (3.7. Tétel és a térbeli analóg tétel). Továbbá, véleményünk szerint jobban illik a „konstruktív”, szorzatokat alkalmazó felépítéshez. Ezen okok miatt választottuk axiómának. Analóg szerepű állítás szerepel majdnem minden egybevágósággal kapcsolatos axiómacsoportban. (Ilyen „záslós” axiómával először egyetemi tanulmányaim során találkoztam ([33]).)

A T5. axióma állítása [44]-ben nem szerepel, [45]-ben a síkbeli megfelelője tételként szerepel ([45] 43. o.), a Mérési axiómák következő részeinek segítségével bizonyítva: „*Ha a hosszegység adott, akkor bármely A kezdőpontú félegyenesen egy és csak egy olyan B pont van, melyre nézve az AB szakasz hossza egy adott pozitív szám*”, ill. a szögekre vonatkozó analóg állítás. Ez a szakaszokra vonatkozó állítás két részre bontható, az első rész az eredeti állítás „metrikus” része, a második pedig az „egybevágósági” része:

- I. *Ha a hosszegység adott, akkor bármely adott pozitív számhoz létezik olyan szakasz, melynek hossza az adott szám.*
- II. *Ha adott egy szakasz és egy A kezdőpontú félegyenes, akkor a félegyenesen pontosan egy olyan B pont van, melyre az AB szakasz egybevágó az adott szakasszal.*

A második állításra a továbbiakban „szakaszfelmérési állítás”-ként fogunk hivatkozni. (A szögekre vonatkozó Mérési axiómában levő analóg állítás is az előbbi módon kettéosztható.)

Most a T5. axióma felhasználásával igazoljuk a szakaszfelmérési állítást, és a XII. axióma állítását.

10.2. Tétel. *A szakaszfelmérési állítás igazolható T5. felhasználásával.*

Bizonyítás. Legyen az adott szakasz PQ . A T2. és a T3. axióma szerint legfeljebb két tükrözés szorzatával P az A ba, Q pedig az adott félegyenesre vihető. Ezzel a tétel egzisztencia részét beláttuk. A szorzatot jelöljük $\mathbf{M}_1$ -gyel, Q képét pedig B -vel. Az unicitáshoz tekintsünk az adott félegyenesen egy olyan C pontot, melyre az AC szakasz egybevágó a PQ szakasszal. Jelöljünk $\mathbf{M}_2$ -vel egy olyan tükrözés-szorzatot, amely P -t A -ba, Q -t pedig C -be viszi. Tekintsünk továbbá egy olyan Z zászlót, amelynek félegyenesese a $[PQ]$ félegyenes. Vizsgáljuk most Z képét a két tükrözés-szorzatnál. Mindkét szorzat P -t A -ba, a $[PQ]$ félegyeneset pedig az adott félegyenesbe viszi. Így legfeljebb két további tükrözés szorzatával Z -nek $\mathbf{M}_2$ -nél kapott képét átvihetjük az $\mathbf{M}_1$ -nél kapott képébe. A két további tükrözés tükörsíkja átmegy az adott félegyenesen, így C -t fixen hagyja, tehát a kibővített $\mathbf{M}_2$ -nél is Q képe C . De a T5. szerint ez a kibővített $\mathbf{M}_2$ egyenlő $\mathbf{M}_1$ -gyel, így C egyenlő B -vel. $\square$

Hasonlóan bizonyítható a szögekre vonatkozó „szögfelmérési állítás” is.

10.3 Tétel. *XII. állítása bizonyítható T5. felhasználásával.*

Bizonyítás. Legyen a két pont P és Q , tükörsíkjuk α , a sík, amire tükrözzük őket γ . P , Q és α γ -ra vonatkozó tükörképe legyen rendre R , S és β . Legyen

végül R -nek β -ra vonatkozó tükörképe V . A cél az, hogy megmutassuk S és V egyenlőségét, vagyis, hogy az α -ra és γ -ra vonatkozó tükrözések szorzata megegyezik a γ -ra és β -ra vonatkozó tükrözések szorzatával. Az α sík pontjaira nyilván igaz az egyenlőség. Legyen ezután P α -n kívüli pont. A $[\beta S)$ és a $[\beta V)$ félterek nyilván megegyeznek. Legyen Z olyan térzászló, ami a P -t tartalmazó, α határu féltérből és α -nak egy tetszőleges síkzászlójából áll. Az előzőek szerint Z képe mindkét szorzatnál ugyanaz a térzászló lesz. Ekkor a T5. axióma szerint a két szorzat egyenlő. $\square$

Ismert, hogy a klasszikus egybevágósági axiómák és a Dedekind-féle folytonossági axióma segítségével a fenti mérési axiómák többi állítása is levezethető (pl. [16]). Könnyen látható, hogy a klasszikus egybevágósági axiómák állításai igazolhatók a fenti T1.-T5. axiómák alapján. Ezek mellé tehát [44], [45] XV., XV* axiómái helyett tekinthetjük a Dedekind-féle folytonossági axiómát. A továbbiakban megvizsgáljuk, hogy ha az Illeszkedési és a Rendezési axiómák mellé feltesszük a Dedekind-féle folytonossági axiómát is, akkor a Tükrözési axiómák állításaiból mi az, ami igazolható. Célunk belátni, hogy a síkratükrözés alapfogalmára elég a következő, módosított Tükrözési axiómákat kimondani:

T1.* *Bármely síkratükrözés a térnek egyenestartó, involutorikus, nem identikus transzformációja, melynek van fixsíkja.*

T2.* *A tér bármely síkjához létezik olyan síkratükrözés, melynek fixsíkja az adott sík.*

T5. *Ha egy térzászló síkratükrözések két véges szorzatánál kapott képei megegyeznek, akkor a két szorzat egyenlő.*

Vagyis T1. és T2. állítása gyengíthető, T3. és T4. állítása pedig levezethető. Természetesen T1.* alapján igazolni kell, hogy bármely síkratükrözésnek csak egy fixsíkja van, ill. hogy bármely síkratükrözés rendezéstartó.

Dedekind-féle folytonossági axióma:

D. *Ha egy egyenes pontjait úgy soroljuk két nem üres osztályba, hogy egyik osztályba tartozó pont se válasszon el másik osztályba tartozó két pontot, akkor van az egyenesen olyan pont, amely bármely két, tőle különböző és más-más osztályba tartozó pontot elválaszt.*

Az axiómában szereplő osztályokat Dedekind-szeleteknek, a pontot pedig elválasztó pontnak nevezzük. Ennek unicitása könnyen belátható (pl. [16]). A D. axiómával bizonyíthatók az alábbi állítások (pl. [16]):

10.4. Tétel. *Ha egy szakasz pontjait úgy soroljuk két nem üres osztályba, hogy egyik osztályba tartozó pont se válasszon el másik osztályba tartozó két pontot, akkor van a szakaszon pontosan egy olyan pont, amely bármely két, tőle különböző és más-más osztályba tartozó pontot elválaszt.*

10.5. Tétel. *Ha egy lapszögben levő olyan félsíkokat, melyek határegyenese a lapszög éle, úgy soroljuk két nem üres osztályba, hogy egyik osztályba tartozó félsík se válasszon el másik osztályba tartozó két félsíkot, akkor van a lapszögben pontosan egy olyan félsík, amely bármely két, tőle különböző és más-más osztályba tartozó félsíkot elválaszt.*

10.6. Tétel. *Egymásba skatulyázott szakaszok sorozata esetén van olyan pont, amelyet valamennyi szakasz tartalmaz.*

10.7. Tétel. *Egymásba skatulyázott közös élű lapszögek sorozata esetén van olyan félsík, amelynek határegyenese a közös él, és amelyet valamennyi lapszög tartalmaz.*

10.2. A Tükrözési axiómák gyengítése

A T1. axióma gyengítése

T1. állítását gyengítjük azzal, hogy a fixsík elválasztó tulajdonságára vonatkozó állítást kicseréljük arra, hogy a leképezés nem identikus:

T1.*: *Bármely síkratükrözés a térnek egyenestartó, involutorikus, nem identikus transzformációja, melynek van fixsíkja.*

Mint már említettük, az egyenestartással igazolható a síktartás. Most az Illeszkedési, Rendezési, Dedekind-féle folytonossági és a T1.* axiómák alapján levezetjük a fixsík elválasztó tulajdonságát. Először a következőt igazoljuk:

10.8. Tétel. *Bármely síkratükrözésnek minden fixpontja a fixsíkon van.*

Bizonyítás. Indirekt úton bizonyítunk, több lépésben. Tegyük fel, hogy van olyan síkratükrözés, aminek van fixsíkon kívüli fixpontja.

I. állítás: *A fixsíkon kívüli fixpont centrum, és csak egy ilyen pont lehet.*

Tekintsünk egy, a külső fixpontra illeszkedő egyenest, és két olyan síkot, melyek tartalmazzák ezt az egyenest és metszik a fixsíkot. Ezek a síkok invariánsak, mert egy egyenesük és egy arra nem illeszkedő pontjuk fix. Mivel invariáns síkok metszésvonala is invariáns, így a fixpont centrum. Ha lenne másik ilyen fixpont is, akkor az is centrum lenne, így bármely pontra illesztető lenne két invariáns egyenes. Ez azt jelentené, hogy minden pont fix lenne, ami ellentmond annak, hogy a tükrözés nem identikus; tehát az I. állítás igaz.

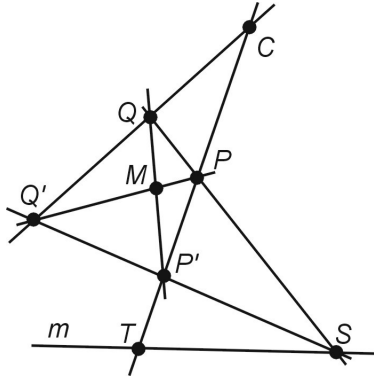
A bizonyítás további részében azt vizsgáljuk, hogy egy, a C centrumon áthaladó egyenes pontjai hova kerülnek a tükrözés során. A továbbiakban legyen T a fixsík egy pontja; e_1 a (CT) egyenes C kezdőpontú T -t nem tartalmazó nyílt félegyenese, e_2 pedig a T kezdőpontú C -t nem tartalmazó nyílt félegyenese; S a fixsíknak egy T -től különböző pontja; végül pedig m az S -re és (CT) -re illeszkedő sík fixsíkkal való metszésvonala. A P , Q stb. pontok tükörképeit jelölje rendre P' , Q' stb.

II. állítás: *Ha P a CT szakasz belső pontja, akkor P' e_1 vagy e_2 pontja, és ha P e_1 vagy e_2 pontja, akkor P' CT belső pontja.*

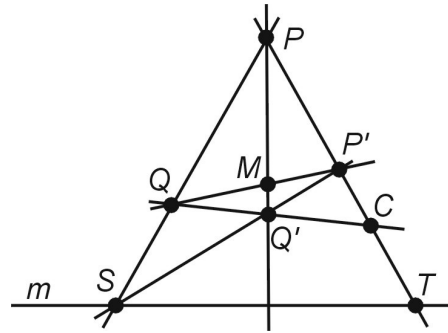
A. eset. (29. ábra) Tegyük fel, hogy P és P' is CT -n van. Legyen Q olyan P -től különböző pontja (SP) -nek, ami a fixsíknak C -t tartalmazó félterében van. Q' létezik, és metszéspontja lesz (SP') -nek és (CQ) -nak. Az involutorikusság

miatt feltehető, hogy P $P'C$ -nek pontja. Alkalmazzuk a Pasch-tételt (10.1.) a Q', P, C ponthármasra és a $(P'Q)$ egyenesre: $(P'Q)$ metszi a PQ' -t egy M pontban. Az M pont nyilván nem C és nincs rajta a fixsíkon, így nem lehet fix. Az involutorikusság miatt azonban (PQ') és $(P'Q)$ metszéspontjának fixnek kellene lennie. Ellentmondásra jutottunk.

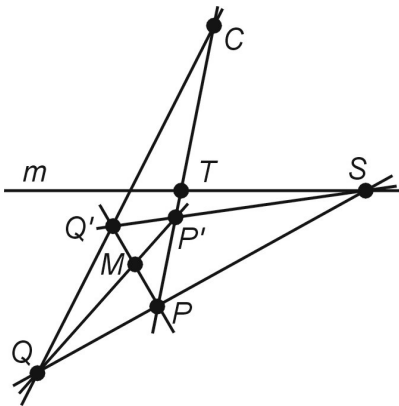
B. eset. (30., 31. ábrák) Tegyük fel, hogy P és P' is e_1 -en van, vagy mindkettő e_2 -n van. Ekkor is az A. esethez hasonló módon jutunk ellentmondásra.



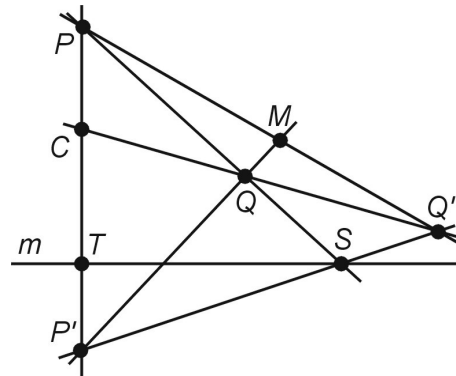
29. ábra



30. ábra



31. ábra



32. ábra

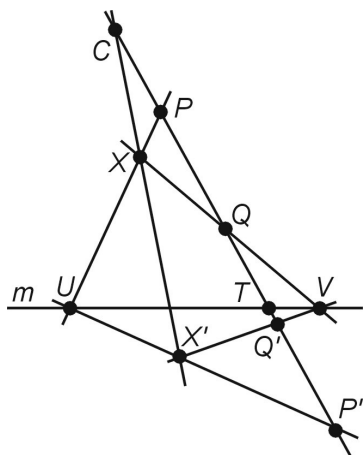
C. eset. (32. ábra) Tegyük fel, hogy P e_1 -en, P' pedig e_2 -n van. (Az involutorikusság miatt ez az eset magában foglalja a fordított helyzetet is.) Legyen Q' olyan pontja az (SP') -nek, ami a fixsíknak C -t tartalmazó féltérében van. Q' öse, Q , létezik, és metszéspontja lesz (SP) -nek és (CQ') -nek. Alkalmazzuk a Pasch-tételt a Q', P, C ponthármasra és a $(P'Q)$ egyenesre: $(P'Q)$ metszi a PQ' szakaszt egy M pontban. Ezután ugyanúgy jutunk ellentmondásra, mint az A. esetben. Mivel minden más esetet kizártunk, II. állításunk igaz.

III. állítás: Legyen P a CT szakasz belső pontja. Ha P' e_2 -n van és Q a PT szakasz belső pontja, akkor Q' a TP' szakasz belső pontja. Ha P' e_1 -en van és R a PC szakasz belső pontja, akkor R' a CP' szakasz belső pontja.

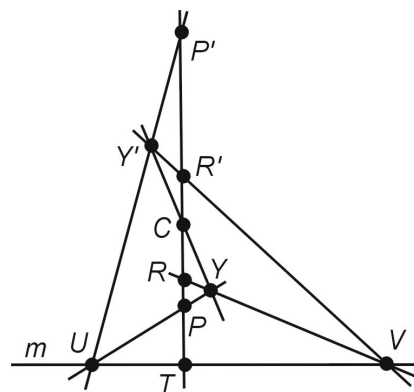
Legyen U és V m -nek két olyan pontja, amiket T elválaszt.

A. eset. (33. ábra) Legyen P' e_2 -n és Q PT belső pontja. A Pasch-tételből adódnak a következők: (VQ) metszi PU -t egy X belső pontban, X' UP' belső pontja, Q' TP' belső pontja.

B. eset. (34. ábra) Legyen P' e_1 -en és R PC belső pontja. A Pasch-tételből adódnak a következők: (UP) metszi VR -t egy Y pontban, Y' UP' belső pontja, C RR' belső pontja. Ezek szerint R' CP' belső pontja. III. állításunk is igaz.



33. ábra



34. ábra

IV. állítás: Létezik olyan E belső pontja CT -nek, hogy ha P belső pontja EC -nek, akkor P' e_1 -en van, és ha P ET -nek belső pontja, akkor P' e_2 -n van.

Osztályozzuk CT belső pontjait aszerint, hogy képük e_1 -en vagy e_2 -n van. Ez az osztályozás Dedekind-szeleteket hoz létre: a II. állítás első része szerint CT minden belső pontja beletartozik valamelyik osztályba; a II. állítás második része és az involutorikusság miatt egyik osztály sem üres; a III. állítás miatt nincs olyan pont, ami elválasztana két, nem az ő osztályába tartozó pontot. A 10.4. Tétel szerint van olyan E belső pontja CT -nek, ami bármely két, külön-

böző osztályba tartozó pontot elválaszt. Tegyük fel, hogy van olyan P belső pontja ET -nek, hogy P' nem e_2 , hanem e_1 -nek pontja. Legyen Q olyan belső pontja CT -nek, hogy Q' e_2 -n van. Kérdés, hogy ez a Q pont CP vagy PT belső pontja. Q nem lehet CP -nek pontja, mert akkor III. szerint Q' -nek e_1 -en kellene lennie. De Q nem lehet PT -nek sem pontja, mert ekkor E nem választaná el P -t és Q -t, pedig különböző osztályba tartoznak. Az ellentmondás bizonyítja, hogy P' e_2 -nek pontja. Hasonlóan bizonyítható IV. másik állítása is.

V. állítás: A IV. állításban szereplő E pont képe nincs sem e_1 -en, sem e_2 -n.

Tegyük fel, hogy E' e_2 pontja. Legyen P e_2 olyan pontja, ami nincs rajta TE' -n. Ekkor P' a II. állítás második része szerint belső pontja CT -nek. Kérdés, hogy ez a P' ET vagy EC belső pontja. Ha P' ET belső pontja lenne, akkor a III. állítás első része miatt a képe – ami az involutorikusság miatt $P - TE'$ belső pontja lenne, ami ellentmondás. Ha P' CE belső pontja lenne, akkor a IV. állítás miatt képe nek, P -nek, e_1 -en is rajta kellene lennie. Ez pedig ellentmondás, mert e_1 és e_2 diszjunktak. Mivel mindkét esetben ellentmondásra jutottunk, E' nem lehet e_2 -n. Hasonlóan kapjuk, hogy E' nem lehet e_1 -en sem.

Összefoglalva az I.-V. állításokat, azt kaptuk, hogy ha van fixsíkon kívüli fix-pont, akkor az centrum, de van olyan pont, aminek képe nincs rajta az őt a centrummal összekötő egyenesen. Az ellentmondás bizonyítja a 10.8. Tételt. $\square$

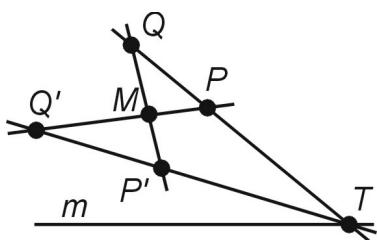
Most következik a T1-beli elválasztás igazolása.

10.9. Tétel. *Bármely síkratükrözés esetén, ha egy pont nem eleme a fixsícnek, akkor a fixsík elválasztja képétől.*

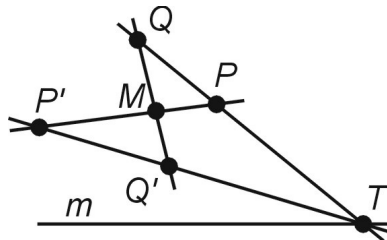
Bizonyítás. Ismét indirekt úton bizonyítunk. Belátjuk, hogy ha lenne olyan pont, amit a fixsík nem választ el képétől, akkor lenne fixsíkon kívüli fixpont. Tegyük fel, hogy van olyan síkratükrözés, amihez van olyan pont, amit a fixsík nem választ el a képétől. Jelöljük a tekintett fixsíkot γ -val, a tekintett pontot P -vel. A feltevés szerint P' a γ határu, P -t tartalmazó nyílt féltérben van. Legyen T tetszőleges olyan pontja γ -nak, ami nincs rajta (PP') -n, és jelölje m a T -n és

(PP') -n átmenő sík és γ metszésvonalát. A (PT) egyenesen legyen Q olyan pont, hogy P elválasztja Q -t és T -t. Létezik Q' , és helyzetére három eset lehetséges: (Q',P',T) vagy (P',Q',T) vagy (P',T,Q') .

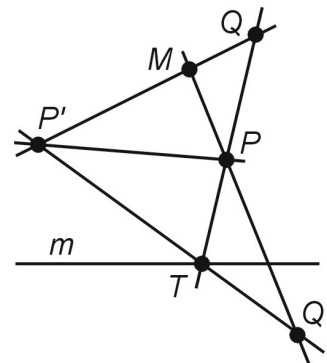
A. eset. Legyen (Q',P',T) (35. ábra). Alkalmazzuk a Pasch-tételt a $(P'Q)$ egyenesre és a Q', T, P pontokra: $(P'Q)$ metszi a PQ' szakaszt egy M pontban. Mivel Q' P -vel azonos féltérben van, így M nincs rajta γ -n. De az involutorikusság miatt (PQ') képe $(P'Q)$, így metszéspontjuk fix.



35. ábra



36. ábra



37. ábra

B eset. Legyen (P',Q',T) (36. ábra). Alkalmazzuk a Pasch-tételt a (PP') egyenesre és a Q', T, Q pontokra: (PP') metszi a QQ' szakaszt egy M pontban. Mivel Q' Q -val azonos féltérben vannak, így M nincs rajta γ -n. De az involutorikusság miatt (PP') és (QQ') invariánsak, így metszéspontjuk fix.

C eset. Legyen (P',T,Q') (37. ábra). Alkalmazzuk a Pasch-tételt a (PQ') egyenesre és a P', T, Q pontokra: (PQ') metszi a $P'Q$ szakaszt egy M pontban. Mivel Q P' -vel azonos féltérben van, így M nincs rajta γ -n. De az involutorikusság miatt (PQ') képe $(P'Q)$, így metszéspontjuk fix.

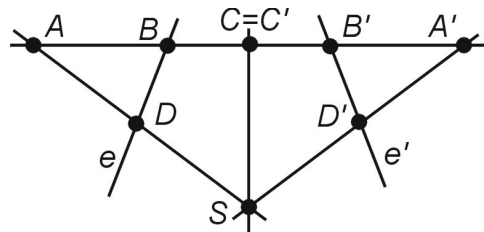
Minden esetben ellentmondásra jutottunk a 10.8. Tétellel, ezzel a 10.9. Tételt beláttuk. $\square$

A továbbiakban szükségünk lesz a síkratükrözés rendezéstartására. Ennek igazolása azon az állításon alapul, hogy síkratükrözésnél pontot és képét összekötő egyenes invariáns, továbbá két ilyen egyenes komplanáris és nem metsző ([44] 26. o., 190. o., [45] 24. o., 181. o.). E tétel bizonyítása az illeszkedés, rendezés, T1.* és a 10.9. Tétel alapján történik. A rendezéstartás belátásához

[44] és [45] az általunk elhagyott XII. állítást és a párhuzamosságot is felhasználja ([44] 27. o., 193. o., [45] 25. o., 185. o.). Mi ezt el akarjuk kerülni, ezért vázolunk egy más bizonyítást.

10.10. Tétel. *Bármely síkratükrözés rendezéstartó.*

Bizonyítás. Tekintsünk egy síkratükrözést és három kollineáris pontot. Ha egyenesük nem invariáns a tükrözésnél, akkor rendezésük megegyezik képek rendezésével, mert a (PP') egyenesek nem metszők. Ha egyenesük fix, akkor rendezésük triviálisan megmarad. Ha egyenesük invariáns, de nem fix, akkor legyen a három pont A , B és C olyan, hogy B AC belső pontja. Legyen először C fixpont, és tekintsünk egy másik fixpontot, S -et, továbbá AS egy belső pontját, D -t, és a (CS) egyenest. (38. ábra). A nem invariáns egyenesre már ismert rendezéstartás miatt D' SA' belső pontja. A Pasch-tétel szerint (BD) nem metszi CS -t, tehát a képe sem metszi azt. Így ez a képegynes – szintén a Pasch-tétel miatt – CA' -t metszi belső pontban. Ez a metszéspont azonban éppen B' , ami az A , B , C pontok rendezésének megmaradását is jelenti. Ha C nem fixpont, akkor az állítás az előző eset alkalmazásával adódik. $\square$



38. ábra

A rendezéstartásból következik, hogy félegyenes, félsík, féltér síkratükrözésnél kapott képét meghatározza a határ képe és egy belső pont képe.

A továbbiakban gondolatmenetünket az Illeszkedési, Rendezési, Dedekind-féle folytonossági axiómákra és a T1.*, T2.*, T5. Tükrözési axiómákra alapozzuk.

A T2.-T4. axiómákban szereplő unicitás igazolása

10.11. Tétel. *Bármely síkhoz legfeljebb egy rá vonatkozó síkratükrözés létezik.*

Bizonyítás. Legyen γ egy sík, és legyen T_1 és T_2 két γ -ra vonatkozó tükrözés. Mindkét tükrözésnél γ fix és a γ határu félterek felcserélődnek. Tekintsük azt a térszázslót, amely γ egy síkzázslójából és az egyik γ határu féltérből áll. Az előzőek szerint ezt a zászslót mindkét tükrözés ugyanoda viszi. A T5. axióma szerint ekkor $T_1 = T_2$. $\square$

10.12. Tétel. *Bármely két ponthoz legfeljebb egy olyan síkratükrözés létezik, amelynél az adott pontok egymás képei.*

Bizonyítás: Legyen A és B két különböző pont, és legyen α és β két olyan sík, melyekre $T_\alpha(A) = T_\beta(A) = B$. Legyen továbbá γ egy (AB) -re illeszkedő sík. Mindkét tükrözésnél $[AB]$ képe $[BA]$, γ (AB) határu félsíkjai invariánsak, továbbá a γ határu félterek is invariánsak. Tekintsük azt a térszázslót, amely az $[AB]$ félegyenesből, γ egyik (AB) határu félsíkjából és az egyik γ határu féltérből áll. Az előzőek szerint ezt a zászslót mindkét tükrözés ugyanoda viszi. A T5. axióma szerint ekkor $T_\alpha = T_\beta$. T_α -nál α fix, és α -n kívüli fixpont nincs, továbbá T_β -nál β fix, így az előző egyenlőségből kapjuk, hogy $\alpha = \beta$. $\square$

10.13. Tétel. *Bármely két közös kezdőpontú félegyeneshez legfeljebb egy olyan síkratükrözés létezik, amelynél az adott félegyenesek egymás képei.*

Bizonyítás. Legyen a_1 és b_1 két különböző, de közös kezdőpontú félegyenes, és legyen α és β két olyan sík, melyekre $T_\alpha(a_1) = T_\beta(a_1) = b_1$. Nyilván α és β is átmegy a közös kezdőponton, ami így fix mindkét tükrözésnél. Ha a_1 és b_1 nem kollineáris, akkor jelölje a , ill. b a megfelelő félegyenes egyenesét, síkjukat pedig γ . Mindkét tükrözésnél γ a határu b_1 -et tartalmazó félsíkjának képe γ b határu a_1 -et tartalmazó félsíkja, továbbá a γ határu félterek invariánsak. Tekintsük azt a zászslót, amely az a_1 félegyenesből, γ a határu b_1 -et tartalmazó félsíkjából és az egyik γ határu féltérből áll. Az előzőek szerint ezt a zászslót mindkét tükrözés ugyanoda viszi. A T5. axióma szerint ekkor $T_\alpha = T_\beta$, ebből pedig következik, mint az előbb, hogy $\alpha = \beta$. Ha a_1 és b_1 kollineárisak,

egyenesük α , akkor minden α határu félsík invariáns mindkét tükrözésnél. Egy ilyen félsík segítségével, az előző esethez hasonlóan kapjuk, hogy $\alpha = \beta$. $\square$

A T3.-T4. axiómákban szereplő egzisztencia igazolását előkészítő tételek

A tételek előtt még néhány megjegyzést teszünk. Pont környezetén véges sok, őt tartalmazó nyílt féltér metszetét értjük, félsík környezetén pedig őt tartalmazó olyan nyílt lapszöveget, melynek éle a félsík határegyenesé. Ezen környezetfogalommal a szokásos módon definiálhatjuk pontsorozat, ill. közös határegyenesű félsíkok sorozatának konvergenciáját, és leképezések folytonosságát. A síkratükrözés rendezéstartó és involutorikus tulajdonságával kapjuk, hogy a síkratükrözés folytonos leképezés.

Síkratükrözések véges szorzatát egybevágóságnak nevezzük. Az eddigiek alapján kapjuk, hogy bármely egybevágóság a tér egyenes-, sík- és rendezéstartó, folytonos transzformációja. Két alakzatot egybevágónak nevezünk, ha van olyan egybevágóság, aminél az egyik képe a másik. Könnyen adódik, hogy ez ekvivalenciareláció.

Gondolatmenetünket T4. félsíkokra vonatkozó megfelelőjével kezdjük:

10.14. Tétel. *Bármely két különböző, de közös határegyenesű félsíkhöz pontosan egy olyan síkratükrözés létezik, amelynél az adott félsíkok egymás képei.*

A 10.14. Tételbeli unicitás bizonyítása. (Az előzőkhöz hasonló a módszer.)

Legyen α_1 és β_1 két különböző, de közös határu félsík, és legyen γ és δ két olyan sík, melyekre $\mathbf{T}_\gamma(\alpha_1) = \mathbf{T}_\delta(\alpha_1) = \beta_1$. Nyilván γ és δ is átmegy a közös határegyenesen, ami így fix mindkét tükrözésnél. Ha α_1 és β_1 nem komplanárisak, akkor jelölje α , ill. β a megfelelő félsík síkját. Mindkét tükrözésnél az α határu, β_1 -et tartalmazó féltér képe a β határu α_1 -et tartalmazó féltér. Tekintsük azt a zászlót, amely a közös határ egy félegyeneséből, az α_1 félsíkből, és az α határu, β_1 -et tartalmazó féltérből áll. Az előzőek szerint ezt a zászlót mindkét tükrözés ugyanoda viszi. A T5. axióma szerint ekkor $\mathbf{T}_\gamma = \mathbf{T}_\delta$, ebből

pedig következik, mint az előbb, hogy $\gamma = \delta$. Ha α_1 és β_1 komplanárisak, síkjuk α , akkor mindkét α határu feltér invariáns mindkét tükrözésnél. Egy ilyen feltér segítségével, az előző esethez hasonlóan kapjuk, hogy $\gamma = \delta$. $\square$

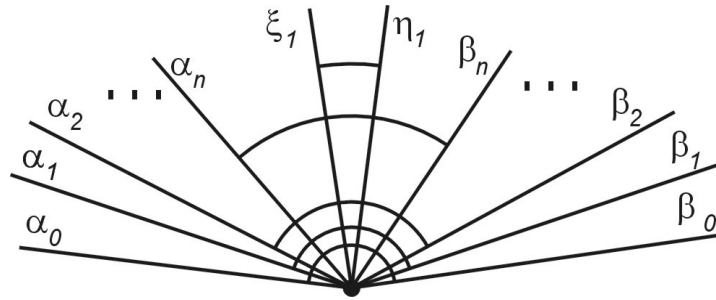
Az egzisztencia igazolásához két segédtétele van szükségünk. Ezekben, és az egzisztencia bizonyításában lapszögön mindig konvex lapszöget értünk; két különböző félsík által meghatározott két lapszög közül a konvexet tekintjük, két egybeeső félsík által meghatározottak közül pedig a nullszöget. Továbbá, félsíkra vonatkozó tükrözésen a félsík síkjára vonatkozó tükrözést értjük.

10.15. Segédétel. *Ha két közös élű lapszög közül az egyik valódi részként tartalmazza a másikat, akkor nincs olyan egybevágóság, aminél az egyik képe a másik, a közös él pedig fixegyenes.*

A 10.15. Segédétel bizonyítása. Tegyük fel, hogy van olyan $(\alpha_0\beta_0)$ lapszög és vele közös élű $(\alpha_1\beta_1)$ valódi részlapszöge, továbbá T egybevágóság, aminél a közös él, e , fix és $(\alpha_0\beta_0)$ képe $(\alpha_1\beta_1)$. Először megmutatjuk, hogy van olyan e határu félsík $(\alpha_0\beta_0)$ -ban, ami invariáns T^2 -nél.

Mivel $(\alpha_0\beta_0)$ képe $(\alpha_1\beta_1)$, így a rendezéstartás miatt α_0 képe α_1 vagy β_1 . A belső lapszög határait úgy nevezzük el, hogy $T(\alpha_0) = \alpha_1$ és $T(\beta_0) = \beta_1$ legyen. A továbbiakban $T^n(\alpha_0)$ -t, ill. $T^n(\beta_0)$ -t rendre α_n -nel, ill. β_n -nel jelöljük. Mivel $(\alpha_1\beta_1)$ valódi rész, ezért legalább az egyik határa, pl. α_1 , $(\alpha_0\beta_0)$ belsejében van. Ha $(\alpha_1\beta_1)$ $(\alpha_0\beta_0)$ belsejében van, akkor T rendezéstartása miatt $(\alpha_1\beta_1)$ képe, $(\alpha_2\beta_2)$, is a belsejében van $(\alpha_0\beta_0)$ képének, vagyis $(\alpha_1\beta_1)$ -nek. Ezt a sorozatot folytatva egymásba skatulyázott lapszögek sorozatát kapjuk. A 10.7. Tétel szerint van olyan e határu félsík, amit minden lapszög tartalmaz. Nyilvánvaló, hogy az ilyen félsíkok halmaza vagy egyetlen félsík vagy egy lapszög. Ha egyetlen ilyen félsík van, ξ_1 , akkor T rendezéstartása miatt ξ_1 nyilván invariáns T -nél, így T^2 -nél is. A továbbiakban a közös

félsíkok halmaza legyen egy $(\xi_1 \eta_1)$ lapszög; határait úgy nevezzük el, hogy fennálljon az $(\alpha_0, \xi_1, \eta_1, \beta_0)$ elrendezés. (39. ábra)

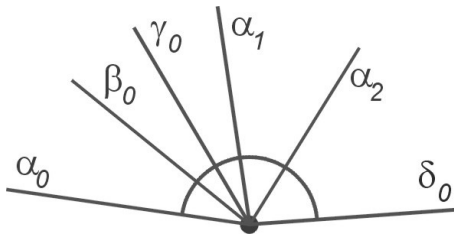


39. ábra

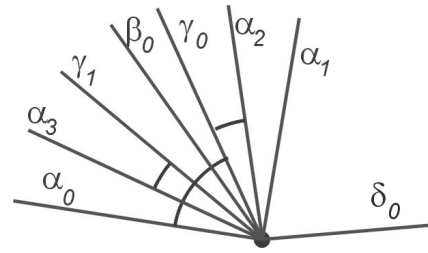
A rendezéstartás miatt minden n -re fennáll az $(\alpha_0, \alpha_{2n}, \xi_1, \beta_0)$ elrendezés, az α_{2n} sorozat ξ_1 -hez tart, ha $n \rightarrow \infty$. A $\mathbf{T}^2(\alpha_{2n}) = \alpha_{2n+2}$ sorozat $\mathbf{T}^2(\xi_1)$ -hez tart $\mathbf{T}^2$ folytonossága miatt. De α_{2n+2} is ξ_1 -hez tart, ezért ξ_1 invariáns $\mathbf{T}^2$ -nél. Tekintsünk most egy olyan Z térzászlót, melynek félegyenese e -n van, félsíkja ξ_1 , féltére pedig tartalmazza α_0 -t. Mivel a félsík és a féltér az előzőek szerint invariáns $\mathbf{T}^2$ -nél, a félsíkok közös határa pedig fix, így Z és $\mathbf{T}^2(Z)$ megegyezik. Ezért a T5. axióma szerint $\mathbf{T}^2$ egyenlő az identikus leképezéssel. Ez azonban ellentmondás, hiszen $\mathbf{T}^2$ -nél α_0 képe a tőle különböző α_2 . $\square$

10.16. Segéd­tétel. Legyen adva az $(\alpha_0\delta_0)$ lapszögben két félsík, β_0 és γ_0 , melyeknek határegyenese a lapszög éle, és álljon fenn az $(\alpha_0,\beta_0,\gamma_0,\delta_0)$ elrendezés. Ha α_0 -nak β_0 -ra, ill. γ_0 -ra vonatkozó tükrösképe α_1 , ill. α_2 , akkor nem állhat fenn a $(\beta_0,\gamma_0,\alpha_2,\alpha_1)$ elrendezés. (A 40. ábra egy lehetőséget mutat.)

A 10.16. Segédétel bizonyítása. $\alpha_1 \neq \alpha_2$, a fent már igazolt unicitás miatt. $\alpha_1 = \gamma_0$ vagy $(\alpha_0, \beta_0, \alpha_1, \gamma_0)$ esetén az állítás nyilvánvaló. Legyen ezután $(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0, \alpha_1)$, és tegyük fel, hogy az állítás nem igaz: vannak olyan, a feltételeknek megfelelő félsíkok, melyekre $(\beta_0, \gamma_0, \alpha_2, \alpha_1)$ (41. ábra).



40. ábra

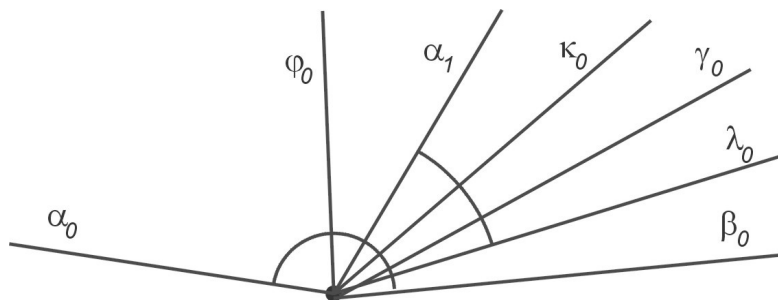


41. ábra

Tükrözzük γ_0 -t, ill. α_2 -t β_0 -ra, a tükörképek legyenek rendre γ_1 , ill. α_3 . Ekkor a $(\gamma_1\alpha_3)$ lapszög egyrészt egybevágó az $(\alpha_0\gamma_0)$ lapszöggel, másrészt annak belsejében van. Ez pedig ellentmond az előző segédételnek. $\square$

A 10.14. Tételbeli egzisztencia bizonyítása. Tekintsünk két különböző, de közös e élű félsíkot, α_0 -t és β_0 -t. Az $(\alpha_0\beta_0)$ lapszög egy e határu φ_1 félsíkjára való tükrözésnél α_0 képe legyen α_1 . Ezeket a φ_1 félsíkokat osszuk két halmazba aszerint, hogy a $(\varphi_1\alpha_1)$ lapszög tartalmazza β_0 -t, vagy nem. Ez Dedekind-szeleteket határoz meg a következők miatt. Nyilván $(\alpha_0\beta_0)$ minden félsíkja beletartozik pontosan az egyik halmazba. Egyik halmaz sem üres, hiszen β_0 az egyik, α_0 pedig a másik halmazba tartozik. A 10.16. Segéd-tételből pedig adódik, hogy egyik osztályba tartozó félsík sem választ el másik osztályba tartozó két félsíkot. A 10.5. Tétel szerint tehát létezik a két osztály félsíkjai közötti elválasztó félsík, jelöljük φ_0 -lal. Belátjuk, hogy α_0 -nak φ_0 -ra való tükörképe β_0 . Indirekt úton bizonyítunk.

Tegyük fel először, hogy α_0 -nak φ_0 -ra vonatkozó tükörképe, α_1 , az $(\alpha_0\beta_0)$ lapszög belső félsíkja. (42. ábra)

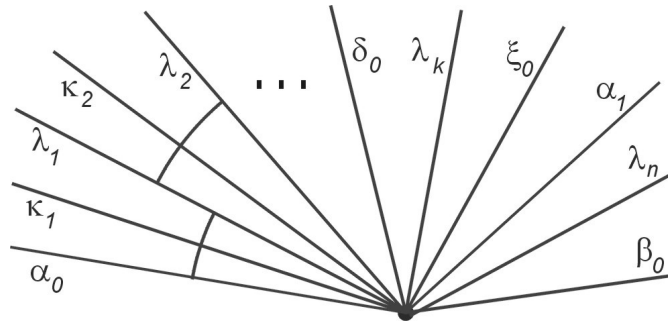


42. ábra

(*) A 10.16. Segédteételből és φ_0 definíciójából következik, hogy nincs az $(\alpha_0\beta_0)$ lapszögnek olyan félsíkja, amelyre α_0 -t tükrözve, a tükörkép az $(\alpha_1\beta_0)$ lapszög belső félsíkja lenne. A továbbiakban célunk, hogy e következménnyel ellentmondásra jussunk.

A rövidség érdekében a következő egyszerűsítő megfogalmazást vezetjük be a 42., 43. ábrához kapcsolódva. Fennáll az $(\alpha_0, \varphi_0, \alpha_1, \beta_0)$ elrendezés. Ekkor azt mondjuk, hogy φ_0 α_1 -től „balra” van, ill. α_1 φ_0 -tól „jobbra” van.

A φ_0 félsíkot létrehozó gondolatmenetet alkalmazzuk az $(\alpha_1\beta_0)$ lapszögre is (42. ábra): létezik pontosan egy γ_0 félsík $(\alpha_1\beta_0)$ -ban úgy, hogy α_1 -nek γ_0 -tól jobbra levő félsíkra vonatkozó tükörképe β_0 -tól jobbra van, a többire vonatkozó pedig az $(\alpha_1\beta_0)$ lapszögben. Legyen κ_0 $(\alpha_1\gamma_0)$ belső félsíkja, λ_0 pedig α_1 -nek κ_0 -ra vonatkozó tükörképe. Tükrözzük $(\alpha_1\lambda_0)$ -t φ_0 -ra, majd a tükörképet α_0 -ra. κ_0 , ill. λ_0 képe legyen rendre κ_1 , ill. λ_1 (43. ábra). Ezután $(\alpha_0\lambda_1)$ -et tükrözzük λ_1 -re, majd a tükörképet annak másik határfélsíkjára, és ezt az eljárást folytassuk.



43. ábra

A kapott lapszögek határfélsíkjainak sorozatát jelölje $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_i, \dots)$, a κ_0 -ból származó sorozatot pedig $(\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3, \dots, \kappa_i, \dots)$. E félsíkok konstrukciójából, valamint a 10.15. Segédteételből adódik, hogy bármely λ_n félsíkhöz van olyan λ_i vagy κ_i félsík, amire α_0 -t tükrözve λ_n -t kapjuk: ha $n = 2s$ akkor

λ_s , ha $n = 2s - 1$, akkor κ_s ($s = 1, 2, \dots$). Az előző oldal tetején, a (*)-nál megfogalmazott állításunkkal való ellentmondáshoz meg kell mutatni, hogy van olyan λ_n félsík, ami $(\alpha_1\beta_0)$ belső félsíkja.

Ennek bizonyítása hasonlít arra, amikor a Dedekind-féle axiómával igazoljuk az Archimedes-féle axióma állítását (pl. [16]), de sajnos azt a bizonyításmenetet nem alkalmazhatjuk végig. Tegyük fel, hogy minden λ_i α_1 -től balra van. Ekkor a 10.5. Tétel segítségével belátható ([16] 101. o.), hogy van egy olyan ξ_0 félsík $(\alpha_0\alpha_1)$ -ben, amelytől jobbra nincs λ_i félsík, viszont tőle balra bármely félsík benne van valamely $(\lambda_i\lambda_{i+1})$ -ben. Legyen δ_0 $(\alpha_0\xi_0)$ azon félsíkja, ami $(\alpha_0\beta_0)$ -nak a φ_0 . Mivel δ_0 ξ_0 -től balra van, a λ_i -k között van olyan, ami δ_0 -tól jobbra van, legyen ez λ_k . δ_0 definíciója miatt λ_k -ra tükrözve α_0 -t ξ_0 -tól jobbra levő félsíkot kapunk. Ez a tükörkép azonban a λ_i félsíkok konstrukciója és a 10.15. Segédétel miatt valamelyik λ_i félsík. Ezzel azonban ellentmondásba kerültünk ξ_0 definíciójával. Tehát van olyan λ_i félsík, ami α_1 -től jobbra van. Az első ilyen félsík legyen λ_n . Ha ez úgy következne be, hogy λ_n λ_0 -tól is jobbra lenne, akkor $(\lambda_{n-1}\lambda_n)$ belsejében tartalmazná a vele egybevágó $(\alpha_1\lambda_0)$ -t, ami ellentmond a 10.15. Segédételnek. Tehát ez a λ_n $(\alpha_1\beta_0)$ belsejében van, és így elértük a kívánt ellentmondást.

Hasonlóan jutunk ellentmondásra akkor is, ha azt tesszük fel, hogy α_1 nincs benne az $(\alpha_0\beta_0)$ lapszögben. Így $\alpha_1 = \beta_0$, vagyis φ_0 síkja tükörsíkja az α_0 és β_0 félsíkoknak. Ezzel a 10.14. Tétel bizonyítását befejeztük. $\square$

Merőleges térelemek és néhány tulajdonságuk

A továbbiak előtt bevezetjük a merőlegesség fogalmát:

10.17. Definíció.: Az α síkot, ill. az e egyenest a β síkra merőlegesnek nevezzük, ha α , ill. e invariáns de nem fix a β -ra való tükrözésnél. Ekkor β -t is merőlegesnek nevezzük e -re.

[44]-ben és [45]-ben csak síkbeli egyenesek merőlegességére szerepel ez a fajta definíció, a fenti merőlegességek más módon vannak bevezetve:

„Ha [a síkon] az a és b különböző egyenesek olyan tulajdonságúak, hogy egyiknek a másikra vonatkozó tükörképe önmaga, akkor a két egyenest egymásra merőlegesnek nevezzük.” ([44] és [45] 29. o.)

„Egyenest és síkot merőlegesnek nevezzük, ha az egyenes a metszéspontra illeszkedő minden síkbeli egyenesre merőleges.” ([44] 191. o. és [45] 182. o.)

„Két síkot merőlegesnek nevezzük, ha szögük 90 fokos.” ([44] 209. o., [45] 200. o.)

A következőkben felhasználjuk a merőlegesség következő, T3. és T4. állításaitól függetlenül igazolható tulajdonságait:

Ha egy egyenes merőleges egy síkra, akkor minden rá illeszkedő sík is az.
(Közvetlenül adódik a definíciókból.)

Ha két egyenes merőleges egy síkra, akkor komplanárisak és nem metszők.
(Korábban, a rendezéstartásnál volt róla szó.)

Ha két metsző sík merőleges egy síkra, akkor metszésvonaluk is az. (A definíciók és az előző tulajdonság segítségével adódik.)

Az alábbi, síkokra vonatkozó állításnak csak az egyenesekre vonatkozó analogonja szerepel [44]-ben és [45]-ben, ráadásul az általunk elhagyott XII. axiómára alapozva. Ezért most T5.-tel is igazoljuk:

10.18. Tétel. *Ha az α sík merőleges a β síkra, akkor β is merőleges α -ra.*

Bizonyítás. Nyilván elég azt megmutatni, hogy β bármely pontjának α -ra való tükörképe is β -n van. Ehhez először azt látjuk be, hogy a tükrözések sorrendje felcserélhető. Tekintsük azt Z zászlót, ami a síkok metszésvonalának egyik m_1 félegyeneséből, α egyik m_1 határú félsíkjából és az egyik α határú féltérből áll. A merőlegesség miatt Z képe $T_\alpha T_\beta$ és $T_\beta T_\alpha$ esetén is az a zászló, ami m_1 -ből, α másik m_1 határú félsíkjából és a másik α határú féltérből áll. Ekkor a T5. axióma szerint $T_\alpha T_\beta = T_\beta T_\alpha$. Ezután tekintsük β egy P pontját. Legyen

$Q := T_\alpha(P)$, $R := T_\beta(Q)$. Alkalmazzuk a tükrözések szorzataira vonatkozó előző egyenlőséget P -re. Kapjuk, hogy $T_\alpha(P) = R$. Q és R definíciója miatt $Q = T_\beta(Q)$. Így β tartalmazza Q -t, ami definíció szerint $T_\alpha(P)$. $\square$

A T4. axióma egzisztencia-állításának bizonyítása az alábbi, 10.19., 10.20. Tételeken alapul, amelyek a merőlegesség alapvető tulajdonságait mondják ki. A 10.19. Tétel amiatt is fontos, mert állítása alapján vezethető be a síkbeli tengelyes tükrözés fogalma (3. fejezet, 3.2. tétel).

10.19. Tétel. *Bármely α sík bármely m egyeneséhez létezik pontosan egy olyan γ sík, ami tartalmazza m -et és merőleges α -ra.*

Bizonyítás. Tekintsük α -n az m által létrehozott félsíkokat. A 10.14. Tétel szerint egyértelműen létezik hozzájuk olyan, m -re illeszkedő sík, amire való tükrözésnél egymás képei. Az előző tétel szerint ez a sík merőleges α -ra. $\square$

10.20. Tétel. *Bármely α sík bármely P pontjához létezik pontosan egy olyan e egyenes, ami tartalmazza P -t és merőleges α -ra.*

Bizonyítás. Tekintsünk két, egymást P -ben metsző egyenest α -n. Az előző tétel szerint tekinthetjük az ezekben α -ra emelt merőleges síkokat. A merőlegesség korábban említett tulajdonságai szerint e síkok metszészvonala rendelkezik a kívánt tulajdonságokkal, és ez az egyetlen ilyen egyenes. $\square$

A T3.-T4. axiómákban szereplő egzisztencia igazolása

A T4. axióma egzisztencia állításával kezdjük.

10.21. Tétel. *Bármely két, közös kezdőpontú félegyeneshez van olyan síkra-tükrözés, amelynél az adott félegyenesek egymás képei.*

Bizonyítás. Tekintsünk egy síkot, ami tartalmazza az adott félegyeneseket. Az előző tétel szerint e síkra a közös kezdőpontban állítsunk merőleges egyenest, legyen ez m . Tekintsük az adott félegyenesek egyikét tartalmazó, m határegyenesű félsíkokat. A 10.14. Tétel szerint e félsíkokhoz egyértelműen létezik olyan

sík, amire vonatkozó tükrözésnél egymás képei. A merőlegesség fent említett tulajdonságai és a 10.18. Tétel szerint ez a sík rendelkezik a kívánt tulajdonságokkal. $\square$

A T3.-beli egzisztencia igazolásához szükséges még az alábbi állítás is:

10.22. Tétel. *Bármely e egyenes bármely P pontjához létezik pontosan egy olyan γ sík, ami tartalmazza P -t és merőleges e -re.*

Bizonyítás. Tekintsük az adott e egyenes P által létrehozott félegyeneseit. Az előző tétel szerint egyértelműen létezik hozzájuk olyan, P -n átmenő sík, amire vonatkozó tükrözésnél egymás képei. Nyilvánvaló, hogy ez a sík rendelkezik a kívánt tulajdonságokkal, és ez az egyetlen ilyen sík. $\square$

Következik a T3. axióma egzisztencia állítása:

10.23. Tétel. *Bármely két ponthoz van olyan síkratükrözés, amelynél az adott pontok egymás képei.*

A tétel bizonyítását az előző tételre valamint a 10.15. és 10.16. Segéd-tételek szakaszokra vonatkozó, alábbi analogonjaira alapozzuk.

10.24. Segéd-tétel. *Legyen AB és CD két olyan szakasz, hogy AB valódi részként tartalmazza CD -t. Nincs olyan egybevágóság, aminél AB képe CD .*

A 10.24. Segéd-tétel bizonyítása. Alkalmazzuk először a 10.15. Segéd-tétel igazolásában levő gondolatmenetet, lapszögek és határaik helyett szakaszokra és végpontjaikra. Kapjuk, hogy ha van olyan T egybevágóság, aminél AB képe CD , akkor van olyan X pont AB -ben, ami fix T^2 -nél, továbbá, hogy AB egyik végpontjának, pl. A -nak T^2 -nél kapott képe AX belső pontja.

Ezután tekintsünk egy olyan Z térszázlót, melynek félegyenese $[XA)$. Az előzők szerint ez a félegyenes invariáns T^2 -nél. Mivel Z és $T^2(Z)$ félegyenesei megegyeznek, így Z átvihető $T^2(Z)$ -be legfeljebb két olyan síkra vonatkozó tükrözés szorzatával is, melyek átmennek az (AB) egyenesen. Ezért a T5. axióma szerint T^2 egyenlő ezzel a szorzattal. Ez azonban ellentmondás, hiszen ennél a szorzatnál A fixpont, T^2 -nél viszont nem. $\square$

10.25. Segédttétel. *Legyenek A , B és C kollineáris pontok úgy, hogy B elválasztja A -t és C -t, legyenek továbbá β , ill. γ pontok egyenesére B -ben, ill. C -ben állított merőleges síkok. Ha A -nak β -ra, ill. γ -ra vonatkozó tükörképe A_1 , ill. A_2 , akkor A_1 elválasztja A -t és A_2 -t.*

A 10.25. Segédttétel bizonyítása. A 10.16. Segédttétel bizonyításának gondolatmenetét lapszögek és félsíkok helyett szakaszokra és pontokra alkalmazva – az előző segédttétel felhasználásával –, kapjuk az állítást. $\square$

A 10.23. Tétel bizonyítása. Tekintsünk két különböző pontot, A -t és B -t.

Az AB szakasz pontjait osszuk két halmazba aszerint, hogy a bennük az (AB) egyenesre emelt merőleges síkra vonatkozó tükrözésnél A képe pontja az AB szakasznak, vagy nem. Ez Dedekind-szeleteket határoz meg a szakaszon a következők miatt. Nyilván AB minden pontja beletartozik pontosan az egyik halmazba. Egyik halmaz sem üres, hiszen A az egyik, B pedig a másik halmazba tartozik. Az pedig, hogy egyik osztályba tartozó pont sem választ el másik osztályba tartozó két pontot, a 10.25. Segédttételből adódik. A 10.4. Tétel szerint tehát létezik a két osztály pontjai közötti elválasztópont, jelöljük F -fel. A 10.14. Tétel bizonyításában levő gondolatmenetet félsíkok és lapszögek helyett pontokra és szakaszokra alkalmazva – a 10.24. és 10.25. Segédttételek felhasználásával – kapjuk, hogy az F pontban az (AB) egyenesre állított merőleges síkra vonatkozó tükrözésnél A képe B . $\square$

Ezzel az axiómák vizsgálatát lezártuk.

Irodalomjegyzék

- [1] Árki T. – Krisztin Német I.: Dynamic methods in teaching geometry at different levels, Teaching Mathematics and Computer Science 2/1 (2004) 1-13
- [2] Bachmann, F.: Aufbau der Geometrie aus dem Spiegelungsbegriff (zweite Auflage), Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York 1973
- [3] Baziljev, V.T. – Dunyicsev, K.I. – Ivanyickaja, V.P.: Geometria I., Tankönyvkiadó, Budapest 1985
- [4] Brauner, H.: Geometrie Projektiver Raume I., Bibliographisches Institut AG, Zürich, 1976
- [5] Coxeter, H.S.M.: Introduction to Geometry, J. Wiley & Sons Inc., New York-London 1961
- [6] Coxeter, H.S.M.: A geometriák alapjai, Műszaki Kiadó, Budapest 1973
- [7] Coxeter, H.S.M.: Non-Euclidean Geometry (5th ed.), University of Toronto Press, 1965
- [8] Coxeter, H.S.M.: Projektív geometria Gondolat, Budapest 1986
- [9] Coxeter, H.S.M. – Greitzer, S.L.: Az újra felfedezett geometria, Gondolat Kiadó, Budapest, 1977
- [10] Czapáry E. – Gyapjas F.: Matematika 9, 10 (3., 2. kiadás), Nemzeti Tankönyvkiadó Budapest, 2003
- [11] Gázsó I.: Transzformációk, Általános iskolai szakköri füzet, Tankönyvkiadó, Budapest 1972
- [12] Hajdú S. szerkesztő: Matematika 9, 10, Műszaki Kiadó, Budapest 2005
- [13] Hajnal I. – Némethy K.: Matematika I., II. (3., 2. kiadás) Tankönyvkiadó, Budapest 1990
- [14] Hajnal I. – Számadó L. – Békéssy Sz.: Matematika 9, 10 (3., 2. kiadás), Nemzeti Tankönyvkiadó, 2003
- [15] Hajós Gy.: Bevezetés a geometriába (8. kiadás) Tankönyvkiadó, Budapest 1987

- [16] Hajós Gy. – Strohmajer J.: A geometria alapjai, Tankönyvkiadó, Budapest 1978
- [17] Hartshorne, R.: Geometry - Euclid and beyond, Springer, New York 2000
- [18] Hilbert, D.: Grundlagen der Geometrie (siebente Auflage), B. G. Teubner, Leipzig-Berlin 1930
- [19] Hollai M. – Horváth J.: A sík és a tér affin transzformációi, ELTE Szakmódszertani Közleményei, Budapest 1973
- [20] Hollai M. – Horváth J. – Temesvári Á.: A sík és a tér egybevágósági és hasonlósági transzformációi, Tanulmányok a matematika tanítása köréből (Az ELTE Szakmódszertani Közleményei I-V. számából), Budapest 1978
- [21] Horvay K. – Reiman I.: Projektív geometria, Tankönyvkiadó, Budapest 1980
- [22] Horváth J.: Sztereografikus projekció és alkalmazásai (Elemi geometria a Poincarè-féle gömbmodellen), ELTE, Budapest 1980
- [23] Jegorov, I.P.: Geometria, Tankönyvkiadó, Budapest 1986
- [24] Kanpur, J.N.: Transformation geometry, Affiliated East-West Press, New Delhi, 1976
- [25] Kárteszi F.: Ábrázoló geometria (3. kiadás), Tankönyvkiadó, Budapest 1966
- [26] Kelly, J.P. – Matthews, G.: The Non-Euclidean, Hyperbolic Plane, Springer-Verlag, New York-Heidelberg-Berlin 1981
- [27] Kerékjártó B.: A geometria alapjairól, Az Euklidesi geometria elemi felépítése, a Szerző kiadása, Szeged 1937
- [28] Kerékjártó B.: A geometria alapjairól, Projektív geometria, MTA, Budapest 1944. Francia nyelvű kiadása: Les fondements de la geometrie II. Geometrie projective, Akadémiai Kiadó, Budapest 1966
- [29] Korányi Erzsébet: Matematika 9, 10, Konsept-H Kiadó, 2001
- [30] Kosztolányi J. – Kovács J. – Pintér K. – Urbán J. – Vincze I.: Sokszínű matematika 9, 10, Mozaik Kiadó, Szeged 2001-2002

- [31] Kovács Z.: Geometria, Az euklideszi geometria metrikus megalapozása, Debreceni Egyetem - Kossuth Egyetemi Kiadó, 2002
- [32] Kovács Z.: On the fixed points of an affine transformation: an elementary view, Teaching Mathematics and Computer Science 4/1 (2006), 101-110
- [33] Kozma J.: „Geometria” egyetemi előadás, JATE TTK Szeged, 1989
- [34] Krisztin Német I.: Megjegyzések az egybevágóság és a merőlegesség fogalmának megalapozásához a főiskolai geometria-oktatásban, Berzsenyi Dániel Főiskola Tudományos Közleményei XIII. Természettudományok 8. (2002) 17-37
- [35] Krisztin Német I.: Dedekind's axiom of continuity and the axioms of Reflection, IV. Vedecká konferencia doktorandov, UKF-FPV Nitra, Edícia Prirodovec č. 106, 314-319, Nitra 2003
- [36] Krisztin Német I.: Remarks on the concept of similarity in teaching geometry in teachers' training college, Acta Academiae Paedagogicae Agriensis, Sectio Mathematicae 31 (2004) 107-118
- [37] Krisztin Német I.: Remarks on the concepts of affine transformation and collineation in teaching geometry in teachers' training college, Annales Mathematicae et Informaticae 32 (2005) 225-236
- [38] Krisztin Német I.: On the fixed point of a collineation of the real projective plane, Közlésre elfogadva: Acta Mathematica Academiae Paedagogicae Nyíregyháziensis
- [39] Kutuzov, B.V.: Geometria, Tankönyvkiadó, Budapest 1954
- [40] Martin, G.E.: Foundations of Geometry and the Non-Euclidean Plane, Springer-Verlag, New York 1975
- [41] Martin, G.E.: Transformation Geometry (An Introduction to Symmetry), Springer-Verlag, New York 1982
- [42] Molnár E. (szerk.): Elemi matematika II. Geometriai transzformációk (14. kiadás), Tankönyvkiadó, Budapest 1989
- [43] Molnár E.: Matematikai versenyfeladatok gyűjteménye, Tankönyvkiadó, Budapest 1974

- [44] Pelle B.: Geometria (2. kiadás), Tankönyvkiadó, Budapest 1979
- [45] Pelle B.: Geometria (átdolgozott kiadás), EKTF Líceum Kiadó, Eger 1997
- [46] Radó F. – Orbán B.: A geometria mai szemmel, Dacia Könyvkiadó, Kolozsvár-Napoca 1981
- [47] Rácz J.: Transzformációközpontú geometriatanítás I., II., Tanári Kincsestár, Matematika, RAABE Kiadó, Budapest 2002-2003
- [48] Rácz J.: A középpontos hasonlósági transzformáció, Tanári Kincsestár, Matematika, RAABE Kiadó Budapest 2005
- [49] Rácz J.: Forgatva nyújtás és tükrözve nyújtás, Tanári Kincsestár, Matematika, RAABE Kiadó Budapest 2005
- [50] Reiman I.: Fejezetek az elemi geometriából, Tankönyvkiadó, Budapest 1987
- [51] Reiman I.: A geometria és határterületei, Gondolat, Budapest 1986
- [52] Rédling E.: Hasonlósági transzformációk, Tankönyvkiadó, Budapest 1982
- [53] Sain M.: Nincs királyi út! Matematikatörténet, Gondolat Kiadó, Budapest 1986
- [54] Strommer Gy.: Geometria, Tankönyvkiadó, Budapest 1988
- [55] Szabó Z.: Bevezető fejezetek a geometriába 1. kötet, JATE Bolyai Intézet, Szeged 1982
- [56] Szász G.: Geometria, Tankönyvkiadó, Budapest 1964
- [57] Szász G.: Projektív geometria, Tankönyvkiadó, Budapest 1964
- [58] Szenthe J. – Juhász R.: A geometria alapjai, Tankönyvkiadó, Budapest 1977
- [59] Szőkefalvi-Nagy Gy.: Elemi geometria, Előadás a Polgári Iskolai Tanárképző Főiskolán, kézirat, Szeged 1934
- [60] Vancsó Ö. sorozatszerkesztő: Matematika 9, 10, Műszaki Kiadó, Budapest 2003, 2006
- [61] Varga O.: A geometria alapjai, Tankönyvkiadó, Budapest 1963
- [62] Veblen, O. – Young, W.: Projective Geometry I. (2nd ed.), Blaisdell Publishing Company, New York, 1938

- [63] Vigassy L.: Egybevágósági transzformációk síkban és térben, Középsiskolai szakköri füzet, Tankönyvkiadó, Budapest 1979
- [64] van der Waerden, B.L.: Egy tudomány ébredése, Gondolat, Budapest 1977
- [65] van der Waerden, B.L.: Klassische und Moderne Axiomatik, Elemente der Mathematik XII/1. 1967 (magyar fordításban)
- [66] Yaglom, I.M.: Geometric transformations I-III, The Mathematical Association of America, New Mathematical Library
- [67] <http://www.cabri.com>
- [68] <http://www.cinderella.de>
- [69] <http://cocoa.dima.unige.it>; ingyenesen letölthető
- [70] <http://www.euklides.hu>; regisztrálva az SZTE JGYTFK Matematika Tan-széke számára
- [71] CorelDRAW 9.; regisztrálva az SZTE JGYTFK számára

Függelék

A disszertáció szerzőjének publikációi

Cikkek:

Krisztin Német István: Megjegyzések az egybevágóság és a merőlegesség fogalmának megalapozásához a főiskolai geometria-oktatásban, BDTF Tudományos Közleményei XIII. Természettudományok 8. pp. 17-37, Szombathely 2002.

István Krisztin Német: Dedekind's axiom of continuity and the axioms of Reflection, IV. Vedecká konferencia doktorandov, UKF-FPV Nitra, Edícia Prirodovec č. 106, pp. 314-319, Nitra 2003.

Horváth Jenő, H. Temesvári Ágota, Krisztin Német István: Az abszolút geometria elemei a főiskolai geometria-oktatásban, Polygon XII/1-2 (2003) pp. 80-91

István Krisztin Német: Remarks on the concept of similarity in teaching geometry in teachers' training college, Acta Academiae Paedagogicae Agriensis, Sectio Mathematicae 31 (2004) pp. 107-118.

Tamás Árki, István Krisztin Német: Dynamic methods in teaching geometry at different levels, Teaching Mathematics and Computer Science 2/1 (2004), pp. 1-13.

István Krisztin Német: Remarks on the concepts of affine transformation and collineation in teaching geometry in teachers' training college, Annales Mathematicae et informaticae 32 (2005) pp. 225-236.

István Krisztin Német: On the fixed point of a collineation of the real projective plane, Közlésre elfogadva: Acta Mathematica Academiae Paedagogicae Nyíregyháziensis

Előadások:

Szalay István, Krisztin Német István: Algebrai modell a Lorentz-féle sebesség-összeadásra, Főiskolák Matematika, Fizika és Számítástechnika Oktatóinak Konferenciája, szekcióelőadás, Kaposvár, 2000. augusztus 24-26.

István Krisztin Német: Dedekind's axiom of continuity and the axioms of Reflection, IV. Vedecká konferencia doktorandov, szekcióelőadás, UKF-FPV Nitra, 2003. március 21-22.

Krisztin Német István: A geometriai transzformációk főiskolai tanítása és axiomatikus háttere, Jubileumi Ünneppsorozat, Tudományos felolvasó-ülés, szekcióelőadás, SZTE JGYTFK Szeged, 2003. november 11.

István Krisztin Német: On the fixed point of a collineation of the real projective plane, Conference on Constructive Geometry, szekcióelőadás, Balatonföldvár, 2005. szeptember 5-9.

Oktatási segédanyagok:

Krisztin Német István: Sík és térfelosztások, JGYTF Matematikai tanszék Tanár-továbbképzési Program, kézirat, Szeged 1997

Bagota Mónika, Kovács Zoltán, Krisztin Német István: Matematikai Praktikum, Feladatgyűjtemény az SZTE TTK BSc képzése számára, lektorálás alatt, Szeged 2007

Köszönetnyilvánítások

Mindenekelőtt *Dr. Horváth Jenő* emeritus professzornak, témavezetőmnek tartozom köszönettel, aki a témaválasztástól és a szakirodalom gyűjtésétől kezdve, a vizsgákra való felkészülésen és a publikációk megírásán, megjelenítésén át, a disszertáció összeállításáig hasznos tanácsaival irányította, segítette munkámat.

Külön köszönöm *Dr. Galambos Gábor* tanszékvezető egyetemi tanárnak, a Szegedi Tudományegyetem Juhász Gyula Pedagógusképző Kara dékánjának, *Dr. Szalay István* tanszékvezető főiskolai tanárnak, az SZTE JGYPK Matematika Tanszéke vezetőjének, valamint *Dr. Lajkó Károly* egyetemi docensnek, a Debreceni Egyetem TTK Matematika- és Számítástudományok Doktori Iskola Matematika-Didaktika programja vezetőjének, hogy támogatták a PhD fokozat megszerzésére irányuló tevékenységemet.

Végül, de nem utolsósorban, köszönet illeti *Dr. Ambrus Andrást, Árki Tamást, Dr. Bartháné Hell Gabriellát, Dr. Gévay Gábort, Dr. Karsai Jánost, Dr. Kovács Zoltánt, Krisztin Német Jánost, Kozma Nikolettet, Dr. László Bélát, Dr. Miskolczi Józsefet, Dr. Molnár Emilt, Dr. Németh Józsefet, Dr. Pavel Pech-et, Dr. Hellmuth Stachelt, Dr. Szederkényi Antalt, Dr. Szendrei Jánost, Dr. Szenthe Jánost, Dr. Szilassi Lajost és a folyóiratok lektorait*, akik szakirodalom ajánlásával, a cikkekre és a disszertációra vonatkozó javaslatokkal, az angol fordítások ellenőrzésével, a szoftverek használatával és az ábrák elkészítésével kapcsolatos tanácsokkal, konferencia-meghívással járultak hozzá tanulmányaimhoz, publikációimhoz.

Szeged, 2007. június 20.

Krisztin Német István