Doktori (PhD) értekezés tézisei

Walsh- és Vilenkin-rendszerek mátrix transzformációs közepei

Nagy Dóra

Témavezető: Dr. habil. Blahota István

DEBRECENI EGYETEM

Matematika- és Számítástudományok Doktori Iskola

Debrecen, 2025.

Bevezetés

A harmonikus analízis elmélete számos matematikai eszközt és módszert kínál, amiben fontos szerepet kapnak az ortogonális rendszerek. Az ortogonális függvényrendszerek (és azon belül a Fourier-sorok) elmélete megjelenésük óta jelentős fejlődésen mentek keresztül. Ez a dolgozat a Fourier-sorokkal foglalkozik, azon belül is a Walsh–Paley, a Walsh–Kaczmarz és a Vilenkin ortonormált rendszerekkel.

A mátrix transzformációs közepek számos jól ismert összegzési módszer általánosításai. Nevezetesen, a Riesz-, a Nörlund-, a T (súlyozott), a Fejér- (vagy a $(C, 1)$), a Cesàro- (C, α) és a változó paraméterekkel rendelkező Cesàro- (C, α_n) közepek mind az alábbiakban bemutatott mátrix transzformációs összegzési módszer speciális esetei.

1. Walsh–Paley- és Walsh–Kaczmarz-rendszer

A szakirodalomban a „Walsh-függvény" kifejezést három ortonormált rendszer elemeire is használják. Nevezetesen, az eredeti Walsh-, a Walsh–Paley- és a Walsh–Kaczmarz-rendszerre. Ezek a rendszerek ugyanazokat a függvényeket tartalmazzák, más-más sorrendben. Közülük ebben a dolgozatban a Walsh–Paley- és Walsh–Kaczmarz-rendszerrel foglalkozunk.

Bevezetjük a Walsh–Paley- és a Walsh–Kaczmarz-rendszerek vizsgálatához szükséges fogalmakat, valamint korábbról ismeretes tételeket is bemutatunk.

Walsh–Paley esetben részletesebben foglalkozunk a Fejér-féle magfüggvény néhány approximációs kérdésével, valamint normakonvergenciát látunk be. A továbbiakban a Walsh–Kaczmarz–Fourier-sorozat mátrix transzformációs közepei és a megfelelő függvény közötti normában való különbséget becsüljük meg. A becsléshez a folytonossági modulust használjuk. Norma- és majdnem mindenütti konvergenciára is mondunk ki tételeket hasonló feltételek mellett. Areshidze és Tephnadze néhány állítását (Nörlundról mátrix transzformációs közepekre) általánosítjuk, valamint az általánosítás mellett javítjuk és kiegészítjük Móricz és Siddiqi eredményeit.

Jelölések és definíciók

Legyen $\mathbb{P}$ a pozitív egész számok halmaza és $\mathbb{N} := \mathbb{P} \cup \{0\}$. Jelölje a másodrendű diszkrét ciklikus csoportot $\mathbb{Z}_2$. A csoportművelet az összeadás moduló 2. Legyen minden részhalmaz nyitott. A μ_k Haar mérték legyen úgy megadva a k-adik $\mathbb{Z}_2$-n ($k \in \mathbb{N}$), hogy $\mu_k(\{0\}) := \mu_k(\{1\}) := 1/2$. Legyen $G := \mathop{\times}\limits_{k=0}^{\infty} \mathbb{Z}_2$ a diadikus csoport (diszkrét ciklikus csoportok direkt szorzata). A G elemei az $x := (x_0, x_1, \ldots, x_k, \ldots)$ sorozatokkal reprezentálhatóak, ahol $x_k \in \{0, 1\}$ ($k \in \mathbb{N}$). A G-n végzett csoportművelet a koordinátánkénti összeadás ($+$ jelöléssel) moduló 2, valamint legyen a μ normalizált Haar-mérték a μ_k mértékek szorzatmértéke és a topológia a szorzattopológia.

A diadikus intervallumok definiálása az alábbi módon történik

$$I_0(x) := G, \;\; I_n(x) := \{y \in G : y = (x_0, \ldots, x_{n-1}, y_n, y_{n+1}, \ldots)\},$$

ahol $x \in G, n \in \mathbb{P}$ és jelölje $I_n := I_n(0)$. Az intervallumok a G topológiájának egy környezetbázisát alkotják.

Jelölje $L_p(G)$ a szokásos Lebesgue-teret G-n (a megfelelő $\|.\|_p$ normákkal).

A jelölések rövidsége érdekében megállapodunk abban, hogy $L_\infty(G)$-t írunk $C(G)$ helyett és $\|f\|_\infty := \sup\{|f(x)| : x \in G\}$. Nyilvánvaló, hogy L_∞ nem azonos a folytonos függvények terével, hanem annak egy megfelelő altere. Mivel a folytonos függvények esetében a szuprémum norma és a L_∞ norma megegyezik, a kényelem kedvéért reméljük, hogy az olvasó el tudja fogadni ezt a jelölési egyszerűsítést.

Bevezetjük a Walsh–Fourier-analízis néhány fogalmát.

Az n-edik Rademacher-függvény az x helyen legyen

$$r_n(x) := (-1)^{x_n} \quad (x \in G, n \in \mathbb{N}).$$

Minden természetes szám egyértelműen előállítható kettes számrendszerben, és ez a felírás véges (csak véges számú n_k különbözik nullától)

$$n = \sum_{k=0}^{\infty} n_k 2^k, \quad n_k \in \{0, 1\} \; (k \in \mathbb{N}).$$

Szükségünk lesz még az alábbi jelölésre is. Ha $n \in \mathbb{P}$, akkor $|n| := \max\{j \in \mathbb{N} : n_j \neq 0\}$. Ez azt jelenti, hogy $2^{|n|} \leq n < 2^{|n|+1}$.

A Walsh–Paley-függvényeket az alábbi módon definiáljuk. Legyen $w_0(x) := 1$ és ha $n \in \mathbb{P}$, akkor legyen

$$w_n(x) := \prod_{k=0}^{\infty} r_k^{n_k}(x) = (-1)^{\sum_{k=0}^{|n|} n_k x_k}.$$

Ismert, hogy a Walsh–Paley-rendszer $(w_n, n \in \mathbb{N})$ a $(G, +)$ karakterrendszere.

Legyen az $L_p(G)$ folytonossági modulus

$$\omega_p(f, \delta) := \sup_{|t|<\delta} \|f(. + t) - f(.)\|_p ,$$

ahol $f \in L_p(G)$ és $\delta > 0$, valamint

$$|x| := \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x_i}{2^{i+1}} \quad \text{minden } x \in G$$

esetén. Az $f \in C(G)$ esetben a p helyére ∞-t írunk.

A Walsh–Kaczmarz-rendszert a következő módon vezetjük be. Legyen $\kappa_0 := 1$ és $n \in \mathbb{P}$ esetén legyen

$$\kappa_n(x) := r_{|n|}(x) \prod_{k=0}^{|n|-1} r_{|n|-1-k}^{n_k}(x) = r_{|n|}(x)(-1)^{\sum_{k=0}^{|n|-1} n_k x_{|n|-1-k}}.$$

Könnyen belátható, hogy

$$r_n = w_{2^n} = \kappa_{2^n}$$

minden $n \in \mathbb{N}$-re.

A Walsh–Kaczmarz- és Walsh–Paley-függvények halmaza diadikus blokkonként megegyezik. Vagyis

$$\left\{\kappa_n : 2^k \leq n < 2^{k+1}\right\} = \left\{w_n : 2^k \leq n < 2^{k+1}\right\}$$

minden $k \in \mathbb{N}$ esetén és $\kappa_0 = w_0$.

A Walsh–Paley- és Walsh–Kaczmarz-rendszerek ortonormáltak és teljesek $L_1(G)$-ben.

Skvortsov a $\tau_n : G \to G$ transzformáció

$$\tau_n(x) := (x_{n-1}, x_{n-2}, \ldots, x_1, x_0, x_n, x_{n-1}, \ldots)$$

segítségével összefüggést adott meg a Walsh–Kaczmarz- és Walsh–Paley-függvények között. Nevezetesen, minden $n \in \mathbb{N}$ és $x \in G$ esetén

$$\kappa_n(x) = r_{|n|}(x) w_{n-2^{|n|}}(\tau_{|n|}(x)).$$

Fontos megjegyezni, hogy a $\tau_n(.)$ függvény megőrzi a mértéket.

A Lipschitz osztályok $L_p(G)$-ben a következőek. Minden $\alpha > 0$ esetén legyen

$$\text{Lip}(\alpha, p, G) := \{f \in L_p(G) : \omega_p(f, \delta) = O(\delta^\alpha), \text{ amint } \delta \to 0\}.$$

Továbbá

$$\text{Lip}(\alpha, C(G)) := \{f \in C(G) : \ |f(x+y) - f(x)| \le c|y|^\alpha, \ x, y \in G\}.$$

Később az egyszerűség kedvéért $\text{Lip}(\alpha, C(G))$ helyett $\text{Lip}(\alpha, \infty, G)$-t írunk.

Definiáljuk az n-edik Fourier-együtthatót, a Fourier-sor n-edik részletösszegét, az n-edik Fejér-közepet és az n-edik Dirichlet-féle magfüggvényt (Walsh–Paley- vagy Walsh–Kaczmarz-rendszerekre) az alábbi módokon.

$$\hat{f}^\xi(n) := \int_G f \xi_n d\mu \text{ , ha } n \in \mathbb{N},$$

$$S_n^\xi(f) := \sum_{k=0}^{n-1} \hat{f}^\xi(k)\xi_k, \ \sigma_n^\xi(f) := \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} S_k^\xi(f), \ D_n^\xi := \sum_{k=0}^{n-1} \xi_k,$$

ahol $n \in \mathbb{P}$. Ismert, hogy

$$S_n^\xi(f; x) = \int_G f(u) D_n^\xi(x+u) d\mu(u).$$

A Fejér-féle magfüggvények a Dirichlet-féle magfüggvények számtani közepei, azaz

$$K_n^\xi := \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} D_k^\xi.$$

Legyen $T := (t_{i,j})_{i,j=1}^{\infty}$ egy duplán végtelen számmátrix. Mindig feltételezzük, hogy a T-mátrix felső háromszög alakú, azaz $t_{i,j} := 0$, ha $i > j$. Legyen a T-mátrix által meghatározott n-edik mátrix transzformációs közép

$$\sigma_n^{\xi T}(f;x) := \sum_{k=1}^{n} t_{k,n} S_k^\xi(f;x).$$

Mivel a T-mátrix n-edik oszlopa határozza meg a $\sigma_n^{\xi T}$ mátrix transzformációs közepet és definíciója csak véges számú tagot tartalmaz, ezért az egyszerűség kedvéért azt mondjuk, hogy $(t_{k,n} : 1 \leq k \leq n,\ k \in \mathbb{P})$ véges számsorozat minden $n \in \mathbb{P}$-re.

A $\sum_{k=1}^{n} t_{k,n} = 1$ feltétellel a Nörlund-közepek speciális mátrix transzformációs közepek, nevezetesen

$$t_{k,n} := \frac{q_{n-k}}{Q_n}.$$

A továbbiakban legyen $(t_{k,n} : 1 \leq k \leq n,\ k \in \mathbb{P})$ nemnegatív számok véges sorozata minden $n \in \mathbb{P}$ esetén. Az n-edik mátrix transzformációs magfüggvény definíciója

$$K_n^{\xi T}(x) := \sum_{k=1}^{n} t_{k,n} D_k^\xi(x).$$

Megjegyezzük továbbá, hogy ebben a fejezetben a c egy pozitív abszolút konstanst jelöl.

Motivációk

1. F. Schipp, W. R. Wade, P. Simon és J. Pál [62] klasszikus könyvében olvashatjuk az

$$\|\sigma_{2^n}^w(f) - f\|_X \le \omega_X\left(f, 2^{-n}\right) + \sum_{k=0}^{n-1} 2^{k-n}\omega_X\left(f, 2^{-k}\right)$$

egyenlőtlenséget, ahol X egy homogén Banach-tér (például tetszőleges L_p tér, ahol $1 \le p < \infty$ vagy a folytonos függvények tere) és ω_X a függvények folytonossági modulusa X-ben.

2. Móricz és Siddiqi a következőket igazolták.

Legyen $f \in L_p(G)$, ahol $1 \le p \le \infty$ és legyen $(q_k : k \in \mathbb{N})$ nemnegatív számok sorozata úgy, hogy

$$\frac{n^{\gamma-1}}{Q_n^\gamma} \sum_{k=0}^{n-1} q_k^\gamma = O(1), \text{ ahol } 1 < \gamma \le 2.$$

Ha $(q_k : k \in \mathbb{N})$ növekvő, akkor

$$\|t_n^w(f) - f\|_p \le \frac{5}{2Q_n} \sum_{j=0}^{|n|-1} 2^j q_{n-2^j}\omega_p\left(f, \frac{1}{2^j}\right) + c\omega_p\left(f, \frac{1}{2^{|n|}}\right),$$

míg ha $(q_k : k \in \mathbb{N})$ csökkenő, akkor

$$\begin{aligned}\|t_n^w(f) - f\|_p \le & \frac{5}{2Q_n} \sum_{j=0}^{|n|-1} (Q_{n-2^j-1} - Q_{n-2^{j+1}-1})\omega_p\left(f, \frac{1}{2^j}\right) \\ & + c\omega_p\left(f, \frac{1}{2^{|n|}}\right).\end{aligned}$$

3. Blahota és Nagy K. hasonló egyenlőtlenségeket igazoltak a mátrix transzformációs közepek esetén. A mi jelöléseinkkel mondjuk ki a következő

tételt.

Legyen $f \in L_p(G)$, ahol $1 \leq p \leq \infty$. Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $(t_{k,n} : 1 \leq k \leq n)$ nemnegatív számok véges sorozata úgy, hogy

$$\sum_{k=1}^{n} t_{k,n} = 1$$

teljesül.

a) Ha a $(t_{k,n} : 1 \leq k \leq n)$ véges sorozat rögzített n esetén növekvő, és a

$$t_{n,n} = O\left(\frac{1}{n}\right)$$

feltétel teljesül, akkor

$$\left\|\sigma_n^{wT}(f) - f\right\|_p \leq 5 \sum_{j=0}^{|n|-1} 2^j t_{2^{j+1}-1,n} \omega_p\left(f, \frac{1}{2^j}\right) + c\omega_p\left(f, \frac{1}{2^{|n|}}\right).$$

b) Ha a $(t_{k,n} : 1 \leq k \leq n)$ véges sorozat rögzített n esetén csökkenő, akkor

$$\left\|\sigma_n^{wT}(f) - f\right\|_p \leq 5 \sum_{j=0}^{|n|-1} 2^j t_{2^j,n} \omega_p\left(f, \frac{1}{2^j}\right) + c\omega_p\left(f, \frac{1}{2^{|n|}}\right).$$

4. Areshidze és Tephnadze bizonyították a következő állítást. Belátták továbbá (növekvő esetre) az első motiváló eredményt is, konkrét együtthatóval és az abban szereplő feltétel nélkül.

   Legyen $f \in L_p(G)$, $1 \leq p < \infty$ és legyen t_n^w egy reguláris Nörlund-közép, amelyet $(q_k : k \in \mathbb{N})$ növekvő sorozattal generálunk. Akkor

$$\|t_n^w(f) - f\|_p \leq 18 \sum_{k=0}^{|n|-1} 2^k \frac{q_{n-2^k}}{Q_n} \omega_p\left(f, \frac{1}{2^k}\right) + 12\omega_p\left(f, \frac{1}{2^{|n|}}\right).$$

A disszertáció Walsh–Paley- és Walsh–Kaczmarz-rendszerekkel foglalkozó fejezetében az alábbi fontosabb állításokat bizonyítottuk.

Normabecslések

1.1. Tétel. Legyen $f \in L_p(G)$ és $1 \leq p \leq \infty$. Minden $n \in \mathbb{N}$-re legyen $(t_{k,n} : 1 \leq k \leq n)$ nemnegatív számok véges sorozata úgy, hogy

$$\sum_{k=1}^{n} t_{k,n} = 1.$$

Ha a $(t_{k,n} : 1 \leq k \leq n)$ véges sorozat rögzített n esetén csökkenő, akkor

$$\left\|\sigma_n^{wT}(f) - f\right\|_p \leq \frac{31}{15} \sum_{k=0}^{|n|-1} 2^k t_{2^k,n} \omega_p\left(f, \frac{1}{2^k}\right) + \frac{47}{30}\omega_p\left(f, \frac{1}{2^{|n|}}\right)$$

teljesül.

1.2. Tétel. Legyen a $(t_{k,2^n} : 1 \leq k \leq 2^n)$ nemnegatív számok véges sorozata minden rögzített $n \in \mathbb{N}$ esetén növekvő és legyen

$$\sum_{k=1}^{2^n} t_{k,2^n} = 1.$$

Ekkor tetszőleges $f \in L_p(G)$, $1 \leq p < \infty$ esetén a következő egyenlőtlenséget kapjuk

$$\begin{aligned}\left\|\sigma_{2^n}^{wT}(f) - f\right\|_p \leq &\sum_{s=0}^{n-1} \frac{2^s}{2^n}\omega_p\left(f, \frac{1}{2^s}\right) \\ &+ 3\sum_{s=0}^{n-1}(n-s)2^s t_{2^n-2^s+1,n}\omega_p\left(f, \frac{1}{2^s}\right) \\ &+ \left(2 + \frac{1}{2^n}\right)\omega_p\left(f, \frac{1}{2^n}\right).\end{aligned}$$

1.3. Tétel. Legyen minden rögzített $n \in \mathbb{P}$ esetén a $(t_{k,n} : 1 \leq k \leq n)$ nemnegatív számok véges sorozata növekvő és feltételezzük, hogy

$$\sum_{k=1}^{n} t_{k,n} = 1$$

és

$$t_{n,n} = O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Ekkor tetszőleges $f \in L_p(G)$, $1 \leq p < \infty$ esetén a következő egyenlőtlenséget kapjuk

$$\left\|\sigma_n^{wT}(f) - f\right\|_p \leq c \sum_{k=0}^{|n|} \frac{2^k}{2^{|n|}} \omega_p\left(f, \frac{1}{2^k}\right).$$

1.4. Tétel. Legyen $f \in L_p(G)$, $1 \leq p \leq \infty$ és legyen minden $n \in \mathbb{P}$-re $(t_{k,n} : 1 \leq k \leq n)$ nemnegatív számok véges sorozata úgy, hogy

$$\sum_{k=1}^{n} t_{k,n} = 1$$

teljesül.
a) Legyen $(t_{k,n} : 1 \leq k \leq n)$ véges sorozat minden n-re növekvő és teljesüljön a

$$t_{n,n} = O\left(\frac{1}{n}\right)$$

feltétel. Ekkor

$$\left\|\sigma_n^{\kappa T}(f) - f\right\|_p \leq \frac{31}{15} \sum_{j=0}^{|n|-1} 2^j t_{2^{j+1}-1,n} \omega_p\left(f, \frac{1}{2^j}\right) + c\omega_p\left(f, \frac{1}{2^{|n|}}\right).$$

b) Legyen $(t_{k,n} : 1 \leq k \leq n)$ véges sorozat minden n-re csökkenő, ekkor

$$\left\|\sigma_n^{\kappa T}(f) - f\right\|_p \leq \frac{31}{15} \sum_{j=0}^{|n|-1} 2^j t_{2^j,n} \omega_p\left(f, \frac{1}{2^j}\right) + \frac{47}{30} \omega_p\left(f, \frac{1}{2^{|n|}}\right).$$

Normakonvergencia

1.5. Tétel. Legyen $f \in L_1(G)$. Minden $n \in \mathbb{P}$-re legyen $(t_{k,n} : 1 \leq k \leq n)$ nemnegatív számok véges sorozata, melyre

$$\sum_{k=1}^{n} t_{k,n} = 1$$

és

$$\lim_{n\to\infty} t_{k,n} = 0$$

bármely rögzített k esetén.

Ha létezik egy c abszolút állandó, amelyre

$$\left\| K_n^{\kappa T} \right\|_1 \leq c,$$

akkor teljesül az L_1-beli normakonvergencia

$$\sigma_n^{\kappa T}(f) \to f,$$

amint $n \to \infty$.

1.6. Következmény. Legyen $n \in \mathbb{P}$ és legyen $(t_{k,n} : 1 \leq k \leq n)$ nemnegatív számok véges sorozata úgy, hogy

$$\sum_{k=1}^{n} t_{k,n} = 1.$$

Tegyük fel, hogy az alábbiak közül valamelyik teljesül.
a) Ha a $(t_{k,n} : 1 \leq k \leq n)$ véges sorozat rögzített n esetén növekvő, akkor feltételezzük, hogy

$$t_{n,n} = O\left(\frac{1}{n}\right).$$

b) Ha a $(t_{k,n} : 1 \leq k \leq n)$ véges sorozat rögzített n esetén csökkenő, akkor feltételezzük, hogy

$$\lim_{n\to\infty} t_{1,n} = 0.$$

Ekkor mindkét esetben teljesül az L_1-beli normakonvergencia

$$\sigma_n^{\kappa T}(f) \to f,$$

amint $n \to \infty$.

1.7. Tétel. Legyen $f \in \mathrm{Lip}(\alpha, p, G)$ valamely $\alpha > 0$ esetén és legyen $1 \leq p \leq \infty$. Legyen minden $n \in \mathbb{P}$-re $(t_{k,n} : 1 \leq k \leq n)$ nemnegatív számok véges sorozata úgy, hogy

$$\sum_{k=1}^{n} t_{k,n} = 1$$

teljesül. Legyen továbbá a $(t_{k,n} : 1 \leq k \leq n)$ nemnegatív számok véges sorozata minden $n \in \mathbb{P}$ esetén növekvő a

$$t_{n,n} = O\left(\frac{1}{n}\right)$$

feltétellel. Ekkor a következő becslés teljesül

$$\left\|\sigma_n^{\kappa T}(f) - f\right\|_p = \begin{cases} O(n^{-\alpha}), & \text{ha } 0 < \alpha < 1, \\ O(\log n/n), & \text{ha } \alpha = 1, \\ O(1/n), & \text{ha } \alpha > 1. \end{cases}$$

2. Vilenkin-rendszer

A Walsh-függvények diadikus reprezentációjának általánosításai a Vilenkin-rendszerek. Ha a generáló sorozat korlátos, akkor a Vilenkin-rendszerekkel kapcsolatos állítások gyakran analógak a Walsh–Paley esetekkel, nemkorlátos esetben viszont komoly eltérések mutatkoznak mind az állítások tartalmában, mind a bizonyítási eljárások részleteiben.

Bevezetjük a Vilenkin-rendszer tárgyalásához szükséges fogalmakat, tételeket. Norma- és majdnem mindenütt való konvergenciatételeket igazolunk, valamint integrálható függvények Vilenkin–Fourier-sorozathoz tartozó mátrix transzformációs közepeinek konvergenciáját tárgyaljuk Vilenkin–Lebesgue-pontokban.

Ahogy látni fogjuk, a bevezetett fogalmak analógiát mutatnak az előző fejezetben lévő fogalmakkal (aminek az az alapja, hogy a Vilenkin-rendszer a Walsh-rendszer egy általánosítása).

Jelölések és definíciók

Legyen $m := (m_0, m_1, \dots)$ 2-nél nem kisebb pozitív egész számok sorozata. Jelölje $\mathbb{Z}_{m_n} := \{0, 1, \dots, m_n - 1\}$ a természetes számok additív csoportját moduló m_n, ahol $n \in \mathbb{N}$. Ezen $\mathbb{Z}_{m_n}$ diszkrét ciklikus csoportok direkt szorzataként definiáljuk a G_m Vilenkin-csoportot. A G_m-en végzett csoportművelet a koordinátánkénti összeadás moduló m_n.

A direkt szorzaton bevezetett μ mértéket a

$$\mu_n(\{j\}) := 1/m_n \; (j \in \mathbb{Z}_{m_n})$$

mértékek direkt szorzataként definiáljuk, ami Haar-mérték és valószínűségi mérték G_m-en, azaz $\mu(G_m) = 1$.

Ha az m sorozat korlátos, akkor G_m-et korlátos, egyébként nem korlátos Vilenkin-csoportnak nevezzük. A fejezetben feldolgozott cikkeinkben és így az egész disszertációban csak a korlátos esettel foglalkozunk. Megemlítjük, hogy $m = (2, 2, \dots)$ esetén G-t, a diadikus csoportot kapjuk. G_m elemei az

$$x := (x_0, x_1, \dots, x_n, \dots) \; (x_n \in \mathbb{Z}_{m_n})$$

számsorozatokkal reprezentálhatóak. A diadikus intervallumok definiálása a következő módon történik

$$I_0(x) := G_m,$$

$$I_n(x) := \{y \in G_m \mid y_0 = x_0, \dots, y_{n-1} = x_{n-1}\} \ (x \in G_m, n \in \mathbb{P}).$$

Az m sorozaton alapuló ún. általánosított, m-adikus számrendszert az alábbi módon definiáljuk

$$M_0 := 1, \ M_{n+1} := m_n M_n \ (n \in \mathbb{N}).$$

Ekkor minden $n \in \mathbb{N}$ egyértelműen előállítható $n = \sum_{k=0}^{\infty} n_k M_k$ alakban, ahol $n_k \in \mathbb{Z}_{m_k}$ $(k \in \mathbb{N})$ és csak véges sok n_k különbözik nullától. Jelölje $|n|$ azt a természetes számot (n rendje), amelyre $M_{|n|} \leq n < M_{|n|+1}$.

Jelölje $L_p(G_m)$ a Lebesgue-teret G_m-en (a megfelelő $\|.\|_p$ normákkal) és $C(G_m)$ jelölje a folytonos függvények terét G_m-en az $\|f\|_\infty := \sup\{|f(x)| : x \in G_m\}$ normával.

Legyen

$$\omega_p(f, \delta) := \sup_{|x|<\delta} \|f(\cdot - x) - f(\cdot)\|_p$$

a folytonossági modulus $L_p(G_m)$-en, ahol $1 \leq p < \infty$, $f \in L_p(G_m)$ és $\delta > 0$, valamint

$$|x| := \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x_i}{M_{i+1}} \quad \text{minden } x \in G_m \text{ esetén.}$$

Ennek analógiájára definiáljuk a folytonossági modulust $C(G_m)$-en, ezt $\omega_\infty(f, \delta)$ jelölje.

Az előző fejezet fogalmaihoz hasonlóan bevezetjük a $\mathrm{Lip}(\alpha, p, G_m)$ és $\mathrm{Lip}(\alpha, C(G_m))$ osztályokat (amennyiben $1 \leq p < \infty$) és a

$$\mathrm{Lip}(\alpha, \infty, G_m) := \mathrm{Lip}(\alpha, C(G_m))$$

jelölést.

Bevezetünk G_m-en egy ortonormált rendszert, amelyet Vilenkin-rendszernek nevezünk. Ehhez definiáljuk az $r_k(x) : G_m \to \mathbb{C}$, komplex értékű függvényeket, azaz az úgynevezett általánosított Rademacher-függvényeket úgy, hogy

$$r_k(x) := \exp(2\pi \imath x_k / m_k) \ \left(\imath^2 = -1, \ x \in G_m, \ k \in \mathbb{N}\right).$$

A $\psi := (\psi_n : n \in \mathbb{N})$ függvénysorozatot G_m-en, ahol

$$\psi_n(x) := \prod_{k=0}^{\infty} r_k^{n_k}(x) \quad (n \in \mathbb{N})$$

Vilenkin-rendszernek nevezzük.

Amennyiben $m = (2, 2, \dots)$, speciálisan a Walsh–Paley-rendszert kapjuk. A Vilenkin-rendszer ortonormált és teljes $L_1(G_m)$-ben. A Vilenkin-rendszer elemei pontosan azok az $f \colon G_m \to \mathbb{C}$ folytonos függvények, melyekre

$$f(x + y) = f(x)f(y)$$

és $|f(x)| = 1$ minden $x, y \in G_m$ esetén. Sőt, ez akkor és csak akkor teljesül, ha $f(x) = \psi_n(x)$ valamely $n \in \mathbb{N}$ esetén.

A továbbiakban a Vilenkin–Fourier-analízissel kapcsolatos klasszikus fogalmakat vezetjük be. Definiáljuk az f függvény n-edik Vilenkin–Fourier-együtthatóját, Vilenkin–Fourier-sorának n-edik részletösszegét, az n-dik Vilenkin–Fejér-közepet és az n-edik Vilenkin–Dirichlet-féle magfüggvényt:

$$\hat{f}(n) := \int_{G_m} f \bar{\psi}_n d\mu \text{ , ha } n \in \mathbb{N},$$

$$S_n(f) := \sum_{k=0}^{n-1} \hat{f}(k)\psi_k, \;\; \sigma_n(f) := \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} S_k(f), \;\; D_n := \sum_{k=0}^{n-1} \psi_k,$$

ahol $n \in \mathbb{P}$. Ismert, hogy

$$S_n(f; x) = \int_{G_m} f(u) D_n(x - u) d\mu(u).$$

A Fejér-féle magfüggvényt a Dirichlet-féle magfüggvények számtani közepeként definiáljuk, azaz

$$K_n := \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} D_k.$$

A Walsh-rendszernél bevezetett T-mátrix és a hozzá kapcsolódó definíciók és jelölések a Vilenkin-rendszerre is használhatók.

Könnyen belátható, hogy

$$\sigma_n^T(f;x) = \int_{G_m} f(u) K_n^T(x-u) d\mu(u).$$

Definiáljuk az $(\tilde{n}, n)$-edik de La Vallée Poussin-típusú mátrix transzformációs közepet a következő módon

$$\sigma_{\tilde{n},n}^T(f;x) := \sum_{k=\tilde{n}}^{n} t_{k,n} S_k(f;x),$$

ahol $\tilde{n}, n \in \mathbb{P}$ és $\tilde{n} \leq n$. Az $(\tilde{n}, n)$-edik de La Vallée Poussin-típusú mátrix transzformációs mag legyen

$$K_{\tilde{n},n}^T(x) := \sum_{k=\tilde{n}}^{n} t_{k,n} D_k(x).$$

Az is könnyen ellenőrizhető, hogy

$$\sigma_{\tilde{n},n}^T(f;x) = \int_{G_m} f(u) K_{\tilde{n},n}^T(x-u) d\mu(u).$$

Megjegyezzük továbbá, hogy ebben a fejezetben a c (rögzített m sorozat esetén) egy pozitív abszolút konstanst jelöl.

A disszertáció korlátos Vilenkin-rendszerekkel foglalkozó fejezetében az alábbi fontosabb állításokat bizonyítottuk.

Majdnem mindenütti konvergencia

2.1. Tétel. Minden $n \in \mathbb{P}$-re $(t_{k,n} : 1 \leq k \leq n)$ nemnegatív számok véges sorozata esetén legyen

$$\sum_{k=1}^{n} t_{k,n} = 1.$$

Tegyük fel, hogy $f \in L_1(G_m)$ és az $x \in G_m$ pontban

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n(f;x) = f(x).$$

a) Legyen $(t_{k,n} : 1 \leq k \leq n)$ nemnegatív számok véges sorozata minden n esetén csökkenő és teljesüljön

$$\lim_{n\to\infty} t_{1,n} = 0,$$

vagy

b) legyen $(t_{k,n} : 1 \leq k \leq n)$ nemnegatív számok véges sorozata minden n esetén növekvő. Ez esetben azt feltételezzük, hogy

$$t_{n,n} = O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Ekkor mindkét esetben

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n^T(f;x) = f(x).$$

2.2. Következmény. Legyen $f \in L_1(G_m)$. Minden $n \in \mathbb{P}$-re $(t_{k,n} : 1 \leq k \leq n)$ nemnegatív számok véges sorozata esetén legyen

$$\sum_{k=1}^{n} t_{k,n} = 1.$$

a) Legyen $(t_{k,n} : 1 \leq k \leq n)$ nemnegatív számok véges sorozata minden n esetén csökkenő és teljesüljön

$$\lim_{n\to\infty} t_{1,n} = 0,$$

vagy

b) legyen $(t_{k,n} : 1 \leq k \leq n)$ nemnegatív számok véges sorozata minden n esetén növekvő. Ez esetben azt feltételezzük, hogy

$$t_{n,n} = O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Ekkor mindkét esetben

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n^T(f;x) = f(x)$$

minden x folytonossági vagy Vilenkin–Lebesgue-pontban.

2.3. Tétel. Legyen $f \in L_1(G_m)$. Minden $n \in \mathbb{P}$-re legyen $(t_{k,M_{n+1}-1} : M_n \leq k \leq M_{n+1}-1)$ nemnegatív számok véges sorozata úgy, hogy

$$\sum_{k=M_n}^{M_{n+1}-1} t_{k,M_{n+1}-1} = 1.$$

Ha a $(t_{k,M_{n+1}-1} : M_n \leq k \leq M_{n+1}-1)$ sorozat minden rögzített n esetén növekvő vagy csökkenő (különböző n-ekre nem feltétlenül ugyanabban az értelemben), továbbá feltesszük, hogy

$$t_{M_n,M_{n+1}-1} = O\left(\frac{1}{M_n}\right)$$

és

$$t_{M_{n+1}-1,M_{n+1}-1} = O\left(\frac{1}{M_n}\right).$$

Akkor

$$\sigma^T_{M_n,M_{n+1}-1}(f) \to f$$

majdnem mindenütt.

Normabecslések

2.4. Tétel. Legyen $f \in L_1(G_m)$. Minden $n \in \mathbb{P}$-re legyen $(t_{k,M_{n+1}-1} : M_n \leq k \leq M_{n+1} - 1)$ nemnegatív számok véges sorozata úgy, hogy

$$\sum_{k=M_n}^{M_{n+1}-1} t_{k,M_{n+1}-1} = 1.$$

Ezenkívül tegyük fel, hogy a $(t_{k,M_{n+1}-1} : M_n \leq k \leq M_{n+1} - 1)$ rögzített n-re monoton, és megfelel a következő feltételek egyikének.

a) Vagy $(t_{k,M_{n+1}-1} : M_n \leq k \leq M_{n+1} - 1)$ növekvő és

$$t_{M_{n+1}-1,M_{n+1}-1} = O\left(\frac{1}{M_n}\right),$$

b) vagy $(t_{k,M_{n+1}-1} : M_n \leq k \leq M_{n+1} - 1)$ csökkenő.

Ekkor mindkét esetben

$$\left\|\sigma^T_{M_n,M_{n+1}-1}(f) - f\right\|_1 \leq c\omega_1\left(f, \frac{1}{M_n}\right)$$

teljesül.

2.5. Tétel. Legyen $f \in L_p(G_m)$, $1 < p < \infty$ és $n \in \mathbb{P}$. Legyen $(t_{k,M_{n+1}-1} : M_n \leq k \leq M_{n+1} - 1)$ nemnegatív számok véges sorozata. Feltételezzük, hogy

$$\sum_{k=M_n}^{M_{n+1}-1} t_{k,M_{n+1}-1} = 1$$

teljesül. Ekkor

$$\left\|\sigma^T_{M_n,M_{n+1}-1}(f) - f\right\|_p \leq c_p\omega_p\left(f, \frac{1}{M_n}\right),$$

ahol c_p csak p-től függ.

2.6. Következmény. Tegyük fel, hogy a $p = 1$ esetén a 2.4. Tétel feltételei, $1 < p < \infty$ esetén a 2.5. Tétel feltételei teljesülnek. Ha $f \in \mathrm{Lip}(\alpha, p, G_m)$, akkor

$$\left\| \sigma^T_{M_n, M_{n+1}-1}(f) - f \right\|_p = O\left(\frac{1}{M_n^\alpha} \right).$$

Normakonvergencia

2.7. Tétel. Legyen $f \in L_1(G_m)$ és minden $n \in \mathbb{N}$ esetén,$(t_{k,n} : 1 \leq k \leq n)$ nemnegatív számok véges sorozata úgy, hogy

$$\sum_{k=1}^{n} t_{k,n} = 1$$

teljesül.

a) Ha $(t_{k,n} : 1 \leq k \leq n)$ nemnegatív számok véges sorozata minden n esetén csökkenő és

$$\lim_{n \to \infty} t_{1,n} = 0,$$

vagy

b) ha $(t_{k,n} : 1 \leq k \leq n)$ nemnegatív számok véges sorozata minden n esetén növekvő és

$$t_{n,n} = O\left(\frac{1}{n} \right),$$

akkor teljesül az L_1-beli normakonvergencia $\sigma^T_n(f) \to f$.

2.8. Tétel. Legyen $n \in \mathbb{P}$ és $(t_{k,M_{n+1}-1} : M_n \leq k \leq M_{n+1} - 1)$ nemnegatív számok véges sorozata úgy, hogy

$$\sum_{k=M_n}^{M_{n+1}-1} t_{k,M_{n+1}-1} = 1.$$

Ezenkívül tegyük fel, hogy a $(t_{k,M_{n+1}-1} : M_n \leq k \leq M_{n+1} - 1)$ minden rögzített n-re monoton és megfelel a következő feltételek egyikének.

a) Vagy $(t_{k,M_{n+1}-1} : M_n \leq k \leq M_{n+1}-1)$ növekvő és

$$t_{M_{n+1}-1,M_{n+1}-1} = O\left(\frac{1}{M_n}\right),$$

b) vagy $(t_{k,M_{n+1}-1} : M_n \leq k \leq M_{n+1}-1)$ csökkenő és

$$t_{M_n,M_{n+1}-1} = O\left(\frac{1}{M_n}\right).$$

Ekkor mindkét esetben létezik c abszolút állandó, melyre teljesül a

$$\left\|K^T_{M_n,M_{n+1}-1}\right\|_1 \leq c$$

egyenlőtlenség.

2.9. Tétel. Legyen $f \in L_1(G_m)$. Minden $n \in \mathbb{P}$-re legyen $(t_{k,M_{n+1}-1} : M_n \leq k \leq M_{n+1}-1)$ nemnegatív számok véges sorozata úgy, hogy

$$\sum_{k=M_n}^{M_{n+1}-1} t_{k,M_{n+1}-1} = 1.$$

Ha létezik c abszolút állandó, melyre

$$\left\|K^T_{M_n,M_{n+1}-1}\right\|_1 \leq c,$$

akkor teljesül az L_1-beli normakonvergencia

$$\sigma^T_{M_n,M_{n+1}-1}(f) \to f.$$

A következő állítás az előző két tétel következménye.

2.10. Következmény. Legyen $n \in \mathbb{P}$ és $(t_{k,M_{n+1}-1} : M_n \leq k \leq M_{n+1}-1)$ nemnegatív számok véges sorozata úgy, hogy

$$\sum_{k=M_n}^{M_{n+1}-1} t_{k,M_{n+1}-1} = 1.$$

Ezenkívül tegyük fel, hogy a $(t_{k,M_{n+1}-1} : M_n \leq k \leq M_{n+1}-1)$ rögzített n-re monoton és megfelel a következő feltételek egyikének.

a) Vagy $(t_{k,M_{n+1}-1} : M_n \leq k \leq M_{n+1}-1)$ növekvő és

$$t_{M_{n+1}-1,M_{n+1}-1} = O\left(\frac{1}{M_n}\right),$$

b) vagy $(t_{k,M_{n+1}-1} : M_n \leq k \leq M_{n+1}-1)$ csökkenő és

$$t_{M_n,M_{n+1}-1} = O\left(\frac{1}{M_n}\right).$$

Ekkor mindkét esetben teljesül az

$$\sigma^T_{M_n,M_{n+1}-1}(f) \to f$$

L_1-beli normakonvergencia.

Bibliography – Bibliográfia

[1] G. H. Agaev, N. J. Vilenkin, G. M. Dzhafarli, and A. I. Rubinstein, Multiplicative systems of functions and harmonic analysis on 0-dimensional groups. (Russian), Izd. ("ELM"), Baku, 1981

[2] N. Anakidze, N. Areshidze, and L. Baramidze, *Approximation by Nörlund means with respect to Vilenkin system in Lebesgue spaces*, Acta Math. Hungar. **172** (2), (2024) 529–542.

[3] N. Anakidze, N. Areshidze, L-E. Persson, and G. Tephnadze, *Approximation by T means of Walsh–Fourier series in Lebesgue spaces and Lipschitz classes*, Annales Univ. Sci. Budapest., Sect. Comp. **56**, (2024) 53–68.

[4] N. Areshidze and G. Tephnadze, *Approximation by Nörlund means with respect to Walsh system in Lebesgue spaces*, Math. Inequal. Appl. **27** (1), (2024) 137–147.

[5] M. Avdispahić and M. Pepić, *Summability and integrability of Vilenkin series*, Collect. Math. **51** (3), (2000) 237–254.

[6] D. Baramidze, Z. Dvalashvili, and G. Tutberidze, *Convergence of Nörlund means with respect to Vilenkin systems of integrable functions*, Mem. Differential Equations Math. Phys. **86**, (2022) 1–14.

[7] D. Baramidze, N. Gogolashvili, and N. Nadirashvili, *Convergence of T means with respect to Vilenkin systems of integrable functions*, Georgian Math. J. **29** (4), (2022) 481–491.

[8] L. Baramidze, L-E. Persson, G. Tephnadze, and P. Wall, *Sharp $H_p - L_p$ type inequalities of weighted maximal operators of Vilenkin–Nörlund means and its applications*, J. Inequal. Appl. **242**, (2016)

[9] D. Baramidze, L-E. Persson, H. Singh, and G. Tephnadze, *Some new results and inequalities for subsequences of Nörlund logarithmic means of Walsh–Fourier series*, J. Inequal. Appl. **30**, (2022)

[10] I. Blahota, *Approximation by subsequences of matrix transform mean of Walsh–Fourier series*, Real Anal. Exchange **48** (1), (2023) 107–118.

[11] I. Blahota, *Approximation by a special de la Vallée Poussin type matrix transform mean of Walsh–Fourier series*, Miskolc Math. Notes **24** (3), (2023) 1213–1221.

[12] I. Blahota, *Norm convergence of subsequences of matrix transform means of Walsh–Fourier series*, Period. Math. Hung. **89**, (2024) 72–85

[13] I. Blahota and G. Gát, *Norm summability of Nörlund logarithmic means on unbounded Vilenkin groups*, Anal. Theory Appl., Mathematica **24** (1), (2008) 1–17.

[14] I. Blahota and G. Gát, *On the rate of approximation by generalized de la Vallée Poussin type matrix transform means of Walsh–Fourier series*, P-Adic Numbers, Ultrametric Anal. App. **14** (1), (2022) S59–S73.

[15] I. Blahota and G. Gát, *Norm and almost everywhere convergence of matrix transform means of Walsh–Fourier series*, Acta Univ. Sapientiae, Mathematica **15** (2), (2023) 244–258.

[16] I. Blahota and D. Nagy, *Approximation by a special de la Vallée Poussin type matrix transform mean of Vilenkin–Fourier series*, Anal. Math. **50** (3), (2024) 939–957.

[17] I. Blahota and D. Nagy, *Convergence of matrix transform means with respect to the Walsh–Kaczmarz system*, J. Appl. Anal. **31** (1), (2024) 1–13.

[18] I. Blahota and D. Nagy, *Convergence of matrix transform means with respect to Vilenkin systems*, Miskolc Math. Notes, elfogadva

[19] I. Blahota and D. Nagy, *Approximation by matrix transform means with respect to the Walsh system in Lebesgue spaces*, Publi. Math. Debrecen, elfogadva

[20] I. Blahota and K. Nagy, *Approximation by Θ-means of Walsh–Fourier series*, Anal. Math. **44** (1), (2018) 57–71.

[21] I. Blahota and K. Nagy, *Approximation by matrix transform of Vilenkin–Fourier series*, Publi. Math. Debrecen **99** (1-2), (2021) 223–242.

[22] I. Blahota and K. Nagy, *Approximation by Marcinkiewicz type matrix transform of Vilenkin–Fourier series*, Mediterr. J. Math. **19** (4), 165, (2022)

[23] I. Blahota, K. Nagy, and M. Salim, *Approximation by Θ-means of Walsh–Fourier series in dyadic Hardy spaces and dyadic homogeneous Banach spaces*, Anal. Math. **47**, (2021) 285–309.

[24] I. Blahota, K. Nagy, and G. Tephnadze, *Approximation by Marcinkiewicz Θ-means of double Walsh–Fourier series*, Math. Ineq. and Appl. **22** (3), (2019) 837–853.

[25] S. L. Blyumin, *Linear summability methods for Fourier series in multiplicative systems*, Sibirsk. Mat. Zh. **9** (2), (1968) 449–455.

[26] P. Chandra, *On the degree of approximation of a class of functions by means of Fourier series*, Acta Math. Hungar. **52**, (3-4) (1988) 199–205.

[27] A. V. Efimov, *On some approximation properties of periodic multiplicative orthonormal systems*, Mat. Sb. **69**, (1966) 354–370. (in Russian)

[28] T. Eisner, *The Θ-summation on local fields*, Ann. Univ. Sci. Budapest. Sect. Comput. **33**, (2011) 137–160.

[29] N. J. Fine, *On the Walsh functions*, Trans. Amer. Math. Soc. **65** (3), (1949) 372–414.

[30] S. Fridli, P. Manchanda, and A. H. Siddiqi, *Approximation by Walsh–Nörlund means*, Acta Sci. Math. **74**, (2008) 593–608.

[31] G. Gát, *On almost even arithmetical functions via orthonormal systems on Vilenkin groups*, Acta Arith. **49** (2), (1991) 105–123.

[32] G. Gát and R. Toledo, *L_p-norm convergence of series in compact totally disconnected groups*, Analysis Math. **22**, (1996) 13–24.

[33] G. Gát, *On $(C, 1)$ summability of integrable functions on compact totally disconnected spaces*, Studia Math. **144**, (2) (2001), 101–120.

[34] G. Gát, *On $(C, 1)$ summability of integrable functions with respect to the Walsh–Kaczmarz system*, Studia Math. **130** (2), (1998) 135–148.

[35] G. Gát, *Pointwise convergence of the Fejér means of functions on unbounded Vilenkin groups*, J. Approx. Theory **101** (1), (1999) 1–36.

[36] G. Gát, *Cesàro means of integrable functions with respect to unbounded Vilenkin systems*, J. Approx. Theory **124** (1), (2003) 24–43.

[37] G. Gát and U. Goginava, *A weak type inequality for the maximal operator of (C, α)-means of Fourier series with respect to the Walsh–Kaczmarz system*, Acta Math. Hungar. **125** (1-2), (2009) 65–83.

[38] G. Gát and U. Goginava, *Maximal operators of Cesàro means with varying parameters of Walsh–Fourier series*, Acta Math. Hungar. **159** (2), (2019) 653–668.

[39] G. Gát, U. Goginava, and K. Nagy, *On the Marcinkiewicz-Fejér means of double Fourier series with respect to the Walsh–Kaczmarz system*, Studia Sci. Math. Hungar. **46** (3), (2009) 399–421.

[40] U. Goginava, *On the approximation properties of Cesàro means of negative order of Walsh–Fourier series*, J. Approx. Theory **115**, (2002) 9–20.

[41] U. Goginava and L. Gogoladze, *Pointwise summability of Vilenkin–Fourier series*, Publ. Math. Debrecen **79** (1-2), (2011) 89–108.

[42] U. Goginava and K. Nagy, *Matrix summability of Walsh–Fourier series*, Mathematics **10** (14), (2022) 2458.

[43] E. Hewitt and K. Ross, Abstract Harmonic Analysis, Springer–Verlag I, II, Heidelberg, 1963

[44] T. V. Iofina and S. S. Volosivets, *On the degree of approximation by means of Fourier–Vilenkin series in Hölder and L_p norm*, East J. Approx. **15** (2), (2009) 143–158.

[45] M. A. Jastrebova, *On approximation of functions satisfying the Lipschitz condition by arithmetic means of their Walsh–Fourier series*, Mat. Sb. **71**, (1966) 214–226. (in Russian)

[46] A. Joudeh and G. Gát, *Almost everywhere convergence of Cesàro means with varying parameters of Walsh-Fourier series*, Miskolc Math. Notices **19** (1), (2018) 303–317.

[47] S. Kaczmarz, *Sur la convergence et la sommabilité des développements orthogonaux*, Studia Math. **1** (1), (1929) 87–121.

[48] L. Leindler, *On the degree of approximation of continuous functions*, Acta Math. Hungar. **104** (1-2), (2004) 105–113.

[49] N. Memić, *Almost everywhere convergence of some subsequences of the Nörlund logarithmic means of Walsh–Fourier series*, Analysis Mathematica **41** (1), (2015) 45–54.

[50] N. Memić, L-E. Persson, and G. Tephnadze, *A note on the maximal operators of Vilenkin–Nörlund means with non-increasing coefficients*, Studia Sci. Math. Hungar. **53** (4), (2016) 545–556.

[51] C. N. Moore, Summable Series and Convergence Factors, American Mathematical Society Colloquium Publications **22**, Providence, RI, 1938

[52] F. Móricz, B. E. Rhoades, *Approximation by weighted means of Walsh–Fourier series*, Int. J. Math. Sci. **19** (1), (1996) 1–8.

[53] F. Móricz and A. Siddiqi, *Approximation by Nörlund means of Walsh–Fourier series*, J. Approx. Theory **70**, (1992) 375–389.

[54] N. Nadirashvili, L-E. Persson, G. Tephnadze, and F. Weisz, *Vilenkin–Lebesgue points and almost everywhere convergence for some classical summability methods*, Mediterr. J. Math. **19**, (2022) 239.

[55] K. Nagy, *Approximation by weighted means of Walsh-Kaczmarz-Fourier series*, Rend. Circ. Mat. Palermo (2), **82**, (2010) 387–406.

[56] K. Nagy, *Approximation by Nörlund means of quadratical partial sums of double Walsh–Fourier series*, Anal. Math. **36** (4), (2010) 299–319.

[57] K. Nagy, *Approximation by Nörlund means of Walsh–Kaczmarz–Fourier series*, Georgian Math. J. **18** (1), (2011) 147–162.

[58] G. I. Natanson and V. V. Zuk, Trigonometric Fourier Series and Approximation Theory, Izdat. Leningrad Unta, Leningrad, 1983 (in Russian)

[59] R. E. A. C. Paley, *A remarkable series of orthogonal functions*, Proc. Lond. Math. Soc. **34** (2), (1932) 241–279.

[60] L-E. Persson, G. Tephnadze, and F. Weisz, Martingale Hardy spaces and summability of one-dimensional Vilenkin–Fourier series, Springer, Berlin, 2022

[61] F. Schipp, *Pointwise convergence of expansions with respect to certain product systems*, Anal. Math. **2** (1), (1976) 65–76.

[62] F. Schipp, W. R. Wade, P. Simon, and J. Pál, Walsh Series. An Introduction to Dyadic Harmonic Analysis, Adam Hilger, Bristol-New York, 1990

[63] G. Shavardenidze, *On the convergence of Cesàro means of negative order of Vilenkin–Fourier series*, Studia Sci. Math. Hungar. **56** (1), (2019) 22–44.

[64] G. Shavardenidze and M. Totladze, *On the convergence of Cesàro means of negative order of Walsh–Fourier series*, Acta Math. Acad. Paedag. Nyíregyh. **34**, (2023) 1–8.

[65] P. Simon, (C, α) *summability of Walsh–Kaczmarz–Fourier series*, J. Approx. Theory **127** (1), (2004) 39–60.

[66] V. A. Skvortsov, *Certain estimates of approximation of functions by Cesàro means of Walsh–Fourier series*, Mat. Zametki **29**, (1981) 539–547. (in Russian)

[67] V. A. Skvortsov, *On Fourier series with respect to the Walsh–Kaczmarz system*, Anal. Math. **7** (1), (1981) 141–150.

[68] A. A. Šneĭder, *On series of Walsh functions with monotonic coefficients*, Izvestiya Akad. Nauk SSSR. Ser. Mat. **12**, (1948) 179–192. (in Russian)

[69] G. Tephnadze, *On the maximal operators of Walsh–Kaczmarz–Nörlund means*, Acta Math. Acad. Paedag. Nyíregyh. **31** (2), (2015) 259–271.

[70] T. Tepnadze, *On the approximation properties of Cesàro means of negative order of Vilenkin–Fourier series*, Studia Sci. Math. Hungar. **53** (4), (2016) 532–544.

[71] R. Toledo, *On the boundedness of the* L^1*-norm of Walsh–Fejér kernels*, Journal of Math. Anal. and Appl. **457** (1), (2018) 153–178.

[72] N. Ya. Vilenkin, *On a class of complete orthonormal systems*, Izv. Ross. Akad. Nauk Ser. Mat. **11**, (1947) 363–400. (Russian)

[73] S. S. Volosivets, *Approximation by Vallée-Poussin type means of Vilenkin–Fourier series*, P-Adic Numbers, Ultrametric Anal. App. **16** (3), (2024) 295–301.

[74] J. Walsh, *A closed set of normal orthogonal functions*, Amer. J. Math., **45** (1) (1923), 5–24.

[75] F. Weisz, *Convergence of singular integrals*, Ann. Univ. Sci. Budapest Sect. Math. **32**, (1989) 243–256.

[76] F. Weisz, Θ*-summation and Hardy spaces*, J. Approx. Theory **107**, (2000) 121–142.

[77] F. Weisz, Θ*-summability of Fourier series*, Acta Math. Hungar. **103** (1-2), (2004) 139–175.

[78] Sh. Yano, *On approximation by Walsh functions*, Proc. Amer. Math. Soc. **2**, (1951) 962–967.

[79] W. S. Young, *On the a.e. convergence of Walsh–Kaczmarz–Fourier series*, Proc. Amer. Math. Soc. **44**, (1974) 353–358.

[80] A. Zygmund, Trigonometric Series, With a foreword by Robert Fefferman. 3rd ed., Cambridge University Press I and II, Cambridge, 2002 364.

DEBRECENI EGYETEM

DEBRECENI EGYETEM
EGYETEMI ÉS NEMZETI KÖNYVTÁR
H-4002 Debrecen, Egyetem tér 1, Pf.: 400
Tel.: 52/410-443, e-mail: publikaciok@lib.unideb.hu

Nyilvántartási szám: DEENK/340/2025.PL
Tárgy: PhD Publikációs Lista

Jelölt: Nagy Dóra
Doktori Iskola: Matematika- és Számítástudományok Doktori Iskola
MTMT azonosító: 10084538

A PhD értekezés alapjául szolgáló közlemények

Idegen nyelvű tudományos közlemények hazai folyóiratban (2)

1. Blahota, I., **Nagy, D.**: Approximation by matrix transform means with respect to the Walsh system in Lebesgue spaces.
   Publ. Math. Debr. "Accepted by Publisher", 1-15, 2025. ISSN: 0033-3883.
   IF: 0.4 (2023)

2. Blahota, I., **Nagy, D.**: Convergence of matrix transform means with respect to Vilenkin systems.
   Miskolc Math. Notes. "Accepted by Publisher", 1-13, 2025. ISSN: 1787-2405.
   IF: 0.9 (2023)

Idegen nyelvű tudományos közlemények külföldi folyóiratban (2)

3. Blahota, I., **Nagy, D.**: Approximation by a special de la Vallée Poussin type matrix transform mean of Vilenkin-Fourier series.
   Anal. Math. 50 (3), 939-957, 2024. ISSN: 0133-3852.
   DOI: http://dx.doi.org/10.1007/s10476-024-00049-2
   IF: 0.6 (2023)

4. Blahota, I., **Nagy, D.**: Convergence of matrix transform means with respect to the Walsh-Kaczmarz system.
   J. Appl. Anal. 31 (1), 1-13, 2024. ISSN: 1425-6908.
   DOI: http://dx.doi.org/10.1515/jaa-2023-0161
   IF: 0.6 (2023)

A közlő folyóiratok összesített impakt faktora: 2,5
A közlő folyóiratok összesített impakt faktora (az értekezés alapjául szolgáló közleményekre): 2,5

A DEENK a Jelölt által a Tudóstérbe feltöltött adatok bibliográfiai és tudománymetriai ellenőrzését a tudományos adatbázisok és a Journal Citation Reports Impact Factor lista alapján elvégezte.

Debrecen, 2025.05.28.

Short thesis for the degree of Doctor of Philosophy (PhD)

Matrix transform means of Walsh and Vilenkin systems

written by Dóra Nagy

supervised by István Blahota, PhD

UNIVERSITY OF DEBRECEN

Doctoral School of Mathematical and Computational Sciences

Debrecen, 2025.

Introduction

The theory of harmonic analysis offers a number of mathematical tools and methods, in which orthogonal systems play an important role. The theory of orthogonal function systems (and within them Fourier series) has undergone significant development since their appearance. This dissertation deals with Fourier series, including the Walsh–Paley, Walsh–Kaczmarz and Vilenkin orthonormal systems.

Matrix transform means are common generalizations of several well-known summation methods. Namely the Riesz means, the Nörlund means, the T (weighted) means, the Fejér (or the $(C, 1)$) and the (C, α) means are special cases of the matrix transform summation method introduced above.

1. Walsh–Paley and Walsh–Kaczmarz system

In the literature, the term "Walsh function" is also used for elements of three orthonormal systems. Namely, the original Walsh, the Walsh–Paley, and the Walsh–Kaczmarz systems. These systems contain the same functions, but in different orders. Among them, in this dissertation we deal with the Walsh–Paley and Walsh–Kaczmarz systems.

We introduce the concepts necessary for the investigation of the Walsh–Paley and Walsh–Kaczmarz systems, as well as present previously known theorems.

In the case of Walsh–Paley, we deal in more detail with some approximation problems related to the Fejér kernel function, and also prove norm convergence. Next, we estimate the difference in norm between the matrix transformation centers of the Walsh–Kaczmarz–Fourier series and the corresponding function. For the estimation, we use the continuity modulus. We also state theorems for norm convergence and almost everywhere convergence under similar conditions. We generalize some results of Areshidze and Tephnadze (concerning matrix transformation means by Nörlund), and, in addition to the generalization, we improve and complement the results of Móricz and Siddiqi.

Notation and definitions

Let $\mathbb{P}$ denote the set of positive integers and $\mathbb{N} := \mathbb{P} \cup \{0\}$. Let $\mathbb{Z}_2$ denote the discrete cyclic group of group order 2. The group operation is addition modulo 2. Let every subset be open. The Haar measure μ_k is defined on the k-th $\mathbb{Z}_2$ $(k \in \mathbb{N})$ such that $\mu_k(0) := \mu_k(1) := 1/2$. Let $G := \mathop{\times}\limits_{k=0}^{\infty} \mathbb{Z}_2$ be the dyadic group (the direct product of discrete cyclic groups). The elements of G can be represented as sequences $x := (x_0, x_1, \dots, x_k, \dots)$, where $x_k \in \{0, 1\}$ for $k \in \mathbb{N}$. The group operation on G is coordinate-wise addition modulo 2 (denoted by $+$), and let μ be the normalized Haar measure, i.e., the product measure of the μ_k, and the topology is the product topology.

Dyadic intervals are defined as follows:

$$I_0(x) := G, \;\; I_n(x) := \{y \in G : y = (x_0, \dots, x_{n-1}, y_n, y_{n+1}, \dots)\},$$

where $x \in G, n \in \mathbb{P}$, and let $I_n := I_n(0)$. These intervals form a neighbourhood basis for the topology of G.

Let $L_p(G)$ denote the usual Lebesgue space on G (with the corresponding $\|.\|_p$ norms).

For the sake of notation, we agree to write $L_\infty(G)$ instead of $C(G)$, and $\|f\|_\infty := \sup\{|f(x)| : x \in G\}$. Clearly, L_∞ is not the same as the space of continuous functions but rather an appropriate subspace of it. Since the supremum norm and the L_∞ norm coincide for continuous functions, we hope that the reader will accept this notational simplification for convenience.

We introduce some concepts from Walsh–Fourier analysis.

The n-th Rademacher function at the point x is defined by

$$r_n(x) := (-1)^{x_n} \quad (x \in G, n \in \mathbb{N}).$$

Every natural number has a unique binary representation, and this representation is finite (only finitely many n_k are non-zero):

$$n = \sum_{k=0}^{\infty} n_k 2^k, \quad n_k \in \{0, 1\} \; (k \in \mathbb{N}).$$

We will also need the following notation. If $n \in \mathbb{P}$, then $|n| := \max\{j \in \mathbb{N} : n_j \neq 0\}$. This means that $2^{|n|} \leq n < 2^{|n|+1}$.

The Walsh–Paley functions are defined as follows. Let $w_0(x) := 1$, and if $n \in \mathbb{P}$, then define

$$w_n(x) := \prod_{k=0}^{\infty} r_k^{n_k}(x) = (-1)^{\sum_{k=0}^{|n|} n_k x_k}.$$

It is known that the Walsh–Paley system $(w_n, n \in \mathbb{N})$ forms the character system of $(G, +)$.

Let the modulus of continuity in $L_p(G)$ be

$$\omega_p(f, \delta) := \sup_{|t|<\delta} \|f(. + t) - f(.)\|_p ,$$

where $f \in L_p(G)$ and $\delta > 0$, and define

$$|x| := \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x_i}{2^{i+1}} \quad \text{for every } x \in G.$$

In the case where $f \in C(G)$, we replace p with ∞.

The Walsh–Kaczmarz system is introduced as follows. Let $\kappa_0 := 1$ and for $n \in \mathbb{P}$ define

$$\kappa_n(x) := r_{|n|}(x) \prod_{k=0}^{|n|-1} r_{|n|-1-k}^{n_k}(x) = r_{|n|}(x)(-1)^{\sum_{k=0}^{|n|-1} n_k x_{|n|-1-k}}.$$

It is easy to see that

$$r_n = w_{2^n} = \kappa_{2^n}$$

for all $n \in \mathbb{N}$.

The sets of Walsh–Kaczmarz and Walsh–Paley functions coincide on dyadic blocks. That is,

$$\left\{\kappa_n : 2^k \leq n < 2^{k+1}\right\} = \left\{w_n : 2^k \leq n < 2^{k+1}\right\}$$

for every $k \in \mathbb{N}$ and $\kappa_0 = w_0$.

The Walsh–Paley and Walsh–Kaczmarz systems are orthonormal and complete in $L_1(G)$.

Skvortsov established a relationship between the Walsh–Kaczmarz and Walsh–Paley functions using the transformation $\tau_n : G \to G$:

$$\tau_n(x) := (x_{n-1}, x_{n-2}, \ldots, x_1, x_0, x_n, x_{n-1}, \ldots).$$

Specifically, for every $n \in \mathbb{N}$ and $x \in G$:

$$\kappa_n(x) = r_{|n|}(x) w_{n-2^{|n|}}(\tau_{|n|}(x)).$$

It is important to note that the function $\tau_n(.)$ is measure-preserving.

The Lipschitz classes in $L_p(G)$ are as follows. For every $\alpha > 0$, let

$$\text{Lip}(\alpha, p, G) := \{f \in L_p(G) : \omega_p(f, \delta) = O(\delta^\alpha) \text{ as } \delta \to 0\}.$$

Furthermore,

$$\text{Lip}(\alpha, C(G)) := \{f \in C(G) : \ |f(x+y) - f(x)| \leq c|y|^\alpha, \ x, y \in G\}.$$

Later, for simplicity, we will write $\text{Lip}(\alpha, \infty, G)$ instead of $\text{Lip}(\alpha, C(G))$.

We define the n-th Fourier coefficient, the n-th partial sum of the Fourier series, the n-th Fejér mean, and the n-th Dirichlet kernel (for either Walsh–Paley or Walsh–Kaczmarz systems) as follows:

$$\hat{f}^\xi(n) := \int_G f \xi_n d\mu \ \text{ if } n \in \mathbb{N},$$

$$S_n^\xi(f) := \sum_{k=0}^{n-1} \hat{f}^\xi(k)\xi_k, \ \sigma_n^\xi(f) := \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} S_k^\xi(f), \ D_n^\xi := \sum_{k=0}^{n-1} \xi_k,$$

where $n \in \mathbb{P}$. It is known that

$$S_n^\xi(f; x) = \int_G f(u) D_n^\xi(x+u) d\mu(u).$$

The Fejér kernels are the arithmetic means of the Dirichlet kernels, that is,

$$K_n^\xi := \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} D_k^\xi.$$

Let $T := (t_{i,j})_{i,j=1}^{\infty}$ be a doubly infinite matrix of real numbers. We always assume that the T matrix is upper triangular, i.e., $t_{i,j} := 0$ if $i > j$. The n-th matrix transformation mean defined by T is

$$\sigma_n^{\xi T}(f; x) := \sum_{k=1}^{n} t_{k,n} S_k^{\xi}(f; x).$$

Since the n-th column of the T matrix determines the $\sigma^{\xi T} n$ matrix transformation mean, and the definition involves only finitely many terms, we refer to $(t_{k,n} : 1 \leq k \leq n,\ k \in \mathbb{P})$ as a finite sequence of numbers for every $n \in \mathbb{P}$.

If $\sum_{k=1}^{n} t_{k,n} = 1$, then the Nörlund means are special cases of matrix transformation means, namely

$$t_{k,n} := \frac{q_{n-k}}{Q_n}.$$

From now on, let $(t_{k,n} : 1 \leq k \leq n,\ k \in \mathbb{P})$ be a finite sequence of non-negative numbers for every $n \in \mathbb{P}$. The n-th matrix transformation kernel function is defined as

$$K_n^{\xi T}(x) := \sum_{k=1}^{n} t_{k,n} D_k^{\xi}(x).$$

We also note that throughout this chapter, the symbol c denotes a positive absolute constant.

Motivations

1. In a classic book of F. Schipp, W. R. Wade, P. Simon and J. Pál [62] (on page 191) we can read the inequality

$$\|\sigma_{2^n}^w(f) - f\|_X \leq \omega_X\left(f, 2^{-n}\right) + \sum_{k=0}^{n-1} 2^{k-n}\omega_X\left(f, 2^{-k}\right)$$

where X is a homogeneous Banach space (for example any L_p space, where $1 \leq p < \infty$ or the space of continuous functions C) and ω_X is the modulus of continuity for functions in X.

2. Móricz and Siddiqi proved the following.

Let $f \in L_p(G)$, where $1 \leq p \leq \infty$ and let $(q_k : k \in \mathbb{N})$ be a sequence of nonnegative numbers such that

$$\frac{n^{\gamma-1}}{Q_n^\gamma} \sum_{k=0}^{n-1} q_k^\gamma = O(1), \text{ for some } 1 < \gamma \leq 2.$$

If $(q_k : k \in \mathbb{N})$ is non-decreasing, then

$$\|t_n^w(f) - f\|_p \leq \frac{5}{2Q_n} \sum_{j=0}^{|n|-1} 2^j q_{n-2^j} \omega_p\left(f, \frac{1}{2^j}\right) + c\omega_p\left(f, \frac{1}{2^{|n|}}\right),$$

while if $(q_k : k \in \mathbb{N})$ is non-increasing, then

$$\begin{aligned}\|t_n^w(f) - f\|_p \leq &\frac{5}{2Q_n} \sum_{j=0}^{|n|-1} (Q_{n-2^j-1} - Q_{n-2^{j+1}-1})\omega_p\left(f, \frac{1}{2^j}\right) \\ &+ c\omega_p\left(f, \frac{1}{2^{|n|}}\right).\end{aligned}$$

3. Blahota and K. Nagy proved similar inequalities for matrix transform means. We state the following theorem using our notation.

Let $f \in L_p(G)$, where $1 \leq p \leq \infty$. For every $n \in \mathbb{N}$, $(t_{k,n} : 1 \leq k \leq n)$ be a finite sequence of non-negative numbers such that

$$\sum_{k=1}^{n} t_{k,n} = 1$$

is satisfied.

a) If the finite sequence $(t_{k,n} : 1 \leq k \leq n)$ is non-decreasing for a fixed n and the condition

$$t_{n,n} = O\left(\frac{1}{n}\right)$$

is satisfied, then

$$\left\|\sigma_n^{wT}(f) - f\right\|_p \leq 5 \sum_{j=0}^{|n|-1} 2^j t_{2^{j+1}-1,n} \omega_p\left(f, \frac{1}{2^j}\right) + c\omega_p\left(f, \frac{1}{2^{|n|}}\right).$$

holds.

b) If the finite sequence $(t_{k,n} : 1 \leq k \leq n)$ is non-increasing for a fixed n, then

$$\left\|\sigma_n^{wT}(f) - f\right\|_p \leq 5 \sum_{j=0}^{|n|-1} 2^j t_{2^j,n} \omega_p\left(f, \frac{1}{2^j}\right) + c\omega_p\left(f, \frac{1}{2^{|n|}}\right).$$

holds.

4. Areshidze and Tephnadze proved the following statement. They also proved (for the increasing case) the first motivating result, with a specific coefficient and without the condition involved in it.

   Let $f \in L_p(G)$, where $1 \leq p < \infty$ and let t_n^w be a regular Nörlund mean generated by non-decreasing sequence $(q_k : k \in \mathbb{N})$. Then

$$\|t_n^w(f) - f\|_p \leq 18 \sum_{k=0}^{|n|-1} 2^k \frac{q_{n-2^k}}{Q_n} \omega_p\left(f, \frac{1}{2^k}\right) + 12\omega_p\left(f, \frac{1}{2^{|n|}}\right).$$

In this chapter of the dissertation, which discusses Walsh–Paley and Walsh–Kaczmarz systems, we proved the following statements.

Norm estimates

Theorem 1.1. *Let $f \in L_p(G)$ and $1 \leq p \leq \infty$. For every $n \in \mathbb{N}$, $(t_{k,n} : 1 \leq k \leq n)$ be a finite sequence of non-negative numbers such that*

$$\sum_{k=1}^{n} t_{k,n} = 1.$$

is satisfied. If the finite sequence $(t_{k,n} : 1 \leq k \leq n)$ is non-increasing for a fixed n, then

$$\left\|\sigma_n^{wT}(f) - f\right\|_p \leq \frac{31}{15} \sum_{k=0}^{|n|-1} 2^k t_{2^k,n} \omega_p \left(f, \frac{1}{2^k}\right) + \frac{47}{30} \omega_p \left(f, \frac{1}{2^{|n|}}\right)$$

holds.

Theorem 1.2. *Let the finite sequence $(t_{k,2^n} : 1 \leq k \leq 2^n)$ of non-negative numbers be non-decreasing for all $n \in \mathbb{N}$ and*

$$\sum_{k=1}^{2^n} t_{k,2^n} = 1.$$

Then for any $f \in L_p(G)$ for some $1 \leq p < \infty$, we have the following inequality

$$\begin{aligned} \left\|\sigma_{2^n}^{wT}(f) - f\right\|_p \leq & \sum_{s=0}^{n-1} \frac{2^s}{2^n} \omega_p \left(f, \frac{1}{2^s}\right) \\ & + 3 \sum_{s=0}^{n-1} (n-s) 2^s t_{2^n - 2^s + 1, n} \omega_p \left(f, \frac{1}{2^s}\right) \\ & + \left(2 + \frac{1}{2^n}\right) \omega_p \left(f, \frac{1}{2^n}\right). \end{aligned}$$

Theorem 1.3. *For every $n \in \mathbb{P}$, let the finite sequence $(t_{k,n} : 1 \leq k \leq n)$ of non-negative numbers be non-decreasing for all n and we suppose that*

$$\sum_{k=1}^{n} t_{k,n} = 1$$

and

$$t_{n,n} = O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Then for any $f \in L_p(G)$ for some $1 \leq p < \infty$, we have the following inequality

$$\left\|\sigma_n^{wT}(f) - f\right\|_p \leq c \sum_{k=0}^{|n|} \frac{2^k}{2^{|n|}} \omega_p\left(f, \frac{1}{2^k}\right).$$

Theorem 1.4. *Let $f \in L_p(G)$, $1 \leq p \leq \infty$ and let for every $n \in \mathbb{P}$, $(t_{k,n} : 1 \leq k \leq n)$ be a finite sequence of non-negative numbers such that*

$$\sum_{k=1}^{n} t_{k,n} = 1$$

is satisfied.
a) Let the finite sequence $(t_{k,n} : 1 \leq k \leq n)$ be non-decreasing for all n and let condition

$$t_{n,n} = O\left(\frac{1}{n}\right)$$

be satisfied. Then

$$\left\|\sigma_n^{\kappa T}(f) - f\right\|_p \leq \frac{31}{15} \sum_{j=0}^{|n|-1} 2^j t_{2^{j+1}-1,n} \omega_p\left(f, \frac{1}{2^j}\right) + c\omega_p\left(f, \frac{1}{2^{|n|}}\right).$$

b) Let the finite sequence $(t_{k,n} : 1 \leq k \leq n)$ is non-increasing for all n, then

$$\left\|\sigma_n^{\kappa T}(f) - f\right\|_p \leq \frac{31}{15} \sum_{j=0}^{|n|-1} 2^j t_{2^j,n} \omega_p\left(f, \frac{1}{2^j}\right) + \frac{47}{30} \omega_p\left(f, \frac{1}{2^{|n|}}\right).$$

Norm convergence

Theorem 1.5. *Let $f \in L_1(G)$. For every $n \in \mathbb{P}$, let $(t_{k,n} : 1 \leq k \leq n)$ be a finite sequence of non-negative numbers such that*

$$\sum_{k=1}^{n} t_{k,n} = 1$$

and

$$\lim_{n\to\infty} t_{k,n} = 0$$

for any fixed k.

If there exists an absolute constant c, for which

$$\left\| K_n^{\kappa T} \right\|_1 \leq c,$$

then we have the L_1 -norm convergence

$$\sigma_n^{\kappa T}(f) \to f,$$

as $n \to \infty$.

Corollary 1.6. *Let $n \in \mathbb{P}$ and let $(t_{k,n} : 1 \leq k \leq n)$ be a finite sequence of non-negative numbers such that*

$$\sum_{k=1}^{n} t_{k,n} = 1.$$

Suppose that one of the following holds.
a) If the finite sequence $(t_{k,n} : 1 \leq k \leq n)$ is non-decreasing for a fixed n, then we suppose

$$t_{n,n} = O\left(\frac{1}{n}\right).$$

b) If the finite sequence $(t_{k,n} : 1 \leq k \leq n)$ *non-increasing for a fixed* n*, then we suppose*

$$\lim_{n \to \infty} t_{1,n} = 0.$$

Then in both cases we have the L_1 *-norm convergence*

$$\sigma_n^{\kappa T}(f) \to f,$$

as $n \to \infty$*.*

Theorem 1.7. *Let* $f \in \mathrm{Lip}(\alpha, p, G)$ *for some* $\alpha > 0$ *and* $1 \leq p \leq \infty$*. Let for every* $n \in \mathbb{P}$*,* $(t_{k,n} : 1 \leq k \leq n)$ *be a finite sequence of non-negative numbers such that*

$$\sum_{k=1}^{n} t_{k,n} = 1$$

is satisfied. Let the finite sequence $(t_{k,n} : 1 \leq k \leq n)$ *of non-negative numbers be non-decreasing for all* $n \in \mathbb{P}$ *and condition*

$$t_{n,n} = O\left(\frac{1}{n}\right)$$

is satisfied. Then the next estimate is valid

$$\left\|\sigma_n^{\kappa T}(f) - f\right\|_p = \begin{cases} O(n^{-\alpha}), & \text{if } 0 < \alpha < 1, \\ O(\log n/n), & \text{if } \alpha = 1, \\ O(1/n), & \text{if } \alpha > 1. \end{cases}$$

2. Vilenkin system

Generalizations of a dyadic representation of Walsh functions are Vilenkin systems. If the generating sequence is bounded, then the statements related to Vilenkin systems are often analogous to the Walsh–Paley cases, but in the unbounded case there are serious differences in both the content of the statements and the details of the proof procedures.

We introduce the concepts and theorems necessary for the discussion of the Vilenkin system. We prove theorems on norm convergence and almost everywhere convergence, as well as discuss the convergence of matrix transformation centers of Vilenkin–Fourier series for integrable functions at Vilenkin–Lebesgue points.

As we will see, the concepts presented are analogous to those in the previous chapter (this analogy is based on the fact that the Vilenkin system is a generalization of the Walsh system).

Notation and definitions

Let $m := (m_0, m_1, \dots)$ be a sequence of positive integers not less than 2. Let $\mathbb{Z}_{m_n} := \{0, 1, \dots, m_n - 1\}$ denote the additive group of natural numbers modulo m_n, where $n \in \mathbb{N}$. The Vilenkin group G_m is defined as the direct product of these discrete cyclic groups $\mathbb{Z}_{m_n}$. The group operation on G_m is the coordinate-wise addition modulo m_n.

The measure μ introduced on the direct product is defined as the direct product of the measures

$$\mu_n(\{j\}) := 1/m_n \ (j \in \mathbb{Z}_{m_n})$$

which is the Haar measure and a probability measure on G_m, that is, $\mu(G_m) = 1$.

If the sequence m is bounded, then G_m is called a bounded Vilenkin group; otherwise, it is called unbounded. In the papers covered in this chapter, and thus in the entire dissertation, we only deal with the bounded case. We mention that for $m = (2, 2, \dots)$ we obtain G, the dyadic group. The elements of G_m can be represented by the number sequences

$$x := (x_0, x_1, \dots, x_n, \dots) \ (x_n \in \mathbb{Z}_{m_n}).$$

The dyadic intervals are defined as follows:

$$I_0(x) := G_m,$$

$$I_n(x) := \{y \in G_m \mid y_0 = x_0, \ldots, y_{n-1} = x_{n-1}\} \ (x \in G_m, n \in \mathbb{P}).$$

The so-called generalized, m-adic number system based on the sequence m is defined as

$$M_0 := 1,\ M_{n+1} := m_n M_n \ (n \in \mathbb{N}).$$

Then every $n \in \mathbb{N}$ can be uniquely represented in the form $n = \sum_{k=0}^{\infty} n_k M_k$, where $n_k \in \mathbb{Z}_{m_k}$ $(k \in \mathbb{N})$, and only finitely many n_k differ from zero. Let $|n|$ denote the natural number (called the order of n) for which $M_{|n|} \leq n < M_{|n|+1}$.

Let $L_p(G_m)$ denote the Lebesgue space on G_m (with the corresponding $\|.\|_p$ norms), and let $C(G_m)$ denote the space of continuous functions on G_m with the norm $\|f\|_\infty := \sup\{|f(x)| : x \in G_m\}$.

Define the modulus of continuity on $L_p(G_m)$ for $1 \leq p < \infty$, $f \in L_p(G_m)$, and $\delta > 0$ by

$$\omega_p(f, \delta) := \sup_{|x| < \delta} \|f(\cdot - x) - f(\cdot)\|_p$$

where

$$|x| := \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x_i}{M_{i+1}} \quad \text{for all } x \in G_m.$$

Analogously, we define the modulus of continuity on a function f of $C(G_m)$, denoted by $\omega_\infty(f, \delta)$.

Similarly to the concepts from the previous chapter , we introduce the classes Lip(α, p, G_m) and Lip$(\alpha, C(G_m))$ (provided $1 \leq p < \infty$), and use the notation

$$\text{Lip}(\alpha, \infty, G_m) := \text{Lip}(\alpha, C(G_m)).$$

We introduce an orthonormal system on G_m, called the Vilenkin system. To this end, we define the complex-valued functions $r_k(x) : G_m \to \mathbb{C}$, known as generalized Rademacher functions, as follows:

$$r_k(x) := \exp(2\pi \imath x_k / m_k) \ \left(\imath^2 = -1,\ x \in G_m,\ k \in \mathbb{N}\right).$$

The function sequence $\psi := (\psi_n : n \in \mathbb{N})$ on G_m, where

$$\psi_n(x) := \prod_{k=0}^{\infty} r_k^{n_k}(x) \ \ (n \in \mathbb{N})$$

is called the Vilenkin system.

If $m = (2, 2, \dots)$, we obtain the Walsh–Paley system as a special case. The Vilenkin system is orthonormal and complete in $L_1(G_m)$. The elements of the Vilenkin system are exactly those continuous functions $f\colon G_m \to \mathbb{C}$ for which

$$f(x+y) = f(x)f(y)$$

and $|f(x)| = 1$ for all $x, y \in G_m$. Moreover, this is valid if and only if $f(x) = \psi_n(x)$ for some $n \in \mathbb{N}$.

In the following, we introduce the classical concepts related to Vilenkin–Fourier analysis. We define the nth Vilenkin–Fourier coefficient of a function f, the nth partial sum of its Vilenkin–Fourier series, the nth Vilenkin–Fejér mean, and the nth Vilenkin–Dirichlet kernel as follows:

$$\hat{f}(n) := \int_{G_m} f\bar{\psi}_n d\mu \text{ , if } n \in \mathbb{N},$$

$$S_n(f) := \sum_{k=0}^{n-1} \hat{f}(k)\psi_k, \ \sigma_n(f) := \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} S_k(f), \ D_n := \sum_{k=0}^{n-1} \psi_k,$$

where $n \in \mathbb{P}$. It is known that

$$S_n(f;x) = \int_{G_m} f(u)D_n(x-u)d\mu(u).$$

The Fejér kernel is defined as the arithmetic mean of the Dirichlet kernels:

$$K_n := \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} D_k.$$

The T-matrix introduced for the Walsh system, along with the associated definitions and notations, can also be used for the Vilenkin system.

It is easy to see that

$$\sigma_n^T(f;x) = \int_{G_m} f(u) K_n^T(x-u) d\mu(u).$$

We define the $(\tilde{n}, n)$th de La Vallée Poussin-type matrix transformation mean as follows:

$$\sigma_{\tilde{n},n}^T(f;x) := \sum_{k=\tilde{n}}^{n} t_{k,n} S_k(f;x),$$

where $\tilde{n}, n \in \mathbb{P}$ and $\tilde{n} \leq n$. The corresponding $(\tilde{n}, n)$th de La Vallée Poussin-type matrix transformation kernel is

$$K_{\tilde{n},n}^T(x) := \sum_{k=\tilde{n}}^{n} t_{k,n} D_k(x).$$

It is also easy to verify that

$$\sigma_{\tilde{n},n}^T(f;x) = \int_{G_m} f(u) K_{\tilde{n},n}^T(x-u) d\mu(u).$$

We also note that in this chapter, c (for a fixed sequence m) denotes a positive absolute constant.

In the dissertation, in Chapter 3 we proved the following theorems for bounded Vilenkin systems.

Almost everywhere convergence

Theorem 2.1. *For every $n \in \mathbb{P}$, $(t_{k,n} : 1 \leq k \leq n)$ be a finite sequence of non-negative numbers such that*

$$\sum_{k=1}^{n} t_{k,n} = 1$$

is satisfied.

Suppose that $f \in L_1(G_m)$ and for some $x \in G_m$

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n(f;x) = f(x).$$

a) Let the finite sequence $(t_{k,n} : 1 \leq k \leq n)$ of nonnegative numbers be non-increasing for all n and condition

$$\lim_{n\to\infty} t_{1,n} = 0$$

is satisfied, or

b) let the finite sequence $(t_{k,n} : 1 \leq k \leq n)$ of nonnegative numbers be non-decreasing for all n. We also suppose that

$$t_{n,n} = O\left(\frac{1}{n}\right)$$

is satisfied.

Then in both cases

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n^T(f;x) = f(x).$$

Corollary 2.2. *Let $f \in L_1(G_m)$. For every $n \in \mathbb{P}$-re $(t_{k,n} : 1 \leq k \leq n)$ be a finite sequence of non-negative numbers such that*

$$\sum_{k=1}^{n} t_{k,n} = 1$$

is satisfied.

a) Let the finite sequence $(t_{k,n} : 1 \leq k \leq n)$ *of nonnegative numbers be non-increasing for all* n *and condition*

$$\lim_{n\to\infty} t_{1,n} = 0$$

is satisfied, or

b) let the finite sequence $(t_{k,n} : 1 \leq k \leq n)$ *nonnegative numbers be non-decreasing for all* n*. We also suppose that*

$$t_{n,n} = O\left(\frac{1}{n}\right)$$

holds.

Then in both cases

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n^T(f;x) = f(x)$$

for all continuity or Vilenkin–Lebesgue points x*.*

Theorem 2.3. *Let* $f \in L_1(G_m)$*. For every* $n \in \mathbb{P}$*, let* $(t_{k,M_{n+1}-1} : M_n \leq k \leq M_{n+1}-1)$ *be a finite sequence of non-negative numbers such that*

$$\sum_{k=M_n}^{M_{n+1}-1} t_{k,M_{n+1}-1} = 1.$$

If the finite sequence $(t_{k,M_{n+1}-1} : M_n \leq k \leq M_{n+1}-1)$ *is non-decreasing or non-increasing for every fixed* n *(not necessarily in the same sense for different* n*'s) and conditions*

$$t_{M_n,M_{n+1}-1} = O\left(\frac{1}{M_n}\right)$$

and

$$t_{M_{n+1}-1,M_{n+1}-1} = O\left(\frac{1}{M_n}\right)$$

holds.

Then

$$\sigma^T_{M_n,M_{n+1}-1}(f) \to f$$

almost everywhere.

Norm estimates

Theorem 2.4. *Let $f \in L_1(G_m)$. For every $n \in \mathbb{P}$, let $(t_{k,M_{n+1}-1} : M_n \leq k \leq M_{n+1}-1)$ be a finite sequence of non-negative numbers such that*

$$\sum_{k=M_n}^{M_{n+1}-1} t_{k,M_{n+1}-1} = 1.$$

Moreover, assume that $(t_{k,M_{n+1}-1} : M_n \leq k \leq M_{n+1}-1)$ is monotonic and satisfies one of the following conditions.

a) Either $(t_{k,M_{n+1}-1} : M_n \leq k \leq M_{n+1}-1)$ is non-decreasing and

$$t_{M_{n+1}-1,M_{n+1}-1} = O\left(\frac{1}{M_n}\right),$$

b) or $(t_{k,M_{n+1}-1} : M_n \leq k \leq M_{n+1}-1)$ is non-increasing.

Then in both cases

$$\left\|\sigma^T_{M_n,M_{n+1}-1}(f) - f\right\|_1 \leq c\omega_1\left(f, \frac{1}{M_n}\right)$$

holds.

Theorem 2.5. *Let $f \in L_p(G_m)$ where $1 < p < \infty$ and $n \in \mathbb{P}$. Let the finite sequence $(t_{k,M_{n+1}-1} : M_n \leq k \leq M_{n+1}-1)$ of non-negative numbers. We suppose that*

$$\sum_{k=M_n}^{M_{n+1}-1} t_{k,M_{n+1}-1} = 1$$

holds. Then

$$\left\|\sigma^T_{M_n,M_{n+1}-1}(f) - f\right\|_p \leq c_p\omega_p\left(f, \frac{1}{M_n}\right),$$

where c_p depends only on p.

Corollary 2.6. *Let us suppose that in case of $p = 1$ conditions of Theorem 2.4., in case of $1 < p < \infty$ conditions of Theorem 2.5. are satisfied. If $f \in Lip(\alpha, p, G_m)$, then*

$$\left\|\sigma^T_{M_n, M_{n+1}-1}(f) - f\right\|_p = O\left(\frac{1}{M_n^\alpha}\right).$$

Norm convergence

Theorem 2.7. *Suppose that $f \in L_1(G_m)$ and for every $n \in \mathbb{N}$, $(t_{k,n} : 1 \le k \le n)$ be a finite sequence of non-negative numbers such that*

$$\sum_{k=1}^{n} t_{k,n} = 1$$

is satisfied.

a) If the finite sequence $(t_{k,n} : 1 \le k \le n)$ of nonnegative numbers is non-increasing for all n and

$$\lim_{n\to\infty} t_{1,n} = 0,$$

is satisfied, or

b) if the finite sequence $(t_{k,n} : 1 \le k \le n)$ of nonnegative numbers be non-decreasing for all n and

$$t_{n,n} = O\left(\frac{1}{n}\right),$$

then we have the L_1-norm convergence $\sigma_n^T(f) \to f$.

Theorem 2.8. *For every $n \in \mathbb{P}$, let $(t_{k,M_{n+1}-1} : M_n \le k \le M_{n+1} - 1)$ be a finite sequence of non-negative numbers such that*

$$\sum_{k=M_n}^{M_{n+1}-1} t_{k,M_{n+1}-1} = 1.$$

Furthermore, assume that $(t_{k,M_{n+1}-1} : M_n \le k \le M_{n+1} - 1)$ is monotonic and satisfies one of the following conditions.

a) Either $(t_{k,M_{n+1}-1} : M_n \leq k \leq M_{n+1}-1)$ *is non-decreasing and*

$$t_{M_{n+1}-1,M_{n+1}-1} = O\left(\frac{1}{M_n}\right),$$

b) or $(t_{k,M_{n+1}-1} : M_n \leq k \leq M_{n+1}-1)$ *non-increasing and*

$$t_{M_n,M_{n+1}-1} = O\left(\frac{1}{M_n}\right).$$

Then in both cases there exists an absolute constant c, for which the inequality

$$\left\|K^T_{M_n,M_{n+1}-1}\right\|_1 \leq c$$

is satisfied.

Theorem 2.9. *Let* $f \in L_1(G_m)$*. For every* $n \in \mathbb{P}$*, let* $(t_{k,M_{n+1}-1} : M_n \leq k \leq M_{n+1}-1)$ *be a finite sequence of non-negative numbers such that*

$$\sum_{k=M_n}^{M_{n+1}-1} t_{k,M_{n+1}-1} = 1.$$

If there exists an absolute constant c, for which

$$\left\|K^T_{M_n,M_{n+1}-1}\right\|_1 \leq c,$$

then we have the L_1*-norm convergence*

$$\sigma^T_{M_n,M_{n+1}-1}(f) \to f.$$

The following statement is a consequence of the previous two theorems.

Corollary 2.10. *For every* $n \in \mathbb{P}$*, let* $(t_{k,M_{n+1}-1} : M_n \leq k \leq M_{n+1}-1)$ *be a finite sequence of non-negative numbers such that*

$$\sum_{k=M_n}^{M_{n+1}-1} t_{k,M_{n+1}-1} = 1.$$

Moreover, assume that $(t_{k,M_{n+1}-1} : M_n \leq k \leq M_{n+1}-1)$ *is monotonic and satisfies one of the following conditions.*

a) Either $(t_{k,M_{n+1}-1} : M_n \leq k \leq M_{n+1}-1)$ *is non-decreasing and*

$$t_{M_{n+1}-1,M_{n+1}-1} = O\left(\frac{1}{M_n}\right),$$

b) or $(t_{k,M_{n+1}-1} : M_n \leq k \leq M_{n+1}-1)$ *is non-increasing and*

$$t_{M_n,M_{n+1}-1} = O\left(\frac{1}{M_n}\right).$$

Then in both cases we have the L_1*-norm convergence*

$$\sigma^T_{M_n,M_{n+1}-1}(f) \to f.$$

Bibliography – Bibliográfia

[1] G. H. Agaev, N. J. Vilenkin, G. M. Dzhafarli, and A. I. Rubinstein, Multiplicative systems of functions and harmonic analysis on 0-dimensional groups. (Russian), Izd. ("ELM"), Baku, 1981

[2] N. Anakidze, N. Areshidze, and L. Baramidze, *Approximation by Nörlund means with respect to Vilenkin system in Lebesgue spaces*, Acta Math. Hungar. **172** (2), (2024) 529–542.

[3] N. Anakidze, N. Areshidze, L-E. Persson, and G. Tephnadze, *Approximation by T means of Walsh–Fourier series in Lebesgue spaces and Lipschitz classes*, Annales Univ. Sci. Budapest., Sect. Comp. **56**, (2024) 53–68.

[4] N. Areshidze and G. Tephnadze, *Approximation by Nörlund means with respect to Walsh system in Lebesgue spaces*, Math. Inequal. Appl. **27** (1), (2024) 137–147.

[5] M. Avdispahić and M. Pepić, *Summability and integrability of Vilenkin series*, Collect. Math. **51** (3), (2000) 237–254.

[6] D. Baramidze, Z. Dvalashvili, and G. Tutberidze, *Convergence of Nörlund means with respect to Vilenkin systems of integrable functions*, Mem. Differential Equations Math. Phys. **86**, (2022) 1–14.

[7] D. Baramidze, N. Gogolashvili, and N. Nadirashvili, *Convergence of T means with respect to Vilenkin systems of integrable functions*, Georgian Math. J. **29** (4), (2022) 481–491.

[8] L. Baramidze, L-E. Persson, G. Tephnadze, and P. Wall, *Sharp $H_p - L_p$ type inequalities of weighted maximal operators of Vilenkin–Nörlund means and its applications*, J. Inequal. Appl. **242**, (2016)

[9] D. Baramidze, L-E. Persson, H. Singh, and G. Tephnadze, *Some new results and inequalities for subsequences of Nörlund logarithmic means of Walsh–Fourier series*, J. Inequal. Appl. **30**, (2022)

[10] I. Blahota, *Approximation by subsequences of matrix transform mean of Walsh–Fourier series*, Real Anal. Exchange **48** (1), (2023) 107–118.

[11] I. Blahota, *Approximation by a special de la Vallée Poussin type matrix transform mean of Walsh–Fourier series*, Miskolc Math. Notes **24** (3), (2023) 1213–1221.

[12] I. Blahota, *Norm convergence of subsequences of matrix transform means of Walsh–Fourier series*, Period. Math. Hung. **89**, (2024) 72–85

[13] I. Blahota and G. Gát, *Norm summability of Nörlund logarithmic means on unbounded Vilenkin groups*, Anal. Theory Appl., Mathematica **24** (1), (2008) 1–17.

[14] I. Blahota and G. Gát, *On the rate of approximation by generalized de la Vallée Poussin type matrix transform means of Walsh–Fourier series*, P-Adic Numbers, Ultrametric Anal. App. **14** (1), (2022) S59–S73.

[15] I. Blahota and G. Gát, *Norm and almost everywhere convergence of matrix transform means of Walsh–Fourier series*, Acta Univ. Sapientiae, Mathematica **15** (2), (2023) 244–258.

[16] I. Blahota and D. Nagy, *Approximation by a special de la Vallée Poussin type matrix transform mean of Vilenkin–Fourier series*, Anal. Math. **50** (3), (2024) 939–957.

[17] I. Blahota and D. Nagy, *Convergence of matrix transform means with respect to the Walsh–Kaczmarz system*, J. Appl. Anal. **31** (1), (2024) 1–13.

[18] I. Blahota and D. Nagy, *Convergence of matrix transform means with respect to Vilenkin systems*, Miskolc Math. Notes, elfogadva

[19] I. Blahota and D. Nagy, *Approximation by matrix transform means with respect to the Walsh system in Lebesgue spaces*, Publi. Math. Debrecen, elfogadva

[20] I. Blahota and K. Nagy, *Approximation by Θ-means of Walsh–Fourier series*, Anal. Math. **44** (1), (2018) 57–71.

[21] I. Blahota and K. Nagy, *Approximation by matrix transform of Vilenkin–Fourier series*, Publi. Math. Debrecen **99** (1-2), (2021) 223–242.

[22] I. Blahota and K. Nagy, *Approximation by Marcinkiewicz type matrix transform of Vilenkin–Fourier series*, Mediterr. J. Math. **19** (4), 165, (2022)

[23] I. Blahota, K. Nagy, and M. Salim, *Approximation by Θ-means of Walsh–Fourier series in dyadic Hardy spaces and dyadic homogeneous Banach spaces*, Anal. Math. **47**, (2021) 285–309.

[24] I. Blahota, K. Nagy, and G. Tephnadze, *Approximation by Marcinkiewicz Θ-means of double Walsh–Fourier series*, Math. Ineq. and Appl. **22** (3), (2019) 837–853.

[25] S. L. Blyumin, *Linear summability methods for Fourier series in multiplicative systems*, Sibirsk. Mat. Zh. **9** (2), (1968) 449–455.

[26] P. Chandra, *On the degree of approximation of a class of functions by means of Fourier series*, Acta Math. Hungar. **52**, (3-4) (1988) 199–205.

[27] A. V. Efimov, *On some approximation properties of periodic multiplicative orthonormal systems*, Mat. Sb. **69**, (1966) 354–370. (in Russian)

[28] T. Eisner, *The Θ-summation on local fields*, Ann. Univ. Sci. Budapest. Sect. Comput. **33**, (2011) 137–160.

[29] N. J. Fine, *On the Walsh functions*, Trans. Amer. Math. Soc. **65** (3), (1949) 372–414.

[30] S. Fridli, P. Manchanda, and A. H. Siddiqi, *Approximation by Walsh–Nörlund means*, Acta Sci. Math. **74**, (2008) 593–608.

[31] G. Gát, *On almost even arithmetical functions via orthonormal systems on Vilenkin groups*, Acta Arith. **49** (2), (1991) 105–123.

[32] G. Gát and R. Toledo, *L_p-norm convergence of series in compact totally disconnected groups*, Analysis Math. **22**, (1996) 13–24.

[33] G. Gát, *On $(C,1)$ summability of integrable functions on compact totally disconnected spaces*, Studia Math. **144**, (2) (2001), 101–120.

[34] G. Gát, *On $(C,1)$ summability of integrable functions with respect to the Walsh–Kaczmarz system*, Studia Math. **130** (2), (1998) 135–148.

[35] G. Gát, *Pointwise convergence of the Fejér means of functions on unbounded Vilenkin groups*, J. Approx. Theory **101** (1), (1999) 1–36.

[36] G. Gát, *Cesàro means of integrable functions with respect to unbounded Vilenkin systems*, J. Approx. Theory **124** (1), (2003) 24–43.

[37] G. Gát and U. Goginava, *A weak type inequality for the maximal operator of (C,α)-means of Fourier series with respect to the Walsh–Kaczmarz system*, Acta Math. Hungar. **125** (1-2), (2009) 65–83.

[38] G. Gát and U. Goginava, *Maximal operators of Cesàro means with varying parameters of Walsh–Fourier series*, Acta Math. Hungar. **159** (2), (2019) 653–668.

[39] G. Gát, U. Goginava, and K. Nagy, *On the Marcinkiewicz-Fejér means of double Fourier series with respect to the Walsh–Kaczmarz system*, Studia Sci. Math. Hungar. **46** (3), (2009) 399–421.

[40] U. Goginava, *On the approximation properties of Cesàro means of negative order of Walsh–Fourier series*, J. Approx. Theory **115**, (2002) 9–20.

[41] U. Goginava and L. Gogoladze, *Pointwise summability of Vilenkin–Fourier series*, Publ. Math. Debrecen **79** (1-2), (2011) 89–108.

[42] U. Goginava and K. Nagy, *Matrix summability of Walsh–Fourier series*, Mathematics **10** (14), (2022) 2458.

[43] E. Hewitt and K. Ross, Abstract Harmonic Analysis, Springer–Verlag I, II, Heidelberg, 1963

[44] T. V. Iofina and S. S. Volosivets, *On the degree of approximation by means of Fourier–Vilenkin series in Hölder and L_p norm*, East J. Approx. **15** (2), (2009) 143–158.

[45] M. A. Jastrebova, *On approximation of functions satisfying the Lipschitz condition by arithmetic means of their Walsh–Fourier series*, Mat. Sb. **71**, (1966) 214–226. (in Russian)

[46] A. Joudeh and G. Gát, *Almost everywhere convergence of Cesàro means with varying parameters of Walsh-Fourier series*, Miskolc Math. Notices **19** (1), (2018) 303–317.

[47] S. Kaczmarz, *Sur la convergence et la sommabilité des développements orthogonaux*, Studia Math. **1** (1), (1929) 87–121.

[48] L. Leindler, *On the degree of approximation of continuous functions*, Acta Math. Hungar. **104** (1-2), (2004) 105–113.

[49] N. Memić, *Almost everywhere convergence of some subsequences of the Nörlund logarithmic means of Walsh–Fourier series*, Analysis Mathematica **41** (1), (2015) 45–54.

[50] N. Memić, L-E. Persson, and G. Tephnadze, *A note on the maximal operators of Vilenkin–Nörlund means with non-increasing coefficients*, Studia Sci. Math. Hungar. **53** (4), (2016) 545–556.

[51] C. N. Moore, Summable Series and Convergence Factors, American Mathematical Society Colloquium Publications **22**, Providence, RI, 1938

[52] F. Móricz, B. E. Rhoades, *Approximation by weighted means of Walsh–Fourier series*, Int. J. Math. Sci. **19** (1), (1996) 1–8.

[53] F. Móricz and A. Siddiqi, *Approximation by Nörlund means of Walsh–Fourier series*, J. Approx. Theory **70**, (1992) 375–389.

[54] N. Nadirashvili, L-E. Persson, G. Tephnadze, and F. Weisz, *Vilenkin–Lebesgue points and almost everywhere convergence for some classical summability methods*, Mediterr. J. Math. **19**, (2022) 239.

[55] K. Nagy, *Approximation by weighted means of Walsh-Kaczmarz-Fourier series*, Rend. Circ. Mat. Palermo (2), **82**, (2010) 387–406.

[56] K. Nagy, *Approximation by Nörlund means of quadratical partial sums of double Walsh–Fourier series*, Anal. Math. **36** (4), (2010) 299–319.

[57] K. Nagy, *Approximation by Nörlund means of Walsh–Kaczmarz–Fourier series*, Georgian Math. J. **18** (1), (2011) 147–162.

[58] G. I. Natanson and V. V. Zuk, Trigonometric Fourier Series and Approximation Theory, Izdat. Leningrad Unta, Leningrad, 1983 (in Russian)

[59] R. E. A. C. Paley, *A remarkable series of orthogonal functions*, Proc. Lond. Math. Soc. **34** (2), (1932) 241–279.

[60] L-E. Persson, G. Tephnadze, and F. Weisz, Martingale Hardy spaces and summability of one-dimensional Vilenkin–Fourier series, Springer, Berlin, 2022

[61] F. Schipp, *Pointwise convergence of expansions with respect to certain product systems*, Anal. Math. **2** (1), (1976) 65–76.

[62] F. Schipp, W. R. Wade, P. Simon, and J. Pál, Walsh Series. An Introduction to Dyadic Harmonic Analysis, Adam Hilger, Bristol-New York, 1990

[63] G. Shavardenidze, *On the convergence of Cesàro means of negative order of Vilenkin–Fourier series*, Studia Sci. Math. Hungar. **56** (1), (2019) 22–44.

[64] G. Shavardenidze and M. Totladze, *On the convergence of Cesàro means of negative order of Walsh–Fourier series*, Acta Math. Acad. Paedag. Nyíregyh. **34**, (2023) 1–8.

[65] P. Simon, (C,α) *summability of Walsh–Kaczmarz–Fourier series*, J. Approx. Theory **127** (1), (2004) 39–60.

[66] V. A. Skvortsov, *Certain estimates of approximation of functions by Cesàro means of Walsh–Fourier series*, Mat. Zametki **29**, (1981) 539–547. (in Russian)

[67] V. A. Skvortsov, *On Fourier series with respect to the Walsh–Kaczmarz system*, Anal. Math. **7** (1), (1981) 141–150.

[68] A. A. Šneĭder, *On series of Walsh functions with monotonic coefficients*, Izvestiya Akad. Nauk SSSR. Ser. Mat. **12**, (1948) 179–192. (in Russian)

[69] G. Tephnadze, *On the maximal operators of Walsh–Kaczmarz–Nörlund means*, Acta Math. Acad. Paedag. Nyíregyh. **31** (2), (2015) 259–271.

[70] T. Tepnadze, *On the approximation properties of Cesàro means of negative order of Vilenkin–Fourier series*, Studia Sci. Math. Hungar. **53** (4), (2016) 532–544.

[71] R. Toledo, *On the boundedness of the* L^1*-norm of Walsh–Fejér kernels*, Journal of Math. Anal. and Appl. **457** (1), (2018) 153–178.

[72] N. Ya. Vilenkin, *On a class of complete orthonormal systems*, Izv. Ross. Akad. Nauk Ser. Mat. **11**, (1947) 363–400. (Russian)

[73] S. S. Volosivets, *Approximation by Vallée-Poussin type means of Vilenkin–Fourier series*, P-Adic Numbers, Ultrametric Anal. App. **16** (3), (2024) 295–301.

[74] J. Walsh, *A closed set of normal orthogonal functions*, Amer. J. Math., **45** (1) (1923), 5–24.

[75] F. Weisz, *Convergence of singular integrals*, Ann. Univ. Sci. Budapest Sect. Math. **32**, (1989) 243–256.

[76] F. Weisz, Θ*-summation and Hardy spaces*, J. Approx. Theory **107**, (2000) 121–142.

[77] F. Weisz, Θ*-summability of Fourier series*, Acta Math. Hungar. **103** (1-2), (2004) 139–175.

[78] Sh. Yano, *On approximation by Walsh functions*, Proc. Amer. Math. Soc. **2**, (1951) 962–967.

[79] W. S. Young, *On the a.e. convergence of Walsh–Kaczmarz–Fourier series*, Proc. Amer. Math. Soc. **44**, (1974) 353–358.

[80] A. Zygmund, Trigonometric Series, With a foreword by Robert Fefferman. 3rd ed., Cambridge University Press I and II, Cambridge, 2002 364.

UNIVERSITY of DEBRECEN

UNIVERSITY AND NATIONAL LIBRARY
UNIVERSITY OF DEBRECEN
H-4002 Egyetem tér 1, Debrecen
Phone: +3652/410-443, email: publikaciok@lib.unideb.hu

Registry number: DEENK/440/2025.PL
Subject: PhD Publication List

Candidate: Dóra Nagy
Doctoral School: Doctoral School of Mathematical and Computational Sciences
MTMT ID: 10084538

List of publications related to the dissertation

Foreign language scientific articles in Hungarian journals (2)

1. Blahota, I., **Nagy, D.**: Approximation by matrix transform means with respect to the Walsh system in Lebesgue spaces.
   Publ. Math. Debr. "Accepted by Publisher", 1-15, 2025. ISSN: 0033-3883.
   IF: 0.4 (2023)

2. Blahota, I., **Nagy, D.**: Convergence of matrix transform means with respect to Vilenkin systems.
   Miskolc Math. Notes. "Accepted by Publisher", 1-13, 2025. ISSN: 1787-2405.
   IF: 0.9 (2023)

Foreign language scientific articles in international journals (2)

3. Blahota, I., **Nagy, D.**: Approximation by a special de la Vallée Poussin type matrix transform mean of Vilenkin-Fourier series.
   Anal. Math. 50 (3), 939-957, 2024. ISSN: 0133-3852.
   DOI: http://dx.doi.org/10.1007/s10476-024-00049-2
   IF: 0.6 (2023)

4. Blahota, I., **Nagy, D.**: Convergence of matrix transform means with respect to the Walsh-Kaczmarz system.
   J. Appl. Anal. 31 (1), 1-13, 2024. ISSN: 1425-6908.
   DOI: http://dx.doi.org/10.1515/jaa-2023-0161
   IF: 0.6 (2023)

Total IF of journals (all publications): 2,5
Total IF of journals (publications related to the dissertation): 2,5

The Candidate's publication data submitted to the Tudóstér have been validated by DEENK on the basis of the Journal Citation Report (Impact Factor) database.

28 May, 2025