

**Vilenkin-rendszerekkel kapcsolatos
approximációs kérdések
vizsgálata**

DOKTORI (PHD) ÉRTEKEZÉS
BLAHOTA ISTVÁN

Debreceni Egyetem
TERMÉSZETTUDOMÁNYI KAR
Debrecen, 2001

Köszönetnyilvánítás

Ezúton szeretnék köszönetet mondani Dr. Daróczy Zoltánnak, témavezetőmnek támogatásáért és Dr. Gát Györgynek, kollégámnak az évek során nyújtott segítségéért. Hálával tartozom még a Bessenyei György Tanárképző Főiskola Matematika Tanszékének (ma: Nyíregyházi Főiskola, Matematika és Informatika Intézet), elsősorban annak egykori vezetőjének, Dr. Varecza Árpádnak, akinek támogatása nélkül ez a dolgozat nem készülhetett volna el.

Tartalom

Köszönetnyilvánítás, Tartalom

Első fejezet: Bevezetés

- 1.1. Rövid történeti áttekintés 1
- 1.2. A ψ_α és a kettős ψ_α rendszer. Jelölések, terminológia 2
- 1.3. A Vilenkin-tér és az azon értelmezett Vilenkin-szerű rendszer.
Jelölések, terminológia 14

Második fejezet: Egy majdnem páros számelméleti függvény Vilenkin—Fourier-sorának divergenciája

- 2.1. Felhasznált eredmények 18
- 2.2. Példa majdnem páros számelméleti függvényre, melynek Vilenkin—
Fourier-sora mindenhol divergál 18

Harmadik fejezet: Kettős Vilenkin—Fejér-közepek

- 3.1. Felhasznált eredmények 22
- 3.2. Kettős Vilenkin—Fejér-közepek pontonkénti konvergenciája .. 23
- 3.3. A σ^* operátor (H, L) típusossága 34

Negyedik fejezet: Egy normaegyenlőtlenség Vilenkin-szerű tereken értelmezett függvényekre

- 4.1. Felhasznált eredmények 39
- 4.2. Az egydimenziós változat 40
- 4.3. A kétdimenziós változat 51

Összefoglalás 66

Summary 68

Irodalomjegyzék 72

Függelék

Publikációk jegyzéke 75

Előadások jegyzéke 77

Első fejezet

Bevezetés

1.1. Rövid történeti áttekintés.

A diadikus harmonikus analízis a 20-as években jött létre, amikor Walsh ([Wal]) bevezette a később róla elnevezett függvényeket, rendszert és transzformációt. Maguk a Walsh-függvények szakaszonként konstans, csak -1 és 1 értékeket felvevő függvények.

Az elmélet tovább gazdagodott Vilenkin munkássága nyomán, aki a 40-es években általánosította Walsh fogalmait és eredményeit ([Vil]). Az utóbbi évtizedekben néhány új alkalmazási területen éli reneszánszát a diadikus analízis. Egyfelől a számítástechnikai alkalmazások váltak egyre széleskörűbbé (például mérési eredmények kiértékelése, képfeldolgozási és karakterfelismerési algoritmusok hatékonyságának javítása), másfelől egy további általánosítás után, az úgynevezett $\psi\alpha$ -rendszer bevezetésével számelméleti alkalmazásokra nyílik lehetőség.

A legfrissebb eredmények közé tartozik a későbbiekben ψ' -vel jelölt Vilenkin-szerű ortonormált rendszer bevezetése ([Gát2]), melynek segítségével lehetőség nyílt a szokásos Vilenkin-technikákhoz hasonló módszerek használatára művelet nélküli halmazokon értelmezett függvények Fourier-approximációja során.

A bizonyított tételek mindegyike a szerző publikációiban megtalálható állításokon nyugszik. Ezen cikkek (egy kivétellel, melyet közlésre elfogadtak) meg is jelentek. A disszertáció csak kis részben támaszkodik a szerző egyetemi doktori értekezésére — abból csupán

egy rövid fejezetet vett át —, bár az akkor elkezdett kutatások fő irányvonala nem változott.

1.2. A ψ_α és a kettős ψ_α rendszer. Jelölések és terminológia.

Ebben az 1.2. alfejezetben a 2. és 3. fejezet fogalmait, jelöléseit vezetjük be. Itt mutatjuk be továbbá, hogy hogyan tudunk kapcsolatot teremteni a Vilenkin-analízis és a számelméleti függvények között.

Jelöljük \mathbb{P} -vel a pozitív egész számok halmazát, $\mathbb{N} := \mathbb{P} \cup \{0\}$, valamint jelölje \mathbb{C} a komplex számokat. Legyen $m := (m_0, m_1, \dots)$ 2-nél nem kisebb pozitív egészek sorozata. Jelölje $Z_{m_j} := \{0, 1, \dots, m_j - 1\}$ a természetes számok additív csoportját moduló m_j ($j \in \mathbb{N}$), és legyen minden részhalmaz nyílt. Definiáljuk G_m -et a Z_{m_j} diszkrét ciklikus csoportok teljes direkt szorzataként:

$$G_m := \prod_{j=0}^{\infty} Z_{m_j}.$$

Ekkor G_m elemeit az alábbi sorozatokként lehet reprezentálni

$$x := (x_0, x_1, \dots) \quad (x_j \in Z_{m_j}).$$

Az $x_j \in Z_{m_j}$ számot az $x \in G_m$ elem j -edik koordinátájának nevezzük.

Az összeg $x, y \in G_m$ esetében

$$x + y := ((x_k + y_k) \pmod{m_k}, k \in \mathbb{N})$$

lesz, vagyis a művelet a koordinátánkénti összeadás, Z_{m_j} -ből örökölt moduló m_j . Az egységelemet $0 = (0, 0, \dots)$ -val jelöljük.

A G_m csoportot Vilenkin-csoportnak nevezik ([AVDR]). Ha az m sorozat korlátos, akkor G_m csoportot is korlátosnak nevezzük. Ha $m_k = 2$ minden $k \in \mathbb{N}$ esetén, akkor Walsh-Paley féle diadikus csoportról beszélünk.

Vezessük be a direkt szorzaton a μ mértéket a következőképpen. Legyen

$$\mu_k(\{j\}) := \frac{1}{m_k} \quad (j \in Z_{m_k}, k \in \mathbb{N}).$$

Az ebből származó szorzatmérték Haar-mérték és valószínűségi mérték lesz G_m -en, tehát $\mu(G_m) = 1$.

Vezessük be az alábbi jelöléseket:

$$I_0(x) := G_m,$$

$$I_n(x) := \{y \in G_m \mid y_0 = x_0, \dots, y_{n-1} = x_{n-1}\},$$

ha $x \in G_m$, $n \in \mathbb{N}$. Legyen $I_n := I_n(0)$ amennyiben $n \in \mathbb{N}$. Az I_n halmazok részcsoportjai lesznek G_m -nek, melyeknek az $I_n(x)$ halmazok mellékosztályai. Az $I_n(x)$ halmazokat intervallumoknak fogjuk nevezni.

A G_m csoport a szorzattopológiával és a μ szorzatmértékkel ellátva kompakt Hausdorff-féle topológikus tér lesz és nulla dimenziós Abel-csoport. A megszámlálható sok I_n halmaz mint a $0 = (0, 0, \dots)$ elem környezetbázisa meghatározza G_m topológiáját, és annak megszámlálható bázisát alkotja.

Tehát azt a műveletet, topológiát és mértéket vesszük G_m -en, amely abból adódik, hogy G_m szorzattér.

Legyen

$$G_0 := \{x \in G_m \mid \exists n \in \mathbb{N}, x_k = 0, k > n\}.$$

A továbbiakban fontos szerepet fog játszani a következő jelölés

$$M_0 := 1, \quad M_{j+1} := m_j M_j \quad (j \in \mathbb{N}).$$

Ekkor minden $n \in \mathbb{N}$ -t egyértelműen elő lehet állítani, mint

$$n = \sum_{j=0}^{\infty} n_j M_j, \quad \text{ahol } n_j \in Z_{m_j} \quad (j \in \mathbb{N})$$

és n_j -k közül csak véges sok nem nulla, vagyis $(n_0, n_1, \dots) \in G_0$.

Amennyiben az m sorozat minden tagja ugyanaz az egynél nagyobb k természetes szám, akkor

$$M_0 = 1, M_1 = k, \dots, M_j = k^j, \dots (j \in \mathbb{N})$$

és minden $n \in \mathbb{N}$ -et egyértelműen elő lehet állítani, mint

$$n = \sum_{j=0}^{\infty} n_j k^j, \text{ ahol } n_j \in Z_k (j \in \mathbb{N}),$$

ahogy azt a k alapú számrendszerben már megszoktuk.

Tehát az $m = (m_0, m_1, \dots)$ sorozat segítségével tulajdonképpen a számrendszerfogalmat általánosítottuk.

A későbbiekben szükségünk lesz még a további jelölésekre is. Ha $n \in \mathbb{P}$, akkor $|n| := \max\{k \in \mathbb{N} : n_k \neq 0\}$ (vagyis $M_{|n|} \leq n < M_{|n|+1}$), $n^{(k)} = \sum_{j=k}^{\infty} n_j M_j$ és $n_{(k)} := n - n^{(k)}$.

Amennyiben a \oplus műveletet a következőképpen értelmezzük a természetes számok halmazán:

$$n \oplus j := \sum_{k=0}^{\infty} ((n_k + j_k) \bmod m_k) M_k$$

$$\left(n = \sum_{k=0}^{\infty} n_k M_k, j = \sum_{k=0}^{\infty} j_k M_k \right),$$

akkor az (\mathbb{N}, \oplus) és a $(G_0, +)$ terek izomorfak lesznek.

A G_m Vilenkin-csoport metrizálható, sőt

$$|x| = |(x_k, k \in \mathbb{N})| := \sum_{k=0}^{\infty} x_k M_{k+1}^{-1}$$

norma lesz G_m -en,

$$d(x, y) := |x - y|$$

pedig metrika, és a G_m topológiája éppen ebből a metrikából származik.

Az előzőekben definiált norma jó kapcsolatot hoz létre a G_m Vilenkin-csoport és a $[0, 1)$ intervallum között, hiszen a λ függvény, az úgynevezett Fine-féle leképezés ráképezés lesz, bár nem kölcsönösen egyértelmű, hiszen például

$$\lambda((1, 0, 0, \dots)) = \lambda((0, m_1 - 1, m_2 - 1, \dots)),$$

azonban G_m megfelelő leszűkítésével ez a probléma kiküszöbölhető. Legyen ugyanis $x \in G_m$ m -racionális, ha $x \in G_0$ és $\lambda(x_0) \neq 0$. Tudjuk, hogy minden x m -racionálishoz létezik olyan $y \in G_m$, $y \notin G_0$ úgy, hogy $\lambda(x) = \lambda(y)$. Jelölje G_m^* ezen y -ok halmazát. Így a

$$\lambda : G_m \setminus (G_m^* \cup (m_0 - 1, m_1 - 1, \dots)) \rightarrow [0, 1)$$

már kölcsönösen egyértelmű ráképezés.

A valós számok körében ez a probléma úgy jelentkezik, hogy tizes számrendszerben kétféleképpen állítható elő minden véges tizedestört alakban felírható szám, például $1 = 0,99999\dots$

Az λ függvény inverzét az x elem m -reprezentációjának nevezzük. A λ^{-1} függvény mértékinvariáns.

A számelméleti függvényekkel kapcsolatos Vilenkin-Fourier elmélet legtöbbször nem a Vilenkin-csoportot, hanem az ennél speciálisabb, a Gát ([Gát3]) által bevezetett úgynevezett R(Ramanujan)-Vilenkin-csoportot használja.

Ha minden $k \in \mathbb{P}$ -re létezik egy $n = n(k)$ úgy hogy $k \mid M_n$, akkor azt mondjuk, hogy G_m egy R-Vilenkin-csoport.

Világos, hogy R-Vilenkin csoport nem lehet korlátos Vilenkin-csoport. Mindezt azért kell külön hangsúlyozni, mert azon eredmények, amelyek a Walsh-Paley-féle diadikus csoporton fennállnak, sok esetben analóg módon általánosíthatók korlátos Vilenkin-csoportokra, ugyanez azonban nem mindig mondható el, ha m nem korlátos. Ez utóbbi esetben a bizonyítások általában erősebb eszközöket igényelnek.

Definiáljuk G_m -en az úgynevezett általánosított Rademacher-függvényt a következőképpen

$$r_k(x) := \exp \frac{2\pi i x_k}{m_k} \quad (i := \sqrt{-1}, x \in G_m, k \in \mathbb{N}).$$

A

$$\psi_n(x) := \prod_{k=0}^{\infty} r_k^{n_k}(x) \quad (x \in G_m, n \in \mathbb{N})$$

függvényrendszert Vilenkin-rendszernek (ha Walsh—Paley-csoport-ról van szó, akkor Walsh—Paley-rendszernek) nevezzük.

Azt mondjuk, hogy az f függvény karakter G_m -en, ha folytonos, $f(x+y) = f(x)f(y)$, és $|f(x)| = 1$ ($x, y \in G_m$).

1.2.2 Tétel ([SWS]). *Az f komplex értékű függvény akkor és csak akkor karakter G_m -en, ha van olyan $n \in \mathbb{N}$, hogy $f = \psi_n$.*

Könnyen beláthatóak még az alábbi tulajdonságok is:

$$\psi_{k \oplus n} = \psi_k \psi_n, \quad \psi_n(-x) = \overline{\psi_n(x)}, \quad (x \in G_m, k, n \in \mathbb{N}).$$

Mivel a μ mérték segítségével definiálhatjuk a G_m -en értelmezett komplex értékű függvények integrálját, a szokott módon belső szorzatot értelmezve Hilbert-teret kapunk. Így beszélhetünk az $L^p(G_m)$ ($1 \leq p \leq \infty$) térről is. Legyen tehát $f : G_m \rightarrow \mathbb{C}$ mérhető függvény $L^p(G_m)$ -beli, ha $\|f\|_p < \infty$. Az $L^p(G_m)$ normát a többi L^p normához hasonlóan definiáljuk

$$\|f\|_p := \sqrt[p]{\int_{G_m} |f(x)|^p}, \quad \text{ha } p < \infty,$$

és

$$\|f\|_\infty := \inf\{r : r > 0, \mu(|f| > r) = 0\}.$$

A Vilenkin-rendszer ortonormált és teljes $L^1(G_m)$ -ben ([Vil]).

Legyen \mathcal{A}_n ($n \in \mathbb{N}$) az $I_n(z)$ ($z \in G_m$) részhalmazok által generált σ -algebra. Legyenek α_j^k , α_n ($k, j, n \in \mathbb{N}$) olyan függvények, amelyek teljesítik az alábbiakat:

- i. az $\alpha_j^k : G_m \rightarrow \mathbb{C}$ függvények legyenek \mathcal{A}_j -mérhetőek ($k, j \in \mathbb{N}$).
- ii. $|\alpha_j^k| := \alpha_0^k := \alpha_j^0 := \alpha_j^k(0) := 1$ ($k, j \in \mathbb{N}$),

$$\text{iii. } \alpha_n := \prod_{j=0}^{\infty} \alpha_j^{n^{(j)}} \quad (n \in \mathbb{N}, \quad n^{(j)} := \sum_{k=j}^{\infty} n_k M_k),$$

vagyis az $\alpha_j^{n^{(j)}}$ függvény az $x = (x_0, x_1, \dots, x_{j-1}, x_j, \dots)$ elemnek csak az első j darab $(0, 1, \dots, j-1)$ koordinátájától függjön, míg az

$$n = \sum_{k=0}^{\infty} n_k M_k = (n_0, n_1, \dots, n_{j-1}, n_j, \dots)$$

első j darab $(0, 1, \dots, j-1)$ koordinátájától ne függjön.

Legyen $\chi_n := \psi_n \alpha_n$ ($n \in \mathbb{N}$). Egy ilyen $\{\chi_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ függvényrendszert $\psi\alpha$ -rendszernek neveznek a G_m Vilenkin-csoporton ([Gát2]). Amennyiben $\alpha_n \equiv 1$, úgy visszkapjuk az eredeti Vilenkin-rendszert.

Ha $m_j = 2$ minden $j \in \mathbb{N}$ és $\alpha_j^{n^{(j)}} = (\beta_j)^{n_j}$, ahol

$$\beta_j(x) = \exp\left(2\pi i \left(\frac{x_{j-1}}{2^2} + \dots + \frac{x_0}{2^{j+1}}\right)\right) \quad (n, j \in \mathbb{N}, \quad x \in G_m),$$

akkor speciálisan a 2-adikus egészek csoportjának karakterrendszerét nyerjük (lásd még [Tai], [HR], [Gát7]).

1.2.2. Tétel ([Gát2]). *A $\psi\alpha$ -rendszer ortonormált és teljes $L^1(G_m)$ -ben.*

A $\psi\alpha$ -rendszer általában nem karakter, viszont ha $y \in I_k$, $n < M_{k+1}$, akkor

$$\chi_n(x + y) = \chi_n(x)\chi_n(y) \quad (x, y \in G_m, \quad n \in \mathbb{N}),$$

azaz lokálisan karakter.

A továbbiakban bevezetjük a Vilenkin-Fourier-analízis alapvető fogalmait. Legyen $f \in L^1(G_m)$. Az f függvény Fourier-együtthatója a $\psi\alpha$ -(χ -) rendszerre nézve

$$\hat{f}(k) := \int_{G_m} f(x) \overline{\chi_k(x)} \quad (k \in \mathbb{N}).$$

Jelölje

$$S_k f := \sum_{j=0}^{k-1} \hat{f}(j) \chi_j \quad (k \in \mathbb{N})$$

az f Fourier sorának k -adik részletösszegét,

$$\sigma_n f := \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} S_k f \quad (n \in \mathbb{P})$$

pedig n -edik Fejér-közepet. Az n -edik Dirichlet-féle magfüggvény legyen

$$D_n(y, x) := \sum_{k=0}^{n-1} \chi_n(y) \bar{\chi}_n(x) \quad (n \in \mathbb{P}, y, x \in G_m),$$

az n -edik Fejér-féle magfüggvény pedig

$$K_n(y, x) := \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} D_k(y, x) \quad (n \in \mathbb{P}, y, x \in G_m).$$

A harmonikus analízis súlyát mutatja a következő tétel, melyet Vilenkin-rendszerre Schipp ([Sch]), Simon ([Sim2]) és Young ([Yuo]) látott be egymástól függetlenül. Az alábbi, $\psi\alpha$ -rendszerre általánosított alak bizonyítása Gáttól származik.

1.2.3. Tétel ([Gát1]). *Legyen $f \in L^p(G_m)$ ($1 < p < \infty$, $n \in \mathbb{N}$), akkor az $S_n f$ függvénysorozat L^p -normában konvergál f -hez.*

Amennyiben $f \in L^p(G_m)$ ($1 \leq p < \infty$, $n \in \mathbb{N}$), akkor az $S_{M_n} f$ függvénysorozat L^p -normában és μ majdnem mindenütt konvergál f -hez.

A $\psi\alpha$ -rendszer bevezetésének igazi jelentősége, hogy kapcsolatot teremt az analízis és a számelmélet között, lehetőséget nyújtva a jól kidolgozott Fourier-technikák használatára bizonyos számelméleti függvények approximációjában.

Legyen $k \in \mathbb{P}$. Azt mondjuk, hogy az $f : \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{C}$ számelméleti függvény páros modulo k , ha minden $n \in \mathbb{P}$ -re

$$f(n) = f((n, k)),$$

ahol (n, k) jelöli n és k legnagyobb közös osztóját. Mivel

$$f(n+k) = f((n+k, k)) = f((n, k)) = f(n),$$

így f periódikus, tehát korlátos függvény.

$$\mathcal{B}_k := \{f \text{ páros modulo } k\}, \quad \mathcal{B} := \bigcup_{k \in \mathbb{P}} \mathcal{B}_k.$$

A következő határértéket (ha létezik)

$$M(f) := \lim_{x \rightarrow \infty} x^{-1} \sum_{1 \leq j \leq x} f(j)$$

az f függvény középértékének nevezik. Ha $f : \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{R}$ akkor

$$\overline{M}(f) := \limsup_{x \rightarrow \infty} x^{-1} \sum_{1 \leq j \leq x} f(j), \quad \underline{M}(f) := \liminf_{x \rightarrow \infty} x^{-1} \sum_{1 \leq j \leq x} f(j)$$

hívják az f felső és az alsó középértékének. Legyen $1 \leq q < \infty$, ekkor a felső közép értékből származik egy szeminorma:

$$\|f\|_{\mathcal{B}^q} := \{\overline{M}(|f|^q)\}^{1/q} \text{ az } \{f \mid f : \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{C}, \|f\|_{\mathcal{B}^q} < \infty\}$$

lineáris téren. Jelöljük \mathcal{B}^q -val \mathcal{B} lezártját erre a szeminormára nézve. A \mathcal{B}^q -ban lévő függvényeket majdnem páros számelméleti függvényeknek nevezik. Jónéhány közismert és fontos számelméleti függvények tartozik ebbe a függvényosztályba. Ilyen például a $\phi(n)/n$, vagyis az Euler-féle függvény osztva n -nel. ($\phi(n)/n \in \mathcal{B}^q$ minden $1 \leq q < \infty$ esetén.)

Sokat foglalkozott a majdnem páros számelméleti függvényekkel (többek között) Hildebrand, kinek eredményeit a továbbiakban fel

fogjuk használni. A c_r Ramanujan összeget a következőképpen definiálják:

$$c_r(n) := \sum_{a=1, (a,r)=1}^r \exp(2\pi i(a/r)n) \quad (i := \sqrt{-1}, r, n \in \mathbb{P}).$$

Minden $n \in \mathbb{P}$ -re az $r \rightarrow c_r(n)$ függvény multiplikatív, és könnyű látni ([Hil]), hogy

$$c_r(n) = \prod_{p^m \parallel r} c_{p^m}(n), \quad c_{p^m}(n) = \begin{cases} 0 & , \text{ ha } \neg(p^{m-1} | n), \\ -p^{m-1} & , \text{ ha } p^{m-1} \parallel n, \\ p^m - p^{m-1} & , \text{ ha } p^m | n, \end{cases}$$

ahol $p^{m-1} \parallel n$ azt jelenti, hogy $p^{m-1} | n$, de $\neg(p^m | n)$. Speciálisan ha $m = 1$ (és ez az eset különösen fontos lesz a 2. fejezetben), a következő alakot kapjuk:

$$c_p(n) = \begin{cases} -1 & , \text{ ha } \neg(p | n), \\ p - 1 & , \text{ ha } p | n. \end{cases}$$

Mivel

$$M(c_r c_{r'}) = \begin{cases} \phi(r) & \text{ ha } r = r', \\ 0 & \text{ egyébként,} \end{cases}$$

ahol $\phi(n)$ az Euler-függvény, ezért $\{\phi^{-1/2}(r)c_r \mid r \in \mathbb{P}\}$ ortonormált rendszer, sőt mi több, teljes \mathcal{B}^1 -ben ([Hil]). Legyen

$$a_r(f) := \frac{1}{\phi(r)} M(f \bar{c}_r).$$

Ismert ([Hil]), hogy ha f páros számelméleti függvény, akkor

$$f(n) = \sum_r a_r c_r(n) \quad (n, r \in \mathbb{P}).$$

Ha $n \in \mathbb{N}$, $n = \sum_{j=0}^{\infty} n_j M_j$, akkor legyen

$$\check{n} = \sum_{j=0}^{\infty} n_j M_{j+1}^{-1}.$$

Természetesen az n_j -k közül csak véges sok nem nulla, valamint $\check{n} \in [0, 1)$.

Jelölje

$$\kappa_n(x) := \lim_{k \rightarrow \infty} \exp(2\pi i \check{n} \sum_{j=0}^k x_j M_j) \quad (n \in \mathbb{N}, x \in G_m).$$

Gát bizonyította ([Gát3]), hogy létezik a határérték, és $\{\kappa_n | n \in \mathbb{N}\}$ rendszer G_m -en $\psi\alpha$ típusú rendszer.

Ha $1 \leq q < \infty$, akkor van olyan $*$: $\mathcal{B}^q \rightarrow L^q(G_m)$ lineáris normatartó leképezés, hogy $f^*(\lambda^{-1}(\check{n})) = f(n)$, ($n \in \mathbb{P}$). Ekkor $\|f^*\|_q = \|f\|_{\mathcal{B}^q}$ és $f_n \rightarrow f \Leftrightarrow f_n^* \rightarrow f^*$ (a megfelelő terekben, a megfelelő normákban nézve)(lásd még [Gát3]).

Vezessük be a Fourier-analízis szokásos definícióit; legyen

$$\hat{f}^\kappa(k) := \int_{G_m} f^*(x) \overline{\kappa_k(x)} \quad (k \in \mathbb{N}),$$

és

$$S_k^\kappa f := \sum_{j=0}^{k-1} \hat{f}^\kappa(j) \kappa_j.$$

A majdnem páros számelméleti függvények approximációjával kapcsolatban számos pozitív eredmény ismert. Ilyen például az alábbi normakonvergenciatétel.

1.2.4. Tétel ([Gát3]). *Ha $f \in \mathcal{B}^q$ és $1 \leq q < \infty$, akkor $S_n^k f$ a \mathcal{B}^q szeminormára nézve konvergál f -hez.*

Vilenkin és Vilenkin-szerű rendszerekkel kapcsolatos további információkért lásd [SWS], [AVD], [Vil], [Gát1-4].

A 2. és a 3. fejezet állításai $\psi\alpha$ rendszerekre vonatkoznak. A 3. fejezetben kettős $\psi\alpha$ rendszerekkel találkozhatunk. Vezessük be a megértéshez szükséges fogalmakat.

Míg a 2. fejezetben a Vilenkin-csoportot generáló m sorozat (szükségképpen) a végtelenbe tart, a további fejezetekben legyen korlátos.

Vezessük be most a kettős rendszerek vizsgálatához szükséges definíciókat. Jelölje $G_m \times G_m$ a G_m csoport önmagával vett direkt szorzatát.

$(n_1, n_2) = \mathbf{n} \in \mathbb{N}^2$ esetén legyen $\vee \mathbf{n} := \max(n_1, n_2)$, $\wedge \mathbf{n} := \min(n_1, n_2)$. Jelölje az f $L^p(G_m \times G_m)$ -beli függvény L^p normáját $\|f\|_p$ ($1 \leq p \leq \infty$).

Kétdimenziós (vagy kettős) Vilenkin-szerű rendszernek az $\{\chi_{n,m} : n, m \in \mathbb{N}\}$ rendszert, a $\{\chi_n : n \in \mathbb{N}\}$ Vilenkin-szerű rendszer önmagával vett Kronecker-szorzatát fogjuk nevezni. Tehát

$$\chi_{n,m}(x, y) := \chi_n(x)\chi_m(y),$$

ahol $x, y \in G_m$.

Ha $f \in L^1(G_m \times G_m)$, akkor az (n, k) -adik Fourier-együttható, az (n, k) -adik Fourier-részletösszeg és a Fejér-közep az alábbiak lesznek:

$$\hat{f}(n, k) := \int_{G_m \times G_m} f \bar{\chi}_{n,k}, \quad S_{n,k} f := \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{l=0}^{k-1} \hat{f}(j, l) \chi_{j,l},$$

$$\sigma_{n,k} f := \frac{1}{nk} \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{l=0}^{k-1} S_{j,l} f.$$

Ekkor $\mathbf{n} = (n_1, n_2) \in \mathbf{N}^2$ és $f \in L^1(G_m \times G_m)$ esetén az f -nek az \mathbf{n} -edrendű Fejér-közepe a $\chi \times \chi$ rendszerre vonatkozóan

$$\sigma_{\mathbf{n}}f = f * (K_{n_1} \times K_{n_2}),$$

ahol $K_{n_1} \times K_{n_2}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = K_{n_1}(x_1, y_1)K_{n_2}(x_2, y_2)$, $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2) \in G_m \times G_m$, és $*$ a kétdimenziós konvolúció. Vagyis

$$\sigma_{\mathbf{n}}f(\mathbf{x}) = \int_{G_m} \int_{G_m} f(u, v)K_{n_1}(x_1, u)K_{n_2}(x_2, v)du dv.$$

Minden $f \in L^1(G_m \times G_m)$ -re legyen a maximál és a diagonál maximál függvény az alábbi módon definiálva:

$$f^* := \sup_{n_1, n_2 \in \mathbb{N}} |S_{M_{n_1}, M_{n_2}} f|, \quad f^\circ := \sup_{n \in \mathbb{N}} |S_{M_n, M_n} f|$$

és

$$\|f\|_H := \|f^*\|_1, \quad \|f\|_{H^\circ} := \|f^\circ\|_1.$$

Definiáljuk a $H(G_m \times G_m)$ (vagy, ha egyértelmű milyen térhez tartozik, egyszerűen: H) a kettős maximál-Hardy-teret az $f \in L^1(G_m \times G_m)$ függvények összességéeként, úgy, hogy $\|f\|_H < \infty$, valamint a $H^\circ(G_m \times G_m)$ (vagy ha egyértelmű milyen térhez tartozik, egyszerűen: H°) a kettős diagonál-maximál-Hardy-teret úgy, mint

$$H^\circ := \{f \in L^1(G_m \times G_m) : \|f\|_{H^\circ} < \infty\}.$$

Mivel $\|f\|_{H^\circ} \leq \|f\|_H$, így $H \subset H^\circ$. (A G_m csoporthoz tartozó egyszeres Hardy-tér (-terek) bevezetésére nincs szükség, hiszen azzal kapcsolatban nem tartalmaz állítást ez a disszertáció.)

Hasznos eszköz a diagonál-maximál-Hardy-tér vizsgálatában annak úgynevezett atomos felbontása.

Azt mondjuk, hogy $a \in L^\infty(G_m \times G_m)$ egy H° atom, ha

i. létezik $x = (x_1, x_2)$ és $k \in \mathbb{N}$, úgy hogy $\text{supp } a \subset I_k(x_1) \times I_k(x_2)$,

- ii. $\|a\|_\infty \leq M_k M_k$,
- iii. $(E_k a)(y) := (E_{k,k} a)(y) = 0$ minden $y \in G_m \times G_m$ esetén (ahol $E_{r,s}$ a kettős feltételes várható érték, így $(E_{r,s} f)(y) = M_r M_s \int_{I_r(y_1) \times I_s(y_2)} f$).

Az atomok és a diagonál-maximál-Hardy-tér kapcsolatáról a 3.3.2. Tétel szól.

1.3. A Vilenkin-tér és az azon értelmezett Vilenkin-szerű rendszer. Jelölések és terminológia.

Az 1.3. alfejezet a 4. fejezet fogalmait és jelöléseit tartalmazza.

Legyen m továbbra is a 2-nél nem kisebb pozitív egészek sorozata, G_{m_j} pedig egy m_j ($j \in \mathbb{P}$) elemszámú halmaz, bármilyen művelet nélkül, de ellátva a diszkrét topológiával. Definiáljunk mértéket G_{m_j} halmazon, mint

$$\mu_k(\{j\}) := \frac{1}{m_k} \quad (j \in G_{m_k}, k \in \mathbb{N}).$$

Legyen G'_m a G_{m_j} halmazok teljes direkt szorzata, ellátva a szorzattopológiával és a μ -vel jelölt szorzatmértékkal. Ez a szorzatmérték reguláris valószínűségi Borel-mérték lesz. Ha az m sorozat korlátos, G'_m -et korlátos, egyébként nem korlátos Vilenkin-térnek nevezzük. A Vilenkin-csoporthoz hasonlóan G'_m elemeit is sorozatokként reprezentálhatjuk, valamint az intervallumfogalom, az intervallumok által generált σ -algebrák és a Lebesgue-féle függvényterek is hasonlóan értelmezhetőek.

A továbbiakban tegyük fel, hogy a G'_m Vilenkin-tér korlátos.

A $H(G'_m)$ maximál-Hardy-teret a $f^* := \sup_n |E_n f|$ ($f \in L^1(G'_m)$) maximál függvény segítségével definiáljuk. Akkor mondjuk, hogy f eleme a maximál-Hardy-térnek, ha $f^* \in L^1(G_m)$. Ekkor $H(G'_m)$ egy Banach-tér a

$$\|f\|_{H^1} := \|f^*\|_1$$

normával.

Itt is elkészíthetjük a tér függvényeinek atomos felbontását. Az a függvényt atomnak nevezzük, ha $a \equiv 1$ vagy $a : G'_m \rightarrow \mathbb{C}$, $|a| \leq \mu^{-1}(I_n)$, $\text{supp } a \subset I_n$ és $\int a = 0$. Azt mondjuk, hogy f atomos-Hardy-térbeli vagyis $f \in H^a(G'_m)$ (vagy röviden $f \in H^a$), ha létezik $\lambda_j \in \mathbb{C}$ ($j \in \mathbb{P}$) úgy, hogy $\sum_{j=1}^{\infty} |\lambda_j| < \infty$, és ha léteznek a_j ($j \in \mathbb{P}$) atomok, melyre $f = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j a_j$. Sőt H^a szintén Banach-tér lesz a

$$\|f\|_{H^a} := \inf \sum_{i=0}^{\infty} |\lambda_i|,$$

ahol az infimum az összes lehetséges $f = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda_i a_i \in H^a$ előállításra vonatkozik.

Általában az alábbi tartalmazások állnak fenn:

$$L^p \subset H^a \subseteq H \subset L^1 \quad (1 < p).$$

Mivel m korlátossága esetén $H = H^a$, (és ezt pedig feltettük) a továbbiakban a H^a jelölés használatát mellőzzük.

Analóg fogalmakat kapunk a $G'_m \times G'_m$ -en értelmezett komplex értékű függvények esetén is.

Bevezetünk egy ortonormált rendszert G'_m -en, amit ψ' Vilenkin-szerű rendszernek fogunk nevezni. A komplex értékű $r'_k{}^n : G'_m \rightarrow \mathbb{C}$ ($k, n \in \mathbb{N}$) függvényeket Vilenkin-téren értelmezett általánosított Rademacher-rendszernek nevezzük, amennyiben rendelkeznek az alábbi tulajdonságokkal.

- i.* $r'_k{}^n$ függvény \mathcal{A}_{k+1} mérhető és $r'_k{}^0 = 1$ minden $k, n \in \mathbb{N}$ esetén.
- ii.* Ha M_k az n, l számok osztója és $n^{(k+1)} = l^{(k+1)}$ ($k, l, n \in \mathbb{N}$), akkor

$$E_k(r'_k{}^n \bar{r}'_k{}^l) = \begin{cases} 1, & \text{ha } n_k = l_k, \\ 0, & \text{ha } n_k \neq l_k \end{cases}$$

(ahol $E_n f$ a feltételes várható érték, így $(E_n f)(x) = M_n \int_{I_n(x)} f$, valamint \bar{z} a z szám komplex konjugáltja).

iii. Ha M_k az n osztója (vagyis $n = n_k M_k + n_{k+1} M_{k+1} + \dots + n_{|n|} M_{|n|}$), akkor

$$\sum_{n_k=0}^{m_k-1} |r_k'^n(x)|^2 = m_k$$

minden $x \in G'_m$ esetén.

Végül definiáljuk a $\psi' := (\psi'_n : n \in \mathbb{N})$ Vilenkin-szerű rendszert a következőképpen:

$$\psi'_n := \prod_{k=0}^{\infty} r_k'^{n^{(k)}}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

(Mivel $r_k'^0 = 1$, így $\psi'_n := \prod_{k=0}^{|n|} r_k'^{n^{(k)}}$).

Vezessük be még a

$$\psi'_{k,n,l} := \prod_{s=n}^l r_s'^{k^{(s)}}$$

jelölést.

Lássunk néhány példát erre a rendszerre.

1. A Vilenkin-rendszer. ([SWS], [AVDR])
2. A 2-adikus (m -adikus) egészek csoportjának karakterrendszere. ([HR], [SW2], [Tai])
3. A nemkommutatív Vilenkin-csoportok unitér irreducibilis reprezentációi koordináta-függvényeinek szorzatrendszere. ([GT])
4. A $\{\kappa : n \in \mathbb{N}\}$ rendszer (lásd korábban). Ez a rendszer (Vilenkin-csoportokon) új eszköz volt a limit periodikus és a majdnem páros számelméleti függvények vizsgálatában. ([Gát3], [Mau])
- 5-6. Az unitér diadikus martingáldifferenciák szorzatrendszere (UDMD) és az univerzál kontraktív projekciók rendszere (UCP) (mindkettőt Schipp Ferenc vezette be). ([SW1], [SW2])

További példák — valamint annak bizonyításai, hogy ezek valóban speciális ψ' Vilenkin-szerű rendszerek — [Gát8]-ban találhatóak.

Két, azonos G'_m Vilenkin-térhez tartozó Vilenkin-szerű rendszer Kronecker-szorzataként definiálhatjuk a kétparaméteres (kétdimenziós) Vilenkin-szerű rendszert:

$$\psi'_{n,k}(x, y) := \psi'_n(x)\psi'_k(y).$$

A korábbiakkal analóg módon vezethetjük be a Vilenkin analízis szokásos jelöléseit egy- és kétparaméteres esetben is. Mivel ezek csak a 4. fejezetben fordulnak majd elő, nem fognak keveredni más, korábban bevezetett rendszerekre vonatkozó jelölésekkel. Tehát például az erre a rendszerre vonatkozó Fourier-együtthatókat is $\hat{f}(n)$ -nel, illetve $\hat{f}(n, k)$ -val fogjuk jelölni.

Szükség van viszont az alábbi, eddig még elő nem fordult jelölések bevezetésére:

$$S_n^1 f(x, y) := \int_{G_m} f(t, y) D_n(x, t) dt,$$

$$S_k^2 f(x, y) := \int_{G_m} f(x, t) D_k(y, t) dt,$$

$$\hat{S}_n^1 f(x, k) := \int_{G_m} S_n^1 f(x, t) \bar{\psi}_k(t) dt,$$

$$\hat{S}_k^2 f(n, y) := \int_{G_m} S_k^2 f(t, y) \bar{\psi}_n(t) dt.$$

Második fejezet

Egy majdnem páros számelméleti függvény Vilenkin—Fourier-sorának divergenciája

Ez a fejezet a [Bla3] cikk eredményét tartalmazza. A cikkben és ebben a fejezetben az ortonormált rendszer a G_m R-Vilenkin csoporton értelmezett Vilenkin-szerű $(\psi\alpha)$ rendszer.

2.1. Felhasznált eredmények.

2.1.1. Tétel ([Gát3]). *Ha $f \in \mathcal{B}^q$, $1 \leq q < \infty$ és $r, t \in \mathbb{P}$, akkor*

$$S_{M_t}^\kappa f = \sum_{r|M_t} a_r(f) c_r,$$

ahol

$$a_r(f) = \phi^{-1}(r) \int_{G_m} f^* \overline{c_r}.$$

2.2. Példa majdnem páros számelméleti függvényre, melynek Vilenkin—Fourier-sora mindenhol divergál.

A 2.2. alfejezetben az alábbi tétel bizonyítjuk.

2.2.1. Tétel. *Legyen G_m egy R -Vilenkin-csoport és $1 \leq q < \infty$ tetszőleges. Ekkor létezik olyan \mathcal{B}^q -beli függvény, melynek Vilenkin-Fourier sora sehol sem konvergens.*

Bizonyítás. A bizonyítás során p -vel végig prímszámot jelölünk. Legyen $f(n) := \sum_{p|n} f(p)$ ($n \in \mathbb{P}$) egy additív függvény, melyre teljesülnek az alábbi feltételek.

$$0 \leq f(p) \leq 1 \text{ minden } p \text{ prímszámra,}$$

$$\sum_p \frac{f(p)^2}{p} < \infty,$$

$$\text{és a } \sum_p \frac{f(p)}{p} \text{ sor divergens.}$$

Ilyen függvény létezik ([Hil]), például az alábbi:

$$f(p) = \begin{cases} 0 & \text{ha } p \leq e^e, \\ (\log \log p)^{-1} & \text{ha } p > e^e. \end{cases}$$

Legyen

$$F(n) := f(n) - \sum_{p \leq n} \frac{f(p)}{p},$$

$$F_N(n) := \sum_{p|n, p \leq N} f(p) - \sum_{p \leq N} \frac{f(p)}{p} \quad (N, n \in \mathbb{P}).$$

Ismert [Hil] alapján, hogy F eleme \mathcal{B}^q -nak, ahol $1 \leq q < \infty$.

Könnyű látni, hogy

$$F_N(n) = \sum_{p \leq N} \frac{f(p)}{p} c_p(n).$$

Azt kaptuk tehát, hogy

$$a_r(F_N) = \begin{cases} \frac{f(p)}{p} & \text{ha } r = p \leq N, \quad (N \in \mathbb{N}) \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Egyszerű bizonyítani, miszerint

$$|a_r(F) - a_r(F_N)| = \frac{1}{\phi(r)} M((F - F_N)c_r) \leq \|F - F_N\|_{\mathcal{B}^1} \leq \|F - F_N\|_{\mathcal{B}^q}.$$

Felhasználva, hogy $\sum_p \frac{f(p)^2}{p} < \infty$, Hildebrand bebizonyítja ([Hil]), hogy

$$\|F - F_N\|_{\mathcal{B}^q} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0,$$

melyből

$$a_r(F) = \lim_{N \rightarrow \infty} a_r(F_N) = \begin{cases} \frac{f(p)}{p} & \text{ha } r = p, \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

következik.

Ebből kapjuk, hogy

$$\sum_{r=1}^R a_r(F)c_r(n) = \sum_{p \leq R} a_p(F)c_p(n) = - \sum_{p \leq R} a_p(F) + \sum_{p|n} p a_p(F),$$

így

$$\sum_p a_p(F) = \sum_p \frac{f(p)}{p}$$

divergens (R egyelőre rögzített, azzal fogunk a végtelenbe tartani bármely rögzített $n \in \mathbb{P}$ esetén).

Vezessük be a következő jelöléseket: $p_1 := 2$, $p_2 := 3$, stb., vagyis p_n legyen az n -edik prím. Legyen

$$t = \inf\{n \mid M_n\text{-t osztja } p_1 p_2 \dots p_k, \text{ ahol } p_k \leq R\}.$$

Mivel G_m egy R-Vilenkin-csoport, így mindenképpen létezik ilyen t . Ebben az esetben, felhasználva az eddigieket, valamint a $c_p(n)$ -re vonatkozó képletet, miszerint

$$c_p(n) = \begin{cases} -1 & , \text{ ha } \neg(p|n), \\ p-1 & , \text{ ha } p|n, \end{cases}$$

azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} S_{M_t}^\kappa F(n) &= \\ \sum_{r|M_t} a_r(F)c_r(n) &= \sum_{p|M_t} a_p(F)c_p(n) = \\ \sum_{p|M_t, \neg(p|n)} a_p(F)c_p(n) &+ \sum_{p|M_t, p|n} a_p(F)c_p(n) = \\ - \sum_{p|M_t, \neg(p|n)} a_p(F) &+ \sum_{p|M_t, p|n} (p-1)a_p(F) = \\ - \sum_{p|M_t} a_p(F) &+ \sum_{p|M_t, p|n} p a_p(F) = - \sum_{p|M_t} \frac{f(p)}{p} + \sum_{p|M_t, p|n} f(p) \leq \\ &- \sum_{p|M_t} \frac{f(p)}{p} + f(n) := (*). \end{aligned}$$

De ha figyelembe vesszük, hogy $f(n)$ nem függ R -től, azt kapjuk, hogy $R \rightarrow \infty$ esetén $M_t \rightarrow \infty$, így $(*) \rightarrow -\infty$, amiből következik, hogy $S_n^\kappa F$ nem lehet konvergens.

Láttuk tehát, hogy a fenti Vilenkin-Fourier sor sehol sem konvergál pontonként, pontosabban minden pontban a mínusz végtelenbe tart. Ezzel a 2.1.1. Tétel bizonyítása befejeződött. \square

Harmadik fejezet

Kettős Vilenkin—Fejér-közepek

Ez a fejezet a [BG] és a [Bla7] cikkek eredményeit tartalmazza. [BG] (a 3.2. alfejezet eredményei) közös munka Gát Györggyel. Az ortonormált rendszer mindkét cikkben (így a fejezet minden állításában) a kettős és korlátos (az m sorozat korlátos) Vilenkin-szerű $(\psi\alpha)$ rendszer.

3.1. Felhasznált eredmények.

3.1.1. Lemma ([Gát1]).

$$D_{M_n}(y, x) = D_{M_n}^\psi(y - x) = \begin{cases} M_n, & \text{ha } y - x \in I_n \\ 0, & \text{ha } y - x \notin I_n, \end{cases}$$

ahol $D_n^\psi := \sum_{k=0}^{n-1} \psi_k$, $D_0 := 0$.

3.1.2. Lemma ([Gát1]).

$$\begin{aligned} D_n(y, x) &= \alpha_n(y)\bar{\alpha}_n(x)D_n^\psi(y - x) \\ &= \chi_n(y)\bar{\chi}_n(x) \left(\sum_{j=0}^{\infty} D_{M_j}^\psi(y - x) \sum_{k=m_j-n_j}^{m_j-1} r_j^k(y - x) \right) \\ &\quad (n \in \mathbb{N}, y, x \in G_m). \end{aligned}$$

3.2. Kettős Vilenkin—Fejér-közepék pontonkénti konvergenciája.

A 3.2. alfejezet fő célja az alábbi tétel bizonyítása.

3.2.1. Tétel. *Legyen $f \in L^1$. Ekkor*

$$\sigma_{n_1, n_2} f \rightarrow f$$

majdnem mindenütt, amint $n_1, n_2 \rightarrow \infty$, $n_1, n_2 \in \mathbb{P}$, és $\beta^{-1} \leq n_1/n_2 \leq \beta$, ahol $\beta \geq 1$ rögzített paraméter.

Kettős trigonometrikus Fourier-sorokra Marcinkiewicz és Zygmund ([MZ]) bizonyította, hogy $\sigma_{n_1, n_2} f \rightarrow f$ majdnem mindenütt, amint $n_1, n_2 \rightarrow \infty$ úgy, hogy az (n_1, n_2) koordinátapár által meghatározott rácspontok egy pozitív kúpon belül maradnak, nevezetesen $\beta^{-1} \leq n_1/n_2 \leq \beta$ valamely rögzített $\beta \geq 1$ paraméterre.

Ismert, hogy a klasszikus Fejér-magok felülről becsülhetők véges integrálú csökkenő függvények sorozatával, míg ez az egydimenziós Walsh—Fejér-magokról nem mondható el. Ez a különbség okozza, hogy a trigonometrikus technika sokszor nem használható sikeresen a magasabb dimenziós Walsh esetben.

Az utóbbi évtizedben számos kísérlet történt a fenti tétel diadikus átültetésére. Kettős Walsh-rendszer esetén Móricz Ferenc, Schipp Ferenc és William R. Wade ([MSW]) bizonyította, hogy $\sigma_{(2^{n_1}, 2^{n_2})} f \rightarrow f$ majdnem mindenütt, minden $f \in L^1(Q^2)$ esetén, ahol $n_1, n_2 \rightarrow \infty$, $|n_1 - n_2| \leq \alpha$ valamely rögzített α -ra, és ahol Q^2 az egységnyezet. Szintén kettős Walsh-rendszerre Gát Györgynek ([Gát6]) és Weisz Ferencnek ([Wei2]) sikerült belátni, hogy $\sigma_{n_1, n_2} f \rightarrow f$ majdnem mindenütt, minden $f \in L^1(Q^2)$ esetén, ahol $n_1, n_2 \rightarrow \infty$ és $n_1, n_2 \in \mathbb{P}$, valamint $\beta^{-1} \leq n_1/n_2 \leq \beta$ valamely rögzített $\beta \geq 1$ -re. A 3.2.1. Tétel ezen állítás általánosítása a kettős és korlátos ψ_α Vilenkin-szerű rendszerre.

Vezessük be az alábbi jelöléseket:

$$J_\tau(u) := I_\tau(u) \setminus I_{\tau+1}(u) \quad (u \in G_m, \tau \in \mathbb{N}),$$

$$K_{n_1, n_2} := \sum_{j=n_1}^{n_1+n_2-1} D_j \quad (n_1, n_2 \in \mathbb{N}).$$

3.2.2. Lemma.

$$\int_{J_\tau(u)} |K_{n^{(s)}, M_s}(y, x)|^2 dy \leq cM_\tau^2 M_s,$$

ahol $x \in I_{\tau+1}(u)$, $u \in G_m$, $s, \tau, n \in \mathbb{N}$.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $s > \tau$. A 3.1.1. és a 3.1.2. Lemmából kapjuk $y - x \in J_\tau(0)$ teljesülése esetén, hogy

$$\begin{aligned} K_{n^{(s)}, M_s}(y, x) &= \sum_{k=n^{(s)}}^{n^{(s)}+M_s-1} \left(\sum_{j=0}^{\tau-1} k_j M_j \right) \chi_k(y) \bar{\chi}_k(x) \\ &+ \sum_{k=n^{(s)}}^{n^{(s)}+M_s-1} M_\tau \left(\sum_{p=m_\tau-k_\tau}^{m_\tau-1} r_\tau^p(y-x) \right) \chi_k(y) \bar{\chi}_k(x) \\ &=: \sum^1 + \sum^2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\sum^1 \\ &= \sum_{k_{s-1}=0}^{m_{s-1}-1} \dots \sum_{k_{\tau+1}=0}^{m_{\tau+1}-1} \sum_{k_{\tau-1}=0}^{m_{\tau-1}-1} \dots \sum_{k_0=0}^{m_0-1} \left(\sum_{j=0}^{\tau-1} k_j M_j \right) \\ &\cdot \prod_{l=\tau+1}^{\infty} r_l^{k_l}(y-x) \alpha_l^{k^{(l)}}(y) \bar{\alpha}_l^{k^{(l)}}(x) \sum_{k_\tau=0}^{m_\tau-1} r_\tau^{k_\tau}(y-x) \\ &= \sum_{k_\tau=0}^{m_\tau-1} r_\tau^{k_\tau}(y-x) \delta(y, x), \end{aligned}$$

ahol a δ függvény nem függ k_τ -tól. Következésképpen $\sum^1 = 0$.

Az m sorozat korlátossága miatt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} & \int_{J_\tau(u)} \left| \sum^2 \right|^2 \\ & \leq cM_\tau^2 \sum_{p=0}^{m_\tau-1} \int_{J_\tau(u)} \sum_{\substack{k,l=0 \\ k_\tau=l_\tau=p}}^{M_s-1} \chi_{n^{(s)+k}(y)} \bar{\chi}_{n^{(s)+l}(y)} \bar{\chi}_{n^{(s)+k}(x)} \chi_{n^{(s)+l}(x)} dy \\ & \leq cM_\tau^2 \frac{1}{M_\tau} M_s M_\tau = cM_\tau^2 M_s, \end{aligned}$$

felhasználva, hogy $k^{(\tau+1)} \neq l^{(\tau+1)}$ -ből következik

$$\int_{I_{\tau+1}(z)} \chi_{n^{(s)+k}(x)} \bar{\chi}_{n^{(s)+l}(x)} dx = 0 \quad (z \in G_m)$$

(lásd [Gát2]).

Amennyiben $s \leq \tau$ teljesül, ekkor $|K_{n^{(s)}, M_s}(y, x)| \leq cM_\tau M_s$ ($y \in J_\tau(u)$). Így ebben az esetben a bizonyítás triviális. \square

3.2.3. Lemma. *Legyen $A, s, \tau \in \mathbb{N}, A \geq s, u \in G_m, x \in I_{\tau+1}(u)$ rögzített. Ekkor*

$$\int_{J_\tau(u)} \sup_{|n|=A} |K_{n^{(s)}, M_s}(y, x)| dy \leq c(M_\tau M_A)^{\frac{1}{2}} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Bizonyítás. A 3.2.2. Lemma és a Cauchy—Bunyakovszkij-egyenlőtlenség alapján nyerjük az alábbiakat.

$$\begin{aligned} & \int_{J_\tau(u)} \sup_{|n|=A} |K_{n^{(s)}, M_s}(y, x)| dy \\ & \leq \left(\int_{J_\tau(u)} \left(\sup_{|n|=A} |K_{n^{(s)}, M_s}(y, x)| \right)^2 dy \right)^{\frac{1}{2}} \cdot (\mu(J_\tau(u)))^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq c \left(\int_{J_\tau(u)} \sum_{n_s=0}^{m_s-1} \sum_{n_{s+1}=0}^{m_{s+1}-1} \cdots \sum_{n_A=0}^{m_A-1} |K_{n^{(s)}, M_s}(y, x)|^2 dy \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{(M_\tau)^{\frac{1}{2}}} \\ &\leq c(M_\tau M_A)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Ezzel az 3.2.3. Lemma bizonyítását befejeztük. \square

3.2.4. Lemma.

$$\int_{J_\tau(u)} \sup_{n \geq M_k} |K_n(y, x)| dy \leq c \sqrt[4]{\frac{M_\tau}{M_k}}$$

($x \in I_{\tau+1}(u)$, $u \in G_m$, $k, \tau \in \mathbb{N}$), $k > \tau - c$.

Bizonyítás. A 3.2.3. Lemma alapján

$$\begin{aligned} &\int_{J_\tau(u)} \sup_{n \geq M_k} |K_n(y, x)| dy \\ &\leq c \sum_{A=k}^{\infty} \left(\sum_{s=0}^{\tau} \int_{J_\tau(u)} \sup_{M_A \leq n^{(s)} < M_{A+1}} |K_{n^{(s)}, M_s}(y, x)| dy \right) \frac{1}{M_A} \\ &+ c \sum_{A=k}^{\infty} \left(\sum_{s=\tau+1}^A \int_{J_\tau(u)} \sup_{M_A \leq n^{(s)} < M_{A+1}} |K_{n^{(s)}, M_s}(y, x)| dy \right) \frac{1}{M_A} \\ &\leq c \sum_{A=k}^{\infty} \left(M_\tau + (A - \tau)(M_\tau M_A)^{\frac{1}{2}} \right) \frac{1}{M_A} \leq c \left(\frac{M_\tau}{M_k} + (k - \tau) \sqrt{\frac{M_\tau}{M_k}} \right) \\ &\leq c \sqrt[4]{\frac{M_\tau}{M_k}}. \end{aligned}$$

Így a bizonyítás teljes.

3.2.5. Lemma. *(A Walsh-eset [Gát6]-ban található) Legyen $f \in L^1(G_m \times G_m)$, $\text{supp } f \subseteq J = I_k(x_1) \times I_k(x_2)$, $A > k - c$, ahol $A, k \in \mathbb{N}$, $(x_1, x_2) \in G_m \times G_m$ rögzített. Ekkor*

$$\int_{(G_m \times G_m) \setminus J} \sup\{|\sigma_{\mathbf{n}} f| : \mathbf{n} \in \mathbb{P}^2, \wedge \mathbf{n} \geq M_A, \beta^{-1} \leq n_1/n_2 \leq \beta\} \\ \leq c \left(\frac{M_k}{M_A} \right)^{\frac{1}{4}} \|f\|_1.$$

Bizonyítás. Szedjük szét a $(G_m \times G_m) \setminus J$ halmazt a következőképpen.

$$\begin{aligned} & (G_m \times G_m) \setminus J \\ &= ((G_m \setminus I_k(x_1)) \times (G_m \setminus I_k(x_2))) \cup \\ & \cup (I_k(x_1) \times (G_m \setminus I_k(x_2))) \cup ((G_m \setminus I_k(x_1)) \times I_k(x_2)) \\ &=: J_1 \cup J_2 \cup J_3. \end{aligned}$$

Vezessük be az alábbi jelöléseket: $0 < h \leq H$ feltétellel legyen

$$\mathcal{S}_h^{(H)} := \sup_{\substack{\mathbf{n} \in \mathbb{P}^2, \beta^{-1} \leq n_1/n_2 \leq \beta \\ h \leq \wedge \mathbf{n} \vee \mathbf{n} \leq H}},$$

$$\mathcal{S}_h := \sup_{\substack{\mathbf{n} \in \mathbb{P}^2, \beta^{-1} \leq n_1/n_2 \leq \beta \\ h \leq \wedge \mathbf{n}}}.$$

Legyen továbbá

$$J_1^{a,b} := (I_a(x_1) \setminus I_{a+1}(x_1)) \times (I_b(x_2) \setminus I_{b+1}(x_2)),$$

$$(a = 0, \dots, k-1, b = 0, \dots, k-1).$$

Könnyű látni, hogy ekkor

$$J_1 = \bigcup_{a=0}^{k-1} \bigcup_{b=0}^{k-1} J_1^{a,b}.$$

Az 3.2.4. Lemmából és a Fubini-tételből következik, hogy

$$\begin{aligned} \int_{J_1^{a,b}} \mathcal{S}_{M_A} |\sigma_{\mathbf{n}} f| &= \int_{J_1^{a,b}} \mathcal{S}_{M_A} \left| \int_J f(y, z) K_{n_1}(y, u) K_{n_2}(z, v) dy dz \right| du dv \\ &\leq \int_J |f(y, z)| \int_{J_1^{a,b}} \mathcal{S}_{M_A} |K_{n_1}(y, u) K_{n_2}(z, v)| du dv dy dz \\ &\leq c \int_J |f| \sqrt[4]{\frac{M_a}{M_A}} \sqrt[4]{\frac{M_b}{M_A}}. \end{aligned}$$

Tehát

$$\begin{aligned} \int_{J_1} \mathcal{S}_{M_A} |\sigma_{\mathbf{n}} f| &\leq c \sum_{a=0}^{k-1} \sum_{b=0}^{k-1} \sqrt[4]{\frac{M_a}{M_A}} \sqrt[4]{\frac{M_b}{M_A}} \|f\|_1 \\ &\leq c \sqrt[4]{\frac{M_k}{M_A}} \sqrt[4]{\frac{M_k}{M_A}} \|f\|_1 \leq c \sqrt{\frac{M_k}{M_A}} \|f\|_1. \end{aligned}$$

A továbbiakban foglalkozunk az $\mathcal{S}_{M_A} |\sigma_{\mathbf{n}} f|$ függvény J_3 halmazon való integráljával.

Legyen $e_i := (0, \dots, 0, 1, 0, \dots) \in G_m$, vagyis e_i -nek az i -edik koordinátája legyen 1 ($i \in \mathbb{N}$), a többi pedig 0. Legyen továbbá $k, r \in \mathbb{N}$, $r > k$, esetén $\epsilon := \sum_{i=k}^r \epsilon_i e_i \in G_m$, ahol $\epsilon_i \in Z_{m_i}$, $i = k, \dots, r$. Ekkor

$$J = I_k(x_1) \times \bigcup_{\substack{\epsilon_i \in Z_{m_i} \\ i=k, \dots, r}} I_{r+1}(x_2 + \epsilon) =: \bigcup_{\epsilon} J_{\epsilon}.$$

Osszuk J_3 -at diszjunkt részekre a következő módon. Legyen minden $a = 0, 1, \dots, k-1$, és $b = k, \dots, r$, valamint tetszőleges (bár rögzített) $\epsilon := \sum_{i=k}^r \epsilon_i e_i \in G_m$ esetén

$$J_{3,\epsilon}^{a,b} := (I_a(x_1) \setminus I_{a+1}(x_1)) \times (I_b(x_2 + \epsilon) \setminus I_{b+1}(x_2 + \epsilon)),$$

és

$$J_{3,\epsilon}^a := (I_a(x_1) \setminus I_{a+1}(x_1)) \times (I_{r+1}(x_2 + \epsilon)).$$

Vagyis

$$J_3 = \left(\bigcup_{a=0}^{k-1} \bigcup_{b=k}^r J_{3,\epsilon}^{a,b} \right) \cup \bigcup_{a=0}^{k-1} J_{3,\epsilon}^a.$$

Mindezenfelül egyszerű becslés adja, hogy

$$\mathcal{S}_{M_A} |\sigma_{\mathbf{n}} f| \leq \sum_{r=A}^{\infty} \sup_{\substack{\mathbf{n} \in \mathbf{P}^2, \beta^{-1} \leq n_1/n_2 \leq \beta \\ M_r \leq \wedge \mathbf{n} < M_{r+1}}} |\sigma_{\mathbf{n}} f| \leq \sum_{r=A}^{\infty} \mathcal{S}_{M_r}^{(\beta \cdot M_{r+1})} |\sigma_{\mathbf{n}} f|.$$

Tegyük fel, hogy $A > k$. Ekkor

$$\begin{aligned} & \int_{J_3} \mathcal{S}_{M_A} |\sigma_{\mathbf{n}} f| \\ & \leq \sum_{r=A}^{\infty} \int_{J_3} \mathcal{S}_{M_r}^{(\beta \cdot M_{r+1})} \left| \int_J f(u, v) K_{n_1}(y, x) K_{n_2}(z, v) dudv \right| dydz \\ & \leq \sum_{r=A}^{\infty} \int_{J_3} \mathcal{S}_{M_r}^{(\beta \cdot M_{r+1})} \sum_{\epsilon} \left| \int_{J_{\epsilon}} f(u, v) K_{n_1}(y, x) K_{n_2}(z, v) dudv \right| dydz \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \sum_{r=A}^{\infty} \sum_{\epsilon} \left(\sum_{a=0}^{k-1} \sum_{b=k}^r \int_{J_{3,\epsilon}^{a,b}} \mathcal{S}_{M_r}^{(\beta \cdot M_{r+1})} \left| \int_{J_{\epsilon}} f(u,v) K_{n_1}(y,x) K_{n_2}(z,v) dudv \right| dydz \right. \\
&+ \left. \sum_{a=0}^{k-1} \int_{J_{3,\epsilon}^a} \mathcal{S}_{M_r}^{(\beta \cdot M_{r+1})} \left| \int_{J_{\epsilon}} f(u,v) K_{n_1}(y,x) K_{n_2}(z,v) dudv \right| dydz \right) \\
&=: \sum_{r=A}^{\infty} \sum_{\epsilon} (B^1 + B^2).
\end{aligned}$$

Most az 3.2.4. Lemma alapján (lásd J_1 esetén) felső korlátot adunk B^1 -nek

B^1

$$\begin{aligned}
&\leq \sum_{a=0}^{k-1} \sum_{b=k}^r \int_{J_{\epsilon}} |f(u,v)| \int_{J_{3,\epsilon}^{a,b}} \mathcal{S}_{M_r}^{(\beta \cdot M_{r+1})} |K_{n_1}(y,x) K_{n_2}(z,v)| dydz dudv \\
&\leq c \sum_{a=0}^{k-1} \sum_{b=k}^r \int_{J_{\epsilon}} |f| \sqrt[4]{\frac{M_a}{M_r}} \sqrt[4]{\frac{M_b}{M_r}} \\
&\leq c \sum_{a=0}^{k-1} \sqrt[4]{\frac{M_a}{M_r}} \int_{J_{\epsilon}} |f|.
\end{aligned}$$

Tehát

$$\sum_{r=A}^{\infty} \sum_{\epsilon} B^1 \leq c \sqrt[4]{\frac{M_k}{M_A}} \|f\|_1.$$

Másrészt B^2 -nek is adunk egy felső korlátot.

$$\begin{aligned}
B^2 &\leq \sum_{a=0}^{k-1} \int_{J_{\epsilon}} |f(u,v)| \int_{J_{3,\epsilon}^a} \mathcal{S}_{M_r}^{(\beta \cdot M_{r+1})} |K_{n_1}(y,x) K_{n_2}(z,v)| dydz dudv \\
&\leq c \sum_{a=0}^{k-1} \int_{J_{\epsilon}} |f| \left(\frac{M_a}{M_r} \right)^{\frac{1}{4}} \frac{1}{M_{r+1}} M_{r+1} \leq c \left(\frac{M_k}{M_r} \right)^{\frac{1}{4}} \int_{J_{\epsilon}} |f|.
\end{aligned}$$

Ebből

$$\sum_{r=A}^{\infty} \sum_{\epsilon} B^2 \leq c \sqrt[4]{\frac{M_k}{M_A}} \|f\|_1$$

következik.

Az $A \leq k$ esetben, vagyis ha $k - c < A \leq k$ (lásd a 3.2.5. Lemma feltételeit) a fentiek, a Fubini-tétel, valamint a 3.2.4. Lemma eredményezi, hogy

$$\begin{aligned} & \int_{J_3} \mathcal{S}_{M_A} |\sigma_{\mathbf{n}} f| \\ & \leq \sum_{r=A}^{\infty} \int_{J_3} \mathcal{S}_{M_r}^{(\beta \cdot M_{r+1})} \left| \int_J f(u, v) K_{n_1}(y, x) K_{n_2}(z, v) dudv \right| dydz \\ & = \sum_{r=k+1}^{\infty} \int_{J_3} \mathcal{S}_{M_r}^{(\beta \cdot M_{r+1})} \left| \int_J f(u, v) K_{n_1}(y, x) K_{n_2}(z, v) dudv \right| dydz \\ & + \sum_{r=A}^k \int_{J_3} \mathcal{S}_{M_r}^{(\beta \cdot M_{r+1})} \left| \int_J f(u, v) K_{n_1}(y, x) K_{n_2}(z, v) dudv \right| dydz \\ & \leq c \sqrt[4]{\frac{M_k}{M_A}} \|f\|_1 \\ & + c \sum_{r=A}^k \int_J |f(u, v)| \int_{J_3} \mathcal{S}_{M_r}^{(\beta \cdot M_{r+1})} |K_{n_1}(y, u) K_{n_2}(z, v)| dydz \\ & \leq c \|f\|_1 + c \sum_{r=A}^k \int_J |f(u, v)| \left(\sum_{j=0}^{k-1} \sqrt[4]{\frac{M_j}{M_r}} \right) \frac{M_{r+1}}{M_k} \\ & \leq c \sqrt[4]{\frac{M_k}{M_A}} \|f\|_1. \end{aligned}$$

Vagyis mindkét esetben

$$\int_{J_3} \mathcal{S}_{M_A} |\sigma_{\mathbf{n}} f| \leq c \|f\|_1 \sqrt[4]{\frac{M_k}{M_A}}.$$

Hasonlóan kapjuk J_2 halmazra is az egyenlőtlenség bizonyítását.

Összegezve mindezeket

$$\int_{(G_m \times G_m) \setminus J} \mathcal{S}_{M_A} |\sigma_{\mathbf{n}} f| \leq c \|f\|_1 \sqrt[4]{\frac{M_k}{M_A}}.$$

Ezzel a 3.2.5. Lemma igazolását befejeztük. \square

A továbbiakhoz szükségünk van a Calderon—Zygmund-lemma egy kétdimenziós változatára (lásd még [CZ], [MSW]).

3.2.6. Lemma. *Legyen $f \in L^1(G_m \times G_m)$, $\lambda > \|f\|_1$. Ekkor $f = f_0 + \sum_{i=1}^{\infty} f_i$, ahol $\|f_0\|_{\infty} < c\lambda$, $\text{supp } f_n \subseteq I_{k_n}(x_1^n) \times I_{k_n}(x_2^n) =: I_{k_n}^n$ (Valamely $(x_1^n, x_2^n) \in G_m \times G_m$, $k_n, k_n \in \mathbb{N}$ esetén), $\int_{I_{k_n}^n} f_n = 0$, $\|f_n\|_1 \leq c\lambda\mu(I_{k_n}^n)$ ($n \in \mathbb{P}$). A $I_{k_n}^n$ halmazok diszjunkt téglalapok, sőt $\mu(\Omega) \leq c\|f\|_1/\lambda$ ($\Omega := \bigcup_{n \in \mathbb{P}} I_{k_n}^n$) ahol μ a $G_m \times G_m$ (normalizált) Haar-mértéke.*

Bizonyítás. Használjuk az eredeti Calderon—Zygmund dekompozíciós algoritmus első lépéseit. Tetszőleges $f \in L^1(G_m \times G_m)$ és $\lambda > 0$ esetén legyen

$$\Omega_0 := \begin{cases} I_0(x_1^0) \times I_0(x_2^0) & \text{ha } |E_0 f(\mathbf{x}^0)| > \lambda \\ \emptyset & \text{egyébként} \end{cases}$$

és

$$\Omega_k := \begin{cases} \cup_i I_k(x_1^i) \times I_k(x_2^i) & \text{ha } |E_k f(\mathbf{x}^i)| > \lambda, \\ & (I_k(x_1^i) \times I_k(x_2^i)) \cap (\cup_{j=0}^{k-1} \Omega_j) = \emptyset \\ \emptyset & \text{egyébként,} \end{cases}$$

ahol $\mathbf{x}^i = (x_1^i, x_2^i) \in G_m \times G_m$, és $I_k(x_1^i) \times I_k(x_2^i)$ jelöli az eljárás során definiált i -edik téglalapot (a számlálást nullától kezdve).

Az Ω_k elemekre vezessük be a következő jelölést $I_k^i := I_k(x_1^i) \times I_k(x_2^i)$, ahol $i \in \mathbb{N}$. Legyen

$$f_k^i := f 1_{I_k^i} - \left(M_k M_k \int_{I_k^i} f \right) 1_{I_k^i}$$

$$f_\lambda := f 1_{\overline{\cup \Omega_k}} + \sum_{i,k} \left(M_k M_k \int_{I_k^i} f \right) 1_{I_k^i},$$

ahol $1_{I_k^i}$ az I_k^i karakterisztikus függvénye. Így $f = f_\lambda + \sum_{i,k} f_k^i$ és Ω_k elemeinek száma véges. Mindezen tények együtt igazolják a lemmát. \square

A 3.2.1. Tétel bizonyítása. Definiáljuk a kétdimenziós Fejér-közepek maximál operátorát a következőképpen

$$\sigma^* f := \sup_{\substack{\mathbf{n} \in \mathbb{P}^2 \\ \beta^{-1} \leq n_1/n_2 \leq \beta}} |\sigma_{\mathbf{n}} f| \quad (f \in L^1(G_m \times G_m)).$$

A 3.2.4. Lemma segítségével belátjuk, hogy a σ^* operátor gyengén $(1, 1)$ típusú. (Ez azt jelenti, hogy minden $f \in L^1(G_m \times G_m)$, $\lambda > 0$ esetén a $\mu(\{\sigma^* f > \lambda\}) \leq c \|f\|_1 / \lambda$ egyenlőtlenség fennáll.) Legyen $f \in L^1(G_m \times G_m)$, $\lambda > 0$, alkalmazzuk a 3.2.2. Lemmát és a σ^* operátor σ -szublinearitását.

Legyen $n \in \mathbb{P}$. Ekkor a 3.2.4. Lemma alapján

$$\|K_n\|_1 \leq \int_{I_{|n|+1}} |K_n| + \int_{G_m \setminus I_{|n|+1}} \sup_{j \geq M_{|n|}} |K_j| \leq c.$$

Alkalmazzuk továbbá, hogy a $\|K_{n_1} \times K_{n_2}\|_1 \leq c$ ($(n_1, n_2) \in \mathbb{P}^2$) (lásd [Gát4]) egyenlőtlenségből következik, hogy a σ^* operátor (∞, ∞) típusú, vagyis $\|\sigma^* f\|_\infty \leq c \|f\|_\infty$ minden $f \in L^\infty(G_m \times G_m)$ esetén. Következésképpen $\mu(\{\sigma^* f_0 > c\lambda\}) = 0$ ha $c\lambda > \|f_0\|_\infty$ így ebben az esetben a 3.2.6. Lemmát használva kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \mu(\{\sigma^* f > 2c\lambda\}) &\leq \mu(\{\sigma^* f_0 > c\lambda\}) + \mu(\Omega) \\ &+ \frac{1}{c\lambda} \int_{(G_m \times G_m) \setminus \Omega} \sigma^* \left(\sum_{i=1}^{\infty} f_i \right) \leq c \frac{\|f\|_1}{\lambda} + \frac{1}{c\lambda} \sum_{i=1}^{\infty} \int_{(G_m \times G_m) \setminus I_{k_i}^i} \sigma^* f_i \end{aligned}$$

$$=: c \frac{\|f\|_1}{\lambda} + \frac{1}{c\lambda} \sum_{i=1}^{\infty} B_i.$$

A Fejér-közép definíciója adja, hogy $\sigma_{n_1, n_2} f_i = 0$ ha $n_1 < M_{k_i}$ és $n_2 < M_{k_i}$. Ebből következik, hogy

$$\begin{aligned} & \sigma^* f_i \\ &= \{ \sup |\sigma_{\mathbf{n}} f_i| : \mathbf{n} \in \mathbb{P}^2, \beta^{-1} \leq n_1/n_2 \leq \beta, \} \\ &= \{ \sup |\sigma_{\mathbf{n}} f_i| : \mathbf{n} \in \mathbb{P}^2, \beta^{-1} \leq n_1/n_2 \leq \beta, n_1 \geq M_{k_i} \text{ vagy } n_2 \geq M_{k_i} \} \\ &\leq \{ \sup |\sigma_{\mathbf{n}} f_i| : \mathbf{n} \in \mathbb{P}^2, \beta^{-1} \leq n_1/n_2 \leq \beta, \wedge \mathbf{n} \geq cM_{k_i} \}. \end{aligned}$$

A 3.2.5. Lemma eredményezi, hogy

$$B_i = \int_{(G_m \times G_m) \setminus I_{k_i}^i} \sigma^* f_i \leq c \|f_i\|_1.$$

Így $\mu(\{\sigma^* f > 2c\lambda\}) \leq c \|f\|_1 / \lambda$. Következésképpen a σ^* operátor gyengén $(1, 1)$ típusú. Mivel minden

$$P = \sum_{k=0}^r \sum_{l=0}^s c_{k,l} (\psi_k \times \psi_l) \quad (c_{k,l} \in \mathbb{C}, r, s \in \mathbb{N})$$

kétdimenziós Vilenkin-polinomra mindenhol fennáll a

$$\lim_{\wedge \mathbf{n} \rightarrow \infty} \sigma_{n_1, n_2} P = P$$

reláció, így a szokásos sűrűségi argumentumot használva (lásd például [SWS]) a 3.2.1. Tétel bizonyítása teljes. \square

3.3. A σ^* operátor (H, L) típusossága.

Ezen alfejezet fő eredménye az alábbi tétel.

3.3.1. Tétel. *Legyen $f \in H$. Ekkor a σ^* operátor (H, L) típusú, vagyis*

$$\|\sigma^* f\|_1 \leq c \|f\|_H,$$

aholis $\sigma^ f := \sup_{(n_1, n_2)} |\sigma_{n_1, n_2} f|$, amelyben (az előző, 3.2.1. Tételhez hasonlóan) $n_1, n_2 \in \mathbb{P}$, és $\beta^{-1} \leq n_1/n_2 \leq \beta$, ahol $\beta \geq 1$ rögzített paraméter.*

Tekintsük először az alábbi dekompozíciós tételt. Hasonlót és továbbiakat találhatunk [Wei3]-ban.

3.3.2. Tétel. *Egy $f \in L^1(G_m \times G_m)$ függvény pontosan akkor H° -beli, ha létezik $(a_k : k \in \mathbb{N})$ sorozat, melynek elemei H° atomok, és léteznek $(\lambda_k : k \in \mathbb{N})$ valós számok, melyre*

$$(1) \quad f = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k a_k$$

és

$$(2) \quad \sum_{k=0}^{\infty} |\lambda_k| < \infty$$

teljesül. Sőt $\|f\|_{H^\circ}$ és $\inf(\sum_{k=0}^{\infty} |\lambda_k|)$ ekvivalens normák, ahol az infimumot f összes lehetséges dekompozíciójára vesszük.

Bizonyítás. A továbbiakban c -vel egy olyan konstans jelölünk, melynek értéke esetenként különböző lehet, de csak β -tól, $\sup m_n$ -től és $\sup m_n$ -től függ.

Tetszőleges a -val jelölt H° -atomra, melyre $\text{supp } a \subset I_k(x_1) \times I_k(x_2)$,

$$\|a\|_{H^\circ} = \left\| \sup_{n \in \mathbb{N}} |E_n a| \right\|_1 \leq \left\| \sup_{n \in \mathbb{N}} E_n (M_k M_k 1_{I_k(x_1) \times I_k(x_2)}) \right\|_1 \leq 1.$$

Következésképpen ha egy $f \in L^1(G_m \times G_m)$ függvény előállítható a $f = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda_i a_i$ formában (2) teljesülése mellett, akkor

$$\|f\|_{H^\circ} \leq \sum_{i=0}^{\infty} |\lambda_i| \|a_i\|_{H^\circ} \leq \sum_{i=0}^{\infty} |\lambda_i| < \infty,$$

vagyis f eleme H° -nek. Ezzel a bizonyítás első fele készen van.

Megfordítva, használjuk a Calderon—Zygmund dekompozíciós lemmát $\lambda = m^q$ -val, ahol $q \in \mathbb{Z}$, $m := \sup m_n < \infty$. Ekkor azt kapjuk, hogy

$$f = f_{m^q} + \sum_{n=1}^{\infty} f_{m^q, n},$$

ahol $\|f_{m^q}\|_\infty \leq cm^q$, és rögzített $q \in \mathbb{Z}$ esetén a $\text{supp } f_{m^q, n} = I_{k_q, n}^n$ halmazok páronként diszjunktak. Sőt a dekompozíciós algoritmusból azt is megkapjuk, hogy $m^q < |E_q f_{m^q, i}| < cm^q$, és $|E_j f_{m^q, n}| \leq m^q$ minden $j = 0, 1, \dots, q-1$ esetén. Mivel $f_{m^q} \rightarrow f$ és $f_{m^{-q}} \rightarrow 0$ amint $q \rightarrow \infty$, így f -et az

$$f = \sum_{q=-\infty}^{\infty} (f_{m^{q+1}} - f_{m^q}) = \sum_{q=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_{m^q, n} - \sum_{j=1}^{\infty} f_{m^{q+1}, j} \right)$$

alakba írhatjuk. Másrészt létezik olyan $j \in \mathbb{P}$ és $n \in \mathbb{P}$ úgy, hogy $\text{supp } f_{m^{q+1}, j} \subset \text{supp } f_{m^q, n}$. Legyen

$$b_{q, n} := f_{m^q, n} - \sum_{j: \text{supp } f_{m^{q+1}, j} \subset \text{supp } f_{m^q, n}} f_{m^{q+1}, j}.$$

Minden $\mathbf{x} \in \text{supp } f_{m^q, n}$ esetén az $b_{q, n}(\mathbf{x}) = f_{m^{q+1}}(\mathbf{x}) - f_{m^q}(\mathbf{x})$ egyenlőség fennáll, következésképp $|b_{q, n}| \leq cm^q$. Legyen $a_{q, n} := M_q M_q \frac{1}{cm^q} b_{q, n}$, és $\lambda_{q, n} := cm^q \frac{1}{M_q M_q}$, $q \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{P}$, ekkor

$$f = \sum_{q=-\infty}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_{q, n} a_{q, n},$$

ahol $a_{q, n}$ -ek H° -atomok $I_{k_q, n}^n$ tartókkal.

$$\begin{aligned} \sum_{q=-\infty}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_{q, n}| &= c \sum_{q=-\infty}^{\infty} m^q \sum_{n=1}^{\infty} \mu(I_{k_q, n}^n) \\ &\leq c \sum_{q=-\infty}^{\infty} m^q \mu(f^\circ > m^q) \leq c \|f^\circ\|_1 = c \|f\|_{H^\circ}. \end{aligned}$$

Ezzel a másik irány is bizonyítást nyert. \square

3.3.3. Lemma. *Tegyük fel, hogy $\text{supp } f \subseteq I_k(x_1) \times I_k(x_2)$ és $f \in L^1(G_m \times G_m)$ ($k \in \mathbb{N}$, $(x_1, x_2) \in G_m \times G_m$). Ekkor*

$$\int_{(G_m \times G_m) \setminus I_k(x_1) \times I_k(x_2)} \sigma^* f \leq c \|f\|_1.$$

Bizonyítás. Ez az állítás a 3.2.5. Lemma egyszerű következménye. \square

3.3.4. Tétel. *A σ^* operátor (H°, L) típusú, vagyis*

$$\|\sigma^* f\|_1 \leq c \|f\|_{H^\circ} \quad (f \in H).$$

Bizonyítás. Ismert, hogy $p > 1$ -re a $L^p(G_m \times G_m)$ -ből $L^p(G_m \times G_m)$ -be képező σ^* operátor korlátos (a σ^* operátor gyengén $(1,1)$ és (∞, ∞) típusossága miatt, lásd a 3.2.1. Tétel bizonyítását). Tegyük fel, hogy a egy H° -atom $I_k(x_1) \times I_k(x_2)$ tartóval. Felhasználva a 3.3.3. Lemmát, a Hölder egyenlőtlenséget és σ^* korlátosságát, azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \int_{G_m \times G_m} \sigma^* a &= \int_{I_k(x_1) \times I_k(x_2)} \sigma^* a + \int_{(G_m \times G_m) \setminus (I_k(x_1) \times I_k(x_2))} \sigma^* a \\ &\leq \left(\int_{G_m \times G_m} (\sigma^* a)^p \right)^{\frac{1}{p}} \mu(I_k(x_1) \times I_k(x_2))^{1-\frac{1}{p}} + c \|a\|_1 \\ &\leq c_p \left(\int_{I_k(x_1) \times I_k(x_2)} |a|^p \right)^{\frac{1}{p}} \mu(I_k(x_1) \times I_k(x_2))^{1-\frac{1}{p}} + c \\ &\leq c_p \left((M_k M_k)^p \frac{1}{M_k M_k} \right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{1}{M_k M_k} \right)^{1-\frac{1}{p}} + c \leq c. \end{aligned}$$

Végül az f függvény atomos dekompozícióját és a σ^* operátor σ -szublinearitását felhasználva adódik

$$\|\sigma^* f\|_1 = \left\| \sigma^* \left(\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i a_i \right) \right\|_1$$

$$\leq \sum_{i=1}^{\infty} |\lambda_i| \|\sigma^* a_i\|_1 \leq c \sum_{i=1}^{\infty} |\lambda_i| \leq c \|f\|_{H^\circ},$$

ami a bizonyítandó volt. \square

A 3.3.1. Tétel bizonyítása. Mivel $\|\cdot\|_{H^\circ} \leq \|\cdot\|_H$, ezért fennáll a $H \subset H^\circ$ tartalmazás. Ezt figyelembe véve a 3.3.1. Tételt a 3.3.4. Tétel következményeként kapjuk. \square

A 3.3.1. Tétel az eredeti (és korlátos) Vilenkin-rendszerre [Wei2]-ben található.

Negyedik fejezet

Egy normaegyenlőtlenség Vilenkin -szerű tereken értelmezett függvényekre

Ez a fejezet a [Bla8] és a [Bla9] cikkek eredményein alapul. Az ortonormált rendszer mindkét cikkben (így a fejezet minden állításában) az általánosított (Vilenkin téren értelmezett) Vilenkin-szerű rendszer, az első alfejezetben az egydimenziós, míg a másodikban a kétdimenziós rendszer.

4.1. Felhasznált eredmények.

4.1.1. Lemma ([Gát8]).

$$D_n(y, x) = \sum_{i=0}^{\infty} \left(D_{M_i}(y, x) \cdot \left(\sum_{t=0}^{n_i-1} r_i^{n^{(i+1)}+tM_i}(y) \bar{r}_i^{n^{(i+1)}+tM_i}(x) \right) \psi'_{n^{(i+1)}}(y) \bar{\psi}'_{n^{(i+1)}}(x) \right).$$

4.1.2. Lemma ([Gát8]).

$$D_{M_n}(y, x) = \begin{cases} M_n, & y \in I_n(x) \\ 0, & y \notin I_n(x). \end{cases}$$

4.2. Az egydimenziós változat.

A 4.2. alfejezet fő célja az alábbi tétel bizonyítása.

4.2.1. Tétel. *Legyen m korlátos sorozat. Ekkor létezik $c > 0$ abszolút konstans, hogy minden $f \in H(G'_m)$ függvényre*

$$\sup_{N \in \mathbb{P}} \frac{1}{\log N} \sum_{n=1}^N \frac{\|S_n f\|_1}{n} \leq c \|f\|_H.$$

E normaegyenlőtlenség klasszikus rendszerekre vonatkozó analóg változatai ismertek és bizonyítottak. Trigonometrikus rendszerre B. Smith ([Smi]) 1983-ban, Walsh-rendszerre Simon Péter ([Sim1]) 1987-ben, (nemcsak korlátos) Vilenkin rendszerre pedig Gát György bizonyította 1993-ban. Ők konkrétan az alábbi egyenlőséget látták be tetszőleges f maximál Hardy-térbeli függvényre:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{\log N} \sum_{n=1}^N \frac{\|S_n f - f\|_1}{n} = 0.$$

Ez az egyenlőség egyszerű következménye a normaegyenlőtlenségnek.

Az egyparáméteres Vilenkin-rendszerre vonatkozó eredmények úgynevezett H^p változata ($p < 1$) ([Sim3])-ban található. Ezt 1996-ban Weisz Ferenc általánosította két paraméteres trigonometrikus- és Walsh-rendszerre ([Wei4]). Bizonyításaiban martingálelméleti eredményeket használt. A (kettős) Vilenkin-rendszerre vonatkozó általánosítás Simon Péter és Weisz Ferenc munkája ([SiW]).

Mivel a Vilenkin-szerű rendszer azonban lényegesen általánosabb, mint a klasszikus Walsh- és Vilenkin-rendszerek (illetve kevésbé hasonlítható a trigonometrikus rendszerhez), a tétel bizonyítása csupán részben alkalmazza a szokásos eljárásokat.

4.2.1. igazolásához az alábbi lemmákon keresztül jutunk.

4.2.2. Lemma. *Ha $y \in I_j(x) \setminus I_{j+1}(x)$, akkor fennáll*

$$D_n(y, x) = \sum_{i=0}^j M_i \left(\sum_{t=0}^{n_i-1} r_i'^{n^{(i+1)}+tM_i}(y) \bar{r}_i'^{n^{(i+1)}+tM_i}(x) \right) \psi'_{n^{(i+1)}}(y) \bar{\psi}'_{n^{(i+1)}}(x).$$

Bizonyítás. Nagyon egyszerű, felhasználva a 4.1.1. és 4.1.2. Lemmákat. \square

A következő lemma triviális eredeti Vilenkin-rendszerre, de nem az ezen új rendszer esetén.

4.2.3. Lemma. *Legyen $n, j \in \mathbb{N}$, $i \in \{0, \dots, j\}$ és $x_0 \in G'_m$ tetszőleges. Ekkor*

$$\int_{I_j(x_0)} |\psi'_{n^{(i+1)}}(y)|^2 dy = \frac{|\psi'_{n^{(i+1)}, j-1}(x_0)|^2}{M_j}.$$

Bizonyítás. Ha $n = 0$, a tétel állítása triviális. Legyen a továbbiakban $n \in \mathbb{P}$. Vezessük be az alábbi jelöléseket $A := |n|$, $x_0 := (x_{0,0}, x_{0,1}, x_{0,2}, \dots) \in G'_m$, $e_k := (0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$, ahol egyedül a k -adik koordináta egyenlő 1-gyel, a többi 0, valamint legyen $\varepsilon_k \in \{0, \dots, m_k - 1\}$ és

$$(x_0, \varepsilon_j e_j, \dots, \varepsilon_A e_A) := (x_{0,0}, \dots, x_{0,j-1}, \varepsilon_j e_j, \dots, \varepsilon_A e_A, x_{0,A+1} \dots) \in G'_m.$$

Ekkor

$$\int_{I_j(x_0)} |\psi'_{n^{(i+1)}}(y)|^2 dy = \sum_{\varepsilon_j, \dots, \varepsilon_A} \int_{I_{A+1}(x_0, \varepsilon_j e_j, \dots, \varepsilon_A e_A)} |\psi'_{n^{(i+1)}}(y)|^2 dy$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{M_{A+1}} \sum_{\varepsilon_j, \dots, \varepsilon_A} |\psi'_{n^{(i+1)}}(x_0, \varepsilon_j e_j, \dots, \varepsilon_A e_A)|^2 \\
&= \frac{1}{M_j \prod_{k=j}^A m_k} \sum_{\varepsilon_j, \dots, \varepsilon_A} |\psi'_{n^{(i+1)}}(x_0, \varepsilon_j e_j, \dots, \varepsilon_A e_A)|^2 \\
&= \frac{1}{M_j \prod_{k=j}^A m_k} \sum_{x_j=0}^{m_j-1} \dots \sum_{x_A=0}^{m_A-1} |\psi'_{n^{(i+1)}}(x)|^2 \\
&= \frac{1}{M_j \prod_{k=j}^A m_k} \sum_{x_j=0}^{m_j-1} \dots \sum_{x_A=0}^{m_A-1} \prod_{k=i+1}^A \left| r'_k(n^{(i+1)})^{(k)}(x) \right|^2 \\
&= \frac{|\psi'_{n, i+1, j-1}(x_0)|^2}{M_j} \prod_{k=j}^A \frac{1}{m_k} \sum_{x_k=0}^{m_k-1} \left| r'_k(n^{(k)})(x) \right|^2,
\end{aligned}$$

mivel az $(n^{(i+1)})^{(k)} = n^{(k)}$ egyenlőség fennáll $i+1 \leq k$ miatt.

Belátjuk, hogy $\frac{1}{m_k} \sum_{x_k=0}^{m_k-1} \left| r'_k(n^{(k)})(x) \right|^2 = 1$, amiből pedig már következni fog a lemma állítása.

A rendszer egyik alapvető tulajdonságából következik, hogy ha M_k az n, l számok osztója és $n^{(k+1)} = l^{(k+1)}$, akkor $E_k(r'_k(n) \bar{r}_k^l) = 1$, feltéve, ha $n_k = l_k$. Így könnyű látni, hogy

$$1 = E_k(r'_k(n) \bar{r}_k^l) = E_k(|r'_k(n)|^2) = \frac{1}{m_k} \sum_{x_k=0}^{m_k-1} \left| r'_k(n) \right|^2.$$

□

4.2.4. Lemma. *Legyen $j, n \in \mathbb{N}$, $i \in \{0, \dots, j\}$ és $x_0 \in G'_m$ tetszőleges. Ekkor*

$$\int_{I_j(x_0)} |\psi'_{n^{(i+1)}}(y)| dy \leq \frac{|\psi'_{n,i+1,j-1}(x_0)|}{M_j}.$$

Bizonyítás. Egyszerű, használva a 4.2.3. Lemmát és a Hölder-egyenlőtlenséget $p = q = 2$ esetben:

$$\begin{aligned} \int_{I_j(x_0)} |\psi'_{n^{(i+1)}}(y)| \cdot 1 dy &\leq \sqrt{\int_{I_j(x_0)} |\psi'_{n^{(i+1)}}(y)|^2 dy} \int_{I_j(x_0)} 1 dy \\ &= \sqrt{\frac{|\psi'_{n,i+1,j-1}(x_0)|^2}{M_j} \frac{1}{M_j}} = \frac{|\psi'_{n,i+1,j-1}(x_0)|}{M_j}. \quad \square \end{aligned}$$

4.2.5. Lemma. *Legyen $a \not\equiv 1$ atom. Legyen $I_k(x_0)$ olyan intervallum, melyre $|a(x)| \leq M_k$, valamint legyen $\text{supp } a \subset I_k(x_0)$ és $\int_{I_k(x_0)} a(x) dx = 0$. Ekkor tetszőleges $j \in \{0, \dots, k-1\}$ esetén*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\hat{a}(n^{(j)})|}{n} \leq c.$$

Bizonyítás. Könnyű látni, hogy

$$\begin{aligned} \hat{a}(n) &= \int_{G'_m} a(x) \bar{\psi}'_n(x) dx = \int_{I_k(x_0)} a(x) \bar{\psi}'_n(x) dx \\ &= \left(\int_{I_k(x_0)} a(x) \bar{\psi}'_{n^{(j)}}(x) dx \right) \bar{\psi}'_{n,0,j-1}(x_0) = \hat{a}(n^{(j)}) \bar{\psi}'_{n,0,j-1}(x_0) \end{aligned}$$

és

$$\begin{aligned}
\sum_{n_0, \dots, n_{j-1}} |\psi'_{n,0,j-1}(x_0)|^2 &= \sum_{n_0, \dots, n_{j-1}} \prod_{i=0}^{j-1} |r_i^{n^{(i)}}(x_0)|^2 \\
&= \sum_{n_{j-1}=0}^{m_{j-1}-1} \dots \sum_{n_0=0}^{m_0-1} |r_{j-1}^{n^{(j-1)}}(x_0)|^2 \dots |r_0^{n^{(0)}}(x_0)|^2 \\
&= \sum_{n_{j-1}=0}^{m_{j-1}-1} |r_{j-1}^{n^{(j-1)}}(x_0)|^2 \dots \sum_{n_0=0}^{m_0-1} |r_0^{n^{(0)}}(x_0)|^2 \\
&= \prod_{i=0}^{j-1} m_i = M_j.
\end{aligned}$$

Ezen tényeket használva a következő átalakításokat hajthatjuk végre:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} |\hat{a}(n^{(j)})|^2 &= \sum_{n^{(j)}} \sum_{n^{(j)}} |\hat{a}(n^{(j)})|^2 = M_j \sum_{n^{(j)}} |\hat{a}(n^{(j)})|^2 \\
&= \sum_{n^{(j)}} |\hat{a}(n^{(j)})|^2 \sum_{n_0, \dots, n_{j-1}} |\psi'_{n,0,j-1}(x_0)|^2 \\
&= \sum_{n^{(j)}} \sum_{n^{(j)}} |\hat{a}(n^{(j)}) \psi'_{n,0,j-1}(x_0)|^2 \\
&= \sum_{n^{(j)}} \sum_{n^{(j)}} |\hat{a}(n)|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\hat{a}(n)|^2.
\end{aligned}$$

Ha $n \in \{0, \dots, M_k - 1\}$, akkor $n^{(j)} < M_k$, következésképpen $\psi'_{n^{(j)}}(x)$ csak x első k koordinátájától függ. Ebből következik, hogy a $\psi'_{n^{(j)}}(x)$ függvény az $I_k(x_0)$ halmazon konstans. Így

$$\hat{a}(n^{(j)}) = \int_{I_k(x_0)} a(x) \bar{\psi}'_{n^{(j)}}(x) dx = c \int_{I_k(x_0)} a(x) dx = 0,$$

ahonnan az

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\hat{a}(n^{(j)})|}{n} = \sum_{n=M_k}^{\infty} \frac{|\hat{a}(n^{(j)})|}{n}$$

egyenlőséget nyerjük.

A Cauchy—Bunyakovszkij-egyenlőtlenség alapján

$$\begin{aligned} \sum_{n=M_k}^{\infty} \frac{|\hat{a}(n^{(j)})|}{n} &\leq \sqrt{\sum_{n=M_k}^{\infty} |\hat{a}(n^{(j)})|^2} \sqrt{\sum_{n=M_k}^{\infty} \frac{1}{n^2}} \\ &\leq \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} |\hat{a}(n^{(j)})|^2} \sqrt{\sum_{n=M_k}^{\infty} \frac{1}{n^2}} \end{aligned}$$

és a Bessel-egyenlőtlenségből kapjuk, hogy

$$\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} |\hat{a}(n^{(j)})|^2} \leq \|a\|_2.$$

Ismert, hogy

$$\sqrt{\sum_{n=M_k}^{\infty} \frac{1}{n^2}} < \frac{1}{\sqrt{M_k - 1}},$$

valamint egyszerű számítás mutatja, hogy

$$\begin{aligned} \|a\|_2^2 &= \int_{I_k(x_0)} |a(x)|^2 dx \leq \mu(I_k(x_0))^{-2} \mu(I_k(x_0)) \\ &= \mu(I_k(x_0))^{-1} = M_k. \end{aligned}$$

Becsléseinket összegezve

$$\sum_{n=M_k}^{\infty} \frac{|\hat{a}(n^{(j)})|}{n} \leq c$$

adódik.

Végül felhasználva a korábban bizonyított

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\hat{a}(n^{(j)})|}{n} = \sum_{n=M_k}^{\infty} \frac{|\hat{a}(n^{(j)})|}{n}$$

egyenlőséget, a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\hat{a}(n^{(j)})|}{n} \leq c,$$

egyenlőtlenséghez jutunk, ahogy azt állítottuk. \square

A 4.2.1. Tétel bizonyítása. Mivel $f \in H(G'_m)$, így f -et az $f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n a_n(x)$ formába írhatjuk, ahol a_n -ek atomok, és $\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n| < \infty$.

Ha a egy atom, létezik $k \in \mathbb{N}$ és $x_0 \in G'_m$ úgy, hogy $\text{supp } a \subseteq I_k(x_0)$. Kezdjük el vizsgálni az $\|S_n a\|_1$ kifejezést:

$$\begin{aligned} \|S_n a\|_1 &= \int_{G'_m} |S_n a| \\ &= \int_{I_k(x_0)} |S_n a| + \sum_{j=0}^{k-1} \int_{I_j(x_0) \setminus I_{j+1}(x_0)} |S_n a| =: (1) + (2). \end{aligned}$$

Először vegyük szemügyre (1)-et. A Hölder-egyenlőtlenséget és az S_n operátor (2,2) típusosságát felhasználva kapjuk, hogy

$$(1) = \int_{G'_m} 1_{I_k(x_0)} |S_n a| \leq \frac{1}{\sqrt{M_k}} \|S_n a\|_2 \leq c \frac{1}{\sqrt{M_k}} \|a\|_2.$$

Mivel $\|a\|_{\infty} \leq M_k$ és $\mu(I_k(x_0)) = M_k^{-1}$, könnyű látni, hogy

$$\|a\|_2 = \sqrt{\int_{I_k} |a(x)|^2} \leq \sqrt{M_k}.$$

Mindezen tények együtt $(1) \leq c$ -t eredményezik.

Most legyen j egy eleme a $\{0, \dots, k-1\}$ halmaznak. Ismert, hogy

$$(S_n a)(y) = \int_{G'_m} a(x) D_n(y, x) dx = \int_{I_k(x_0)} a(x) D_n(y, x) dx.$$

A 4.2.2. Lemmát felhasználva kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} (S_n a)(y) &= \int_{I_k(x_0)} a(x) \sum_{i=0}^j \left(M_i \left(\sum_{t=0}^{n_i-1} r_i'^{n^{(i+1)}+tM_i}(y) \bar{r}_i'^{n^{(i+1)}+tM_i}(x) \right) \right. \\ &\quad \left. \cdot \psi'_{n^{(i+1)}}(y) \bar{\psi}'_{n^{(i+1)}}(x) \right) dx = \\ &= \sum_{i=0}^j \left(M_i \left(\sum_{t=0}^{n_i-1} r_i'^{n^{(i+1)}+tM_i}(y) \bar{r}_i'^{n^{(i+1)}+tM_i}(x_0) \right) \right. \\ &\quad \left. \cdot \psi'_{n^{(i+1)}}(y) \int_{I_k(x_0)} a(x) \bar{\psi}'_{n^{(i+1)}}(x) dx \right), \end{aligned}$$

ha $y \in I_j(x) \setminus I_{j+1}(x)$. De a $|r_k^n(x)| \leq \sqrt{m_k}$ reláció fennáll $\sum_{n_k=0}^{m_k-1} |r_k^n(x)|^2 = m_k$ miatt, így

$$\left| \sum_{t=0}^{n_i-1} r_i'^{n^{(i+1)}+tM_i}(y) \bar{r}_i'^{n^{(i+1)}+tM_i}(x_0) \right| \leq n_i m_i < m_i^2 < c,$$

amiből pedig

$$|(S_n a)(y)| \leq c \sum_{i=0}^j M_i \left| \psi'_{n^{(i+1)}}(y) \int_{I_k(x_0)} a(x) \bar{\psi}'_{n^{(i+1)}}(x) dx \right|$$

$$= c \sum_{i=0}^j M_i \left| \psi'_{n^{(i+1)}}(y) \hat{a}(n^{(i+1)}) \right|$$

következik $y \in I_j(x) \setminus I_{j+1}(x)$ esetén.

A fentiekből és a 4.2.4. Lemmából

$$\begin{aligned} (2) &\leq c \sum_{j=0}^{k-1} \int_{I_j(x_0) \setminus I_{j+1}(x_0)} \sum_{i=0}^j M_i \left| \psi'_{n^{(i+1)}}(y) \hat{a}(n^{(i+1)}) \right| dy \\ &\leq c \sum_{j=0}^{k-1} \sum_{i=0}^j M_i |\hat{a}(n^{(i+1)})| \int_{I_j(x_0)} |\psi'_{n^{(i+1)}}(y)| dy \\ &\leq c \sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{M_j} \sum_{i=0}^j M_i |\hat{a}(n^{(i+1)})| |\psi'_{n, i+1, j-1}(x_0)| \end{aligned}$$

adódik.

A Vilenkin-téren értelmezett általánosított Rademacher-rendszer *iii.* tulajdonsága miatt (lásd az első fejezetet) könnyű látni, hogy

$$|\psi'_{n, i+1, j-1}(x_0)| \leq \sqrt{\prod_{h=i}^{j-1} m_h}.$$

Az (1)-re és (2)-re kapott becslésekkel be fogjuk látni, hogy

$$\frac{1}{\log N} \sum_{n=1}^N \frac{\|S_n a\|_1}{n} \leq c$$

teljesül minden a atomra.

Először írjuk fel, hogy

$$\frac{1}{\log N} \sum_{n=1}^N \frac{\|S_n a\|_1}{n}$$

$$\begin{aligned}
 &\leq \frac{1}{\log N} \sum_{n=1}^N \left(\frac{c}{n} + c \sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{M_j} \sum_{i=0}^j M_i \frac{|\hat{a}(n^{(i+1)})| |\psi'_{n,i+1,j-1}(x_0)|}{n} \right) \\
 &\leq c \frac{\sum_{n=1}^N \frac{1}{n}}{\log N} + \frac{c}{\log N} \sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{M_j} \sum_{i=0}^j M_i \sum_{n=1}^N \frac{|\hat{a}(n^{(i+1)})| \sqrt{\prod_{h=i}^{j-1} m_h}}{n} =: (3)
 \end{aligned}$$

akármilyen atom is a .

Amennyiben $a \equiv 1$, akkor

$$\begin{aligned}
 \hat{a}(n) &= \int_{G'_n} \overline{\psi}'_n = E_0(\overline{\psi}'_n) = E_0 \left(\prod_{j=1}^{|n|} \overline{r}_j^{n^{(j)}} \right) \\
 &= E_0 \left(E_{|n|} \left(\prod_{j=1}^{|n|} \overline{r}_j^{n^{(j)}} \right) \right) \\
 &= E_0 \left(\prod_{j=1}^{|n|-1} \overline{r}_j^{n^{(j)}} E_{|n|} \left(r_{|n|}^{n^{(|n|)}} \overline{r}_{|n|}^{n^{(|n|)}} \right) \right) = 0
 \end{aligned}$$

hiszen $n^{(|n|)} = n_{|n|} M_{|n|} \neq 0$ ha $n \in \mathbb{P}$ és $E_n(r_n^m \overline{r}_n^l) = 0$ ha $m_n \neq l_n$.

Ebben az esetben $\frac{1}{\log N} \sum_{n=1}^N \frac{\|S_n a\|_1}{n}$ korlátossága triviális.

Ha pedig a nem az azonosan 1 függvény, akkor alkalmazzuk a 4.2.5. Lemmát.

Abból az ismert tényből, hogy $\sum_{n=1}^N \frac{1}{n} \leq c \log N$, következik

$$(3) \leq c \left(1 + \frac{\sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{M_j} \sum_{i=0}^j M_i \sqrt{\prod_{h=i}^{j-1} m_h}}{\log N} \right).$$

Már csak $\sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{M_j} \sum_{i=0}^j M_i \sqrt{\prod_{h=i}^{j-1} m_h} \leq c \log N$ bizonyítása hiányzik

(3) korlátosságához. Könnyű látni, hogy

$$\frac{1}{M_j} \sum_{i=0}^j M_i \sqrt{\prod_{h=i}^{j-1} m_h} = \sum_{i=0}^j \frac{1}{\sqrt{\prod_{h=i}^{j-1} m_h}} \leq \sum_{i=0}^j \frac{1}{2^{\frac{j-i}{2}}} < \frac{1}{\sqrt{2}-1},$$

következésképp $\sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{M_j} \sum_{i=0}^j M_i < \frac{k}{\sqrt{2}-1}$. Ha $n < M_{i+1}$, akkor $n^{(i+1)} = 0$, így $\hat{a}(n^{(i+1)}) = 0$. Válasszuk k -t úgy, hogy $k = \max\{i+1 \mid M_{i+1} \leq n\}$ legyen. Ebben az esetben feltehetjük, hogy $M_k \leq n$. De tudjuk, hogy $n \leq N$ és $2^k \leq M_k$, így innen kapjuk, hogy $k < c \log N$.

Ezzel befejeződött a $\frac{1}{\log N} \sum_{n=1}^N \frac{\|S_n a\|_1}{n} \leq c$ egyenlőtlenség bizonyítása.

Végezetül visszatérve az eredeti problémára, kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} & \sup_{N \in \mathbb{P}} \frac{1}{\log N} \sum_{n=1}^N \frac{\|S_n f\|_1}{n} \\ &= \sup_{N \in \mathbb{P}} \frac{1}{\log N} \sum_{n=1}^N \frac{\|S_n(\sum_{h=1}^{\infty} \lambda_h a_h)\|_1}{n} \leq \\ &\leq \sum_{h=1}^{\infty} |\lambda_h| \sup_{N \in \mathbb{P}} \frac{1}{\log N} \sum_{n=1}^N \frac{\|S_n a_h\|_1}{n} \\ &\leq c \sum_{h=1}^{\infty} |\lambda_h| \leq c \|f\|_H, \end{aligned}$$

ami a bizonyítandó volt. \square

4.2.6. Tétel. *Ha $f \in H(G'_m)$ és az m sorozat korlátos, akkor*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{\log N} \sum_{n=1}^N \frac{\|S_n f\|_1}{n} = \|f\|_H.$$

Bizonyítás. A 4.2.1. Tétel egyszerű következménye, hiszen a Vilenkin-szerű polinomok sűrűek az összes H -beli függvények terében. \square

4.3. A kétdimenziós változat.

A 4.3. alfejezetben belátjuk az előző alfejezetben tárgyalt normaegyenlőtlenség kétváltozós alakját, nevezetesen, ha az indexek hányadosa korlátos.

4.3.1. Tétel. *Tegyük fel, hogy m korlátos sorozat, $2 \leq N, K \in \mathbb{P}$ és legyen $\beta \geq 1$ rögzített konstans. Ekkor létezik $c > 0$ csak β -tól függő konstans, melyre tetszőleges $f \in H^1(G'_m \times G'_m)$ függvény esetén*

$$\sup_{N, K} \frac{1}{\log N \log K} \sum_{\substack{\beta^{-1} \leq n/k \leq \beta \\ (n, k) \leq (N, K)}} \frac{\|S_{n, k} f\|_1}{nk} \leq c \|f\|_H$$

teljesül.

A tétel igazolásához szükségünk lesz az alábbi lemmákra.

4.3.2. Lemma. *Minden $f \in L^1(G'_m \times G'_m)$ és $n, k \in \mathbb{N}$ esetén*

$$\|S_{n, k} f\|_2 \leq \|f\|_2,$$

vagyis az $S_{n, k}$ operátor $(2, 2)$ típusú.

Bizonyítás. Ez az állítás egyszerű következménye a 4.2.3. Lemmának és a Bessel-egyenlőtlenségnek:

$$\|S_{n, k} f\|_2 = \sqrt{\int_{G'_m \times G'_m} \left| \sum_{l=0}^{n-1} \sum_{h=0}^{k-1} \hat{f}(l, h) \psi'_l(x) \psi'_h(y) \right|^2 dx dy}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \sqrt{\sum_{l=0}^{n-1} \sum_{h=0}^{k-1} \left| \hat{f}(l, h) \right|^2 \int_{G'_m} |\psi'_l(x)|^2 dx \int_{G'_m} |\psi'_h(y)|^2 dy} \\
&= \sqrt{\sum_{l=0}^{n-1} \sum_{h=0}^{k-1} \left| \hat{f}(l, h) \right|^2} \leq \|f\|_2
\end{aligned}$$

□

4.3.3. Lemma. Legyen $a(x, y) \not\equiv 1$ egy atom és $\beta \geq 1$ rögzített. Legyen $I_k(x_0) \times I_l(y_0)$ egy intervallum, melyre $|a(x, y)| \leq M_k M_l$, $\text{supp } a(x, y) \subset I_k(x_0) \times I_l(y_0)$ és $\int_{I_k(x_0) \times I_l(y_0)} a(x, y) dx dy = 0$. Ekkor

$$\sum_{\substack{n, h=1 \\ \beta^{-1} \leq n/h \leq \beta}}^{\infty} \frac{|\hat{a}(n^{(i)}, h^{(j)})|}{nh} \leq c$$

teljesül

$$\forall i \in \{0, \dots, k-1\}, \quad \forall j \in \{0, \dots, l-1\}$$

esetén.

Bizonyítás. Egyszerű számítás mutatja, hogy

$$\begin{aligned}
&\hat{a}(n, h) \\
&= \int_{G'_m \times G'_m} a(x, y) \bar{\psi}'_n(x) \bar{\psi}'_h(y) dx dy \\
&= \int_{I_k(x_0) \times I_l(y_0)} a(x, y) \bar{\psi}'_n(x) \bar{\psi}'_h(y) dx dy \\
&= \left(\int_{I_k(x_0) \times I_l(y_0)} a(x, y) \bar{\psi}'_{n^{(i)}}(x) \bar{\psi}'_{h^{(j)}}(y) dx dy \right) \\
&\quad \cdot \bar{\psi}'_{n, 0, i-1}(x_0) \bar{\psi}'_{h, 0, j-1}(y_0) \\
&= \hat{a}(n^{(i)}, h^{(j)}) \bar{\psi}'_{n, 0, i-1}(x_0) \bar{\psi}'_{h, 0, j-1}(y_0)
\end{aligned}$$

és

$$\begin{aligned}
 \sum_{n_0, \dots, n_{j-1}} |\psi'_{n,0,j-1}(x_0)|^2 &= \sum_{n_0, \dots, n_{j-1}} \prod_{i=0}^{j-1} |r_i^{n^{(i)}}(x_0)|^2 \\
 &= \sum_{n_j=0}^{m_j-1} \dots \sum_{n_0=0}^{m_0-1} |r_0^{n^{(0)}}(x_0)|^2 \dots |r_{j-1}^{n^{(j-1)}}(x_0)|^2 = \prod_{i=0}^{j-1} \sum_{n_i=0}^{m_i-1} |r_i^{n^{(i)}}(x_0)|^2 \\
 &= \prod_{i=0}^{j-1} m_i = M_j.
 \end{aligned}$$

Ezen egyenlőségeket használva az alábbi összefüggést kapjuk:

$$\begin{aligned}
 &\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{h=1}^{\infty} |\hat{a}(n^{(i)}, h^{(j)})|^2 \\
 &= \sum_{n^{(i)}} \sum_{n^{(i)}} \sum_{h^{(j)}} \sum_{h^{(j)}} |\hat{a}(n^{(i)}, h^{(j)})|^2 \\
 &= M_i M_j \sum_{n^{(i)}} \sum_{h^{(j)}} |\hat{a}(n^{(i)}, h^{(j)})|^2 \\
 &= \sum_{n^{(i)}} \sum_{h^{(j)}} \left(|\hat{a}(n^{(i)}, h^{(j)})|^2 \right. \\
 &\quad \cdot \left. \sum_{n_0, \dots, n_{i-1}} |\psi'_{n,0,i-1}(x_0)|^2 \sum_{h_0, \dots, h_{j-1}} |\psi'_{h,0,j-1}(y_0)|^2 \right) \\
 &= \sum_{n^{(i)}} \sum_{n^{(i)}} \sum_{h^{(j)}} \sum_{h^{(j)}} |\hat{a}(n^{(i)}, h^{(j)}) \psi'_{n,0,i-1}(x_0) \psi'_{h,0,j-1}(y_0)|^2 \\
 &= \sum_{n^{(i)}} \sum_{n^{(i)}} \sum_{h^{(j)}} \sum_{h^{(j)}} |\hat{a}(n, h)|^2 \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{h=1}^{\infty} |\hat{a}(n, h)|^2.
 \end{aligned}$$

Ha $n \in \{0, \dots, M_k - 1\}$ akkor $n^{(j)} < M_k$, következésképpen $\psi'_{n^{(j)}}(x)$ csak x első k koordinátájától függ, így a $\psi'_{n^{(j)}}(x)$ függvény az $I_k(x_0)$ halmazon állandó. Tehát, ha $n \in \{0, \dots, M_k - 1\}$ és $h \in \{0, \dots, M_l - 1\}$, akkor

$$\hat{a}(n^{(i)}, h^{(j)}) = \int_{I_k(x_0) \times I_l(y_0)} a(x, y) \bar{\psi}'_{n^{(i)}}(x) \bar{\psi}'_{h^{(j)}}(y) dx dy =$$

$$\bar{\psi}'_{n^{(i)}}(x_0) \bar{\psi}'_{h^{(j)}}(y_0) \int_{I_k(x_0) \times I_l(y_0)} a(x, y) dx dy = 0,$$

amiből pedig

$$\sum_{\substack{n, h=1 \\ \beta^{-1} \leq n/h \leq \beta}}^{\infty} \frac{|\hat{a}(n^{(i)}, h^{(j)})|}{nh} = \sum_{n=M_k/\beta}^{\infty} \sum_{h=M_l/\beta}^{\infty} \frac{|\hat{a}(n^{(i)}, h^{(j)})|}{nh}$$

következik.

A Cauchy—Bunyakovszkij-egyenlőtlenségből következik, hogy

$$\sum_{n=M_k/\beta}^{\infty} \sum_{h=M_l/\beta}^{\infty} \frac{|\hat{a}(n^{(i)}, h^{(j)})|}{nh} \leq$$

$$\sqrt{\sum_{n=M_k/\beta}^{\infty} \sum_{h=M_l/\beta}^{\infty} |\hat{a}(n^{(i)}, h^{(j)})|^2} \sqrt{\sum_{n=M_k/\beta}^{\infty} \sum_{h=M_l/\beta}^{\infty} \frac{1}{n^2} \frac{1}{h^2}} \leq$$

$$\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{h=1}^{\infty} |\hat{a}(n^{(i)}, m^{(j)})|^2} \sqrt{\sum_{n=M_k/\beta}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{hh=M_l/\beta}^{\infty} \frac{1}{h^2}}.$$

Továbbá a Bessel-egyenlőtlenség miatt

$$\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{h=1}^{\infty} |\hat{a}(n^{(i)}, h^{(j)})|^2} \leq \|a\|_2.$$

Az ismert elemi egyenlőtlenség eredményezi

$$\sqrt{\sum_{n=M_k}^{\infty} \frac{1}{n^2}} \leq \frac{c}{\sqrt{M_k}} \quad \text{és} \quad \sqrt{\sum_{h=M_l}^{\infty} \frac{1}{h^2}} \leq \frac{c}{\sqrt{M_l}}$$

teljesülését, ahonnan

$$\sum_{n=M_k}^{\infty} \sum_{h=M_l}^{\infty} \frac{|\hat{a}(n^{(i)}, h^{(j)})|}{nh} \leq c$$

adódik, mivel

$$\begin{aligned} \|a\|_2^2 &= \int_{I_k(x_0) \times I_l(y_0)} |a(x, y)|^2 dx dy \\ &\leq \mu(I_k(x_0) \times I_l(y_0))^{-2} \mu(I_k(x_0) \times I_l(y_0)) \\ &= \mu(I_k(x_0) \times I_l(y_0))^{-1} = M_{k+1} M_{l+1} \\ &= m_{k+1} m_{l+1} M_k M_l \leq c M_k M_l \end{aligned}$$

teljesül, felhasználva m korlátosságát.

Eredményeinket összegezve kapjuk, hogy $\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{h=1}^{\infty} \frac{|\hat{a}(n^{(i)}, h^{(j)})|}{nh} \leq c$, ahogy vártuk. \square

A továbbiakban $(n, k) \leq (N, K)$ jelentse azt, hogy $n \leq N$ és $k \leq K$ egyidejűleg teljesül.

4.3.4. Lemma. *Legyen a tetszőleges atom $R \subset I_s(t_0) \times I_{s'}(t'_0)$ tartóval, valamint legyen $\|a\|_\infty \leq M_s M_{s'}$. Tegyük fel, hogy $\beta \geq 1$, $2 \leq N, K \in \mathbb{P}$. Ekkor létezik c csak β -tól függő konstans, hogy*

$$\sup_{N,K} \frac{1}{\log N \log K} \sum_{\substack{\beta^{-1} \leq n/k \leq \beta \\ (n,k) \leq (N,K)}} \frac{\|S_{n,ka}\|_1}{nk} \leq c.$$

Bizonyítás.

Lássuk először az $a \equiv 1$ esetet. Mivel

$$\int_{G'_m} \bar{\psi}'_n = E_0(\bar{\psi}'_n) = E_0\left(\prod_{j=1}^{|n|} \bar{r}'_j{}^{n^{(j)}}\right) = E_0\left(E_{|n|}\left(\prod_{j=1}^{|n|} \bar{r}'_j{}^{n^{(j)}}\right)\right) =$$

$$E_0\left(\prod_{j=1}^{|n|-1} \bar{r}'_j{}^{n^{(j)}} E_{|n|}(r'_{|n|}{}^0 \bar{r}'_{|n|}{}^{n^{(|n|)}})\right) = 0,$$

hiszen $n^{(|n|)} = n_{|n|} M_{|n|} \neq 0$ ha $n \in \mathbb{P}$ és $E_n(r'_n{}^m \bar{r}'_n{}^l) = 0$ ha $m_n \neq l_n$, így azt kapjuk, hogy

$$\hat{a}(n, k) = \int_{G'_m \times G'_m} \bar{\psi}'_n \bar{\psi}'_k = \int_{G'_m} \bar{\psi}'_n \int_{G'_m} \bar{\psi}'_k = 0.$$

Ebben az esetben tehát a lemma állítása triviális.

Ha $a \neq 1$, akkor osszuk $G'_m \times G'_m$ -et négy diszjunkt részre a következőképpen:

$$\begin{aligned} & G'_m \times G'_m \\ &= \left(I_s(t_0) \times I_{s'}(t'_0)\right) \cup \left(I_s(t_0) \times (G'_m \setminus I_{s'}(t'_0))\right) \\ & \cup \left((G'_m \setminus I_s(t_0)) \times I_{s'}(t'_0)\right) \cup \left((G'_m \setminus I_s(t_0)) \times (G'_m \setminus I_{s'}(t'_0))\right), \end{aligned}$$

ahonnan a

$$\begin{aligned} \|S_{n,k}a\|_1 = & \int_{I_s(t_0) \times I_{s'}(t'_0)} |S_{n,k}a| + \int_{I_s(t_0) \times (G'_m \setminus I_{s'}(t'_0))} |S_{n,k}a| + \\ & \int_{(G'_m \setminus I_s(t_0)) \times I_{s'}(t'_0)} |S_{n,k}a| + \int_{(G'_m \setminus I_s(t_0)) \times (G'_m \setminus I_{s'}(t'_0))} |S_{n,k}a| \end{aligned}$$

felosztás adódik.

Az első rész becslését rövid számolás után kapjuk a Hölder-egyenlőtlenség, az $S_{n,k}$ operátor (2,2) típusossága (lásd 4.3.2. Lemma) és az atom definíciója alapján:

$$\begin{aligned} & \int_{I_s(t_0) \times I_{s'}(t'_0)} |S_{n,k}a| \\ & \leq \mu(I_s(t_0))^{1/2} \mu(I_{s'}(t'_0))^{1/2} \left(\int_{G'_m \times G'_m} |S_{n,k}a|^2 \right)^{1/2} \\ & \leq \sqrt{M_s^{-1} M_{s'}^{-1}} \left(\int_{I_s(t_0) \times I_{s'}(t'_0)} |a|^2 \right)^{1/2} \leq c, \end{aligned}$$

és így könnyű látni, hogy

$$\sup_{N,K} \frac{1}{\log N \log K} \sum_{\substack{\beta^{-1} \leq n/k \leq \beta \\ (n,k) \leq (N,K)}} \frac{c}{nk} \leq c.$$

A második (és harmadik) rész becslése céljából vizsgáljuk meg $S_{n,k}a(x, y)$ -t. Először is írjuk fel, hogy

$$S_{n,k}a(x, y) = \int_{G'_m} S_k^2 a(t, y) D_n(x, t) dt = \int_{I_s(t_0)} S_k^2 a(t, y) D_n(x, t) dt.$$

Most válasszuk meg a $j \in \{0, \dots, s-1\}$ számot tetszőlegesen. A 4.2.2. Lemmát használva kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} S_{n,k}a(x, y) &= \int_{I_s(t_0)} S_k^2 a(t, y) \sum_{i=0}^j \left(M_i \left(\sum_{h=0}^{n_i-1} r_i^{n^{(i+1)+hM_i}}(x) \bar{r}_i^{n^{(i+1)+hM_i}}(t) \right) \right. \\ &\quad \left. \cdot \psi'_{n^{(i+1)}}(x) \bar{\psi}'_{n^{(i+1)}}(t) \right) dt \\ &= \sum_{i=0}^j \left(M_i \left(\sum_{h=0}^{n_i-1} r_i^{n^{(i+1)+hM_i}}(x) \bar{r}_i^{n^{(i+1)+hM_i}}(t_0) \right) \right. \\ &\quad \left. \cdot \psi'_{n^{(i+1)}}(x) \int_{I_s(t_0)} S_k^2 a(t, y) \bar{\psi}'_{n^{(i+1)}}(t) dt \right), \end{aligned}$$

ha $x \in I_j(t_0) \setminus I_{j+1}(t_0)$, amit mostantól tételezzünk is fel.

De a $|r_k^{n'}(x)| \leq \sqrt{m_k}$ reláció fennáll, hiszen $\sum_{n_k=0}^{m_k-1} |r_k^{n'}(x)|^2 = m_k$,
így

$$\left| \sum_{t=0}^{n_i-1} r_i^{n^{(i+1)+tM_i}}(x) \bar{r}_i^{n^{(i+1)+tM_i}}(t_0) \right| \leq n_i m_i < m_i^2 < c,$$

amit felhasználva

$$\begin{aligned}
 & |S_{n,k}a(x, y)| \\
 & \leq c \sum_{i=0}^j M_i \left| \psi'_{n^{(i+1)}}(x) \int_{I_s(t_0)} S_k^2 a(t, y) \bar{\psi}'_{n^{(i+1)}}(t) dt \right| \\
 & = c \sum_{i=0}^j M_i \left| \psi'_{n^{(i+1)}}(x) \hat{S}_k^2 a(n^{(i+1)}, y) \right|
 \end{aligned}$$

adódik.

Ha most felhasználjuk az előbbi egyenlőtlenséget, valamint az intervallumok egy szétbontási eljárását (lásd például [Gát6]-ot), az alábbi eredményre jutunk:

$$\begin{aligned}
 \int_{G'_m \setminus I_{s'}(t'_0)} |S_{n,k}a(x, y)| dx &= \sum_{j=0}^{s'-1} \int_{I_j(t_0) \setminus I_{j+1}(t_0)} |S_{n,k}a(x, y)| dx \leq \\
 c \sum_{j=0}^{s'-1} \int_{I_j(t_0) \setminus I_{j+1}(t_0)} \sum_{i=0}^j M_i &\left| \psi'_{n^{(i+1)}}(x) \hat{S}_k^2 a(n^{(i+1)}, y) \right| dx \leq \\
 c \sum_{j=0}^{s'-1} \sum_{i=0}^j M_i \left| \hat{S}_k^2 a(n^{(i+1)}, y) \right| &\int_{I_j(t_0)} |\psi'_{n^{(i+1)}}(x)| dx.
 \end{aligned}$$

Ha ezen a ponton felhasználjuk a 4.2.4. Lemmát, a

$$\int_{G'_m \setminus I_{s'}(t'_0)} |S_{n,k}a(x, y)| dx \leq c \sum_{j=0}^{s'-1} \frac{1}{M_j} \sum_{i=0}^j M_i \sqrt{\prod_{v=i}^{j-1} m_v} \left| \hat{S}_k^2 a(n^{(i+1)}, y) \right|$$

egyenlőtlenséget kapjuk. Vezessük be a következő jelölést:

$$\sum^* := \sum_{t=0}^{s'_l-1} r'_l{}^{s'-(t+1)+tM_l}(y) \bar{r}'_l{}^{s'-(t+1)+tM_l}(t_0)$$

és tanulmányozzuk $\hat{S}_k^2 a$ -t.

Amennyiben $y \in I_h(z) \setminus I_{h+1}(z)$, a 4.2.2. Lemma segítségével kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
& \hat{S}_k^2 a(n^{(i+1)}, y) \\
&= \int_{G'_m} S_k^2 a(x, y) \bar{\psi}'_{n^{(i+1)}}(x) dx \\
&= \int_{G'_m \times G'_m} a(x, z) D_k(y, z) \bar{\psi}'_{n^{(i+1)}}(x) dz dx \\
&= \int_{G'_m \times G'_m} a(x, z) \sum_{l=0}^h M_l \sum^* \psi'_{k^{(l+1)}}(y) \bar{\psi}'_{k^{(l+1)}}(z) \bar{\psi}'_{n^{(i+1)}}(x) dz dx \\
&= \sum_{l=0}^h M_l \sum^* \psi'_{k^{(l+1)}}(y) \int_{G'_m \times G'_m} a(x, z) \bar{\psi}'_{k^{(l+1)}}(z) \bar{\psi}'_{n^{(i+1)}}(x) dz dx \\
&= \sum_{l=0}^h M_l \sum^* \psi'_{k^{(l+1)}}(y) \hat{a}(n^{(i+1)}, k^{(l+1)}).
\end{aligned}$$

Mivel $|\sum^*| < c$, ezért

$$\left| \hat{S}_k^2 a(n^{(i+1)}, y) \right| \leq c \sum_{l=0}^h M_l \left| \psi'_{k^{(l+1)}}(y) \hat{a}(n^{(i+1)}, k^{(l+1)}) \right|,$$

ahonnan

$$\begin{aligned}
& \int_{I_s(t_0)} \left| \hat{S}_k^2 a(n^{(i+1)}, y) \right| dy \\
&= \sum_{h=s}^{|k|} \int_{I_h(t_0) \setminus I_{h+1}(t_0)} \left| \hat{S}_k^2 a(n^{(i+1)}, y) \right| dy + \int_{I_{|k|+1}(t_0)} \left| \hat{S}_k^2 a(n^{(i+1)}, y) \right| dy
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\leq c \sum_{h=s}^{|k|+1} \int_{I_h(t_0)} \sum_{l=0}^h M_l \left| \psi'_{k^{(l+1)}}(y) \hat{a}(n^{(i+1)}, k^{(l+1)}) \right| dy \\
 &\leq c \sum_{h=s}^{|k|+1} \sum_{l=0}^h M_l \hat{a}(n^{(i+1)}, k^{(l+1)}) \int_{I_h(t_0)} \left| \psi'_{k^{(l+1)}}(y) \right| dy \\
 &\leq c \sum_{h=s}^{|k|+1} \frac{1}{M_h} \sum_{l=0}^h M_l \sqrt{\prod_{v=l}^{h-1} m_v} \hat{a}(n^{(i+1)}, k^{(l+1)}).
 \end{aligned}$$

Visszatérve az eredeti problémára

$$\begin{aligned}
 &\int_{I_s(t_0) \times (G'_m \setminus I_{s'}(t'_0))} |S_{n,k} a(x, y)| dx dy \\
 &\leq c \int_{I_s} \sum_{j=0}^{s'-1} \frac{1}{M_j} \sum_{i=0}^j M_i \sqrt{\prod_{v=i}^{j-1} m_v} \hat{S}_k^2 a(n^{(i+1)}, y) \\
 &\leq c \sum_{j=0}^{s'-1} \frac{1}{M_j} \sum_{i=0}^j M_i \sqrt{\prod_{v=i}^{j-1} m_v} \sum_{h=s}^{|k|+1} \frac{1}{M_h} \\
 &\quad \cdot \sum_{l=0}^h M_l \sqrt{\prod_{v=l}^{h-1} m_v} \hat{a}(n^{(i+1)}, k^{(l+1)}).
 \end{aligned}$$

Végezetül alkalmazzuk a 4.3.3. Lemmát:

$$\frac{1}{\log N \log K} \sum_{\substack{\beta^{-1} \leq n/k \leq \beta \\ (n,k) \leq (N,K)}} \frac{\int_{I_s(t_0) \times (G'_m \setminus I_{s'}(t'_0))} |S_{n,k} a(x, y)| dx dy}{nk}$$

$$\leq c \sum_{j=0}^{s'-1} \frac{1}{M_j} \sum_{i=0}^j M_i \sqrt{\prod_{v=i}^{j-1} m_v} \sum_{h=s}^{|k|+1} \frac{1}{M_h}$$

$$\cdot \sum_{l=0}^h M_l \sqrt{\prod_{v=l}^{h-1} m_v} \sum_{\substack{\beta^{-1} \leq n/k \leq \beta \\ (n,k) \leq (N,K)}} \frac{|\hat{a}(n^{(i+1)}, k^{(l+1)})|}{nm} \leq c,$$

mivel

$$\sum_{h=s}^{|k|+1} \frac{1}{M_h} \sum_{l=0}^h M_l \sqrt{\prod_{v=l}^{h-1} m_v} \leq \sum_{h=s}^{|k|+1} \frac{1}{\sqrt{2}-1} \leq c \log k \leq c \log K$$

és $\sum_{j=0}^{s'-1} \frac{1}{M_j} \sum_{i=0}^j M_i \sqrt{\prod_{v=i}^{j-1} m_v} \leq c \log N$, melynek bizonyítása hasonlóan történhet:

$$\sum_{j=0}^{s'-1} \frac{1}{M_j} \sum_{i=0}^j M_i \sqrt{\prod_{v=i}^{j-1} m_v} < \frac{s'}{\sqrt{2}-1}.$$

Továbbá, ha $n < M_{i+1}$ és $k < M_{l+1}$, akkor $n^{(i+1)} = k^{(l+1)} = 0$, ezért $\hat{a}(n^{(i+1)}, k^{(l+1)}) = 0$. Másrészt elegendő, ha

$$s' = \max\{|i+1, l+1| \mid M_{i+1} \leq n, M_{l+1} \leq k\},$$

ezért feltehetjük, hogy $M_{s'} \leq n$ és $M_{s'} \leq k$. Megjegyezzük, hogy $n \leq N$ és $2^{s'} \leq M_{s'}$, ennélfogva $s' < c \log N$ adódik, ahogy azt vártuk.

Az összeg harmadik tagjának becslését hasonlóan bonyolítjuk le.

A bizonyítás hátralévő részének stílusa hasonló az előző eljárás-hoz. Alkalmazva a

$$\int_{G'_m \setminus I_s(t_0)} |S_{n,k} a(x, y)| dx \leq c \sum_{j=0}^{s'-1} \frac{1}{M_j} \sum_{i=0}^j M_i \left| \hat{S}_k^2 a(n^{(i+1)}, y) \right|$$

egyenlőtlenséget, kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} & \int_{(G'_m \setminus I_s(t_0)) \times (G'_m \setminus I_{s'}(t'_0))} |S_{n,k} a(x, y)| dx dy \\ & \leq c \int_{G'_m \setminus I_s(t_0)} \sum_{j=0}^{s'-1} \frac{1}{M_j} \sum_{i=0}^j M_i \left| \hat{S}_k^2 a(n^{(i+1)}, y) \right| \\ & = c \sum_{j=0}^{s'-1} \frac{1}{M_j} \sum_{i=0}^j M_i \int_{G'_m \setminus I_s(t_0)} \left| \hat{S}_k^2 a(n^{(i+1)}, y) \right|. \end{aligned}$$

Most tanulmányozzuk a $\int_{G'_m \setminus I_s(t_0)} |\hat{S}_k^2 a(n^{(i+1)}, y)| dy$ integrált, nevezetesen becsüljük felülről az alábbi módon:

$$\begin{aligned} & \int_{G'_m \setminus I_s(t_0)} |\hat{S}_k^2 a(n^{(i+1)}, y)| dy \\ & = \sum_{q=0}^{s-1} \int_{I_q(t_0) \setminus I_{q+1}(t_0)} |\hat{S}_k^2 a(n^{(i+1)}, y)| dy \\ & \leq \sum_{q=0}^{s-1} \int_{I_q(t_0)} c \sum_{u=0}^q M_u \left| \psi_k^{(u+1)} a(n^{(i+1)}, k^{(u+1)}) \right| dy \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq c \sum_{q=0}^{s-1} \sum_{u=0}^q M_u |a(n^{(i+1)}, k^{(u+1)})| \int_{I_q(t_0)} \left| \psi'_k{}^{(u+1)} \right| dy \\
&\leq c \sum_{q=0}^{s-1} \frac{1}{M_q} \sum_{u=0}^q M_u \sqrt{\prod_{v=u}^{q-1} m_v} |a(n^{(i+1)}, k^{(u+1)})|.
\end{aligned}$$

Alkalmazzuk újra a 4.3.3. Lemmát, amely a várt egyenlőtlenséget fogja eredményezni a szokásos módon.

$$\begin{aligned}
&\sum_{\substack{\beta^{-1} \leq n/k \leq \beta \\ (n,k) \leq (N,K)}} \frac{\int_{(G'_m \setminus I_s(t_0)) \times (G'_m \setminus I_{s'}(t'_0))} |S_{n,k} a(x, y)| dx dy}{nk} \leq \\
&c \sum_{j=0}^{s'-1} \frac{1}{M_j} \sum_{i=0}^j M_i \sqrt{\prod_{v=i}^{j-1} m_v} \sum_{q=0}^{s-1} \frac{1}{M_q} \sum_{u=0}^q M_u \\
&\cdot \sqrt{\prod_{v=u}^{q-1} m_v} \sum_{\substack{\beta^{-1} \leq n/k \leq \beta \\ (n,k) \leq (N,K)}} \frac{|a(n^{(i+1)}, k^{(u+1)})|}{nm} \leq \\
&c \log N \log K.
\end{aligned}$$

Ezzel a lemma bizonyítását befejeztük. \square

A 4.2.1. Tétel bizonyítása.

Alkalmazzuk a 4.3.4. Lemmát és az f függvény atomos dekompozícióját:

$$\sup_{N,K} \frac{1}{\log N \log K} \sum_{\substack{\beta^{-1} \leq n/k \leq \beta \\ (n,k) \leq (N,K)}} \frac{\|S_{n,k} f\|_1}{nk} =$$

$$\sup_{N,K} \frac{1}{\log N \log K} \sum_{\substack{\beta^{-1} \leq n/k \leq \beta \\ (n,k) \leq (N,K)}} \frac{\|S_{n,k}(\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j a_j)\|_1}{nk} \leq$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\lambda_j| \sup_{N,K} \frac{1}{\log N \log K} \sum_{\substack{\beta^{-1} \leq n/k \leq \beta \\ (n,k) \leq (N,K)}} \frac{\|S_{n,k}(a_j)\|_1}{nk} \leq$$

$$c \sum_{j=1}^{\infty} |\lambda_j| \leq c \|f\|_H.$$

□

Összefoglalás

Ez a dolgozat a klasszikus egy- és kétdimenziós Vilenkin-rendszer különböző általánosításaival és néhány, azokkal kapcsolatos állítással foglalkozik.

Az első, bevezető fejezet után találhatóak az új eredményeket tárgyaló fejezetek; a második, harmadik és negyedik.

A második fejezetben (és a hozzá tartozó bevezetésben) a $\psi\alpha$ Vilenkin-szerű rendszerek egy alkalmazását találjuk, példát adva olyan majdnem páros számelméleti függvényre, melynek Vilenkin—Fourier-sora mindenhol divergál.

2.2.1. Tétel. *Legyen G_m egy R -Vilenkin-csoport és $1 \leq q < \infty$ tetszőleges. Ekkor létezik olyan \mathcal{B}^q -beli függvény, melynek Vilenkin—Fourier sora sehol sem konvergens.*

A harmadik fejezet két fő állítás köré szerveződik. Egyrészt bebizonyítjuk, hogy korlátos Vilenkin-szerű rendszerekhez tartozó integrálható függvények Fejér-közepi majdnem mindenütt tartanak a függvényhez abban az esetben, ha az indexek hányadosa korlátos.

3.2.1. Tétel. *Legyen $f \in L^1$. Ekkor*

$$\sigma_{n_1, n_2} f \rightarrow f$$

majdnem mindenütt, amint $n_1, n_2 \rightarrow \infty$, $n_1, n_2 \in \mathbb{P}$, és $\beta^{-1} \leq n_1/n_2 \leq \beta$, ahol $\beta \geq 1$ rögzített paraméter.

Másrészt igazoljuk, hogy a kettős Fejér-közepéből származtatható $\sigma^* f$ operátor (H, L) típusú.

3.3.1. Tétel. *Legyen $f \in H$. Ekkor a σ^* operátor (H, L) típusú, vagyis*

$$\|\sigma^* f\|_1 \leq c \|f\|_H,$$

ahol $\sigma^ f := \sup_{(n_1, n_2)} |\sigma_{n_1, n_2} f|$, amelyben $n_1, n_2 \in \mathbb{P}$, és $\beta^{-1} \leq n_1/n_2 \leq \beta$, ahol $\beta \geq 1$ rögzített paraméter.*

A negyedik fejezet egy ismert normaegyenlőtlenség egy- és kétdimenziós változatát tartalmazza. A tételek újszerűségét az adja, hogy azokat egy (a $\psi\alpha$ rendszerekhez hasonlóan) Gát György nevéhez fűződő új rendszeren mondjuk ki, mely rendszer érdekessége annak általánossága; a rendszer függvényei (a Vilenkin-) csoport helyett egy művelettel el nem látott halmazon vannak értelmezve, megnehezítve a korábbiakkal analóg állítások bizonyítását.

4.2.1. Tétel. *Legyen m korlátos sorozat. Ekkor létezik $c > 0$ abszolút konstans, hogy minden $f \in H(G'_m)$ függvényre*

$$\sup_{N \in \mathbb{P}} \frac{1}{\log N} \sum_{n=1}^N \frac{\|S_n f\|_1}{n} \leq c \|f\|_H.$$

4.3.1. Tétel. *Tegyük fel, hogy m korlátos sorozat, $2 \leq N, K \in \mathbb{P}$ és legyen $\beta \geq 1$ rögzített konstans. Ekkor létezik $c > 0$ csak β -tól függő konstans, melyre tetszőleges $f \in H^1(G'_m \times G'_m)$ függvény esetén*

$$\sup_{N, K} \frac{1}{\log N \log K} \sum_{\substack{\beta^{-1} \leq n/k \leq \beta \\ (n, k) \leq (N, K)}} \frac{\|S_{n, k} f\|_1}{nk} \leq c \|f\|_H$$

teljesül.

Summary

In my dissertation I deal with the dyadic-harmonic analysis, particularly with the Vilenkin and Vilenkin-like systems. In what follows I will use the usual notations of the Vilenkin analysis.

Let \mathcal{A}_n be the σ -algebra generated by the cosets $I_n(z)$, where $n \in \mathbb{N}$, $z \in G_m$. Let α_j^k, α_n ($k, j, n \in \mathbb{N}$) be functions satisfying the following conditions:

- (i) $\alpha_j^k : G_m \rightarrow \mathbb{C}$ is \mathcal{A}_j -measurable ($k, j \in \mathbb{N}$),
- (ii) $|\alpha_j^k| := \alpha_0^k := \alpha_j^0 := \alpha_j^k(0) := 1$ ($k, j \in \mathbb{N}$),
- (iii) $\alpha_n := \prod_{j=0}^{\infty} \alpha_j^{n^{(j)}}$ ($n \in \mathbb{N}$, $n^{(j)} := \sum_{k=j}^{\infty} n_k M_k$).

Let $\chi_n = \psi_n \alpha_n$ ($n \in \mathbb{N}$). A function system $\{\chi_n : n \in \mathbb{N}\}$ of this type is called a $\psi\alpha$ system on the Vilenkin group G_m .

It is proved that this system is orthonormal and complete in $L^1(G_m)$.

I proved several generalizations of theorems known for the original Vilenkin systems with respect to the $\psi\alpha$ and to the double $\psi\alpha$ system.

Let $k \in \mathbb{P}$. We say that $f : \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{C}$ is an arithmetical function even modulo k , if every $n \in \mathbb{P}$

$$f(n) = f((n, k)),$$

where (n, k) is the greatest common divisor of n and k .

Let

$$\mathcal{B}_k := \{f \text{ even modulo } k\}, \quad \mathcal{B} := \bigcup_{k \in \mathbb{P}} \mathcal{B}_k.$$

If $f : \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{R}$ then

$$\overline{M}(f) := \limsup_{x \rightarrow \infty} x^{-1} \sum_{1 \leq j \leq x} f(j)$$

are called the upper mean values of f .

Let $1 \leq q < \infty$. Then the upper mean value gives rise to a seminorm

$$\|f\|_q := \{\overline{M}(|f|^q)\}^{1/q}$$

on the linear space $\{f|f : \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{C}, \|f\|_q < \infty\}$. We denote by \mathcal{B}^q the closure of \mathcal{B} in this norm. Functions in \mathcal{B}^q are called almost even arithmetical functions.

If $n \in \mathbb{N}, n = \sum_{j=0}^{\infty} n_j M_j$, then let

$$\check{n} := \sum_{j=0}^{\infty} n_j M_{j+1}^{-1}$$

and of course only a finite number of n'_j s is not zero.

Denote by

$$\kappa_n(x) := \lim_{k \rightarrow \infty} \exp(2\pi i \check{n} \sum_{j=0}^k x_j M_j) \quad (n \in \mathbb{N}, x \in G_m).$$

There exists the limit, and the system $\{\kappa_n | n \in \mathbb{N}\}$ on G_m is a $\psi\alpha$ system.

If $f \in \mathcal{B}^q$ and $1 \leq q < \infty$, then there exists $f^* \in L^q(G_m)$ μ almost everywhere unique, that $f^*(\lambda^{-1}(\check{n})) = f(n)$, $\|f^*\|_q = \|f\|_{\mathcal{B}^q}$ and $f_n \rightarrow f \Leftrightarrow f_n^* \rightarrow f^*$, where λ is the so-called Fine-map.

If for every $k \in \mathbb{P}$ there exists $n = n(k)$ such that $k | M_n$, we say that G_m is a R-Vilenkin group.

Theorem. *If G_m is a R-Vilenkin group, then there exists a function F which is an element of \mathcal{B}^q where $1 \leq q < \infty$, the Vilenkin—Fourier series of which diverges everywhere.*

My main results are the following (both for bounded and double systems):

Theorem. *The operator σ^* is of type (H°, L) i.e.*

$$\|\sigma^* f\|_1 \leq c \|f\|_{H^\circ} \quad (f \in H^\circ).$$

Theorem. Let $f \in L^1(G_m \times G_{\tilde{m}})$. Then $\sigma_{(n_1, n_2)} f \rightarrow f$ a.e. as $n_1, n_2 \rightarrow \infty$, where $n_1, n_2 \in \mathbb{P}$ and $\beta^{-1} \leq n_1/n_2 \leq \beta$ for some fixed parameter $\beta \geq 1$.

The other system (also introduced by György Gát) is a common generalization of several well-known systems.

Let us introduce this one on G_m , which will be called Vilenkin-like system. Now G_m is not the Vilenkin group, but the so-called Vilenkin space without any operation.

The complex valued functions $r'_k{}^n : G_m \rightarrow \mathbb{C}$ ($k, n \in \mathbb{N}$) we call generalized Rademacher functions, if they have the following properties:

- i. $r'_k{}^n$ is \mathcal{A}_{k+1} measurable (i.e. $r'_k{}^n(x)$ depends only on x_0, \dots, x_k ($x \in G_m$)), $r'_k{}^0 = 1$ for all $k, n \in \mathbb{N}$.
- ii. If M_k is a divisor of n, l and $n^{(k+1)} = l^{(k+1)}$ ($k, l, n \in \mathbb{N}$), then

$$E_k(r'_k{}^n \bar{r}'_k{}^l) = \begin{cases} 1 & \text{if } n_k = l_k, \\ 0 & \text{if } n_k \neq l_k \end{cases}$$

(\bar{z} is the complex conjugate of z).

- iii. If M_k is a divisor of n (that is, $n = n_k M_k + n_{k+1} M_{k+1} + \dots + n_{|n|} M_{|n|}$). Then

$$\sum_{n_k=0}^{m_k-1} |r'_k{}^n(x)|^2 = m_k$$

for all $x \in G_m$

Now, define the Vilenkin-like system $\psi' := (\psi'_n : n \in \mathbb{N})$ as follows

$$\psi'_n := \prod_{k=0}^{\infty} r'_k{}^{n^{(k)}}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

(Since $r'_k{}^0 = 1$, then $\psi'_n := \prod_{k=0}^{|n|} r'_k{}^{n^{(k)}}$). The Vilenkin-like system ψ' is orthonormal.

I proved a norm inequality with respect to this system.

Theorem. *There exists a $c > 0$ absolute constant that if $f \in H(G_m)$ and the sequence m is bounded, then*

$$\sup_{N \in \mathbb{P}} \frac{1}{\log N} \sum_{n=1}^N \frac{\|S_n f\|_1}{n} \leq c \|f\|_H.$$

It is managed to verify the two-dimensional version of this inequality.

Theorem. *Assume that $\beta \geq 1$, $f \in H^1(G_m \times G_m)$ and $2 \leq N, K \in \mathbb{P}$. Then there exists a constant $c > 0$ depending only on β such that*

$$\sup_{N, K} \frac{1}{\log N \log K} \sum_{\substack{\beta^{-1} \leq n/k \leq \beta \\ (n, k) \leq (N, K)}} \frac{\|S_{n, k} f\|_1}{nk} \leq c \|f\|_{H^1}.$$

Irodalomjegyzék

- [AVDR] Agajev, G. N., Vilenkin, N. Ya., Dzhafarli, G. M. and Rubinstein, A. I., *Multiplicative systems of functions and harmonic analysis on 0-dimensional groups*, "ELM" (Baku, U.S.S.R) (1981).
- [CZ] Calderon, A. P., Zygmund, A., *On the existence of certain singular integrals* Acta Math. 88 (1952), 85-139.
- [Fin] Fine, N. J., *Cesàro summability of Walsh-Fourier series*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 41 (1955), 558-591.
- [FS] Fridli, S., Simon, P., *On the Dirichlet kernels and a Hardy space with respect to the Vilenkin system*, Acta Mathematica Hungarica 45 (1-2) (1985), 223-234.
- [Gát1] Gát, G., *Vilenkin—Fourier Series and Limit Periodic Arithmetic Functions*, Colloquia Mathematica Societatis János Bolyai 58 (1990), 315-332.
- [Gát2] Gát, G., *Orthonormal systems on Vilenkin groups*, Acta Mathematica Hungarica 58 (1-2) (1991), 193-198.
- [Gát3] Gát, G., *On almost even arithmetical functions via orthonormal systems on Vilenkin groups*, Acta Arithmetica LX.2 (1991), 105-123.
- [Gát4] Gát, G., *Investigation of some operators with respect to Vilenkin-like systems*, Annales Univ. Sci. Budapest XIV. (1994), 61-70.
- [Gát5] Gát G., *Pointwise convergence of Fejér means on compact totally disconnected groups*, Acta Sci. Math. (Szeged) 60 (1995), 311-319.
- [Gát6] Gát G., *Pointwise convergence of double Walsh-Fejér means*, Annales Univ. Sci. Budapestensis, Sect. Comp. 16 (1996), 173-184.
- [Gát7] Gát, G., *On the almost everywhere convergence of Fejér means of functions on the group of 2-adic integers*, Journal of Approx. Theory vol 90 (1) (1997), 88-96.
- [Gát8] Gát, G., *On $(C, 1)$ summability for Vilenkin-like systems*, Studia Math. 144 (2) (2001), 101-120.

- [GT] Gát, G., Toledo, R., *L^p -norm convergence of series in compact totally disconnected groups*, Analysis Math. 22 (1996), 13-24.
- [HR] Hewitt, E., Ross, K., *Abstract Harmonic Analysis*, Springer-Verlag, Heidelberg, (1963)
- [Hil] Hildebrand, H., *Über die punktweise Konvergenz von Ramanujan-Entwicklungen zahlentheoretische Funktionen*, Acta Arithmetica XLIV (1984), 109-140.
- [MZ] Marcinkiewicz, J., Zygmund, A., *On the summability of double Fourier series*, Fund. Math. 32 (1939), 122-132.
- [Mau] Mauclaire, J. L., *Intégration et théorie des nombres*, Hermann, Paris (1986)
- [MSW] Móricz, F., Schipp, F., Wade, W. R., *Cesàro summability of double Walsh-Fourier series*, Trans Amer. Math. Soc. 329 (1992), 131-140.
- [Sch1] Schipp, F., *Universal contractive projections and a.e. convergence*, Probability Theory and Applications, Essays to the Memory of József Mogyoródi, Eds.: Galambos, J., Kátai, I., Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Boston, London (1992), 47-75.
- [Sch2] Schipp, F., *On L^p -norm convergence of series with respect to product systems*, Analysis Math. 2 (1976), 49-63.
- [SW1] Schipp, F., Wade, W. R., *Norm convergence and summability of Fourier series with respect to certain product systems*, Pure and Appl. Math. Approx. Theory 138 Marcel Dekker, New York-Basel-Hong Kong (1992), 437-452.
- [SW2] Schipp, F., Wade, W. R., *Transforms on normed fields*, Janus Pannonius Tudományegyetem, Pécs (1995)
- [SW3] Schipp, F., Wade, W. R., *A Fundamental Theorem of Dyadic Calculus for the Unit Square*, Applicable Analysis 34 (1989), 203-218.
- [SWS] Schipp, F., Wade, W. R., Simon, P., Pál, J., *Walsh series, "An Introduction to dyadic harmonic analysis"*, Adam Hilger, Bristol and New York (1990)

- [Sim1] Simon, P., *Strong convergence of certain means with respect to the Walsh-Fourier series*, Acta Math. Hungar. 49 (1987), 425-431.
- [Sim2] Simon, P., *Verallgemeinerte Walsh-Fourierreihen II.*, Acta. Math. Acad. Sci. Hungar. 27 (1976), 329-341.
- [Sim3] Simon, P., *Strong convergence theorem for Vilenkin-Fourier series*, Journal of Math. Analysis and Applications 245 (1) (2000), 52-68.
- [SiW] Simon, P., Weisz, F., *Strong convergence theorems for two-parameter Vilenkin-Fourier series* Acta Math. Hungar. 86 (1-2) (2000), 17-38.
- [Smi] Smith, B., *A Strong Convergence Theorem for $H^1(T)$* , Lecture Notes in Math., Springer, Berlin-New York 995 (1983), 169-173.
- [Tai] Taibleson, M. H., *Fourier Analysis on Local Fields*, Princeton Univ. Press., Princeton, N. J. (1975)
- [Tol] Toledo, R., *Átlagos értékben vett konvergencia az uniform majdnem páros számelméleti függvények terében*, Acta Academiae Paedagogicae Nyíregyháziensis 12/D (1990), 47-56.
- [Vil] Vilenkin, N. Ya., *A class of complete orthonormal systems*, Izv. Akad. Nauk. U.S.S.R., Ser. Mat. 11 (1947), 363-400.
- [Wad] Wade, W. R., *A growth estimate for Cesàro partial sums of multiple Walsh-Fourier series*, Colloq. Math. Soc. J. Bolyai 49, Alfred Haar Memorial Conference, Budapest (1985), 975-991.
- [Wei1] Weisz, F., *Cesàro summability of two-dimensional Walsh-Fourier series*, Trans. Amer. Math. Soc. 348 (1996), 2169-2181.
- [Wei2] Weisz, F., *Hardy spaces and Cesàro means of two-dimensional Fourier series*, Bolyai Soc. Math. Stud. 5 (1996), 353-367.
- [Wei3] Weisz, F., *Martingale Hardy spaces and their applications in Fourier analysis*, Lectures Notes in Math. 1568 Springer, Berlin, Heidelberg, New York (1994)
- [Wei4] Weisz, F., *Strong convergence theorems for two-parameter Walsh-Fourier and trigonometric-Fourier series*, Studia Math. 117 (2) (1996), 173-194.
- [Zyg] Zygmund, A., *Trigonometric series*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, (1959)

Függelék

Publikációk jegyzéke.

- [Bla1] Blahota, I., *On a theorem of Fridli and Simon with respect to some Vilenkin-like systems*, *Bulletins for Applied Mathematics* LXV (1993), 231-238.
- [Bla2] Blahota, I., *Approximation by Vilenkin-Fourier sums in $L^p(G_m)$* , *Acta Academiae Paedagogicae Nyíregyháziensis* 13/D (1992), 35-39. Referált: ZBL 881.41015
- [Bla3] Blahota, I., *Example for an almost even arithmetical function, the Vilenkin—Fourier series of which diverges everywhere*, *Acta Academiae Paedagogicae Nyíregyháziensis* 13/D (1992), 41-45. Referált: ZBL 880.11004
- [Bla4] Blahota, I., *Relation between Dirichlet kernels with respect to Vilenkin-like systems*, *Acta Academiae Paedagogicae Agriensis* XXII (1994), 109-114. Referált: ZBL 882.42017
- [Bla5] Blahota, I., *A Walsh-Vilenkin analízis néhány approximációs kérdése és alkalmazása*, Egyetemi doktori értekezés (1995), KLTE
- [Bla6] Blahota, I., *A Hardy-Littlewood-like inequality on compact totally disconnected spaces*, *Acta Mathematica Academiae Paedagogicae Nyíregyháziensis* Vol. 14. (1998), 19-24. Referált: ZBL 908.42013, MR 2000h:42019
- [Bla7] Blahota, I., *On the (H, L) typeness of the maximal function of Cesàro means of two-parameter integrable functions on bounded Vilenkin groups*, *Publicationes Mathematicae Debrecen* 54/3-4 (1999), 417-426. Referált: ZBL 934.42018, MR 2000g:43009
- [Bla8] Blahota, I., *On a norm inequality with respect to Vilenkin-like systems*, *Acta Mathematica Hungarica* 89 1-2 (2000), 15-27.
- [Bla9] Blahota, I., *Investigation with respect to the two-dimensional Vilenkin space*, közlésre elfogadva a Colloq. Soc. János Bolyai-nál
- [BS] Blahota, I., Sarkadi, D., *On an equality of type Hardy-Littlewood with respect to Vilenkin-like systems*, *Acta Academiae Paedagogicae Nyíregyháziensis*, 13/D, 1992, 51-55. Referált: ZBL 880.43005

- [BG] Blahota, I., Gát, G., *Pointwise convergence of double Vilenkin-Fejér means*, *Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica* 36 (2000), 49-63. Referált: MR 1 768 234

Előadások jegyzéke.

1. On a theorem of Fridli and Simon with respect to some Vilenkin-like systems (Pannonian Applied Mathematical Meetings, 1992 október 21-24. Göd)
2. Vilenkin rendszerek (A Magyar Tudományos Akadémia Szabolcs-Szatmár-Bereg megyei Tudományos Testülete 1993. évi közgyűléssel egybekötött tudományos ülésének szekcióülésén, 1993 október 2. Nyíregyháza)
3. A $\psi\alpha$ Vilenkin-szerű rendszer (A Magyar Tudományos Akadémia Szabolcs-Szatmár-Bereg megyei Tudományos Testülete 1994. évi közgyűléssel egybekötött tudományos ülésének szekcióülésén, 1994 október 1. Nyíregyháza)
4. A diadikus derivált (A Magyar Tudományos Akadémia Szabolcs-Szatmár-Bereg megyei Tudományos Testülete 1994. évi közgyűléssel egybekötött tudományos ülésének szekcióülésén, 1995 szeptember 30. Nyíregyháza)
5. A σ^* operátor (H, L) típusosságáról (A Kossuth Lajos Tudományegyetem Analízis tanszéke által rendezett tudományos konferencia ülésén, 1997 május 29-31. Síkfőkút)
6. A (H, L) -type inequality on totally disconnected spaces. (A Magyar Tudomány Napja alkalmából rendezett tudományos ülés szekcióülésén, 1997 november 6. Nyíregyháza)
7. On a norm inequality with respect to Vilenkin-like systems (Numbers, Functions, Equations '98, Noszvaj, 1998 május 31.-június 6.)
8. Investigation with respect to the two-dimensional Vilenkin space (Functions, Series, Operators (Alexits Memorial) Conference, Budapest, 1999 augusztus 9.-14.)
9. Hardy-Littlewood típusú egyenlőtlenségekről (A Magyar Tudomány Napja alkalmából rendezett tudományos ülés szekcióülésén, 1999 november 3. Nyíregyháza)