SPRAY-SOKASÁGOK PROJEKTÍV GEOMETRIÁJÁRÓL ÉS METRIZÁLHATÓSÁGÁRÓL

doktori (Ph.D.) értekezés tézisei

ON THE PROJECTIVE GEOMETRY AND METRIZABILITY OF SPRAY MANIFOLDS

Ph.D. thesis

Vattamány Szabolcs

Debreceni Egyetem
Debrecen, 2004.

TARTALOMJEGYZÉK
CONTENTS

BEVEZETÉS

Disszertációnk új nézőpontból és modern eszközökkel teszi vizsgálat tárgyává a pályageometria (divatos terminológiával: a spray–sokaságok elmélete) és ehhez kapcsolódóan a Finsler–sokaságok bizonyos, javarészt a projekív geometria területéhez tartozó problémáit. Megközelítésünk jelentős mértékben Joseph Grifone hetvenes években kidolgozott elméletére [25], [26] támaszkodik. Munkánk során technikai eszközként és különböző geometriai objektumok megkonstruálásakor elsősorban a vektorértékű differenciálformák Frölicher–Nijenhuis kalkulusát [24] alkalmazzuk, amelyet a számolások egyszerűbbé tétele érdekében kombinálunk egy alkalmas, az alapsokaság lokális bázisát képező vektormezők vertikális és teljes (vagy vertikális és horizontális) liftjeiből álló frame–mező használatával.

A spray–sokaságok geometriája az affinösszefüggő sokaságok – torziómentes lineáris konnexióval ellátott sokaságok – elméletéből fejlődött ki. Egy ilyen sokaság geodetikusainak differenciálegyenlete kvadratikus, mai szóhasználattal élve: a geodetikus spray másodfokú homogén és C^2-osztályú. Gyengítve a differenciálhatósági feltételt, és csupán C^1-osztályúságot követelve meg jutunk az (általános) spray fogalmához. Ezen sprayk lokális tanulmányozása, a 'pályaterek' geometriájának vizsgálata, a múlt század huszas éveiben kezdődött, s elsősorban L. Berwald, J. Douglas, M. S. Knebelman, T. Y. Thomas és O. Veblen nevéhez fűződik a megalapozása. A magyar kutatók közül Rapcsák András akadémikus vitte tovább lényeges mértékben ezt az elméletet az 1960-as években; disszertációnk sokban adós az ő tudományos örökségének.

A sprayk vizsgálata az 1970-es években került ismét előtérbe, amikor felismerték, hogy a Lagrange–mechanika geometriai megalapozásában alapvető szerepet játszhatnak. Egy időfüggetlen Lagrange–rendszer dinamikáját a rendszer konfigurációs terén ható spray határozza meg. A Finsler–sokaságok rendelkeznek egy 'kanonikus spray'-vel, melyet egy alkalmas Lagrange–függvény által meghatározott energiafüggvényből származtatunk. J. Klein, J. Grifone és M. Crampin végzett úttörő munkát ezen a területen, disszertációnk az általuk kijelölt irányban lép tovább.

Munkánk egyik központi témája a sprayk projektív megváltozásainak vizsgálata. Ugyanazon sokaságon adott két sprayt projektíven ekvivalensnek mondunk, ha a geodetikusaik, mint ponthalmazok megegyeznek. Ha egy adott sprayről áttérünk egy vele projektíven ekvivalens sprayre, azt mondjuk, hogy *projektív változtatás*t hajtottunk végre. A sprayk projektív geometriájának tanulmányozása során a projektív változtatással szemben invariáns tulajdonságokat keresünk. Disszertációnk első fejezetében a projektívan invariáns Douglas–tenzor koordinátamentes – s ilyen értelemben intrinsic – előállítását konstruáljuk meg. Az affinösszefüggő esetben projektíven invariáns a Weyl–tenzor [61]. Ennek nemlineáris általánosítása L. del Castillo nevéhez fűződik ([20], lásd még [34]).

A koordinátás formájában jól ismert Douglas–tenzor "beazonosításához" vezető út vázlatosan a következő. Először is értelmezzük a nemlineáris (homogén) konnexió fogalmát, amely megközelítésünkben egy ún. horizontális endomorfizmust jelent: az érintősokaságon ható olyan $(1, 1)$-tenzort, amely projektor és eltűnik a vertikális nyalábon. Minden horizontális endomorfizmus származtat egy Finsler–konnexiót, melyet *Berwald–típusú*nak hívunk, ill., ha a horizontális endomorfizmus sprayből nyerhető, *Berwald–konnexió*nak nevezünk. Ha megvizsgáljuk, mi történik projektív változtatás során a Berwald–konnexió vegyes görbületi tenzorával, eljuthatunk az invariánsan maradó Douglas–tenzorhoz. Munkánk során azonban némileg eltérő utat követünk: a Berwald–típusú, ill. a Berwald–konnexió általánosításaként bevezetjük a Yano–típusú, ill. a Yano–konnexiót, s ezen konnexió adataival építjük fel a Douglas–tenzort és bizonyítjuk be projektív invarianciáját. (Természetesen megadjuk a Douglas–tenzornak a Berwald konnexió adataival való kifejezését is.)

A második fejezetben rögzítjük a *Finsler–sokaság*ok definicióját, leszármaztatjuk a *kanonikus spray*t, mely a kanonikus nemlineáris konnexiót, az ún. *Barthel–endomorfizmus*t, származtatja. Egy sokaságon adott sprayt *tágabb értelemben metrizálható*nak vagy *projektíven Finsler*nek mondunk, ha létezik olyan Finsler–alapfüggvény, melyhez tartozó kanonikus spray projektíven ekvivalens a kiindulóval. Ha a spray megegyezik egy Finsler–alapfüggvényhez tartozó kanonikus sprayvel, akkor *természetes értelemben metrizálható* vagy *Finsler–variációs* sprayről beszélünk (v.ö. [42]). A második eset vizsgálata éppen a variációszámítás inverz problémája a homogén esetben. Kitűzött célunk, hogy adott spray esetén a mindkét értelemben vett metrizálhatóságra szükséges és elegendő feltételrendszert adjunk. Projektíven Finsler alapfüggvény megtalálására Rapcsák András állított föl másodrendű parciális differenciálegyenleteket [42], [43], [44], [45] a hatvanas években. Ezen egyenletek, ill. az általunk megtalált koordinátamentes formájuk képezik a kiindulópontot vizsgálataink számára.

Egy igen nagyhatásúnak bizonyult dolgozatában [16] M. Crampin a variációszámítás inverz problémájának *Helmholtz–feltételei*re adott ekvivalens, koordinátamentes formában megfogalmazott feltételrendszert, megkövetelve egy, az érintősokaságon ható, alkalmas 2-forma létezését. Erre a 2-formára további homogenitási és regularitási tulajdoságokat előírva, disszertációnkban *szükséges és elegendő feltételeket vezetünk le egy spray mindkét értelemben vett metrizálhatóságára.* Ezek után a metrizálhatóságot más oldalról is megközelítjük. Egy spray Finsler–variációsságára úgy adunk ekvivalens feltételeket, hogy egy alkalmas, nemelfajuló, szimmetrikus $(0, 2)$-tenzor létezését kívánjuk meg. Hasonlóan, az *alternatíva–tétel*nek keresztelt eredményünk egy spray tágabb értelemben vett metrizálhatóságára ad ekvivalens feltételeket úgy, hogy olyan $(0, 2)$-tenzor létezését követeli meg az érintőnyalábon, mely még további algebrai feltételeket is teljesít. Ez utóbbi tétel jelentősége abban áll, hogy a *tágabb értelemben vett metrizálhatóságra vonatkozó egyenleteket elsőrendű parciális differenciálegyenletekre redukálja.* Megadjuk ezen egyenletek integrabilitási feltételeit és – kiegészítve ezeket homogenitási és regularitási követelményekkel – a Rapcsák–egyenletek felhasználásával szükséges és elegendő feltételeket vezetünk le arra, hogy egy spray projektíven Finsler legyen.

A harmadik fejezetet az indikátrix–nyalábra való vetítés koordinátamentes megkonstruálásával indítjuk, majd új bizonyítást adunk a következő állításra: *ha egy Landsberg–sokaságon a Douglas–tenzor eltűnik, akkor a sokaság Berwald–sokaság.* A kétdimenziós esetben ezt Berwald bizonyította be 1941-ben megjelent posztumusz dolgozatában [9]. Több mint negyven évvel később H. IZUMI mutatott rá arra, hogy Berwald tétele igaz magasabb dimenzióban is [32]. Izumi állítását S. BÁCSÓ, F. ILOSVAY és B. KIS igazolta [3], felhasználva T. SAKAGUCHI [47] azon észrevételét, miszerint a Douglas–tenzor és az indikátrix–nyalábra való vetítettje egyszerre tűnik el.

Az indikátrix–nyalábra való vetítés azon az egyszerű tényen alapul, hogy a Liouville–vektormező (a kanonikus vertikális vektormező) az indikátrix–nyalábra merőleges vektormező, így a vetítés operátora a lineáris algebrából ismert módon megadható. (Ezt az operátort ilyen formában elsőként J. GRIFONE vezette be [28].) Ezután egy, az érintősokaságon adott tenzor levetítettjét definiáljuk. Kiszámítjuk a vetített Douglas–tenzort – és ezzel minden készen áll ahhoz, hogy igazoljuk Sakaguchi észrevételét.

A fejezet fő eredményéhez a következő meggondolások figyelembevételével jutunk el: Landsberg–sokaságokon a Berwald–konnexió vegyes görbületi tenzora speciális alakú, a Douglas–tenzor (ill. a levetített Douglas–tenzor) eltűnése ezt a formát tovább specializálja. Ebből az alakból vezetünk le egy olyan önmagában is érdekes formulát, melyből nyomban adódik a következtetés, hogy az ilyen sokaságok Berwald–sokaságok.

Ez az elegáns eljárás a 2-dimenziós esetben nem működik, ugyanis ilyenkor a Douglas-tenzornak csak a Liouville vektormező irányában van nemzérus komponense, s így a vetített Douglas–tenzor automatikusan eltűnik. A következő fejezetben, más módszerrel, bebizonyítjuk az állítást a kétdimenziós esetben is. Tárgyalásunk Berwald eredeti gondolatmenetét követi; a fejezet első két része úgy tekinthető, mint annak egy intrinsic verziója. Az első részben bevezetjük a *Berwald–frame*t, a *főskalár*t és a *Gauss–görbület*et, levezetjük E. CARTAN *permutációs formulái*t valamint a *Bianchi–identitás*t. Ezek után a második részben igazoljuk az említett állítást.

Az utolsó részben a következő problémát vizsgáljuk: *milyen 2-dimenziós Finsler–sokaságokban lehetséges olyan konform változtatás, melynek során a Berwald–konnexió vegyes görbületi tenzora invariáns marad?* Ismeretes [58], hogy ebben az esetben a sokaság egy (lokális) Riemann–metrikával bír, így képezhető az α skálázó függvény ezen Riemann–metrika szerinti gradiense. Rögzítve egy v érintővektort úgy, hogy $v\alpha = 0$, a $c(t) := v + tgrad_R\alpha(p)$ előírással értelmezett görbe éppen az α skálázó függvény Riemann–gradiense vertikális liftjének a v-ből induló integrálgörbéje. Levezetünk egy differenciálegyenletet, melyet a Finsler–energiafüggvénynek teljesítenie kell ezen görbe mentén. Az egyenlet megoldása általános esetben nagyon bonyolult, ezért disszertációnkban csak egy egyszerűbb esetet vizsgálunk (az egyik paramétert rögzítjük). Ekkor a megoldások megegyeznek a BERWALD által meghatározott, konstans főskalárral rendelkező, szinguláris Finsler–energiafüggvényekkel. Megmutatjuk, hogy konstans főskalár esetén minden konform változtatás invariánsan hagyja a Berwald–konnexió vegyes görbületi tenzorát. Azt is bebizonyítjuk, hogy ekkor a Douglas–tenzor eltűnéséből következik a sokaság Berwald–volta.

Az itt közölt eredmények jelentős része már publikálásra került. Az első fejezet az [52] munkánk alapján íródott. Kiegészítettük ezt a Jacobi endomorfizmus alapvető tulajdonságainak tárgyalásával a 2. alfejezetben, s ugyancsak új a 7. alfejezetben a Weyl–tenzornak a Yano–konnexió adataival való kifejezése. A következő fejezet alapjául az [53] dolgozat szolgált, az utolsó alfejezete azonban az alternatíva tétel kivételével új. A harmadik fejezet az [56] dolgozat gondolatmenetét követi. Az utolsó rész első két alfejezete [57] cikkünkön alapul, az utolsó alfejezetéből készült munkánkat publikálásra benyújtottuk [58].

Megjegyzés. Jelen munkánkban a vastagon szedett számok a Disszertáció megfelelő definicióinak, tételeinek, ... számát jelentik. Az alapvető konvenciókat és jelöléseket egy rövid Appendixben foglaltuk össze.

I. SPRAY–SOKASÁGOK PROJEKTÍV INVARIÁNSAI

Az első részben az általunk használt fogalmi apparátus és a vektorértékű differenciálformák kalkulusának rövid áttekintése után a spray–sokaságok elméletének megalapozásával foglalkozunk. Az érintősokaságon két kanonikus objektum konstruálható: a vertikális endomorfizmus (a kanonikus majdnem–érintő struktúra), melyet a továbbiakban J-vel jelölünk, valamint a Liouville–vektormező (a kanonikus vertikális vektormező), melynek jele C.

2.1. Megközelítésünkben egy M sokaságon adott *nemlineáris konnexió* olyan, a nemzérus érintővektorok alkotta $\mathcal{T}M$ sokaságon sima h vektori 1–formát jelent, amely *projektor* ($h^2 = h$), és eltűnik a vertikális nyalábon. Ekkor azt mondjuk, hogy h *horizontális endomorfizmus* az M sokaságon. A $v := 1_{\mathfrak{X}(\mathcal{T}M)} - h$ a h-hoz tartozó *vertikális projektor.* Egy horizontális endomorfizmus képterét a *horizontális vektormezők modulusá*nak mondjuk.

2.2. Tegyük föl, hogy h horizontális endomorfizmus az M sokaságon! A

(2.2a) $$H := [h, C] \in \Psi^1(\mathcal{T}M),$$

(2.2b) $$t := [J, h] \in \Psi^2(\mathcal{T}M),$$

(2.2c) $$R := -N_h := -\frac{1}{2}[h, h] \in \Psi^2(\mathcal{T}M)$$

vektorértékű formákat rendre a horizontális endomorfizmus *tenzió*jának, *torzió*jának és *görbület*ének hívjuk. *h homogén*, ha tenziója eltűnik.

2.5. Egy

$$S : TM \to TTM, \quad v \mapsto S_v \in T_vTM$$

leképezést *semispray*nek mondunk, ha teljesíti a következő feltételeket:

(i) $$S \text{ sima } \mathcal{T}M\text{-en},$$

(ii) $$JS = C.$$

Az S semispraytet *spray*nek hívjuk, ha

(iii) $$S \quad C^1\text{–osztályú } TM\text{-en}$$

és

(iv) $$[C, S] = S \text{ (azaz } S \text{ másodfokú pozitív homogén).}$$

Egy sprayt *affin*nak vagy *kvadratikus*nak nevezünk, ha C^2–osztályú TM-en.

2.8. A horizontális endomorfizmusok és a semisprayk közötti alapvető relációt – egymástól függetlenül – M. Crampin és J. Grifone fedezte fel [15], [17], [25]. Eredményüket a következőképpen foglalhatjuk össze:

(i) Amennyiben h egy horizontális endomorfizmus, S' pedig egy semispray az M sokaságon, akkor az $S := hS'$ szintén semispray, mely nem függ az S' megválasztásától. S horizontális h-ra nézve és teljesíti a $h[C, S] = S$ összefüggést. S-et a *h-hoz tartozó semispray*nek mondjuk.

(ii) Minden $S : TM \to TTM$ semispray kanonikus módon generál egy horizontális endomorfizmust a

$$h := \frac{1}{2}(1_{\mathfrak{X}(TM)} + [J, S]) \tag{2.8}$$

reláció szerint. Az így definiált h torziómentes, a hozzátartozó semispray pedig $\frac{1}{2}(S + [C, S])$. Ha S spray, akkor h homogén és a hozzátarozó spray éppen a kiindulásul szolgáló S.

(iii) Egy horizontális endomorfizmus akkor és csak akkor származik (2.8) szerint semisprayből, ha torziómentes.

Egy h horizontális endomorfizmus birtokában a v vertikális projektort és az F majdnem–komplex struktúrát a szokásos módon nyerhetjük.

3.4. Amennyiben h horizontális endomorfizmus az M sokaságon, úgy h-hoz kanonikus módon tartozik egy Finsler–konnexió, amely a következő számolási szabályokkal írható le:

$$\overset{\circ}{D}_{JX} JY := J[JX, Y], \tag{3.4a}$$

$$\overset{\circ}{D}_{hX} JY := v[hX, JY], \tag{3.4b}$$

$$\overset{\circ}{D}_{vX} hY := h[vX, Y], \tag{3.4c}$$

$$\overset{\circ}{D}_{hX} hY := hF[hX, JY] \tag{3.4d}$$

és

$$\overset{\circ}{D}_X Y := \overset{\circ}{D}_{vX} vY + \overset{\circ}{D}_{hX} vY + \overset{\circ}{D}_{vX} hY + \overset{\circ}{D}_{hX} hY.$$

Könnyen ellenőrizhető, hogy ekkor $(\overset{\circ}{D}, h)$ valóban Finsler–konexió M-en. Ezt a konnexiót a h által indukált *Berwald–típusú konnexió*nak nevezzük. Ha speciálisan h sprayből származik, akkor $(\overset{\circ}{D}, h)$-t *Berwald–konnexió*nak hívjuk.

A következő lépésben általánosítjuk a Berwald–típusú konnexiókat.

5.1 Állítás. *Tegyük föl, hogy h horizontális endomorfizmus, F pedig az általa meghatározott majdnem–komplex struktúra az M sokaságon! Legyen $\beta \in \mathcal{T}_2^0(\mathcal{T}M)$ egy szimmetrikus tenzor, melyre teljesül, hogy*

$$\textit{bármely } S \textit{ semispray esetén}, \quad i_S\beta = 0, \tag{$*$}$$

s legyen adva továbbá egy $U \in \mathfrak{X}(TM)$ vertikális vektormező! Ekkor egyértelműen létezik olyan (D,h) Finsler–konnexió, mely eleget tesz a következő feltételeknek:

(i) *D v-vegyes torziója $\mathbb{P}^1 := \beta \otimes U$;*

(ii) *D h-vegyes torziója – a $\mathbb{B}$ tenzor – eltűnik.*

Ha ráadásul még

(iii) *(D,h) h-deflexiója eltűnik,*

(iv) *D h-horizontális torziója eltűnik,*

akkor a h horizontális endomorfizmus homogén és torziómentes. A D-szerinti kovariáns deriválásra a következő számolási szabályok érvényesek:

$$D_{JX}JY = J[JX,Y] = \overset{\circ}{D}_{JX}JY, \tag{5.1a}$$

$$D_{hX}JY = v[hX,JY] + \beta(X,Y)U = \overset{\circ}{D}_{hX}JY + \beta(X,Y)U, \tag{5.1b}$$

$$D_{vX}hY = h[vX,Y] = \overset{\circ}{D}_{vX}hY, \tag{5.1c}$$

$$D_{hX}hY = hF[hX,JY] + \beta(X,Y)FU = \overset{\circ}{D}_{hX}hY + \beta(X,Y)FU \tag{5.1d}$$

$(X,Y \in \mathfrak{X}(TM))$.

Minden Berwald–típusú konnexiónak két nem szükségképpen eltűnő parciális görbülete van: a horizontális és a vegyes görbület. Megmutatjuk, hogy a Berwald–típusú konnexió vegyes görbületének Ricci–tenzora szimmetrikus és potenciálmentes, így betöltheti az előző állításbeli β szerepét. Ez az észrevétel az imént nyert konnexió fontos specializálásához vezet:

5.3 Következmény és definició. *Tegyük föl, hogy h homogén, torziómentes horizontális endomorfizmus az M sokaságon! Ha $\overset{\sim}{\overset{\circ}{\mathbb{P}}}$ jelöli a $(\overset{\circ}{D},h)$ Berwald–típusú konnexió vegyes görbületének Ricci tenzorát, akkor egyértelműen létezik olyan (D,h) Finsler–konnexió M-en, melyre teljesül, hogy*

(i) *D v-vegyes torziója $\mathbb{P}^1 := \dfrac{1}{n+1}\overset{\sim}{\overset{\circ}{\mathbb{P}}} \otimes C$;*

(ii) *D h-vegyes torziója eltűnik.*

Ezt a Finsler–konnexiót a h által indukált Yano–típusú konnexió*nak, ill, ha h Berwald endomorfizmus, akkor a* Yano–konnexió*nak mondjuk.*

6.1. Az M sokaságon adott S és $\overline{S}$ sprayt *projektíven ekvivalens*nek nevezzük, ha létezik olyan $\lambda : TM \to \mathbb{R}$ függvény, melyre teljesülnek a következők:

(i) λ sima $\mathcal{T}M$-en, és C^1-osztályú TM-en;

(ii) $\overline{S} = S + \lambda C$.

Ekkor λ automatikusan 1-homogén ($C\lambda = \lambda$). Megfordítva, ha egy S spray és egy λ 1-homogén függvény adott, melyre teljesül (i), akkor $\overline{S} = S + \lambda C$ szintén spray. Ebben az esetben a spray *projektív megváltoztatás*áról beszélünk és azt is mondjuk, hogy az (M, S) és az $(M, \overline{S})$ spray–sokaságok *projektíven ekvivalensek.*

6.3. Tegyük föl, hogy h Berwald–endomorfizmus az M sokaságon. Ha (D, h) a h által indukált Yano–konnexió, $\mathbb{P}$ pedig a D vegyes görbületi tenzora, akkor a

$$\mathbb{D} := \mathbb{P} - \frac{1}{2}\left(\widetilde{\mathbb{P}} \otimes J + J \otimes \widetilde{\mathbb{P}}\right) \tag{6.3}$$

összefüggéssel definiált tenzort a Berwald–endomorfizmus *Douglas–tenzor*ának hívjuk.

Jegyezzük meg, hogy a $(\overset{\circ}{D}, h)$ Berwald–konnexió segítségével a $\mathbb{D}$ Douglas–tenzor a

$$\mathbb{D} = \overset{\circ}{\mathbb{P}} - \frac{1}{n+1}\left(\overset{\circ}{D}_J \widetilde{\overset{\circ}{\mathbb{P}}} \otimes C + \widetilde{\overset{\circ}{\mathbb{P}}} \odot J\right) \tag{6.4b}$$

alakban adható meg, ahol $\overset{\circ}{\mathbb{P}}$ $(\overset{\circ}{D}, h)$ vegyes görbületi tenzora.

6.6 Tétel. *Egy Berwald–endomorfizmus Douglas–tenzora invariáns a csatolt spray projektív változtatásaival szemben.*

A következő eredmény megvilágítja a Douglas–tenzor geometriai jelentését.

6.8 Tétel. *Tegyük föl, hogy h Berwald–endomorfizmus az M sokaságon, melyen egy térfogati forma is adott! A h-hoz tartozó spray akkor és csak akkor projektíven ekvivalens egy lineáris konnexió által meghatározott sprayvel, ha a Berwald–endomorfizmus Douglas–tenzora eltűnik.*

E tétel lokális verzióját J. Douglas fedezte föl [23], a globális verzió Z. Shen érdeme [48]. A mi bizonyításunk Shen ötletén alapul annyiban, hogy a projekív faktor megkonstruálásához térfogati formát veszünk igénybe. Meggondolásainkból az is kiderül, hogy *a spray divergenciája segítségével deformált spray által indukált Berwald–endomorfizmus vegyes görbülete éppen a Douglas–tenzor.*

II. SPRAY–SOKASÁGOK FINSLER–METRIZÁLHATÓSÁGA

A második részt a *Hilbert* 1*-formák* definiciójával indítjuk és itt rögzítjük a Finsler–sokaság általunk használt definicióját is. Finsler–struktúrán az M differenciálható sokaságon adott

$$L : TM \to \mathbb{R}$$

függvényt értünk, amely bizonyos differenciálhatósági, homogenitási és regularitási követelményeknek tesz eleget. Egy ilyen L *Finsler–Lagrange–függvény* vagy *Finsler–alapfüggvény* segítségével képezhetjük a sokaság *kanonikus spray*-jét, mely a szokásos módon horizontális endomorfizmust generál, így jutunk a Finsler–sokaság *Barthel–endomorfizmus*ához. Minthogy minden Finsler–sokaság spray–sokaság is egyben, ezért egy spray–sokaság és egy Finsler–sokaság, vagy két Finsler–sokaság projektív ekvivalenciájának értelmezésére külön már nincs szükség.

8.10 Állítás (a projekív ekvivalencia alapegyenlete)**.** *Ha* (M, S) *egy spray–sokaság és* $\overline{L}$ *egy Finsler-struktúra* M*-en, akkor* $\mathcal{T}M$ *fölött az* $\overline{L}$ *által generált* $\overline{S}$ *spray* S *segítségével az*

$$\overline{S} = S - \frac{S\overline{L}}{\overline{L}} C - \overline{L}(i_S dd_J \overline{L})^{\#} \tag{8.10}$$

formában adható meg, ahol a $\#$ *operátor* $(M, \overline{L})$ *fundamentális formája szerint veendő.*

Ezen összefüggés alapján az L alapfüggvényre intrinsic módon írunk föl másodrendű parciális differenciálegyenleteket. Koordinátás formájukat Rapcsák András fedezte fel a hatvanas években [42], [43], [44], [45], ezért ezeket a relációkat *Rapcsák–egyenletek*ként idézzük.

9.2 Tétel. *Legyen* (M, S) *egy spray–sokaság és jelölje* $(\mathring{D}, h)$ *az* S *által indukált Berwald–konnexiót! Ha* $\overline{L}$ *egy Finsler–alapfüggvény az* M *sokaságon, akkor a következő feltételek ekvivalensek:*

(1) (M, S) *és* $(M, \overline{L})$ *projektíven ekvivalensek.*

(2) $i_S dd_J \overline{L} = 0.$

(3) $d_h d_J \overline{L} = 0.$

(4) $\mathring{D}_h d_J \overline{L}(X, Y) = \mathring{D}_h d_J \overline{L}(Y, X) \quad (X, Y \in \mathfrak{X}(\mathcal{T}M)).$

10.1 M. Crampin tétele. *Tegyük föl, hogy S egy semispray az M sokaságon, és h az általa generált horizontális endomorfizmus! Amennyiben TM egy ω 2-formájára teljesülnek az*

(10.1a) $$\mathcal{L}_S\omega = 0,$$

(10.1b) $$\omega(JX, JY) = 0 \quad (X, Y \in \mathfrak{X}(TM)),$$

(10.1c) $$d\omega(hX, JY, JZ) = 0 \quad (X, Y, Z \in \mathfrak{X}(TM))$$

feltételek, akkor lokálisan létezik olyan K függvény, melyre $\omega = dd_J K$.

További feltételeket írva elő az előző tételbeli ω 2-formára, a következő eredmények nyerhetők:

10.3 Állítás. *Tegyük föl, hogy (M, S) egy spray–sokaság és az ω 2-forma teljesíti (10.1) feltételeit! Ha, ráadásul, ω 1-homogén és maximális rangú, akkor – lokálisan – létezik olyan E Finsler–energiafüggvény, hogy S az (M, E) Finsler–sokaság kanonikus spray-je.*

10.4 Állítás. *Legyen S az M sokaságon adott spray és tegyük föl, hogy az ω 2-forma teljesíti (10.1) feltételeit! Vezessük be a μ tenzort az alábbi előírással: $\mu(JX, JY) := \omega(JX, Y)$ $(X, Y \in \mathfrak{X}(TM))$. Ha teljesül még, hogy $i_C\omega = 0$ és tetszőleges $v \in \mathcal{T}M$, $X \neq \lambda C \in \mathfrak{X}(TM)$ $(\lambda \in C^\infty(TM))$ esetén $\mu(X, X)(v) > 0$, akkor – lokálisan – létezik olyan L Finsler–alapfüggvény, hogy az adott S spray projektíven ekvivalens (M, L) kanonikus spray-jével.*

A továbbiakban egy másik oldalról is megközelítjük a metrizálhatósági problémát: egy szimmetrikus $(0, 2)$-tenzor segítségével írunk elő szükséges és elegendő feltételeket egy spray Finsler–variációsságára.

10.6 Állítás. *Legyen (M, S) egy spray–sokaság és jelölje $(\overset{\circ}{D}, h)$ az általa származtatott Berwald–konnexiót! Tegyük föl, hogy g egy nemelfajuló, szimmetrikus $(0, 2)$-tenzor a vertikális nyalábon és definiáljuk a $\mathcal{C}_\flat$ tenzort a $\mathcal{C}_\flat := \overset{\circ}{D}_J J^* g$ előírással! Amennyiben*

(10.6a) $$\mathcal{C}_\flat \quad \textit{teljesen szimmetrikus},$$

(10.6b) $$i_S\mathcal{C}_\flat = 0,$$

(10.6c) $$\overset{\circ}{D}_S J^* g = 0,$$

akkor S az $E := \frac{1}{2}g(C, C)$ energiafüggvényhez tartozó (M, E) Finsler–sokaság kanonikus spray-je.

10.9 Tétel (Alternatíva–tétel)**.** (i) *Legyen (M, S) egy spray–sokaság és $\overset{\circ}{D}$ az S által indukált Berwald–konnexió! Ha (M, S) projektíven ekvivalens az $(M, \overline{L})$ Finsler–sokasággal, akkor a*

(10.9a) $$\overline{\mu} : (JX, JY) \in \mathfrak{X}(TM) \times \mathfrak{X}(TM) \mapsto \overline{\mu}(JX, JY) := dd_J\overline{L}(JX, Y)$$

előírással definiált $\overline{\mu}$ *tenzor rendelkezik az alábbi tulajdonságokkal:*

$$\text{(10.9b,c)} \qquad \overset{\circ}{D}_S J^*\overline{\mu} = 0; \qquad \underset{X,Y,Z\in\mathfrak{X}(TM)}{\mathfrak{S}} \overline{\mu}(JX, R(Y,Z)) = 0.$$

(ii) *Megfordítva legyen* (M, L^*) *egy Finsler–sokaság és tegyük föl, hogy az* L^* *alapfüggvény által származtatott* μ^* *tenzorra teljesül* (10.9b,c)*! Ekkor*

(I) (M, S) *projektíven ekvivalens* (M, L^*)*-gal,*

vagy

(II) *lokálisan létezik olyan* η 1*-forma, hogy* (M, S) *projektíven ekvivalens az* $(M, L^* + \widetilde{\eta})$ *Finsler–sokasággal, ahol* $\widetilde{\eta} := (\eta^v)^\circ$*.*

Az előző tételbeli PDE integrabilitási feltételeit a következő eredményünk rögzíti:

10.10 Tétel. *Tegyük föl, hogy* (M, S) *egy spray–sokaság és létezik a vertikális nyalábon olyan* μ *tenzor, mely teljesíti az alábbi feltételeket:*

(1) $i_C\mu = 0$,

(2) $\overset{\circ}{D}_S J^*\mu = 0$,

(3) $\underset{X,Y,Z\in\mathfrak{X}(TM)}{\mathfrak{S}} \mu(JX, R(Y,Z)) = 0$,

(4) $\overset{\circ}{D}_J J^*\mu$ *teljesen szimmetrikus ,*

(5) *ha* $X \in \mathfrak{X}^v(TM)$ *nem egyirányú a* C *Liouville–vektormezővel, akkor* $\mu(X, X)$ *pozitív–értkű függvény* $\mathcal{T}M$*-en.*

Ekkor létezik egy L *pozitív Finsler–alapfüggvény úgy, hogy* (M, L) *kanonikus spray-je projektíven ekvivalens az adott* S *sprayvel.*

III. VETÍTÉS AZ INDIKÁTRIX–NYALÁBRA

A harmadik részben először egy Finsler–sokaság alapvető metrikus adatait tekintjük át: bevezetjük a *Riemann–Finsler–metrikát*, az *első* és *második Cartan–tenzort*, valamint összegezzük a *klasszikus Cartan–konnexió* (számunkra) legfontosabb tulajdonságait. Ezt követően két speciális Finsler–sokaság, a *Landsberg–* és a *Berwald–sokaság* néhány jólismert tenzoriális jellemzésére emlékeztetünk. Ezen előkészületek után az indikátrix–nyalábra történő vetítés intrinsic konstrukcióját adjuk meg.

13.1. Egy (M, L) Finsler–sokaság *indikátrix–nyaláb*ján a következő $(2n-1)$-dimenziós résznyalábot értjük:

$$U(M) := \{v \in TM \mid L(v) = 1\}.$$

13.3 Lemma. *Egy (M, L) Finsler–sokaság g Riemann–Finsler–metrikájára nézve a C Liouville–vektormező ortogonális az indikátrix–nyalábra, azaz $g(C, X) = 0$ teljesül minden $X \in \mathfrak{X}[U(M)]$ vektormező esetén. Az $\frac{1}{L}C$ vektormező az indikátrix–nyaláb normál–egységvektormezője.*

Ezen észrevétel alapján közvetlenül adódik az ortogonális vetítés operátorának konstrukciója. Ennek segítségével definiáljuk egy, az érintőnyalábon adott tenzor indikátrix–nyalábra való levetítettjét.

13.4 Lemma. *Legyen (M, L) pozitív Finsler–sokaság! A*

$$\tau := I - \frac{1}{2E}\, dE \otimes C$$

leképezés projektor ($\tau^2 = \tau$). Minden $X \in \mathfrak{X}(\mathcal{T}M)$ vektormező esetén a $\tau(X) \restriction U(M)$ az indikátrix–nyaláb érintő–vektormezője.

13.8 Definició. *Tegyük föl, hogy (M, L) pozitív Finsler–sokaság, legyen $A \in \mathcal{T}_r^0(\mathcal{T}M)$, $K \in \mathcal{T}_r^1(\mathcal{T}M)$ $(r \in \mathbb{N}^+)$ és tekintsük a $\tau = I - \frac{1}{2E}dE \otimes C$ operátort! Az*

$$A^*(X_1, \ldots, X_r) := A(\tau(X_1), \ldots, \tau(X_r))$$

és

$$K^*(X_1, \ldots, X_r) := \tau\left[K(\tau(X_1), \ldots, \tau(X_r))\right]$$

$(X_i \in \mathfrak{X}(\mathcal{T}M),\ 1 \leqq i \leqq r)$ előírással értelmezett tenzorokat az A, ill. a K tenzor levetített tenzor*ának mondjuk.*

Ezek után a Douglas–tenzor levetített tenzorát számítjuk ki.

13.10 Állítás. *Egy (M, L) Finsler–sokaság*

$$\mathbb{D} = \mathring{\mathbb{P}} - \frac{1}{n+1}\Big(\mathring{D}_J \tilde{\mathring{\mathbb{P}}} \otimes C + \tilde{\mathring{\mathbb{P}}} \odot J\Big) \in \mathcal{T}^1_3(\mathcal{T}M) \tag{13.10a}$$

Douglas–tenzorának levetített tenzora a

$$\mathbb{D}^* = \mathring{\mathbb{P}} - \frac{1}{n+1}\tilde{\mathring{\mathbb{P}}} \odot \kappa + \frac{1}{E}\mathcal{C}'_\flat \otimes C \tag{13.10b}$$

tenzor, ahol $\kappa := J^* \circ \tau$.

13.10 Következmény. *A $\mathbb{D}$ Douglas–tenzor és $\mathbb{D}^*$ levetítettjének kapcsolatát a*

$$\mathbb{D}^* = \mathbb{D} + \left[\frac{1}{E}\mathcal{C}'_\flat + \frac{1}{n+1}\left(\mathring{D}_J \tilde{\mathring{\mathbb{P}}} + \frac{1}{2E}\tilde{\mathring{\mathbb{P}}} \odot d_J E\right)\right] \otimes C \tag{13.11}$$

reláció adja.

Az így kapott formula alkalmazásával adunk új, koordinátamentes bizonyítást Sakaguchi bevezetőben említett állítására.

13.12 Tétel. *Ha (M, L) legalább 3-dimenziós pozitív Finsler–sokaság, akkor a levetített Douglas–tenzor eltűnése ekvivalens magának a Douglas–tenzornak az eltűnésével.*

Landsberg–sokaságokon a Berwald–konnexió vegyes görbülete speciális alakú. A Douglas–tenzor – ill. az előző tételünk szerint a levetített Douglas–tenzor – ezt még tovább specializálja és egyszerűsíti. Ebből vezetjük le a

$$(n-2)\widetilde{\tilde{\mathring{\mathbb{P}}}^{\#}}\,\widetilde{\mathcal{C}} = 0$$

formulát, melyből közvetlenül adódik a

14.5 Tétel. *Tegyük föl, hogy (M, L) $n > 2$–dimenziós Landsberg–sokaság! Ha a Douglas–tenzor eltűnik, akkor (M, L) Berwald–sokaság.*

IV. ALKALMAZÁSOK 2-DIMENZIÓS FINSLER–SOKASÁGOKRA

15.1 A Berwald–frame. Ebben a fejezetben végig egy (M, L) 2-dimenziós Finsler–sokaságon dolgozunk és feltesszük, hogy az L-ből származó g Riemann–Finsler–metrika pozitív definit. A C Liouville–vektormezőből és az S kanonikus sprayből képzett egységvektormezőket

$$C_0 := \frac{1}{L}C \quad \text{és} \quad S_0 := \frac{1}{L}S$$

jelöli. A Gram–Schmidt ortogonalizálási eljárással – lokálisan – mindig konstruálhatunk egy X_0 vektormezőt úgy, hogy (C_0, X_0) az $\mathfrak{X}^v(\mathcal{T}M)$ g-re nézve ortonormált bázisát alkossa. A Barthel–endomorfizmus által meghatározott F majdnem–komplex struktúra alkalmazásával kapjuk az $\mathfrak{X}^h(\mathcal{T}M)$ (FX_0, S_0) alkotta g-ortogonális bázisát. Az $\mathfrak{X}(\mathcal{T}M)$ modulus így készített

$$(C_0, X_0, FX_0, S_0)$$

lokális bázisát a sokaság *Berwald–frame*-jének hívjuk.

L. Berwald eredeti gondolatmenetét követve, a továbbiakban minden geometriai objektumot a Berwald–frame alkotta bázisban írunk föl.

15.4 Definició és megjegyzés. *A*

$$\lambda := g(\mathcal{C}(FX_0, FX_0), X_0) \tag{15.4}$$

függvényt a sokaság főskalár*jának mondjuk.* λ *csak az* X_0 *vektormező választásától függ, így előjel erejéig egyértelműen meghatározott.*

15.9 Állítás és definició. *Tekintsük a Barthel–endomorfizmus* $R = -\frac{1}{2}[h, h]$ *görbületét! A Berwald–frame értelmezési tartományán* R*-et egyértelműen meghatározza az*

$$R(FX_0, S_0) = g(R(FX_0, S_0), X_0)X_0 \tag{15.9a}$$

összefüggés. A

$$\kappa := g(R(FX_0, S_0), X_0) \tag{15.9b}$$

függvényt a sokaság Gauss–görbület*ének nevezzük.*

15.10 Tétel (E. Cartan “permutációs formulái”). *A Berwald–frame tagjainak Lie–zárójelei a következőképpen állíthatók elő a Berwald-frame-ben:*

(15.10a-c)
$$\boxed{\begin{aligned} [X_0, FX_0] &= -\frac{1}{L}S_0 - \lambda FX_0 \; - S(\lambda)X_0 \\ [S_0, X_0] &= \qquad\quad -\frac{1}{L}FX_0 \\ [FX_0, S_0] &= \qquad\qquad\qquad\quad - \kappa X_0 \end{aligned}}$$

(λ a sokaság főskalárja, κ pedig a Gauss–görbülete).

15.11 Állítás (“Bianchi–identitás”).

(15.11)
$$\boxed{\lambda\kappa + X_0(\kappa) + S_0(S\lambda) = 0}\,.$$

Ezen előkészületek után egy intrinsic bizonyítást adunk Berwald tételére.

16.6 Tétel. *Ha egy 2-dimenziós, pozitív definit Landsberg–sokaság Douglas–tenzora eltűnik, akkor a sokaság Berwald–sokaság.*

Végezetül egy, a Finsler–sokaságok konform ekvivalenciájával kapcsolatos problémát tárgyalunk. Ugyanazon M sokaságon adott L és $\widetilde{L}$ Finsler–alapfüggvényt *konform ekvivalens*nek nevezzük, ha létezik olyan $\varphi : \mathcal{T}M \to \mathbb{R}$ pozitív, sima függvény, hogy a megfelelő g és $\widetilde{g}$ Riemann–Finsler–metrikákra fennáll a $\tilde{g} = \varphi g$ összefüggés. Ilyenkor azt is mondjuk, hogy a $\widetilde{g}$ Riemann–Finsler–metrika a g konform változtatottja. φ mindig felírható a $\varphi = exp \circ \alpha^v$, $\alpha^v = \alpha \circ \pi$, $\alpha \in C^\infty(M)$ alakban [46], ezért a konform módon megváltoztatott metrikát g_α-val jelöljük, azaz $g_\alpha := (exp \circ \alpha^v)g$.

Célunk mindazon 2-dimenziós Finsler–sokaságok meghatározása, amelyek megengednek a Berwald–konnexió vegyes görbületi tenzorát invariánsan hagyó konform változtatásokat.

Tegyük föl, hogy az $E_\alpha = \varphi E$ konform változtatás során $\mathring{\mathbb{P}}_\alpha = \mathring{\mathbb{P}}$! Amennyiben h_α és h jelöli a megfelelő Barthel–endomorfizmusokat, akkor

$$\begin{aligned} 0 &= \mathring{\mathbb{P}}_\alpha(X^c, Y^c)Z^c - \mathring{\mathbb{P}}(X^c, Y^c)Z^c \overset{(4.9)}{=} [[X^{h_\alpha}, Y^v], Z^v] - [[X^h, Y^v], Z^v] \\ &= [[X^{h_\alpha}, Y^v] - [X^h, Y^v], Z^v] \end{aligned}$$

teljesül minden $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ vektormező esetén. Ez azt jelenti, hogy $[X^{h_\alpha}, Y^v] - [X^h, Y^v]$ vertikális lift. Könnyű lokális számolás eredményeként adódik ebből, hogy a $h_\alpha - h$ különbségtenzor komponensei lineárisak az érintőtereken, vagy – ezzel ekvivalens módon – a megfelelő kanonikus sprayk különbsége kvadratikus vektormező. Ismert [54], hogy

$$S_\alpha = S - \alpha^c C + E(d\alpha^v)^\#,$$

ahol α^c az α teljes liftje ($\alpha^c := S\alpha^v$) és $i_{(d\alpha^v)^\#}\omega = d\alpha^v$. Kiértékelve ennek a relációnak mindkét oldalát α^c-n, azt kapjuk, hogy

$$Eg((d\alpha^v)^\#, (d\alpha^v)^\#) = (S_\alpha - S)\alpha^c + (\alpha^c)^2.$$

Ennek az egyenletnek a jobb oldalán kvadratikus függvény áll, amelyet tekinthetünk egy E_R (lokális) Riemann–energiafüggvénynek azzal a regularitái feltétellel, hogy $d_p\alpha \neq 0$ ($p \in M$). Legyen $grad_R\alpha$ és $grad_R^v\alpha$ az α skálázó függvény Riemann–gradiense, ill. annak a vertikális liftje. Minthogy a sokaságunk 2-dimenziós, a

$$JX := (d\alpha^v)^\#, \quad Y^v := grad_R^v\alpha \quad \text{és} \quad C$$

vektormezők lineárisan függő vertikális vektormezők. Legyen $c(t) := v + tY(p)$, ahol $p \in M$ és $v \in T_pM \cap Ker\alpha^c$! Ekkor c a $grad_R^v\alpha$ integrálgörbéje. Kiértékelve a JX, Y^v és a C vektormezők g szerinti Gram–determinánsát c mentén, azt kapjuk, hogy

$$\Big(2Eg(JX,JX)g(Y^v,Y^v) + 2g(JX,Y^v)g(Y^v,C)g(JX,C) - g^2(JX,C)g(Y^v,Y^v) \\ - g^2(Y^v,C)g(JX,JX) - 2Eg^2(JX,Y^v)\Big) \circ c = 0.$$

Mivel

$$Eg(JX,JX) = E_R, \quad g(JX,Y^v) = (Y\alpha)_p, \quad g(Y^v,C) = Y^vE, \\ g(JX,C) = \alpha^c, \quad g(Y^v,Y^v) = Y^v(Y^vE),$$

így a következő differenciálegyenlethez jutunk:

$$2\big(a^2 + t^2b^2(1-b^2)\big)y(t)y''(t) - (a^2+t^2b^2)\big(y'(t)\big)^2 + 4tb^4y(t)y'(t) - 4b^4\big(y(t)\big)^2 = 0$$

($y := E \circ c$, $a^2 := 2E_R(v)$, $b^2 := 2E_R(Y(p))$). A Cauchy–Schwarz–egyenlőtlenség szerint itt $0 < b^2 \leq 1$. Bevezetve a $z = \dfrac{y'}{y}$ függvényt, nyerjük az alábbi Riccati–típusú differenciálegyenletet:

$$\big(a^2 + t^2b^2(1-b^2)\big)z'(t) + \frac{1}{2}\big(a^2 + t^2b^2(1-2b^2)\big)\big(z(t)\big)^2 + 2tb^4z(t) - 2b^4 = 0.$$

Ha az a és b paraméter tetszőleges, akkor az egyenlet megoldása nagyon komplikált, ezért csak a $b^2 = 1$ esetet tárgyaljuk. Ekkor a $z(0) := \dfrac{K}{a}$ kezdeti feltétel mellett, ahol a K valós paraméter, a megoldás:

$$z(t) = 2\frac{2t+Ka}{2t^2+tKa+2a^2} = \frac{2t+Ka}{\Big(t+\dfrac{Ka}{4}\Big)^2 + a^2\Big(1-\dfrac{K^2}{16}\Big)}.$$

A K paramétertől függően a következő esetek adódnak:

(**A**) $K^2 < 16$. Ekkor

$$E \circ c(t) = 4K^* \left(E_R \circ c(t) + KL_R(v)\frac{t}{4} \right)$$

$$exp\frac{2K}{\sqrt{16-K^2}}\left(arctan\frac{4t+KL_R(v)}{L_R(v)\sqrt{16-K^2}} - arctan\frac{2K}{\sqrt{16-K^2}} \right).$$

(**B**) $K^2 = 16$. Ebben az esetben

$$E \circ c(t) = K^* \left(t + \frac{KL_R(v)}{4} \right)^2 exp\ \frac{-2KL_R(v)}{4t+KL_R(v)}.$$

(**C**) $K^2 > 16$ esetén

$$E \circ c(t) = K^* \left(t + \frac{L_R(v)}{4}\left(K - \sqrt{K^2-16}\right) \right)^{\left(1+\frac{K}{\sqrt{K^2-16}}\right)}$$

$$\left(t + \frac{L_R(v)}{4}\left(K + \sqrt{K^2-16}\right) \right)^{\left(1-\frac{K}{\sqrt{K^2-16}}\right)}.$$

Ezek a függvények éppen a Berwald által megtalált, konstans főskalárral rendelkező szinguláris Finsler–alapfüggvények. Az (**A**) eset diszkussziójának eredményeként adódik a

17.8 Tétel. *Ha az M 2-dimenziós Finsler–sokaság az* (**A**) *pontban adott energiafüggvénnyel rendelkezik, akkor a következő feltételek ekvivalansek:*

(1) (M, E) *Douglas–sokaság.*
(2) (M, E) *Landsberg–sokaság.*
(3) (M, E) *Berwald–sokaság.*

A következő eredményünk úgy is tekinthető mint a konstans főskalárral rendelkező 2-dimenziós Finsler–sokaságok egy új, geometriai származtatása.

17.9 Tétel. *Amennyiben egy 2-dimenziós Finsler–sokaság konstans főskalárral rendelkezik Berwald–féle értelemben, azaz $L\lambda$ fibrumonként konstans függvény, akkor a Berwald–konnexió vegyes görbületi tenzora invariáns bármilyen konform változtatás során.*

APPENDIX: MEGÁLLAPODÁSOK ÉS JELÖLÉSEK

(1) A disszertációban M mindvégig egy, a második megszámlálhatósági axiómának eleget tevő, összefüggő differenciálható sokaságot jelöl. $C^\infty(M)$ a sokaság valós függvényeinek gyűrűje, $\mathfrak{X}(M)$ a sokaság vektormezőinek $C^\infty(M)$-modulusa. Az r-ed rendben kovariáns és s-ed rendben kontravariáns ($(r,s) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$) tenzorok modulusa $\mathcal{T}_s^r(M)$. Egy $\omega_1 \in \mathcal{T}_{s_1}^\circ(M)$ és egy $\omega_2 \in \mathcal{T}_{s_2}^\circ(M)$ tenzor $\omega_1 \odot \omega_2$ szimmetrikus szorzatát az

$$\omega_1 \odot \omega_2 := \frac{(s_1+s_2)!}{s_1!s_2!}\mathrm{Sym}\,(\omega_1 \otimes \omega_2)$$

formula definiálja, míg egy $\omega \in \mathcal{T}_s^0(M)$ és egy $L \in \mathcal{T}_r^1(M)$ tenzor $\omega \odot L$ szimmetrikus szorzatát az

$$\omega \odot L(X_1,\dots,X_{s+r}) := \frac{1}{s!r!}\sum_{\sigma\in S_{s+r}} \omega(X_{\sigma(1)},\dots,X_{\sigma(s)})L(X_{\sigma(s+1)},\dots,X_{\sigma(s+r)})$$

előírás értelmezi. $\Omega^k(M)$ $(0 \le k \le n)$ jelöli az M-en adott differenciálformák modulusát, $\Omega^\circ(M) := C^\infty(M)$. $\Omega(M) := \bigoplus_{k=0}^{n} \Omega^k(M)$ gradált algebra az ékszorzás műveletével. Egy $\omega \in \mathcal{T}_s^0(M)$ és egy $L \in \mathcal{T}_r^1(M)$ tenzor $\omega \wedge L$ ékszorzatát a

$$\omega \wedge L(X_1,\dots,X_{s+r}) := \frac{1}{s!r!}\sum_{\sigma\in S_{s+r}} \varepsilon(\sigma)\omega(X_{\sigma(1)},\dots,X_{\sigma(s)})L(X_{\sigma(s+1)},\dots,X_{\sigma(s+r)})$$

formula definiálja.

(2) Az E sokaságon adott vektorértékű k-formán (vektor-k-formán) egy $C^\infty(E)$-multilineáris, ferdeszimmetrikus $[\mathfrak{X}(E)]^k \to \mathfrak{X}(E)$ leképezést értünk, ha $k \in \mathbb{N}^+$, $k=0$ esetén pedig egy E-n adott vektormezőt. Az E sokaság vektorértékű k-formái $C^\infty(E)$-modulust alkotnak, ezt $\Psi^k(E)$-vel jelöljük. Minden $K \in \Psi^k(E)$ vektor-k-formához az $\Omega(E)$ két gradált derivációja tartozik: i_K és d_K. Az i_K az $(k-1)$-edfokú deriváció és az

$$i_K \restriction C^\infty(E) = 0; \quad i_K\omega := \omega \circ K, \quad \text{ha } \omega \in \Omega^1(E)$$

formula határozza meg; míg $d_K := [i_K, d] := i_K \circ d - (-1)^{k-1} d \circ i_K$, ahol d a külső differenciálás operátora. Az $X \in \Psi^0(E) = \mathfrak{X}(E)$ vektormező esetén i_X a szokásos szubsztitució, d_X az X vektormező szerinti Lie–deriválás operátora. Ezt $\mathcal{L}_X$-szel is jelöljük. Ha $K \in \Psi^1(E)$, akkor a

$$K^*\omega\,(X_1,\dots,X_\ell) := \omega\,(K\,(X_1),\dots,K\,(X_\ell)) \quad (X_i \in \mathfrak{X}(E),\ 1 \le i \le \ell)$$

formula értelmezi a

$$K^* : \Omega(E) \to \Omega(E), \quad \omega \in \Omega^\ell(M) \mapsto K^*\omega$$

endomorfizmust.

(3) Tegyük föl, hogy $K \in \Psi^k(E)$ és $L \in \Psi^\ell(E)$! d_K és d_L gradált kommutátorát a következő formula definiálja:

$$[d_K, d_L] = d_K \circ d_L - (-1)^{k\ell} d_L \circ d_K.$$

A *Frölicher-Nijenhuis-elmélet* ([24], [29], [51]) egyik alapvető eredménye szerint egyértelműen létezik olyan $[K, L] \in \Psi^{k+\ell}(E)$ vektor–forma, hogy

$$[d_K, d_L] = d_{[K,L]}.$$

$[K, L]$ vektori formát a K és az L formák *Frölicher-Nijenhuis zárójel*ének hívjuk. Vektormezők esetén ez a definició éppen a vektormezők Lie–zárójelét adja vissza.

(4) Az M sokaság érintőnyalábja $\pi : TM \to M$, míg $\pi_0 : \mathcal{T}M \to M$ jelenti a nemzéró érintővektorok nyalábját. A π kanonikus projekció érintő leképezésének a magja a TTM egy résznyalábja, ezt vertikális nyalábnak nevezzük. Ennek a nyalábnak a metszeteit *vertikális vektormezők*nek mondjuk, ezek egy $C^\infty(TM)$-modulust alkotnak, melyet $\mathfrak{X}^v(TM)$-mel jelölünk. Egy $f \in C^\infty(M)$ sima függvény vertikális liftjén az $f^v := f \circ \pi \in C^\infty(TM)$ függvényt értjük, f teljes liftjét pedig az $f^c : TM \to \mathbb{R}, \quad v \mapsto f^c(v) := v(f)$ előírással adhatjuk meg.

(5) Egy szimmetrikus vagy ferdeszimmetrikus $A \in \mathcal{T}_s^0(TM)$ $(s \neq 0)$ tenzort *szemibázikus*nak mondunk, ha

$$\forall\, X \in \mathfrak{X}(TM) : i_{JX} A = 0.$$

Hasonlóan, egy szimmetrikus vagy ferdeszimmetrikus vektor–értékű $L \in \mathcal{T}_s^1(TM)$ $(s \neq 0)$ tenzort akkor nevezünk szemibázikusnak, ha

$$\forall\, X \in \mathfrak{X}(TM) : i_{JX} L = 0 \quad \text{és} \quad J \circ L = 0.$$

Tegyük föl, hogy F egy, a TM-en adott, tetszőleges h horizontális endomorfizmus által meghatározott majdnem–komplex struktúra! Tekintsünk egy $L \in \mathcal{T}_s^1(TM)$ szemibázikus tenzort! Az L tenzor $\widetilde{L}$ *szemibázikus trace*-ét (nyomát) a következő rekurzív definicióval értelmezzük:

$$\text{ha } s = 1, \text{ akkor } \widetilde{L} := tr(F \circ L);$$
$$\text{ha } s \geq 2, \text{ akkor } \forall\, X \in \mathfrak{X}(TM) : i_X \widetilde{L} := \widetilde{i_X L}.$$

Könnyen látható, hogy $\widetilde{L}$ nem függ a h horizontális endomorfizmus megválasztásától.

(6) Tegyük föl, hogy h egy horizontális endomorfizmus az M sokaságon és F az általa meghatározott majdnem–komplex struktúra! A (D, h) párt *Finsler–konnexió*nak hívjuk, ha D egy lineáris konnexió a TM vagy a $\mathcal{T}M$ sokaságon, melyre teljesül,

hogy $Dh = 0$ és $DF = 0$. Legyen (D, h) egy Finsler–konnexió az M sokaságon! Jelölje $\mathbb{T}$ és $\mathbb{K}$ a D (klasszikus) torzióját és görbületét! Könnyű megmutatni, hogy $\mathbb{T}$-t teljesen meghatározzák a következő leképezések:

$$\mathbb{A} : (X, Y) \mapsto h\mathbb{T}(hX, hY) - \textit{h-horizontális torzió},$$

$$\mathbb{B} : (X, Y) \mapsto h\mathbb{T}(hX, JY) - \textit{h-vegyes torzió},$$

$$\mathbb{R}^1 : (X, Y) \mapsto v\mathbb{T}(hX, hY) - \textit{v-horizontális torzió},$$

$$\mathbb{P}^1 : (X, Y) \mapsto v\mathbb{T}(hX, JY) - \textit{v-vegyes torzió},$$

$$\mathbb{S}^1 : (X, Y) \mapsto v\mathbb{T}(JX, JY) - \textit{v-vertikális torzió}.$$

Hasonlóan, $\mathbb{K}$-t az alábbi leképezések írják le:

$$\mathbb{R} : (X, Y, Z) \mapsto \mathbb{K}(hX, hY)JZ - \textit{horizontális görbület},$$

$$\mathbb{P} : (X, Y, Z) \mapsto \mathbb{K}(hX, JY)JZ - \textit{vegyes görbület},$$

$$\mathbb{Q} : (X, Y, Z) \mapsto \mathbb{K}(JX, JY)JZ - \textit{vertikális görbület}.$$

Az $\mathbb{R}, \mathbb{P}, \mathbb{Q} \in \mathcal{T}_3^1(TM)$ tenzorok szemibázikusak.

(7) Legyen (D, h) egy Finsler–konnexió az M sokaságon! Amennyiben $L \in \mathcal{T}_3^1(TM)$ jelöli a (D, h) horizontális, vegyes vagy vertikális görbületét, úgy az

$$\widetilde{L} : (X, Y) \in \mathfrak{X}(TM) \times \mathfrak{X}(TM) \mapsto \widetilde{L}(X, Y) := tr[F \circ (Z \mapsto L(Y, Z)X)]$$

$(0, 2)$-tenzort a (D, h) *horizontális*, *vegyes*, ill. *vertikális Ricci–tenzor*ának nevezzük. (F a h által meghatározott majdnem–komplex stuktúra.) Ha az L^* tenzort az

$$L^*(X, Y, Z) := L(Y, Z)X$$

összefüggés értelmezi, akkor az $\widetilde{L}$ Ricci-tenzor az L^* (5)-ben definiált szemibázikus trace-e.

INTRODUCTION

Our PhD dissertation treats some current problems, as well as some old problems from a new point of view of spray and Finsler geometry in the framework of the theory initiated by Joseph Grifone in the early seventies of the last century ([25],[26]). We apply mainly the calculus of vector–valued differential forms elaborated by A. Frölicher and A. Nijenhuis [24] combining it with (and simplifying at the same time) a quite systematic use of a moving frame field consisting of vertically and completely (or vertically and horizontally) lifted vector fields.

Spray geometry grew out the theory of 'affinely connected manifolds', i.e. the theory of manifolds endowed with a torsion–free linear connection. The differential equations for the geodesics on such a manifold are quadratic in the velocities, in modern terms: the geodesic spray of a linear connection is 2-homogeneous and of class C^2. If we weaken the differentiability hypothesis and require the 1-times continuous differentiability, we arrive at the concept of (general) **spray**s. This seemingly mild generalization leads us to the territory of the *general geometry of paths*. The local study of sprays is a classical field in differential geometry, whose first golden age was in the twenties–thirties of the last century. Several outstanding mathematicians worked in this area, e.g. L. Berwald, E. Cartan, J. Douglas, M. S. Knebelmann, T. Y. Thomas, O. Veblen and others. L. P. Eisenhart's excellent book 'Non–Riemannian Geometry' (Amer. Math. Soc. Colloq. Publ. **8**, 1927) gives a good picture of the spirit and technique of these investigations.

A renaissance of spray geometry began in the 1970's, with a recognition of the fundamental role of sprays in the geometrical background of Lagrangian mechanics [16, 18], and, in particular, in the foundations of Finsler geometry [25, 26]. Indeed, in differential–geometric terms, the dynamics of a time–independent Lagrangian dynamical system is determined by a spray acting on the tangent manifold of the configuration space of the system. The 'canonical spray' of a Finsler manifold arises from the energy determined by a suitable Lagrangian. J. Klein, J. Grifone and M. Crampin did pioneering work in this field, and our Thesis follows the path which was opened by them.

One of the main topics of our dissertation belongs to the territory of the *projective geometry of sprays*. Roughly speaking, two sprays over the same manifold are said to be *projectively equivalent* if they have the same geodesics as point sets, i.e., if they have common pregeodesics. (Recall: a curve is called pregeodesic of a spray if it has a reparametrization as a geodesic). A diffeomorphism of a manifold endowed with a spray is said to be a *projective transformation* if it sends geodesics to pregeodesics. Roughly speaking again, in the projective geometry of sprays we are interested in those properties which are invariant under projective transformations. The main ingredient of Part I of our thesis is a projectively invariant tensor, the so–called *Douglas tensor*. In the context of affine sprays, a fundamental projectively invariant tensor, the *Weyl projective curvature tensor* (briefly Weyl tensor) has already been constructed [61]. The counterpart of the Weyl curvature tensor in the more general context on non–affine (i.e. not necessarily affine) sprays was intrinsically constructed by L. del Castillo [20] in 1976, using the Frölicher–Nijenhuis formalism; see also [34].

In order to build up the Douglas tensor, we represent the nonlinear connections by *horizontal endomorphisms*, i.e. by projectors whose kernel is the vertical subbundle (differentiability on the zero section is not required!). Any horizontal endomorphism gives rise to a special Finsler connection, called a *Berwald-type connection*. A Berwald-type connection is said to be a *Berwald connection* if the horizontal endomorphism is generated by a spray. In this case the horizontal endomorphism will be mentioned as a *Berwald endomorphism*. Any Berwald-type connection has two surviving "partial curvatures", the horizontal and the mixed curvature. A careful analysis of the behavior of the mixed curvature of a Berwald connection under a projective change of the associated spray yields the Douglas tensor. However, in order to identify the Douglas tensor we have followed a slightly different path. As a generalization of Berwald-type connections, we introduce the so-called *Yano-type connections*. If, in particular, we start from a Berwald endomorphism, then the construction results in a *Yano connection*, called also – unfortunately – a projective connection. In our present approach the definition, as well as the proof of the projective invariance of the Douglas tensor is given in terms of a Yano connection.

In *part II* we start with the definition of a *Hilbert 1-form* and introduce the concept of *Finsler manifold*s. With the help of the so called *Finsler-Lagrangian* L we can introduce the *canonical spray* S of a Finsler manifold and the canonical horizontal endomorphism generated by S which is called *Barthel endomorphism.* Since every Finsler manifold is a spray manifold, we can also speak of the projective equivalence of a spray manifold and a Finsler manifold, and of that of two Finsler manifolds (which have, of course, a common carrier manifold). A spray manifold (M, S) is said to be *Finsler-metrizable in the broad sense* or — following Shen's terminology [48] — *projectively Finsler*, if there exists a Finsler-Lagrangian $L : TM \to \mathbb{R}$ such that the Finsler manifold (M, L) is projectively equivalent to (M, S). If, in particular, the canonical spray of (M, L) coincides with the given spray S, then we say that (M, S) is *Finsler-metrizable in the natural sense* or that S is a *Finsler-variational* spray. The latter concept is a faithful analogue of the variationality of a spray (or a semispray) used in the classical inverse problem of the calculus of variations ([19], [27], [29], [33]). One of our main problems treated in the Thesis is *to find criteria for the Finsler–metrizability of a spray both in the broad sense and in the natural sense.* The key tools will be *the fundamental equations of projective equivalence*. These provide equivalent (and, in our presentation, intrinsically formulated) second order partial differential equations for the Finsler-Lagrangian to be determined. Their coordinate version was discovered by A. Rapcsák in the early sixties (see [42], [43], [44], [45] and, for a recent account, [48]), hence we call them *Rapcsák equations*.

In his paper [16] M. Crampin presented a stimulating intrinsic reformulation of the Helmholtz conditions from the classical inverse problem of the calculus of variations through the existence of a 2-form on the tangent manifold. Prescribing for this 2-form some extra conditions of homogeneity and regularity we derive necessary and sufficient conditions for the metrizability of a spray in both senses. Next we investigate the question of metrizability from another point of view. We present equivalent conditions for a spray to be Finsler–variational assuming the existence of a symmetric, non–degenerate (0,2) tensor field on the vertical bundle with some further properties. Similarly, our *alternative theorem* gives a characterization of projectively Finsler spray manifolds through the existence of a $(0,2)$ tensor field on the tangent manifold, satisfying some, partly quite complicated, algebraic conditions. The significance of our alternative theorem lies in the fact that it reduces the problem of Finsler-metrizabilty in the broad sense to a *first order* partial differential equation. Finally we give its integrability condition and supporting it by some regularity conditions we derive through the Rapcsák equation necessary and sufficient conditions for a spray to be projectively Finsler.

In *part III* we present an intrinsic description of the *projection onto the indicatrix bundle* of a Finsler manifold and give a new, coordinate-free proof for the theorem: *a Landsberg manifold with vanishing Douglas tensor is a Berwald manifold.* In the two-dimensional case this was shown by L. Berwald in the third part [9] of his famous series on Finsler and Cartan geometries. More than 40 years later it was announced by H. Izumi [32] that this is also true in higher dimensions. Izumi's statement was proved by the group S. Bácsó, F. Ilosvay and B. Kis in [3], using the machinery of classical tensor calculus and utilizing an important observation of T. Sakaguchi [47] on the projected Douglas tensor. Finsler manifolds with vanishing Douglas tensor were baptized *Douglas manifold*s by M. Matsumoto and S. Bácsó [4]. Thus, briefly speaking, *any Landsberg-Douglas manifold is a Berwald manifold.*

The method of the projection onto the indicatrix bundle is based on the following fact: one of the canonical geometrical objects living on the tangent bundle, the Liouville vector field, is a normal vector field to the "unit sphere bundle" or "indicatrix bundle" $U(M)$ of any Finsler manifold (M, L). Keeping this in mind, the construction of the orthogonal projector into $U(M)$ is straightforward. As a next step, we define the *projected tensor* of a tensor given on the tangent bundle. On this conceptual basis, we compute the projected Douglas tensor, which makes it possible to elaborate a new, coordinate–free proof of Sakaguchi's important observation that *the projected Douglas tensor and the Douglas tensor vanish together.* We note that in local coordinates our formulas, including the coordinate expression of the projected Douglas tensor, do not coincide with those of Sakaguchi. The reason for this is the difference in the underlying bundle structures, which implies that the notions of "Finsler tensor fields" are also different. Most of the "essential" tensors are semibasic in our framework, while the vector field variables of Matsumoto's theory [38] used by Sakaguchi correspond to the vertical vector fields in our approach.

Finally the reader will find the deduction of the main result of this part. Due to the special form of the mixed curvature of the Berwald connection in Landsberg-Douglas manifolds we derive an important relation from which the theorem mentioned above may be concluded.

Unfortunately, our elegant method fails in two dimensions. Then the Douglas tensor has surviving components only along the Liouville vector field. Since the Liouville vector field is orthogonal to the unit sphere bundle, it follows immediately that *the projected Douglas tensor of a two-dimensional Finsler manifold vanishes identically.* In the next part we complete the story interpreting the previously cited paper of BERWALD on the two-dimensional Finsler manifolds from our present day standpoint. In this section we restrict our investigation to the *positive definite two-dimensional Finsler manifolds*. (It is possible to generalize the theorem to two-dimensional Finsler manifolds with nondegenerate Riemann-Finsler metric. This needs a little modification of Berwald's method as it turns out from the paper [7], where the machinery of classical tensor calculus is applied.) In this part we sketch a general coordinate–free theory of the two-dimensional (positive definite) Finsler manifolds, introducing the *Berwald frame*, the *main scalar* and the *Gaussian curvature* and deriving E. CARTAN*'s "permutation formulas"* as well as the *"Bianchi identity"*. Next we turn to the two-dimensional Landsberg-Douglas manifolds proving the statement mentioned above.

Finally we investigate the following problem: *what kind of (two-dimensional) Finsler manifolds admit a conformal change leaving the mixed curvature of the Berwald connection invariant?* If the mixed curvature of the Berwald connection remains invariant, then the manifold admits an associated Riemannian metric [59] and we can form the Riemannian gradient $grad_R\alpha$ of the scale function α. Fix a nonzero tangent vector v such that $v\alpha = 0$ and consider the integral curve $c(t) := v + tgrad_R\alpha(p)$ of the vertical lift of $grad_R\alpha$. We set up a differential equation for the energy along this integral curve. To find the general solution is very complicated, so we restrict ourselves here to a simplified case (fixing a parameter). Then the solutions essentially are the singular Finsler metrics with constant main scalar determined by Berwald [9]. We show that on these manifolds the mixed curvature of the Berwald connection remains invariant under *any* conformal change. We determine the vertical members of the Berwald frame and compute the main scalar. Finally we show that if the Douglas tensor vanishes, then we get a Berwald manifold, also in this case.

References

A large part of the work presented here has already been published by the author. Chapter I is based on the paper [52]. It is extended here by a description of the Jacobi endomorphism in section 2 and by a presentation of the Weyl tensor in terms of the Yano connection in section 7. The next chapter is built upon the work [53], however its last section, except for the alternative theorem, is new. Chapter III follows the exposition of our article [56]. The first two sections in Chapter IV are based on [57], the last section is prepared for publication [58].

Remark. In our next presentation the numbers printed in bold type refer to the corresponding theorem, definition etc. of the *Dissertation.* For the convenience of the reader, we devote an *Appendix* to a list of basic conventions and notations.

I. THE FUNDAMENTAL PROJECTIVE INVARIANTS OF A SPRAY MANIFOLD

In part I we present a quite detailed exposition of the conceptual and calculational background. Next we turn to some fundamental facts and constructions concerning a spray manifold. The two canonical objects of the tangent manifold, the vertical endomorphism (called also the canonical almost tangent structure), and the Liouville vector field (or the canonical vertical vector field) are denoted by J and C, respectively.

2.1. In our approach the role of a "nonlinear connection" is played by a *horizontal endomorphisms*. A vector 1-form $h \in \Psi^1(TM) \cong \operatorname{End}\mathfrak{X}(TM)$, *smooth only on* $\mathcal{T}M$, is said to be a horizontal endomorphism on M if it is a *projector* (i.e., $h^2 = h$) and $\operatorname{Ker} h = \mathfrak{X}^v(TM)$. $v := 1_{\mathfrak{X}(TM)} - h$ is the *vertical projector* belonging to h. $\mathfrak{X}^h(TM) := \operatorname{Im} h$ is called the module of *horizontal vector fields*. It is a direct summand, namely

$$\mathfrak{X}(TM) = \mathfrak{X}^v(TM) \oplus \mathfrak{X}^h(TM).$$

2.2. Suppose that h is a horizontal endomorphism on the manifold M. The vector–valued forms

$$H := [h, C] \in \Psi^1(TM), \tag{2.2a}$$

$$t := [J, h] \in \Psi^2(TM), \tag{2.2b}$$

$$R := -N_h := -\frac{1}{2}[h, h] \in \Psi^2(TM) \tag{2.2c}$$

are called the *tension*, the *torsion* and the *curvature* of h, respectively. A horizontal endomorphism is said to be *homogeneous* if its tension vanishes.

2.5. A *semispray* on the manifold M is a mapping

$$S : TM \to TTM, \quad v \mapsto S_v \in T_vTM$$

satisfying the following conditions:

(i) $\qquad S$ is smooth on $\mathcal{T}M$,

(ii) $\qquad JS = C.$

A semispray S is called a *spray* if

(iii) $\qquad S$ is of class C^1 on TM

and

(iv) $$[C,S]=S \text{ (i.e., } S \text{ is positive homogeneous of degree 2).}$$

A manifold M endowed with a spray S will be mentioned as a *spray manifold.* A spray S is said to be *affine* (or *quadratic*) if it is of class C^2 on TM.

2.8. The fundamental relation between the horizontal endomorphisms and the semisprays was discovered, independently, by M. Crampin and J. Grifone [15], [17], [25]. Their main result can be summarized as follows.

(i) If $h \in \operatorname{End}\mathfrak{X}(TM)$ is a horizontal endomorphism and S' is an arbitrary semispray on M, then $S := hS'$ is also a semispray on M. This semispray does not depend on the choice of S', it is horizontal with respect to h and satisfies the relation $h[C,S]=S$. S is called the *semispray associated to* h.

(ii) Any semispray $S : TM \to TTM$ generates in a canonical way a horizontal endomorphism which can be given by the formula

$$h := \frac{1}{2}\left(1_{\mathfrak{X}(TM)} + [J,S]\right). \tag{2.8}$$

Then h is torsion free (i.e., $t=0$) and the semispray associated to h is $\frac{1}{2}(S + [C,S])$. If, in addition, S is a spray, then h is homogeneous and its associated semispray is just the starting spray S.

(iii) A horizontal endomorphism is generated by a semispray according to (2.8) if and only if it is torsion free.

Having a horizontal endomorphism h we can construct the vertical projector v and the associated almost complex structure F in the usual manner.

3.4. The canonical Finsler connection of a spray manifold is a *Berwald–type connection.* We describe it by the rules of calculation. Assume that a horizontal endomorphism $h \in \Psi^1(TM)$ is given. We define the mapping

$$\overset{\circ}{D} : \mathfrak{X}(TM) \times \mathfrak{X}(TM) \to \mathfrak{X}(TM), \quad (X,Y) \mapsto \overset{\circ}{D}_X Y$$

by the following rules:

$$\overset{\circ}{D}_{JX} JY := J[JX,Y], \tag{3.4a}$$

$$\overset{\circ}{D}_{hX} JY := v[hX,JY], \tag{3.4b}$$

$$\overset{\circ}{D}_{vX} hY := h[vX,Y], \tag{3.4c}$$

$$\overset{\circ}{D}_{hX} hY := hF[hX,JY] \tag{3.4d}$$

and

$$\overset{\circ}{D}_X Y := \overset{\circ}{D}_{vX} vY + \overset{\circ}{D}_{hX} vY + \overset{\circ}{D}_{vX} hY + \overset{\circ}{D}_{hX} hY.$$

It is straightforward to prove that $(\overset{\circ}{D},h)$ is a Finsler connection on M; this Finsler connection is said to be the *Berwald-type Finsler connection induced by* h. If, in particular, h is a Berwald endomorphism, then we call $(\overset{\circ}{D},h)$ a *Berwald connection.*

Next we give a slight generalization of the Berwald-type connections.

5.1 Proposition. *Suppose h is a horizontal endomorphism on the manifold M with associated almost complex structure F. Let $\beta \in \mathcal{T}_2^0(\mathcal{T}M)$ be a symmetric tensor, satisfying the condition*

$$(*) \qquad \text{for any semispray } S, \quad i_S\beta = 0.$$

Let, finally, a vertical vector field $U \in \mathfrak{X}(TM)$ be given. Then there exists a unique Finsler connection (D, h) on M such that
(i) *the v-mixed torsion of D is $\mathbb{P}^1 := \beta \otimes U$;*
(ii) *the h-mixed torsion $\mathbb{B}$ of D vanishes.*
If, in addition,

(iii) *the h-deflection of (D, h) vanishes,*

(iv) *the h-horizontal torsion of D vanishes*

then the horizontal endomorphism h is homogeneous and torsion free. Explicitly, for any vector field X, Y on TM we have

$$D_{JX}JY = J[JX, Y] = \overset{\circ}{D}_{JX}JY, \tag{5.1a}$$

$$D_{hX}JY = v[hX, JY] + \beta(X, Y)U = \overset{\circ}{D}_{hX}JY + \beta(X, Y)U, \tag{5.1b}$$

$$D_{vX}hY = h[vX, Y] = \overset{\circ}{D}_{vX}hY, \tag{5.1c}$$

$$D_{hX}hY = hF[hX, JY] + \beta(X, Y)FU = \overset{\circ}{D}_{hX}hY + \beta(X, Y)FU. \tag{5.1d }$$

Any Berwald-type connection has two surviving "partial curvatures", the horizontal and the mixed curvature. Discussing some elementary property of the mixed curvature we specify the connection described above. We show that the mixed Ricci tensor of a Berwald–type connection is symmetric and potential–free, so it can play the role of the above tensor β.

5.3 Corollary and definition. *Suppose h is a homogeneous and torsion free horizontal endomorphism on M. Let $\tilde{\overset{\circ}{\mathbb{P}}}$ be the mixed Ricci tensor of the Berwald-type connection $(\overset{\circ}{D}, h)$. There exists a unique Finsler connection (D, h) on M such that*

(i) *the v-mixed torsion of D is* $\mathbb{P}^1 := \dfrac{1}{n+1}\tilde{\overset{\circ}{\mathbb{P}}} \otimes C;$

(ii) *the h-mixed torsion of D vanishes.*

This Finsler connection is said to be the Yano-type connection *induced by h. If, in particular, h is a Berwald endomorphism, then we speak of a* Yano connection.

6.1. Two sprays S and $\overline{S}$ over a manifold M are said to be *projectively equivalent* if there is a function $\lambda : TM \to \mathbb{R}$ satisfying the conditions

(i) λ is smooth on $\mathcal{T}M$, and C^1 on TM;

(ii) $\overline{S} = S + \lambda C$.

Then λ is automatically 1-homogeneous (i.e., $C\lambda = \lambda$). Conversely, if a spray S and a 1-homogeneous function λ, satisfying (i), are given, then $\overline{S} = S + \lambda C$ is also a spray. In this case we speak of a *projective change* of the spray, and we say that the spray manifolds (M, S) and $(M, \overline{S})$ are *projectively equivalent*.

6.3. Suppose h is a Berwald endomorphism over the manifold M. If (D, h) is the Yano connection induced by h and $\mathbb{P}$ is the mixed curvature of D, then the tensor

$$\mathbb{D} := \mathbb{P} - \frac{1}{2}\left(\widetilde{\mathbb{P}} \otimes J + J \otimes \widetilde{\mathbb{P}}\right) \tag{6.3}$$

is said to be the *Douglas tensor* of the Berwald endomorphism.

We also express $\mathbb{D}$ in terms of the Berwald connection. If $\overset{\circ}{\mathbb{P}}$ stands for the mixed curvature of the Berwald connection then $\mathbb{D}$ can be written in the form

$$\mathbb{D} = \overset{\circ}{\mathbb{P}} - \frac{1}{n+1}\left(\overset{\circ}{D}_J \widetilde{\overset{\circ}{\mathbb{P}}} \otimes C + \widetilde{\overset{\circ}{\mathbb{P}}} \odot J\right). \tag{6.4b}$$

6.6 Theorem. *The Douglas tensor of a Berwald endomorphism is invariant under any projective change of the associated spray.*

The next result clarifies the importance of the Douglas tensor.

6.8 Theorem. *Suppose M is a volume manifold and let h be a Berwald endomorphism on M. The associated spray of h is projectively equivalent to the spray determined by a linear connection on M if and only if the Douglas tensor of h vanishes.*

The local version of this theorem was proved by J. Douglas [23], the global result is due to Z. Shen [48]. Our proof is a more conceptual and coordinate-free realization of Shen's ingenious thought. As a byproduct, it leads to a remarkable relation: *the mixed curvature of the Berwald endomorphism induced by the projectively deformed spray is just the Douglas tensor.*

II. FINSLER-METRIZABILITIES OF SPRAY MANIFOLDS

In *part II* we start with the definition of a *Hilbert 1-form* and introduce the concept of a *Finsler manifold*. Simply put, a general Finsler structure on a differentiable manifold M is a function

$$L : TM \longrightarrow \mathbb{R}$$

satisfying appropriate differentiability, homogeneity and regularity conditions. In conformity with the demands of Finsler geometry, the smoothness is not required or assured on the whole tangent manifold TM. With the help of a so–called *Finsler-Lagrangian* L we can construct the *canonical spray* of a Finsler manifold and the canonical horizontal endomorphism generated by the spray which is called the *Barthel endomorphism*. Since every Finsler manifold is a spray manifold, we can also speak of the projective equivalence of a spray manifold and a Finsler manifold, and of that of two Finsler manifolds (which have, of course, a common carrier manifold).

8.10 Proposition (the fundamental relation)**.** *Let (M,S) be a spray manifold and $\overline{L}$ a Finsler-structure on M. Then, over $\mathcal{T}M$, the canonical spray $\overline{S}$ arising from $\overline{L}$ can be represented in the form*

$$\overline{S} = S - \frac{S\overline{L}}{\overline{L}}C - \overline{L}(i_S dd_J \overline{L})^{\#}, \tag{8.10}$$

where the sharp operator is taken with respect to the fundamental 2-form of $(M,\overline{L})$.

This yields, in our presentation, some intrinsically formulated second order partial differential equations (see (2) and (3) below) for the Finsler-Lagrangian to be determined. Their coordinate version was discovered by A. Rapcsák in the early sixties (see [42], [43], [44], [45]), hence we call them *Rapcsák equations*.

9.2 Theorem. *Let (M,S) be a spray manifold endowed with the Berwald connection $(\overset{\circ}{D},h)$ induced by S. If $\overline{L}$ is a Finsler-Lagrangian on M, then the following conditions are equivalent:*

(1) (M,S) *is projectively equivalent to* $(M,\overline{L})$.

(2) $i_S dd_J \overline{L} = 0$.

(3) $d_h d_J \overline{L} = 0$.

(4) $\overset{\circ}{D}_h d_J \overline{L}(X,Y) = \overset{\circ}{D}_h d_J \overline{L}(Y,X) \quad (X,Y \in \mathfrak{X}(\mathcal{T}M))$.

Next we recall

10.1 The theorem of M. Crampin. *Let S be a semispray over the manifold M, and let h be the horizontal endomorphism generated by S according to (2.8). If a 2-form ω on TM satisfies the conditions*

$$\mathcal{L}_S\omega = 0, \tag{10.1a}$$

$$\omega(JX, JY) = 0 \quad (X, Y \in \mathfrak{X}(TM)), \tag{10.1b}$$

$$d\omega(hX, JY, JZ) = 0 \quad (X, Y, Z \in \mathfrak{X}(TM)), \tag{10.1c}$$

then there is a smooth function K defined on an open subset of TM such that $\omega = dd_JK$.

Prescribing for this 2-form some extra conditions we can prove the following statements.

10.3 Proposition. *Let (M, S) be a spray manifold and suppose that a 2-form ω satisfies the conditions (10.1a-c). If, in addition, ω is 1-homogeneous and has maximal rank then there exists – locally – a Finsler energy E such that S is the canonical spray of the Finsler manifold (M, E).*

10.4 Proposition. *Let S be a spray over the manifold M and ω be a 2-form satisfying the conditions (10.1a-c). Define the tensor μ by the relation $\mu(JX, JY) := \omega(JX, Y)$ $(X, Y \in \mathfrak{X}(TM))$. If, in addition, $i_C\omega = 0$ and for any $v \in \mathcal{T}M$ and $X \neq \lambda C \in \mathfrak{X}(TM)$ $(\lambda \in C^\infty(TM))$ $\mu(X, X)(v) > 0$, then there exists – locally – a positive Finsler-Lagrangian L such that its canonical spray is projectively equivalent to S.*

Next we investigate the problem from another point of view. We derive necessary and sufficient conditions for a spray to be Finsler–variational through the existence of a symmetric $(0, 2)$ tensor.

10.6 Proposition. *Let (M, S) be a spray manifold and let $(\overset{\circ}{D}, h)$ denote the Berwald connection determined by the Berwald endomorphism h arising from S. Suppose that g is a non-degenerate, symmetric $(0, 2)$-tensor in the vertical bundle, and let $\mathcal{C}_\flat := \overset{\circ}{D}_J J^*g$. If*

$$\mathcal{C}_\flat \quad \textit{is totally symmetric}\ , \tag{10.6a}$$

$$i_S\mathcal{C}_\flat = 0, \tag{10.6b}$$

$$\overset{\circ}{D}_S J^*g = 0, \tag{10.6c}$$

then S is the canonical spray of the Finsler energy $E := \frac{1}{2}g(C, C)$.

The following result reduces the conditions for a spray to be projectively Finsler to a first order PDE.

10.9 Theorem (the alternative theorem)**.** (i) *Let* (M, S) *be a spray manifold and* $\overset{\circ}{D}$ *be the Berwald connection induced by* S*. If* (M, S) *is projectively equivalent to a Finsler manifold* $(M, \overline{L})$*, then the tensor field*

$$\overline{\mu} : (JX, JY) \in \mathfrak{X}(TM) \times \mathfrak{X}(TM) \mapsto \overline{\mu}(JX, JY) := dd_J\overline{L}(JX, Y) \tag{10.9a}$$

has the properties

$$\overset{\circ}{D}_S J^*\overline{\mu} = 0; \quad \underset{X,Y,Z\in\mathfrak{X}(TM)}{\mathfrak{S}} \overline{\mu}(JX, R(Y, Z)) = 0. \tag{10.9b,c}$$

(ii) *Conversely, let* (M, L^*) *be a Finsler manifold, and suppose that the tensor field* μ^* *formed from* L^* *by the rule of* (10.9a) *satisfies* (10.9b,c)*. Then*

(I) (M, S) *is projectively equivalent to* (M, L^*)*,* or

(II) *there exists, locally in general, a 1-form* η *on* M *such that — also locally — (M, S) is projectively equivalent to the Finsler manifold* $(M, L^* + \widetilde{\eta})$*,* $\widetilde{\eta} := (\eta^v)^\circ$*.*

The integrability conditions for the PDE in the last theorem are given by our

10.10 Theorem. *Let* (M, S) *be a spray manifold and suppose that there exists a symmetric* $(0, 2)$*-tensor* μ *on the vertical subbundle satisfying the following conditions:*

(1) $i_C\mu = 0$,

(2) $\overset{\circ}{D}_S J^*\mu = 0$,

(3) $\underset{X,Y,Z\in\mathfrak{X}(TM)}{\mathfrak{S}} \mu(JX, R(Y, Z)) = 0$,

(4) $\overset{\circ}{D}_J J^*\mu$ *is totally symmetric ,*

(5) *If* $X \in \mathfrak{X}^v(TM)$ *is not proportional to the Liouville vector field* C*, then* $\mu(X, X)$ *is a positive-valued function on* $\mathcal{T}M$*.*

Then there exists a positive Finsler–Lagrangian L *such that its canonical spray is projectively equivalent to the given spray* S*.*

III. PROJECTION ONTO THE INDICATRIX BUNDLE OF A FINSLER MANIFOLD

In part III first we introduce some basic metrical data arising from a Finsler–Lagrangian on a manifold M, including the *Riemann–Finsler metric*, which is a pseudo–Riemannian metric on $\mathcal{T}M$, the *first* and *second Cartan tensors* $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}'$ and the classical *Cartan connection* of a Finsler manifold. Next we recall some well–known characterizations of two special Finsler manifolds, the Landsberg and the Berwald manifolds. After this preparation we present an intrinsic construction of the projection onto the indicatrix bundle initiated by H. Izumi and systematized by M. Matsumoto (see e.g. [37]).

13.1. By the *indicatrix bundle* of the Finsler manifold (M, L) we mean the $(2n-1)$-dimensional submanifold

$$U(M) := \{v \in TM \mid L(v) = 1\}.$$

13.3 Lemma. *With respect to the Riemann–Finsler metric g of the Finsler manifold (M, L), the Liouville vector field is everywhere orthogonal to the indicatrix bundle, i.e., $g(C, X) = 0$ for any vector fields $X \in \mathfrak{X}[U(M)]$. The vector field $\frac{1}{L}C$ is a unit normal vector field of the indicatrix bundle.*

Using this observation, the construction of the operator of the orthogonal projection onto $U(M)$ is straightforward. With the help of this projector we define the projected tensor of a tensor living on the tangent bundle.

13.4 Lemma. *Let (M, L) be a positive Finsler manifold. The mapping*

$$\tau := I - \frac{1}{2E}\, dE \otimes C$$

is a projector. For any vector field $X \in \mathfrak{X}(\mathcal{T}M)$, $\tau(X) \restriction U(M)$ is a tangent vector field to the indicatrix bundle.

13.8 Definition. *Suppose that (M, L) is a positive Finsler manifold, $A \in \mathcal{T}^0_r(\mathcal{T}M)$, $K \in \mathcal{T}^1_r(\mathcal{T}M)$ $(r \in \mathbb{N}^+)$; and let us consider the operator $\tau = I - \frac{1}{2E} dE \otimes C$. The tensors A^* and K^*, given by*

$$A^*(X_1, \dots, X_r) := A(\tau(X_1), \dots, \tau(X_r))$$

and

$$K^*(X_1,\dots,X_r) := \tau\,[K(\tau(X_1),\dots,\tau(X_r))]$$

($X_i \in \mathfrak{X}(\mathcal{T}M)$, $1 \leqq i \leqq r$) are called the projected tensors *of A and K, respectively.*

Next we calculate the projected Douglas tensor.

13.10 Proposition. *Consider the Douglas tensor*

$$\mathbb{D} = \overset{\circ}{\mathbb{P}} - \frac{1}{n+1}\left(\overset{\circ}{D}_J\tilde{\overset{\circ}{\mathbb{P}}} \otimes C + \tilde{\overset{\circ}{\mathbb{P}}} \odot J\right) \in \mathcal{T}_3^1(\mathcal{T}M) \tag{13.10a}$$

of the Finsler manifold (M,L) (6.4b). The projected tensor of $\mathbb{D}$ is

$$\mathbb{D}^* = \overset{\circ}{\mathbb{P}} - \frac{1}{n+1}\tilde{\overset{\circ}{\mathbb{P}}} \odot \kappa + \frac{1}{E}\mathcal{C}'_\flat \otimes C, \tag{13.10b}$$

where $\kappa := J^* \circ \tau$.

13.11 Corollary. *The Douglas tensor and its projected tensor are related as follows:*

$$\mathbb{D}^* = \mathbb{D} + \left[\frac{1}{E}\mathcal{C}'_\flat + \frac{1}{n+1}\left(\overset{\circ}{D}_J\tilde{\overset{\circ}{\mathbb{P}}} + \frac{1}{2E}\tilde{\overset{\circ}{\mathbb{P}}} \odot d_J E\right)\right] \otimes C. \tag{13.11}$$

These formulas provide us to present a new, coordinate–free proof of Sakaguchi's statement mentioned in the Introduction.

13.12 Theorem. *If (M,L) is a positive Finsler manifold of dimension $n > 2$, then the vanishing of the projected Douglas tensor is equivalent to the vanishing of the Douglas tensor.*

The mixed curvature tensor of the Berwald connection has a special form on any Landsberg manifold. The vanishing of the Douglas tensor – and, by our previous theorem, the vanishing of the projected Douglas tensor – specifies and simplifies it further. From the expression so obtained we derive the formula

$$(n-2)\widetilde{\tilde{\overset{\circ}{\mathbb{P}}}{}^{\#}}\,\widetilde{\mathcal{C}} = 0$$

which leads immediately to the following

14.5 Theorem. *Suppose that (M,L) is an $n > 2$ dimensional Landsberg manifold. If the Douglas tensor of (M,L) vanishes, then (M,L) is a Berwald manifold.*

IV. APPLICATIONS TO TWO-DIMENSIONAL FINSLER MANIFOLDS

15.1 The Berwald frame. Throughout this chapter, let (M, L) be a two-dimensional Finsler manifold and suppose the Riemann-Finsler metric g arising from L is positive definite. Starting from the Liouville vector field C and the canonical spray S of (M, L), let us first consider the unit vector fields

$$C_0 := \frac{1}{L}C \quad \text{and} \quad S_0 := \frac{1}{L}S.$$

Next, using the Gram-Schmidt process we construct, at least locally, a g-orthonormal basis (C_0, X_0) of $\mathfrak{X}^v(\mathcal{T}M)$. Applying the almost complex structure F associated to the Barthel endomorphism of (M, L), we obtain a local g-orthonormal basis (FX_0, S_0) of $\mathfrak{X}^h(\mathcal{T}M)$. The quadruple

$$(C_0, X_0, FX_0, S_0)$$

constructed in this way is a (local) orthonormal basis of $\mathfrak{X}(\mathcal{T}M)$; it is called the *Berwald frame* of the Finsler manifold (M, L).

Following L. Berwald's original idea we express all the geometrical objects in terms of the Berwald frame.

15.4 Definition and remark. *The function*

$$\lambda := g(\mathcal{C}(FX_0, FX_0), X_0) \tag{15.4}$$

is said to be the main scalar *of* (M, L) *with respect to the Berwald frame* (C_0, X_0, FX_0, S_0). *λ depends only on the choice of X_0, and, specifying $X_\circ$, it is uniquely determined up to sign.*

15.9 Proposition and definition. *Let us consider the curvature tensor* $R = -\frac{1}{2}[h, h]$ *of the Barthel endomorphism of* (M, L). *Then we have*

$$R(FX_0, S_0) = g(R(FX_0, S_0), X_0)X_0, \tag{15.9a}$$

and R is uniquely determined by this formula on the domain of the Berwald frame constructed in 15.1. The function

$$\kappa := g(R(FX_0, S_0), X_0) \tag{15.9b}$$

is said to be the Gauss curvature *of* (M, L).

15.10 Theorem (E. CARTANS's *"permutation formulas"*). *For the Lie brackets of the members of the Berwald frame we have*

$$\text{(15.10a-c)}\qquad \boxed{\begin{aligned} [X_0, FX_0] &= -\frac{1}{L}S_0 - \lambda FX_0 - S(\lambda)X_0 \\ [S_0, X_0] &= -\frac{1}{L}FX_0 \\ [FX_0, S_0] &= -\kappa X_0 \end{aligned}},$$

where λ is the main scalar and κ is the Gauss curvature of (M, L).

15.11 Proposition ("Bianchi identity").

$$\text{(15.11)}\qquad \boxed{\lambda\kappa + X_0(\kappa) + S_0(S\lambda) = 0}.$$

After these preparations we present an intrinsic proof of the theorem set out by L. Berwald.

16.6 Theorem. *If a positive definite two-dimensional Landsberg manifold has a vanishing Douglas tensor, then it is a Berwald manifold.*

Finally we turn to the conformal equivalence of Finsler manifolds. Two Finsler structures $\tilde{L}$ and L over the same manifold M are said to be *conformally equivalent* if there exists a positive smooth function $\varphi : \mathcal{T}M \to \mathbb{R}$ such that $\tilde{g} = \varphi g$, where $\tilde{g}$ and g the Riemann-Finsler metrics of $\tilde{L}$ and L, respectively. In this case we also speak of the *conformal change* of the Riemann-Finsler metric g. φ always can be written in the form $\varphi = exp \circ \alpha^v$, $\alpha^v = \alpha \circ \pi$, $\alpha \in C^\infty(M)$ [46]. The conformally changed metric will be denoted by g_α, so $g_\alpha := (exp \circ \alpha^v)g$.

Our problem is to determine all Finsler manifolds of dimension 2 which admit a conformal change such that the mixed curvature tensor of the Finslerian Berwald connection remains invariant.

Suppose that $\mathring{\mathbb{P}}_\alpha = \mathring{\mathbb{P}}$ under the change $E_\alpha = \varphi E$, and denote by h_α and h the corresponding Barthel endomorphisms, respectively. Then for any vector field $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ we have

$$\begin{aligned} 0 &= \mathring{\mathbb{P}}_\alpha(X^c, Y^c)Z^c - \mathring{\mathbb{P}}(X^c, Y^c)Z^c \overset{(4.9)}{=} [[X^{h_\alpha}, Y^v], Z^v] - [[X^h, Y^v], Z^v] \\ &= [[X^{h_\alpha}, Y^v] - [X^h, Y^v], Z^v], \end{aligned}$$

which implies that the vector field $[X^{h_\alpha}, Y^v] - [X^h, Y^v]$ is a vertical lift. Therefore, as an easy local calculation shows, the components of the difference tensor $h_\alpha - h$ are linear on the tangent spaces and, consequently, the difference of the associated sprays S_α and S is a quadratic vector field. As it is known [54],

$$S_\alpha = S - \alpha^c C + E grad \alpha^v,$$

where α^c is the complete lift of α ($\alpha^c := S\alpha^v$) and $i_{(d\alpha^v)^\#}\omega = d\alpha^v$. Evaluating both sides on the function α^c we have

$$Eg((d\alpha^v)^\#, (d\alpha^v)^\#) = (S_\alpha - S)\alpha^c + (\alpha^c)^2,$$

where the function on the right–hand side is quadratic. This means that it can be considered as a (local) Riemannian energy function E_R under the regularity condition $d_p\alpha \neq 0$ ($p \in M$). Let $grad_R\alpha$ and $grad_R^v\alpha$ be the Riemannian gradient of the function α and its vertical lift, respectively. Since the manifold is two–dimensional, the vector fields

$$JX := (d\alpha^v)^\#, \quad Y^v := grad_R^v\alpha \quad \text{and} \quad C$$

are linearly dependent. Let $c(t) := v + tY(p)$, where $p \in M$ and $v \in T_pM \cap Ker\alpha^c$. Then c is an integral curve of $grad_R^v\alpha$. Evaluating their Gram-determinant with respect to g along c, we have

$$\Big(2Eg(JX,JX)g(Y^v,Y^v) + 2g(JX,Y^v)g(Y^v,C)g(JX,C) - g^2(JX,C)g(Y^v,Y^v) \\ - g^2(Y^v,C)g(JX,JX) - 2Eg^2(JX,Y^v)\Big) \circ c = 0.$$

Since

$$Eg(JX,JX) = E_R, \quad g(JX,Y^v) = (Y\alpha)_p, \quad g(Y^v,C) = Y^vE, \\ g(JX,C) = \alpha^c, \quad g(Y^v,Y^v) = Y^v(Y^vE)$$

we arrive at the differential equation

$$2\big(a^2 + t^2b^2(1-b^2)\big)y(t)y''(t) - (a^2+t^2b^2)\big(y'(t)\big)^2 + 4tb^4y(t)y'(t) - 4b^4\big(y(t)\big)^2 = 0,$$

where $y := E \circ c$, $a^2 := 2E_R(v)$, $b^2 := 2E_R(Y(p))$. By the Cauchy-Schwarz inequality $0 < b^2 \leq 1$. Introducing $z = \dfrac{y'}{y}$, we obtain the following Riccati-type equation:

$$\big(a^2 + t^2b^2(1-b^2)\big)z'(t) + \frac{1}{2}\big(a^2 + t^2b^2(1-2b^2)\big)\big(z(t)\big)^2 + 2tb^4z(t) - 2b^4 = 0.$$

If the constants a and b are arbitrary, it is very complicated to solve this equation, so we discuss only the case $b^2 = 1$. Then the solution with the initial condition $z(0) = \dfrac{K}{a}$ is of the form

$$z(t) = 2\frac{2t + Ka}{2t^2 + tKa + 2a^2} = \frac{2t+Ka}{\Big(t + \dfrac{Ka}{4}\Big)^2 + a^2\Big(1 - \dfrac{K^2}{16}\Big)}.$$

We have the following cases:

(**A**) $K^2 < 16$. Then

$$E \circ c(t) = 4K^* \left(E_R \circ c(t) + KL_R(v) \frac{t}{4} \right)$$

$$exp \frac{2K}{\sqrt{16 - K^2}} \left(arctan \frac{4t + KL_R(v)}{L_R(v)\sqrt{16 - K^2}} - arctan \frac{2K}{\sqrt{16 - K^2}} \right).$$

(**B**) $K^2 = 16$. Then

$$E \circ c(t) = K^* \left(t + \frac{KL_R(v)}{4} \right)^2 exp \ \frac{-2KL_R(v)}{4t + KL_R(v)}.$$

(**C**) $K^2 > 16$. Then

$$E \circ c(t) = K^* \left(t + \frac{L_R(v)}{4} (K - \sqrt{K^2 - 16}) \right)^{\left(1 + \frac{K}{\sqrt{K^2 - 16}}\right)}$$

$$\left(t + \frac{L_R(v)}{4} (K + \sqrt{K^2 - 16}) \right)^{\left(1 - \frac{K}{\sqrt{K^2 - 16}}\right)}.$$

As it can be seen these solutions are just the singular Finsler manifolds with constant main scalar determined by L. Berwald. In our Theses we dealt with case (**A**) in detail, and we obtained the following

17.8 Theorem. *For a two-dimensional Finsler manifold M with the energy E given by* **(A)** *the following conditions are equivalent:*

(1) *(M, E) is a Douglas manifold.*
(2) *(M, E) is a Landsberg manifold.*
(3) *(M, E) is a Berwald manifold.*

The following result can be considered as a new, geometrical derivation of two–dimensional Finsler manifolds with constant main scalar. Finally we obtained

17.9 Theorem. *If a two-dimensional Finsler manifold has constant main scalar in Berwald's sense, that is $L\lambda$ is constant on each fibre, then the mixed curvature of the Finslerian Berwald connection is invariant under any conformal change.*

APPENDIX: BASIC CONVENTIONS AND NOTATIONS

(1) Throughout the Thesis, M denotes a second–countable, connected, smooth manifold. $C^\infty(M)$ stands for the ring of real-valued smooth functions on M, $\mathfrak{X}(M)$ is the $C^\infty(M)$-module of vector fields on M. For $(r,s) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, $\mathcal{T}^r_s(M)$ is the module over $C^\infty(M)$ of smooth tensor fields (briefly tensors) of type (r,s), contravariant of order r and covariant of order s. We define the symmetric product $\omega_1 \odot \omega_2$ of the covariant tensors $\omega_1 \in \mathcal{T}^\circ_{s_1}(M)$, $\omega_2 \in \mathcal{T}^\circ_{s_2}(M)$ by the formula

$$\omega_1 \odot \omega_2 := \frac{(s_1+s_2)!}{s_1! s_2!} \mathrm{Sym}\,(\omega_1 \otimes \omega_2).$$

The symmetric product of the tensors $\omega \in \mathcal{T}^0_s(M)$ and $L \in \mathcal{T}^1_r(M)$ is the $(1, s+r)$ tensor $\omega \odot L$ defined by the formula

$$\omega \odot L(X_1, \dots, X_{s+r}) := \frac{1}{s!r!} \sum_{\sigma \in S_{s+r}} \omega(X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(s)}) L(X_{\sigma(s+1)}, \dots, X_{\sigma(s+r)}).$$

$\Omega^k(M)$ $(0 \leq k \leq n)$ is the module of differential forms on M, $\Omega^\circ(M) := C^\infty(M)$. The differential forms constitute the graded algebra $\Omega(M) := \bigoplus_{k=0}^{n} \Omega^k(M)$, with multiplication given by the wedge product. The wedge product of the tensors $\omega \in \mathcal{T}^0_s(M)$ and $L \in \mathcal{T}^1_r(M)$ is the $(1, s+r)$ tensor $\omega \wedge L$ defined by the formula

$$\omega \wedge L(X_1, \dots, X_{s+r}) := \frac{1}{s!r!} \sum_{\sigma \in S_{s+r}} \varepsilon(\sigma) \omega(X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(s)}) L(X_{\sigma(s+1)}, \dots, X_{\sigma(s+r)}).$$

(2) A vector k-form on the manifold E is a skew-symmetric $C^\infty(E)$-multilinear map $[\mathfrak{X}(E)]^k \to \mathfrak{X}(E)$ if $k \in \mathbb{N}^+$, and a vector field on E if $k = 0$. The set of all vector k-forms on E is a $C^\infty(E)$-module, denoted by $\Psi^k(E)$. In particular, the elements of $\Psi^1(E)$ are just the $(1,1)$ tensor fields on E. Two graded derivations of $\Omega(E)$, denoted by i_K and d_K, are associated to any vector k-form $K \in \Psi^k(E)$. i_K is of degree $k-1$, determined by

$$i_K \restriction C^\infty(E) = 0; \quad i_K \omega := \omega \circ K, \quad \text{if} \quad \omega \in \Omega^1(E);$$

$d_K := [i_K, d] := i_K \circ d - (-1)^{k-1} d \circ i_K$, where d is the operator of the exterior derivative. In case of a vector 0-form $X \in \Psi^0(E) = \mathfrak{X}(E)$, i_X is the usual substitution operator and d_X is the Lie–derivative with respect to the vector field X. The latter is usually denoted by $\mathcal{L}_X$. If $K \in \Psi^1(E)$, then we define the endomorphism

$$K^* : \Omega(E) \to \Omega(E), \quad \omega \in \Omega^\ell(E) \mapsto K^*\omega$$

by the formula

$$K^*\omega\,(X_1, \dots, X_\ell) := \omega\,(K\,(X_1), \dots, K\,(X_\ell)) \quad (X_i \in \mathfrak{X}(E),\ 1 \leq i \leq \ell).$$

(3) Suppose that $K \in \Psi^k(E)$, $L \in \Psi^\ell(E)$. The graded commutator of d_K and d_L is defined by the formula

$$[d_K, d_L] = d_K \circ d_L - (-1)^{k\ell} d_L \circ d_K.$$

A substantial result of the *Frölicher-Nijenhuis theory* ([24], [29], [51]) states that there exits a unique vector form $[K, L] \in \Psi^{k+\ell}(E)$ such that

$$[d_K, d_L] = d_{[K,L]}.$$

$[K, L]$ is said to be the *Frölicher-Nijenhuis bracket* of K and L. If K and L are vector 0-forms, i.e. vector fields on E, then $[K, L]$ reduces to the usual Lie bracket of vector fields.

(4) The tangent bundle of the manifold M will be denoted by $\pi : TM \to M$, while $\pi_0 : \mathcal{T}M \to M$ stands for the subbundle of the nonzero tangent vectors. The kernel of the tangent map $T\pi : TTM \to TM$ is a distinguished subbundle of TTM, the *vertical subbundle*, whose total space will be denoted by T^vTM. The sections of this bundle constitute the $C^\infty(TM)$-module $\mathfrak{X}^v(TM)$ of the *vertical vector fields*. The vertical lift of a smooth function f is the function $f^v := f \circ \pi \in C^\infty(TM)$, the complete lift of f is $f^c : TM \to \mathbb{R},\ \ v \mapsto f^c(v) := v(f)$.

(5) A symmetric or skew-symmetric tensor $A \in \mathcal{T}^0_s(TM)$ $(s \neq 0)$ is called *semibasic* if

$$\forall\, X \in \mathfrak{X}(TM) : i_{JX} A = 0.$$

Analogously, a symmetric or skew-symmetric tensor $L \in \mathcal{T}^1_s(TM)$ $(s \neq 0)$ is said to be semibasic if

$$\forall\, X \in \mathfrak{X}(TM) : i_{JX} L = 0 \quad \text{and} \quad J \circ L = 0.$$

Now let us suppose that F is an almost complex structure on TM determined by an arbitrary horizontal endomorphism h. Consider a semibasic tensor $L \in \mathcal{T}^1_s(TM)$. We define the *semibasic trace* $\widetilde{L}$ of L by recurrence as follows:

$$\begin{aligned} &\text{if } s = 1, \text{ then } \widetilde{L} := tr(F \circ L); \\ &\text{if } s \geq 2, \text{ then } \forall\, X \in \mathfrak{X}(TM) : i_X \widetilde{L} := \widetilde{i_X L}. \end{aligned}$$

It can easily be seen that $\widetilde{L}$ does not depend on the choice of the horizontal endomorphism h.

(6) Suppose that h is a horizontal endomorphism on the manifold M and let F be the almost complex structure determined by h. A pair (D, h) is said to be a *Finsler connection* on M, if D is a linear connection on the manifold TM or $\mathcal{T}M$ and the conditions $Dh = 0$ and $DF = 0$ are satisfied. Suppose (D, h) is a Finsler connection on the manifold M. Denote by $\mathbb{T}$ and $\mathbb{K}$ the (classical) torsion and the curvature of D, respectively. It is readily verified that the mappings

$$\mathbb{A} : (X, Y) \mapsto h\mathbb{T}(hX, hY) - \textit{h-horizontal torsion},$$

$$\mathbb{B} : (X,Y) \mapsto h\mathbb{T}(hX, JY) - \textit{h-mixed torsion},$$

$$\mathbb{R}^1 : (X,Y) \mapsto v\mathbb{T}(hX, hY) - \textit{v-horizontal torsion},$$

$$\mathbb{P}^1 : (X,Y) \mapsto v\mathbb{T}(hX, JY) - \textit{v-mixed torsion},$$

$$\mathbb{S}^1 : (X,Y) \mapsto v\mathbb{T}(JX, JY) - \textit{v-vertical torsion},$$

determine $\mathbb{T}$ completely. Similarly, $\mathbb{K}$ can be described by the following three mappings:

$$\mathbb{R} : (X,Y,Z) \mapsto \mathbb{K}(hX, hY)JZ - \textit{horizontal curvature},$$

$$\mathbb{P} : (X,Y,Z) \mapsto \mathbb{K}(hX, JY)JZ - \textit{mixed curvature},$$

$$\mathbb{Q} : (X,Y,Z) \mapsto \mathbb{K}(JX, JY)JZ - \textit{vertical curvature}.$$

The tensors $\mathbb{R}, \mathbb{P}, \mathbb{Q} \in \mathcal{T}_3^1(TM)$ are semibasic.

(7) Let (D,h) be a Finsler connection on M. If $L \in \mathcal{T}_3^1(TM)$ is one of the horizontal, the mixed or the vertical curvatures of (D,h), then, by an abuse of notation, the $(0,2)$-tensor

$$\widetilde{L} : (X,Y) \in \mathfrak{X}(TM) \times \mathfrak{X}(TM) \mapsto \widetilde{L}(X,Y) := tr[F \circ (Z \mapsto L(Y,Z)X)]$$

is said to be the *horizontal*, the *mixed*, or the *vertical Ricci tensor* of the Finsler connection, respectively. (F is an arbitrary almost complex structure arising from a horizontal endomorphism, e.g. the almost complex structure induced by h.) If L^* is defined by

$$L^*(X,Y,Z) := L(Y,Z)X,$$

then the Ricci tensor $\widetilde{L}$ is the semibasic trace of L^* defined in (5).

References

[1] W. Ambrose, R. S. Palais and I. M. Singer, *Sprays*, An. Acad. Bras. Ciênc. **32** (1960), 163–178.

[2] D. Bao, S. S. Chern and Z. Shen (eds.), *Finsler Geometry*, American Mathematical Society, Providence, 1996.

[3] S. Bácsó, F. Ilosvay and B. Kis, *Landsberg spaces with common geodesics*, Publ. Math. Debrecen **42** (1993), 139–144.

[4] S. Bácsó and M. Matsumoto, *On Finsler spaces of Douglas type. A generalization of the notion of Berwald space*, Publ. Math. Debrecen **51** (1997), 385–406.

[5] S. Bácsó and M. Matsumoto, *On Finsler spaces of Douglas type II. Projectively flat spaces*, Publ. Math. Debrecen **53** (1998), 423–438.

[6] S. Bácsó and M. Matsumoto, *On Finsler spaces of Douglas type III*, Finslerian Geometries (edited by P. L. Antonelli) **109** (2000), Kluwer Academic Publishers, 89–94.

[7] S. Bácsó and M. Matsumoto, *Reduction theorems of certain Landsberg spaces to Berwald spaces*, Publ. Math. Debrecen **48** (1996), 357–366.

[8] M. Berger and B. Gostiaux, *Differential Geometry: Manifolds*, Curves, and Surfaces, Springer-Verlag, Berlin, 1988.

[9] L. Berwald, *On Finsler and Cartan geometries. III Two-dimensional Finsler spaces with rectilinear extremals*, Ann. of Math. **42** (1941), 84–112.

[10] A. L. Besse, *Manifolds all of whose Geodesics are Closed*, Ergebnisse der Math. n° 93, Springer-Verlag, Berlin, 1978.

[11] A. L. Besse, *Einstein Manifolds*, Ergebnisse der Math. 3. Folge, Bd 10, Springer-Verlag, Berlin, 1978.

[12] W. Blaschke und G. Bol, *Geometrie der Gewebe*, Springer Verlag, Berlin, 1938.

[13] C. Carathéodory, *Variationsrechnung und partielle Differentialgleichungen erster Ordnung*, Leipzig und Berlin, 1935.

[14] J. F. Cariñena and Martínez, *Generalized Jacobi equation and inverse problem in classical mechanics*, Nova Science Publishers, New York (1991).

[15] M. Crampin, *On horizontal distributions on the tangent bundle of a differentiable manifold*, J. London Math. Soc. (2) **3** (1971), 178–182.

[16] M. Crampin, *On the differential geometry of the Euler-Lagrange equation and the inverse problem of Lagrangian dynamics*, J. Phys. A: Math. Gen. **14** (1981), 2567–2575.

[17] M. Crampin, *Generalized Bianchi identities for horizontal distributions*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. **94** (1983), 125–132.

[18] M. Crampin, *Tangent bundle geometry for Lagrangian dynamics*, J. Phys. A: Math. Gen. **16** (1983), 3755–3772.

[19] M. Crampin, W. Sarlet, E. Martínez, G. B. Byrnes and G. E Prince, *Towards a geometrical understanding of Douglas's solution of the inverse problem of the calculus of variations*, Inverse Problems **10** (1994), 245–260.

[20] L. del Castillo, *Tenseurs de Weyl d' une gerbe de directions*, C. R. Acad. Sc. Paris Ser. A **282** (1976), 595–598.

[21] M. de Leon and P. R. Rodrigues, *Methods of Differential Geometry in Analytical Mechanics*, North-Holland, Amsterdam, 1989.

[22] J.-G. Diaz, *Etude des tenseurs de courbure en géometrie finslerienne*, Thése III ème cycle (1972), Publ. Inst. Math. Lyon.

[23] J. Douglas, *The general geometry of paths*, Ann. of Math. (2) **29** (1928), 143–168.

[24] A. Frölicher and A. Nijenhuis, *Theory of vector-valued differential forms*, Proc. Kon. Ned. Ak. Wet. Amsterdam **A 59** (1956), 338–359.

[25] J. Grifone, *Structure presque tangente et connexions I*, Ann. Inst. Fourier Grenoble **22** (1) (1972), 287–334.

[26] J. Grifone, *Structure presque tangente et connexions II*, Ann. Inst. Fourier Grenoble **22** (3) (1972), 291–338.

[27] J. Grifone, *Transformations infinitesimales conformes d' une variété finslerienne*, C. R. Acad. Sci. Paris **280** (1975), 519–522.

[28] J. Grifone et Z. Muzsnay, *Sur le probléme inverse du calcul des variations: existence de Lagrangiens associés á un spray dans le cas isotope*, Ann. Inst. Fourier Grenoble **49** (4) (1999), 1387–1421.

[29] J. Grifone and Z. Muzsnay, *Variational Principles for Second-order Differential Equations*, World-Scientific, Singapure, 2000.

[30] M. Hashiguchi and Y. Ichijyō, *Randers spaces with rectilinear geodesics*, Rep. Fac. Sci. Kagoshima Univ. (Math. Phys. Chem.) **13** (1980), 33–40.

[31] D. Hilbert, *Mathematische Probleme*, Nachr. Akad. Wiss. Göttingen, Math. Phys. (1900), 253–297.

[32] H. Izumi, *Some problems in special Finsler spaces*, Symp. on Finsler Geom. at Kinosaki, Nov. 14–16, 1984.

[33] J. Klein, *Geometry of sprays*, Proc. of the Iutam-Isimm Symposium on Analytical Mechanics, Torino (1982), pp. 177–196.

[34] J. Klein, *Projective sprays and connections*, Colloquia Math. Soc. János Bolyai, Differential Geometry **31** (1979), 311–315.

[35] J. Klein, *Connexions in Lagrangian dynamics*, Atti della Accademia delle Scienze di Torino, Suppl. n.2 al vol. **126** (1992), 33–91.

[36] I. Kolář, P. Michor and J. Slovák, *Natural Operations in Differential Geometry*, Springer-Verlag, Berlin, 1993.

[37] M. Matsumoto, *On the indicatrices of a Finsler space*, Period. Math. Hungar. **8** (1977), 185–191.

[38] M. Matsumoto, *Foundations of Finsler geometry and special Finsler spaces*, Kaisheisha Press, Otsu, 1986.

[39] M. Matsumoto, *Conformally Berwald and conformally flat Finsler spaces*, Publ. Math. Debrecen **52** (1988), 167–185.

[40] R. Miron and M. Anastasiei, *The Geometry of Lagrange Spaces: Theory and Applications*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1994.

[41] B. O'neill, *Semi-Riemannian Geometry with Applications to Relativity*, Academic Press, New York, 1983.

[42] Rapcsák András, *Metrikus és affinösszefüggő terek pályatartó leképezései* (Hungarian), MTA III. Osztály Közleményei XI/4 (1961), 339–369.

[43] A. Rapcsák, *Über die bahntreuen Abbildungen metrischer Räume*, Publ. Math. Debrecen **8** (1961), 285–290.

[44] A. Rapcsák, *Über die Metrisierbarkeit affinzussamenhängender Bahnräume*, Ann. Mat. Pura Appl. (Bologna) (IV) **67** (1962), 233–238.

[45] A. Rapcsák, *Die Bestimmung der Grundfunktionen projektiv-ebener metrischer Räume*, Publ. Math. Debrecen **9** (1962), 164–167.

[46] H. Rund, *The Differential Geometry of Finsler spaces*, Springer-Verlag, Berlin, 1958.

[47] T. Sakaguchi, *On Finsler spaces of scalar curvature*, Tensor, N.S. **38** (1982), 211–219.

[48] Z. Shen, *Differential Geometry of Spray and Finsler Spaces*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2001.

[49] Z. I. Szabó, *Hilbert's fourth problem , I*, Adv. in Math. **59** (1986), 185–301.

[50] J. Szilasi, *Notable Finsler connections in a Finsler manifold*, Lect. Mat. **19** (1998), 7–34.

[51] J. Szilasi, *A Setting for Spray and Finsler Geometry*, in: Handbook of Finsler Geometry Vol **2** (edited by P. L. Antonelli), Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2003.

[52] J. Szilasi and Sz. Vattamány, *On the projective geometry of sprays*, Differ. Geom. Appl **12** (2000), 183–208.

[53] J. Szilasi and Sz. Vattamány, *On the Finsler metrizabilities of spray manifolds*, Periodica Mathematica Hungarica **44(1)** (2002), 81–100.

[54] J. Szilasi and Cs. Vincze, *On conformal equivalence of Riemann-Finsler metrics*, Publ. Math. Debrecen **52** (1998), 167–185.

[55] J. Szilasi and Cs. Vincze, *A new look at Finsler connections and special Finsler manifolds*, Acta Math. Acad. Paed. Nyíregyháziensis **16** (2000), 33–63, www.emis.de/journals.

[56] Sz. Vattamány, *Projection onto the indicatrix bundle of a Finsler manifold*, Publ. Math. Debrecen **58** (2001), 193–221.

[57] Sz. Vattamány and Cs. Vincze, *Two–dimensional Landsberg manifolds with Douglas tensor*, Annales Univ. Sci. Budapest **44** (2001), 11–26.

[58] Sz. Vattamány and Cs. Vincze, *On a new geometrical derivation of two–dimensional Finsler manifolds with constant main scalar*, (submitted).

[59] Cs. Vincze, *On conformal equivalence of Berwald manifolds all of whose indicatrices have positive curvature*, (submitted).

[60] H. Weyl, *Reine infinitesimalgeometrie*, Math. Z. **2** (1918), 384–411.

[61] H. Weyl, *Zur Infinitesimalgeometrie: Einordnung der projektive und der konformen Auffassung*, Göttingen Nachrichten (1921), 99–112.

[62] K. Yano and I. Ishihara, *Tangent and Cotangent Bundles*, Marcel Dekker Inc., New York, 1973.

[63] Nabil L. Youssef, *Sur les tenseurs de courboure de la connexion de Berwald et ses distributions de nullité*, Tensor, N. S. **36** (1982), 275–279.

[64] Nabil L. Youssef, *Semi-projective changes*, Tensor, N. S. **55** (1994), 131–141.