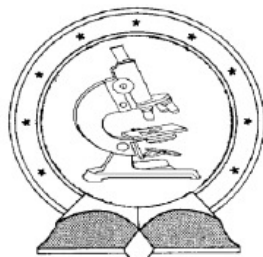


DE TTK



1949

**A MATEMATIKAI ANALÍZIS ALAPJAINAK ÉS
ALKALMAZÁSAINAK SZÁMÍTÓGÉPPEL SEGÍTETT
OKTATÁSA A KAPOSVÁRI EGYETEMEN**

Egyetemi doktori (PhD) értekezés

a szerző neve: Klingné Takács Anna Mária

témavezető neve: Dr. Klincsik Mihály

DEBRECENI EGYETEM

Természettudományi Doktori Tanács

Matematika és Számítástudományok Doktori Iskola

Debrecen, 2013.

Ezen értekezést a Debreceni Egyetem Természettudományi Doktori Tanács Matematika és Számítástudományok Doktori Iskola matematika didaktika programja keretében készítettem a Debreceni Egyetem természettudományi doktori (PhD) fokozatának elnyerése céljából.

Debrecen, 201.

a jelölt aláírása

Tanúsítom, hogy Klingné Takács Anna Mária doktorjelölt 2007- 2013. között a fent megnevezett Doktori Iskola matematika didaktika programjának keretében irányításommal végezte munkáját. Az értekezésben foglalt eredményekhez a jelölt önálló alkotó tevékenységével meghatározóan hozzájárult. Az értekezés elfogadását javasolom.

Debrecen, 201

a témavezető aláírása

A matematikai analízis analízis alapjainak és alkalmazásainak számítógéppel segített oktatása a Kaposvári Egyetemen

Értekezés a doktori (Ph.D.) fokozat megszerzése érdekében
a matematika-didaktika tudományágban

Készült a Debreceni Egyetem Matematika és Számítástudományok Doktori iskolája
(matematika-didaktika programja) keretében

Írta: Klingné Takács Anna Mária

Témavezető: Dr. Klincsik Mihály

A doktori szigorlati bizottság:

elnök: Dr.
tagok: Dr.
Dr.

A doktori szigorlat időpontja: 201... .

Az értekezés bírálói:

Dr.
Dr.
Dr.

A bírálóbizottság:

elnök: Dr.
tagok: Dr.
Dr.
Dr.
Dr.

Az értekezés védésének időpontja: 201... .

1	BEVEZETÉS	1
1.1	Témaválasztás indoklása.....	1
1.2	Kutatási célok	2
1.3	Kutatási kérdések.....	3
1.4	Kutatási módszerek.....	3
1.5	Hipotézisek	4
2	ELMÉLETI HÁTTÉR.....	5
2.1	Kognitív pszichológiai kitekintés	5
2.1.1	Matematikai ismeretszerzés folyamata.....	5
2.1.2	A kognitív pszichológia nézetei az információfeldolgozás folyamatáról.....	6
2.1.3	Kognitív képességek, készségek a matematikában	8
2.1.4	Didaktikai kitekintés	10
2.2	Számítógép a matematika oktatásában	11
3	MATEMATIKA TANTÁRGYI STRUKTÚRA, HALLGATÓI FELKÉSZÜLTSG EGYETEMÜNKÖN	13
3.1	Tantárgyi struktúra.....	13
3.2	Hallgatói felkészültség elemzése	13
4	MIKOR HASZNÁLJUNK SZÁMÍTÓGÉPES MÓDSZEREKET?.....	21
4.1	Az Excel és a GeoGebra	22
4.2	Tapasztalatok a Maple TA alkalmazásáról a felkészülésben	23
4.3	Galois-gráf.....	25
4.4	Függvényjellemzés vizsgálata a kognitív kategóriákkal.....	26
4.5	Gazdasági feladat vizsgálata Kognitív kategóriákkal	30
4.6	Sorozatok jellemzésének vizsgálata kognitív kategóriákkal	32
4.7	Folytonos valószínűségi változóval kapcsolatos feladatok Galois-gráfja	34
4.8	„A félelmi toplistá” avagy Miért használjunk számítógépes módszereket?	35
5	AZ ANALÍZIS ÉS ALKALMAZÁSAINAK TANÍTÁSA	38
5.1	Az analízis alapjainak tanítása Excellel és hagyományosan	38
5.2	A hagyományos módszer, az Excel és a GeoGebra kapcsolata	46
5.3	Gazdasági feladatok megoldásának vizsgálata	51
5.3.1	A gazdasági feladat közgazdaságtani megalapozása.....	51
5.3.2	Gazdasági feladatok megoldásának elemzése	53
5.4	Taylor-polinom tanításának elemei hagyományosan és GeoGebrával	63
5.5	Az integrálszámítás tanítása a felsőfokú szakképzésben	66

5.6	Folytonos valószínűségi változó tanítása	72
5.6.1	Folytonos valószínűségi változóval kapcsolatos alapfogalmak és feladatok a „Matematikai alapok 2” tantárgyban.....	72
5.6.2	Kérdésszerkesztés a Maple TA-ban	78
6	ÖSSZEFOGLALÁS	82
6	SUMMARY	86
	IRODALOM	90
	PUBLIKÁCIÓK.....	95
	MELLÉKLETEK.....	99

1. BEVEZETÉS

1.1. Témaválasztás indoklása

A tanítás-tanulás folyamatában három évtizede veszek részt aktívan, mint matematika-fizika szakos tanár. Tanítási tapasztalataimat az oktatás minden szintjén gyűjtöttem: tanítottam általános iskolában, szakközépiskolában és jelenleg a Kaposvári Egyetem Gazdaságtudományi Karán a megalakulása (2004) óta. Intézményünkbe beiratkozó, jelentkező hallgatók száma csökken és a merítés szempontjából inkább a közepes, vagy gyengébb képességű diákok választják képzéseinket. Matematikai előképzettségükre a kétszintű érettségi bevezetése nincs jó hatással, mert a középszinten közepesre teljesítő diákok felkészültsége nem elégséges a közgazdaságtan tantárgyainak matematikai módszertani megalapozásához.

Beiskolázás után felmérjük diákjaink matematikai ismereteit, kifejezetten az analízis fogalmainak elsajátításához szükséges ismeretekre koncentrálva, úgymint számfogalom kialakulása, algebrai azonosságok, egyenletek és egyenlőtlenségek megoldásának lépései, logaritmus fogalma, függvénytulajdonságok felismerése a függvény grafikonjának megrajzolása alapján. Ezeken a szintfelmérőkön nyújtott teljesítmények nem érik el a közép szintű érettségi alsó határát.

A Bolognai-rendszerű képzés bevezetésével a kontaktórák száma csökkent, ezért meghirdettünk hallgatóinknak egy szabadon választható tantárgyat Számítógépes matematika módszertan címmel, amely hármas célt hivatott szolgálni:

- matematikai hiányosságok pótlása illetve műveletek automatizálása
- analízis fogalmainak alapozása kisebb lépésekben
- számítógépes módszerek, alkalmazások, számítógépes rendszerek megismertetése

A tantárgy oktatása során pozitív tapasztalatokat szereztünk, hallgatóink nagyobb létszámmal teljesítik az első féléves matematikát, az analízist.

Hat évfolyam tanulta irányításom alatt az adott tantárgyat, szinte minden évben bevontam valami új számítógépes programot a tananyagba. Figyelembe kellett venni, hogy diákjaink többsége anyagilag hátrányos helyzetű, így olyan szoftvereket kellett keresni, amelyek nyílt forráskódúak, így esett a választás az első évben az Excelre, és mivel azt már középiskolában is megismerték. Miután „megtaláltam” a GeoGebrát, megmutattam a diákoknak is, azóta a használata a tananyag szerves részét

képezi. A 2012-2013 oktatási évben a TÁMOP- 4.1.2.A/1-11/1-2011-0098 azonosító számú „Műszaki és gazdasági szakok alapozó matematikai ismereteinek e-learning alapú tananyag- és módszertani fejlesztése” című pályázatának keretében egyetemünk a professzionális Maple szoftverrel szerelt fel 2 tantermet, valamint megvásárolta a Maple TA terméket, amelynek segítségével gyakorló feladatsorokat oldhatnak meg a tanulók.

Úgy gondolom, hogy a felsőoktatásban a gyakorlatokon, szemináriumokon a matematika tanítását is didaktikai alapokra kell helyezni, nem elégséges „csak” átadni a tananyagot. Még tíz évvel ezelőtt is az volt a gyakorlat, hogy előadáson tétel, definíció hangzott el; gyakorlatokon az előadás anyagához kapcsolódó feladatokat oldottak meg a diákok. Az „otthoni” tanulás szerves részét képezte az órákon megoldott feladatok begyakorlása. Tanítványaink többsége hiányos alapokkal kerül a felsőoktatásba, emiatt ez a „begyakorlási szakasz” sok esetben el is marad, nincs sikerélmény a matematika tanulásában. Tanítási óráinkat módszertanilag, pedagógiai szempontok szerint kell megterveznünk: be kell iktatnunk a „folyamatos gyakorlást” és az új ismereteket összegző részt minden egyes szemináriumi óra esetében. Számítógépes órák, szemléltetések alkalmazásával sikerélményhez juttathatjuk hallgatóinkat

Diákjaink egyre több időt töltenek el az interneten, így a számítógép és közösségi hálók adta lehetőségeket be kell vonni a tanítás-tanulás folyamatába.

Pénzügy-számvitel szakos hallgatóink kikerülve az intézményből munkahelyükön különféle könyvelési programokkal ismerkednek meg illetve dolgoznak velük. Ezt a típusú ismeretszerzést is segíthetjük, ha tanulóink matematika órákon is tanulnak számítógép algebrai rendszereket használni. A Maple használata segíti az algoritmikus gondolkodás kialakítását. A szoftverek alkalmazása során rámutathatunk a feladathoz kapcsolható matematikai modell tulajdonságaira.

1.2. Kutatási célok

A kutatás fő vizsgálati tárgyát képezi, hogy a matematikai ismeretszerzés folyamatában az analízis foglmainak, alkalmazásainak elsajátítását mennyire segítik a számítógépes eljárások.

Ennek érdekében a következő célokat tűztük ki vizsgálódásunkban:

- Megismerni a kognitív pszichológia nézeteit a matematikai ismeretszerzés folyamatáról.

- A függvényfogalom kialakulásának szintjei a tanítás-tanulás folyamatában az életkori sajátosságoknak megfelelően fejlődtek-e?
- Megtalálni azokat a számítógépes módszereket, komputeralgebrai rendszereket, amelyek az analízis fogalmainak elsajátítását hatékonyabbá teszik.
- Bemutatni az analízis alkalmazásai területeit, kapcsolódási pontjait a szaktárgyakhoz. Példákat mutatni az üzleti életből.
- Megkeresni az alap és középfokú oktatás azon tananyagtartalmait, melyek sérülése okozhatja a hallgatók kudarcait az analízis tanulása során.

1.3. Kutatási kérdések

- Melyek azok a hiányosságok, amelyek az oktatás alsóbb szintjein alakultak ki? Fel tudjuk-e zárköztatni a felsőoktatásban ezeket a tanulókat?
- Hatékonyan befolyásolja-e a számítógép használata az analízis tanulását? Helyettesítheti-e a hagyományos módszereket?
- Változik-e a diákok hozzáállása a matematikához a számítógépes módszerek bevonásával?
- Rendszeres tanulásra szoktathatjuk-e hallgatóinkat a számítógépes módszerek használatával?

1.4. Kutatási módszerek

Kutatási céljaink elérése érdekében a következő módszereket alkalmaztuk:

- Tanulmányoztuk a matematikai ismeretszerzés folyamatáról szóló kognitív pszichológiai nézeteket, az analízis tanításához kapcsolódó didaktikai elméleteket.
- Megismertük a Galois-gráfokat, mint a fogalmak hierarchikus rendszerét bemutató reprezentációs eszközt.
- Induktív kutatási stratégiát választva előidézett kísérletet végeztünk, esetenként egycsoportos illetve kétcsoportos formában, módszere az írásbeli kikérdezés volt.
- Megismertettük a hallgatókat a GeoGebrával Maple-vel, Maple TA-val mint számítógép algebrai rendszerekkel.

- Tanítási órákon megfigyeltük hogyan változik a tanulók hozzáállása a matematikához.

1.5. Hipotézisek

- I. A felsőoktatásban is hatékonyak az oktatás alsóbb szintjein tanítási módszerek.
- II. A kognitív pszichológiai vizsgálódás alapján definiáltunk univerzális kognitív kategóriákat, amelyeket a Bruner-féle reprezentációs szintekkel Galois-gráffal hierarchikus rendszerbe foglaltunk. A gráf alsóbb szintjein jelenik meg az a kategória, amely azt a fázist mutatja, amikor a számítógép bevonható a tanítás-tanulás folyamatába.
- III. A számítógépes rendszerek fejlesztik a szimbolikus síkon való jártasságot, összekapcsolják a materiális, ikonikus és szimbolikus reprezentációs szinteket, ezzel hatékonyabbá teszik a matematikai ismeretszerzés folyamatát.
- IV. Pozitív irányban változnak a tanulói attitűdök a matematika tanulása során.
- V. A matematikában gyengébb jártasságot mutató tanulók teljesítményén javítanak a számítógéppel elvégezhető feladatok, míg a jobb képességűek a számítógépes megoldásban gyengébben teljesítenek.
- VI. Az analízisben és alkalmazásaiban nem egyforma hatékonyságúak a tanult szoftverek, illetve a tanulók az adott feladattípushoz más-más számítógép algebrai rendszert preferálnak.

2. ELMÉLETI HÁTTÉR

2.1. Kognitív pszichológiai kitekintés

2.1.1. Matematikai ismeretszerzés folyamata

Kutatásunk a matematikai ismeretszerzés folyamatáról Bruner elméletét fogadja el. Bruner többedmagával a Harvard Egyetem Kognitív Kutatási Központjából megírták a *Tanulmányok a kognitív fejlődésről* című könyvet [10]. Ebben amellet érvelnek, hogy a külvilágból érkező információkat az emberi elme hogyan reprezentálja, milyen kódok segítségével tárolja. Bruner szerint minden gondolkodási folyamat háromféle síkon mehet végbe. Az ismereteket, a tudást az ember háromféle módon tudja reprezentálni.

1. *Materiális (enaktív) sík*

Az ismeretszerzés egy cél elérésére konkrét tárgyi cselekvések, tevékenységek, manipulációk révén megy végbe.

2. *Ikonikus sík*

Az ismeretszerzés szemléletes képek, ill. elképzelt szituációk révén történik.

Például fadiagram, algebrai problémák geometriai szemléltetése.

3. *Szimbolikus sík*

Ezen a síkon az ismeretszerzés matematikai szimbólumok és a nyelv segítségével megy végbe.

A három reprezentációs mód az oktatási folyamat minden fázisában szerepet játszik. Az egyik módról a másikra való áttérés növeli a rugalmasságot, és a problémamegoldó gondolkodás hatékonyságát [6]. Az ikonikus sík (szemléltetés) végig jelentős szerepet játszik a matematika oktatásában.

A reprezentációs módok kapcsolatát szemléltetjük a következő példában:

A diákok fizika órán megismerik a rezgő mozgást, meg is tapasztalják azt, ha a rugóra akasztott és megnyújtott test mozgását megfigyelik. Megmutathatjuk a körmozgással való kapcsolatát is, innen már csak egy lépés a szögfüggvény definíciójának általánosítása a matematika órán. A szinusz függvény megrajzolásával a fizikából megismert mozgás matematikai reprezentációját, szemléltetését sajátíthatják el. A matematika szimbólumaival kifejezhetjük a függvény „nevét”. A matematika szaknyelvének megtanulása után, a háromfajta reprezentációs módnak kell beépülnie az ismeretszerzés folyamatába.

A legtöbb tanulói aktivitásnál a reprezentációs módok nem különülnek el, egymásba mennek át, ezért is fontos, hogy a tanítás-tanulás folyamatában mindhárom mód jelenjék meg, tudatosan alkalmazzuk a tananyag megismertetéséhez a megfelelő módokat.

Bruner fejlődésméleteiben a cselekvés-képzet-nyelv hármasságával reprezentációs rendszerek egymásutánjaként képzelte el a gyermeki fejlődést. Az *oktatás kultúrája* című könyvében [9] tovább gondolta a három reprezentációs módot, de már nem fejlődési alapon gondolja a hármas tagolódást.

- *Procedurális reprezentáció* vagy „üzemmód”

A fent nevezett mód a cselekvés vezetésében nagyon lényeges az általunk begyakorolt viselkedésnek nevezett aktivitás szempontjából. Erre a reprezentációra épülnek a világra irányuló cél-, eszköz-, vagy instrumentális struktúrák. A motoros készséggel, ügyességgel van közeli kapcsolatban. Munka vagy célirányos aktivitás van benne.

- *Ikonikus reprezentáció*

Bruner először nem érezte annyira fontosnak, jelentősnek ezt a reprezentációs módot, azóta belátta ez irányú tévedését. Azt mondja, hogy a képek nem csak a belőlük születő és osztályok prototípusaiként szolgáló események és tárgyak sajátosságát ragadják meg. Mércévé is válnak, amelyhez azokat a példányokat lehet hasonlítani, melyek az adott osztály jelöltjei. Tehát nagyon korán képesek leszünk arra, hogy a világot tipikus képekre „fordítsuk”, és a hasonlóságok egyfajta fogalom előtti struktúrát kínálnak, amelynek segítségével működni tudunk a világban. Az emberi cselekvés szavakban reprezentálódik, nem univerzális és időtlen formula, amit kimondunk, hanem történet. Megjelenik a *narratívum* gondolata e mondatában. Később ki is fejti, hogy a képek nem csak kategóriák prototípusai, hanem a folyamatos narratíva megállított kockái.

Oktatási tapasztalataink szerint az ikonikus reprezentációnak, a szemléltetésnek a tanítás-tanulás folyamatában minden oktatási szinten, legyen az alapfokú, középfokú vagy felsőfokú, mindvégig nagyon fontos szerepe van. E reprezentáció sérülése okozhatja, a függvényjellemzésben kapott tulajdonságok alapján a függvény grafikonjának ábrázolásában a sikertelenséget hallgatóink számára.

- *Szimbolikus reprezentáció*

Erről a reprezentációs módról nem változott az állásfoglalása, továbbra is az ismeretszerzés legfontosabb formájának a matematikai szimbólumokat és a nyelvet tartja.

2.1.2. A kognitív pszichológia nézetei az információfeldolgozás folyamatáról

A második kognitív pszichológiai forradalom óta, mely a kilencvenes évekre tehető, folyamatosan módosulnak az elgondolások az emberi elme természetéről. Ezek az elgondolások a kognitív működésről szóló két élesen

eltérő elgondolásból nőttek ki. Ezek közül az első az a feltevés volt, mely szerint az elmét el lehet képzelni komputációs szerkezetként is. A másik feltevés szerint az emberi kultúra egyfelől alkotóeleme az elmének, másfelől az elme az emberi kultúra használata során valósul meg. [16]

Az első, *komputációs nézet* az információfeldolgozással foglalkozik, azzal, hogy a világról szóló véges, kódolt, egyértelmű információt hogyan vési be, szűri, tárolja, kapcsolja össze, állítja helyre, és általában kezeli egy komputációs szerkezet. Az információt úgy veszi, ahogy kapja, olyasvalamiként, ami már beágyazódott valamiféle eleve létező, szabályok által korlátozott kódba, amely a világ állapotait fedi le. [9]

A második megközelítés ihletője a *kulturalizmus*, vagyis az az evolúciós tény, hogy az elme nem tudna létezni, ha nem lenne kultúra. Hiszen az emberszabású elme evolúciója egy olyan életmód kialakulásához kapcsolódik, ahol a valóságot egy olyan szimbólumrendszer képviseli, melyet az adott kulturális közösség minden tagja ismer. Ebben a közösségben ez a szimbólumrendszer egyszerre szervezője és létrehozója a technikai-szociális életnek. [9],[11]

A *narratív tétel*: Milyen gondolkodásmód, illetve érzések segítenek a gyerekeknek vagy akár az embereknek abban, hogy a világnak egy olyan verzióját hozzák létre, amelyben számolhatnak majdani helyükkel- ez a saját világuk. Bruner úgy véli, hogy a történetmesélés, a narratívum szükséges ehhez. A narratívum mint gondolkodásmód és a jelentésalkotás közvetítőközegeként jelenik meg nála. Úgy gondolja, hogy két nagy útja van annak, ahogyan az emberi lények kezelik és szervezik a világról való tudásukat, ahogyan közvetlen élményeiket strukturálják. Az egyik inkább a fizikai „dolgok” kezelésére szakosodott, a másik pedig az emberek és állapotuk kezelésére. Az egyiket a szaknyelv logikai-tudományos, a másikat pedig narratív gondolkodásnak nevezi. Egyik kultúrából sem hiányoznak, de a kettőt a különböző kultúrák másképpen részesítik előnyben. [9],[11]

Szemináriumokon egyaránt megjelenik mindkét fajta gondolkodás, nevezhetjük őket *elméleti hozzáállásnak* és a *narratív hozzáállásnak* [47] is. A narratívumok alkalmazását fontosnak tartjuk, mivel a tanítási tapasztalatok azt mutatják, ha a fogalmakat, definíciókat valamilyen történethez vagy szokatlan asszociációhoz kötjük, akkor a diákok emlékezetéből „könnyebben” előhívhatók a tanult ismeretek.

Sajátos fejlődéseméletet dolgozott ki Gergely György és Csibra Gergely, mely a *természetes pedagógiai koncepció* címet viseli [22]. Elméletükben kifejtik, hogy háromféle elsajátítási kontextus van:

- Innát, eleve adott tanulási módok
- Egyéni szokástanulások

- Pedagógiai rendszerek

Mindháromnak megvan a sajátos biológiai alapja, de az egyik viszonylag korán fixálódik, a másik egész életünkben nyitva levő, az utolsó pedig nem csak nyitva levő, hanem sajátos szociális instrukciókat váró előkészített rendszer. A biologizálttól az individualizálton keresztül a szociális elsajátítás lesz a tanulási módok menete. [49]

Allan Newell és Herb Simon a *Human problem solving* [44] című munkájukban fejtik ki a problémamegoldásra vonatkozó problématermelélméletüket, mely szerint azt feltételezték, hogy egy probléma objektív szerkezetét állapotsorozatok formájában jellemezhetjük. A kezdeti állapotból, miközben a célállapotba érkezünk, cselekvéseket végezhetünk, operátorokat alkalmazhatunk a megoldás során. Newell és Simon kutatásaik nagy részét komputációs modellekben fogalmazták meg, ezekben a különböző tudásállapotokat a munkamemória tartalmazza, és a hosszú távú memóriában levő produkciók vagy operátorok módosíthatják ezeket az állapotokat. Első modelljüket *Általános Problémamegoldónak* (*General Problem Solver*, G.P.S.) nevezték.

2.1.3. Kognitív képességek, készségek a matematikában

A képességeket a mai állásfoglalás szerint nem a tárgyi tudás ellenpólusának vagy alternatívájának tekintik, hanem a tudás megszerzésében, szervezésében és felhasználásában központi szerepet játszó eszközöknek. A képességek kutatásában megfigyelhető néhány jellemző tendencia, amit különösen a kilencvenes évtizedben vált jól megfigyelhetővé. Például egyre inkább a komplex képességek vizsgálata kerül előtérbe. A formalizált, kontextusától megfosztott képességek helyett a kontextusba ágyazott, konkrét tartalommal bíró képességek, váltanak ki nagyobb figyelmet. Az iskolai kontextus helyett egyre nagyobb szerepet játszik a reális élethelyzet. [16]

A matematikai képességek problémája a pszichológusokat már az évszázad eleje óta foglalkoztatja. A legalaposabb és legsokoldalúbb elemzést *Krutetki* végezte [37]. Feltárta azokat a sajátosságokat, amelyekkel a matematikában jó teljesítményt nyújtó tanulók gondolkodása jellemezhető: (a) általánosítás képessége (adatokra és relációkra vonatkozóan); (b) a matematikai következtetések és az adatokkal kapcsolatos cselekvésmozzanatok összevonásának, rövidítésének képessége; (c) a gondolkodási folyamatok flexibilitása; (d) érthető kifejezésre, egyszerűsítésre és gazdaságosságra való törekvés; (e) a matematikai következtetések megfordításának képessége (inverzió); (f) önkontroll. [65]

Gullasch [22] konstruált egy hatszintű sémát, melynek minden egyes szintje egy-egy fejlődési szint képviselője. Ennek a hatszintű sémának a felépítésében a szemléletesség, mint kulcsfontosságú kategória jelenik meg:

(1) a megismerő tevékenység verbális-logikus szintjén megnyilvánuló tökéletes absztrahálás; (2) főként az absztrakt-verbális szinten, részben pedig a közvetlen szemléletesség fokán megvalósuló tökéletes absztrahálás; (3) a közvetett szemléletesség szintjén megvalósuló tökéletes absztrahálás; (4) túlnyomóan a közvetett és részben a közvetlen szemléletesség fokán megvalósuló tökéletes absztrahálás; (5) tökéletes absztrahálás a túlnyomóan közvetlen szemléletesség szintjén; (6) egyetlen szinten sem lép fel teljes absztrahálás. Ezt a skálát nemcsak az absztrahálásra, de a másik három képességre is lehet alkalmazni: az általánosításra, az inverzióra, valamint a sűrítésre. Speciális próbák segítségével meg lehet állapítani, hogy a vizsgált személy teljesítménye a fenti skála melyik szintjének felel meg, s az így kapott eredményekből következtetni lehet az egyén matematikai képesség-struktúrájának vonásaira.[67]

Carroll [13][12] ezen kutatások szintézisként egy hierarchikus háromszintű modellt állított fel, amelyben a kognitív képességeket általános, átfogó és szűk hatókörű faktorokba sorolta be. A hierarchia csúcsán, a legfelső szinten, az általános „g” faktor van. Ezt az általános faktort intelligenciával kapcsolatos kutatásai során már Spearman is feltételezte [55][56], és ő nevezte ezt el „g”-nek. Úgy gondolta, hogy ez az általános faktor olyan kognitív műveletekben van jelen, ahol meg kell érteni valamit; különböző ingerek közötti kapcsolatot illetve dolgok közötti összefüggéseket kell megtalálni; illetve ki kell következtetni. Általánosan elmondható, hogy mindenféle kognitív aktivitás feltétele, alapja ez a komponens. A matematikai tudás szintmérő tesztek eredményei szoros összefüggést mutatnak a „g”-vel. Az alacsony IQ-jú (alacsony „g”-jű) embereknek már az egyszerű matematikai műveletek is nehézséget jelentenek [21]. A második szinten találhatóak az átfogó képességek [12]: (1) folyékony (fluid) intelligencia, (2) kristályos intelligencia, (3) tanulás és memória általános faktora, (4) vizuális észlelés, (5) auditív észlelés, (6) a visszaidézés képessége, (7) tágabb értelemben vett kognitív sebesség, (8) az információfeldolgozás sebessége. Az első szinten találhatóak a szűk hatókörű faktorok (kb. 65 db), amelyek már meglehetősen speciális képességeket reprezentálnak. A kognitív képességek ezen rendszerébe beilleszthető a matematikai képességek struktúrája [13]. Carroll szerint számos elemi szintű képesség összefüggésbe hozható a magas szintű matematikai teljesítménnyel, ezért a matematikai képesség összetevőinek tekinthetők. [67]

Nagy a modelljében négy csoportba osztja a készségeket: (1) merev kognitív készség (pl. szó szerint betanult szövegek); (2) ciklikus kognitív készség (pl. szortírozás, sorképzés, számlálás); (3) rugalmas kognitív készség (pl. besorolás, szelektálás); (4) komplex kognitív készség (pl. következtetési gondolkodás, mértékváltás). Modelljében ezek a kognitív készségek meghatározott rendszert alkotnak. A kognitív rutinok egyszerű készségekké,

az egyszerű készségek komplex készségekké szerveződnek. A legátfogóbb rendszer a kognitív kompetencia, amely hierarchikus komponensrendszerként képzelhető el. A jelenleg körvonalazódó új elméletek alapján a matematikai gondolkodásban (is) szerepet játszó képességek többszintű, hierarchikus komponensrendszereknek tekintendők [43].

Niss [45] nyolc osztályba sorolta a készségeket: (1) matematikai gondolkodás és következtetés; (2) matematikai érvelés; (3) matematikai kommunikáció; (4) modellezés; (5) a feladat megfogalmazása és megoldása; (6) ábrázolás, megjelenítések értelmezése; (7) szimbolikus, formális, technikai nyelv- és művelethasználat; (8) eszközhasználat.

2.1.4. Didaktikai kitekintés

A matematikatanítás kognitív célrendszeréről

A tanítási célok kategóriákba való besorolását és szintek szerinti rendezését taxonómiáknak nevezzük. Bloom [8] minden tantárgy számára használható taxonómiát állított össze. A tanulási célokat három csoportra osztotta: kognitív (tudati)- pszichomotorikus (mozgásos) –affektív (hozzáállás hajlam, motiváltság) tanulási célok.

Varga Tamás [66] kidolgozott egy matematikai célrendszert a Bloom-féle taxonómiák alapján, ennek elemei:

- Megértés (gondolatmenetek követése, kijelentések megértése, különbségtétel, ismétlés, szimbólumok, ábrák egymásba transzformálása)
- Tudás, cselekvés, alkalmazás (szimbólumok használata, rutinfeladatok megoldása, manuális készségek birtoklása, matematikai kijelentések alkalmazásai)
- Konstruálás (probléma megfogalmazása, megoldási terv készítése, definícióalkotás, bizonyítás megtalálása, általánosítás)
- Értékelés (kifejezés igaz-e, értelemszerű-e, felesleges ellentmondó adatok kiszűrése, az ötlet, definíció megfelelő-e, gondolatmenet korrekt-e, a megoldás megfelelő-e a feltételeknek, ésszerű-e, gyakorlatias-e)

Zech [67] szintén kidolgozott egy célrendszert, melynek elemei:

- Megértés
- Tényállások ismerete
- Tartalmi és formális eljárások birtoklása
- Analízis (elemzés) és egyszerű alkalmazások
- Szintézis. Problémamegoldás [6]

A számfogalom kialakítása, a helyes műveletvégzés elengedhetetlen ahhoz, hogy algebrai azonosságokat is helyesen kezeljenek a tanulók, de ahhoz is, hogy képesek legyenek az absztrakcióra. A jó számfogalom az alapja a függvényfogalom kialakításának is.

Peller József szerint [46] *a számfogalom kialakításának öt szintje van:*

1. a természetes számfogalom kialakítása (diszkrét mennyiségek mérése)- óvoda, alsó tagozat
2. a törtek fogalmának kialakítása (folytonos mennyiségek mérése)- alsó tagozat
3. a törtek rendezése, a valós számok megközelítése – felső tagozat, középiskola
4. axiómák megjelenése – középiskola emelt szint, tagozat és felsőoktatás
5. a megfelelő számhalmazok speciális realizációi (algebrai struktúrák)- felsőoktatás

A függvényfogalom kialakításának (tanításának) szintén öt szintje van:

1. Mozgások, folyamatok, változások, relációk mennyiségi kapcsolatainak közvetlen kialakítása – óvoda, alsó tagozat
2. Mozgások, folyamatok, változások, relációk mennyiségi kapcsolatainak matematikai leírása – alsó és felső tagozat
3. Függvények elemi vizsgálata - középiskola
4. Az elemi analízis fogalmai – középiskola emelt szint, tagozat, felsőoktatás
5. Struktúrák vizsgálata függvényekkel, mint objektumokkal – felsőoktatás

Az egyes szintek az oktatás szintjei szerint vannak csoportosítva, és az egyes szintek feltételezik a megelőző szint pontos kialakítását. Mégis a tanulás-tanítás folyamatában ún. sérülések, lyukak keletkeznek, amelyek a felsőoktatásban csapódnak le.

Marcus Witt (Bath Spa University) fejtette ki véleményét, amikor Erasmus program keretében egyetemünkön járt 2009-ben: ha olyan tanítókat képezünk, akik félnek a matematikától, ezt a félelmet tovább adják a tanítványaiknak, amikor kikerülnek a közoktatásba. Így megint csak olyan diákjaink lesznek, akik tartanak a matematikától. Egyetemünkön kutatások folynak ebben a témában.

2.2. Számítógép a matematika oktatásában

Az utóbbi években konferenciákon több előadást is hallhattunk arról, hogy a számítógép bekapcsolása a matematika oktatásába pozitívan befolyásolja a tanulók tantárgyhoz való viszonyát.

A számítógép használata az egyes reprezentációkat különböző mértékben segíti, a szemléltetésben fontos szerepe van. Segíti matematikai gondolkodási síkok közötti átmenet rugalmasságát [62].

Hazai matematikadidaktikai kutatások is bizonyítják, hogy a CAS illetve CAD rendszerek mind vizualizációs lehetőségei, mind numerikus számolási képességei valamint szimbolikus számítások elvégzésére alkalmas eszközei segítik az új fogalmaknak a régiekhez való kapcsolását, az analógia, összehasonlítás és általánosítás jól fejleszthető segítségükkel. Az absztrakció képességének kialakításában is elsődleges szerepet kaphatnak. [47]

A Maple számítógép algebrai rendszer megtanulása nem könnyű feladat, de ez később megtérül, mert felgyorsul a feladat megoldása. Minden egyes fogalom, eljárás, algoritmus tanításánál, megalkotásánál ügyelni kell arra, hogy azt értsék a tanulóink. Át kell lássák a feladat egészét. A reprezentációs szintekbe kell épülniük a fogalmaknak, algoritmusoknak [53].

A számítógépes módszerek alkalmazásával megváltozik a tanár szerepe is, irányítónak válik, viszont több előkészítést igényel, de később a már elkészített munkalapok használhatók, így egy nagy "reprezentációs bankkal" fogunk rendelkezni. A hallgatók szívesebben oldanak meg számítógéppel feladatokat így a tantárgyhoz való viszonyuk pozitív irányultságú lesz [47]. Lehetőségük nyílik a kísérletezésre, próbálgatásokra, a heurésztika élmény megtapasztalására. Ugyanakkor a számítógép nem pótolhatja a matematikai ismeretszerzést, a hagyományos, nem királyi úton való tapasztalatszerzést. Ha a diák megakad a megoldás során a számítógépet segítségül hívhatja. Segítheti a probléma megoldást abból a szempontból, hogy energiájukat nem a műveletek helyes elvégzésének helyességére kell fordítaniuk, hiszen ezt a gép elvégzi helyettük, hanem a probléma megtalálására, a megoldás menetének megtervezésére koncentrálhatnak.

Lavicza Zsolt [38] tanulmányában arról ír, hogy interjút készített 22 matematikussal és összegyűjtött 1103 db kérdőívet 3 országból matematikát tanító tanároktól (Magyarország, Egyesült Királyság, Egyesült Államok). A tanulmány eredményei azt mutatják, hogy 1) a matematikusok szélesebb körben használják a technológiákat a matematika oktatásában, mint a tanárok, 2) a matematikusok pozitívan ítélik meg a technológiák szerepét a matematika tantervekben 3) számos matematikus nyitott arra a kérdésre, hogy alkalmazzák a matematika oktatás során a számítógépes módszereket, valamint nyitottak a kísérletezésre és az innovációra a matematika oktatásában. Tanulmányában amellet érvel, hogy a pedagógiai kutatók nagyobb figyelmet fordítsanak, a technológia-orientált tanítási gyakorlatoknak a matematika oktatás minden szintjén.

A Longwood Egyetemen készítettek egy saját interaktív matematika tanulási eszközt (Interactive Computer-Based Math Teaching Tools Download Page), amelyhez programozási ismeretek nem szükségesek. Az Excel táblázatkezelő program az alapja és step-by-step oktatás és animációk vezetnek a

használót. Célközönségnek a matematikát oktató tanárokat tűzték ki. Fő témakörként a függvényábrázolási technikákat mutatják be [42].

Frank Quinn [51] arról ír, hogy tíz éven át figyelte a tanfolyamokon való oktatást, ahol a számítógépet úgy kezelték mint egy „elektronikus tanárt”. Véleménye szerint ezen a felfogáson változtatni kell, a diákoknak aktív szerepet kell kapniuk a számítógép-alapú tanulásban, át kell élniük az újrafelfedezés örömeit.

3. MATEMATIKA TANTÁRGYI STRUKTÚRA, HALLGATÓI FELKÉSZÜLTSG EGYETEMÜNKÖN

3.1. Tantárgyi struktúra

Karunkon osztatlan képzésben Gazdálkodás-közgazdász szakon hallgatóink 4 féléven át tanultak matematikát. Első félévben Analízist heti 3 óra előadás +4 óra gyakorlat keretében, majd Lineáris algebrát, Valószínűesszámitást, Operációkutatást egyaránt heti 2 óra előadás + 2 óra gyakorlat felosztásban. A gazdasági és vidékfejlesztési szakon analízist, valószínűesszámitást, operációkutatást heti 2+2 órában oktattunk.

A Bolognai rendszer bevezetése után az első szak helyett a Pénzügy-számvitel szakot akkreditáltuk. A matematika kontakt órák analízisből 2+2-re csökkentek és Matematikai alapok 1 néven tanítjuk, a Lineáris algebra és Valószínűesszámitás egy féléves tantárgy lett, Matematikai alapok 2 címmel, heti 2+2 órával. Az Operációkutatás tantárgyat felváltotta az Optimumszámitás 2 óra előadás és 2 óra gyakorlattal; így három félévig tanulnak matematikát hallgatóink. A közgazdaságtan módszertani megalapozásához az analízis órák száma kevésnek bizonyult. Az órahiányt a hallgatói felkészültség visszaesése tovább fokozta, így hirdettünk tanulóinknak 2007-ben egy szabadon választható tantárgyat „Számítógépes matematika módszertan” címmel, amely a hiányzó órákat pótolja, és elősegíti a felzárkózást is. A tantárgy beindításának „hármass” célkitűzése:

- matematikai hiányosságok pótlása illetve műveletek automatizálása
- analízis fogalmainak alapozása kisebb lépésekben
- számítógépes módszerek, alkalmazások, számítógépes rendszerek megismertetése

A „Számítógépes matematika módszertan” tantárgyat heti 3 órában tanulják.

3.2. Hallgatói felkészültség elemzése

Az egyetemi tanulmányok megkezdése előtt, az első matematika órán felmérjük hallgatóink matematikai ismereteit. A szintfelmérő feladatainak összeállítási szempont rendszerét és kiértékelését mutatjuk be ebben a fejezetben.

Gólyatáborban, vagy az első előadáson szintfelmérőt írnak a diákok, amelyet százalékosan értékelünk. A Matematikai alapok 1 tantárgy esetében a vizsgára bocsátás feltétele, hogy a szintfelmérőt legalább 80%-osra írják meg. Akiknek a teljesítménye elsőre legalább 80%, azok az aláírás teljesítésének feltételei (zárthelyi dolgozatok legalább elégségesek) mellett mehetnek vizsgázni. Ha szeretnék, felvehetik a „Számítógépes matematika módszertan” tantárgyat. Akiknek a teljesítménye 80% alatt marad, határozottan ajánljuk a „Számítógépes matematika módszertan” tantárgy felvételét, melynek keretein belül újabb szintfelmérőt írhatnak ismétlés után, amíg a 80%-ot el nem érik. Nemegyszer volt már olyan hallgatónk, aki hatodszorra érte el a kívánt szintet.

Az alábbi táblázatban a felmérőt írt hallgatók létszámát láthatjuk szakonként, tanévekre lebontva.

	Résztevők létszáma tanévenként						
	2006-2007	2007-2008	2008-2009	2009-2010	2010-2011	2011-2012	2012-2013
Gazdasági és Vidékfejlesztési agrármérnök	84	38	30	27	27	20	25
Közgazdász Pénzügy és számvitel	70	42	37	33	26	25	12
Kereskedelem és Marketing						19	15
Felsőfokú Szakképzések				25	69	50	0

Az utolsó tanévben felsőfokú szakképzésre 12 tanulót iskoláztunk be, velük nem írtattuk meg a felmérőt. Minden évben volt olyan hallgató, aki nem az első alkalommal írta meg a szintfelmérőt, az ő eredményük nem szerepel a táblázatban és a statisztikában.

Az utóbbi három oktatási évben a szintfelmérő feladatsor ugyanaz volt:

1.feladat

Számítsa ki a következő kifejezés pontos értékét! A részműveletek eredményeit is írja ki!

$$2\log_6 36 - \frac{4}{3} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{-2} : \frac{1}{(\sqrt{5} - \sqrt{3})(\sqrt{5} + \sqrt{3})} \cdot \frac{1}{\sqrt{9} - 1} =$$

2.feladat

Oldja meg a következő egyenleteket!

a) $(x^2 + 3)(x - 4)(2x + 5) = 0$

b) $2^{x-1} = 8$

c) $\log_5 x = 2$

3. feladat

Válassza ki a másodfokú függvényeket és ábrázolja!

$$f(x) = (x + 3)^2 \quad g(x) = x^2 - 3 \quad h(x) = \frac{1}{x^2} \quad k(x) = 5 \quad l(x) = -\frac{4}{3}|x^2 - 1| + 1$$

$$D_f = R \quad D_g = R \quad D_h = R \setminus \{0\} \quad D_k = R \quad D_l = R$$

4.feladatHatározza meg a következő kifejezés előjelét, ha $x \in]-2; 7]$! Adja meg a nevező négyzetgyökének az értelmezési tartományát!

$$\frac{x - 5}{2x + 3}$$

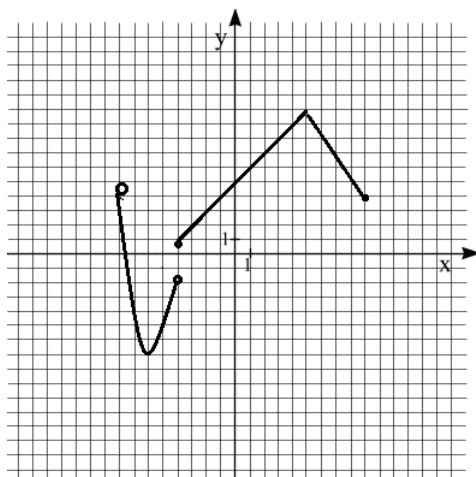
5.feladatFejezze ki a következő kifejezésekből az x ismeretlent! Végezzen értelmezési tartomány vizsgálatot!

a) $ax^2 + b = 0$

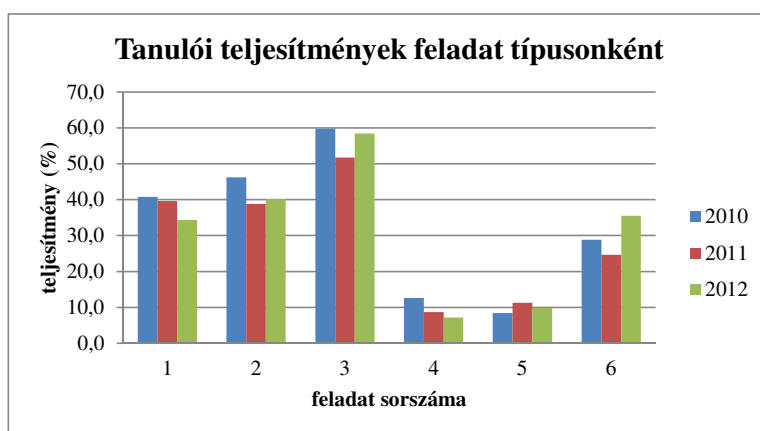
b) $3^x - k = 1$

6.feladat

Jellemezze a következő függvényt, adja meg tulajdonságait! Szempontok: értelmezési tartomány, értékészlet, szélsőérték, monotonitás, zérushely, folytonosság.



A feladatonkénti helyes megoldások arányát láthatjuk a következő oszlopdiagramon (1. ábra):



1. ábra

A legjobb teljesítményt a 3. feladatból (másodfokú függvény és transzformációjának ábrázolásából) érik el a diákok, ezt a 2. feladat (az egyenlet megoldási stratégiák) követi, majd az 1. (műveletvégzéshez kapcsolódó) feladat következik. A függvény tulajdonságok leolvasása 30% körül ingadozik, nagyon hiányos az egyenlőtlenség megoldása és a paraméteres egyenlet megoldás. Utóbbi eredmény mutatja, hogy a szimbólumok használata még nem készség szintű, fejlesztésre szorul. Az alábbiakban részletezzük feladattípusonként a kitűzött célokat és az eredményeket.

1. feladat

A kitűzött feladatban a számfogalom kialakulását kívántuk vizsgálni. Tudják-e tanulók a művelet végzés sorrendjét, mivel erre a készségre majd a deriválási szabályok alkalmazásánál szükség lesz, valamint a negatív kitevő fogalmának ismeretét mérjük fel, mivel a mértani sorozatnál, határértéknél, deriválásnál ezzel az ismerettel is készség szinten kell bánniuk. Megjelenik az egyik leggyakrabban használt algebrai azonosság, és a törtek műveletei, melynek a sorozat határértékének analógián alapuló tanításában van szerepe. A megoldásokban megfigyelhetjük, hogy az első tört nevezőjének algebrai azonosság alapján történő megoldása évenként 2-3 tanulónál fordul elő, leggyakrabban a zsebszámológéppel határozzák meg a kifejezés értékét. A logaritmus meghatározása jó szintű, de a konstanssal történő szorzása már hibát eredményez. A számláló meghatározásában a műveletvégzés sorrendjét tévesztik a leggyakrabban. A második törtet helyesen határozzák meg és a reciprokok megállapítása is helyes, ez a sikeres része a feladatnak. Az, hogy a helyes megoldások aránya mégis csökkenő tendenciát mutat, azzal magyarázható, hogy tanulóink egyre inkább rábízzák a számítások végzését a

zsebszámológépekre, ezek között is egyre több az olyan típusú, amelybe csak sorba kell beírni a műveleteket, nem kell figyelni a műveleti sorrendre. Azon kívül azt is megfigyeltük, hogy háttérbe szorult a becslések végzése, így sokszor ellenőrzés nélkül fogadják el a számolt eredményeket.

2. feladat

A 2006-2009 tanévekben mértük az a),b),c) típusú egyenletek megoldása mellett a lineáris egyenlőtlenség és az abszolút értékes egyenlőtlenség megoldását is. Mivel az utóbbi szükséges a sorozatok határértékének meghatározása után a küszöbindex megtalálásához. A szakmai tantárgyak felülvizsgálatakor láttuk, hogy ezt nem használják, így a küszöbindex hagyományos módon történő számonkérését kivettük a „*Matematikai alapok I.*” tantárgy követelményrendszeréből 2010-től és a „*Számítógépes matematika módszertan*” tantárgy keretein belül kérjük számon, Excel használatával.

A fenti három egyenlet típus viszont hangsúlyos szerepet kap az analízisben. Az exponenciális és logaritmikus egyenleteket oldják meg nagyobb sikerrel. Az egyszerű exponenciális egyenlet megoldása 78%-os teljesítményt mutat, a logaritmusnál felcserélik az alapot és a kitevőt, mégis 43%-os a teljesítmény. A szorzatalakot tartalmazó egyenletet tanévenként 2-3 tanuló oldja meg helyesen, a többség rögtön zárójelet bont, azután félbehagyja a megoldást. Az, hogy a szorzat első tényezője 0, hiányos másodfokú egyenletet ad, melynek nincs valós megoldása – ezt az egyenletet, ha a megoldó képlettel oldják meg, jó eredményre jutnak, különben automatikusan írják, a megoldásban „ $\pm$ ”-t. Ebből következtethetünk arra, hogy típus feladatok megoldását gyakorolták be, és a hiányos másodfokú egyenletnél alkalmazott eljárások csorbát szenvednek.

Értékelésnél a tanult módszert elő tudjuk hívni (a szorzatról tanultakat), de feladatok megoldása során külön fel kell hívni rá a figyelmüket. Azért is tarjuk fontosnak az ilyen típusú egyenlet megoldást, mert a derivált zérushelyének meghatározásakor gyakran alkalmazzuk. Miután találkozunk ilyen feladattal, már odafigyelnek az alkalmazásaira.

3. feladat

A függvény transzformációk ismeretét mérjük a feladattal, nevezetesen tudják-e az alapfüggvény x tengely és y tengely mentén történő eltolását. A másodfokú függvény definíciójának ismeretét is feltérképezhetjük a megadott függvényekkel. Azért a másodfokú függvényre esett a választás, mert az a tapasztalat, hogy a parabolát szeretik rajzolni a leginkább.

A legjobb teljesítményt itt nyújtják a hallgatók. Elvértve akad olyan, aki felcseréli a tengelyek mentén az eltolásokat. A leggyakoribb hibát a megfelelő függvény kiválasztásában követik el, típus hiba a $h(x)$ függvény kiválasztása. Érdekes, hogy azt viszont jól ábrázolják, talán mert a függvénytáblában is találkozhatnak a grafikonjával. Ami még hibaként elő

szokott fordulni, hogy mindegyik függvényt ábrázolják, úgy gondoljuk, hogy az utasítást nem figyelmesen olvassák el.

4. feladat

A feladatban egyaránt megjelenik a számfogalom, a tört fogalmának ismerete, és az egyenlőtlenség megoldási lépéseinek alkalmazása is. Ebben a feladatban nyújtják a leggyengébb teljesítményt diákjaink. Az előjel megállapítása az egyes tartományokon azért is fontos, mert a függvényvizsgálatnál, szélsőérték keresésnél is a derivált előjelét kell megállapítaniuk. Ezzel a céllal került a feladat a szintfelmérőbe.

A nevező négyzetgyökét egyrészt azért vizsgáltattuk, hogy tudja-e melyik a számláló és a nevező, illetve mi az értelmezési tartománya a $\sqrt{x}$ függvény transzformációjával keletkező függvénynek.

A „legsikeresebb” megoldásokat az adott intervallum egész elemeinek behelyettesítése jelentette.

5. feladat

A paraméteres egyenletek megoldásában való jártasságot mérjük ezzel a feladattal. A felsőbb matematikában a függvényeket, definíciókat gyakran csak szimbolikusan adjuk meg, fontos, hogy ismerjük azt, mennyire tudnak tanulóink elvonatkoztatni a számoktól, mennyire képesek az absztrakcióra. Ismerik-e az alapfüggvények értelmezési tartományát.

Hasonlóan 10% körüli teljesítményt kapunk, mint az előző feladatban. A szimbolikus síkon való jártasság nem megfelelően fejlődött a tanítási-tanulási folyamatban. A NAT szerint az Algebra tananyagrésze kevesebb óraszám jut, véleményünk szerint ez okozhatja a paraméteres feladatokban nyújtott sikertelenséget. Úgy gondoljuk, hogy az algebrai kifejezésekkel történő „cselekvések” segítik legjobban a szimbolikus síkon történő gondolkodást.

$$x = \pm \sqrt{-\frac{b}{a}}$$

A leggyakoribb hiba a másodfokú kifejezésben, hogy az kifejezést nem értelmezik, mondván negatív szám van a gyök alatt, holott lehet a paramétereknek olyan értékeket adni, hogy a valós számok halmazán értelmezett legyen a kifejezés.

A logaritmus kifejezésben a leggyakrabban lejegyzik a zárójelet.

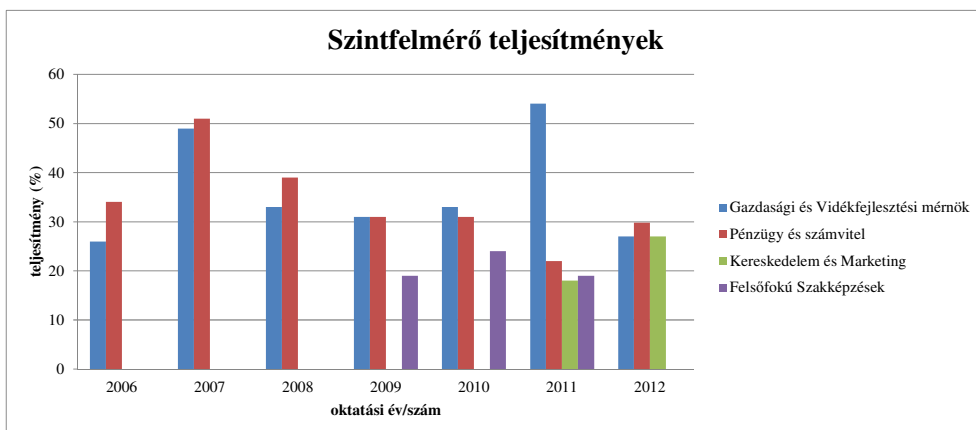
6. feladat

A feladatban a függvénytulajdonságok szemlélet alapján történő felismerését mérjük. Fontos, hogy tudják-e, balról-jobbra haladva olvassuk le a grafikonról a tulajdonságokat? Tudják-e melyik tengely mutatja a helyet a illetve melyik az értéket.

Diákjaink 30% körüli teljesítményt mutatnak a feladat megoldásában. Típushibának mondható, hogy úgy gondolják, hogy két függvény van az ábrán és külön-külön jellemzik őket. A monotonitási szakaszoknál az intervallumos írásmódban felcserélik a bal és jobb oldali végpontot. A

szélsőértékek megadásán nem a maximumot és minimumot értik, hanem azt a két pontot, ami a függvény grafikonjának „bal szélén” illetve „jobb szélén” van. Keverik az értelmezési tartomány, értékkészlet fogalmakat.

A következő (2. ábra) grafikon mutatja a hallgatói teljesítményeket:



2. ábra

A 2011. évi kiugró adatot, a Gazdasági és Vidékfejlesztési mérnök szakos hallgatók esetében az okozta, hogy nem az első, hanem a második órán írták a felmérőt.

Az utóbbi 4 tanévben hallgatóink teljesítménye 30 % körül mozog, de 2009-ben és 2011-ben 20% alattiakat is találunk. Azt is láthatjuk az adatokból, hogy a Pénzügy és számvitel szakra jobb képességű tanulók kerülnek beiskolázásra.

2008 óta a fenti felépítést követik a szintfelmérő feladatsorok. A korábbi években kamatszámítás, számtani, mértani sorozat tagjainak meghatározása, szöveges feladat is szerepelt.

A. Egy ing ára 4500 Ft. Mivel kicsi a kereslet, ezért lecsökkentik az árát 15 %-kal. Mennyibe kerül most az ing? Hány százaléka ez az eredeti árnak?

B. Beteszünk a takarékpénztárba 150000 Ft-ot, évi 8%-os kamatra. Mennyi pénzünk lesz 1 év múlva? Hány százaléka ez az eredeti összegnek?

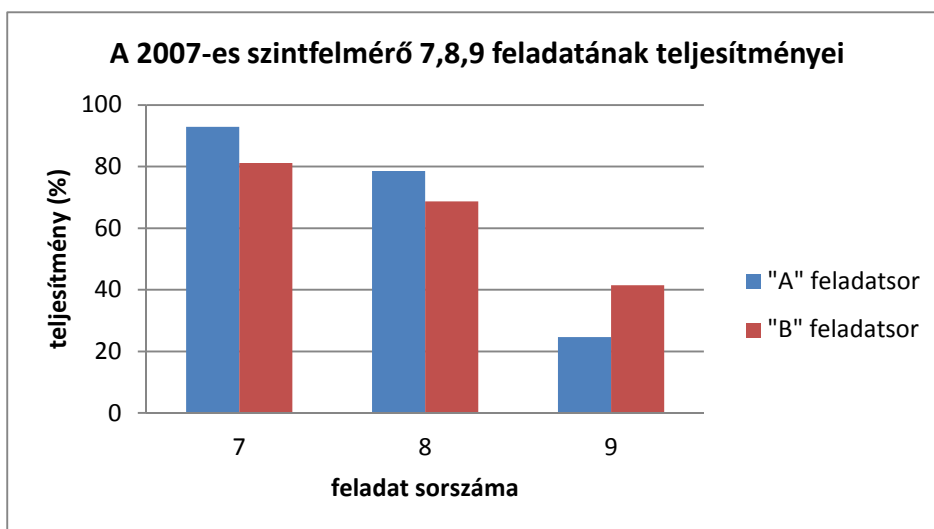
A. Andreának 500 Ft zsebpénze van. Úgy takarékoskodik, hogy minden hónapban rak még mellé 300 Ft-ot. Antalnak 5 Ft-ja van, ő minden hónapban megduplázza az előző havi pénzmennyiségét. 1 év múlva kinek lesz több pénze, Andreának vagy Antalnak?

B. Egy kisvárosban két pizzéria működik. Egyik azt a reklámfogást alkalmazza, hogy ha hétfőn veszel egy pizzát és utána minden hétköznap 1-gyel többet

rendelsz, mint előző nap, akkor hétvégén ingyen adja a pizzát (szombatra és vasárnapra is 1-1 db-ot). A másik erre úgy dönt, hogy hétfőn veszel egy fél pizzát és utána következő hétköznapokon mindig kétszer annyit mint előző nap, akkor hétvégén ő is ingyen adja a pizzát ugyanúgy mint a másik. Melyik vendéglő döntött hasznosabb reklámfogás mellett, ha a pizzák mindkét vendéglőben egy árban vannak?

- A. Miklós a fiával és Péter a fiával kimentek horgászni. Miklós ugyanannyi halat fogott mint a fia, Péter háromszor annyit mint a fia. Összesen 35 halat fogtak. Miklós elmondta, hogy a fiát Gergelynek hívják. Hogy hívják Péter fiát?
- B. András és Béla nem vártak tovább a villamosra és elindultak a következő megállóhoz. Amikor az út harmadáig értek, feltűnt mögöttük a villamos. András visszafordult, és a villamossal egy időben érkezett a megállóba. Béla tovább ment, és a villamos a következő megállóban érte utol. Hányszor nagyobb a villamos sebessége, mint a gyalogosoké? (András és Béla sebessége megegyezik.)

A szöveges problémákkal a matematikai modell megtalálását, illetve logikai gondolkodást mértük. A modell általában a számtani vagy mértani sorozatra épült.



3. ábra

A százalékszámítást 80% feletti teljesítménnyel oldják meg a diákok, a sorozatos feladatot is 70% feletti eredménnyel. Megfigyelhetjük, hogy a „B” tesztben alacsonyabb a teljesítményük e két feladatban, holott a problémák egyforma nehézségűek voltak. A logikai vagy szöveges feladatban az átlagteljesítmény 29%, érdekes, hogy a mozgásos feladattípus megoldása sikerült jobban, ezzel a feladattípussal gyakrabban találkoznak matematika és

fizika órákon egyaránt. A hetedik feladathoz hasonló problémát analízisből nem kell megoldaniuk, így a fenti 5,6, és 7 számú feladatok helyett a függvényjellemzés került be. Ezt az is indokolja, hogy az Analízis alapjainak tanulása után, az első féléves vizsgákon azt tapasztaljuk, hogy elvégzik a tanulók a függvényjellemzést, de a tulajdonságok alapján a grafikon megrajzolása mindössze 10%-uknak sikerül. Ezért fontos tudni, hogy a grafikonról le tudják-e olvasni a függvény tulajdonságait. A 30% körüli teljesítmény nem megfelelő szintű. Kerestem az okait a sikertelenségnek. Megkérdeztem diákjainkat, mikor rajzoltak utoljára. A válaszuk, hogy alsó tagozatban. Kíváncsi voltam az olvasási szokásaikra is. Néhányan a kötelező olvasmányoknak is csak a rövidített változatát olvasták, más kedvenc regény olvasása 3-4 tanulónál fordult elő, filmet viszont internetről is gyakran töltenek le és néznek. Úgy gondolom, hogy a rajzkészség, mivel nem használják, nem fejlődik, csorbát szenved. Igaz ez a képzeletük fejlettségére is, a film készen adja a képeket; míg olvasásnál nekik kell elképzelni a helyszíneket, szereplőket. Ezek mind meghatározhatják azt, hogy a tulajdonságok ismeretében a függvény képét „nehezebben hívják elő”, és a reprezentáció hiányos lesz. (A szintfelmérő dolgozatok a Kaposvári Egyetem Matematika és Fizika Tanszékén áttekinthetők.)

Magyarországon, 2009 őszén a Budapesti Műszaki Egyetem kezdeményezésében lezajlott egy reprezentatív felmérés, melyben több felsőoktatási intézmény is bekapcsolódott. „Az eredmény lehangoló” volt, mondták a szervezők.

A felsőoktatási intézmények arra a következtetésre jutottak, hogy felzárkóztató, szintemelő, fejlesztő kurzusokat szükséges indítaniuk. Alátámasztja azt a véleményünket, hogy a matematikai alapok elsajátítása nem zárul le a középfokú oktatás befejeztével, áthúzódik a felsőoktatásba. Az egyetemeken, főiskolán matematikát oktatóknak a szakdidaktikában valamilyen szinten jártasnak kell lenniük.[14][15][37]

4. MIKOR HASZNÁLJUNK SZÁMÍTÓGÉPES MÓDSZEREKET?

A számítógép használatát a matematika oktatásának nem minden területén részesítjük előnyben. A geometria oktatásában olyan dinamikus geometriai programokat használunk, amelyek a szemléltetést kiválóan segítik. Az analízisben komputeralgebrai rendszereket használunk a grafikai megjelenítésre, szimbolikus, numerikus számolások elvégzésére. [65] A matematikát tanító tanároknak eltérő a véleménye abból a szempontból, hogy a számítógép alkalmazása segíti-e a matematika oktatás hatékonyságát illetve mikor vonjuk be a tanítás-megismerés folyamatába: bevezetése megelőzze-e

a fogalmak kialakítását, párhuzamosan történjék-e a fogalomkialakítás és a számítógép használata vagy ellenőrzésre használják.

Skemp [53] megfogalmazta a matematika tanulás alapelveit:

- *Definíció segítségével senkinek nem közvetíthetünk az általa ismerteknél magasabb rendű fogalmakat, hanem csakis oly módon, hogy megfelelő példák sokaságát nyújtjuk.*
- *A matematikában az előbb említett példák is mind különböző fogalmak, ezért meg kell győződnie arról, hogy a tanuló már rendelkezik ezekkel a fogalmakkal.*

Egyik fontos következménye az alapelveknek, hogy ha felépítünk egy fogalmat, mint az egyre fokozódó szintű absztrakciók struktúráját, és eközben a tanuló egy bizonyos szintet nem ért meg tökéletesen, az egész épület többi része ettől a szinttől kezdve veszedelemben van. [53]

A fogalmi struktúrák hierarchikus rendszerét vizsgálta Fatalin [20] Galois-gráfokkal, melyek felhívták a figyelmet néhány feladattípus fontosságára. A konvex négyszögek témakörében konkrétan rámutatott arra, hogy a feladatok jelentős része a fogalomazonosítás különböző reprezentációi közti átjárhatósága alapján kívánja a tudáshálóban kiépítendő kapcsolatokat megerősíteni.

4.1. Az Excel és a GeoGebra

A személyi számítógépek tömeges elterjedésével párhuzamosan a lehetséges alkalmazások köre is rohamosan bővült. A számítógépek kezdeti feladata a nagytömegű matematikai számítások nagyon rövid időn belül való elvégzése volt. A személyi számítógép kilépve a matematikai számítások köréből először az írógépet szorította ki. A szoftver, amely ezt lehetővé tette a szövegszerkesztő volt. A másik terület, ahol a személyi számítógép tért hódított, a táblázatkezelés. Többféle táblázatkezelő létezik, jelenleg legnagyobb elterjedtsége a Microsoft által fejlesztett Excel-nek van, ennek több verzióját is használják. Az Excel által nyújtott lehetőségek közül néhány:

- táblázatkészítés, függvények használata, grafikon készítés módja, lehetőségei
- statisztikai feladatok, statisztikai programcsomagok
- logikai függvények
- pénzügyi függvények használata, érzékenységi vizsgálat egyváltozós, kétváltozós táblák használatával
- mátrix műveletek, optimum számítási feladatok Excel adta lehetőségekkel
- szövegfüggvények alkalmazása

- adatbázisként definiált táblázatok, adatlisták kezelése, szűrések, kimutatások készítése, űrlapok készítése

A felsoroltak közül az első öt típust használjuk matematika vagy statisztika óráinkon.

A GeoGebra egy olyan, a matematika oktatását segítő eszköz, amely témáját tekintve az analízishez, az algebrahoz, a geometriához és a beépített táblázatkezelőnek köszönhetően a statisztikához is kapcsolódik. Nevét a geometria és az algebra szavakból kapta. Dinamikus matematikai rendszer, mellyel nemcsak szakaszokat, egyeneseket, vektorokat, kúpszeleteket ábrázolhatunk, hanem függvényeket is, és ezen alakzatokat dinamikusan változtathatjuk. A program segítségével bárki könnyen elkészítheti a függvények grafikonjait, sőt a GeoGebra képes függvények deriváltjának és integráltjának meghatározására is [25]. Így minden korosztály oktatásában használható, hiszen csak alapvető számítógépes ismereteket igényel. Kiemelkedő a többi szoftver közül, mivel ingyenesen letölthető. Működéséhez szükség van egy korszerű operációs rendszerre és egy feltelepített Java programra. A szoftver magyar fordításban is elérhető.

A programot Markus Hohenwarter kezdte el fejleszteni a Salzburgi Egyetemen. Az első verzió 2002 januárjában jelent meg, azóta minden földrészen GeoGebra intézetek alakultak. Hazánkban elsőként a Miskolci Egyetemen alakult intézet, másodikként a Kaposvári Egyetemen. A GeoGebra Közösségben aktívan veszünk részt workshopok, előadások tartásával.

4.2. Tapasztalatok a Maple TA alkalmazásáról a felkészülésben

A Maple komputer algebrai rendszert használjuk matematika órákon szemléltetésre, különféle problémák megoldásához. Több, a matematika különböző területeinek megfelelő „csomaggal” rendelkezik, az aktuális eszköztárt választhatjuk ki az éppen megoldandó feladat besorolásának megfelelően. A Maple TA, azaz Maple Testing and Assessment, egy az oktatásban tesztelésre, vizsgáztatásra használható termék.

A matematika tárgyú kurzusokhoz tervezték az elsődleges használatát. A Maple TA egy könnyen használható web-alapú rendszer, amelyben tesztek és feladatokat, feladatsorokat készíthetünk. A rendszer automatikusan értékeli a tanulók válaszait és a teljesítményeit. Támogatja a web alapú komplex, szabad formájú belépést, a matematikai képletek, egyenletek és ábrák megjelenítését, megoldását. Intelligens kiértékelő válaszokat nyújt, így ideális minden olyan természettudományos, technológia, mérnöki tudomány, matematika (STEM), vagy matematika tárgyú kurzus számára.

University of Guelph Ontario (Kanada) régóta felhasználója a Maplesoft termékeknek. A közelmúltban végeztek egy kísérletet, hogy statisztikailag is

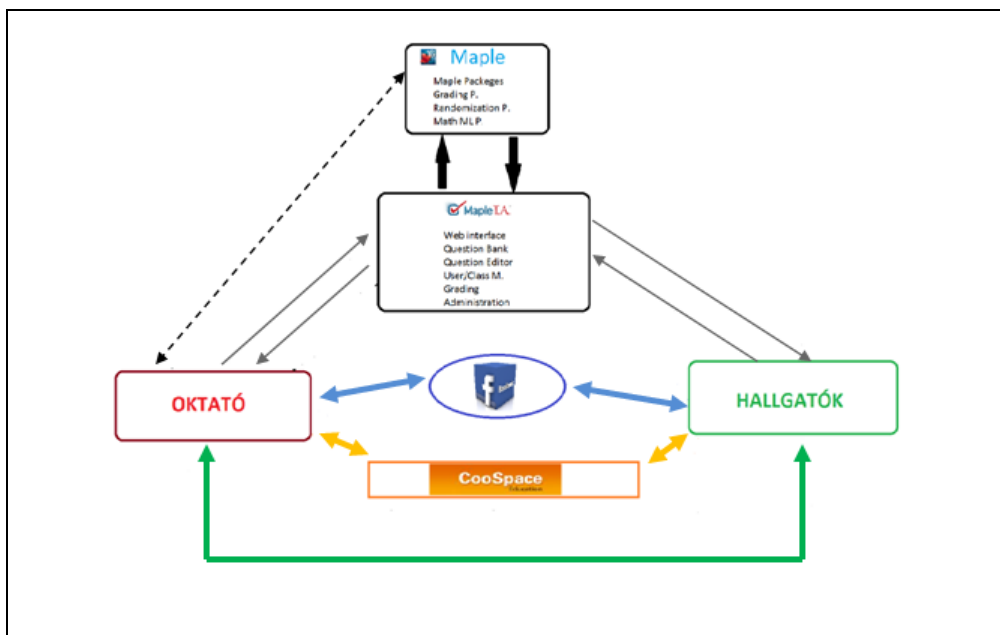
meghatározták a Maple TA hatását a diákok teljesítményére. Az egyetemi matematikai közgazdaságtan szakos hallgatókat választották a kísérlethez. A diákok egyik fele véletlenszerűen használta Maple TA-t, a diákok másik fele a hagyományos eszközöket használta. A záróvizsgák letétele után a diákok 20%-a mondta, hogy használta a felkészüléshez a TA-t. Az oktatók azt tapasztalták, a Maple TA használók csoportjában kisebb volt a lemorzsolódás, mint a hagyományosan tanuló csoportban. [63]

Amellett, hogy kiváló tanulási eszköz a diákok számára, a Maple TA csodálatos segítő eszköz a tanárok számára is - mondta Dr. Sadanand, az egyetem közgazdaságtan tanszékének tanára. Felszabadítja az oktatók és tanársegédek idejét, hatékonyabbá teszi a munkát. Több személyes figyelmet fordíthatunk a diákokra, aminek csak az idő szab határt. A Maple TA segít abban, hogy elmélyítsük a diákok gondolkodási folyamatait, a probléma és feladat megoldás területén. Algoritmikusan generált kérdéseket készíthetünk a Maple TA-ban.[39] Egy kérdés sablon több száz vagy több ezer kérdést generálhat a diákok számára. Egyéni házi feladatokat és rengeteg gyakorlati kérdést tehetünk fel a tanulóknak. "Ez a Maple TA egyik legnagyobb erőssége," kommentálta Dr. Sadanand. "Ez sok időt takaríthat meg, és ezért rendkívül hasznos eszköz a diákok és a tanárok számára egyaránt." [63]

Az University of Waterloo intézménye szembesült egy túlságosan is ismerős problémával: növekvő hallgatói létszám és csökkenő költségvetés. Ezért matematikából a diákokat gyakran tesztekkel kérték számon a tudásukról, mivel az osztályozás nagy megterhelést jelentett az oktatóknak. Az egyetem a hallgatói létszámot nem akarta csökkenteni, a költségvetési támogatás viszont csökkent, nem jutottak kompromisszumra, más megoldást kellett keresniük. Úgy döntöttek, hogy automatizálják a matematika alapú kurzusokat, így bevezették a Maple TA-t. Ma már 9000 diák használja évente az eszközt, van olyan időszak, amikor 800 hallgató van egyszerre a rendszerben. Javult az oktatás minősége a használatával, a diákok mindjárt visszajelzést kapnak a megválaszolt kérdések után. [62]

A 2012-2013 oktatási évben a TÁMOP- 4.1.2.A/1-11/1-2011-0098 azonosító számú „Műszaki és gazdasági szakok alapozó matematikai ismereteinek e-learning alapú tananyag- és módszertani fejlesztése” című pályázatának keretében szerezte be egyetemünk a professzionális Maple komputer algebrai rendszert és a Maple TA web-alapú teszt és vizsgarendszert.

A Maple TA bevezetése nagy kihívást jelentett, eleinte sok idő ráfordítást jelentett egy-egy feladat elkészítése. A tavaszi szemeszterben „együtt tanultunk” a hallgatókkal, ők a feladatmegoldást, mi a készítést. A diákokkal a kapcsolattartás a facebookon történt, a coospace nyújtotta fórum és chat funkció nem vált be, nem használták. Az alábbiakban láthatjuk a kapcsolatrendszert a tanár, a diákok és a Maple TA rendszer között (4. ábra).



4. ábra

A kapcsolatrendszer legfontosabb eleme, hogy a Maple TA nem oldja meg a feladatokat, hanem elküldi az egyetemi szerverre a Maple-nek, az kiszámolja és küldi kiértékelésre a TA-nak, ezt a kiértékelte választ látja a hallgató. Ezért neki nem is kell rendelkeznie a Maple szoftverrel, csak belépési kóddal a TA szerverre. A szintaxist szemináriumokon megmutatjuk a diákoknak, így a helyes válasz beírása kevesebb problémát okoz. Az oktató munkáját segíti a Maple a kérdések megszerkesztésénél, a parancsok egy dimenzióba történő konvertálásánál. A kapcsolattartás facebookon történt a diákokkal, ha megakadtak egy-egy feladattípusnál, használtuk a chat funkciót.

4.3. Galois-gráf

A vizsgálati módszert Darmstadt műszaki egyetemén -hálóelméleti iskola - Rudolf Wille és Bernard Ganter a foglomanalízis megalkotói dolgozták ki, nevezetesen a foglomanalízis a fogalmak hierarchiájának matematizálását jelenti. Alkalmazási területei például: személygépkocsik meghajtás szerinti minőségi csoportosítása vagy a Forum Romanum nevezetes épületeinek különböző útikalauzokban való szerepeltetése.

A Galos-gráfoknak több típusát különböztetjük meg, attól függően, hogy a pedagógiai munka mely területén használjuk őket:

- objektumok és tulajdonságaik
- individuális gráfok: lehet szaktudományi, lehet tanulói gráf
- kollektív gráfok: tanulók-feladatok gráf
- szociometriai gráfok

- kutatási alkalmazásokat jellemző gráfok

Hogyan készülnek a Galois-gráfok?

Van két alaphalmaz, melynek elemei között több-többértelmű kapcsolat van. Ugyanakkor az első és második halmaz részhalmazai között tudunk egy egy-egyértelmű kapcsolatot létesíteni. Az ilyen részhalmazt zártnak nevezzük, ha elemeinek a száma nem bővíthető anélkül, hogy a másik részhalmaz elemeinek száma ne csökkenne, ugyanígy igaz ez a másik részhalmazra is. Ha találunk olyan relációt, mely kétértékű az adott két alaphalmaz elempárjai között, gondolhatunk Galois-gráf használatára.

A Galois-gráfok a fogalomanalízis sok módszere közül egynek a következetes alkalmazása pedagógiai területeken. [61]

A gráf megrajzolásának elemei:

Gráf szögpontjai legyenek a zárt részhalmazpárok. Majd a szögpontokat egymás fölé rajzoljuk, aszerint hogy hány eleműek. Így lesznek egyeleműek, ezeket rajzoljuk egymás mellé majd a kételeműeket az egyeleműek fölé, míg a kételeműek egy sorban lesznek és így tovább. Az egyes szinteket nevezzük a gráf emeleteinek.

Összekötés szabálya: válasszunk ki egy tetszőleges szögpontot, ezt összekötjük minden olyan alatta fekvő ponttal, amely a szóban forgónak legnagyobb részhalmazát jelöli. Az eljárást minden szögpontra nézve elvégezzük.

A gráf megrajzolása kézzel nehézkes, ezért a Szigeti Márton [60] által készített Galois-gráf rajzoló programot használtuk.

4.4. Függvényjellemzés vizsgálata a kognitív kategóriákkal

Az elmúlt tanévekben végeztünk egy kutatást, amelyben szöveges matematikafeladatok megoldását vizsgáltuk nyelvészeti és matematikai szempontból [35]. A kiválasztott korosztály az általános iskola felső tagozatos diákjai közül került ki. Hosszú éves tanítási tapasztalataink azt mutatják, hogy tanulóinknak a szöveges feladatok megoldása matematikából nehézséget okoz. Ennek okait keresve arra a kérdésre próbáltunk választ adni, hogy az anyanyelvi és a matematikai készségek adott korcsoportban, összhangban vannak-e egymással. Az elvégzett felmérések eredményeit Galois-gráfokkal értékeltük ki. Összehasonlítottuk a matematika és nyelvtan tantárgyak szaktudományi gráfjait adott feladattípusokban, elkészítettük a tanulói ismeretgráfokat, majd azokat összevetettük a vizsgált tantárgyi struktúrákkal. Az általunk definiált univerzális kognitív kategóriák a következők voltak:

- *Tér* (tájékozódás, alatt, fölött)
- *Idő* (egymásutániség)
- *Tulajdonságok* (mennyiséget kifejező szavak)

- *Cselekvést kifejező szavak*
- *Tárgy, fogalom* (szakkifejezések ismerete, használata)
- *Cselekvés körülményei* (feladatmegoldás módja, helyessége)

A fenti kategóriák alkalmasnak bizonyultak arra, hogy mind nyelvészeti mind matematikai szempontból elemezzük a tanulók ismereteit.

A Galois-gráfok alkalmasnak bizonyultak értékelésre is az analízisben, a kapott szintek megfeleltek és összhangban voltak a hallgatók vizsgán elért számszerű eredményeivel, osztályzatukkal. [33]

A továbbiakban a fent megnevezett univerzális kognitív kategóriák viszonylatában végzünk elemzést a függvényjellemzésben megjelenő fogalmak és a Bruner által meghatározott reprezentációs síkok között. Ezt azért is tartjuk fontosnak, mert hallgatóinknak a közgazdaságtanban tanult függvények szélsőértékét meg kell tudni határozni az analízisben tanult eszközzel.

A kategóriák és szintek kapcsolat rendszerét Galois-gráffal ábrázoljuk.

Az egyik halmaz elemei tehát a következők lesznek: materiális sík, ikonikus sík szimbolikus sík, tér, idő, tulajdonság, cselekvést kifejező, tárgy-fogalom, cselekvés körülményei. A másik halmazban legyenek a függvények jellemzésében alkalmazott, analízisben tanult „lépés sorozatok”: értelmezési tartomány, paritás, zérushely, szélsőérték-monotonitás, inflexió pont-konvexitás, határértékek, grafikon, értékkészlet.

A halmazok elemei közötti kapcsolat relációtáblázatának elkészítése után megrajzoltuk a Galois-gráfot.

A megrajzolt gráfnak 9 szintje van, felülről lefele haladva az első szinten egy szögpont helyezkedik el, amelyből azt tudjuk kiolvasni, hogy a függvényjellemzés elvégzésekor a szimbolikus sík, a cselekvés körülményeiben pedig a műveletek pontos elvégzése mindvégig jelen vannak. Utóbbi kategória illetve a szimbólumokkal történő bánásmód sérülése okozza a hallgatók számára sikertelenséget a tantárgy tanulása során. Az alatta levő szinten megjelenik a tárgy-fogalom kategória, ami a szakszavak, a szaktárgyi sajátosságok ismeretét igényli. A következő szinten a tér, mint általános kategória a függvényjellemzés 6 részfeladatában is előfordul, ez is felhívja a figyelmünket arra, hogy mennyire fontos a környező világ szerkezetének megismerése, a kisgyermekkorban megszerzett tapasztalatok könnyíthetik a térbeli tájékozódást. A következő szinten egyforma fontossággal jelenik meg a tér és tulajdonság fogalma. A tulajdonság, ami megint csak a megismerés fontosságát hangsúlyozza, valamint az ezekhez rendelt fogalmak elsajátítását is.

A cselekvést kifejező kategória az alsóbb szinteken látható a gráfban (5. ábra). Elhelyezkedését indokolja, hogy a matematikában a tanulókat problémamegoldásra ösztönözzük, gondolkodásra neveljük. Ez az egyik sarkalatos pont a matematikaoktatásunkban, mert az utóbb évek tapasztalatai azt mutatják, hogy diákjaink többsége nem részesíti előnyben az effajta feladat megoldásokat. A konkrét cselekvésre felszólító feladatokat oldják meg nagyobb pontossággal, mint például: határozza meg, végezze el, rajzolja meg. Ezekben a típusú feladatokban konkrétan megmondjuk, mely műveleteket végezzék el, de itt is vigyázni kell a megfogalmazással. Az alábbiakban egy példán mutatom ezt be.

A diák feladata: Rajzolja meg a következő függvény grafikonját! Itt következett a hozzárendelés megadása. A diák elvégezte - szerinte jól - a feladatot, a vizsga mégsem sikerült. Kérdésünkre, hogy hogyan végezte el ezt válaszolta: „Behelyettesítettem néhány pontot és megrajoltam. Örültem, mert még sohasem sikerült megrajzolnom így egy függvényt sem.” A hallgató végrehajtotta az utasítást, de az nem tudatosodott benne, hogy a megrajolás csak a függvényvizsgálat elemeinek elvégzése után lehet sikeres. A nyelv, mint szimbolikus gondolkodási mód igen nagy szerepet játszik a feladatok kitűzésében, miszerint a feladatot kitűző és a megoldó ugyanazt végrehajtandó tevékenység láncolat elvégzését értik-e alatta. Ebben a példában jól megfigyelhetjük az időbeliséget is, ami indokolja, hogy bekerült a vizsgált kategóriák közé. A szélsőérték és inflexiós pont meghatározásában, mint egymásutánosság játszik szerepet az idő. Ezért van az, hogy a megrajolt Galois-gráfban a két utolsó szinten helyezkedik el, mert kifejezetten a feladat elvégzése során kell csak figyelni rá, hiszen először az első deriváltat képezzük, s csak utána a másodikat, ezt a két lépést nem cserélhetjük fel. Úgy véljük, hogy az értékkészlet meghatározása a függvény grafikonjának megrajzolása után –szemléletre hagyatkozva – egyszerűbb. Ezért van e két részfeladat a gráf legalsó szintjén is, hiszen ezeken a pontokon fejezzük be a függvényjellemzést. A legalsó szögpont a gráf gyökere (a kategóriák vannak itt az üres halmazzal), ezt a program minden esetben megrajzolja

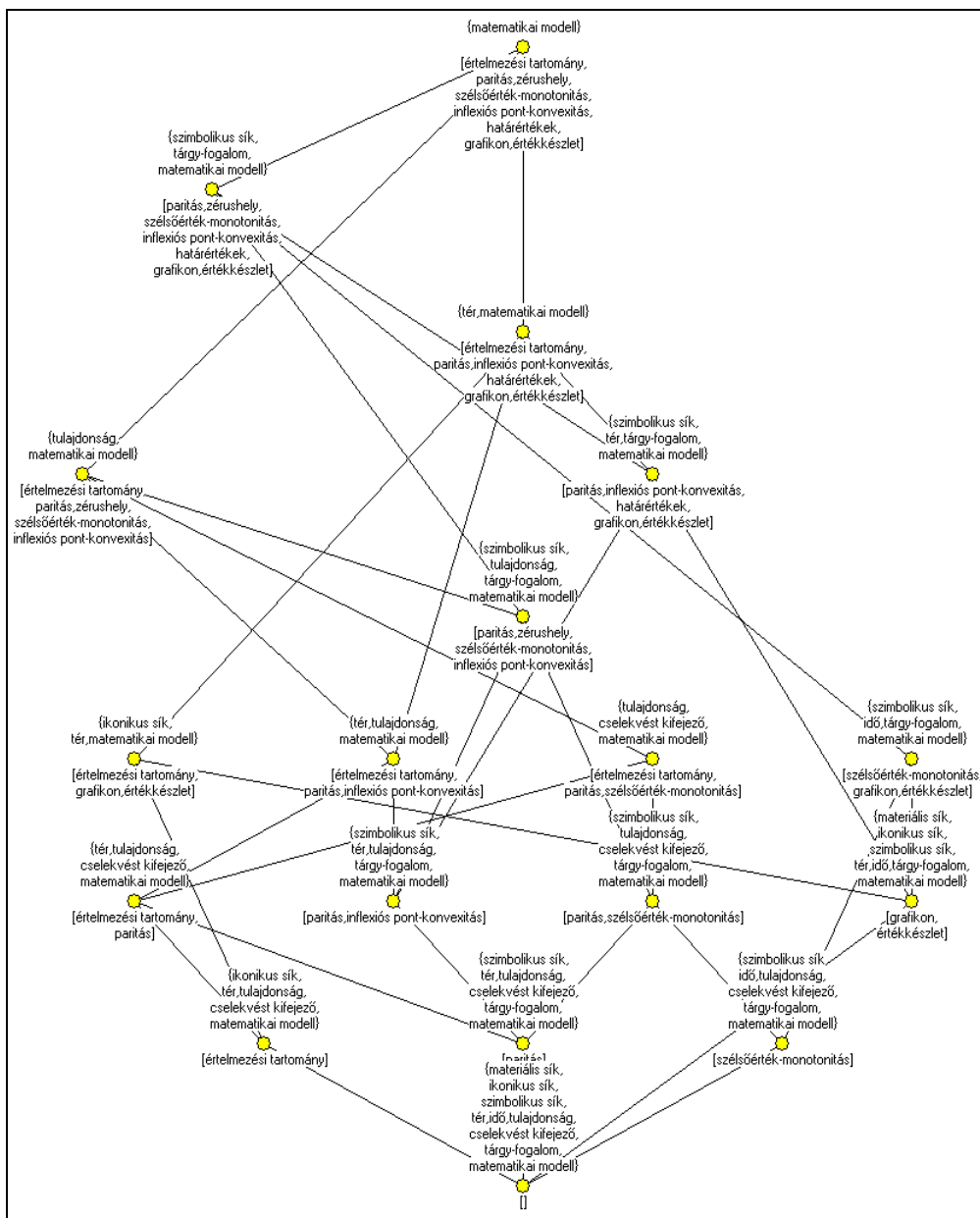
A Galois-gráf és az univerzális kategóriák lehetőséget adnak arra, hogy a függvényjellemzést más szemszögből is megvilágítsuk. A szimbolikus síkon való jártasságot kell erősítenünk diákjainkban, hiszen ez a feladat megoldását végig kíséri, ehhez azonban Bruner elmélete szerint a materiális síkon és ikonikus síkon is jól kell boldogulniuk, a problémamegoldást segíti a síkok közötti átjárhatóság. Ennek lehet egyik eszköze a számítógép. Bekapcsolása a munkafolyamatba a gráfban kapott alsó szinteken célszerű, miután „cselekvést kifejező” kategória megjelenik, a számítógép is utasítást, konkrét műveletet hajt végre, ezért indokolt itt a bevezethetősége.

Varga matematika tanítás kognitív célrendszerében is az utolsó fázisban, az értékelésben indokolt a számítógép bevonása. Ezt segíti a GeoGebra

alkalmazása; ezzel a deriválás műveletének helyességét tudják ellenőrizni. A tér kognitív kategória sérülése esetenként előbbi pontra helyezheti a gép használatát (ábrázolás), a cselekvés körülményeinek feltérképezése során tapasztalt hiányosságok szintén erre hívják fel a figyelmet. Diákjainknak Excel használatával tanítjuk a hiányosságok kiküszöbölhetőségét: értéktáblázat elkészítése, diagram készítése értéktáblázat alapján, amit a választható tantárgy keretében oktatunk. Ahhoz, hogy ezeket jól alkalmazza a diák, el kell sajátítania az analízisben tanult fogalmakat, műveleteket, mert ezek segítségével állapítja meg jól, hogy mely intervallumon készítse el az értéktáblázatot rajzolja meg a diagramot. Megértheti a folytonosság fogalmát, ami az Excelben történő alkalmazás alapja. Amennyiben az ábrázolással még mindig nem tud megbirkózni a diák, a GeoGebra programmal erre is lehetősége nyílik. (Azért volt fontos e programok használata, mert ezek mindenki számára elérhetők, a GeoGebra használata is ingyenes.) Pozitív tapasztalatokat szereztünk a Számítógépes matematika módszertan választható tantárgy bevezetésével, a hallgatók mintegy ötödrészevel megnőtt a vizsgán is jól teljesítők aránya, akárcsak a tantárgyhoz való viszonyukban is pozitív irányultság figyelhető meg.

4.5. Gazdasági feladat vizsgálata Kognitív kategóriákkal

Pénzügy-számvitel szakos hallgatóink Mikroökonómia tantárgy tanulása során gazdasági problémákat oldanak meg, bevétel-, haszon- és költségfüggvényekkel szélsőértékeket határoznak meg. A gazdasági feladatok megoldása a függvényvizsgálat lépéseinek elsajátítása alapján történik. Ezért is gondoltuk, hogy a már definiált univerzális kognitív kategóriák, mint objektumok, és a gazdasági feladat lépéseinek hierarchikus rendszerét vizsgáljuk Galois-gráffal. A gazdasági feladatban azonban a matematikai modell megtalálása is megjelenik. Azt feltételeztük, hogy a gráf legfelső szintjén, mint legfontosabb fogalom, a matematikai modell jelenik meg. A gráf megrajzolásával láthatjuk, hogy feltevésünk igazolódott.



6. ábra

A gazdasági feladat gráfjának (6. ábra) is 9 szintje van, ugyanúgy, mint a függvényjellemzés esetében. Legfelső szinten, mint legfontosabb kategória a matematikai modell, hiszen az adott feladatban a gazdasági fogalmaknak meg kell találni a matematikai megfelelőjét. A következő szinten a szimbolikus sík, tárgy-fogalom kategória jelenik meg. Ezek a kategóriák megerősítik azt, hogy mennyire fontos a szaknyelv és a fogalmak helyes ismerete. Az

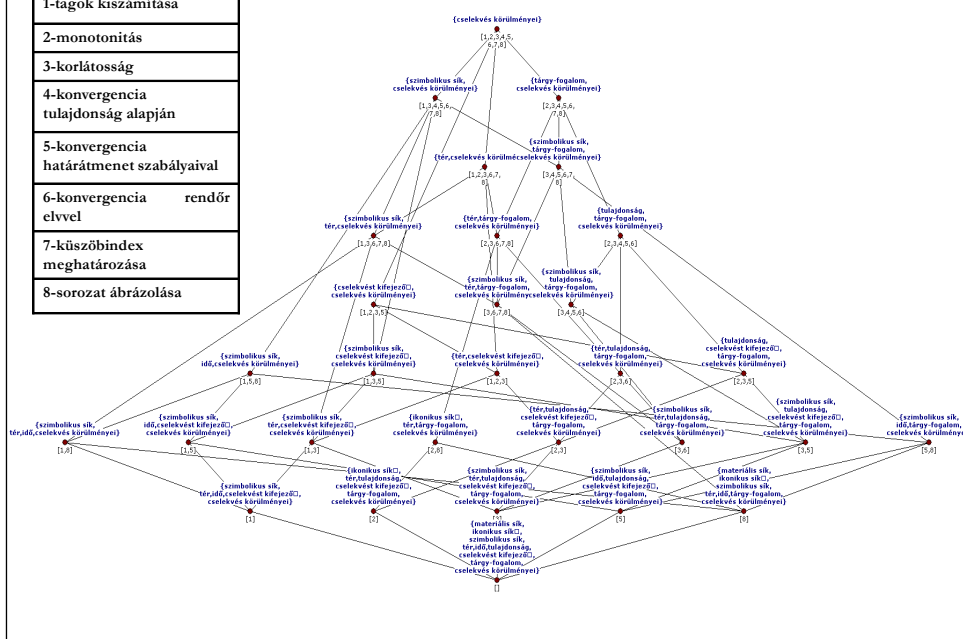
ismeretszerzés folyamatában oda kell figyelnünk a fogalomalkotás oktatása során. A tér kategória jelenik meg a következő szinten, mely bizonyítja, hogy a tér fogalmának, tulajdonságainak megfigyelése, megfigyeltetése fejlődéseméleti alapon is mennyire fontos. A cselekvést kifejező kategória itt is alulról a harmadik szinten jelenik meg. A gazdasági feladatban ritkán adunk ilyen jellegű utasítást probléma megoldásban, fontos a szövegértés, ezt a szimbolikus sík hierarchiában elfoglalt helye is mutatja. A cselekvést kifejező kategória (oldja meg, határozza meg) elhelyezkedése indokolja, hogy a gazdasági feladatok megoldásánál is részesítsük előnyben a hagyományos módszert, a számítógépet az ellenőrzési fázisban vonjuk be a probléma megoldási folyamatba. A matematikai modell megtalálása a számítógépes, GeoGebrával történő megoldás esetén szerepet játszik.

4.6. Sorozatok jellemzésének vizsgálata kognitív kategóriákkal

Több típusú sorozatot is vizsgálunk hallgatóinkkal a gyakorlatokon: lineáris tört típusú, racionális tört alakú, mértani sorozatra visszavezethető, Euler-sorozatra visszavezethető, „gyökös” sorozatok. A határérték meghatározásakor több algebrai módszert is alkalmazunk, ezért nagyon fontos a szimbolikus síkon való jártasság fejlesztése. Vizsgáltuk a sorozatok jellemzésének elemeit Galois-gráffal. Objektumok a már definiált univerzális kognitív kategóriák: Tér (tájékozódás, alatt, fölött); Idő (egymásutániség); Tulajdonságok (mennyiséget kifejező szavak); Cselekvést kifejező szavak; Tárgy, fogalom (szakkifejezések ismerete, használata); Cselekvés körülményei (feladatmegoldás módja, helyessége). A sorozatok jellemzéseinek lépéseit az alábbi számmal jelölt tulajdonságok illetve módszerek veszik át: 1-tagok kiszámítása; 2-monotonitás; 3-korlátosság; 4-konvergenca tulajdonság alapján; 5-konvergenca határátmenet szabályaival; 6-konvergenca rendőr elvvel; 7-küszöbindex meghatározása; 8-sorozat ábrázolása.

Sorozat jellemzésének elemei

1-tagok kiszámítása
2-monotonitás
3-korlátosság
4-konvergencia tulajdonság alapján
5-konvergencia határátmenet szabályaival
6-konvergencia rendőrelvel
7-küszöbindex meghatározása
8-sorozat ábrázolása



7. ábra (M2 melléklet)

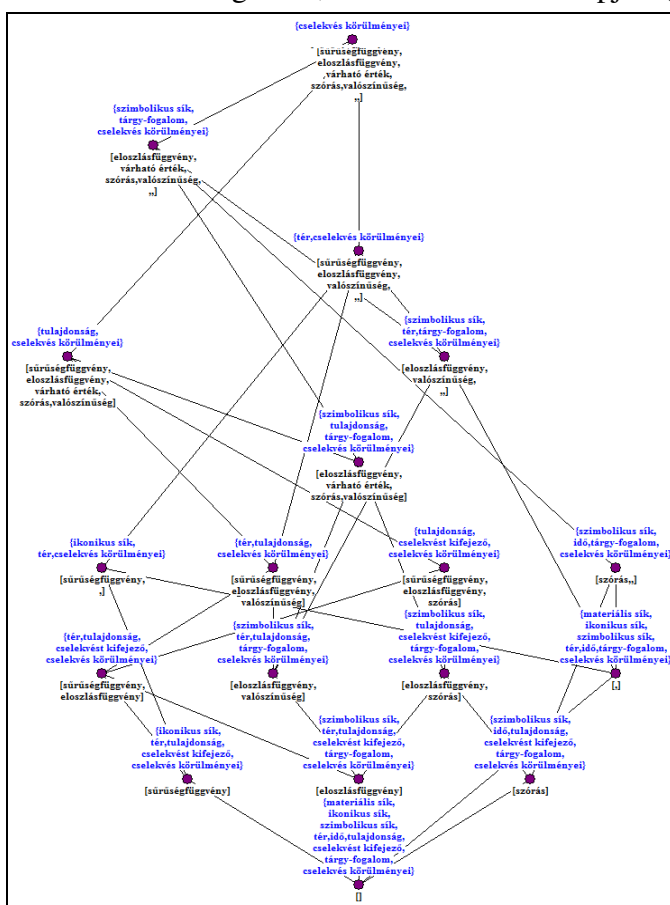
Láthatjuk, hogy a sorozatok vizsgálatának Galois-gráfjának is 9 szintje van (7. ábra). Legfelső szinten a *cselekvés körülményei* kategória helyezkedik el, ami alátámasztja, hogy jó számfogalommal, az algebrai átalakításokban jártasnak kell lennie diákjainknak. Az alatta levő szinten a *szimbolikus sík* és a *tárgy-fogalom* kategória jelenik meg, mely a szakszavak, a fogalmak ismeretét támasztja alá, valamint az absztrakció fontosságát emeli ki. Két szinttel a tárgy-fogalom kategória alatt található a *tulajdonság, tér* kategóriát, ami a kialakult számfogalom ismeretét helyezi előtérbe. A tér kategória fejlettsége a tört fogalom esetében is nagyon fontos, hiszen a racionális tört alakú sorozatoknál a számláló és nevező fogalmánál ez a kategória megjelenik. Középtájon, az ötödik szinten olvashatjuk a *cselekvést kifejező* kategóriát, amely a számítógép bevonására utalhat. Ez egy szinttel feljebb van, mint a függvény jellemzés és gazdasági feladat esetében, ez is mutatja, hogy a sorozatok esetében az algebrai ismeretek és a számolási készség előtérbe kerülnek. Ezen a szinten kiszélesedik a gráf, 8 zárt halmazpárt találunk itt. A sorozat határértékének meghatározásához használt minden lépés megjelenik a zárt halmazpárok elemeként, a kategóriák közül pedig a szimbolikus sík. A tér, idő, tárgy-fogalom, cselekvés körülményei szinte minden lépésben meghatározó jelentőségű.

4.7. Folytonos valószínűségi változóval kapcsolatos feladatok Galois-gráfja

A Matematikai alapok 2 tantárgy keretein belül tanulnak hallgatóink, valószínűesszámitást, melynek egyik legfontosabb tananyagrészt képezik a folytonos valószínűségi változóval kapcsolatos ismeretek.

Vizsgáljuk az e témakörben előforduló legfontosabb fogalmak kapcsolatrendszerét a már definiált univerzális kognitív kategóriákkal. Objektumok a már definiált univerzális kognitív kategóriák: Tér (tájékozódás, alatt, fölött); Idő (egymásutániség); Tulajdonságok (mennyiséget kifejező szavak); Cselekvést kifejező szavak; Tárgy, fogalom (szakkifejezések ismerete, használata); Cselekvés körülményei (feladatmegoldás módja, helyessége). Fogalmaink: sűrűségfüggvény, eloszlásfüggvény, várható érték, szórás, valószínűség.

A kognitív matematikai ismeretszerzés folyamata szerint vizsgálva a feladat megoldáshoz szükséges készségeket, képességeket, majd hierarchikus rendszerben ábrázolva Galois-gráffal, a következő ábrát kapjuk (8. ábra):



8. ábra (M3 melléklet)

A kapott gráfnak 9 szintje van, a rangsor legfontosabb eleme a „*cselekvés körülményei*” kategória, amely a műveltségzés, feladat-értés, szövegértésre hívja fel a figyelmet. Nemcsak a folytonos és diszkrét, hanem a klasszikus valószínűségszámításban is nagyon fontos a szövegértés, főleg a kedvező és összes kimenetek összeszámlálásakor. Ezek után a műveltségzés fontossága kerül előtérbe. Az alatta levő szinten már a „*tárgy-fogalom*” illetve a „*szimbolikus sík*” kategóriák következnek. A szakszavakat, fogalmakat jól el kell sajátítaniuk a diákoknak, érteniük kell azokat. Jártasság szintjén kell kezelniük a valószínűséggel kapcsolatos szimbólumok írását, használatát. Majd a „*tér*” és a „*tulajdonság*” kategória jelenik meg. A „*tér*” kategória azért is fontos, mert a geometriai valószínűséggel jól meg lehet alapozni a folytonos valószínűségi változó fogalmát. A gazdaságtudományi területen továbbtanuló diákjaink kevésbé jártasak a geometriában, középiskolában is inkább az algebrai, függvénytan fogalmak oktatása kerül előtérbe. Ezt alátámasztja a területszámításos és integrálszámítással kapcsolatos felmérésünk is. A „*tulajdonság*” kategória felhívja a figyelmet arra, hogy a tanult fogalmak, úgymint sűrűségfüggvény, eloszlásfüggvény, tulajdonságait ismerni kell. A „*cselekvést kifejező*” kategória itt is az alsóbb szinteken jelenik meg. Alátámasztja azt az álláspontunkat, hogy a tanítás-nevelés folyamatába itt sem szabad túl korán bevezetni a számítógépet. Ellenőrzésre is csak akkor tudták jól használni a GeoGebrát hallgatóink, ha tudták a definíciókat. Gyakorlásra a Maple TA rendszert használtuk.

Összegzésképpen elmondhatjuk, hogy a *cselekvést kifejező* kategória mind a négy gráf esetében az alsóbb szinteken jelenik meg, amelyből arra következtethetünk, hogy a számítógépet az analízis illetve a folytonos valószínűségi változó tanításában, az ellenőrzési fázisban célszerű bevonni. Nem helyettesítheti a fogalmak, definíciók pontos ismeretét. A gondolkodás, ismeretszerzés folyamatában a számolási készségek, vagy más analízisbeli operációk elvégzése után, ezek ellenőrzésére használjuk a komputeralgebrai rendszereket, szoftvereket.

4.8. „A félelmi toplistá” avagy Miért használjunk számítógépes módszereket?

A diákok többsége tart a matematikától, úgy gondolják, nem tehetségesek a matematikában. Angliában folynak kutatások arra vonatkozóan, hogy mi lehet az oka annak, hogy a tanulók félnek a matematikától. Úgy gondolják, először a tanítóképzést kell megnyugtató alapokra helyezniük. Mert ha olyan tanítókat képeznek, akik tartanak a matematikától, akkor ők a félelmet tovább adják diákjaiknak a tanítás során. Hazánkban is elmondható ez a tapasztalat. A televízióban műveltségi vetélkedőkben is gyakran halljuk a versenyzőktől „csak matek ne legyen”.

Mikor alakulhat ki a tanulóban a matematika iránti félelem? Óvodás és kisiskolás korban kifejezetten szeretik a számokat, szeretnek gondolkodni problémákon. Ezen az oktatási szinten még játékosan tanulnak, a tanítók is igyekeznek a tanítási órákat színebbé tenni. A hirtelen váltás a felső tagozatra kerüléssel következik be. Több tanárral kell megismerkedniük, megjelenik a szaknyelv használata, kevesebb a játék, a sikerélmény. Felső tagozaton kevesebben tanulnak délután napköziben, az otthoni tanulás sokszor csak az írásbeli elkészítését jelenti. Ha a szaknyelv elsajátítása hiányos, egyre több kudarc éri a gyerekeket órákon, a sok kudarc eredményezheti a matematika iránti félelem kialakulását. A szaknyelv elsajátítása közösségben a leghatékonyabb.

Napjainkban az intézmények különféle projektek keretében interaktív táblákat szereztek be. Ezek használata aktívabbá teszi a diákokat az órákon. Középiskolában is szeretnek dolgozni az interaktív táblánál, még azok a diákok is bevonhatók az órai munkába, akik inkább a helyükön a füzetben szeretnek feladatmegoldást végezni. A számítógép, az interaktív tábla használatával újra előkerül a játék, a sikerélmény az órákon.

Úgy gondolják diákjaink is, hogy a matematika ködös, elvont tantárgy, amit nem lehet megérteni. Sokat beszélgetek diákjaimmal, szünetekben, facebookon. Így nem csak a matematika tanárt látják bennem, megnyílnak, őszintén beszélnek problémáikról. Egy ilyen beszélgetés alkalmával került szóba a félelmi toplista. Kérdeztem, mi az? Azok a típusú feladatok, amiktől a legjobban tartunk a vizsgán, válaszolták. Vizsgaidőszak végén megkértem őket: rangsorolják az analízis vizsgafeladatokat aszerint, hogy melyik feladattól tartottak a legjobban! Elég az első hármat felsorolni. Így elkészült az évfolyam félelmi toplistája:

Integrálás	70%
Terület meghatározása integrálással	63%
Függvényvizsgálat	60%
Térfogatszámítás integrálással	17%
Többváltozós szélsőérték	13%
Határérték	10%
Deriválás	10%
Cotangens, tangens	3%
Érintősíkc	3%
Monotonitás vizsgálat	3%
Sorok	3%
Teleszkópikus sor	3%
Függvény átlaga integrálszámítással	3%
Függvényábrázolás	3%

A hallgatók 3%-a mondta azt, hogy nem volt nehéz a vizsgafeladatsor. A toplista első három helyén pontosan azok a területek szerepelnek, amelyeket kiemelten kezelünk a „Számítógépes matematika módszertan” tantárgy keretein belül. Az integrálás helyezését indokolhatja az is, hogy a szorgalmi időszak vége fele tanítjuk, így kevésbé tudjuk gyakorolni, ezért is fontos, hogy le tudják ellenőrizni a megoldásaikat, ha önállóan gyakorolnak. A GeoGebra alkalmas erre, mert nyílt forráskódú, és az új 4.2. verzióval az egyszerűbb tört alakú függvényeket is tudják integrálni, ahogyan ezt az előző fejezet részben is láttuk.

A függvényvizsgálatban a függvény grafikonjának megrajzolása sikerült a legkevésbé. (Hallgatóink a gazdaságtudományi területen tanulnak, így felülvizsgáltuk a követelményrendszerünket matematikából, abból a szempontból, hogy a közgazdaságtani tantárgyak tanulása során melyik típusú függvényeket kell ismerniük a diákjainknak. Így az alapképzésben a trigonometrikus függvényeket érintőlegesen tanítjuk, hangsúlyos szerepet kapnak az exponenciális, logaritmus függvények.) Erről is kérdeztem őket: Véleménye szerint miért nehéz megrajzolni a függvény grafikonját? Válaszok:

Nem tudom elképzelni.	43%
Régen rajzoltam.	13%
Keveset gyakoroltuk.	10%
Kétbalkezes vagyok.	7%
Ha nem logaritmus függvényről van szó, akkor megy.	7%

A hallgatók 14%-a mondta azt, hogyha sikerül a függvényjellemzés, akkor nem nehéz megrajzolni.

A vizsgálatban kérdőíves kikérdezést alkalmaztunk, melyben az Állattudományi Kar hallgatói is részt vettek. Összesen 85 hallgató töltötte ki. A függvényjellemzés Galois-gráfján a „*tér*”, mint kognitív kategória a második szinten jelenik meg, ez összhangban azzal, hogy a toplistán is a terület meghatározása a második helyen van. Ha a tér fogalom sérül, a hozzá kapcsolódó feladatok megoldása is problémát okoz. A függvény grafikonjának megrajzolásában a tér kategória hangsúlyos szerepet kap, úgy mint tájékozódás a koordináta rendszerben, a szélső értékek típusának értése, mind-mind megjelennek ebben a feladat fázisban.

Az integrálás „előkelő” helyezése előrevetíti, hogy Valószínűségi számításban, a folytonos valószínűségi változó fogalmának kialakításánál figyelniük kell. A félelmi toplista felhívja a figyelmünket arra, hogy nem mehetünk el a probléma mellett észrevétlenül. A felsőoktatásban is figyelniük kell tanítványainkat, sikerélményhez kell juttatni őket. Ehhez az egyik legegyszerűbb út a számítógép bevonása a tanítás-tanulás folyamatába. A

GeoGebrával, mint dinamikus programmal, tudnak kísérletezni. A függvényábrázolást is segíti, nemegyszer örömmel újságolják: Úgy jeleníti meg a függvényeket, ahogy rajzolni szoktuk. A számítógép bevonása a matematika oktatásába pozitív élményhez juttatja hallgatóinkat.

5. AZ ANALÍZIS ÉS ALKALMAZÁSAINAK TANÍTÁSA

5.1. Az analízis alapjainak tanítása Excellel és hagyományosan

A 2007/2008-as tanévben hirdettük meg első alkalommal diákjainknak a „Számítógépes matematika módszertan” tantárgyat. Elmondhatjuk, hogy azóta is teljes létszámmal felveszik hallgatóink. Az oktatási cél a hiányosságok pótlása, az analízis elemeinek részletesebb végig gondolása volt, valamint az Excel használatának kiterjesztése sorozatok jellemzésére, függvények ábrázolására. A tanítási órák száma 3 óra/hét. A tematika a következő volt:

1. Felmérés
2. Törtes egyenlőtlenség és abszolút értékes egyenlőtlenségek megoldása (algebrai út, függvényekkel), itt már tanultak 2-4 órán analízisből sorozatokat, így érzékelték, hogy miért kell jól alkalmazni a fenti egyenlőtlenségeket
3. Monotonitás vizsgálata, küszöbindex
4. Egyenlőtlenségek további gyakorlása-monotonitás, küszöbindex keresés
5. Sorozatok jellemzése Excel program segítségével
6. Felmérés a sorozatokból, csak számítógépen
7. Függvényábrázolás Excelben (függvény reciproka, függvények szorzata, hányadosa)
8. Analízisben tanultak gyakorlása (lassan, kiegészítve)
9. Érintő és szelő rajzolása Excelben
10. Felmérés függvények jellemzéséből, csak számítógépen
11. Év eleji felmérés újbóli megírása
12. Vizsgafeladatok megoldása

A tematika az Excellel történő ellenőrzési formákat emeli ki, ezek megismertetése volt az egyik fő feladata a tantárgynak, ezt indokolja az is, hogy a Pénzügytan tantárgy keretein belül is számolnak Excellel, így annak használata rutin jellegűvé válhat.

Sorozatok monotonitás vizsgálatánál az $(n+1)$ -edik tag felírása a típushiba. A következő módszerrel elértük, hogy ezt már nem hibázzák el hallgatóink. Asszociációként a zárójelezést, csomagolásnak szoktuk nevezni. Feladat: Vizsgáljuk meg monotonitás szempontjából a következő sorozatot:

$$a_n = \frac{3n-2}{2n+1} !$$

Mivel a sorozat függvény, hozzárendeléssel is megadhatjuk: $n \mapsto \frac{3n-2}{2n+1}$

Értelmezhetjük így is: $1 \mapsto \frac{3 \cdot 1 - 2}{2 \cdot 1 + 1}$, $2 \mapsto \frac{3 \cdot 2 - 2}{2 \cdot 2 + 1}$, $3 \mapsto \frac{3 \cdot 3 - 2}{2 \cdot 3 + 1}$,
 $4 \mapsto \frac{3 \cdot 4 - 2}{2 \cdot 4 + 1}$, ..., $n \mapsto \frac{3n-2}{2n+1}$. Mivel a változóra másfajta jelölést is alkalmazhatunk, legyen a hozzárendelés $(\quad) \mapsto \frac{3 \cdot (\quad) - 2}{2 \cdot (\quad) + 1}$. Most a zárójeleket megtöltjük tartalommal: $(n+1) \mapsto \frac{3 \cdot (n+1) - 2}{2 \cdot (n+1) + 1}$, így áll elő az $(n+1)$ -edik tag. Animációt is készítettünk a szemléltetéshez (9.ábra).

$$1 \mapsto \frac{2 \cdot 1 - 3}{5 - 1} \quad 2 \mapsto \frac{2 \cdot 2 - 3}{5 - 2} \quad 3 \mapsto \frac{2 \cdot 3 - 3}{5 - 3}$$

$$4 \mapsto \frac{2 \cdot 4 - 3}{5 - 4} \quad \circ \quad \circ \quad \circ \quad n \mapsto \frac{2 \cdot n - 3}{5 - n}$$

$$n := (\quad)$$

$$(\quad) \mapsto \frac{2 \cdot (\quad) - 3}{5 - (\quad)}$$

$\nwarrow$ $\nearrow$ $\nearrow$
n+1 **n+1** **n+1**

9. ábra

Ezek után a monotonitás vizsgálatába a sorozat $(n+1)$ -edik tagját jól helyettesítik be. A monotonitás vizsgálatot egyenlőtlenség bizonyításán vezetjük vissza. Excelben a sorozat tagjainak ábrázolása után szemlélet alapján határozzuk meg a sorozat csökkenését, növekedését.

Sorozatok határértékének meghatározásánál legtöbbször az *analógián alapuló módszert* használjuk a hagyományos papír-ceruza alapú megoldásban, miután már megismerték a határátmenet szabályait. Az analógiával vigyáznunk kell, az aktuális feladatban az egyes részmegoldások eltérhetnek. Az alábbi néhány példán mutatjuk be, azokkal a megjegyzésekkel, narratívumokkal, amelyeket a gyakorlatokon is használunk.

1. Mi a határértéke a következő sorozatnak? $a_n = \frac{3n-2}{2n+1}$

$$\frac{3n-2}{2n+1} = \frac{\frac{3n}{n} - \frac{2}{n}}{\frac{2n}{n} + \frac{1}{n}} = \frac{3 - \frac{2}{n}}{2 + \frac{1}{n}} \rightarrow \frac{3}{2}$$

Felhasználtuk, hogy az $\frac{1}{n} \rightarrow 0$.

„mindenki megkapja a magáét”

narratívum!

A határérték tehát $\frac{3}{2}$.

$$2. \ a_n = \frac{6n-4}{5-2n} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = ?$$

Megkeressük, hogy hol rejtőzködik a jól ismert $\frac{1}{n}$ sorozat, mert annak a határértékét

ismerjük, ez a 0. Ötlet: Tört értéke nem változik, ha a számlálót és nevezőt is ugyanazzal a nem 0 számmal osztjuk vagy szorozzuk. Jó lesz, ha egyszerűsítünk n -nel:

$$\frac{6n-4}{5-2n} = \frac{\frac{6n}{n} - \frac{4}{n}}{\frac{5}{n} - \frac{2n}{n}} = \frac{6 - 4 \cdot \frac{1}{n}}{5 \cdot \frac{1}{n} - 2} \rightarrow \frac{6-0}{0-2} = -3$$

Tehát a határérték -3. Kihasználtuk a

megoldás során a határátmenet szabályait.

$$3. \ b_n = \frac{6n^2-4}{5-2n^2} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = ?$$

Az előző sorozatnál jól működött az egyszerűsítés, most is jó ez az ötlet? Ha n -nel leosztunk, még mindig marad benne n -es tag. Még egyszer alkalmazhatjuk? Igen! Azonban miért ne tennénk egyszerre? Osztunk n -nel és még egyszer n -nel = osztunk n^2 -tel. Levezetés:

$$\frac{6n^2-4}{5-2n^2} = \frac{\frac{6n^2}{n^2} - \frac{4}{n^2}}{\frac{5}{n^2} - \frac{2n^2}{n^2}} = \frac{6 - 4 \cdot \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n}}{5 \cdot \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} - 2} \rightarrow \frac{6-0}{0-2} = -3$$

Tehát a határérték -3. A számlálóban

külön is megmutattuk, hogy hol ismerhetjük fel az $\frac{1}{n}$ sorozatot.

Mit tehetünk, ha a számlálóban és a nevezőben a nem ugyanazon a hatványon szerepel az n ? (Azaz a számláló és nevező fokszáma nem egyenlő.)

$$4. \ c_n = \frac{5n+3}{2n^2+n} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = ?$$

$$\frac{5n+3}{2n^2+n} = \frac{\cancel{n} \cdot \left(5 + \frac{3}{n}\right)}{\cancel{n}^2 \cdot \left(2 + \frac{1}{\cancel{n}}\right)} = \frac{\frac{1}{n} \cdot \left(5 + 3 \cdot \frac{1}{n}\right)}{2 + \frac{1}{n}} \rightarrow 0 \cdot \frac{5}{2} = 0$$

Vizsgáljuk meg a reciproksorozatot!

$$5. \ r_n = \frac{1}{c_n} = \frac{2n^2+n}{5n+3} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} r_n = ?$$

$$\frac{2n^2+n}{5n+3} = \frac{\cancel{n}^2 \cdot \left(2 + \frac{1}{\cancel{n}}\right)}{\cancel{n} \cdot \left(5 + \frac{3}{n}\right)} = n \cdot \frac{2 + \frac{1}{n}}{5 + 3 \cdot \frac{1}{n}} \rightarrow \infty \cdot \frac{2}{5} = \infty$$

$$6. \ d_n = \frac{5n^3+3n^2-6}{7n^2+9} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} d_n = ?$$

$$\frac{5n^3+3n^2-6}{7n^2+9} = \frac{n^3 \cdot \left(5 + \frac{3n^2}{n^3} - \frac{6}{n^3}\right)}{n^2 \cdot \left(7 + \frac{9}{n^2}\right)} = n \cdot \frac{5 + 3 \cdot \frac{1}{n} - 6 \cdot \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n}}{7 + 9 \cdot \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n}} \rightarrow \infty \cdot \frac{5}{7} = \infty$$

Összefoglalva: **TÖRT ALAKÚ SZOROZATOKNÁL, HA AZ $\frac{\text{POLINOM}}{\text{POLINOM}}$ ALAKÚ, MEGHATÁROZHATJUK A HATÁRÉRTÉKÉT OLY MÓDON, HOGY A NEVEZŐBŐL KIVÁLASZTJUK A LEGNAGYOBB FOKSZÁMÚ TAGOT ÉS AZZAL „EGYSZERÜSÍTJÜK” A TÖRTET!**

NARRATÍVUM=Ki a főnök?=A számláló vagy a nevező a magasabb fokszámú?
 Ha a számláló, akkor a sorozat a $+\infty$ vagy $-\infty$ -be tart, nem konvergens.
 Ha a nevező a magasabb fokszámú, akkor a sorozat 0-hoz konvergál.

$$3. \ c_n = \frac{6^{n-1} \cdot 2^{n+2} - 7 \cdot 5^n}{5 \cdot 12^{n-1} + 2e} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = ?$$

Először hozzuk egy kicsit számunkra kezelhetőbb alakra, alkalmazzuk a hatványozás azonosságait és a műveletvégzés szabályait:

$$c_n = \frac{6^{n-1} \cdot 2^{n+2} - 7 \cdot 5^n}{5 \cdot 12^{n-1} + 2e} = \frac{\frac{6^n}{6} \cdot 2^n \cdot 2^2 - 7 \cdot 5^n}{5 \cdot \frac{12^n}{12} + 2e} = \frac{\frac{4}{6} \cdot 12^n - 7 \cdot 5^n}{\frac{5}{12} \cdot 12^n + 2e} = \frac{\frac{4}{6} - 7 \cdot \left(\frac{5}{12}\right)^n}{\frac{5}{12} + 2e \cdot \left(\frac{1}{12}\right)^n} \rightarrow \frac{\frac{4}{6}}{\frac{5}{12}} = \frac{8}{5}$$

$$\frac{6^n}{6} \cdot 2^n \cdot 2^2 = \frac{6^n \cdot 2^n \cdot 4}{6} = \frac{12^n \cdot 4}{6} = \frac{4}{6} \cdot 12^n$$

Felhasználjuk, hogy $q^n \rightarrow 0$, ha $|q| < 1$.

A törtvonal zárójelet helyettesít, ezért minden tagot osztunk!
Szorzatnak viszont csak az egyik tényezőjét kell osztanunk!

Analógia alapú megoldás esetén vigyáznunk kell: Kiválasztjuk a nevezőben a legnagyobb hatványt és azzal egyszerűsítünk.

$$4. \quad d_n = 4n - \sqrt{16n^2 - 5n - 2} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} d_n = ?$$

????

CSINÁLJUNK TÖRTET! Emlékszünk a jól megtanult gyöktelenítésre? Most törtet bővítéssel kapunk!

$$\begin{aligned} & (4n - \sqrt{16n^2 - 5n - 2}) \cdot \frac{4n + \sqrt{16n^2 - 5n - 2}}{4n + \sqrt{16n^2 - 5n - 2}} = \frac{(4n)^2 - (\sqrt{16n^2 - 5n - 2})^2}{4n + \sqrt{16n^2 - 5n - 2}} = \frac{16n^2 - (16n^2 - 5n - 2)}{4n + \sqrt{16n^2 - 5n - 2}} = \\ & = \frac{5n + 2}{4n + \sqrt{16n^2 - 5n - 2}} = \frac{5 + \frac{2}{n}}{4 + \sqrt{16 - \frac{5}{n} - \frac{2}{n^2}}} \rightarrow \frac{5}{4 + \sqrt{16}} = \frac{5}{8} \end{aligned}$$

Ha $a_n \geq 0$, és $a_n \rightarrow a \Rightarrow \sqrt{a_n} \rightarrow \sqrt{a}$

Egyszerűsítünk n-nel.

$$\begin{aligned} \frac{4n + \sqrt{16n^2 - 5n - 2}}{n} &= 4 + \frac{\sqrt{16n^2 - 5n - 2}}{n} = \\ &= 4 + \sqrt{\frac{16n^2 - 5n - 2}{n^2}} = 4 + \sqrt{16 - \frac{5}{n} - \frac{2}{n^2}} \end{aligned}$$

azonosság!

$$\begin{aligned} (a-b)(a+b) &= a^2 - b^2 \\ (\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b}) &= a - b \end{aligned}$$

Ha az n-t bevisszük a „gyök” alá, négyzetre kell emelnünk!

$$5. \quad e_n = \left(\frac{2n+7}{3+2n} \right)^{3n} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} e_n = ?$$

A zárójelen belül álló törtkifejezést egyszerűsítsük 2n-nel!

$$\left(\frac{2n+7}{3+2n}\right)^{3n} = \left(\frac{1+\frac{7}{2n}}{\frac{3}{2n}+1}\right)^{3n} = \left(\frac{\left(1+\frac{7}{2n}\right)^n}{\left(\frac{3}{2n}+1\right)^n}\right)^3 \rightarrow \left(\frac{e^{\frac{7}{2}}}{e^{\frac{3}{2}}}\right)^3 = \left(e^{\frac{4}{2}}\right)^3 = (e^2)^3 = e^6$$

Nézzük külön a számláló átalakítását!

$$\left(1+\frac{7}{2n}\right)^{3n} = \left(1+\frac{\frac{7}{2}}{n}\right)^{3n} = \left[\left(1+\frac{\frac{7}{2}}{n}\right)^n\right]^3 \rightarrow \left(e^{\frac{7}{2}}\right)^3$$

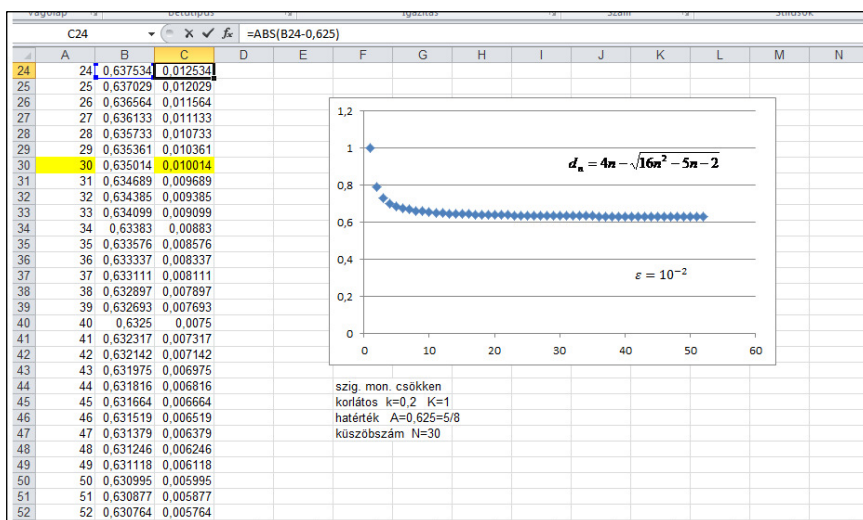
$$\left(1+\frac{k}{n}\right)^n \rightarrow e^k$$

Hasonló a levezetés a nevezőben is. Használtuk még a hatványozás azonosságait is a határérték megállapításánál.

A példákban bemutatott sorozatokat Excellel is megvizsgáltuk. Az Excel kiszámolja a sorozat tagjait, ezeket ábrázoljuk. Itt kell tudniuk, hogy a sorozat speciális függvény, a kiszámolt értékeket nem kötjük össze folytonos vonallal. A diagram megrajzolása után, a grafikon alapján határozzuk meg a monotonitást, korlátosságot, sejtjük meg a határértéket.

A negyedik feladatban megadott sorozat grafikonját láthatjuk:

A táblázat „A” oszlopában a futóindexek, a „B”-ben a kiszámolt tagok, a „C”-ben a sorozat tagjainak a határértéktől való eltérése látható, az eltérés alapján keressük meg a küszöbindexet. A tulajdonságokat a grafikon alatt soroljuk fel (10. ábra).

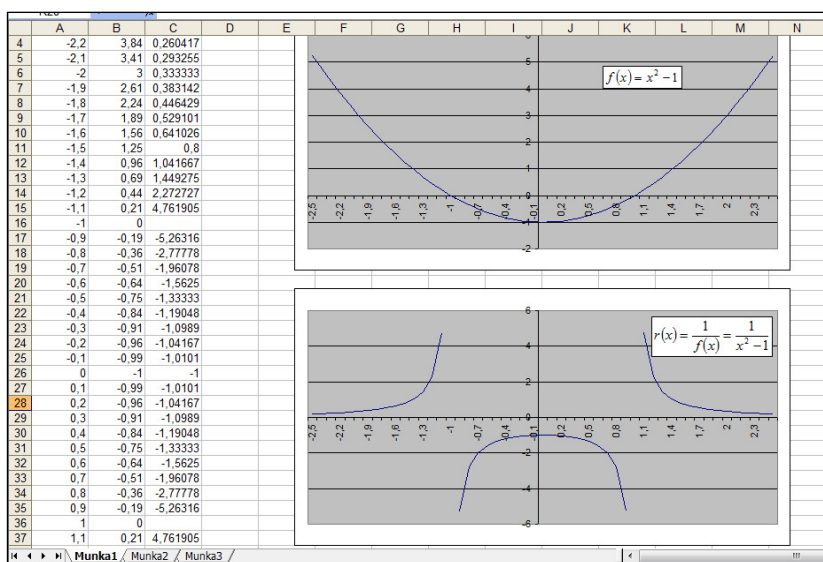


10. ábra

Fontos, hogy a sorozatok határérték fogalmát jól megalapozzuk, mert a függvény határértékét, a differenciálhányados fogalmát sorozat határértékére vezetjük vissza.

Függvények ábrázolásakor az Excel használatához meg szoktuk adni az intervallumot, amelyen ábrázolni kívánjuk a függvényt. Itt térünk ki arra, hogy ha függvény gráfja folytonos, akkor közeli értékeket kell választanunk az ábrázolásnál, különben „szögletes” lesz a függvényünk. Ezért a lépésközt az intervallumban „kicsire” kell választanunk. A reciprok függvény ábrázolása segíti a határérték fogalom megértését, nevezetesen: $\frac{szám}{\infty} = 0$

illetve $\frac{szám^+}{0 \pm} = \pm \infty$ alakú határátmeneteket. (11. ábra)



11. ábra

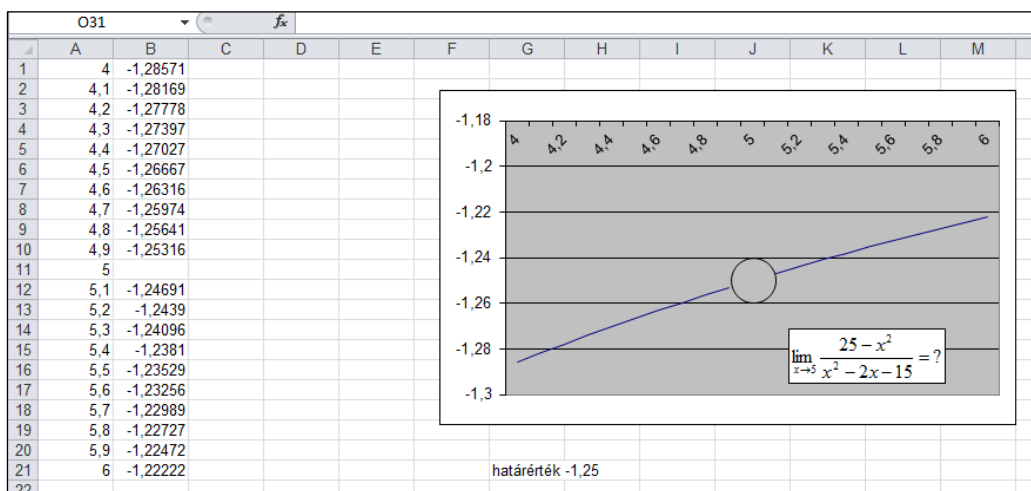
Logaritmus függvény, illetve a reciprok függvények ábrázolásakor az Excel figyelmeztette őket az értelmezési tartomány vizsgálatára is: nemegyszer megjelent a „zéróosztó” felirat. Tanácstalanul nézték a képernyőt. Segítő kérdésként elhangzott: Mi okozza a problémát? Mit teszel ilyenkor, ha a papíron oldod meg a feladatot? Válasz: „Kikötöm, hogy a nevező nem lehet 0.” Tanár: Tedd meg az Excelben is! Egyszerűen töröld ezt a függvényértéket, hiszen az, hogy ezen a helyen nincs értelmezve a függvény, azt jelenti, hogy függvény érték sincs.

Hasonló meg gondolásokkal, hogy a hagyományosan megoldásra kerülő problémát átfogalmaztuk az Excellel történő alkalmazásra, segítette a fogalom pontosítását, megértését. Tudatosodott, hogy a helyenként csak rutinszerűen elvégzett vizsgálat mit is jelent, miért fontos.

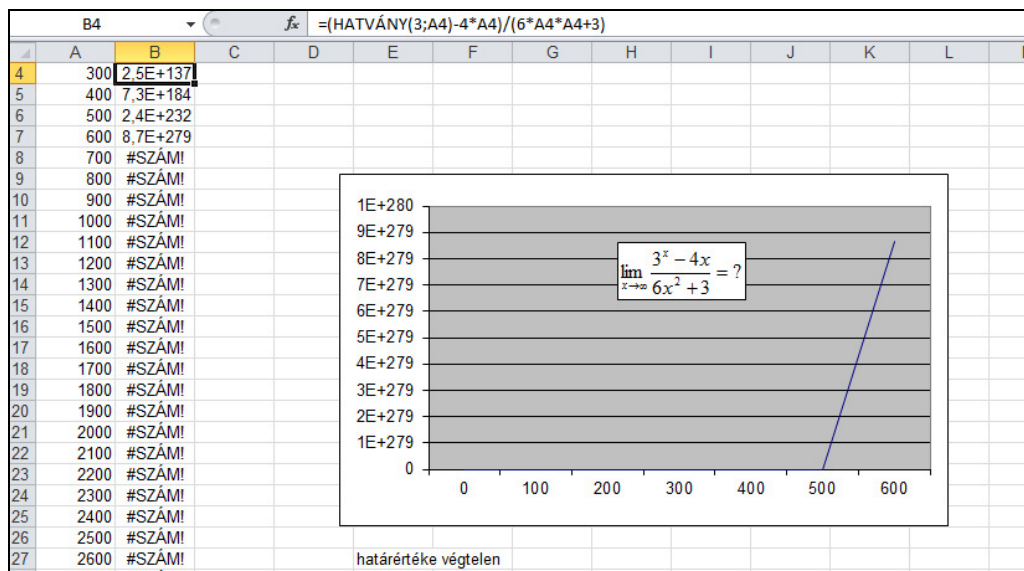
Függvény határértékének meghatározását a sorozatok határértékének meghatározására vezettük vissza. Excelben a véges helyen vett határérték

esetében a függvényértékek kiszámításánál az adott helyre szimmetrikus intervallumon dolgoztunk, „sűrűn” választva a behelyettesítendő értékeket, azaz a lépésközt 0,01 vagy 0,001 értéknek választva. A végtelenben vett határértéknél a lépésközt „nagyinak” kellett választani, 1000 vagy akár 10000-es lépésközzel is dolgoztunk.

A 12. ábrán véges helyen vett véges határérték Excel munkalapját láthatjuk. Ebben a feladatban elég volt a lépésközt 0,1-nek választani.



12. ábra



13. ábra

A 13. ábrán a végtelen helyen vett végtelen típusú határérték Excel munkalapját láthatjuk. A lépésközt 100-nak választottuk, így is „rohamosan nőnek” a függvényértékek. A munkalap B oszlopában 4 értéket látunk kiírva, a többi cellában figyelmeztető üzenet van. Erről kellett a hallgatókkal is beszélnünk. Az első 4 érték normálalakot fejez ki: $2,5E+137=2,5 \cdot 10^{137}$, a #SZÁM! üzenet azt fejezi ki, hogy a kiszámolt érték „nagyon nagy”.

Az egész féléves munka annak szellemében folyt, hogy majd sikeres vizsgát tegyenek a hallgatók, az alapokat megerősítsük, automatizáljunk megoldási sémákat. Az mehetett vizsgázni, aki az év eleji felmérést megismételve, azt 80%-osra megírta. Bizony volt olyan tanítvány, akinek hatodszorra sikerült elérni az elvárt teljesítményt.

5.2. A hagyományos módszer, az Excel és a GeoGebra kapcsolata

Úgy gondoljuk, hogy matematikatanításunk többnyire a szimbolikus síkon zajlik. Hogyan lehet bevonni az oktatásba a többi gondolkodási síkot? A számítógép segítségével mindhárom gondolkodási szint megjelenik a tanításban. Ez az egyik oka, annak, hogy számítógépes módszereket használunk a szemléltetéshez, és a tananyag megértéséhez. Első feladatunk volt, hogy olyan programokat keressünk, amelyek mindenki számára elérhetők, és a használatuk különösebb előképzettséget nem igényel. A második, hogy olyan színteret kínáljunk hallgatóinknak, ahol a tanulási módszereket megtaníthatjuk, majd hallgatóink ezeket gyakorolni tudják. Ezért a meghirdetett egy szabadon választható „Számítógépes matematika módszertan” tantárgy oktatásában mind Varga Tamás [65], mind Zech [67] által kidolgozott matematikatanítás kognitív célrendszerének átgondolása alapján pótoljuk a hiányosságokat, átismételve azokat, majd megmutatjuk, hogyan kapcsolódnak az új ismeretekhez.

A kihívást abban látjuk, hogy a tanulás-tanítás folyamatában a fogalmak megalapozása áthúzódik a felsőoktatás szintjére, így viszont sérül a többi tantárgy elsajátítása is, mert a fundamentális alapok „lerakása” még nem zárult le. Erősíteni kell a materiális és ikonikus reprezentációs síkok alkalmazását a szimbolikus sík rovására, mert azon a hallgatók gondolkodási folyamata bizonytalan.

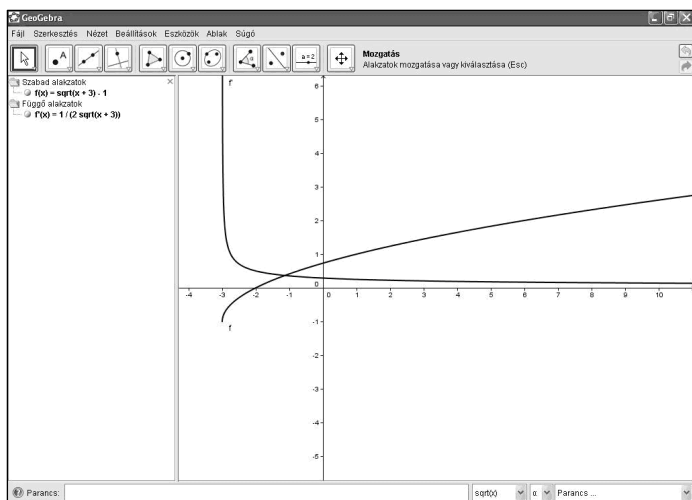
A számítógép használata egy lehetőség arra, hogy a felsorolt gondolkodási szintek közötti átjárást erősítsük. Ez is indokolja a Számítógépes matematika módszertan tantárgy bevezetését. Az elmúlt tanévekben pozitív tapasztalatokat gyűjtöttünk e tantárgy tanítása során. Az Excel és GeoGebra programok használata hatékonynak bizonyult, és segítette a sorozat és függvényfogalom kialakítását.

A 2009-2010-es tanévben az Excel és a GeoGebra program összekapcsolását tűztük ki célul. A tanítási órák száma 3 óra/hét. A tematika a következő volt:

1. Algebrai kifejezések áttekintése (azonosságok), egyenletek, egyenlőtlenségek megoldása
2. Törtös egyenlőtlenség és abszolút értékes egyenlőtlenségek megoldása (algebrai út, függvényekkel), ekkorra már tanultak analízisből sorozatokat, így érzékelték, hogy miért kell jól alkalmazni a fenti egyenlőtlenségeket
3. Hatványozás és azonosságai. Exponenciális és logaritmus függvények, egyenletek
4. Sorozatok jellemzése Excel program segítségével
5. Sorozatok határértékének meghatározása Excellel, küszöbszám keresés Excellel
6. Felmérés a sorozatokból, csak számítógépen
7. Függvényábrázolás Excelben és GeoGebrával
8. Analízisben tanultak gyakorlása a differenciálhányados és differenciahányados kapcsolata (lassan, kirészletezve)
9. Érintő és szelő rajzolása Excelben, GeoGebrával
10. Felmérés függvények jellemzéséből, csak számítógépen
11. Év eleji felmérés újbóli megírása
12. Vizsgafeladatok megoldása

Az oktatási cél az volt, hogy minél több hallgató szerezzé meg az aláírást és tegyen sikeres vizsgát analízisből.

Az alkalmazott módszerek között a hagyományos papír-ceruza módszer volt az elsődleges, hiszen a vizsga formája is ez volt. Bár az analízis elemeit elsajátították, mégis a függvényvizsgálat lépéseinek elvégzése után sem tudták felvázolni a függvény grafikonját. Ez volt az a pont, amikor számítógépet használtunk a megjelenítéshez. A hagyományos úton kapott pontok (zérushely, szélsőérték, inflexiós pont) segíti megválasztani a hallgató számára azt az intervallumot, amelyen az Excelben érdemes ábrázolni a függvényt. A előjeltáblázatok kitöltésénél is segíthet, ha elkészítik az értéktáblázatot. A GeoGebrával való megjelenítéshez nem kell meghatározni az intervallumot, de azzal tetszetősebb függvényábrát kapunk, ugyanakkor jól használható az analízisbeli műveletek helyes elvégzésének ellenőrzésére, hiszen ezt az algebrai ablakban nyomon követhetik.



14. ábra

A GeoGebra felülete (az ábra bal oldalán az algebrai ablak, jobb oldalán a grafikai ablak)

A megfogalmazott kognitív célok közül itt elsődlegesen a tudás, cselekvés, alkalmazás célok sérültek hallgatónk esetében a tanítás-tanulás folyamatában az alsóbb szinteken. A cselekvés helyességét pótolhatja az Excel az értéktáblázatok elkészítésével.

A GeoGebra nagyon jól használható ellenőrzésre [32], ugyanakkor rámutat arra is, hogy a szimbólumok megfelelő használata, alkalmazása mennyire fontos a matematikában.

Az alábbiakban egy függvényvizsgálatban mutatom be az alkalmazott módszert, mivel ilyen típusú feladatban mindhárom reprezentációs sík jelen van, a kognitív célkategóriák közül a cselekvés mindvégig jelen van, ennek hiányosságai miatt nyúlunk a számítógéphez, mint fejlesztési eszközhöz.

Tekintsük a következő formulával adott függvényt! Végezzünk függvényvizsgálatot, majd rajzoljuk meg a grafikonját!

$$f(x) = \frac{x^2 + x - 1}{e^x}$$

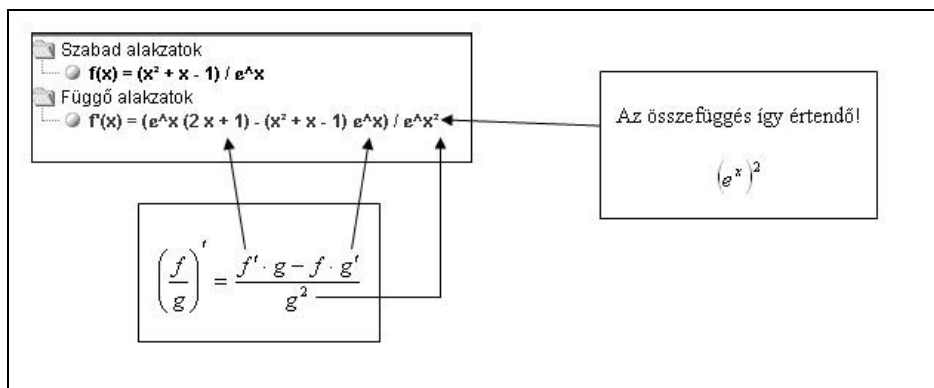
A matematikai analízisben tanult eszközökkel meghatározzuk a függvény ábrázolásához szükséges pontokat:

$$\text{- zérushely: } f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 + x - 1 = 0 \Leftrightarrow x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Szélsőérték lehetséges helyei: szükséges feltételhez meghatározzuk az első

$$\text{deriváltat: } f'(x) = \frac{(2x + 1) \cdot e^x - (x^2 + x - 1) \cdot e^x}{(e^x)^2}$$

Hogyan segít a GeoGebra? Az algebrai ablakban megjelenik az első derivált, lineáris írásmódban, így ügyelni kell a helyes értelmezésre. (15. ábra)



15. ábra

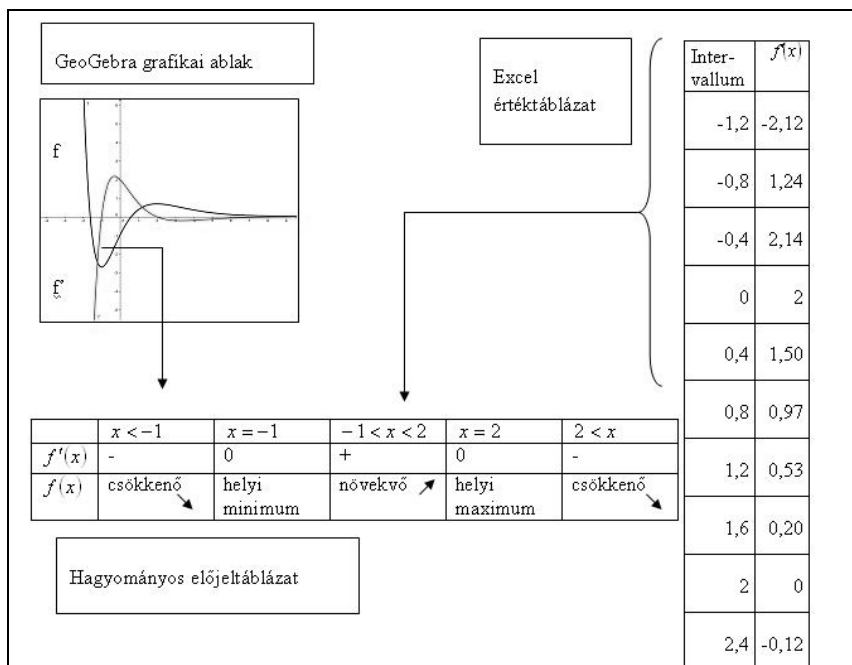
A tört deriválási szabályának áttekintése a GeoGebra algebrai ablakában

Ellenőrizhető a deriválás műveletének helyessége az algebrai ablakban, amelyben a nem egyszerűsített derivált függvényt kapjuk meg a GeoGebra segítségével.

- tovább egyszerűsített alakban: $f'(x) = \frac{-x^2 + x + 2}{e^x}$

- az első derivált zérushelyei: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow -x^2 + x + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{matrix} x_1 = -1 \\ x_2 = 2 \end{matrix}$

A továbbiakban az előjeltáblázat és a függvény első deriváltjának kapcsolatát tekintjük át a 16. ábrán, megmutatva az Excel és a GeoGebra bekapcsolódási pontját a hagyományos függvényelemzésbe. Mivel az $f(x)$ függvény és deriváltjai az értelmezési tartományán folytonosak, készíthetjük az értéktáblázatot Excellel megfelelő lépésközt választva. Az előjel táblázat a GeoGebrával megrajzolt függvények ismeretében is ellenőrizhető.



16. ábra

A hagyományos megoldási út, az Excel és a GeoGebra összekapcsolása a függvény szélsőértékeinek és monotonitásának meghatározásában

Az elemzés következő fázisai:

- inflexiók pont lehetséges helyei: az $f''(x) = 0$ egyenlet megoldásai.

$$f''(x) = \frac{(-2x+1) \cdot e^x - (-x^2 + x + 2) \cdot e^x}{(e^x)^2}$$

- tovább egyszerűsített alakban: $f''(x) = \frac{x^2 - 3x - 1}{e^x}$

- a második derivált zérushelyei: $x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{13}}{2}$

Szabad alakzatok

$f(x) = (x^2 + x - 1) / e^x$

Függő alakzatok

$f'(x) = (e^x (2x + 1) - (x^2 + x - 1) e^x) / e^{2x}$

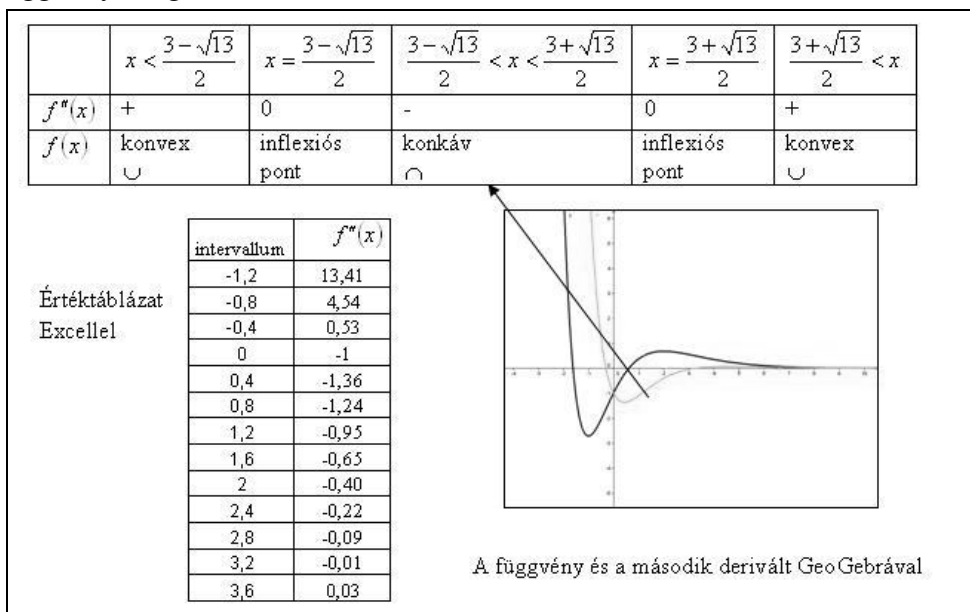
$f''(x) = (e^x x^2 (2e^x + e^x (2x + 1) - ((x^2 + x - 1) e^x + (2x + 1) e^x)) - (e^x (2x + 1) - (x^2 + x - 1) e^x) 2 e^x) / e^{4x}$

17. ábra

GeoGebra algebrai ablaka a második deriválttal

A második deriváltat az első nem egyszerűsített alakjából határozta meg a GeoGebra, ami hányados esetében bonyolultabbá teszi a derivált függvény algebrai alakját. Ellenben, ha hallgatóinktól csak a deriválást akarjuk számon kérni, annak lépéseit az egyszerűsített alakok nélkül, akkor jól tudják használni ellenőrzésre. Az algebrai alak ilyen bonyolult formájának megmutatása viszont indokoltá teszi az azonosságok ismeretét, alkalmazását, mert egyszerűbb úton is eljuthatunk a derivált függvényhez.

A gyakorlatokon párhuzamosan alkalmazott három módszer kapcsolatát szemlélteti a 18. ábra, használatával magabiztosabban dolgoztak, végezték a függvényvizsgálatot.



18. ábra

A hagyományos módszer, az Excel és a GeoGebra összekapcsolása a függvény inflexiós pontjainak és konvexitásának meghatározásában

Az előjeltáblát ellenőrizni tudja a hallgató a GeoGebrával ábrázolt második derivált függvény és az eredeti függvény megrajzolásának összevetésével, az Excellel készített értéktáblázat is segíti az előjelek eldöntését. [28][30]

Értékelés

A kurzus oktatása során pozitív tapasztalatokat gyűjtöttünk. Vizsgára bocsátott hallgatóink száma nőtt mintegy 15 %-kal. Mivel minden kollokviumi feladatsorban volt függvényvizsgálat, ennek megoldását vizsgáltam hallgatóink munkáiban. A függvényvizsgálat lépéseit helyesen végezték, a grafikon megjelenítése még mindig elmarad a várttól, bár a „jó rajzok” száma nőtt.

Számítógépen bonyolultabb problémák megoldására is vállalkoztak. Egy-egy gondolkodtatóbb feladat megoldása kapcsán bátran kérdeztek, ha elakadtak a levezetésben.

A tantárgyhoz való viszonyuk megváltozott, szívesen vettek részt az órákon, szinte mindig teljes létszámmal voltak jelen.

Néhány hallgatói vélemény (a kurzus végén 49 hallgatót kérdeztem meg a tantárggyal kapcsolatban):

- *Kellemes hangulatban teltek az órák, segített megérteni az új ismereteket és tovább bővítette a régi ismereteimet.*

- *Tanulságos volt. Megérte.*

- *Nagy segítség volt a hiányosságaim pótlásában. Értékeltem a lassabb tempót, illetve a lépésről lépésre való megoldásokat.*

- *A középiskolai tananyag rendszerezettebbé vált a tárgynak köszönhetően.*

- *Sokat segített az előadáson tanultak megértésében.*

- *Véleményem szerint hozzásegített a matematika gyakorlati elsajátításához.*

- *A függvények Excelben való ábrázolása segítette az algebrailag megoldott feladatok elképzelését.*

- *Hasznos volt, segített a tanulásban.*

Igényként merült fel, hogy a többi matematika tárgyunkhoz is kapcsoljunk számítógépes kurzust. Már második évben választották a tárgy folytatását, ahol számítógépes modellezéssel oldunk meg valószínűségszámítási feladatokat.

5.3. Gazdasági feladatok megoldásának vizsgálata

5.3.1. A gazdasági feladat közgazdaságtani megalapozása

A differenciálszámítást a gazdasági élet sok területén használhatjuk fel. A közgazdászok ezt az eljárást *határelemzésnek* nevezték el. Ennek alkalmazása természetes módon vetődik fel a vállalatok, fogyasztók és más

gazdasági egységek döntéseinek elemzésében. Ezalatt értjük azt, hogy ezek az egységek céljaik követése közben a teljesítmény valamilyen mérőszámát – a nyereséget, jövedelmet vagy valami más ilyen változót – kívánják maximalizálni. Felsoroljuk azokat a funkcionális összefüggéseket, amelyek a leggyakrabban fordulnak elő a közgazdász munkájában:

1. A termelési függvény, $Q=f(z)$, kifejezi, hogyan változik a munka vagy valamely nyersanyag mennyisége bizonyos termék Q termelési szintjével (Q jelentheti például a cipőgyárban hetente előállított cipők számát)
2. A költségfüggvény, $C=g(Q)$, kifejezi a Q termelési szinttel kapcsolatban felmerülő C összes költséget.
3. A keresleti függvény, $P=F(Q)$, megmutatja, milyen magas P árat lehet egységnyi termékért kérni, ha Q mennyiséget akarnak eladni e termékből. Más szavakkal, megmutatja: mekkora lesz a fogyasztók termék iránti kereslete különböző árszinteken.
4. A bevételi függvény, $P \cdot Q=QF(Q)$, megmutatja a vállalat összes bevételét, amikor Q egységet ad el egy termékből P egységáron.
5. A hasznfüggvény, $U(Q)$, azt az élvezetet méri, amelyet az egyén valamely áru Q mennyiségének birtoklásából merít.

A közgazdászok a következő terminológiát vezették be:

$\frac{dU}{dQ}$ a határhaszon, $\frac{dQ}{dz}$ a határtermék, $\frac{dC}{dQ}$ a határköltség, $\frac{d(PQ)}{dQ}$ a határbevétel.

Tegyük fel, hogy egy üzletember a lehető legnagyobb R összes nyereséget akarja elérni. Ez azt jelenti, hogy a lehető legnagyobb akarja tenni a különbséget a PQ összes bevétele és C összes költsége között, azaz maximalizálni kívánja az $R=PQ-C$ függvényt. Megkereshetjük, hogy milyen Q termelési szint adja a legtöbb nyereséget. Rendes körülmények között R akkor lesz maximális, amikor differenciálhányadosa zérus lesz, vagyis

$$\frac{dR}{dQ} = \frac{d(PQ)}{dQ} - \frac{dC}{dQ} = 0 \quad \text{vagy} \quad \frac{d(PQ)}{dQ} = \frac{dC}{dQ}.$$

Úgy is fogalmazhatjuk, hogy a határköltség egyenlő a határbevétellel. Ez a vállalat közgazdasági elméletének egyik alapvető tétele.

A kereslet rugalmassága azt fejezi ki, hogy hogyan változik a kereslet mennyisége az árváltozások folytán. A következő összefüggés írja le:

$$\frac{\text{A kereslet mennyiségének százalékos változása}}{\text{Az ár százalékos változása}} = \frac{100 \frac{dQ}{Q}}{100 \frac{dP}{P}} = \frac{P}{Q} \cdot \frac{dQ}{dP} \quad [7].$$

A derivált definíciója feltételezi, hogy a független változónak tetszőlegesen kicsi megváltozásai is lehetségesek. Gyakorlati feladatoknál azonban általában nem lehetséges a változó tetszőlegesen kicsiny változásait megmérni. A közgazdasági mennyiségeket, mint például egy termék árát, vagy egy vállalat bevételeit csak bizonyos időközönként, naponta, hetente vagy akár évente határozzák meg, így az egyes függvények (költség, haszon, bevétel...) a változónak csak egész értékeire van definiálva, így a változó csak diszkrét értékeket vehet fel. Ilyen függvények grafikonja is csak diszkrét pontokból áll, s ezekre a derivált nem definiálható. Ezen a nehézségen általában úgy segíthetünk, hogy a tényleges függvényt egy differenciálható függvénnyel helyettesítjük, amely eredeti függvényünket „jól közelíti”. [58]

5.3.2. Gazdasági feladatok megoldásának elemzése

Hallgatóinkkal három típusú gazdasági feladatot szoktunk megoldani: irracionális, exponenciális és hatványfüggvények lineáris kombinációjából alkotott ún. polinomiális függvényekkel kapcsolatos problémák.

Kutatásunkban a hagyományos papír-ceruza módszer mellett sorozatokat vizsgáltunk és jellemeztünk, ábrázoltunk Excellel és GeoGebrával is. Analízis eszközeivel kerestük meg a függvények szélső értékeit, számoltunk elaszticitást, meghatároztuk a fedezeti pontot. Ezeket GeoGebra program alkalmazásával is kiszámítottuk. Felmérésünkben 4 feladatot tűztünk ki.

A kutatásban a csoport 22 hallgatója vett részt a 2011/2012-es tanévben. Ennek eredményeit mutatjuk be az alábbiakban.

Hipotéziseink a következők voltak:

- *Sorozat vizsgálatánál a tanulók előnyben részesítik az Excelt a GeoGebrával szemben.*
- *Ha a gazdasági feladatban hatványfüggvényekkel kell dolgozniuk, azt hagyományosan és GeoGebrával is nagyobb sikerrel oldják meg, mint az összetett függvényt tartalmazó feladatokat. Ezen belül is az exponenciális függvény alapú összetett függvényt többen oldják meg, mint az irracionális függvényt tartalmazó feladatot.*
- *Pszichikai tényezők is befolyásolják a feladatmegoldást.*

A feladatsort kétszer két tanítási órán oldották meg a hallgatók, az egyiken hagyományosan, a másikon használhatták a számítógépet, így az Excelt és a GeoGebrát is. A GeoGebrával történő megoldás után javíthatta a hagyományosan is megoldott feladatot.

A feladatok a következők voltak:

A csoport:

1. Egy termék árbevételeinek alakulását (ezer Ft-ban) a $B(x) = x^2 \cdot \sqrt{1000 - \frac{x}{2}}$

függvény adja meg, ahol x az eladott termékek darabszámát jelenti.

- a. Milyen értékeket vehet fel az eladott termék darabszáma?

- b. Milyen x érték mellett lesz maximális az árbevétel?
 - c. Számítsa ki az árbevétel-függvény pontelaszticitását $x = 1000$ -ben, és a kapott eredményt értékelje!
- 2. Ismeretes, hogy egy cég valamely termékének $B(x)$ árbevételi, illetve $K(x)$ költség függvénye, a következő: $B(x) = 200x - 0,1x^2$, illetve $K(x) = 10x + 6000$, ahol $x(> 0)$ a termék darabszámban kifejezett mennyisége.
 - a. Írja fel a határköltség függvényt, a profit függvényt és a határprofit függvényt!
 - b. Határozza meg a termék azon darabszámát, amelynek értékesítése esetén a cég nyeresége maximális lesz. Számítsa ki a maximális profit értékét is!
 - c. A fedezeti pont a nulla veszteséghez és profithoz tartozik. Határozza meg, hogy fedezeti pont milyen termelési mennyiséghez tartozik!
- 3. Egy vállalat termékének db-ban kifejezett keresletét $f(x) = e^{-0,3x + 6}$ függvény írja le, ahol x az egységár és $f(x)$ a termék iránti kereslet.
 - a. Írja fel a bevételi függvényt és határbevételi függvényt!
 - b. Milyen egységár mellett maximális a bevétel és mekkora az ehhez tartozó árbevétel és kereslet?
 - c. Ha az árat 1%-kal növelem, hogyan változik a kereslet $x = 10$ környezetében? Szöveggel magyarázza, hogy mit jelent a kapott eredmény!

B. csoport:

- 1. Ismeretes, hogy egy cég valamely termékének $B(x)$ árbevételi, illetve $K(x)$ költség függvénye, a következő: $B(x) = 200x - 0,1x^2$, illetve $K(x) = 10x + 6000$, ahol $x(> 0)$ a termék darabszámban kifejezett mennyisége.
 - a. Írja fel a határköltség függvényt, a profit függvényt és a határprofit függvényt!
 - b. Határozza meg a termék azon darabszámát, amelynek értékesítése esetén a cég nyeresége maximális lesz. Számítsa ki a maximális profit értékét is!
 - c. A fedezeti pont a nulla veszteséghez és profithoz tartozik. Határozza meg, hogy fedezeti pont milyen termelési mennyiséghez tartozik!
- 2. Egy vállalat termékének db-ban kifejezett keresletét $f(x) = e^{-0,3x + 6}$ függvény írja le, ahol x az egységár és $f(x)$ a termék iránti kereslet.
 - a. Írja fel a bevételi függvényt és határbevételi függvényt!
 - b. Milyen egységár mellett maximális a bevétel és mekkora az ehhez tartozó árbevétel és kereslet?
 - c. Ha az árat 1%-kal növelem, hogyan változik a kereslet $x = 10$ környezetében? Szöveggel magyarázza, hogy mit jelent a kapott eredmény!
- 3. Egy termék árbevételének alakulását (ezer Ft-ban) a $B(x) = x^2 \cdot \sqrt{1000 - \frac{x}{2}}$ függvény adja meg, ahol x az eladott termékek darabszámát jelenti.
 - a. Milyen értékeket vehet fel az eladott termék darabszáma?
 - b. Milyen x érték mellett lesz maximális az árbevétel?
 - c. Számítsa ki az árbevétel-függvény pontelaszticitását $x = 1000$ -ben, és a kapott eredményt értékelje!

A sorozat vizsgálata mindkét csoportnak ugyanaz volt:

Jellemezze a következő sorozatot monotonitás, korlátosság, konvergencia szempontjából!

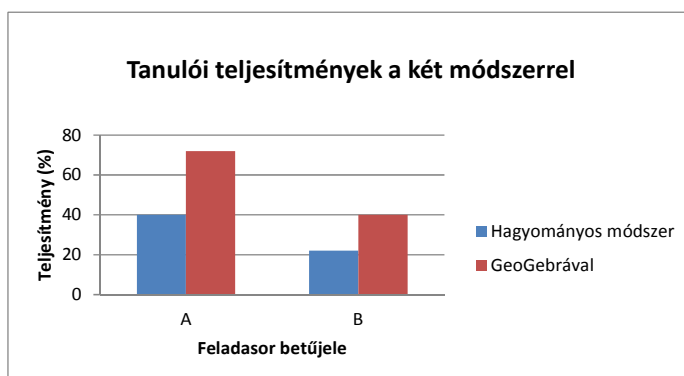
Ábrázolja az első 150 tagot! Ha konvergens, adjon meg küszöböt $\varepsilon = 10^{-2}$ esetén!

$$a_n = \frac{3n-10}{2n-3}$$

Felmérési eredmények:

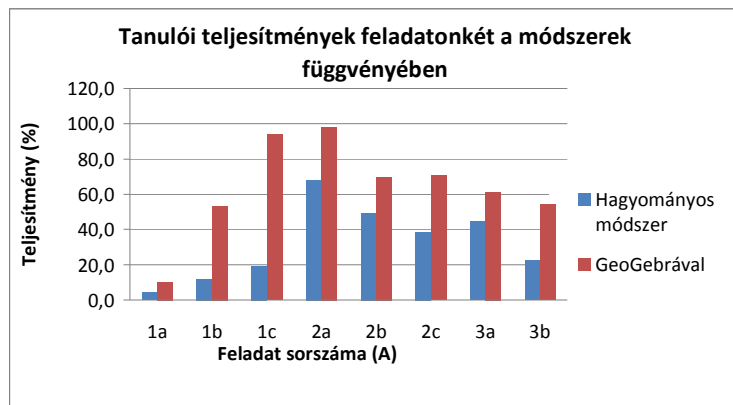
A sorozatos feladatot 1 tanuló hagyományosan, a többi Excelben oldotta meg. GeoGebrát egyáltalán nem használtak hozzá. Szokatlannak találták az Excellel szemben. Az Excellel történő vizsgálatot a már leírt módon végezték el. Szinte hibátlanul dolgoztak ebben a feladatban a számítógéppel.

Megfigyeltük, hogy dolgozat írásakor, amikor a feladatlapot osztjuk ki, a diákok mindig A feladatsort kérnek, merthogy az mindig könnyebb. Úgy gondolják, hogy a tanár azt állítja össze először, így az biztosan egyszerűbb. Ezért készítettük el úgy a B feladatsort, hogy az A jelű feladatai voltak benne, de más sorrendben.



19. ábra

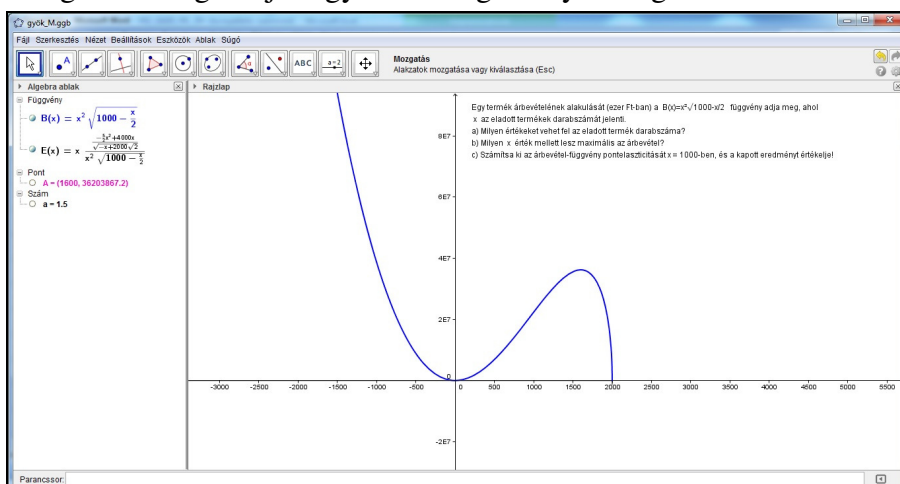
Ha összehasonlítjuk a két feladatsor megoldásánál kapott eredményt, láthatjuk, hogy a diákok a B zárthelyi dolgozatban 20%-kal kisebb teljesítményt értek el, holott abban a csoportban is voltak jobb képességű hallgatók. Érdekes, hogy a GeoGebrával történő megoldás során is megmaradt ez a különbség a csoportok között. A dolgozat megírása után szóban is kifejtették, hogy a B feladatsor „nehezebb” volt. Ezek után megmutattam, hogy ugyanazok a feladatok voltak, mint az A feladatsorban csak más sorrendben, „csodálkozva” néztek. Úgy gondolom, hogy ha „eldöntik magukban”, hogy a B bonyolultabb, ez befolyásolja a feladat megoldást. Ezt a továbbiakban úgy küszöbölködtem ki, hogy nem így nevezem el a feladatsorokat, hanem K vagy M csoport, vagy színek szerint, és úgy is nyomtatom ki (választhatnak kedvenc színük szerint).



20. ábra

Legjobb teljesítményt nyújtottak hallgatónk a második feladatban, ami a „polinomiális” függvénnyel kapcsolatos, majd az exponenciális függvényes feladatban és a leggyengébb eredményt az irracionális függvényt tartalmazó példában írták. Gazdasági feladat megoldásának vizsgálódásában hipotéziseként is ezt fogalmaztuk meg.

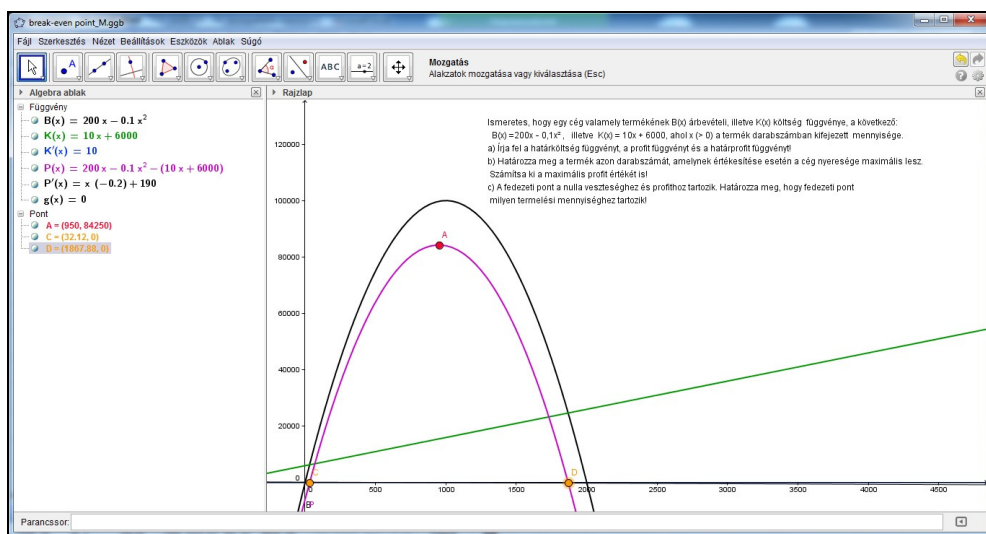
Az első feladat a) részében a *Milyen értékeket vehet fel az eladott termék darabszáma?* kérdésre mindösszesen 3 tanuló adott választ, a többiek semmit nem írtak rá. Kettő jó válasz született, egy tanuló pedig a gyök alatti kifejezésre a „kikötést” felírta. A dolgozatok értékelésekor elmondták, hogy nem értették a kérdést. Amikor átfogalmaztuk, hogy az értelmezési tartományt, mint matematikai modellt kellett megtalálni, már azt válaszolták, hogy ezek után meg tudták volna oldani. Ez is mutatja, hogy a szakszavak, a szimbólum rendszer ismerete mennyire fontos. A GeoGebrával történő megoldásoknál általános hiba volt, hogy nem vették figyelembe azt, hogy a darabszám nem lehet negatív. A legtöbbjük így ítélte meg a helyes megoldást:



21. ábra

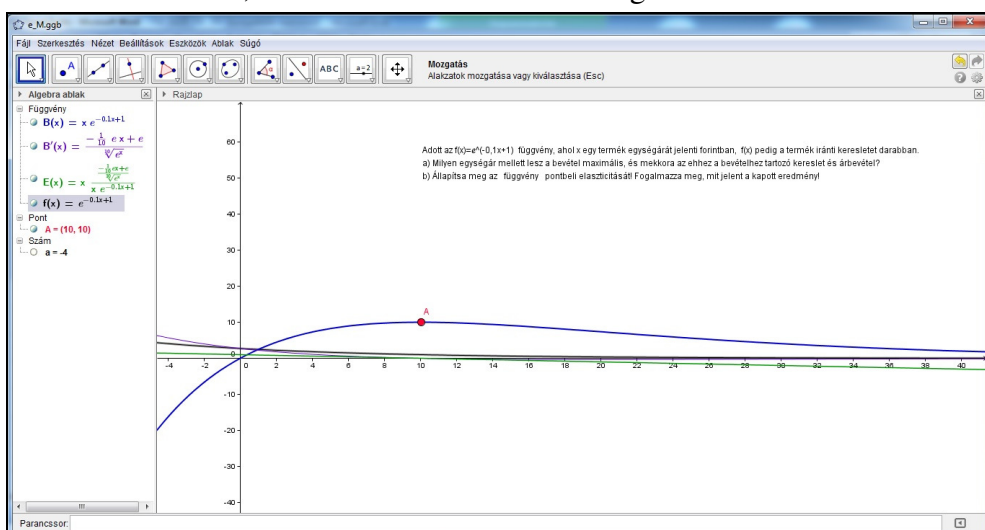
A függvény negatív tartományon való megjelenítése a hiba, a darabszám termékek esetében nem negatív. Ezt az itemet tévesztették a legtöbben. Az elasticitás kiszámítás az elasticitás függvény jó felvétele után behelyettesítési érték meghatározásával GeoGebrával 94%-os teljesítményt mutat. Itt a parancssorba történő pontos függvénybeírásra kellett csak figyelniük. Hagyományos módszer mellett értékeltük a definíció helyes felírását is.

A polinommal definiált bevételi és költség függvényt tartalmazó feladatban a szakszavak, szimbólumok ismerete szintén előtérbe került: határfüggvény meghatározása a deriválás műveletének elvégzését jelenti. Miután ez gyakorlatokon hangsúlyosan is előkerült- didaktikailag a szeminárium folyamatos gyakorlás szakaszában- minden hallgató elsajátította ezt az ismeretet. A feladat harmadik része ment nehezebben. Tanítási órán többször is vettük a gondolatmenetet, mégis a teljesítményük itt csak a 38,6%-ot éri el. A számítógépes megoldásban a GeoGebra régebbi verziójával (a mostani 4.2. már tudja) dolgozva a kritikus pontot az jelentette a megoldásban, hogy a *veszteség = negatív nyereség*, illetve a matematikai modell megtalálása a fedezeti pont fogalmának. Ennek lépései: profit függvény felírása; 0 profit, 0 veszteség = profit függvényt egyenlővé kell tenni 0-val, ez a függvény *zérushelye*, ami szemléletesen azt jelenti, hogy hol metszi a függvény az x tengelyt. Ennek végig gondolása azért volt fontos, mert zérushely parancs nem volt a GeoGebra parancsai között. Az x tengely és a profit függvény metszéspontjaként kaphatjuk meg a fedezeti pontot. Az alakzatok metszéspontja paranccsal azonban nem tudtuk kijelölni az x tengelyt, ezért külön függvényként kellett bevinni $(f(x)=0)$. A GeoGebrás helyes megoldást láthatjuk:



22. ábra

Az exponenciális keresleti függvény és a termék árából előállított bevételi függvényt helyesen deriválták, mint szorzat függvényt, 45%-os teljesítményt érték el ebben a feladatrészben. A szélsőérték megtalálása volt bonyolultabb számukra, bár órákon elég sokszor előtérbe került, hogy deriválás után is alakítsanak szorzattá és szorzat függvény zérushelyét kellett meghatározni, hagyományos módszerrel 22%-os a teljesítmény ebben a feladatrészben. GeoGebrával 61%, illetve 54%-osra oldották meg.



23. ábra

A tanév végén kérdőíves kikérdezést alkalmaztunk a hallgatói vélemények összegyűjtésére. Az alábbiakban a kérdéseket és a kérdésekre kapott válaszokat mutatjuk be.

Okozott-e problémát a GeoGebra felületének megismerése?	Nem 73%	eleinte 16%	igen 11%
A tanári segítség segítette-e a GGB felületének megismerését? Egyedül boldogult volna-e?	tanári segítség kellett 63%	ment volna egyedül 37%	
Letöltötte-e otthoni használatra?	igen 84%	nem 16%	
Segített-e a tananyag megértését vagy csak a számolásokat könnyítette-e meg?	csak a számolást 58%	megértés 36%	mindkettőt 6%
Gyakorlás közben ellenőrzésre használta-e a GeoGebrát?	igen 47%	nem 47%	feladatmegoldásra 6%
Zh-írásakor segíti-e feladatok megoldását? Vagy inkább a hagyományos úton oldaná meg a feladatokat?	inkább hagyományosan 22%	GGB-val 78%	
Ahhoz, hogy a GGB-val oldjon meg feladatokat, szükséges-e az elméleti			

anyag ismerete (tudja mi a szélsőérték pl) vagy anélkül is megoldhatók a problémák?	<i>szükséges 68%</i>	<i>nem szükséges 26%</i>	<i>keveset 6%</i>
Írja le mi tetszett a programban és mi okozott problémát a használata során?	<i>Megoldja helyettem a feladatot csak sok benne a matematikai írásjel 16%</i> <i>Könnyű eligazodni a menüjében, könnyen kezelhető a felülete 42%</i> <i>Gyorsabb a feladatmegoldás és a függvényábrázolás 26%</i> <i>Nem válaszolt 16%</i>		
Vélemény (használjuk a tananyag elsajátítása során vagy inkább mellőzzük, szokatlan stb...)	<i>Használjuk 82%</i>	<i>szokatlan 12%</i>	<i>nem feltétlenül 6%</i>

Néhány részletesebb tanulói vélemény:

- *Inkább ezt kéne nyomatékosabban használni, mint a hagyományos úton való kiszámítást. Valószínűleg jobb jegyek lennének ebből.*
- *Jó módszernek tartom, hogy ezzel a programmal oldjuk meg a feladatokat. Problémát inkább a túlbonyolított feladatszövegek okoztak számomra. Szerintem a GeoGebra egy modern és egyszerű megoldás. Jóval gyorsabban végezhetőek el vele feladatok, mint hagyományos módszerrel.*
- *Véleményem szerint így jó, hogy közben számolunk is és nem csak a gépre bízunk, mert így jobban átláttam a dolgokat.*

Diákjaink véleménye is azt tükrözi, hogy használjunk számítógépes módszereket feladatmegoldáshoz, de nem helyettesítheti a hagyományos módszert. A fogalmak, definíciók a tananyagtartalmak elsajátítása nem helyettesíthető a számítógéppel. A harmadik véleményt emelném ki: „átláttam a dolgokat”, ami azt jelentette, hogy a matematikai fogalmakat milyen módon tudta összekapcsolni a közgazdaságtanban tanultakkal.

A 2012/2013-as tanévben Maple programmal [26] is tudtunk dolgozni a Számítógépes matematika órákon pénzügy-számvitel szakos hallgatóinkkal. A Maple használata teljesen más gondolkodást jelentett a problémák megoldásában. Mivel a gazdasági szakokon inkább csak felhasználói ismeretekkel rendelkeznek a tanulók, úgy gondoljuk, hogy programozási ismeretekkel nem terhelhetjük őket a szaktárgyak oktatása mellett. A Maple bevonása a tanítási tanulási folyamatba módszertanilag azt az elgondolást követi, hogy előre elkészített mapleteket használunk, és azt alkalmazzuk az adott feladatra. Ezt az is alátámasztja, hogy könyvelési programokat is megismernek, és ott is alkalmazni kell tudni a szoftvereket.

A gyökfüggvényt tartalmazó gazdasági feladat maple munkalapja a következő:

```

> restart : with(plots) :
> B := x -> x^2 * sqrt(1000 - x/2)
> grafikon := plot(B(x), x = 0 .. 3000) : grafikon
> deriváltB := x -> d/dx B(x) : derivált = deriváltB(x)
> derivált_zérushelyei := solve(deriváltB(x) = 0, x);
> rajzderivált := plot(deriváltB(x), x = 0 .. 4000, color = blue) :
    rajzderivált
> maximum_hely := derivált_zérushelyei[2]
> plot(signum(deriváltB(x)), x = 0 .. 1800, title = A derivált előjele, color
    = green)
> maximum_értéke := B(maximum_hely); evalf(%)
> elaszticitás := unapply(x/B(x) * deriváltB(x), x) :
    Az árbevétel elaszticitása = elaszticitás(x)
> elaszticitás_értéke := elaszticitás(1000)
> fuggoleges := plot([ [1000, 0], [1000, 1.5] ], linestyle = [dash], color
    = blue) :
> rajz_elaszticitás := plot([ elaszticitás(x), elaszticitás_értéke ], x = 0
    .. 1700, color = [green, red], linestyle = [solid, longdash]) :
    display([ fuggoleges, rajz_elaszticitás])

```

Ennek alapján a másik két feladat is megoldható, aktualizálni kell a függvényeket benne, illetve értelmezni a kitűzött kérdéseket.

A fenti feladat Maple megoldása:

```

> restart : with(plots) :

```

```

> B := x -> x^2 * sqrt(1000 - x/2)

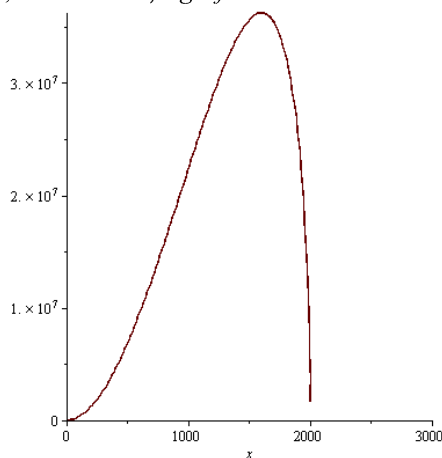
```

$$B := x \rightarrow x^2 \sqrt{1000 - \frac{1}{2}x}$$

```

> grafikon := plot(B(x), x = 0 .. 3000) : grafikon

```



> $\text{derivált}B := x \rightarrow \frac{d}{dx} B(x) : \text{derivált} = \text{derivált}B(x)$

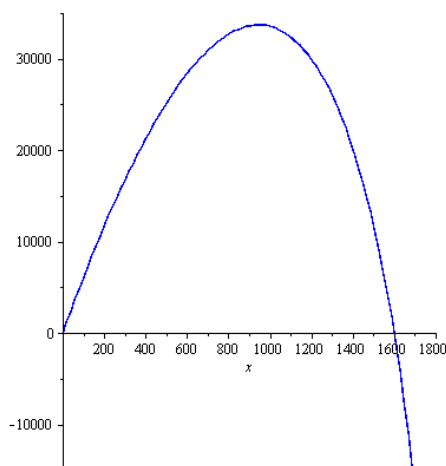
$$\text{derivált} = x\sqrt{4000 - 2x} - \frac{1}{2} \frac{x^2}{\sqrt{4000 - 2x}}$$

(A Maple kiírja, ha a derivált nem létezik.) [24]

> $\text{derivált_zérushelyei} := \text{solve}(\text{derivált}B(x) = 0, x);$

$$\text{derivált_zérushelyei} := 0, 1600$$

> $\text{rajzderivált} := \text{plot}(\text{derivált}B(x), x = 0 \dots 4000, \text{color} = \text{blue}) :$
 rajzderivált

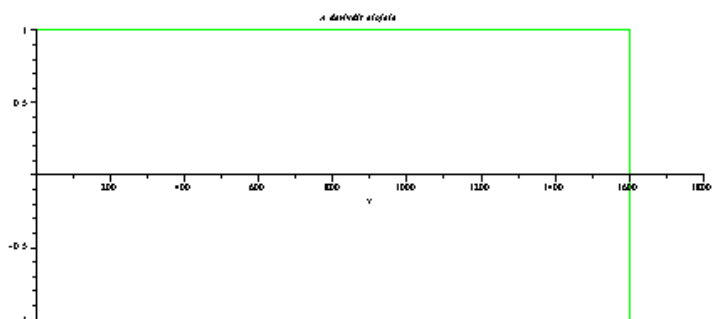


> $\text{maximum_hely} := \text{derivált_zérushelyei}[2]$

$$\text{maximum_hely} := 1600$$

A derivált előjelet vált 1600-nál, pozitívról negatívra, tehát B(x)-nek helyi maximuma van x=1600-ban.

> $\text{plot}(\text{signum}(\text{derivált}B(x)), x = 0 \dots 1800, \text{title} = A \text{ derivált előjele}, \text{color} = \text{green})$



> $\text{maximum_értéke} := B(\text{maximum_hely}); \text{evalf}(\%)$

$$\text{maximum_értéke} := 25600000\sqrt{2} \\ 3.620386719 \cdot 10^7$$

A bevétel maximális értéke $25600000\sqrt{2}$

> $\text{elaszticitás} := \text{unapply}\left(\frac{x}{B(x)} \cdot \text{derivált}B(x), x\right) :$
 Az árbevétel elaszticitása = $\text{elaszticitás}(x)$

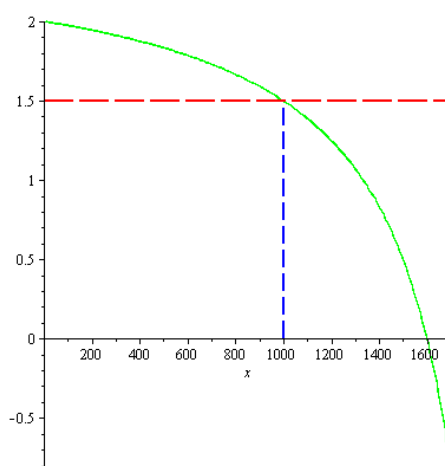
$$\text{Az árbevétel elaszticitása} = \frac{2 \left(x \sqrt{4000 - 2x} - \frac{1}{2} \frac{x^2}{\sqrt{4000 - 2x}} \right)}{x \sqrt{4000 - 2x}}$$

> $\text{elaszticitás_értéke} := \text{elaszticitás}(1000)$

$$\text{elaszticitás_értéke} := \frac{3}{2}$$

> $\text{fuggoleges} := \text{plot}([[1000, 0], [1000, 1.5]], \text{linestyle} = [\text{dash}], \text{color} = \text{blue}) :$

> $\text{rajz_elaszticitás} := \text{plot}([\text{elaszticitás}(x), \text{elaszticitás_értéke}], x = 0 \dots 1700, \text{color} = [\text{green}, \text{red}], \text{linestyle} = [\text{solid}, \text{longdash}]) :$
 $\text{display}([\text{fuggoleges}, \text{rajz_elaszticitás}])$



Így, hogy a kész munkalap mindenki számára elérhető volt, a Maple-t is szívesen használták. Hátránya volt azonban, hogy ezt csak a két tanteremben és a számítógépes matematika órán tudták használni.

Nem csak gazdasági feladatot oldottunk meg, hanem sorozat határértékét is meghatároztuk, valamint függvény határértéket, deriváltakat, integrálokat is. Ezen műveletek végzéséhez a Maple eszköztárat, „kifejezések” paletta, használtuk. Hátrányként nevezték meg a tanulók, hogy csak végeredményt látnak, a megoldás módját nem. A Geogebra 3.2.2. régebbi verziójában, az algebrai ablakban nyomon követhetők voltak a deriválás lépései, igaz lineáris írásmódban, ezért az értelmezésre oda kellett figyelni. Az új verzióban ez a

funkció „elveszik”, a szép írásmódra törekedtek a programozók a megjelenítésben, valamint a negatív kitevők elkerülésére, ezáltal bonyolultabb kifejezéseket ír ki a megoldásban. Az ellenőrzés elvégzéséhez igen csak otthon kell lenniük a diákoknak az algebrai azonos átalakítások terén, holott pontosan ez az egyik terület az, amelyben több hiányossággal rendelkeznek. Ezért nem minden típusú feladatnál célszerű a használata, mert van olyan, hogy a tanuló meglátja a megoldás képletét és ezek után feladja a feladatmegoldást, vagy az ellenőrzést, holott ez lett volna az egyik cél, hogy erre használja a programot.

5.4. Taylor-polinom tanításának elemei hagyományosan és GeoGebrával

Gyakori feladat szemináriumon a Taylor-polinom meghatározása. Eleinte kevésbé írták fel helyesen a hallgatók a Taylor-polinomot, két-három év tapasztalata után a legjobban a „táblázatos” módszer vált be. Az alábbiakban ezt mutatjuk be, kiegészítve az alkalmazott narratívummal.

Definíció: Ha az $f(x)$ függvény az a valós szám valamely környezetében n -szer differenciálható, akkor minden ebbe a környezetbe eső x helyen az $f(x)$ függvény n -ed fokú az a -hoz tartozó Taylor –polinomján a következő kifejezést értjük [40]:

$$T_n(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \frac{f^{(4)}(a)}{4!}(x-a)^4 + \frac{f^{(5)}(a)}{5!}(x-a)^5 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

Legyen $f(x) = e^{-x^2}$! Írjuk fel a harmad, negyed és ötöd rendű Taylor-polinomját a 0 hely környezetében!

Narratívum alkalmazása: Miért erre a függvényre esett a választás? Mert a „*Matematikai alapok 2*” tantárgyban, valószínűségszámításban, fontos szerepe lesz, ennek a függvénynek, melynek a grafikonja haranggörbe. „Hogyan szól a harang vagy csengő? Kling.”

A feladatot „Lúdas Matyi”- feladatnak is szoktuk nevezni: a deriválás jeléről a vesszőzésre asszociálva; gyakran mondjuk a deriválás helyett a „jól megvesszőzzük” kifejezést. A Taylor-polinomot legtöbbször a harmadfokú tagig szoktuk felírni, innen a „Lúdas Matyi” kifejezés: „Háromszor veri ezt kenden Lúdas Matyi vissza.” Mivel háromszor deriválunk, az három vesszőzést jelent.

Hagyományos analízisben tanult eszközökkel, táblázatos módszerrel tanítom. Séma: deriválok-helyettesítek, deriválok-helyettesítek, deriválok-helyettesítek.

Függvény	függvény algebrai alakja	helyettesítés	helyettesítés értéke
$f(x)$	e^{-x^2}	$f(0)$	1
$f'(x)$	$-2xe^{-x^2}$	$f'(0)$	0
$f''(x)$	$e^{-x^2}(4x^2 - 2)$	$f''(0)$	-2
$f'''(x)$	$e^{-x^2}(-8x^2 + 12x)$	$f'''(0)$	0
$f^{(4)}(x)$	$e^{-x^2}(16x^4 - 48x^2 + 12)$	$f^{(4)}(0)$	12
$f^{(5)}(x)$	$e^{-x^2}(-32x^5 + 100x^3 - 120x)$	$f^{(5)}(0)$	0

Definíció alapján: $T_5(x) = 1 - \frac{2}{2!}x^2 + \frac{12}{4!}x^4$

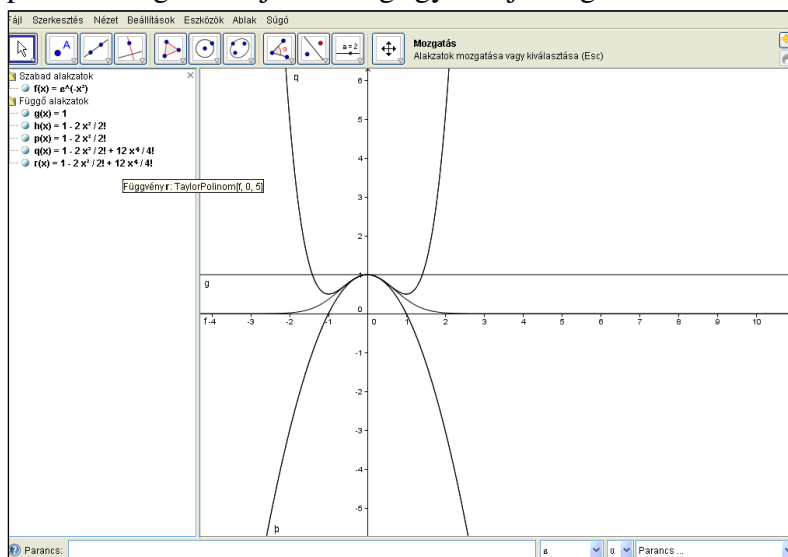
Hogyan ellenőrizhetjük GeoGebrával? Először a deriváltakat tekintjük át:

Szabad alakzatok $f(x) = e^A(-x^2)$ Függő alakzatok $f'(x) = -2x e^A(-x^2)$ $f''(x) = -2 e^A(-x^2) + 2x \cdot 2x e^A(-x^2)$ $f'''(x) = 4x e^A(-x^2) - (8x e^A(-x^2) + 4x^2 \cdot 2x e^A(-x^2))$ $f^{(4)}(x) = 4 e^A(-x^2) - 4x \cdot 2x e^A(-x^2) - (8 e^A(-x^2) + 8x \cdot 2x e^A(-x^2) + 8x^2 \cdot 2x e^A(-x^2))$ $f^{(5)}(x) = 8x e^A(-x^2) - (16x e^A(-x^2) - 8x^2 \cdot 2x e^A(-x^2)) - (16x e^A(-x^2) - (32x e^A(-x^2) + 16x^2 \cdot 2x e^A(-x^2)) - ((-16x - 32x) e^A(-x^2) - (8x^2 - 16x^2) \cdot 2x e^A(-x^2) - ((-16x^2 x + 2(-8x^2$
--

24. ábra

Látjuk, hogy nem egyszerűsített formában kapjuk meg a derivált függvényeket, az utolsó derivált függvény „képlete” ki sem fér az algebrai ablakban. A GeoGebra 3.0.0. verziójával készült algebrai ablakot láthatjuk.

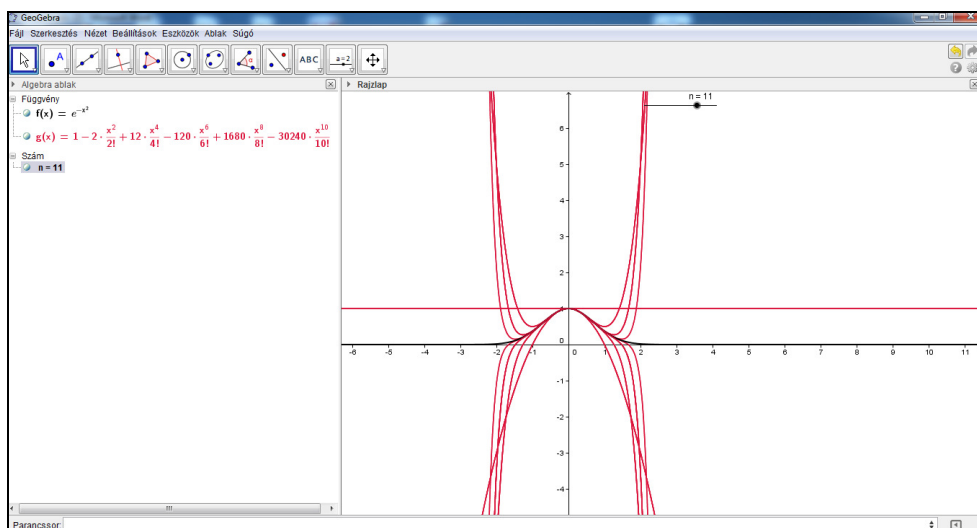
A polinom felírásához a „TaylorPolinom” parancsot kell választanunk a programból, az együtthatók értékei kiolvashatók az algebrai ablakból, a polinomok grafikonjait is megfigyelhetjük a grafikai ablakban.



25. ábra

Az algebrai ablakban jelennek meg a polinom együtthatói (25. ábra), amelyeket nem az egyszerűsített alakban ad meg a program. A grafikonokat szemlélve látjuk, hogy minél több tagot írunk fel a polinomból, annál jobban megközelíti a 0 hely környékén az eredeti függvényt. Kihasználva a Geogebra dinamikusan rendszerét, csúszka használatával, több Taylor-polinomot is kirajzoltathatunk, minél magasabb fokszámú Taylor-polinomot rajzoltatunk ki, annál jobban megközelíti az adott hely környékén a függvényt. Ha használjuk a „nyomvonal” parancsot a megjelenítésnél, egész Taylor-polinom-sereget kapunk (25. ábra), a csúszkával interaktívvá válik az ábrázolás. Megjelenik a játék öröme matematika órán, sikerélményhez jutnak a diákok.

A következő 26. ábra a GeoGebra 4.2. verzióval készült, bal oldalán a grafikai ablakkal, amelyben a Taylor-polinom együtthatóit már nem lineáris formában, hanem a matematikában szokásos tört alakban láthatjuk.

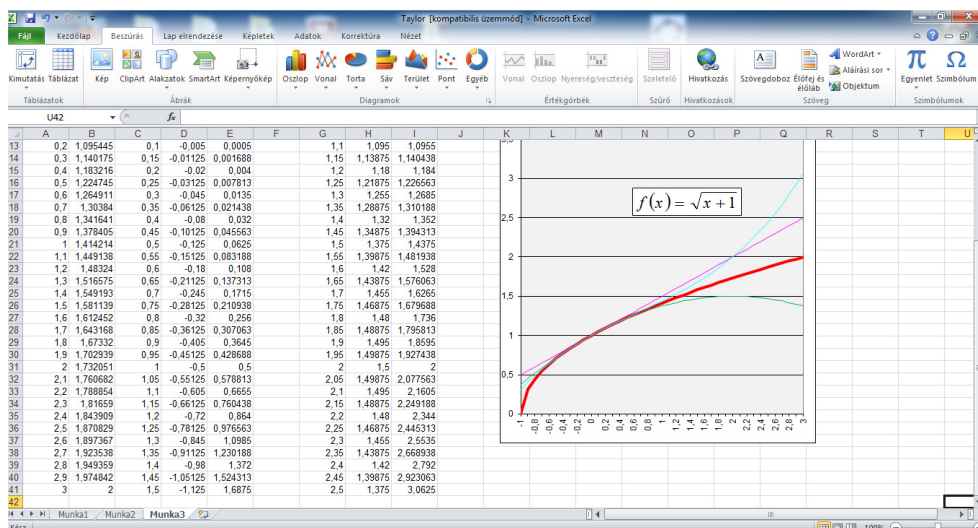


26. ábra

Narratívum: Most már csak arra a kérdésre kell válaszolnunk, hogy miért illik ismerni a Taylor-polinomot? Erre azt a minden napi példát szoktam ismertetni, hogy közelítésre használjuk. Elgondolkodtak-e már azon, hogy a zsebszámológépük hogyan számolja ki a szögfüggvények, irracionális számok értékeit? A gépben integrált áramkörök vannak. Amikor én egyetemista voltam, „Elektronika gyakorlaton” összeadó áramköröket állítottunk össze. Na, mármost, ha végig gondoljuk, hogy a szorzás több ugyanakkora tag összeadására vezethető vissza, a hatványozás pedig az azonos nagyságú tényezők szorzataira, akkor ilyen módon az összeadásra tudjuk visszavezetni a közelítést. Tehát a számítógépek, zsebszámológépek is a Taylor-polinomos közelítés alapján számolhatják ki a racionális számokat, a szögfüggvények értékeit. Csak gyorsabban számolnak, mint mi.

A GeoGebra megismerése előtt Excelben is rajzoltunk Taylor polinomot a definíció alapján. Időben sok ráfordítást igényelt és csak a hely környezetében tudtuk kirajzolni mind a függvényt, mind a közelítő polinomot, így felváltotta a csak GeoGebrával történő szemléltetés.

A 27. ábrán az Excelben megrajzolt Taylor-polinomos közelítést látjuk.



27. ábra

5.5. Az integrálszámítás tanítása a felsőfokú szakképzésben

Az első tanítási órán mindig megkérdezem tanítványaimat, hogy melyik intézményben érettségiztek, melyik településről származnak, így közvetlen hangnemmel feltérképezem kultúrájukat. Többéves tanítási tapasztalataim alapján a feladatokhoz „hívószavakat”, történeteket rendelünk, így alkalmazzuk a narratívumokat az anyag elsajátíttatásában.

A 2010/2011-es tanév tavaszi szemeszterének során lehetőségünk adódott számítógépes órák bevonására. Így bekerült a tananyagba sorozatok vizsgálata, határértékek meghatározása, küszöbindex keresés, Excel segítségével. Az integrálszámítás tanuláshoz a GeoGebra 3.0.0.0. programot használtuk. A tanórákon egyaránt alkalmaztuk a frontális osztálymunkát, differenciálást is, csoportmunka kialakítására is volt lehetőség. A csoportom 25 hallgatója vett részt a felmérésben, mivel számítógépes teremben voltak az órák, mindenki rendelkezett számítógéppel. Az órai anyagot mindig feltettük a Coospace-re, hogy otthon áttanulmányozhassák a megoldott feladatokat. Felmérésem arra irányult, hogy a hagyományos módszert összehasonlítsam a GeoGebrával történő megoldással. A számonkérés

először papír alapú volt, majd ugyanazokat a feladatokat kellett megoldaniuk GeoGebra használatával.

A feladatok a következők voltak:

1. Végezze el a következő integrálásokat!

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \int \left(x^2 - \frac{3}{x} + 7 \right) dx & \text{b) } \int \left(\frac{2x + 4\sqrt{x} - 5}{x} \right) dx & \text{c) } \int \frac{2x^5 - 5^{-x}}{x^5 \cdot 5^{-x}} dx \\ \text{e) } \int (5x - 7)^2 dx & \text{f) } \int \sqrt{6x - 7} dx & \end{array}$$

A GeoGebra 3.0.0.0. verzióval a „b” és „c” feladatot nem tudták megoldani a diákok. Alább az új, 4.2.0. verzió már tudja kezelni ezeket a feladatokat is, elegendő az algebrai ablakot használni. Láthatjuk, hogy az új írásmód mellőzi a negatív kitevő használatát, a lineáris írásmódot felváltja a tört alakban megadott eredmény. Ezzel viszont elveszik az a funkció, amiért ellenőrzésre jól tudták használni a programot. A „b” feladatot két alakban is megoldottuk, hogy az ellenőrzést megkönnyítsük.

A gyökfüggvény integrálása is bonyolultabb alakot ölt az új számolással. Az algebrai átalakításokban nagy jártassággal kell rendelkezniük, a GeoGebra új verziójával kapott megoldások és a saját eredményük összehasonlításának elvégzéséhez.

Algebra ablak

Függvény

- $f(x) = x^2 - \frac{3}{x} + 7$
- $f_1(x) = 8^{3x-4}$
- $g(x) = -3 \ln(x) + \frac{1}{3} x^3 + 7x$
- $g_1(x) = \frac{\frac{1}{12288} \cdot 8^{3x}}{\ln(8)}$
- $h(x) = \frac{2x + 4\sqrt{x} - 5}{x}$
- $h_1(x) = (5x - 7)^2$
- $p(x) = 8\sqrt{x} - 5 \ln(x) + 2x$
- $p_1(x) = 8.33x^3 - 35x^2 + 49x$
- $q(x) = 2 + 4x^{-\frac{1}{2}} - \frac{5}{x}$
- $q_1(x) = \frac{2x^5 - 5^{-x}}{x^5 \cdot 5^{-x}}$
- $r(x) = 8\sqrt{x} - 5 \ln(x) + 2x$
- $r_1(x) = \frac{2 \cdot 5^x x^4 + \frac{1}{4} \ln(5)}{\ln(5) x^4}$
- $s(x) = \sqrt{6x - 7}$
- $t(x) = \frac{2}{3} \sqrt{x - \frac{7}{6}} \sqrt{6}x - \frac{7}{9} \sqrt{x - \frac{7}{6}} \sqrt{6}$

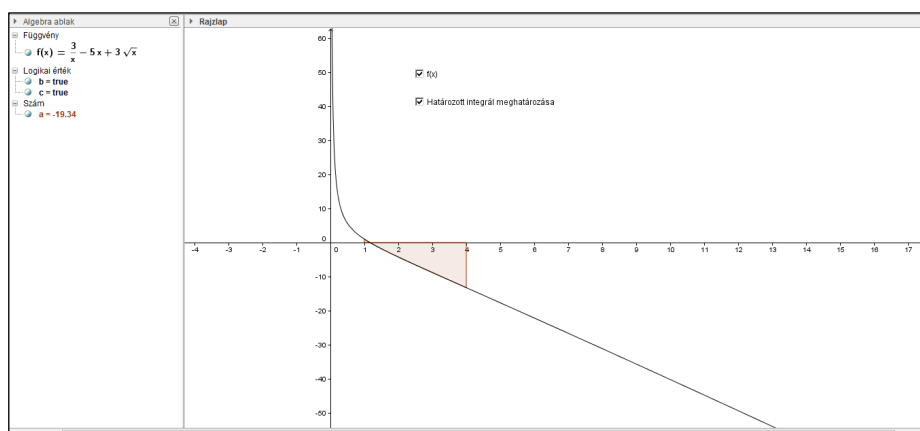
28. ábra

Az előző algebrai ablakban (28. ábra) az új, 4.2.0. verziójú feladatmegoldást láthatjuk.

2. Adja meg a következő integrál értékét!

$$\int_1^4 \left(\frac{3}{x} - 5x + 3\sqrt{x} \right) dx$$

Megoldás GeoGebrával:

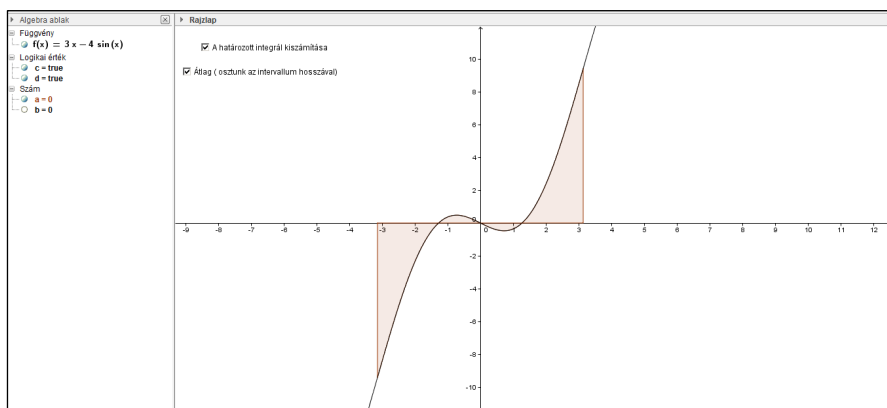


29. ábra

A GeoGebra súgója mindig megmutatja a felhasználónak, hogy az adott parancs argumentumába hogyan kell a változókat, értékeket megadni. Így, ha jól értelmezik az utasítást a definíció ismeretében a diákok helyesen oldják meg a feladatot.

3. Számítsa az $f(x) = 3x - 4\sin x$ függvény átlagát a $[-\pi; \pi]$ intervallumban!

Az átlagot a definíció ismeretében tudták helyesen meghatározni; ezt a parancssorba kellett begépelniük. Útmutatót kaptak a feladat megoldása során



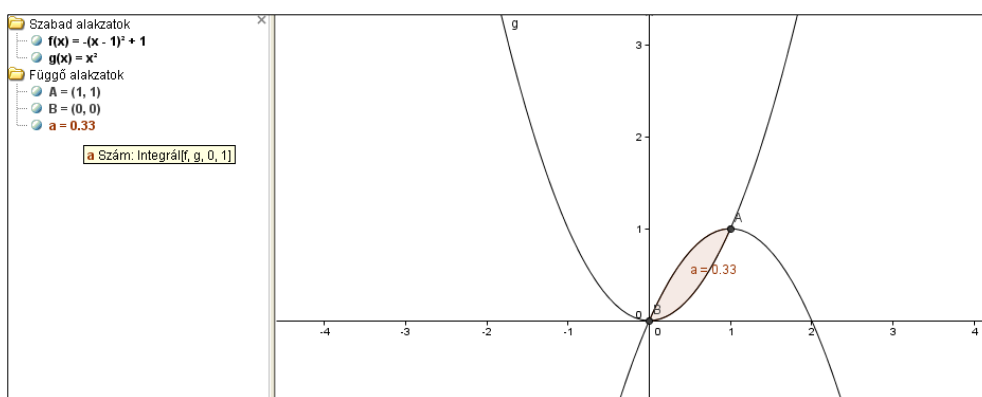
30. ábra

A megoldást az algebrai ablakból tudták leolvasni.

4. Ábrázolja a következő függvényeket, majd határozza meg a két függvénygörbe által közrezárt terület mértékszámát! A szükséges adatokat számítással határozza meg!

$$f(x) = -(x-1)^2 + 1 \text{ és } g(x) = x^2$$

A negyedik feladatban GeoGebrával is úgy kellett eljárni, hogy ábrázolni kellett a két függvényt, majd az „alakzatok metszéspontja” lenyíló „füllel” meghatározni az integrálási határokat és ezek után választani a határozott integrál alkalmazásaiból a függvénygörbék közötti terület meghatározása parancsot. Ezek után az algebrai és geometriai ablakban egyaránt megjelent a megoldandó feladat eredménye.

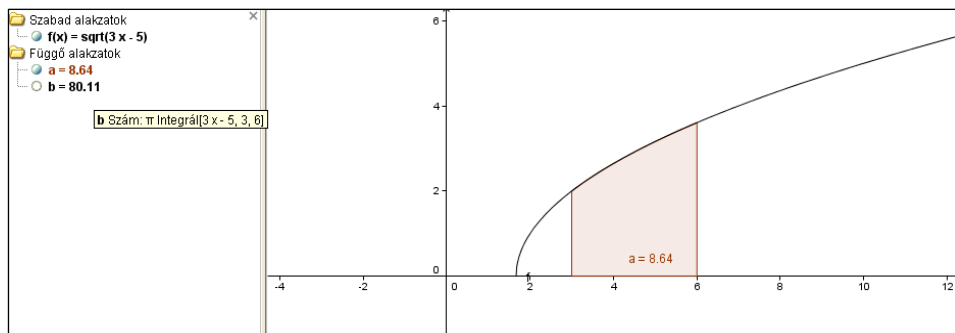


31. ábra

A hagyományos és GeoGebrás megoldás menete ugyanaz. A GeoGebrás megoldás a tér, mint kognitív kategória helyes megismerésén alapul, gondolunk itt arra, hogy „látniuk kell”, hogy melyik függvény van a másik felett, vagy azt, hogy hogyan tájékoznak a koordináta rendszerben.

5. Mekkora annak a forgástestnek a térfogata, amely az $f(x) = \sqrt{2x-5}$ függvény x tengely körüli megforgatásával keletkezik az $[3;6]$ intervallumon?

Az 5. feladatot szintén csak akkor oldotta meg a hallgató helyesen GeoGebra alkalmazással, ha tudta a térfogatszámítás képletét [39]. A helyes eredményt az algebrai ablakból tudta leolvasni, ahogy ezt az ábrán is láthatjuk.

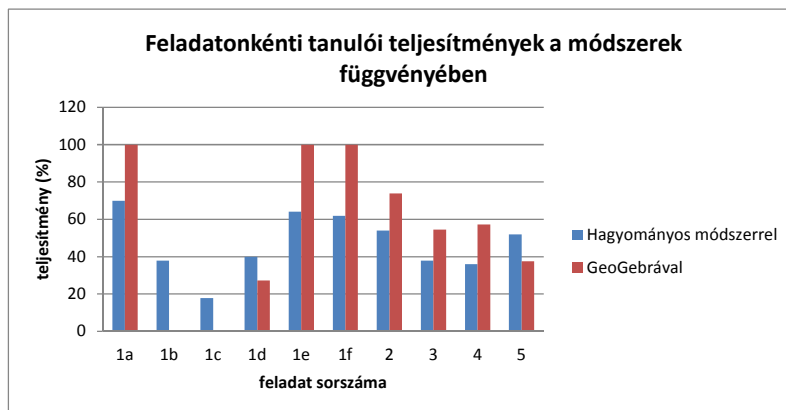


32. ábra

A két módszert összehasonlítva, elmondhatjuk, hogy a sikeres megoldások száma a GeoGebra programmal mintegy 4-5 %-kal magasabb.

Ez várható volt, a hallgatók szívesen használják a számítógépet feladatok megoldására. Tapasztalataink alapján, a nehezebb feladatok megoldásába is bátrabban belefognak és hatékonyabb a számítógépes feladatok megoldása, ha párban vagy kiscsoportosan dolgoznak.

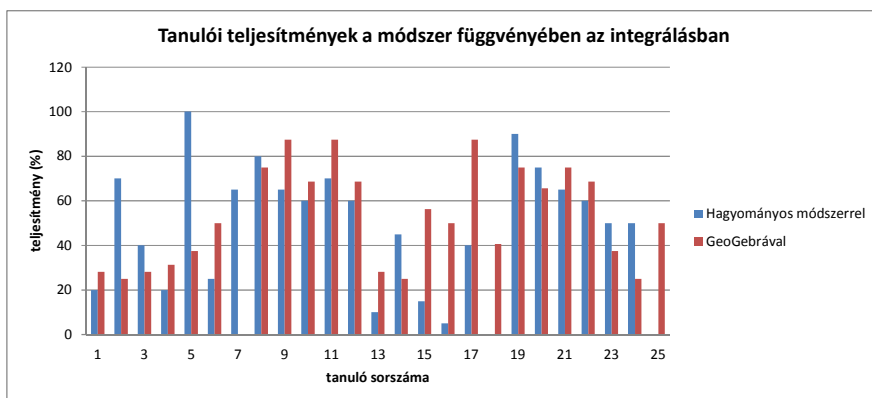
Érdekes összehasonlítani feladatonként is a jó megoldások teljesítményeit a kétféle módszer esetében. A negyvenharmadik ábra szerint hagyományos módszerrel nem volt olyan feladat, amelyet mindegyik diák hibátlanul oldott meg, míg GeoGebrával ilyen 3 is volt. Ugyanakkor, az 1b és 1c feladatokat GeoGebrával (régebbi verzió volt még) egyáltalán nem tudták megoldani, előtte algebrai átalakításokat kellett végezni, mely mutatja, hogy a szimbólumok használata még nem teljes, kreatív gondolkodás nem minden esetben fordul elő.



33. ábra

A GeoGebra használata a szimbolikus síkon való jártasságot feltételezi a tanulótól, mert van olyan eset a lineáris írásmód miatt, hogy a helyes

eredmény ellenőrzéséhez szintén az algebrai átalakítások után jut csak el a felhasználó. A parancsok helyes alkalmazásához egyaránt jól kell tudni boldogulni a tér és idő kognitív kategóriákkal, azaz a koordináta-rendszerben való tájékozódás, valamint az alatt-felett határozószók helyes alkalmazásával. Megjelenik az időbeliség is, a negyedik feladat megoldása akkor sikeres csak, ha megfelelő sorrendben végzik el a parancsokat.



34. ábra

Az ábra szerint a 25 tanuló között 10 olyan van, aki a hagyományos módszerrel magasabb eredményt ért el, megfigyelhetjük, hogy ezek a jobb képességű tanulókból (a jobb képességűeket az alapján tudjuk azonosítani, hogy a hagyományos módszerrel magasabb teljesítményt értek el; az ábrán az egyes tanulók csak sorszámmal jelennek meg) kerültek ki, míg a gyengébb képességűeknek a GeoGebra programmal való megoldás ment jobban. Ebből következtethetünk arra, hogy a kreatív gondolkodást a számítógép esetenként akadályozza. A gyengébb képességű tanulók jobban szeretik a gondolkodást kevésbé igénylő feladatokat, ez azt jelenti, hogy náluk a „konkrét cselekvések” kognitív kategória a domináns, ők a típus feladatokat GeoGebra alkalmazással nagyobb arányban oldják meg sikeresen. Ez is indokolja a számítógép ezen a szinten történő bevonását az oktatás folyamatába. A jobb képességűek a feladatok számítógéppel történő megoldása közben kifejtették, hogy ők nem szívesen dolgoznak komputerrel, mert hagyományosan is jól tudják megoldani a feladatokat.

Pozitívumok és negatívumok egyaránt szólnak a számítógépes módszerek mellett illetve ellen. A helyes utat az egyén ismerete, kultúrája erősen befolyásolja. Ennek ismeretében kell döntenünk a megfelelő módszer mellett.

5.6. Folytonos valószínűségi változó tanítása

A „Matematikai alapok 2” tantárgyban Valószínűségszámítást és lineáris algebrát tanítunk hallgatóinknak, melynek szerves részét képezi a folytonos valószínűségi változó. Oktatási tapasztalataink szerint a zárthelyi dolgozatokban és a vizsgán is a folytonos valószínűségi változóval kapcsolatos feladatokat oldják meg legkevésbé.

A 2012/2013-as tanévben ennek javítását tűztük ki célul. Ehhez a Maple Corporation TA termékét használtuk a hagyományos módszer mellett.

5.6.1. Folytonos valószínűségi változóval kapcsolatos alapgfogalmak és feladatok a „Matematikai alapok 2” tantárgyban

Valamely kísérlethez tartozó H eseménytér minden lehetséges h eseményéhez egyértelműen rendeljünk hozzá egy $\xi(h)$ valós számot, ezáltal egy ξ függvényt értelmeztünk, amelynek a függvényértékei valós számok. Az így értelmezett ξ függvényt valószínűségi változónak nevezzük.

A folytonos valószínűségi változót (amelynek értékei mindig végtelen halmazt alkotnak és egy intervallumot véges számú pont kivételével folytonosan kitöltenek) az eloszlásfüggvénnyel definiáljuk.

Egy kísérlethez tartozó ξ valószínűségi változó eloszlásfüggvénye az F függvény, ha minden $x \in \mathbb{R}$ esetén: $F(x) = P(\xi < x)$. (Itt $\xi < x$ jelöli a h események halmazát, amelyekre $\xi(h) < x$ teljesül.)

A ξ valószínűségi változót folytonosnak nevezzük, ha van olyan véges számú pont kivételével folytonos f függvény, amelyre $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$.

Folytonos valószínűségi változó eloszlásfüggvénye tehát folytonos és véges sok pont kivételével differenciálható.

Az eloszlásfüggvény tulajdonságai:

1. Ha a ξ valószínűségi változó eloszlásfüggvénye $F(x)$, akkor a ξ a és b határok közé esésének valószínűsége az eloszlásfüggvénnyel kiszámolható: $P(a \leq \xi < b) = F(b) - F(a)$, ahol $a < b$.
2. Az $F(x)$ eloszlásfüggvény monoton növekvő.
3. $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$ és $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1$
4. Minden eloszlásfüggvény balról folytonos, azaz tetszőleges „ a ” helyen: $F(a) = \lim_{x \rightarrow a-0} F(x)$.

5. Ha az eloszlásfüggvény az x_0 helyen folytonos, akkor $P(\xi = x_0) = 0$.

[17]

Ha a ξ valószínűségi változó eloszlásfüggvénye F , akkor a F függvény deriváltját ξ sűrűségfüggvénynek nevezzük. $f : f(x) = F'(x)$. f véges számú pont kivételével értelmezett és folytonos R -en.

Következésképpen a sűrűségfüggvényből az eloszlásfüggvényt integrálással

kapjuk: $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt$, ahol az eloszlásfüggvény, mint a felső határ

függvénye jelenik meg.

A sűrűségfüggvény jellemzőit az eloszlásfüggvény tulajdonságaiból kapjuk:

1. $f(x) \geq 0$, $x \in D_f$.

2. A sűrűségfüggvény grafikonja alatti terület mindig 1: $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$

3. A ξ valószínűségi változó az a és b határok közé esésének valószínűsége a sűrűségfüggvénnyel is számolható:

$$P(a \leq \xi < b) = \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \text{ (Newton-Leibniz- formulával)}$$

A ξ folytonos valószínűségi változó várható értékét és szórásnégyzetét a sűrűségfüggvénnyel az alábbiak szerint határozhatjuk meg:

$$M(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)dx \text{ illetve } D^2(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f(x)dx - M^2(\xi).$$

Nevezetes folytonos eloszlások:

1. Egyenletes eloszlású a ξ valószínűségi változó, ha

$$\text{sűrűségfüggvénye: } f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a < x < b \\ 0, & \text{egyébként} \end{cases}$$

$$\text{Eloszlásfüggvénye: } F(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \leq a, \\ \frac{x-a}{b-a}, & \text{ha } a < x \leq b, \\ 1, & \text{ha } x > b. \end{cases}$$

$$\text{Várható értéke, szórása: } M(\xi) = \frac{a+b}{2}, \quad D(\xi) = \frac{b-a}{2\sqrt{3}}$$

2. Exponenciális eloszlású a ξ valószínűségi változó, ha

$$\text{sűrűségfüggvénye: } f(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x < 0, \\ \lambda e^{-\lambda x}, & \text{ha } 0 \leq x, \end{cases} \text{ ahol } \lambda \text{ az eloszlás}$$

paramétere.

Eloszlásfüggvénye: $F(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x < 0, \\ 1 - e^{-\lambda x}, & \text{ha } 0 \leq x, \end{cases}$

Várható értéke és szórása: $M(\xi) = \frac{1}{\lambda} \quad D(\xi) = \frac{1}{\lambda^2}$

3. Normális eloszlású a ξ valószínűségi változó, ha sűrűségfüggvénye:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} \quad (x \in R), \text{ ahol } m \text{ tetszőleges valós szám, } 0 < \sigma.$$

Jellegzetes képe Gauss-görbe. Eloszlásfüggvénye:

$$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}} dt, \text{ melyben az integrál elemi függvényekkel}$$

nem fejezhető ki, értékeit táblázatból keressük ki, miután visszavezettük a függvényt a standard normális eloszlásra.

A normális eloszlás várható értéke $M(\xi) = m$, szórása $D(\xi) = \sigma$. [17]

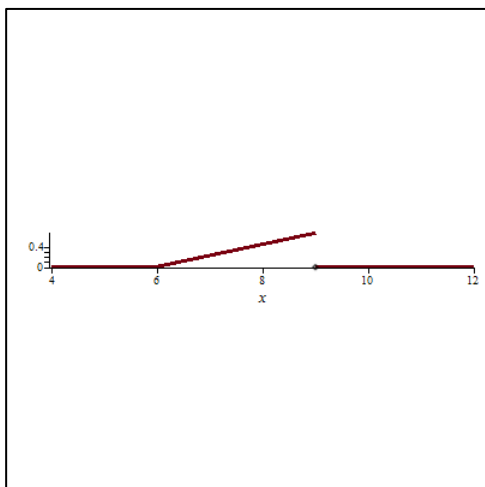
Az elméleti alapok összefoglalása után gyakorlati feladatokat oldunk meg a szemináriumokon. Coospace-re kidolgozott feladatok kerültek fel, illetve további gyakorlásra szánt feladatok tűztünk ki hallgatóinknak.

Az alábbiakban néhány típust sorolunk fel megoldásukkal együtt a leggyakrabban előforduló problémák közül:

FVV1. Ellenőrizze, hogy lehet-e folytonos valószínűségi változó sűrűség függvénye a

$$\text{következő } f(x) = \begin{cases} \frac{2}{9}x - \frac{4}{3}, & \text{ha } 6 < x < 9 \text{ függvény!} \\ 0, & \text{különben} \end{cases}$$

Megoldás:



A függvény grafikonjának megrajzolásából láthatjuk, hogy $f(x) \geq 0$.

A sűrűség függvény tulajdonságai szerint

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1 \text{ kellene, hogy teljesüljön:}$$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx &= \int_{-\infty}^6 0 dx + \int_6^9 \left(\frac{2}{9}x - \frac{4}{3} \right) dx + \int_9^{\infty} 0 dx = \\ &= \left[\frac{2}{9} \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{4}{3}x \right]_6^9 = -3 - (-4) = 1 \end{aligned}$$

35. ábra

$f(x)$ lehet sűrűség függvény.

FVV2. Lehet-e folytonos valószínűségi változó sűrűség függvénye a következő utasítással adott függvény?

$$f(x) = \begin{cases} 5x - 2, & \text{ha } 2 < x < 4 \\ 0, & \text{egyébként} \end{cases}$$

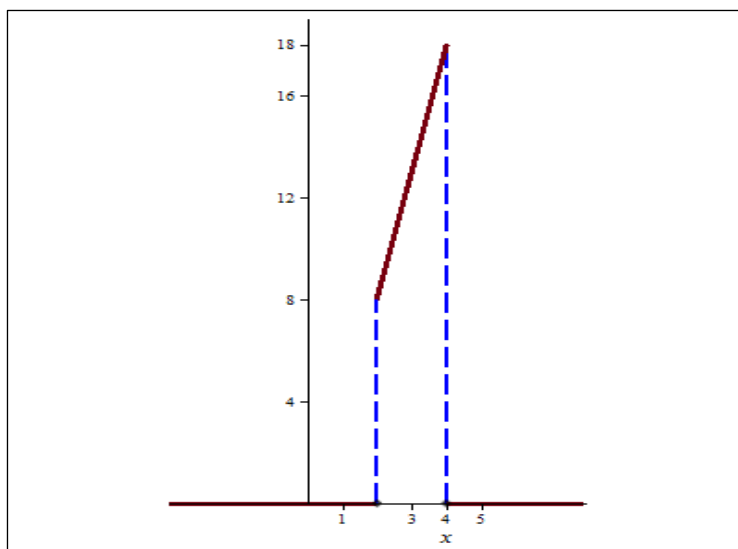
Megoldás:

A sűrűség függvény tulajdonságai szerint $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$ kellene, hogy teljesüljön, de:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_2^4 (5x - 2) dx = \left[5 \cdot \frac{x^2}{2} - 2x \right]_2^4 = \left(5 \cdot \frac{4^2}{2} - 2 \cdot 4 \right) - \left(5 \cdot \frac{2^2}{2} - 2 \cdot 2 \right) = 26 \neq 1$$

$\Rightarrow$ nem sűrűség függvény.

Más módszerrel: Abban a szerencsés helyzetben vagyunk, hogy az adott függvény lineáris szakaszokból épül fel, így geometriai ismereteinkkel is könnyen meghatározhatjuk a függvény görbéje alatti területet.



36. ábra

A függvénygörbe alatti területet a trapéz területének meghatározásával kaphatjuk, melynek

alapjai 8 és 18 egység, magassága 2, így: $T = \frac{8+18}{2} \cdot 2 = 26$

Tehát az $f(x)$ függvény nem lehet folytonos valószínűségi változó sűrűség függvénye.

FVV3. Határozzuk meg az a paraméter lehetséges értékét, hogy az alábbi $f(x)$ függvény folytonos valószínűségi változó sűrűség függvénye legyen!

$$f(x) = \begin{cases} ax - 3, & \text{ha } 4 < x < 6 \\ 0, & \text{különben} \end{cases}$$

Megoldás:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_4^6 (ax-3) dx = \left[a \cdot \frac{x^2}{2} - 3x \right]_4^6 = \left(a \cdot \frac{6^2}{2} - 3 \cdot 6 \right) - \left(a \cdot \frac{4^2}{2} - 3 \cdot 4 \right) =$$

$$= 18a - 18 - 8a + 12 = 10a - 6 = 1$$

Kell, hogy teljesüljön, de $10a - 6 = 1 \Leftrightarrow a = \frac{7}{10}$

Mivel a sűrűségfüggvény nem lehet negatív(!!!!), ezt még meg kell vizsgálni:

$f(4) = \frac{7}{10} \cdot 4 - 3 = -\frac{2}{10}$, ezért a fenti paraméter érték mellett nem lehet sűrűség-függvény az $f(x)$. Nincs olyan valós szám, amely értéket az a paraméternek adva, a fenti $f(x)$ függvény sűrűségfüggvény lenne a megadott intervallumon.

FVV4. Egy folytonos valószínűségi változó a következő eloszlás függvényével van megadva:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x < 2 \\ (x-2)^3, & \text{ha } 2 \leq x \leq 3 \\ 1, & \text{ha } 3 < x \end{cases}$$

Adjuk meg a sűrűségfüggvényt! Adjuk meg a következő valószínűségeket!

$$P\left(\xi \geq 2\frac{3}{4}\right) \quad P\left(\xi < \frac{5}{2}\right)$$

Megoldás:

$$f(x) = F'(x) \Rightarrow F'(x) = ((x-2)^3)' = 3(x-2)^2 \Rightarrow f(x) = \begin{cases} 3(x-2)^2, & \text{ha } 2 \leq x \leq 3 \\ 0, & \text{egyébként} \end{cases}$$

Valószínűségek meghatározása:

$$P\left(\xi \geq 2\frac{3}{4}\right) = P\left(\xi \geq \frac{11}{4}\right) = 1 - P\left(\xi < \frac{11}{4}\right) = 1 - F\left(\frac{11}{4}\right) = 1 - \left(\frac{11}{4} - 2\right)^3 = 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^3 = 1 - \frac{27}{64} = \frac{37}{64}$$

$$P\left(\xi < \frac{5}{2}\right) = F\left(\frac{5}{2}\right) = \left(\frac{5}{2} - 2\right)^3 = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$$

FVV5. Adja meg a b paraméter értékét, hogy a megadott $f(x) = \begin{cases} \frac{2}{(x-1)^2}, & \text{ha } 2 \leq x \leq b \\ 0, & \text{egyébként} \end{cases}$

függvény sűrűség függvény legyen!

Ábrázolja az eloszlás függvényt, majd adja meg a következő valószínűségeket!

$$P(\xi \geq 2,5), \quad P(\xi < 2,7), \quad P(2,5 < \xi < 2,7)$$

Számoljunk várható értéket!

Megoldás:

Nyilván $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in R$.

$$\int_2^b \frac{2}{(x-1)^2} dx = \int_2^b 2(x-1)^{-2} dx = \left[2 \cdot \frac{(x-1)^{-1}}{-1} \right]_2^b = \left(-\frac{2}{b-1} \right) + 2 \Rightarrow \left(-\frac{2}{b-1} \right) + 2 = 1 \Rightarrow b = 3$$

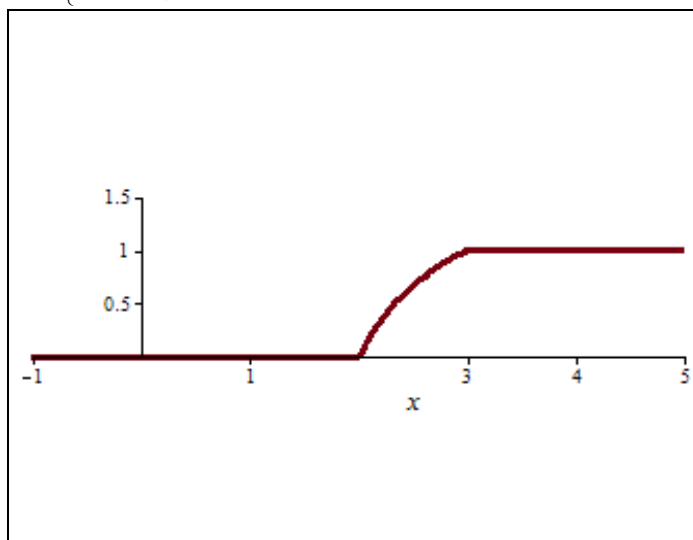
Az eloszlás függvény meghatározása:

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(x) dx = \int_{-\infty}^2 0 dx = 0, \text{ ha } x < 2.$$

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(x) dx = \int_{-\infty}^2 0 dx + \int_2^x \frac{2}{(x-1)^2} dx = \left[2 \cdot \frac{(x-1)^{-1}}{-1} \right]_2^x = -\frac{2}{x-1} + 2, \text{ ha } x \in [2;3]$$

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(x) dx = \int_{-\infty}^2 0 dx + \int_2^3 \frac{2}{(x-1)^2} dx + \int_3^{\infty} 0 dx = \left[2 \cdot \frac{(x-1)^{-1}}{-1} \right]_2^3 = -\frac{2}{3-1} - \left(-\frac{2}{2-1} \right) = -1 + 2 = 1,$$

$$\text{ha } x > 3, \text{ így } F(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x < 2 \\ -\frac{2}{x-1} + 2, & \text{ha } 2 \leq x \leq 3 \\ 1, & \text{ha } 3 < x \end{cases}$$



37. ábra

A valószínűségek meghatározása:

$$P(\xi < 2,7) = F(2,7) = -\frac{2}{2,7-1} + 2 = 0,8235$$

$$P(\xi \geq 2,5) = 1 - P(\xi < 2,5) = 1 - F(2,5) = 1 - \left(-\frac{2}{2,5-1} + 2 \right) = 0,3333$$

$$P(2,5 < \xi < 2,7) = F(2,7) - F(2,5) = 0,8235 - 0,3333 = 0,4902$$

A fenti öt feladat típus valamelyike vagy zárthelyi dolgozatban, vagy vizsgafeladatként mindig előfordul.

A FVV2 típusú feladatot azért is szeretnénk kiemelni, mert a Maple TA-ban is készítettünk ilyen gyakorló feladatot.

5.6.2. Kérdésszerkesztés a Maple TA-ban

Az FVV2 vagy FVV3 típusfeladat zárthelyi dolgozatban és vizsga feladatsorban szinte minden alkalommal előfordul. Hallgatóink többsége hiányosan, hibásan vagy egyáltalán nem oldja meg ezt a típust. Ezért is esett a választás a probléma Maple TA-ba történő kitűzésére.

A Maple TA nagy erőssége, hogy egy feladatból változók és véletlen generálással előállított paraméterekkel akár 100 feladatot is előállíthatunk. A már meglévő kérdésbankokban kutatva nem találtam valószínűségi számítással kapcsolatos feladatokat, így nekünk kellett kitalálni a témakörhöz illeszkedő kérdéseket.

A tesztfeladatok készítésekor más didaktikai szempontok szerint kell gondolkodnunk, mint a hagyományos úton. Diákjaink többsége hozzászózott, hogy kérdőíves felmérésekkor csak kattintania kell, ha kiválasztotta az általa helyesnek ítélt választ. Így a kísérlet során végig kellett gondolni, hogy milyen típusú feladatokat adhatunk, amelyek megoldása viszonylag kevés időt igényel, de mégis méri az adott tananyag elsajátítását.

A már említett FVV3 feladat a nehezek közé tartozott. Általánosítása a Maple TA számára:

Határozzuk meg a c paraméter lehetséges értékét, hogy az

$$f(x) = \begin{cases} cx - d, & \text{ha } a < x < b \\ 0, & \text{különben} \end{cases} \text{ függvény folytonos valószínűségi változó sűrűség}$$

függvénye legyen!

Négy paraméter is szerepel a feladatban, amelyekből három, az a, b és d véletlenszám generálással áll elő, míg a c -t kell meghatározni a diáknak. Az integrálási határokat jelentő a és b paraméterek értelmezési tartományára olyan egész számokat tartalmazó halmazokat adtunk meg, melyek metszete üres, és az a paraméter értelmezési tartománya halmazának minden eleme kisebb a b értelmezési tartományának elemeinél. A megoldás egyik kulcsa a sűrűségfüggvény azon tulajdonsága, hogy f improprius integrálja a $-\infty$ -tól a $+\infty$ -ig 1. E tulajdonság felhasználásával kapunk c -re egy kiszámítási sémát:

$$c = \frac{[1 - \$d \cdot (\$b - \$a) \cdot 2]}{(\$b)^2 - (\$a)^2}. \quad (\text{Az algoritmikus változók neve Maple TA-ban \$}$$

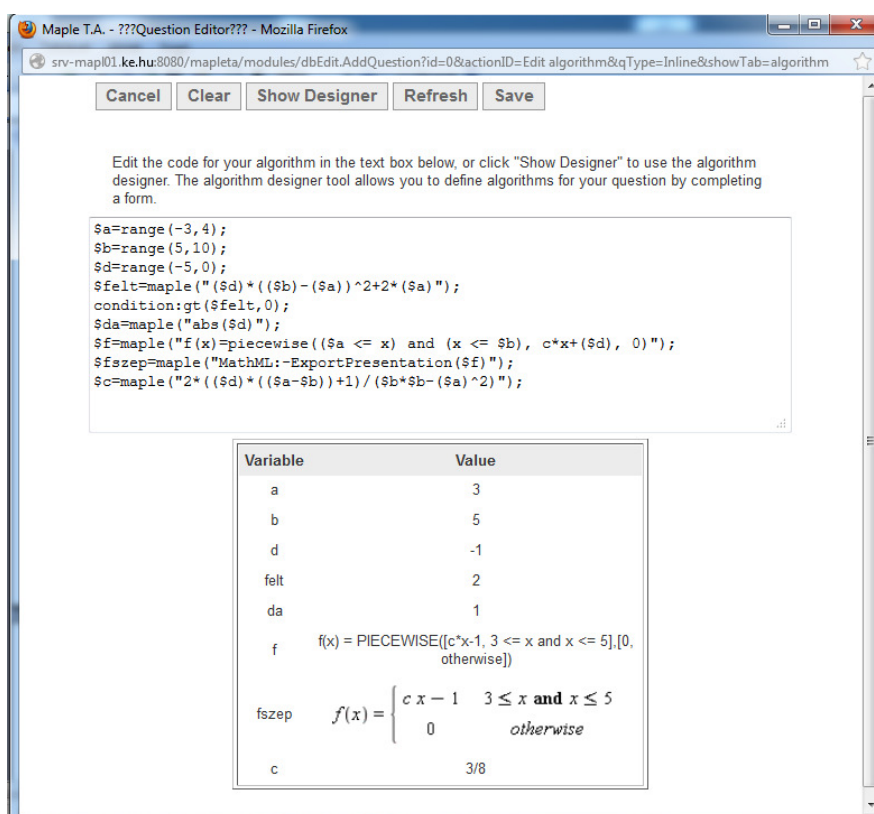
karakterrel kezdődik.) Sokszor a diákok is csak erre a feltételre koncentrálnak, elvégzik az integrálást, felírják az egyenletet és ellenőrzés nélkül elfogadják az eredményt. Először mi is elkövettük ezt a hibát, de aztán a ráépülő feladatban, amikor szórásnégyzetet kellett számolni negatív számot kaptunk, ami figyelmeztetett a hibára. Így plusz feltételt kellett beiktatni a paraméterekre, hogy a sűrűségfüggvény nem-negatív értékű legyen.

Ezek után a feladat algoritmus:

```

$a=range(-3,4);
$b=range(5,10);
$d=range(-5,0);
$felt=maple("($d)*(($b)-($a))^2+2*($a)");
condition:gt($felt,0);
$da=maple("abs($d)");
$f=maple("f(x)=piecewise(($a <= x) and (x <= $b), c*x+($d), 0)");
$fszep=maple("MathML:-ExportPresentation($f)");
$c=maple("2*($d)*(($a-$b))+1)/($b*$b-($a)^2)");

```



38. ábra

A 38. ábrán láthatjuk a kérdésszerkesztő ablakát az algoritmussal és a kiszámolt c értékkel.

Tanulóinknak még mindig nem sikerült jól megoldani a feladatot, így úgynevezett Hint-eket, útmutatókat illesztettünk be (39. ábra). Ezek után születtek jó megoldások.

Hints
Edit

Hint 1:

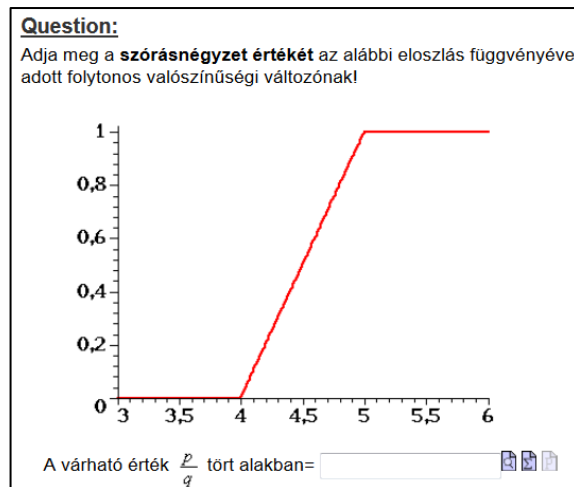
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$$

Hint 2:

$$\int a \cdot x + b dx = a \cdot \frac{x^2}{2} + b \cdot x + c$$

39. ábra

Az alábbi kérdés (40. ábra) például nem nehéz, de az elméletet kell alkalmazni a megoldáshoz.



40. ábra

Volt olyan hallgató, akit a facebook chat-en vezettem végig a megoldáson (T = tanár, D = diák):

T: Melyik eloszlásnak ilyen az eloszlás függvénye? Ha ez meg van, hogyan számoljuk a szórásnégyzetét?

D: Egyenletes eloszlás?

T: Igen!!! Egyenletesnél hogy számolod a szórásnégyzetet? Rajta van a képlettáron is.

D: $D^2 = (b-a)^2 / 12$

T: Gyök nélkül, csak /12

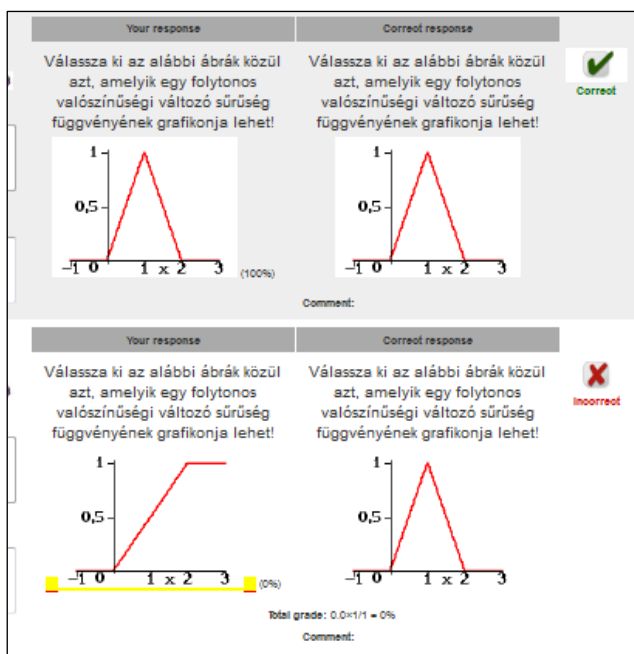
D: Igen-igen a gyök nem kell

T: Olvasd le mennyi a b és a és számolj. Jónak kell lenni.

D: Most jó.

A kérdésekből Assignments-eket, feladatlapokat állítottunk össze. A kérdéseket jelöltük csak ki, megengedve azok permutálását is. A feladatlap megoldása után mindjárt visszajelzést kap a hallgató a jó és az esetleges hibás megoldásairól.

A Gradebook-ban az oktató láthatja a feladatlapok megoldásairól a statisztikákat, hányszor oldotta meg a feladatlapot, sőt azt is, hogy az adott tanuló a kérdéses feladatra mit választott.



41. ábra

Sajnos a 2012/2013-as tanévben a Kereskedelem és marketinges csoportomban csak 15 hallgató volt, őket vontam be a Maple TA-val végzett kísérletbe, a csoportból 8 tanuló vállalta, hogy gyakorolja a feladatmegoldást a TA-ban. A 2. zárthelyi dolgozat megírása után a következőket mondhatjuk el az eredményeiről:

3 tanuló egy jeggyel jobbat írt, mint az előző dolgozata, 4 tanuló ugyanolyat, 1 tanuló rosszabbat.

Kiderült, hogy az a 3 diák, aki a jobbat írta, rendszeresen heti 3-4 alkalommal gyakorolt a TA-ban, a másik 4 néha-néha, 1 tanuló egyáltalán nem tudott belépni „nem engedte a gépe”. A jobb dolgozatot írók a vizsgán is elsőre átmentek, holott első félévben kétszer is pótvizsgáztak. Elmondásuk alapján segítette őket a Maple TA, szívesen tanultak a használatával.

A kis létszám ellenére hasznosnak és eredményesnek ítéljük meg a kísérletet. Jó együttműködési kapcsolat alakult ki a tanár és a diák között. A tanár tanulta a kérdésszerkesztést, a diák mindjárt visszajelzett a feladat kipróbálása során, így lehetett javítani a kérdéseken. A következő tanévben már az analízis alapjainak tanulásához is használhatjuk és kipróbálhatjuk vizsgaszituációban is a Maple TA-t.

6. ÖSSZEFOGLALÁS

A kutatásunk során vizsgáltuk, hogy a számítógépes módszerek bevezetése hatékonyabbá teszi-e az analízis fogalmainak és alkalmazási területeinek elsajátítását a tanítás-tanulás folyamatában.

Célul tűztük ki a tanulói hiányosságok feltérképezését, valamint megkeresni-megtalálni az oktatás folyamatában azt a legoptimálisabbnak vélt pontot, amikor a számítógép bevonása segítheti a tanulók készség szintjének emelését a feladatok megoldása során.

A kutatás részét képezte a kognitív pszichológiai nézetek megismerése a matematikai ismeretszerzés folyamatáról valamint a fogalomháló matematikai alapjainak megismerése. A kutatás során kérdőíves kikérdezéssel, megfigyeléssel vizsgáltuk az alkalmazott módszerek hatékonyságát.

A kutatás a következő kérdésekre kereste a választ:

1. Melyek azok a hiányosságok, amelyek az oktatás alsóbb szintjein alakultak ki? Tudjuk-e a felsőoktatásban felzárkóztatni ezeket a tanulókat?
2. Hatékonyan befolyásolja-e a számítógép használata az analízis tanulását? Helyettesítheti-e a hagyományos módszereket?
3. Változik-e a diákok hozzáállása a matematikához a számítógépes módszerek bevonásával?
4. Rendszeres tanulásra szoktathatjuk-e hallgatóinkat a számítógépes módszerek használatával?

A kérdésekhez tartozó hipotézisek a következők voltak:

- I. A felsőoktatásban is hatékonyak az oktatás alsóbb szintjein alkalmazott didaktikai módszerek.
- II. A kognitív pszichológiai vizsgálódás alapján definiáltunk univerzális kognitív kategóriákat, amelyeket a Bruner-féle reprezentációs szintekkel Galois-gráffal hierarchikus rendszerbe foglaltunk. A gráf alsóbb szintjein jelenik meg az a kategória, amely azt a fázist mutatja, amikor a számítógép bevonható a tanítás-tanulás folyamatába.
- III. A számítógépes rendszerek fejlesztik a szimbolikus síkon való jártasságot, összekapcsolják a materiális, ikonikus és szimbolikus reprezentációs szinteket, ezzel hatékonyabbá teszik a matematikai ismeretszerzés folyamatát.
- IV. Pozitív irányban változnak a tanulói attitűdök a matematika tanulása során.
- V. A matematikában gyengébb jártasságot mutató tanulók teljesítményén javítanak a számítógéppel elvégezhető feladatok, míg a jó képességeket helyenként gátolja a teljesítésben.

VI. Az analízis és alkalmazásaiban nem egyforma hatékonyságúak a tanult szoftverek, illetve a tanulók az adott feladattípushoz más-más számítógép algebrai rendszert preferálnak.

Az 1. kérdés és az I. hipotézis:

Hallgatóink körében végzett többéves szintfelmérők eredményei alapján elmondhatjuk, hogy az egyenlőtlenségek megoldása, a paraméteres feladatok megoldása mutatja a legalacsonyabb 10-12% körüli a teljesítményt. A függvényábrázolás, függvénytulajdonságok alapos ismerete is elmarad a várttól, 30% körüli a diákok teljesítménye. Hazai reprezentatív mérések is igazolják (Műszaki Egyetem, BGF) az egyenlőtlenségek megoldási folyamatának sérülését. Azokban a feladatokban, amelyekben a „*tér*”, mint univerzális kognitív kategória megjelenik szintén alacsonyabb a hallgatói teljesítmény.

Intézményünkben a „Számítógépes matematika módszertan” tantárgy keretében újra átismételtük tematikusan a megoldási stratégiákat az egyenlőtlenségek vonatkozásában (M1 melléklet), minimálisra csökkent a lemorzsolódás.

Az oktatás alsóbb szintjein alkalmazott módszerekkel jelentősen nőtt a kifejezések előjelének, sorozatok monotonitásának vizsgálata tekintetében a sikeres megoldások száma.

Elfogadhatjuk a hipotézist.

Azon hallgatók esetében nem számolhatunk be sikeres teljesítésről, akik nem jártak rendszeresen az órákra.

A tanítási órák megtervezésénél a hármas tagolódást (folyamatos gyakorlás-új anyag feldolgozása-összefoglalás, rendszerezés) alkalmaztuk, kiemelten az első részben a folyamatos gyakorlásra koncentráltunk.

A 2. kérdés és a II. és III. hipotézis:

A kérdésre a hallgatók is megadták a választ, a számítógép nem helyettesítheti az elméleti alapok elsajátítását. Jó problémaválasztással, számítógépes megoldás folyamatában a tanult fogalmak megértése előtérbe kerülhet, így hatékonyabb a fogalom elsajátítása.

A definiált univerzális kognitív kategóriák viszonylatában vizsgáltuk a függvényjellemzés folyamatát, gazdasági feladat megoldását, sorozatok vizsgálatát és a folytonos valószínűségi változóval kapcsolatos feladatmegoldást. A kategóriák, mint objektumok jelentek meg a megrajzolt Galois-gráfokban, mint hierarchikus rendszerben. A „*cselekvést kifejező*” kategória az, amely a számítógép alkalmazására utalhat a fent nevezett vizsgálódásokban. A kategória a gráf alsóbb szintjein jelenik meg, ez utal arra, hogy a tanítás-tanulás folyamatába az ellenőrzési fázisban célszerű

bevonni a számítógépet, ami nem helyettesítheti, de segítheti a fogalmak elsajátítását.

Az alkalmazott számítógépes szoftverek közül a GeoGebra és a Maple egyaránt erősíti a szimbolikus gondolkodást, az ellenőrzéshez használva fejlesztette hallgatóink matematikai szimbólumrendszerben elért készség szintjét.

A Maple ugyanakkor az algoritmikus gondolkodást is fejlesztette.

A 3. kérdés és a IV. hipotézis:

Perjésiné Hámosi Ildikó vizsgálata [46], hogy a Maple bevezetése a műszaki mérnök hallgatók oktatásába hatékonyak bizonyult, a tanulói attitűdök pozitív irányú eltolódást mutatnak.

Stóka György [56] „Az informatika alkalmazási lehetőségei a tanító szakos hallgatók matematikai tantárgypedagógiai képzésében” című értékezésében szintén arra a következtetésre jut, hogy az informatika, a számítógépes módszerek bevezetése, alkalmazása úgy szintén pozitív irányba befolyásolják a matematikai ismeretszerzés folyamatát.

A szemináriumokon megfigyeltük hallgatóinkat, akik elmondásuk szerint szívesen dolgoztak a szoftverekkel, különös tekintettel a GeoGebrára. Az alkalmazott kikérdezéses kérdőívekben kifejtették, hogy segítette a tanulásukat, néhány részletesebb véleményből a pozitív élmények átélését is kiolvashatjuk, így a hipotézist elfogadhatjuk.

A 4. kérdés:

A kérdés vizsgálatához a Maple TA web-alapú tesztelő és vizsgáztatói rendszert használtuk. Mivel a kísérlet elvégzésére kevés idő állt rendelkezésre, így megalapozott véleményt nem alakíthatunk ki. Az elmondható, hogy a kísérletben résztvevő hallgatók 30%-a rendszeresen használta a rendszert, hetente 3-4 alkalommal, ők elsősorban átmentek a „Matematikai alapok 2” vizsgán és egy jeggyel jobb eredményt értek el, mint a „Matematikai alapok 1” tantárgyból, amely az Analízis alapjait öleli fel.

Az V. hipotézis:

A hipotézist az integrálszámítás tananyagtartalom kapcsolatában mértük fel. Láttuk, hogy a jobb képességű diákok hagyományos módszerrel magasabb teljesítményt értek el, mint a számítógéppel. Megfigyelésünk során is tapasztaltuk ezt, személyes beszélgetésekben is kifejtették, hogy ők nem szívesen dolgoznak a számítógéppel, mert hagyományosan is boldogulnak. Ők voltak kisebb számban.

A gyengébb képességűeket segítették a számítógépes módszerek, mintegy 4-5%-kal jobb teljesítményt értek el használatukkal, de ez már nem csak az

integrálszámításban mondható el, hanem a gazdasági feladatok megoldása esetében is.

A VI. hipotézis:

Sorozatok vizsgálatánál mértük az Excellel és GeoGebrával történő megoldás hatékonyságát. Egyértelműen az Excellel történő megoldást részesítik előnyben a diákok a sorozatok vizsgálatánál. A függvényábrázolás esetében inkább a GeoGebrát használják. A GeoGebra algebrai ablakában a derivált függvény, és a primitív függvény kiolvasható, az ellenőrzési fázisban algebrai átalakítások után láthatják, hogy jó-e a megoldásuk. Az új verzió használatával az ellenőrzési fázisban az eszköztáron választhatják az alakzatok egyenlősége „gombot”, így algebrai átalakítás nélkül is ellenőrizhetik megoldásukat. A GeoGebra deriválás, integrálás esetében, Taylor-polinom felírásakor az ellenőrzési fázisban nagyon jól használható.

A Maple TA bevonása a folytonos valószínűségi változó fogalmának kialakításában hasznos volt. A hallgatók elmondása szerint: „nagy kihívás volt megoldani a feladatokat, de megérte”.

További kutatási lehetőségek:

A Maple TA további megismerése után, analízis kérdésbank és feladatlapok készítése, diszkrét valószínűségi változó esetében is.

A Maple TA rendszer bevezetése a vizsgáztatásban milyen hatással van a hallgatói teljesítményekre?

További narratívumok keresése az adott tananyagtartalmakhoz, amelyekkel elősegíthetjük a fogalmak bevéését.

6 SUMMARY

During our research we examined whether the introduction of computer methods makes the acquirement of concepts and application of Calculus more efficient in the course of teaching-learning.

In the light of this we aimed at surveying students' deficiencies as well as finding the optimum point of time in the course of teaching when introduction of computers can help improving students' abilities in problem solving.

Part of the research was to get acquainted with the cognitive psychological views on the course of mathematical acquisition of knowledge as well as with the mathematical bases of word nets. During the research we examined the efficiency of the applied methods with the help of questionnaires and observation.

The research looked for answers for the following questions:

1. Which are the deficiencies that emerge at the lower levels of education? Is it possible to close these students up in higher education?
2. Does the use of computers have a positive effect on learning Calculus? Can it substitute traditional methods?
3. Does students' attitude towards mathematics change by involving computer methods?
4. Can we accustom students to regular work by using computer methods?

Relating hypotheses were the following:

- I. Didactic methods used at lower levels are efficient at higher education as well.
- II. On the basis of cognitive psychological investigation we defined universal cognitive categories, which, together with Bruner's representational levels, were included into a hierarchical system using Galois-graphs. The category, where computers can be involved in the process of teaching-learning, appears on the lower levels of the graph.
- III. Computer systems develop proficiency on the symbolic level, connect the material, iconic and symbolic representational levels, thus make the acquisition of mathematical knowledge more efficient.
- IV. Students' attitude towards mathematics change in a positive direction.
- V. The performance of students showing weaker skills in mathematics is improved by the use of computers, while students with better abilities may be hindered at some cases.
- VI. The different software products are not of the same efficiency in Calculus and its applications; students prefer different computer algebra systems in case of different types of problems.

Question 1 and hypothesis I:

According to several years' results of the level assessment tests it can be asserted that solution of inequalities and solution of problems with parameters show the weakest, 10-12% performance. Students also underachieve in the areas of curve sketching and the knowledge of properties of functions, their performance is 30% at these areas. Hungarian representative measures (Budapest University of Technology and Economics, BGF) also support the defect at the solution process of inequalities. In case of problems, where "*space*", as a universal cognitive category appears, students' performance is also weaker.

In our institute we made a thematic revision of the solution strategies in case of inequalities in the framework of course "Mathematics Methodology with Computers", and dropout decreased to minimal.

The hypothesis can be accepted, the number of successful solutions was increased significantly by the examination of the sign of formulae, the monotonicity of sequences with the applied methods.

We cannot report on successful performance in case of students who did not regularly attend lessons.

When planning lessons we used the threefold division, we concentrated on the continuous practice of high priority in the first part.

Question 2 and hypotheses II and III:

Students also answered the question; computers cannot substitute the acquisition of theoretical bases. In case of a good problem choice, the comprehension of learned concepts may be emphasised during the process of solution by computer, thus acquisition of concepts is more efficient.

In the relation of the defined universal cognitive categories we examined the process of function analysis, solution of economic problems, analysis of sequences, and problem solving concerning continuous random variables. Categories, as objects appeared in the Galois-graphs, as in hierarchical systems. "*Words expressing action*" is the category which can refer to the use of computers in the examinations mentioned above. This category appears at the lower levels of the graph, thus showing that computers are practical to be involved in the teaching-learning process at the stage of checking, they cannot replace, but help acquiring concepts.

Among the applied computer software products, both GeoGebra and Maple strengthen symbolic thinking; when they were used at the checking stage, they developed students' competency in the mathematical symbol system.

Maple also developed algorithmic thinking.

Question 3 and hypothesis IV:

Ildikó Perjésiné Hámori examined that introducing Maple in educating technical engineer students proved to be efficient and students' attitude show a positive trend.

In his dissertation "Possible Applications of Informatics Studies in the Education of Trainee Teachers in the Methodology of Mathematics" György Stóka arrives at the conclusion, that Information Technology, introduction and application of computer methods influence the process of mathematical acquisition in a positive direction.

We observed our students at seminars, who told us that they liked working with the software products, especially with GeoGebra. In the applied questionnaires they explained, that it helped their studies, in some more detailed opinion they describe their positive experiences, thus the hypothesis can be accepted.

Question 4:

To examine the question we used the web-based testing and assessment system Maple TA. As we had little time to carry out the experiment, we cannot draw a well-established conclusion concerning the question. It can be stated that 30% of the students who took part in the experiment, used the system regularly, 3-4 times a week and they passed the exam "*Elements of Mathematics II*" for the first time, and they received one mark better than in subject "*Elements of Mathematics I*", which consists of the bases of Calculus.

Hypothesis V:

We surveyed the hypothesis in connection with integral calculus. It has been found that students with better abilities achieved a higher performance with the traditional method than by computers. We experienced this and they also explained personally that they did not like working with computers, because they got along traditionally. They were the minority.

Students with weaker abilities were helped by computers, they achieved 10% better results by the use of them, and this is not only true for integral calculus problems but for economic problems as well.

Hypothesis VI:

We measured the efficiency of solutions with Excel and GeoGebra at investigating sequences. Students prefer solutions with Excel unanimously. In case of curve sketching they prefer GeoGebra. With the new version they fail getting it in the phase of checking, as their skill in the mathematical symbol system needs further development in case of differential-, integral calculus. When writing up Taylor-polynomials, it can be well used in the phase of checking.

Maple TA proved to be useful in forming the concept of continuous random variables. According to the students, “it was a great challenge to solve the problems, but it was worth it”.

Further research possibilities:

After getting more familiar with Maple TA, a Calculus question bank can be produced and test papers can be made in case of discrete random variables as well.

What is the effect of introducing the system mentioned above on students’ performance?

Further narratives can be searched that are connected to the given subjects, which may help the inculcation of concepts.

IRODALOM

- [1] Ábrahám I., Analízis I, Mozaik Kiadó, Szeged, 2005
- [2] Ábrahám I., Analízis II, Mozaik Kiadó, Szeged, 2005
- [3] Ábrahám I., Analízis III, Mozaik Kiadó, Szeged, 2005
- [4] Ábrahám I., Valószínűség-számítás tankönyv, Mozaik Kiadó, Szeged, 2009
- [5] Ábrahám I., Valószínűség-számítás összefoglaló feladatgyűjtemény, Mozaik Kiadó, Szeged, 2009
- [6] Ambrus A., Bevezetés a matematika-didaktikába, ELTE Eötvös Kiadó, 2004
- [7] Baumol, W.J., Közgazdaságtan és operációanalízis, Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest, 1968
- [8] Bloom, B.S., Taxonomie von Lernzielen im kognitiven Bereich, Weinheim, Basel, 1972
- [9] Bruner, J., Az oktatás kultúrája, Gondolat Kiadó, Budapest, 2004
- [10] Bruner, J., Studies in cognitive growth, Bruner, J.S.; Olver, Rose R.; Greenfield, Patricia M., et al, Oxford, England: Wiley, 1966
- [11] Bruner, J., Valóságos elmék, lehetséges világok, Új Mandátum Könyvkiadó, Budapest, 2005
- [12] Carroll, J. B., Human Cognitive Abilities: A survey of faktoranalitic studies. Cambridge University Press, New York, 1993 Idézi: Sternberg, R. J. és Ben-Zeev, T., A matematikai gondolkodás természete. Vince Kiadó, Budapest, 1998
- [13] Carroll, J. B., Matematikai képességek: A faktoranalitikus módszer néhány eredménye, 1998 ,In: Sternberg, R. J. és Ben-Zeev, T., A matematikai gondolkodás természete. Vince Kiadó, Budapest, 1998
- [14] Csákány A., A 2009. szeptemberében készített országos matematika felmérés tapasztalatairól, MAFIOK, Békéscsaba, 2010. augusztus., URL: http://gfk.tsf.hu/mafiok2010/dvd/MAFIOK_szekcio_eloadasok_elemei/MAFIOK_MAT2_06_CsakanyAniko.pdf (2013.05.29.)
- [15] Csákány A., Mit tudnak az elsőéves műegyetemi hallgatók a vektorokról?, Acta Carolus Robertus, Károly Róbert Főiskola tudományos közleményei 3(1), ISSN 2062-8269, 2013, 189-197 p
- [16] Csapó B., A kognitív képességek szerepe a tudás szervezésében, Tanulmányok a neveléstudomány köréből, Osiris Kiadó, Budapest, 2001
- [17] Csernyák L., Valószínűség-számítás, Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 2007, ISBN: 9789631959499
- [18] Csernyák L. (szerk.), Analízis. Matematika a közgazdasági alapképzés számára, Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 2008, ISBN: 9789631958959

- [19] Falus I., Bevezetés a pedagógiai kutatás módszereibe, Keraban Kiadó, Budapest, 1996
- [20] Fatalin L., Hierarchikus fogalmi struktúrák vizsgálata gráfokkal, Doktori értekezés, Debreceni Egyetem, 2008
- [21] Geary, D. C., Mathematical disabilities: Cognitive, neuropsychological, and genetic components. *Psychological Bulletin*, 114. sz., 1993, 345–362
- [22] Gergely Gy.-Csibra G., Ember és kultúra. A kulturális tudás eredete és átadásának mechanizmusai, Akadémiai Kiadó, Budapest, 2007
- [23] Gullasch, R., Denkpsychologische Analysen mathematischer Fähigkeiten. Verlag, Berlin, 1971
- [24] Heck, A., Bevezetés a Maple használatába, JGYF Kiadó, Szeged, 1999
- [25] Hohenwarter J. and Hohenwarter, M., Introduction to GeoGebra4 , 12.04.2012, www.geogebra.org
- [26] Klincsik M.-Maróti Gy., Maple, Nyolc tételben a matematikai problémamegoldás művészetéről, Livermore, 2006, ISBN 9630605716
- [27] Klingné Takács A., Kognitív kategóriák az analízis számítógépes oktatásában, Kitekintés-Perspective Magyar-román-szlovák periodika, Különszám, Szent István Egyetem Gazdasági Kar, Békéscsaba, ISSN 1454-9921, 56-66 p
- [28] Klingné Takács A., Educational experiences about using different computer programs in calculus courses, Romanian Journal of Education, Universitatea Babeş-Bolyai, Cluj-Napoca, România, ISSN: 2067–8347 Volum 1 number 2, 2010 URL: <http://dppd.ubbcluj.ro/rojed/> (2011-05-20), 1-6 p
- [29] Klingné Takács A., GEOGEBRA in teaching calculus at Kaposvár University, Knowledge and sustainable economic development., KnowledSustainable Development, edited by Iván Bélyácz at all, p., Partium Press 671-688. p. ISBN:978 606 8156 30 9
- [30] Klingné Takács A., A matematikai analízis tanításának módszertani elemei pénzügy és számvitel szakos hallgatók oktatásában, Lehetőségek és alternatívák a Kárpát medencében (Módszertani tanulmányok) 2011, ISBN 978-963-9541-13-9, 313-322 p, 659 p
- [31] Klingné Takács A., The difficulties of the teaching of the analysis in the transition of the middle and a higher education at Kaposvár University. Fachportal Pädagogik.DE Dortmund. 1-18. p. http://www.mathematik.uni-dortmund.de/ieem/BzMU/BzMU2008/BzMU2008_KLINGNE_TAKACS_Anna_CD.pdf
- [32] Klingné Takács A., GeoGebra at the education of the analysis. Matematikát, fizikát és informatikát oktatók XXXIII. Országos és Nemzetközi konferenciája. Budapest, 2009. aug. 24-26., Conference Volume

- 2009, Budapest Business School College of Commerce, Catering and Tourism, 43-49.p.
- [33] Klingné Takács A. – Szigeti M., Graphs in the teaching of the analysis and assessment. In: Regional and Business Studies, Kaposvár, ISSN 1789-6924, Volume 1 No 1, 2009, 57-63. p.
 - [34] Klingné Takács A., A matematikai analízis elemeinek oktatása a felsőfokú szakképzésben, *Economica* (a Szolnoki Főiskola tudományos közleményeinek külön kötete) IV. évfolyam, különszám, 2011, Alumni Kiadó Kft, 69-76.p. ISSN 1585-6216
 - [35] Klingné Takács A.-Nemesné dr Kis Sz., Szöveges matematikafeladatok megoldásának vizsgálata nyelvészeti és matematikai szempontból, III. Képzés és Gyakorlat Konferencia, Kaposvár, 2009. április 24. előadás
 - [36] Kollár J., Felzárkóztató kurzus a gazdasági matematika oktatásban, *Acta Carolus Robertus, Károly Róbert Főiskola tudományos közleményei* 3(1), ISSN 2062-8269, 2013, 181-187 p
 - [37] Krutetki, V. A., Pshihologhiia matematiceskih sposobnostei skolnikov. Moskova, Iz-tvo Prosvescenie. In: Rosca, A. és Zörgő, B., A képességek. Tudományos Könyvkiadó, Budapest, 1973
 - [38] Lavicza, Zs., The examination of technology use in university-level mathematics teaching, 2008, URL: <http://www.unige.ch/math/EnsMath/Rome2008/WG4/Papers/LAVICZA.pdf> (2013.05.30)
 - [39] Leindler L., Analízis II, Egyetemi jegyzet, JATE Sokszorosító Üzeme, Szeged, 1973, 338/76
 - [40] Leindler L., Analízis I, Egyetemi jegyzet, JATE Sokszorosító Üzeme, Szeged, 1974, 131
 - [41] Maple, <http://www.maplesoft.com/products/mapleta/index.aspx>
 - [42] McPherson, R. F., and Tyson, V., Creating your own interactive computer-based algebra teaching tools: An programming zone, 2006, *Contemporary Issues in Technology and Teacher Education*, 6(2), 293-301 .
 - [43] Nagy J., A kognitív készségek és képességek fejlesztése, 1999, *Iskolakultúra*, 1. 14–26
 - [44] Newell, A.-Simon, H., A tapasztalati számítógéptudomány-szimbólumok és keresés, In: A rendszerelmélet mint társadalmi igény, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1982
 - [45] Niss, M., Competencies and subject description, 1999, *Uddanneise*, 9. 21–19.
 - [46] Peller J., A matematikai ismeretszerzési folyamatról, ELTE Eötvös Kiadó, Budapest, 2003

- [47] Perjésiné Hámori I., Az internet és a computer-algebrai rendszerek bevezetése gépészmérnökök matematika oktatásába, Doktori értekezés tézisei, Debreceni Egyetem TTK, Debrecen, 2003
- [48] Pléh Cs., A megismerés pszichológiája és tudománya, avagy a kognitív pszichológiától a kognitív tudományig, Neveléstudomány az ezredfordulón, szerk.:Csapó B., Vidákovich T.,Nemzeti Tankönyvkiadó, 2001, ISBN 9631912698
- [49] Pléh Cs., A pszichológia örök témái,Typtex, Budapest, 2008
- [50] Pléh Cs., A természet és a lélek, Osiris Kiadó, Budapest, 2003
- [51] Quinn, F., TEACHING VS. LEARNING IN MATHEMATICS, 2009 <http://www.math.vt.edu/people/quinn/education/TeachingVsLearning.pdf>
- [52] Rudin, W., A matematikai analízis alapjai, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1978
- [53] Sárvári Cs., A számítógép-algebrai rendszerek szerepe a matematikai gondolkodás fejlesztésében, Iskolakultúra XI.,2001/3, 20-27
- [54] Skemp,R., A matematikatanulás pszichológiája, Edge 2000 Kiadó, Budapest, 2005
- [55] Spaerman, C., „General intelligence”, objectively determined and measured. American Journal of Psycholgy, 15, 1904, 201–293. Idézi: Sternberg, R. J. és Ben-Zeev, T. , A matematikai gondolkodás természete. Vince Kiadó, Budapest, 1998
- [56] Spaerman, C., The abilities of man: Their nature and measurement. MacMillan, New York, 1927, Idézi: Czeizel E., *Sors és tehetség*. FITT IMAGE és a Minerva Kiadó, Budapest, 1997
- [57] Stóka Gy., Az informatika alkalmazási lehetőségei a tanítószakos hallgatók matematika tantárgypedagógiai képzésében, Doktori értekezés, Debreceni Egyetem, 2009
- [58] Sydæter,K. - Hammond, P.I., Matematika közgazdászoknak, Aula,2003
- [59] Szabó-Thalmeiner N., A pedagógiai kutatás alapjai, Státus Kiadó, 2010
- [60] Szigeti M., Galois-gráf rajzoló program 2.0, URL: <http://balaton.cn/marci/galois.zip> (2010-08-20)
- [61] Takács V.: A Galois-gráfok pedagógiai alkalmazása, 2000, Molnár Nyomda és Kiadó KFT,Pécs 11-18,20-40, 185-196
- [62] Tall, D., A Versatile Theory of Visualisation and Symbolisation in Mathematics, Plenary Presentation at the Commission Internationale pour l'Étude et l'Amélioration de l'Enseignement des Mathématiques, Toulouse, France, July 1994.

- [63] University of Waterloo Improves Learning while Saving Money with Maple T.A.
<http://www.maplesoft.com/company/publications/articles/view.aspx?SID=102384>
- [64] Use of Maple T.A. at the University of Guelph reduces drop-out rates by more than 10%
<http://www.maplesoft.com/company/publications/articles/view.aspx?SID=137276>
- [65] Vajda I., A diszkrét matematika és a lineáris algebra számítógéppel támogatott oktatása, Doktori értekezés, Debreceni Egyetem, 2012
- [66] Varga T., Publikálatlan előadás az 1973. évi egri nemzetközi matematikadidaktikai konferencián, 1973, Idézi: Ambrus A., Bevezetés a matematika-didaktikába, ELTE Eötvös Kiadó, 2004
- [67] Vincze Sz., A matematikai képesség összetevőinek vizsgálata és kapcsolata az intelligenciával, 2003, MAGYAR PEDAGÓGIA 103. évf. 2. szám 229–261.
- [68] Zech, F., Grundkurs Mathematikdidaktik, Belts Verlag, Basel, 1989, Idézi: Ambrus A., Bevezetés a matematika-didaktikába, ELTE Eötvös Kiadó, 2004

PUBLIKÁCIÓK

Idegen nyelven megjelent referált, lektorált publikációk

- [1] Klingné Takács A., The difficulties of the teaching of analysis in the transition of the middle and higher education at Kaposvár University, Vászárhelyi, Eva (ed.), Beiträge zum Mathematikunterricht 2008. Vorträge auf der 42. GDM Tagung für Didaktik der Mathematik. Münster: WTM-Verlag; Münster: Martin Stein Verlag (ISBN 978-3-9811015-7-7/print edition; 978-3-9811015-8-4/CD), 521-524, MathEduc Database, ZMATH 2010a.00219, <http://www.zentralblatt-math.org/matheduc/en/search/?q=an%3A2010a.00219>
- [2] Klingné Takács A., The difficulties of the teaching of the analysis in the transition of the middle and a higher education at Kaposvár University, Dortmund. 1-18. p., http://www.mathematik.tu-dortmund.de/ieem/cms/media/BzMU/BzMU2008/BzMU2008/BzMU2008_KLINGNE_TAKACS_Anna.pdf

Idegen nyelven megjelent lektorált publikációk

- [3] Klingné Takács A., GEOGEBRA in teaching calculus at Kaposvár Klingné Takács A., Educational experiences about using different computer programs in calculus courses, Romanian Journal of Education, Universitatea Babeş-Bolyai, Cluj-Napoca, România, ISSN: 2067-8347 Volum 1 number 2, 2010 URL: <http://dppd.ubbcluj.ro/rojed/> (2011-05-20), 1-6 p
- [4] Klingné Takács A., GeoGebra in teaching Calculus at Kaposvár University, University, Knowledge and sustainable economic development., KnowledSustainable Development, edited by Iván Bélyácz at all, p., Partium Press , 2012, 671-688. p. ISBN:978 606 8156 30 9
recenzió: reviews (Jogtudományi Közlöny, Vörös Imre):
http://www.csabal.com/reviews/ket_konyv_a_partiumbol.pdf
- [5] Klingné Takács A., GeoGebra at the education of the analysis. Matematikát, fizikát és informatikát oktatók XXXIII. Országos és Nemzetközi konferenciája. Budapest, 2009. aug. 24-26., Conference Volume 2009, Budapest Business School College of Commerce, Catering and Tourism, 43-49.p.
- [6] Klingné Takács, A. – Szigeti, M., Graphs in the teaching of the analysis and assesment. In: Regional and Business Studies, Kaposvár, ISSN 1789-6924, Volume 1 No 1, 2009, 57-63. p.

Magyar nyelven megjelent lektorált publikációk

- [7] Klingné Takács A., A matematikai analízis elemeinek oktatása a felsőfokú szakképzésben, *Economica* (a Szolnoki Főiskola tudományos közleményeinek külön kötete) IV. évfolyam, különszám, 2011, Alumni Kiadó Kft, 69-76.p. ISSN 1585-6216
- [8] Klingné Takács A., A matematikai analízis tanításának módszertani elemei pénzügy és számvitel szakos hallgatók oktatásában, *Lehetőségek és alternatívák a Kárpát medencében (Módszertani tanulmányok)* 2011, ISBN 978-963-9541-13-9, 313-322 p, 659 p
- [9] Klingné Takács A., Kihívások a matematikai analízis tanítása kapcsán, I. Kaposvári Gazdaságtudományi Konferencia, Kaposvár, In: *Acta Oeconomica Kaposváriensis*. ISSN 1789-6924, 2007. Vol.2. No.1., 123-130
- [10] Klingné Takács A., Kognitív kategóriák az analízis számítógépes oktatásában, *Kitekintés-Perspective*, Magyar-román-szlovák periodika, Különszám Békéscsaba, 2011, ISSN 1454-9921, 56-66 p
- [11] Klingné Takács A., Valószínűségszámítási gyakorlatok Maple TA használatával, *MAFIOK* 2013, Közlemények, Miskolci Egyetem, ISBN 9789633580356

Idegen nyelven referált folyóiratban megjelent absztraktok

- [12] Klingné Takács A., The Galois-graph Analysis of Cognitive Categories in Computer-aided Teaching of Calculus, Report of Meeting Researches in Didactics of Mathematics and Computer Sciences January 28 – January 30, 2011, Satu -Mare, Romania, *Teaching Mathematics and Computer Science* 9/1 (2011), 166
- [13] Klingné Takács A., Teaching the applications of differentiation and integration with GeoGebra, Report of Meeting Researches in Didactics of Mathematics and Computer Sciences January 20 – January 22, 2012, Levoca, Slovakia, *Teaching Mathematics and Computer Science* 11/1 (2013), 131
- [14] Klingné Takács A., Why and for what are excel and geogebra used in teaching calculus? Report of Meeting Researches in Didactics of Mathematics and Computer Sciences January 21 – January 23, 2010, Debrecen, Hungary, *Teaching Mathematics and Computer Science* 8/1 (2010), 183-184

Egyéb idegen nyelvű publikációk

- [15] Klingné Takács A., Teaching integration with geogebra in post-secondary vocational training, International GeoGebra Conference and Workshop - Miskolc IGGCW-Miskolc-2011 Hungary, Miskolc 2011. May 20-22. Dynamical GeoGebra Journal, URL: <http://www.uni-miskolc.hu/~matsefi/GGJ/index.php?menu=articles&author=TakacsAnna>
- [16] Klingné Takács A., Teaching of analysis with GeoGebra through some problems, IGGC 2012, Miskolc, Hungary, 6-9 June 2012.
- [17] Klingné Takács A., Maple or GeoGebra education of Calculus? 4th International Conference of Economic Sciences, Quality of Life, Sustainability and Locality, 9-10 May 2013 – Kaposvár University - Kaposvár – Hungary, Proceedings ISBN 978-963-9821-62-0
- [18] Klingné Takács A., The solution of economic tasks with GeoGebra, CADGME, Department of Mathematics and Informatics, Faculty of Sciences, University of Novi Sad, 2012. URL: <http://sites.dmi.rs/events/2012/CADGME2012/program.html> (2013.03.18.)

Egyéb magyar nyelvű publikációk

- [19] Klingné Takács A., Miért nehéz az analízis elsajátítása hallgatóinknak?, Matematika, Fizika, Számítástechnika Főiskolai oktatók XXXI. Konferenciája, Konferenciakiadvány 75-78.
- [20] Klingné Takács A., Számítógép alkalmazása az analízis tanításában, Felsőfokú alapképzésben matematikát, fizikát és informatikát oktatók XXXII. Konferenciája, Kecskemét, 2008. augusztus 25-27. ISBN 978-963-7159-31-2
- [21] Klingné Takács A., A matematikai analízis tanítása kapcsán felmerülő oktatási problémákról, Matematika-, fizika és számítástechnika oktatók XXX. Konferenciája, Pécs, 2006. augusztus 23-25, Cd kiadvány ISBN-10:963-7298-12-6; ISBN-13:978-963-7298-12-7
- [22] Klingné Takács A., Gazdasági feladatok megoldása GeoGebrával, Varga Tamás Napok, Budapest, ELTE, 2012 november 16-17
- [23] Klingné Takács A., Az integrálszámítás tanítása GeoGebrával a felsőfokú szakképzésben, International GeoGebra Conference and Workshop - Miskolc IGGCW-Miskolc-2011 Hungary, Miskolc 2011. May 20-22.

Dynamical GeoGebra Journal, URL: <http://www.uni-miskolc.hu/~matsefi/GGJ/index.php?menu=articles&author=TakacsAnna>

- [24] Klingné Takács A., Gazdasági feladatok megoldásának vizsgálata, MIDK, Nagyvárad, 2013

Közlésre benyújtott publikációk

Klingné Takács A., Gazdasági feladat megoldásának vizsgálata, Partiumi Egyetemi Szemle (lektorált)

Klingné Takács A., Maple TA in teaching Probability at Kaposvár University, TMCS (referált)

Klingné Takács A., GeoGebra, Maple and Maple TA in teaching Calculus and Probability at Kaposvár University, Journal of China-USA Business Review (referált)

MELLÉKLETEK

M1

A „Számítógépes matematika módszertan” tantárgy keretein belül 3 módszert is mutatunk a helyes megoldáshoz:

- *Algebrai megoldás* – egyenlőtlenségen alapuló
Vizsgáljuk, hogy hol pozitív a kifejezés, másutt negatív vagy 0.

$$\frac{x-5}{2x+3}$$

$\begin{array}{c} + \\ \hline + \\ + \end{array}$

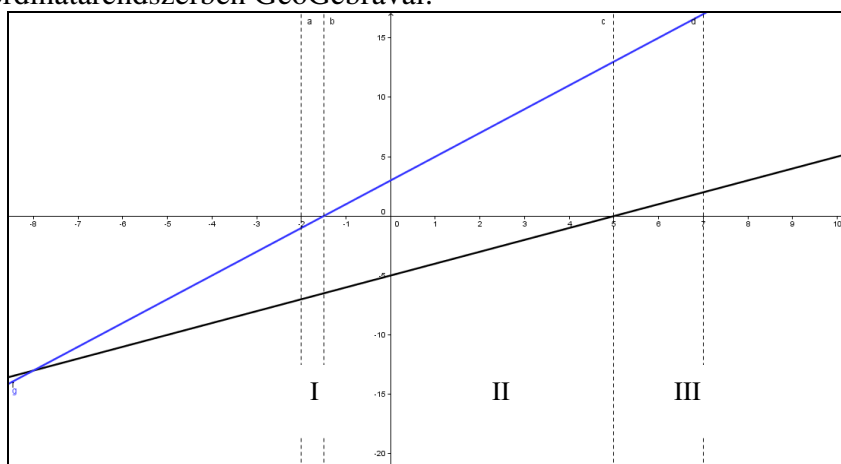
$\begin{array}{c} - \\ \hline - \\ - \end{array}$

$0 < x - 5$	$x - 5 < 0$
$0 < 2x + 3$	$2x + 3 < 0$
$\Downarrow$	$\Downarrow$
$5 < x$	$x < 5$
$-\frac{3}{2} < x$	$x < -\frac{3}{2}$
$ha\ 5 < x$	$ha\ x < -\frac{3}{2}$

Összevetve a feladatban adott értelmezési tartománnyal, kapjuk, hogy -2 és -3/2 között pozitív, -3/2 és 5 között negatív, 5 és 7 között pozitív előjelű. Nincs előjele az 5-ben, -3/2-ben nem értelmezzük.

- *Függvénytani alapú megoldás*

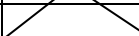
A számláló és a nevező is elsőfokú függvény, ábrázoljuk közös koordináta-rendszerben GeoGebrával:



Szemléltetés után az egyes tartományokon leolvasva a függvények előjelét: I tartományon negatív/negatív=pozitív, II tartományon pozitív/negatív=negatív, III tartományon pozitív/pozitív=pozitív

- *Táblázatos módszer*

Először keressük meg a számláló és nevező zérushelyét, majd nézzük meg ezek hány részre osztják a megadott intervallumot, ennek alapján készül a táblázat, mivel a zérushelyek „különleges helyek”, ezért őket is be kell írni a táblázatba:

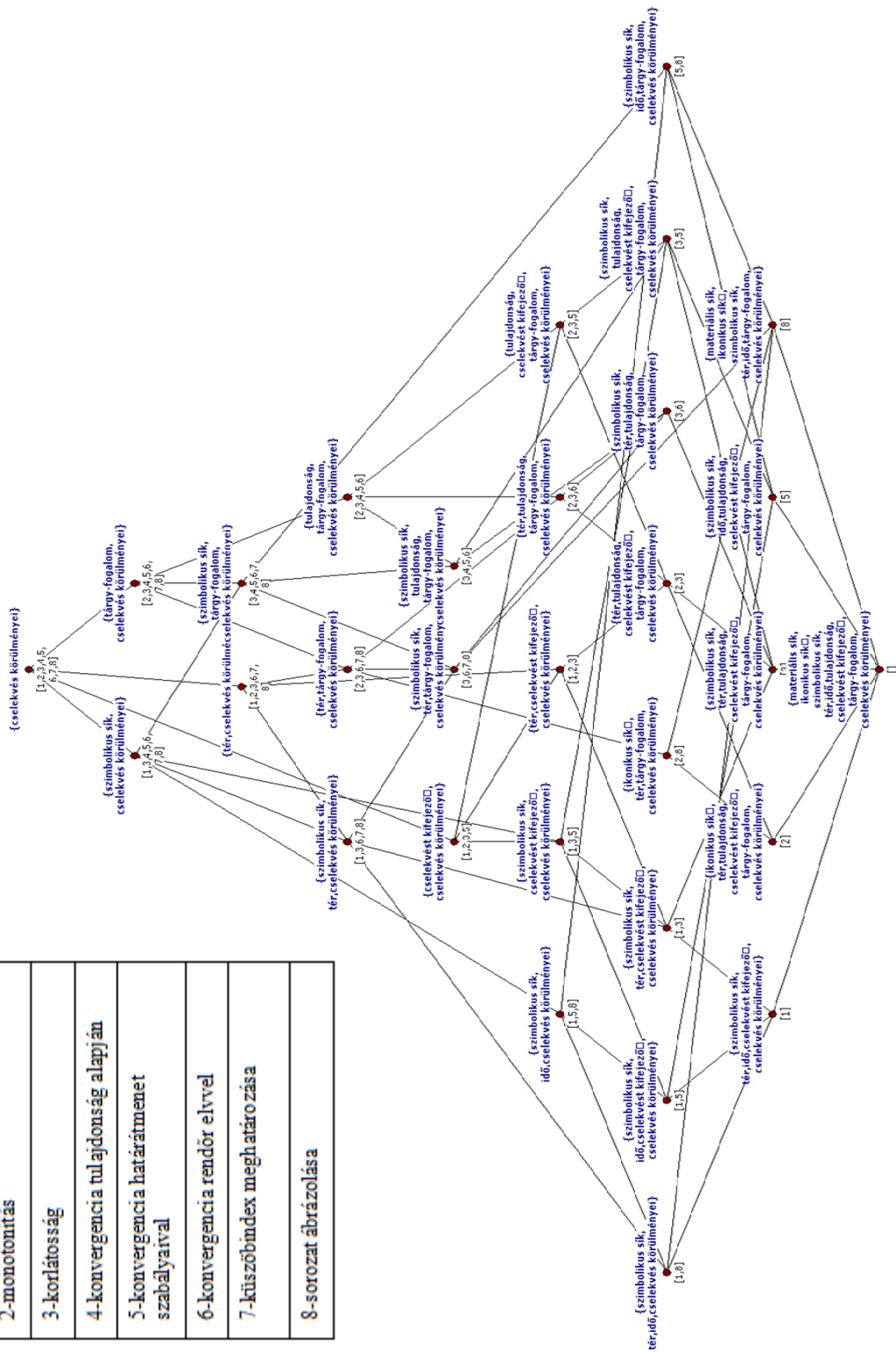
	$-2 < x < -\frac{3}{2}$	$x = -\frac{3}{2}$	$-\frac{3}{2} < x < 5$	$x = 5$	$5 < x < 7$
számláló= $x-5$	-		+	0	+
nevező= $2x+3$	-		-	+	+
kifejezés	+		-	nincs	+

Ezt a fajta megoldást preferáljuk a majdani előjeltáblázat készítése miatt. Azok a tanulók is, akik újra írják a szintfelmérőt, inkább ezzel a módszerrel oldják meg a feladatot.

M2

Sorozat Galois-gráfja

1-tagok kiszámítása
2-monotonitás
3-korlátosság
4-konvergencia tulajdonság alapján
5-konvergencia hatarátmenet szabályaival
6-konvergencia rendőr elvvel
7-küszöbindex meghatározása
8-sorozat ábrázolása



Folytonos valószínűségi változó Galois-gráfja

