

## A talaj víztartó képességének becslése fraktáldimenzióval és egyéb talajjellemzőkkel

\*<sup>1</sup>RAJKAI Kálmán, <sup>1</sup>MAKÓ András, <sup>2</sup>HUZSVAI László, <sup>1</sup>SZABÓ Brigitta,  
<sup>1</sup>BAKACSI Zsófia, <sup>1</sup>BARNA Gyöngyi, <sup>3</sup>FODOR Nándor, <sup>1</sup>HERNÁDI Hilda

<sup>1</sup>HUN-REN Agrártudományi Kutatóközpont, Talajtani Intézet, Budapest,  
Magyarország

<sup>2</sup>Debreceni Egyetem, Közgazdasági és Üzleti Kar, Statisztikai és Módszertani  
Intézet, Debrecen, Magyarország

<sup>3</sup>HUN-REN Agrártudományi Kutatóközpont, Mezőgazdasági Intézet, Martonvásár,  
Magyarország

(Beérkezett: 2025.01.29.; Elfogadva: 2025.11.19.)  
(Online megjelent: 2025.12.11.)

**Eredeti közlemény**  
© Szerző(k) 2025



### Összefoglalás

A talaj víztartó képességét fraktáldimenziót alkalmazó módszerrel még nem becsülték a hazai talajfizikai gyakorlatban. Többváltozós lineáris regressziós és korszerű regressziós-fa módszerű pedotranszfer függvényekkel azonban már voltak víztartó képesség becslések.

Vizsgálatainkban mindhárom becslési eljárást összehasonlító módon elemeztük. TYLER és WHEATCRAFT (1990; 1992) útmutatása szerint meghatároztuk a hazai talajféleségeket reprezentáló *HunSSD* talajfizikai adatbázis talajain a szemcseméret-eloszlás és a víztartó képesség fraktáldimenzió ( $D_m$  és  $D_M$ ) értékeit. Összefüggést állapítottunk meg a  $D_M$  és a talaj agyagtartalma között. GHANBARIAN-ALAVIJEH és munkatársai (2010) módszere alapján eljárást dolgoztunk ki a víztartó képesség adatok leírására általánosan használt van Genuchten (vG)-függvény (VAN GENUCHTEN, 1980) paramétereinek becslésére. A kidolgozott fraktáldimenziós (FD-vG) módszerrel a *HunSSD* talajokra becsült és a mért víztartó képesség értékekre illesztett regressziós egyenes meredeksége 1,01, tengelymetszete pedig 0,58 tf%,  $R^2 = 0,77$ . A fraktáldimenzió alapú becslés általános alkalmazhatóságát a *HunpF* adatbázison teszteltük.

A *HunpF* talajok becsült és mért víztartó képesség értékeire illesztett egyenes meredeksége 1,01, tengelymetszete  $-2,78$  tf %,  $R^2 = 0,81$ . RAJKAI és KABOS (1999) nyolcváltozós regressziós függvényekkel (LR8) és SZABÓ et. al. (2024) (HU-PTF v2) becsülő modelljével is becsültük a *HunSSD* talajok víztartó képesség értékeit. A becsült és a mért értékekre illesztett egyenesek meredekségei sorrendben 0,99 és 0,94, tengelymetszetei 0,98 és 2,43,  $R^2$ -értékei pedig sorrendben 0,80 és 0,79 voltak. A becslések pontosságának jellemzésére hibaelemzést végeztünk. Ellenőriztük, hogy

\*Levelező szerző: RAJKAI KÁLMÁN LÁSZLÓ, HUN-REN Agrártudományi Kutatóközpont, Talajtani Intézet, Fehérvári út 132–144. 1116, Budapest, Magyarország  
E-mail: rajkai.kalman@atk.hun-ren.hu

a nedvességtartalom-becslés hibája független-e a vízpotenciál értékétől. Ez a feltétel csupán a HU-PTF v2 módszerre nem teljesült. A hibák eloszlása egyik becslési módszer esetében sem volt normális, és ugyanígy a hibavariációk is vízpotenciálanként különböztek, azaz nem voltak állandóak. Emiatt a becselő modellek megítélésére általánosan használt ME (átlag hiba) és RMSE (négyzetes hiba) mutatók csak tájékoztató jellegűek.

Megállapítottuk, hogy hazai talajok víztartó képességének becslésére a fraktáldimenziós módszer egy megfelelő alternatíva.

**Kulcsszavak:** országos reprezentatív talajadatbázis, szemcseméret fraktáldimenzió ( $D_m$ ), víztartó képesség fraktáldimenzió ( $D_M$ ), fraktáldimenziós becslés, becslési tesztek

### Bevezetés

A talajok nehezen mérhető tulajdonságainak becslésére széles körben alkalmaznak különféle számítási eljárásokat. A talajok víztartó képessége az egyik ilyen nehezen (hosszan és költségesen) mérhető talajtulajdonság, ahol a mérést sok esetben különböző becselő módszerekkel helyettesítik. E módszerek lehetnek fizikai modellalapú becslések és empirikus módszerek (pl. különféle pedotranszfer függvények, ahol a becsléshez használt bemenő és kimenő paraméterek közötti összefüggéseket írják le statisztikai módszerekkel, talajfizikai adatbázisok felhasználásával) (RAJKAI et al., 2018).

A porózus közeg funkcionális jellemzése a fraktáldimenzióval, illetve az ezen alapuló módszerek szintén ígéretesek a víztartó képesség (VK) előrejelezhetőségére (GIMÉNEZ et al., 1997; RUSSEL & BUZZI, 2012).

A háromfázisú talaj törmelékes, azaz fragmentált szerkezetűként is leírható, amelyben a szilárd részecskéket többé-kevésbé összefüggő, levegővel és vízzel kitöltött pórusok veszik körül. A fragmentált talaj a fragmentumok számával és méreteloszlásával jellemezhető (RIEU & PERRIER, 1998). A talaj szerves alkotóelemeit (gombákat, baktériumokat, élő és elhalt gyökereket, a humuszanyagokat, a talajfaunát) – az egyszerű leírás érdekében – általában figyelmen kívül hagyják.

A heterogén rendszerek leírására, így a talajok jellemzésére is, széles körben használják a fraktálgeometriát (MANDELBROT, 1982). Számos kísérlet történt a talaj fizikai tulajdonságainak, mint például a részecskeméret-, pórusméret- és aggregátumméret-eloszlásnak a fraktáldimenziók segítségével történő jellemzésére (PAN et al., 2025; DING et al., 2025). A kutatási eredmények arra engednek következtetni, hogy a szemcseméret-eloszlás fraktáldimenziója hasznos a talaj fizikai félesége és a talaj egyéb tulajdonságai közötti kapcsolatok számszerűsítésében (HWANG et al., 2002). PERFECT és munkatársai (1992) a talajok aggregátumméret-eloszlását jellemezték a fraktál elmélet használatával. PERFECT és KAY (1991), illetve PERFECT és BLEVINS (1997) szántott és nem szántott talajok aggregáltságát értékelték a fraktáldimenziók összehasonlításával. Eredményesen alkalmazták továbbá a talajok hidrológiai tulajdonságainak, például a vízvisszatartásnak becslésére, a talajok

szemcseméret-eloszlásának és pórusméret-eloszlásának fraktáldimenzióját felhasználó becslő eljárások kidolgozására is (PACHEPSKY et al., 1995; HUANG & ZHANG, 2005). HUANG et al. (2006) különböző textúrájú talajok fraktáldimenzióját felhasználva egyenletet állítottak fel a talajrészecskék fraktáldimenziója és agyagtartalma közötti kapcsolat leírására. A VK fraktálmodelljével TAO és munkatársai (2018) az agyagtartalom és a kezdeti porozitás talajhidrológiai hatását vizsgálták. Elméleti magyarázatot adtak azok VK-ra gyakorolt hatására. ZHOU és munkatársai (2019) a fraktálmélet segítségével a kezdeti porozitásnak a talaj-víz jelleggörbére és a telítetlen talaj hidraulikus vezetőképességére gyakorolt hatását egyszerű fizikai modellel írták le. A fraktálmélet alkalmazása a talajtulajdonság-vizsgálatokban leegyszerűsíti a talaj komplex szerkezetének (részecskék és pórusok) kvantitatív kifejezését és megbízható paramétert biztosít a talaj víztartó képességének előrejelzéséhez azáltal, hogy a talaj fizikai és hidrológiai tulajdonságai közötti kapcsolatot írja le. MAHDI és GHALENO (2020) meghatározta a talajok teljes szemcseméret-eloszlásának (SZME), valamint az agyag-, iszap- és homokfrakciók által meghatározott fraktáldimenziókat is, amelyek szignifikánsan nem különböztek. A VK fraktáldimenziók és az SZME fraktáldimenziók között lineáris összefüggést állapítottak meg, amellyel a talajok VK-függvényeit kielégítő pontossággal becsülték. YANG és munkatársai (2023) az UNSODA2.0 adatbázis szemcseméret-eloszlás adatait és a különböző mátrixpotenciálok víztartalom-adatait használták fel 12 különböző textúrájú talajtípus fraktáljellemzőinek vizsgálatára. A VK fraktálmodelljét alkalmazták a különböző textúrájú talajok hidrológiai tulajdonságainak jellemzésére. Megállapították, hogy a 12 talajtípus szemcseméret-eloszlásának tömeg fraktáldimenziója ( $D_m$ ) szignifikánsan különböző, és szorosan összefügg az agyagtartalommal. A fraktáldimenzió-érték az agyagtartalom növekedésével nőtt. A 12 talajtextúra-kategória fraktáldimenzióval becsült VK- értékeit kielégítő pontosságúnak találták. A talajszerkezet fraktáldimenziója tehát felhasználható a talaj hidrológiai jellemzésére. A VK-modell fraktáldimenziója a szemcseméret-eloszlás alapján becsülhető. A fraktálmélet tehát hatékony módszer a talajtulajdonság-vizsgálatokban

#### *A talaj szemcseméret-eloszlás (SZME) fraktáldimenziója ( $D_m$ )*

TURCOTTE (1992) a talajok szemcseméret-eloszlását az alábbi összefüggéssel jellemezte:

$$[N_r > l] \propto l^{-D} \quad [1]$$

ahol:  $N_r$  az  $r$  méretosztályú részecskék száma (db), mely nagyobb az  $l$  szemcseméretnél (mm), mely aránylik az  $l$  szemcseméret  $-D$  hatványához.  $D$  a Mandelbrot-féle fraktáldimenzió (MANDELBROT, 1982).

Az [1] hatványfüggvény  $D$  fraktáldimenzió értéke a  $\log(N > l)$  és a  $\log(l)$  értékekre illesztett egyenes meredeksége. A szemcseszám és méret

meghatározásának és kifejezésének módjától függően a fraktáldimenzió értéke azonban különböző lehet (PERFECT & KAY, 1991; TYLER & WHEATCRAFT, 1992; PERFECT et al., 1993; RASIAH et al., 1993; RIEU & PERRIER, 1998).

A szemcsetérfogat és szemcsetömeg átszámítására általában a talaj sűrűségének átlagos értékét ( $2.650 \text{ kg m}^{-3}$ ) használják.

A szemcsetömegre ( $M$ ) és a szemcseméretre vonatkozó, fraktáldimenziót tartalmazó összefüggés (TYLER & WHEATCRAFT, 1992) szerint a következő:

$$\frac{M(r < R)}{M_T} = \left(\frac{R}{R_L}\right)^{E - D_m} \quad [2]$$

ahol:  $M(r < R)$  az  $R$  sugarú szemcsénél kisebb méretű szemcsék tömege ( $M$  (g)),  $M_T$  a teljes szemcsetömeg (g),  $R_L$  a legnagyobb szemcse sugara ( $\mu\text{m}$ ),  $D_m$  a fraktáldimenzió és  $E$  az Euklideszi dimenzió (számértéke = 3).

A talajok szemcseméret-eloszlásának tömeg-fraktáldimenzió ( $D_m$ ) értéke 2,4 és 3 közötti. Az agyag mechanikai összetételű talajokra  $D_m$  értéke 3 közötti. A homokos agyagos vályog, agyagos vályog és az iszapos agyagos vályog talajok log-transzformált szemcseméret és kumulált tömeg adatain a legkisebb négyzetek módszerével illesztett lineáris egyenes meredekségének 3-ból kivont értéke TYLER és WHEATCRAFT (1992) szerint  $\approx 2,82$ . A szerzők szerint ezekre a szemcseméret kategóriákra a fraktáldimenzió szinte azonos. További probléma, hogy a fraktáldimenzió logaritmus skálájú szemcseméret és szemcsetömeg értékeinek nemlineáris elrendeződése miatt a regressziós egyenes illesztése jelentős hibájú, ami miatt az illesztett egyenes meredeksége, és ezáltal a fraktáldimenzió értéke is hibás lehet (TYLER & WHEATCRAFT, 1992). Ezek a tapasztalatok a szemcseméret és a szemcsetömeg fraktáldimenzió értékének lehetséges hibáira hívják fel a figyelmet.

HUANG és munkatársai (2006) a talaj pipettás módszerrel meghatározott (HILLEL, 1998) szemcseméret-eloszlásának fraktáldimenziója ( $D_m$ ) és a talaj agyagtartalma között a következő összefüggést igazolták:

$$D_m = b + m \cdot \ln(A + 1) \quad [3]$$

ahol:  $b$  és  $m$  a log-lineáris, görbe-vonalú függvény paraméterei,  $A$  az agyagfrakció (%).

*A talaj víztartó képességének fraktáldimenziója ( $D_M$ )*

Több szerző a talaj szemcseméret-eloszlás fraktál leírásán kívül a talaj víztartó képesség vagy póruseloszlás fraktáldimenziójának meghatározási módszerét is ismertette (pl. TYLER & WHEATCRAFT, 1989; 1990; RIEU & SPOSITO, 1991a; 1991b). A talaj pórusméret-eloszlására az [1] egyenlettel analóg hatványfüggvény kitevője, a fraktáldimenzió vonatkozhat a pórust magában foglaló kocka élhosszára, értéke ekkor  $\leq 1$ , a kocka síkfelületére, értéke ekkor 1 és 2 közötti (elnevezése: felületi fraktáldimenzió), valamint a kocka térfogatára, ekkor értéke 2 és 3 közötti (elnevezése: térfogati vagy tömeg fraktáldimenzió; jelölése:  $D_M$ ).

A talaj víztartó képességének leírására általánosan a van Genuchten-féle empirikus függvényt (vG-modell) használják (VAN GENUCHTEN, 1980):

$$S_e = \frac{1}{[(1+(\alpha h)^n)]^m} \quad [4]$$

ahol:  $S_e$  effektív telítettség ( $S_e = (\theta - \theta_r)/(\theta_s - \theta_r)$ ),  $\theta$  nedvességtartalom (tf%),  $\theta_r$  maradék nedvességtartalom (tf%),  $\theta_s$  víztelített nedvességtartalom (tf%),  $h$  mátrix potenciál (kPa),  $\alpha$  ( $\text{kPa}^{-1}$ ),  $n$  és  $m$  hatványkitevő.

A vG-modell közel S-alakú és két alakparamétert ( $\alpha$  és  $n$ ) tartalmaz. Az  $n$  és  $m$  kitevők kapcsolata a Mualem-feltétel szerint  $m = 1 - 1/n$  (VAN GENUCHTEN, 1980).

A BROOKS és COREY (1964) maradék nedvességtartalom ( $\theta_r$ ) nélküli modellje (BC-modell):

$$\frac{\theta}{\theta_s} = \left(\frac{h}{h_0}\right)^{-\lambda} \quad [5]$$

ahol:  $\lambda$  póruseloszlás mutató,  $h_0$  levegő belépési potenciál (kPa),  $\theta_s$  víztelített nedvességtartalom (tf%).

A BC- és a vG-modell azonos differenciális víztelítettsége estén ( $dS_e/dh$ ) a BC-modell  $\lambda$  kitevője és a vG-modell  $m$  paramétere LENHARD és munkatársai (1989) szerint a következő módon függ össze:

$$\lambda = \frac{m}{1-m} \left(1 - S_e^{\frac{1}{m}}\right) \quad [6]$$

A BC-modellhez hasonló víztartó képesség fraktálmodell TYLER és WHEATCRAFT (1990) szerint:

$$\frac{\theta}{\theta_s} = \left(\frac{h}{h_0}\right)^{D_M - E} \quad [7]$$

ahol:  $E$  euklideszi dimenzió;  $D_M$  víztartó képesség fraktáldimenzió;  $\theta_s$  és  $h_0$  lásd az [5] egyenlet magyarázatát.

Az [5] és a [7] egyenletek hatványkitevőinek kapcsolata  $E = 3$  esetén:

$$\lambda = 3 - D \quad [8]$$

A [8] egyenlet [6] egyenletbe írásával az  $m$  paraméter a  $D_M$  fraktáldimenzióból számítható, amennyiben az  $S_e$  értéke 0, VAN GENUCHTEN (1980) útmutatása szerint. Másik lehetőség az  $m$  paraméter  $D_M$ -ből való becslésére, ha a [6] egyenletben alkalmazzuk az  $m = 1 - 1/n$  feltételt, GHANBARIAN-ALAVIJEH és munkatársai (2010) szerint:

$$\lambda = n - 1 \quad [9]$$

A [8] és [9] egyenlet, valamint  $m = 1 - 1/n$  feltétel alapján  $m$  és  $D_M$  összefüggése a következő:

$$m = \frac{3-D_M}{4-D_M} \quad [10]$$

A [4]  $vG$ -függvény  $\alpha$  paramétere és a  $h_o$  érték kapcsolatára VAN GENUCHTEN (1980) víztartó képesség (VK) modellje  $\alpha$  paraméterének fizikai értelmezése alkalmazható, amely szerint:

$$\alpha = \frac{1}{h_o} \quad [11]$$

A talajok levegő belépési potenciáljaként ( $h_o$ ) – első közelítésben – felhasználhatóak az USDA textúra kategóriákra mért értékek alapján meghatározott  $h_o$  mértani átlagértékei (kPa) (RAWLS et al., 1982).

A szemcseméret-eloszláshoz hasonlóan a víztartó képesség fraktáldimenziói és az agyagtartalmak közötti összefüggés leírható a [3] egyenlet illesztésével.

Minthogy Magyarországon sem a szemcseméret-eloszlás (SZME), sem a víztartó képesség (VK) fraktáldimenziókat korábban nem alkalmazták, jelen közleményünk célja az említett fraktáldimenziókkal történő VK-bebecslések kipróbálása hazai talajokra, azok ellenőrzése egy független adatbázison, illetve a fraktáldimenzió alapuló bebecslések összehasonlítása más típusú víztartó képesség bebecslések eredményeivel.

### Anyag és módszer

A magyarországi talajféléseket reprezentáló *Magyar Talajszerkezeti Adatbázison (HunSSD)* a fraktáldimenziós VK-bebecsléseket a mért VK-értékekhez hasonlítottuk. A fraktáldimenziós (FD- $vG$ ) VK-bebecslési módszer érvényességét független talajadatbázison (*HunpF*) (RAJKAI et al., 1981) ellenőriztük és eredményét összehasonlítottuk más, a fraktáldimenziót nem számításba vevő pedotranszfer függvények (RAJKAI és KABOS, 1999; SZABÓ et al., 2024) bebecslési eredményével.

A Magyar Talajszerkezeti Adatbázishoz az ország egész területén tártunk fel szelvényeket 2017 és 2019 között, eddig összesen 59-et (MOLNÁR et al., 2019; MAKÓ et al., 2022). A mintavételezések tavasszal, márciustól júniusig, illetve ősszel, szeptembertől novemberig történtek, a fontos mezőgazdasági tevékenységek (pl. vetés, trágyázás, betakarítás) előtt vagy után. A szelvények környezetének leírásakor a növényborítottságot, a lejtést, a földhasználatot írtuk le. A helyszíni jegyzőkönyvben rögzítettük az elkülönített genetikai szinteket és mélységüket, szintenként meghatároztuk gyúrópróbával a textúrát, a nedvességtartalmat, az elsődleges szerkezetet, Munsell színskálával a színt, a mésztartalmat, a szódalúgosságot, a kavicstartalmat és a nagyobb gyökerek mennyiségét is, valamint az esetleges kiválásokat. A szelvények mélysége 1,5 m volt, illetve amennyit az alapkőzet vagy a talajvízszint engedett. Minden genetikai szintből történt bolygatott

mintavétel (272 szint); ahol lehetséges volt, ott bolygatatlan 100 cm<sup>3</sup>-es mintákat is gyűjtöttünk (166 szint).

A *HunSSD* adatbázis bolygatatlan mintáinak adatait használtuk a fraktál-módszerű (FD-vG) VK-bebecslés kidolgozására (1. táblázat). A *HunSSD* adatbázison kidolgozott FD- VK-bebecslést az 1970-es években meghatározott *HunpF* talajadatbázis 230 talajára (1. táblázat) is alkalmaztuk. Mindkét adatbázis talajtulajdonság adatait azonos mérési eljárásokkal határozták meg. A tömegszázalékos szemcseméret-eloszlás 7 méretfrakcióból tevődik össze (MSZ-08.0205-78; VÁRALLYAY, 1993). Fraktáldimenziójukat ( $D_m$ ) a szemcseméret-eloszlás kumulált értékeire a [2] hatványfüggvény nemlineáris illesztésével határoztuk meg. A talajok víztartó képességének fraktáldimenzióját ( $D_M$ ) a hazai szabvány módszerrel (VÁRALLYAY, 1973; RAJKAI, 1993) meghatározott vízpotenciálok mért nedvességtartalmak logaritmus értékeire a [7] hatványfüggvény nemlineáris illesztésével állapítottuk meg. A  $D_M$  fraktáldimenziót a talaj agyagtartalmából a *HunSSD* 166 talajminta adatain meghatározott [3] összefüggéssel becsültük. A vG-függvény  $m$  és  $\alpha$  paramétereit a [10] és a [11] összefüggésekkel számítottuk. A talaj szervesanyag-tartalmát Tyurin-módszerrel határoztuk meg; a mésztartalmat Scheibler-féle kalciméterrel 10 százalékos HCl hozzáadásával. A talaj kémhatását és elektromos vezetőképességét 1:2,5 arányú szuszpenzióban mértük.

A [11] összefüggés  $h_o$  értéke RAWLS és munkatársai (1982) közleményének 2. táblázatában található.

A talajok víztartó képességét jellemző vG-függvény [4]  $\theta_s$  paramétere a porozitással vettük egyenlőnek, amit a térfogattömeg ( $BD$ , kg m<sup>-3</sup>), valamint az átlagos sűrűség (2.650 kg m<sup>-3</sup>) porozitásra ismert összefüggésével számítottuk (BUZÁS, 1993).

$$\theta_s = \left(1 - \frac{BD}{2650}\right) \quad [12]$$

A vG-függvény  $n$  paramétere a Mualem-feltétel szerint (VAN GENUCHTEN, 1980) szerint:

$$n = \frac{1}{1-m} \quad [13]$$

A maradék nedvességtartalmat ( $\theta_r$ ) nullának vettük.

A *HunSSD* és a *HunpF* talajok 1. táblázatban látható statisztikai különbségei befolyásolhatják a  $D_M$  fraktáldimenzió – agyagtartalom összefüggést, de ezt a *HunpF* talajokon nem vizsgáltuk meg.

1. táblázat  
A HunSSD és HunpF adatbázisok talajadatainak statisztikai mutatói

Talaj jellemzők (1)	N (2)		Minimum (3)		Maximum (4)		Átlag (5)		Szórás (6)		CV% (7)	
	Hun SSD	Hun pF	Hun SSD	Hun pF	Hun SSD	Hun pF	Hun SSD	Hun pF	Hun SSD	Hun pF	Hun SSD	Hun pF
	Térfogat- tömeg ( $\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$ ) (8)	166	230	780	1000	1770	1750	1500	1410	160	130	11,0
$\theta_{0,1}$ (kPa)	166	230	36,6	34,3	75,4	60,6	48,0	47,0	6,26	4,71	13,1	10,0
$\theta_{0,25}$ (kPa)	166	230	35,5	33,6	74,0	60,0	47,1	45,7	6,15	4,53	13,1	9,9
$\theta_1$ (kPa)	166	230	34,1	32,5	67,5	58,6	44,1	43,8	5,45	4,41	12,4	10,1
$\theta_3$ (kPa)	166	230	33,2	30,4	64,6	56,7	41,8	41,7	5,29	4,48	12,7	10,8
$\theta_{10}$ (kPa)	166	230	12,1	25,9	63,3	53,8	38,3	39,0	6,66	4,99	17,4	12,8
$\theta_{20}$ (kPa)	166	230	8,1	17,0	60,4	52,5	34,9	37,0	8,01	5,73	22,9	15,5
$\theta_{30}$ (kPa)	166	230	7,1	12,0	58,2	51,4	33,2	34,1	8,27	6,81	24,9	20,0
$\theta_{250}$ (kPa)	166	230	2,5	6,4	50,3	47,5	22,5	26,8	9,42	7,53	41,9	28,1
$\theta_{1500}$ (kPa)	166	230	1,4	2,8	37,8	35,4	14,8	18,5	7,21	6,56	48,9	35,5
Szerves anyag (%) (9)	166	230	0,1	0,0	10,3	7,5	1,6	1,9	1,36	1,52	85,5	80,1
CaCO <sub>3</sub> (%)	166	N.A.	0,0	N.A.	44,2	N.A.	6,2	N.A.	9,38	N.A.	152	N.A.
EC ( $\mu\text{S cm}^{-1}$ )	166	N.A.	21	N.A.	1161	N.A.	208	N.A.	172	N.A.	82,5	N.A.
Agyag (%) (10)	166	230	1,8	2,8	53,0	64,0	26,1	28,7	12,24	12,5	46,9	43,6
Iszap (%) (11)	166	230	3,5	7,2	71,4	65,0	44,5	46,5	16,88	11,9	37,9	25,7
Homok (%) (12)	166	230	0,5	0,4	92,2	85,6	29,4	24,8	24,67	25,7	83,9	70,3

N.A – nincs mért adat/nem elérhető

A bemutatott fraktáldimenziós víztartó képesség becslés (VK-becslés) pontosságát összehasonlítottuk egy többváltozós lineáris regressziós becslő módszer (LR8) (RAJKAI és KABOS, 1999), valamint a SZABÓ és szerzőtársai (2024) által kidolgozott HU-PTF v2 pedotranszfer függvény pontosságával. Utóbbi munka

becsült hidrológiai adatai 100 m-es felbontásban elérhetőek a DOSoReMI.hu adatbázisban (PÁSZTOR et al., 2018), és a talajtulajdonságok, valamint környezeti segédváltozók (pl. domborzat, klíma, felszint jellemző távérzékelt adatok, felszínborítás) alapján gépi tanulási módszerekkel becsli a talaj víztartó képességét a MARTHA v3.2 adatbázis (MAKÓ et al., 2010) talajinformációiból.

A fraktáldimenziós VK-becslés pontosságának jellemzésére a hibák diagnosztikáját használtuk. A jól illeszkedő becslő modell maradékainak (hibáinak) ugyanis három feltételt kell teljesíteniük: 1. a maradékoknak függetlennek kell lenniük a becsült értékektől; 2. a hibáknak nulla várható értékűnek és normális eloszlásúaknak kell lenniük; 3. a hibák homoszkedasztikusak kell, hogy legyenek, azaz varianciájuk állandó és független a becsült értékektől.

Az első feltételt grafikonnal és lineáris regresszió-analízissel vizsgáltuk. Ha a becsült értékek hibáira illesztett egyenes meredeksége nullától szignifikánsan különbözött, a függetlenséget elutasítottuk (p-érték 0,05-nél kisebb). Ez ugyanis a becslés legszigorúbb megfelelőségi feltétele, és amikor nem teljesül, a többi feltétel vizsgálata már fölösleges (BATES & WATTS, 1988).

A második feltételt hisztogrammal és Shapiro-Wilk teszttel vizsgáltuk (ROYSTON, 1982). Ennek a próbának a nullhipotézise, hogy a maradékok normális eloszlásúak. Ezt csak akkor utasítjuk el, ha a számított p-érték 0,05-nél kisebb.

A harmadik feltételt a Levene-teszttel elemeztük (LEVENE, 1960). A teszt nullhipotézise, hogy a becslési hibák varianciái 5%-os szignifikancia szinten, vízpotenciálonként homogének.

Megvizsgáltuk továbbá a hibák átlagát és varianciáját. Feltételeztük, hogy mindkét mutató független attól, hogy milyen vízpotenciál értékre határoztuk meg őket. Az elemzésekhez az R statisztikai programcsomag 4.3.2 verzióját használtuk (R CORE TEAM, 2023). A becslő modellek pontosságának jellemzésére az átlagos hibát (ME), azaz a becsült és a mért értékek különbségének átlagát és a négyzetes hibát (RMSE) használtuk. Ezek a hibajellemzők azonban csak abban az esetben informatívak, ha a hibák függetlensége a becsült értékektől igazolható, továbbá a hibák normális eloszlása és a hibavariancia vízpotenciálonkénti azonossága, azaz homoszkedaszticitásuk is teljesül. Ha a három feltétel nem teljesül, akkor ezek a hibamutatók nem (vagy korlátozottan) érvényesek.

A modell becslések tehát akkor jók (a tesztadatbázis munka-adatállománytól való függetlenségétől függően pontosak vagy megbízhatóak is), ha a becslés:

1. Torzítatlan, ami a hibaátlagokkal állapítható meg;
2. Hatásos, vagyis kis becslési varianciájú;
3. Konzisztens, vagyis a nagyobb mintaszámú becslés a mért értékeket jobban közelíti.

A használt statisztikai vizsgálatok:

- a nemlineáris regresszió-, és
- a lineáris regresszió-elemzés,
- a Shapiro–Wilk W-teszt a normális eloszlás-, valamint
- a Levene-teszt a varianciák homogenitás vizsgálatára.

## Eredmények

### *A fraktáldimenziót alkalmazó víztartó képesség becslés*

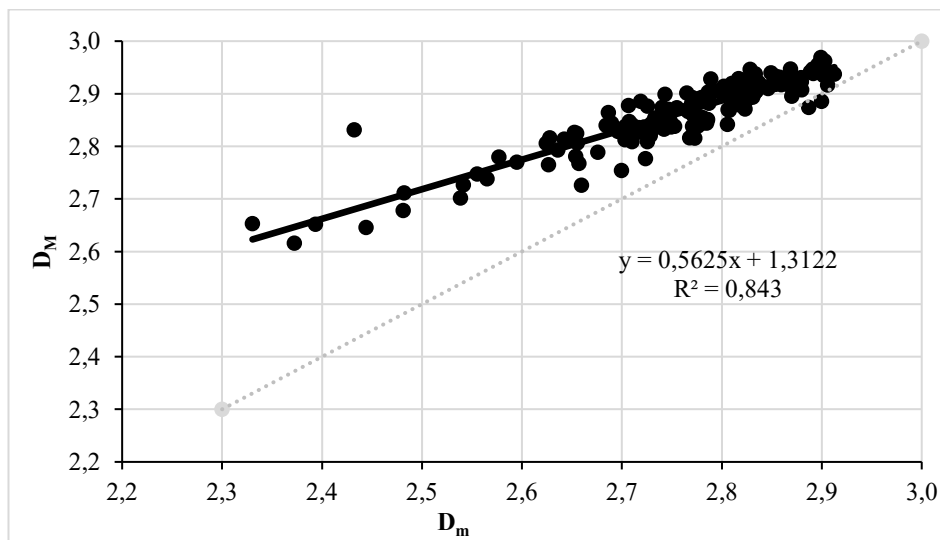
A HunSSD talajok szemcseméret-eloszlás- és víztartó képesség adatainak logaritmus értékeire a [2] és a [7] egyenletek illesztésével meghatározott fraktáldimenzió értékek ( $D_m$  és  $D_M$ ) statisztikai jellemzői az 2. táblázatban található. A  $D_m$  értékek átlaga a  $D_M$ -ek átlagnál 0,102-vel kisebb, szórása pedig 1,6 CV százalékkal nagyobb.

2. táblázat

A HunSSD talajok szemcseméret-eloszlás ( $D_m$ ) és víztartó képesség ( $D_M$ ) fraktál-dimenziók statisztikai jellemzői

Fraktál dimenzió (1)	N (2)	Minimum (3)	Maximum (4)	Átlag (5)	Szórás (6)	CV% (7)
$D_M$	166	2,617	2,969	2,868	0,067	2,3
$D_m$	166	2,330	2,913	2,766	0,109	3,9

A szemcseméret- és víztartó képesség szignifikáns korrelációját (1. ábra) az illesztett regressziós egyenes determinációs együttható értéke erősíti meg ( $R^2 = 0,84$ ). A talajok víztartó képességének fraktáldimenziója az 1. ábrán bemutatott összefüggés alapján a talaj szemcseméret-eloszlás fraktáldimenziójából becsülhető, ahogyan azt korábban pl. HUANG és munkatársai (2006) is tapasztalták.



1. ábra

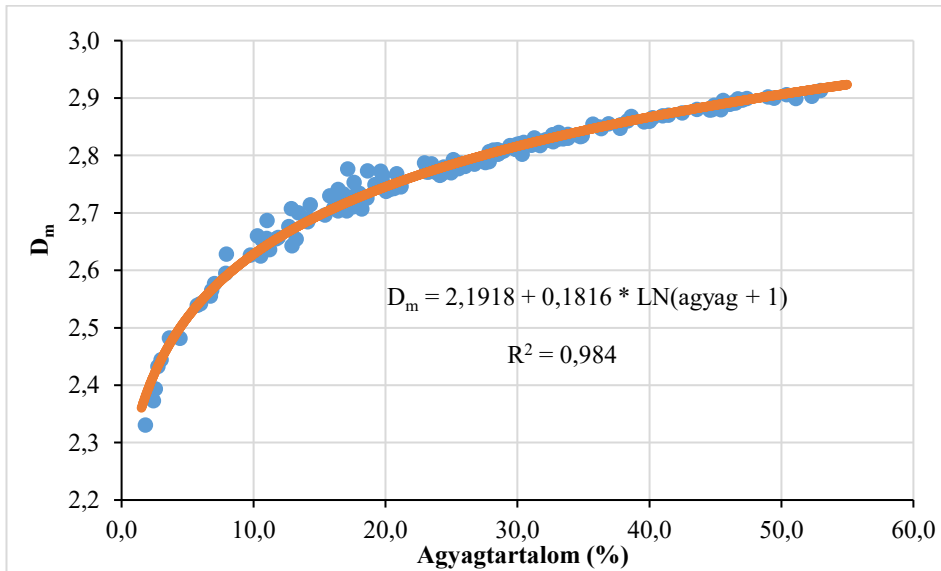
A víztartó képesség ( $D_M$ ) és a szemcseméret-eloszlás ( $D_m$ ) fraktáldimenzióinak korrelációja

3. táblázat  
A víztartó képesség becslő módszerek hibamutatóinak statisztikai adatai

Becslő módszer Adatbázis (1)	Adat- bázis statisz- tikai szerepe (2)	Függetlenség (3)	Shapiro- Wilk teszt	Levene-teszt	ME (tf%)	RMSE (tf%)	Becsült értékek átlaghibája (tf%) és varianciája (4)									
							$\theta_{0,1}$ (kPa)	$\theta_{0,25}$ (kPa)	$\theta_1$ (kPa)	$\theta_{3,2}$ (kPa)	$\theta_{10}$ (kPa)	$\theta_{20}$ (kPa)	$\theta_{30}$ (kPa)	$\theta_{250}$ (kPa)	$\theta_{1500}$ (kPa)	
FD-vG HumSSD	tréning (a)	R <sup>2</sup> : 0,0003329 F: 0,4968 p: 0,481	W = 0,97493 p = 1,815 e <sup>-15</sup>	F = 15,96 P < 2,2 e <sup>-16</sup>	0,94	6,18	-3,3	-2,81	-1,44	-2,26	-2,73	-1,95	-1,71	2,25	5,53	20,8
FD-vG HumpF	teszt (b)	R <sup>2</sup> : 0,0002529 F: 0,5232 p: 0,47	W = 0,97204 p < 2,2 e <sup>-16</sup>	F = 51,67 P < 2,2 e <sup>-16</sup>	2,48	5,15	-0,44	0,77	2,07	2,65	2,33	1,97	3,44	3,21	6,36	20,8
LR8 HumSSD	teszt (b)	R <sup>2</sup> : 0,0001255 F: 0,1873 p: 0,665	W = 0,88637 p < 2,2 e <sup>-16</sup>	F = 13,34 P < 2,2 e <sup>-16</sup>	-0,78	5,81	-3,19	-2,45	0,08	0,3	-0,021	0,06	-2,98	0,04	1,33	40,4
HU-PTF v2 HumSSD	teszt (b)	R <sup>2</sup> : 0,01511 F: 22,83 p: 1,885e <sup>-6</sup>	W = 0,9748 p = 1,64 e <sup>-15</sup>	F = 3,93 P < 1,3 e <sup>-4</sup>	-0,28	5,89	-2,41	-1,79	0,26	0,59	0,64	0,88	0,47	-0,67	-0,46	24,6

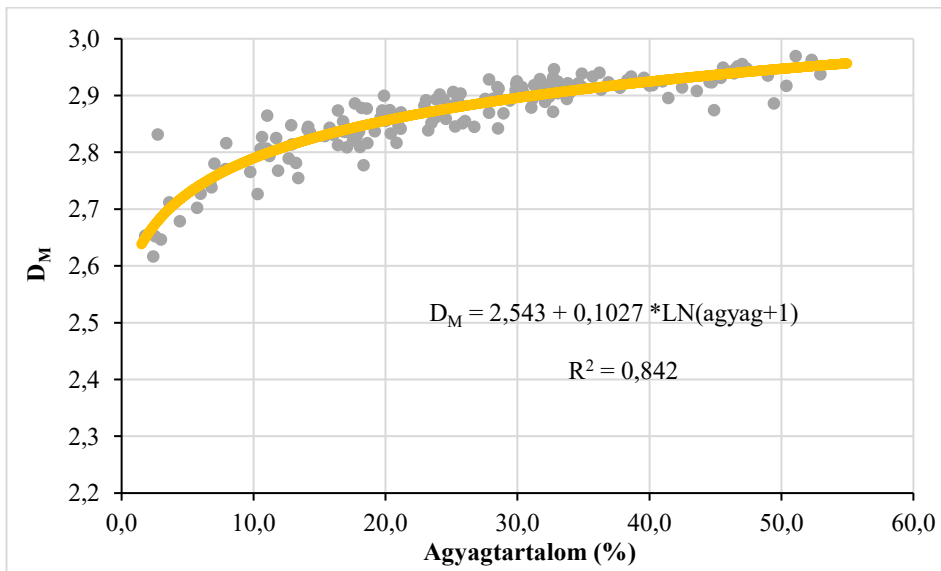
Megjegyzés: FD-vG a HumSSD adatbázison kidolgozott fraktáldimenziós becslés, LR8 lineáris regressziós becslés (RAJKAI és KABOS, 1999), HU-PTF v2 pedotranszfer típusú becslés (SZABÓ et al., 2024), HumSSD a Magyar Talajszerkezeti Adatbázis és HumpF korábbi víztartó képesség becslés adatbázisa (RAJKAI et al., 1981)

A  $D_m$  és a  $D_M$  fraktáldimenziók és az agyagtartalom közötti függvénykapcsolatot a 2. és 3. ábrákon mutatjuk be.



2. ábra

A talaj szemcseméret-eloszlás fraktáldimenziója ( $D_m$ ) és az agyagtartalom (%) összefüggése



3. ábra

A talaj víztartó képesség fraktáldimenziója ( $D_M$ ) és az agyagtartalom (%) összefüggése

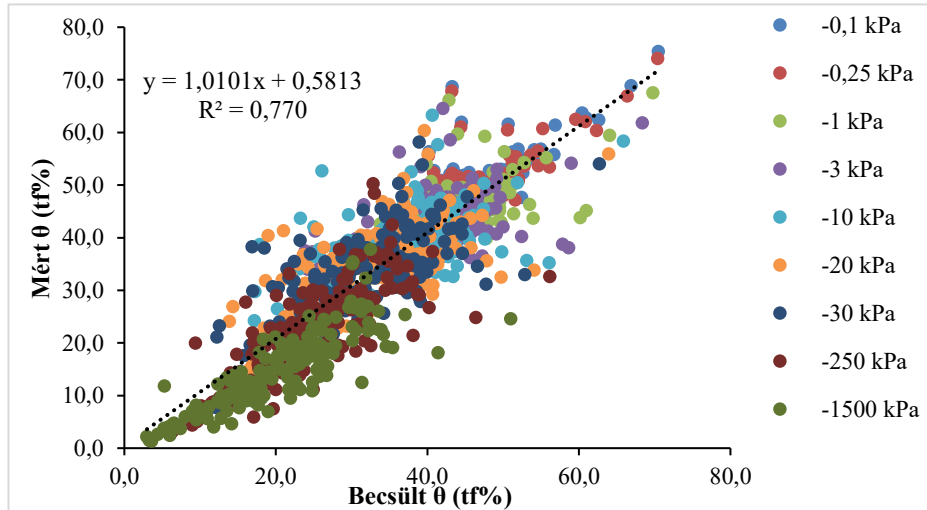
A talajok agyagtartalmából a 3. ábrán feltüntetett [3] egyenlettel számított  $D_M$  értékeket felhasználva a [10] egyenlettel számítottuk a van Genuchten (vG) víztartó képesség függvény  $m$  paraméterét. A  $\theta_s$ ,  $\alpha$ , és  $n$  paramétereket pedig a [12], [11] és [13] egyenletekkel számítottuk. A becsült paraméterű vG-függvénnyel meghatározott nedvességtartalom és a mért nedvességtartalom értékekre illesztett regressziós egyenes meredeksége egyhez közeli (1,01), az ordináta metszet nulla közeli (0,58).

Az FD-vG víztartó képesség becslés hibamutatóinak statisztikai vizsgálati eredményeit a 3. táblázat tartalmazza.

A 3. táblázat adatai szerint nincs összefüggés a becsült értékek és a hibák között, így teljesül a függetlenség feltétele. A Shapiro–Wilk vizsgálat szerint a vízpotenciál értékekre becsült nedvességtartalmak becslési hibái nem normális eloszlásúak. A nedvességtartalom becslések átlaga és szórása vízpotenciálonként szintén a 3. táblázatban található.

A  $D_M$  fraktáldimenzióval végzett becslés pontosságát a *HunSSD* és a *HunpF* adatbázisokon a 4. és 5. ábrák mutatják be.

Az FD-vG alkalmazásával becsült nedvességértékek kis vízpotenciál értékeken alulbecsültek, nagy vízpotenciálokra pedig felülbecsültek. Vízpotenciálonként a nedvességtartalom becslések varianciáinak homogenitása a Levene-teszt szerint nem teljesül, vagyis a becslési hibák varianciája vízpotenciálonként jelentősen különbözik. Ebből következően a 3. táblázat FD-vG becslés átlagos (ME) és négyzetes hibaértéke (RMSE) statisztikai értelemben nem érvényes.



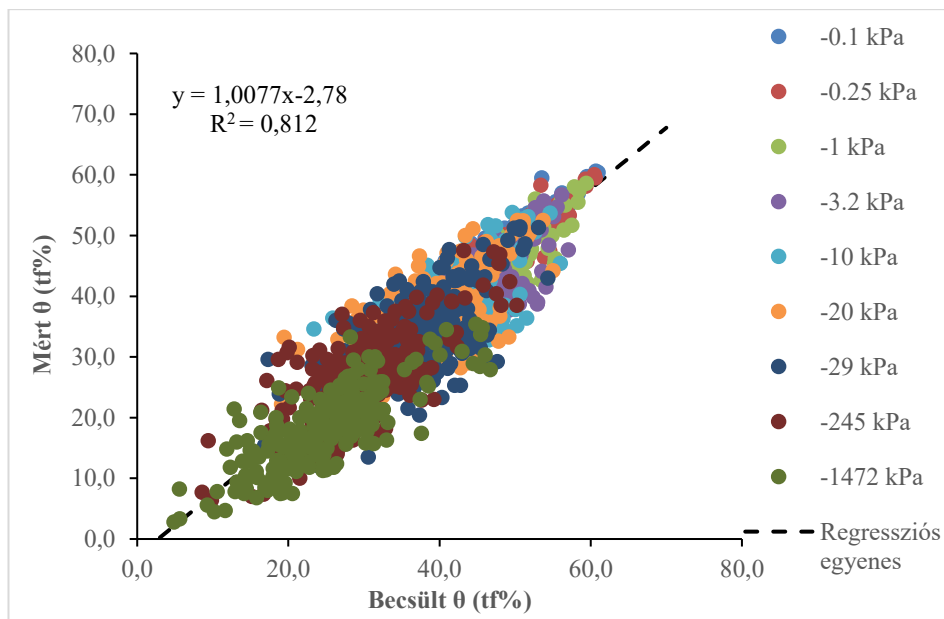
4. ábra

A  $D_M$  fraktáldimenzióval becsült és a mért talajnedvesség-tartalmak a *HunSSD* adatbázis 166×9, azaz 1494 vízpotenciál értékén, valamint az illesztett regressziós egyenlete és determinációs együtthatója ( $R^2$ )

*A HunpF talajok fraktáldimenziót alkalmazó víztartó képesség becslése*

A *HunSSD* adatbázison kidolgozott  $vG$ -függvény fraktáldimenzió alapú paraméterbecslési módszert független adatbázis (*HunpF*) talajaira alkalmaztuk. A *HunpF* adatbázis főbb statisztikai jellemzői az 1. táblázatban található.

A *HunpF* talajok  $D_M$  értékeit a talajminták agyagtartalmából a 3. ábrán látható (a *HunSSD* adatbázison leírt) összefüggéssel határoztuk meg, majd a korábban leírtak szerint, a *HunpF* talajadatokra becslöttük a  $vG$ -függvény paraméterértékeit. A vízpotenciálonként becslött és a mért nedvességtartalmakat az 5. ábrán tüntettük fel.



5. ábra

A *HunpF* talajok víztartó képességének becslött és mért nedvességtartalom értékei nedvességpotenciálonként

A mért és a becslött nedvességértékekre illesztett regressziós egyenes determinációs értéke szignifikáns ( $R^2 = 0,812$ ). A regressziós egyenes meredeksége egyhez közeli (1,0077), ordináta értéke pedig kisebb nullánál ( $-2,78$ ). A becslött nedvességértékek nagy negatív vízpotenciálon ( $-1500$  kPa) jelentősen, vagyis átlagosan 6,36 térfogatszázalékkal kisebbek a mért értékeknél (alulbecslés), míg kis negatív vízpotenciálon ( $-0,1$  kPa) a nedvességtartalmak kis mértékben, 0,44%-ban felülbecsültek.

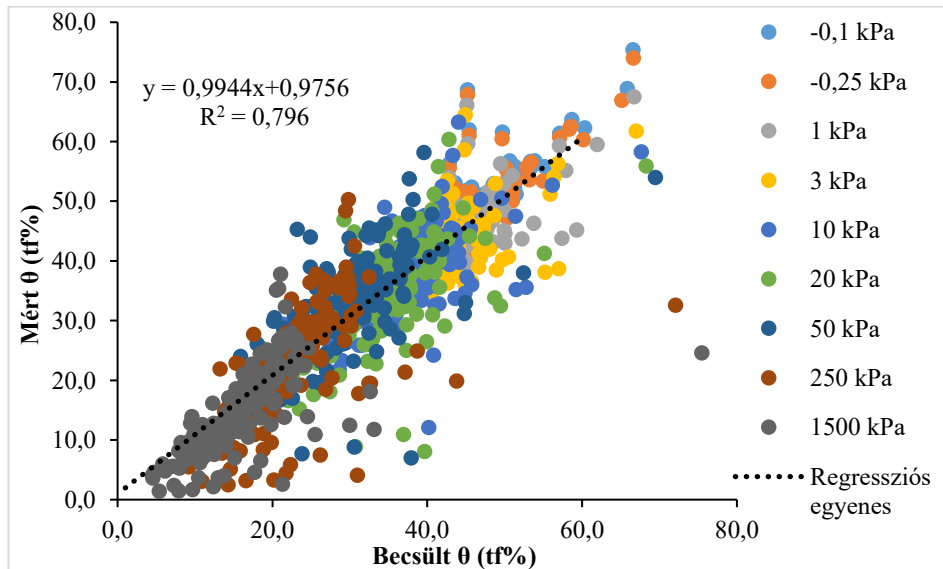
A 3. táblázat *HunpF* adatai szerint nincs összefüggés a becslött értékek és a becslések hibája között, így teljesül a függetlenség feltétele. A Shapiro–Wilk teszt szerint a vízpotenciál értékekre becslött nedvességtartalmak becslési hibái nem normális eloszlásúak. A Levene-teszt szerint a nedvességtartalom becslések

varianciája vízpotenciálonként nem homogén. Ezért a 3. táblázat *HunpF* átlagos ME és RMSE értékei statisztikai értelemben nem érvényesek.

#### *Az LR8 módszerű víztartó képesség becslés*

A fraktáldimenziós víztartó képesség becslést más víztartó képesség becslő eljárásokkal való összehasonlításához a *HunpF* adatbázis talajain kidolgozott nyolcparaméteres lineáris regressziós egyenletekkel (LR8), azaz pedotranszfer függvényekkel becsült paraméterű vG-függvényeket használtuk (RAJKAI és KABOS, 1999). A becslő módszert a *HunSSD* adatbázis talajaira alkalmaztuk. Az LR8 módszerrel becsült és a mért nedvességtartalmakat a 6. ábrán mutatjuk be.

Az LR8 nyolcváltozós vG-függvény paramétereit becslő módszer a *HunSSD* adatbázis talajnedvesség értékeit átlagosan 0,78 térfogatszázalékkal a teljes vízpotenciál tartományban felül becsüli. A felülbecslés különösen jelentős, 3,19 és 2,45 tf%, a  $-0,1$  és  $-0,25$  kPa vízpotenciál értékeken, majd a hiba csökken a nagyobb vízpotenciálokön. A becslés teljes vízpotenciál tartományra vonatkozó determinációs együtthatójának értéke  $R^2 = 0,796$ . A 3. táblázat függetlenségi tesztje szerint a becslési hibák nem függenek a vízpotenciáloktól. Az LR8 becslési hibák eloszlása a Shapiro–Wilk teszt szerint nem normális, és a hibák varianciája vízpotenciálonként a 3. táblázat Leven-tesztje szerint nem homogén.



6. ábra

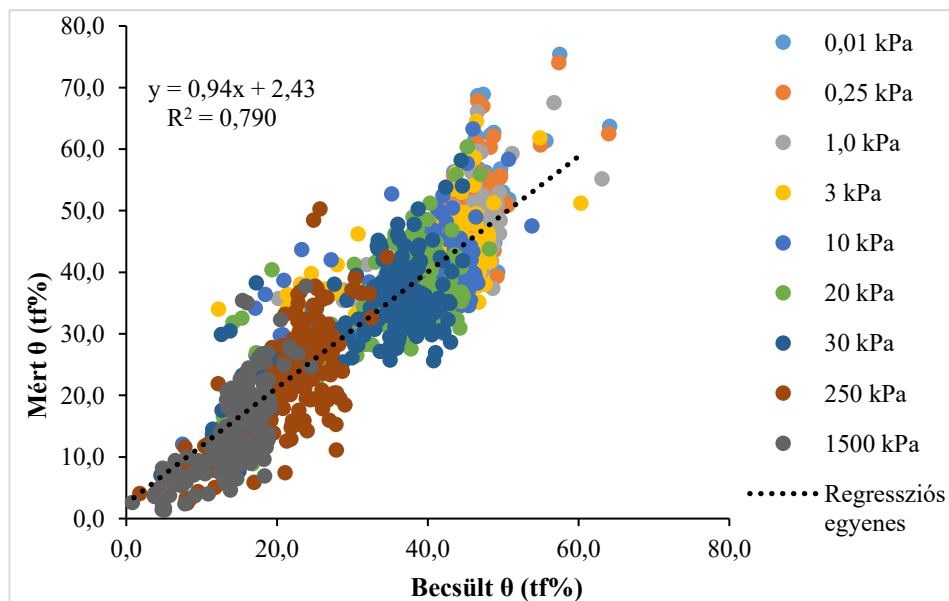
Az LR8 módszerrel becsült és a mért nedvességtartalmak nedvességpotenciálonként, valamint az illesztett regressziós egyenes egyenlete és determinációs értéke

A 20 éve publikált víztartó képesség becslés után a legkorszerűbb és a közelmúltban publikált (SZABÓ et al., 2024), magyarországi talajok hidrológiai értékeinek becslésére kidolgozott (HU-PTF v2) módszert is alkalmaztuk összehasonlításként.

#### *A HU-PTF v2 módszerrel készült víztartó képesség becslés*

A Magyarországi Részletes Talajfizikai és Hidrológiai Adatbázison (MARTHA v3.2) kidolgozott (HU-PTF v2) víztartó képesség becslő módszerrel becsteltük a HunSSD talajok víztartó képesség értékeit. A különböző vízpotenciálokra becstelt és a mért nedvességtartalmak a 7. ábrán láthatók.

A becstelt és mért adatokra illesztett regressziós egyenes tengelymetszete a teljes nedvesség-tartományra 2,4 térfogat százalék. Az egyenes meredeksége nagyon közel van az egyhez (0,94), ami a teljes víztartó képesség tartományban példásan jó becslést mutat. A becstelt nedvességtartalmak hibája a Levene-teszt szerint vízpotenciálonként különbözik. A becslések hibája a negatív vízpotenciál csökkenésével és a talajnedvesség értékek növekedésével növekszik. A növekmény mértéke kicsi, de szignifikáns (3. táblázat). A hibák eloszlása – a Shapiro–Wilk teszt szerint – nem normális, a hibavariációk pedig vízpotenciálonként szignifikánsan különböznek (3. táblázat).



7. ábra

A HunSSD talajok HU-PTF v2 módszerrel vízpotenciálonként becstelt nedvességtartalmak az azokra illesztett regressziós egyenes és egyenlete

### Az eredmények értékelése

Az alkalmazott  $D_M$  értékre alapozott FD-vG, azaz a fraktáldimenziós víztartó képesség becsléshez mindössze három mért adat szükséges, a térfogattömeg, az agyag- és iszaptartalom (utóbbi az USDA textúra kategória meghatározásához). Az FD becslés a 3. táblázat adatai szerint a nagyobb változatosságú *HunSSD* adatbázison vízpotenciálonként a *HunpF* adatbázis talajaira kapottnál nagyobb hibavariációjú becsléseket eredményezett. Az FD-vG *HunSSD* talajok VK- becslése átlagos hibája (ME) a teljes vízpotenciál tartományra csupán  $-0,94$  tf%, míg a *HunpF* talajokra  $2,5$  tf%. Az FD-vG *HunSSD* becslésben a különböző vízpotenciáloknál különböző előjelű átlaghibák jelennek meg (alul- és felülbecslés is van), míg a *HunpF*-re alkalmazott becslésben többnyire pozitív előjelű átlaghibák fordulnak elő (alulbecslés). A becslések vízpotenciál értékenkénti hibavariációja a *HunSSD* talajokra a hervadáspontot (1500 kPa) kivéve nagyobb a *HunpF* talajokénál. Ezt, feltehetően a *HunSSD* adatbázis talajainak nagyobb változatossága okozza. Az FD-vG és a *HunpF* VK-becslések átlagos négyzetes hibái (RMSE) is erre utalnak (3. táblázat). Annak viszont nehéz megtalálni a magyarázatát, hogy a *HunSSD* talajok kismértékű átlagos felülbecslését és a *HunpF* talajok átlagos alulbecslését mi okozta. A *HunpF* talajok FD-vG módszerű becsléséhez a *HunpF* talajok  $D_M$  és agyagtartalom függvénykapcsolatának megállapítása, valamint a becslésben alkalmazása a lehetőség ennek kiderítésére.

A két nem fraktáldimenziós módszerű (FD) becsléssel, az LR8 és a HU-PTF v2 módszerekkel is becslve a *HunSSD* adatbázis talajainak víztartó képesség értékeit, az eredmények összehasonlításul szolgálnak a hazánkban korábban nem alkalmazott FD-módszerű becslés pontosságának, megbízhatóságának megítéléséhez. Ennek érdekében alkalmaztuk a becslt nedvességértékek és a vízpotenciálokon mért nedvességértékek hibájának a vízpotenciál értékétől való függetlenségének statisztikai megítélését. Vizsgáltuk továbbá a becslt értékek hibaátlagainak normális eloszlását, valamint vízpotenciálonként elemeztük a becslt értékek hibavariációjának homogenitását.

A *HunSSD* és a *HunpF* talajok fraktáldimenziós VK-becslése (FD-vG) nedvességtartalom értékeinek vízpotenciálonkénti átlagos hibája nem függ a vízpotenciál értéktől ( $p$ : 0,48 és 0,47) (3. táblázat).

A *HunpF* adatbázis talajain kidolgozott vG-függvény paramétereit nyolcváltozós pedotranszfer függvényekkel becsülő módszerrel (LR8) a *HunSSD* talajokra becslt nedvességtartalmaknak a mért értékektől való eltérése, azaz hibája, szintén közel független ( $P$ : 0,665) a vízpotenciál értékétől. Az FD-becslésekhez hasonlóan a hibák eloszlása e becsülő eljárás esetében sem normális eloszlású és a hibavariációk vízpotenciálonként ez esetben is különböznek. Az FD-vG becslés *HunSSD* talajokra vonatkozó hibavariációk nagysága a negatív vízpotenciál növekedésével megnő, legnagyobb értékét ( $44$  tf%)  $-30$  kPa-nál éri el, majd csökken. Az *HunpF* talajok FD-vG becslése hibavariációinak nagysága a negatív vízpotenciál növekedésével megnő, legnagyobb értékét ( $33,9$  tf%) szintén  $-30$  kPa-nál éri el, majd csökken.

A legkorszerűbb országos érvényességű víztartó képesség becslő módszerrel (HU-PTF v2) a *HunSSD* talajokra végzett becslés csupán 0,3 tf% nedvességtartalmú átlagos felülbecslést eredményezett a teljes nedvességtartományban. A becslés átlagos hibája kis vízpotenciálok ( $-0,1$  és  $-0,25$  kPa) 2,4 és 1,8 tf%, a nagy vízpotenciálok ( $-250$  és  $-1500$  kPa) pedig 0,7 és 0,5 tf%. Az alacsony vízpotenciálok becslési hibáját valószínűleg az okozza, hogy a becslésnél nem vettük figyelembe a térfogattömeget független változóként, amely szignifikánsan javítaná a telített állapothoz közeli víztartó képesség becslését. A becslési hibák eloszlása vízpotenciálonként ebben az esetben nem normális, és a vízpotenciálonkénti hibavariációk szignifikánsan különböznek. A becsléselt nedvességértékek hibája nem független a vízpotenciál értékétől, ahogyan azt már korábban SCHAAP et al., (2001) is megállapította.

### Következtetések

Az *FD-vG* becslés nagyobb hibavariációjú becsléseket eredményezett a *HunSSD* adatbázison, mint a *HunpF* adatbázis talajaira végzett becslés (3. táblázat). A *HunSSD* talajok VK-becslésének átlagos hibája, azonban csupán  $-0,94$  tf% a teljes vízpotenciál tartományra, míg a *HunpF* talajoké 2,5 tf%. A becslések vízpotenciál értékenkénti hibavariációja a *HunSSD* talajokra – a hervadáspontot (1500 kPa) kivéve – nagyobb a *HunpF* talajokénál. A különbséget a *HunpF* adatbázis minden talajtulajdonságának a *HunSSD* talajokénál kisebb CV% értéke magyarázhatja.

A *HunpF* adatbázison kidolgozott LR8 PTF-függvények (RAJKAI ÉS KABOS, 1999) a *HunSSD* talajok VK-függvényei nedvességértékeit a teljes vízpotenciál tartományban, átlagosan 0,78 térfogatszázalékkal becslték felül.

Az országos érvényességű HU-PTF v2 VK-becslés a *HunSSD* talajok VK-függvényeinek nedvességértékeit átlagosan 0,3 térfogatszázalékkal becslte felül. A becsléselt nedvességtartalmak átlagos hibája a  $-0,1$  és  $-0,25$  kPa vízpotenciálok közel háromszorosa (2,4 és 1,8 tf%), a  $-250$  és  $-1500$  kPa vízpotenciálok nedvességtartalmak hibájának. A kis hibájú becslést a HU-PTF v2 módszer annak ellenére érte el, hogy a talajok térfogattömeg értéke a becslésben nem szerepel, amely talajtulajdonságot mind az *FD-vG* és az LR8 becslő módszer használja.

Az *FD-vG* VK-becslés tehát közel azonos pontosságú, mint a másik két, nem fraktáldimenziós VK-becslési módszeré. A fraktálméleten alapuló VK-becslés kiemelkedően kedvező tulajdonsága, hogy mindössze három mért talajadatot (térfogattömeg, az agyag- és iszaptartalom) alkalmaz.

### Köszönetnyilvánítás

Kutatásunkat a Nemzeti Kutatási, Fejlesztési és Innovációs Hivatal (NKFIH) K134563 sz. pályázata támogatta.

**Irodalom**

- BATES, D. M. & WATTS, D. G., 1988. *Nonlinear Regression Analysis and Its Applications*. Wiley.
- BROOKS, R. H. & COREY, A. T., 1964. *Hydraulic Properties of Porous Media*. Hydrology Paper. Nr. 3. Colorado State University, Fort Collins.
- BUZÁS I. (szerk.) 1993. *Talaj- és agrokémiai vizsgálati módszerkönyv 1. A talaj fizikai, vízgazdálkodási és ásványtani vizsgálata*. INDA 4321 Kiadó, Bp.
- DING, W., ZHANG, X., LI, L., TONG, X., LI, J. & ZHENG, Y., 2025. Relationship between the fractal dimension of soil aggregates and erosion in degraded lands in the Qinling–Ba mountainous area of China. *Earth Surface Processes and Landforms*. **50**. (6) esp70092.
- GHANBARIAN-ALAVIJEH, B., LIAGHAT, A., HUANG, G-H. & VAN GENUCHTEN, M. TH., 2010. Estimation of the van Genuchten soil water retention properties from soil textural data. *Pedosphere*. **20**. (4) 456–465.
- GIMÉNEZ, D., PERFECT, E., RAWLS, J. W. & PACHEPSKY, YA., 1997. Fractal models for predicting soil hydraulic properties: a review. *Engineering Geology*. **48**. 161–183.
- HILLEL, D., 1998. *Environmental Soil Physics*. Academic Press, San Diego, CA.
- HUANG, G. & ZHANG, R., 2005. Evaluation of soil water retention curve with the pore–solid fractal model. *Geoderma*, **127**. 52–61.
- HUANG, G-H., ZHANG R-D. & HUANG, Q-Z., 2006. Modeling soil water retention curve with a fractal method. *Pedosphere*. **16**. (2) 137–146.
- HWANG, S. I., LEE, K.P., LEE, D. S. & POWERS, S. E., 2002. Models for estimating soil particle-size distributions. *Soil Science Society of America Journal*. **66**. 1143–1150.
- LENHARD, R. J., PARKER, J. C. & MISHRA, S., 1989. On the correspondence between Brooks-Corey and van Genuchten models. *Journal of Irrigation and Drainage Engineering*. **115**. (4) 744–751.
- LEVENE, H., 1960. Robust tests for equality of variances. In: OLKIN, I. et al., (eds.). *Contributions to Probability and Statistics: Essays in Honor of Harold Hotelling*. Stanford University Press. Palo Alto. pp. 278–292.
- MAKÓ A., RYŽAK M., BARNA, G., POLAKOWSKI, C., RAJKAI, K., BAKACSI, Z., HERNÁDI, H., BECZEK, M., SOCHAN, A., MAZUR, R., KOCSIS, M. & BIEGANOWSKI, A., 2022. Experiences of soil physical measurements with laser and their application possibilities in soil water management research. *Scientia et Securitas*. **2**. (4) 476–490
- MAKÓ, A., TÓTH, B., HERNÁDI, H., FARKAS, C. & MARTH, P., 2010. Introduction of the Hungarian detailed soil hydro- physical database (MARTHA) and its use to test external pedotransfer functions. *Agrokémia és Talajtan*. **59**. 29–38.
- MAHDI, M.C., & GHALENO, D.M.R., 2020. Evaluating fractal dimension of the soil particle size distributions and soil water retention curve obtained from soil texture components. *Archives of Agronomy and Soil Science*. **66**. (12) 1668–1678.

- MANDELBROT, B. B., 1982. *The Fractal Geometry of Nature*. W.H. Freeman and Co., New York.
- MOLNÁR, S., BARNÁ, G., DRASKOVITS, E., FÖLDÉNYI, R., HERNÁDI, H., BAKACSI, Z. & MAKÓ, A., 2019. A BET-fajlagos felület, a humuszanyagok és további talajtulajdonságok összefüggéseinek vizsgálata jellemző hazai talajtípusokon. *Agrokémia és Talajtan*. **68**. (1) 57–77.
- MSZ-08-0205-78, 1979. A talaj fizikai és vízgazdálkodási tulajdonságainak vizsgálata, MÉM Ágazati Szabvány, Budapest.
- MUALEM, Y., 1976. A new model for predicting the hydraulic conductivity of unsaturated hydraulic conductivity. *Water Resources Research*. **12**. 513–522.
- PACHEPSKY, Y. A., SHCHERBAKOV, R. A., & KOSUNSKAYA, L. P., 1995. Scaling of soil water retention using a fractal model. *Soil Science*. **159**. 99–104.
- PAN, Y., CHEN, M. & CHEN, Y., 2025. Analysis of the relationship between soil particle fractal dimension and physicochemical properties. *Environmental Earth Sciences*. **84**. 200.
- PÁSZTOR, L., LABORCZI, A., TAKÁCS, K., SZATMÁRI, G., BAKACSI, ZS., SZABÓ, J. & ILLÉS, G., 2018. DOSoReMI as the national implementation of GlobalSoilMap for the territory of Hungary. In: ARROUAY et al., (eds.), *Proceedings of the Global Soil Map 2017 Conference*, July 4–6, 2017. CRC Press, Moscow, Russia. pp. 17–22.
- PERFECT, E. & BLEVINS, R. L., 1997. Fractal characterization of aggregation and fragmentation as influenced by tillage treatment. *Soil Science Society of America Journal*. **61**. 896–900.
- PERFECT, E. & KAY, B. D., 1991. Fractal theory applied to soil aggregation. *Soil Science Society of America Journal*. **55**. 1552–1558.
- PERFECT, E., KAY, B. D. & RASIAH, V., 1993. Multifractal model for soil aggregate fragmentation. *Soil Science Society of America Journal*. **57**. 896–900.
- PERFECT, E., RASIAH, V., & KAY, B. D., 1992. Fractal dimensions of soil aggregate-size distributions calculated by number and mass. *Soil Science Society of America Journal*. **56**. 1407–1409.
- R CORE TEAM, 2023. *R: A Language and Environment for Statistical Computing*. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria. <https://www.R-project.org>.
- RAJKAI, K., 1993. A talajnedvesség energiaállapotának meghatározása. In: BUZÁS, I. (szerk.) *Talaj- és agrokémiai vizsgálati módszerkönyv. 1. A talaj fizikai, vízgazdálkodási és ásványtani vizsgálata*. INDA4231 Kiadó. Budapest. pp. 143–161.
- RAJKAI, K., ÁCS, F., TÓTH, B. & MAKÓ, A., 2018. Dynamics of water storage and retention in soil. In: OWEIS, T (ed.), *Water management for sustainable agriculture*. Cambridge, Egyesült Királyság. Burleigh Dodds Science Publishing. pp. 31–74.
- RAJKAI, K. & KABOS, S., 1999. A talaj víztartókéesség-függvény (pF-görbe) talajtulajdonságok alapján történő becslésének továbbfejlesztése. *Agrokémiai és Talajtan*. **48**. 15–33.

- RAJKAI, K., VÁRALLYAY GY., PACSEPSZKIJ, JA. A., & SCSEBBAKOV, R. A., 1981. A pF-görbék számítása a talaj mechanikai összetétele és térfogatsúlya alapján. *Agrokémia és Talajtan*. **30**. 409–438.
- RASIAH, V., KAY, B. D. & PERFECT, E., 1993. New mass-based model for estimating fractal dimensions of soil aggregates. *Soil Science Society of America Journal*. **57**. 891–895.
- RAWLS, W. J., BRAKENSIEK, D. L. & SAXTON, K. E., 1982. Estimation of soil water properties. *Transactions of the ASAE*. **25**. (5). 1316–1328.
- RIEU, M. & PERRIER, E., 1998. Fractal models of fragmented and aggregated soils. In: BAVEYE, P., PARLANGE, J. Y. & STEWART, B. A. (eds.), *Fractals in Soil Science*. CRS Press, Boca Raton. pp. 169–202.
- RIEU, M., & SPOSITO, G., 1991a. Fractal fragmentation, soil porosity, and soil water properties, I, Theory, *Soil Science Society of America Journal*. **55**. 1231–1238.
- RIEU, M., & SPOSITO, G., 1991b. Fractal fragmentation, soil porosity, and soil water properties, II, Applications. *Soil Science Society of America Journal*. **55**. 1239–1244.
- ROYSTON, P., 1982. An extension of Shapiro and Wilk's W test for normality to large samples. *Applied Statistics*. **31**. 115–124.
- RUSSELL, A., R. & BUZZI, O., 2012. A fractal basis for soil-water characteristic curves with hydraulic hysteresis. *Geotechnique*. **62**. 269–274.
- SHAAP, M.G., FEIKE, J.L. & VAN GENUCHTEN, M.Th., 2001. ROSETTA: a computer program for estimating soil hydraulic parameters with hierarchical pedotransfer functions. *Journal of Hydrology*. **251**. 163–176.
- SZABÓ, B., MÉSZÁROS, J., LABORCZI, A., TAKÁCS, K., SZATMÁRI, G., BAKACSI, Z., MAKÓ, A. & PÁSZTOR, L., 2024. From EU-SoilHydroGrids to HU-SoilHydroGrids: A leap forward in soil. *Science of the Total Environment*. **921**. 171258.
- TAO, G., CHEN, Y., KONG, L., XIAO, H., CHEN, Q. & XIA, Y., 2018. A Simple Fractal-Based Model for Soil-Water Characteristic Curves Incorporating Effects of Initial Void Ratios. *Energies*. **11**. 1419.
- TURCOTTE, D. L., 1992. *Fractals and Chaos in Geology and Geophysics*. Cambridge University Press, Cambridge, U.K.
- TYLER, S. W. & WHEATCRAFT, S. W., 1989. Application of fractal mathematics to soil water retention estimation. *Soil Science Society of America Journal*. **53**. 987–996.
- TYLER, S. W. & WHEATCRAFT, S. W., 1990. Fractal processes in soil water retention. *Water Resources Research*. **26**. 1047–1054.
- TYLER, S. W. & WHEATCRAFT, S. W., 1992. Fractal scaling of soil particle size distributions: Analysis and limitations. *Soil Science Society of America Journal*. **56**. 362–369.
- VAN GENUCHTEN, M. TH., 1980. A closed-form equation for predicting the hydraulic conductivity of unsaturated soils. *Soil Science Society of America Journal*. **44**. 892–898.

- VÁRALLYAY, G., 1973. A talaj nedvesséspotenciálja és új berendezés annak meghatározására alacsony (atmoszféra alatti) tenziótartományban. *Agrokémia és Talajtan*. **22**. 1–22.
- VÁRALLYAY, G., 1993. A fizikai talajféleség meghatározása. In: BUZÁS, I. (szerk.). *Talaj- és agrokémiai vizsgálati módszerkönyv 1. A talaj fizikai, vízgazdálkodási és ásványtani vizsgálata*. INDA 4231 Kiadó. Budapest. pp. 45–57.
- YANG, C., WU, J., LI, P., WANG, Y., YANG & N., 2023. Evaluation of Soil-Water Characteristic Curves for Different Textural Soils Using Fractal Analysis. *Water*. **15**. 772.
- ZHOU, A., FAN, Y., CHENG, W. & ZHANG, J., 2019. A Fractal Model to Interpret Porosity-Dependent Hydraulic Properties for Unsaturated Soils. *Advances in Civil Engineering*. **2019**. 3965803.

### **Estimation of soil water retention curve using fractal dimension and other soil characteristics**

\*<sup>1</sup>Kálmán RAJKAI, <sup>1</sup>András MAKÓ, <sup>2</sup>László HUZSVAI, <sup>1</sup>Brigitta SZABÓ,  
<sup>1</sup>Zsófia BAKACSI, <sup>1</sup>Gyöngyi BARNA, <sup>3</sup>Nándor FODOR, <sup>1</sup>Hilda HERNÁDI

<sup>1</sup>Institute for Soil Sciences, HUN-REN Centre for Agricultural Research, Budapest, Hungary

<sup>2</sup>Institute for Methodology and Business Digitalisation, Faculty of Economics and Business, University of Debrecen, Debrecen, Hungary

<sup>3</sup>Agricultural Institute, HUN-REN Centre for Agricultural Research, Martonvásár, Hungary

#### **Summary**

The water retention characteristic curve of the soil has not yet been estimated in domestic soil physics practice using the fractal dimension method. However, there have already been estimates of water retention curve using multivariate linear regression and modern pedotransfer functions using regression-tree methodology. In our studies, we performed a comparative analysis of all three estimation procedures. We determined the values of the fractal dimension, which can be calculated based on the particle-size distribution and the water retention characteristic curve of the soils ( $D_m$  and  $D_M$  respectively) of the *HunSSD* soil physics database, which represents Hungarian soil types. We established a correlation between  $D_M$  and soil clay content. We developed a procedure for estimating the parameters of the VAN GENUCHTEN (vG) function, which is commonly used to describe water retention characteristic data. The slope of the regression line estimated for the *HunSSD* soils with the fractal dimension (FD) method called FD-vG and fitted to the measured water retention characteristic values is 1.01, and its intercept is 0.58 vol.%,  $R^2 = 0.77$ . The general applicability of the FD-based estimation was tested on the *HunpF* database. The slope of the line fitted to the values of the estimated and measured water retention

characteristic data of HunpF soils is 1.01, its intercept is 2.78 vol.%,  $R^2 = 0.81$ . We estimated the water retention characteristic values of *HunSSD* soils using a traditional (LR8) estimation method worked out on the HunpF database and the most recently published (HU-PTF v2) estimation methods. The slopes of the estimated and measured lines are respectively 0.99 and 0.94, their intercepts are 0.98 and 2.43, and their  $R^2$  values are 0.80 and 0.79. An error analysis was performed to characterize the goodness of the estimates. We checked whether the moisture content estimation error is independent of the water potential value. This condition was not fulfilled only for the HU-PTF v2 method. The distribution of errors was not normal for any of the estimation methods, and the error variances also differed by water potential, i.e. they were not homoscedastic. It can be concluded that the fractal dimension method is a possible alternative for estimating the water retention characteristic of soils.

**Keywords:** national representative soil database, particle size fractal dimension ( $D_m$ ), water-retention fractal dimension ( $D_M$ ), fractal dimension estimation, estimation tests

### Tables and figures

*Table 1* Statistical indicators of soil data from the HunSSD and HunpF databases; (1) Soil Characteristics, (2) N, (3) Minimum, (4) Maximum, (5) Mean, (6) Standard Deviation, (7) CV%, (8) Bulk density, (9) Organic matter, (10) Clay, (11) Silt, (12) Sand

*Table 2* Statistical characteristics of the particle size distribution ( $D_m$ ) and water retention characteristics ( $D_M$ ) fractal dimensions of HunSSD soils; (1) Fractal dimension, (2) N, (3) Minimum, (4) Maximum, (5) Mean, (6) Standard deviation, (7) CV%

*Table 3* Statistical data of the error indicators of the water retention characteristics estimation methods; (1) Estimation method, Database, (2) Statistical role of database, (3) Independence, (4) Standard error (v%) and variance (%) of estimated values, (a) training, (b) test

*Figure 1* Correlation between the fractal dimensions of water retention characteristics ( $D_M$ ) and particle size distribution ( $D_m$ )

*Figure 2* Relationship between the fractal dimension ( $D_m$ ) of the soil particle size distribution and the clay content (%)

*Figure 3* Relationship between the fractal dimension ( $D_M$ ) of soil water retention characteristics and the clay content (%)

*Figure 4* The soil moisture contents estimated with the  $D_M$  fractal dimension and the measured soil moisture contents at  $166 \times 9$ , i.e. 1494 water potential values of the HunSSD database, as well as the equation and coefficient of determination ( $R^2$ ) of the fitted regression line

*Figure 5* Estimated and measured moisture content values of the water retention characteristics of HunpF soils by moisture potentials

*Figure 6* The moisture contents estimated by the LR8 method and the measured moisture contents by moisture potentials, as well as the equation and determination value of the fitted regression line

*Figure 7* The moisture contents of HunSSD soils estimated by water potentials using the HU-PTF v2 method, the regression line fitted to them and its equation

### **Összeférhetlenségi nyilatkozat**

RAJKAI KÁLMÁN, MAKÓ ANDRÁS és FODOR NÁNDOR a szerkesztőbizottság tagjai. A kéziratot a bizottság egy másik tagja kezelte, ők a bírálat folyamatában semmilyen formában nem vettek részt.

### **Conflict of interest**

KÁLMÁN RAJKAI, ANDRÁS MAKÓ and NÁNDOR FODOR are members of the Editorial Board of the journal, therefore they did not take part in the review process in any capacity and the submission was handled by a different member of the editorial board.

---

**Open Access nyilatkozat:** A cikk a Creative Commons Attribution 4.0 International License (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0>) feltételei szerint publikált Open Access közlemény, melynek szellemében a cikk bármilyen médiumban szabadon felhasználható, megosztható és újraközölhető, feltéve, hogy az eredeti szerző és a közlés helye, illetve a CC License linkje és az esetlegesen végrehajtott módosítások feltüntetésre kerülnek. (SID\_1)

---