Horváth Eszter

GEOMETRIAI TRANSZFORMÁCIÓK
GEOMETRIC TRANSFORMATIONS

című PhD értekezés tézisei

Témavezető: Dr. Molnár Emil

Debreceni Egyetem, Matematika- és Számítástudományok Doktori Iskola
Vezető: Dr. Daróczy Zoltán

Matematika-didaktika Program
Vezető: Dr Lajkó Károly

2007

1. Bevezetés

Dolgozatomban a geometriai transzformációk igen kiterjedt területét érintettem több témában. A bevezetésben rávilágítottam arra, hogy a szimmetria a környezetünk meghatározó jelensége, a természetben találkozunk vele, az építészetben, művészetben alkalmazzuk. Évszázadok óta a tudományos kutatás tárgya, az erlangeni program pedig a geometriák vizsgálatának alapvető szempontjává tette annak vizsgálatát, hogy bizonyos geometriai transzformációk alkalmazása során mely tulajdonságok maradnak változatlanok. Ezek a vizsgálatok a csoportelmélet és több matematikai témakör fejlődéséhez is hozzájárultak.

2. A geometriai transzformációk áttekintése

A 2. fejezetben áttekintést adtam az euklideszi sík és tér egybevágósági és hasonlósági transzformációiról a transzformációk tágabb körét is megemlítve. Ismertettem azokat az alapvető fogalmakat és tételeket, amelyek a transzformációk értelmezése és rendszerezése szempontjából fontosak. A transzformációkat a fixpontok száma, illetve az irányítástartás szempotjából csoportosítottam. A transzformációk egymásutáni alkalmazásával a transzformációk szorzatát értelmezzük. A 2.4. tétel a síkbeli egybevágósági transzformációk tükrözések szorzataként történő előállításáról szól, térben az analóg állítást 2.16. tétel síktükrözések használatával adja meg. A hasonlósági transzformációkkal foglalkozva kiemeltem, hogy az euklideszi geometria a hosszegység önkényes megválasztásával olyan tulajdonságokat vizsgál, amelyek hasonlósági transzformációk alkalmazása során változatlanok maradnak. A 2.5 részben kitekintést adtam az affin és a projektív transzformációkra. Röviden utaltam az ábrázoló geometriai vonatkozásokra, a számítógépes grafikában való alkalmazásra, megemlítettem az n-dimenziós értelmezés lehetőségét. Ebben a fejezetben az elemi geometriai megközelítés mellett csoportelméleti és lineáris algebrai vonatkozásokról is szóltam. A fejezet alapvető célja az, hogy a későbbiekben tárgyalt témák elméleti hátterét biztosítsa.

3. A geometriai transzformációk tanításának lépései az iskolai oktatásban

A 3. fejezetben azt elemeztem, hogy a geometriai transzformációkkal milyen módon foglalkozunk az oktatásban. Ennek alapja a több évtizede végzett tanítási tapasztalatom. Gondolataimat ezzel kapcsolatban a Rátz László Vándorgyűlésen és a Varga Tamás Napokon tartott előadásokon is kifejtettem.

Nyolcosztályos gimnáziumban tanítok. Ez adott arra lehetőséget, hogy mind a felső tagozaton, mind a középiskolában tanított témaköröket áttekintsem, módszertani tapasztalataimról beszámoljak. A Rátz László Vándorgyűlésen tartott előadásom bemutatója honlapomon (www.szolda.hu/he) elérhető.

4. A geometriai transzformációk alkalmazása egy versenyfeladatban

Hosszú évek óta veszek részt az Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny speciális matematika bizottságának munkájában. Az alábbi feladatot a 2006-2007-es tanévben tűzte ki a versenybizottság az én javaslatomra:

Az ABC háromszöget betűzzük pozitív körüljárás szerint. A háromszög szögei az A, B , illetve C csúcsnál rendre α, β, γ. A B csúcsot az A pont körül negatív irányban elforgatjuk α szöggel, majd az így kapott B_1 pontot a B pont körül negatív irányban elforgatjuk β szöggel, és végül az így nyert B_2 pontot a C pont körül negatív irányban γ szöggel elforgatva a B_3 pontba jutunk. Szerkesszük meg a háromszöget, ha adottak a B, B_3 pontok és az ABC háromszög beírt körének O középpontja.

A 4. fejezetben ezzel a feladattal összefüggésben bemutatom, hogy az előző fejezetben tárgyalt ismeretek alapján milyen szinten tudják alkalmazni a tanulók a geometriai transzformációkat feladatmegoldásban.

5. A tükrözésgeometria alaptételének alkalmazásáról

A fenti gondolatok vezettek el egy axiomatikai problémához, amelynek megoldását az 5. fejezetben adom meg. A tükrözésgeometria fogalmainak bemutatása után megfogalmaztam az 5.5. tétel térbeli megfelelőjét:

5.9. Tétel *Legyen a és b a tér két különböző egyenese, X pedig a tér egy az a és b egyenesek nem mindegyikére illeszkedő tetszőleges pontja. Ekkor létezik olyan g egyenes, amely illeszkedik az X pontra és agb helyettesíthető egy h egyenes-tükrözéssel.*

A bizonyítást nem csak az euklideszi geometria keretei között tárgyalom. Azt is megmutatom, hogy ez az előállítás nem mindig egyértelmű. Az 5.10. tételben adom meg az egyértelmű előállítás feltételét:

5.10. Tétel *Az euklideszi térben az 5.9 tétel konstrukciója akkor egyértelmű, ha a és b metsző vagy kitérő egyenesek és X nem illeszkedik a közös merőlegesükre.*

Hiperbolikus térben egyértelmű az előállítás, ha van az a és b egyeneseknek közös merőlegese, amelyre az X pont nem illeszkedik, vagy a és b egyeneseknek nincs közös merőlegese. Ez utóbbi eset a klasszikus Bolyai-Lobachevszkij féle hiperbolikus térben pontosan akkor áll elő, ha a és b hiperbolikus értelemben párhuzamosak, azaz egy síkban fekszenek, de sem közös pontjuk, sem közös merőlegesük nincs.

Ennek a fejezetnek az anyaga a [30] cikkben jelent meg, amely a fent említett két tételt, mint új önálló eredményt tartalmazza.

6. Kristálycsoportok

Még tudományos diákköri és szakdolgozatomhoz kapcsolódva ismerkedtem meg a többdimenziós kristálytan egy témakörével, amely a mai kutatásokhoz is elvezet. S.S. Ryshkov [51] cikkében a következő kvadratikus alakok egészegyütthatós automorfizmuscsoportjait, mint maximális csoportokat adta meg.

$$q(\mathbf{x}) = 4x^1x^1 + 4x^2x^2 + 4x^3x^3 + 4x^4x^4 + 2x^1x^2 - 4x^1x^3 - \\ - 4x^1x^4 - 4x^2x^3 - 4x^2x^4 + 2x^3x^4 \ . \tag{T}$$

$$q(\mathbf{x}) = 4x^1x^1 + 4x^2x^2 + 4x^3x^3 + 4x^4x^4 - 2x^1x^2 - 2x^1x^3 - \\ - 2x^1x^4 - 2x^2x^3 - 2x^2x^4 - 2x^3x^4 \ , \tag{P_4}$$

$$q(\mathbf{x}) = x^1x^1 + x^2x^2 + x^3x^3 + x^4x^4 - x^1x^2 - x^2x^3 - x^3x^4 \ . \tag{S_4}$$

Ez ekvivalens [11]-ben az alábbi kvadratikus alakkal:

$$q(\mathbf{x}) = x^1x^1 + x^2x^2 + x^3x^3 + x^4x^4 + x^1x^2 + x^1x^3 + \\ + x^1x^4 + x^2x^3 + x^2x^4 + x^3x^4 \ . \tag{S_4}$$

Továbbá:

$$q(\mathbf{x}) = x^1x^1 + x^2x^2 + x^3x^3 + x^4x^4 - x^1x^2 - x^3x^4 \ , \tag{B}$$

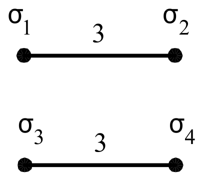
$$q(\mathbf{x}) = x^1x^1 + x^2x^2 + x^3x^3 + x^4x^4 \ , \tag{C_4}$$

$$q(\mathbf{x}) = x^1x^1 + x^2x^2 + x^3x^3 + x^4x^4 + x^1x^2 - x^1x^3 - \\ - x^1x^4 - x^2x^3 - x^2x^4 \ . \tag{Q_4}$$

Ez szintén ekvivalens [11]-ben az alábbi kvadratikus alakkal :

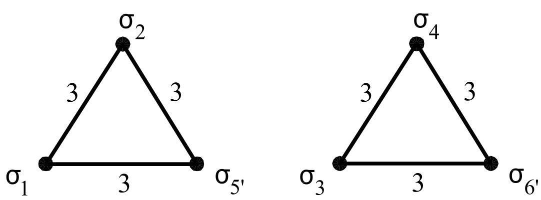
$$q(\mathbf{x}) = x^1x^1 + x^2x^2 + x^3x^3 + x^4x^4 + x^1x^2 + x^1x^4 + \\ + x^2x^3 - x^3x^4 \ . \tag{Q_4}$$

Maxwell [35] dolgozatában felveti a kérdést, hogy a T kvadratikus alakhoz tartozó csoport tükrözéscsoport-e? Dolgozatomban megmutattam, hogy nem az. Megadtam a T-vel jelölt pontcsoport maximális tükrözésrészcsoportját, amelyet a [8]-ben használt jelölés szerint $A_2 \times A_2$ direktszorzattal jelölünk. Ennek a csoportnak a Coxeter gráfja a 18. ábrán látható:

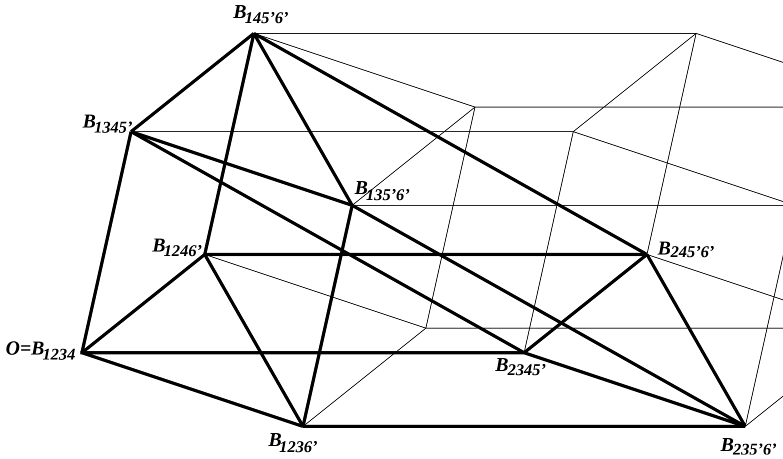


18. ábra

Meghatároztam az $A_2 \times A_2$ csoport fundamentális tartományát. Ennek ismeretében találtam olyan transzformációkat, amelyek nem állíthatóak elő tükrözésekkel. Végül eljutottam a 144 elemű teljes pontcsoport megadásához. Ezután meghatároztam a Λ-val jelölt rács teljes szimmetriacsoportjához tartozó maximális tükrözésrészcsoportot, amely a [8] jelöléseinek megfelelően $\widetilde{A}_2 \times \widetilde{A}_2$. A csoport Coxeter gráfja a 20. ábrán látható. A megfelelő fundamentális tartományt is meghatároztam, ennek kétdimenziós axonometrikus képét a 21. ábra mutatja.



20. ábra



21. ábra

Ezeket a kérdéseket a többi esetben is eldöntöttem.Végül megadtam a vizsgált csoportok helyét a [11] monográfia táblázatai szerint. Az eredmények összefoglalását az 1. és 2. táblázat tartalmazza. Ez a fejezet a [31] cikkben került publikálásra.

1. táblázat. Eredmények az egyes esetekre I.(ld.[8],[11])

A csoport	T	P_4	S_4
A pontcsoport maximális tükrözéscsoportja	$A_2 \times A_2$	A_4	A_4
Tükrözéscsoport-e ez a csoport?	NEM	NEM	NEM
A [11] monográfiában a csoport jelölése	XXI.29/09/01	XXII.31/07/01	XXII.31/07/02
A teljes szimmetria csoport tükrözésrészcsoportja	$\widetilde{A}_2 \times \widetilde{A}_2$	$\widetilde{A}_4$	$\widetilde{A}_4$

2. táblázat. Eredmények az egyes esetekre II.(ld.[8],[11])

A csoport	B	C_4	Q_4
A pontcsoport maximális tükrözés-csoportja	$G_2 \times G_2$	C_4	F_4
Tükrözéscsoport-e ez a csoport?	NEM	IGEN	IGEN
A [11] monográfiában a csoport jelölése	XXI.30/13/01	XXIII.32/21/01	XXIII.33/16/01
A teljes szimmetria csoport tükrözésrész-csoportja	$\widetilde{G_2} \times \widetilde{G_2}$	$\widetilde{C_4}$	$\widetilde{F_4}$

7. Köszönetnyilvánítás

Ezúton szeretnék köszönetet mondani témavezetőmnek, Dr. Molnár Emil professzornak, aki még egyetemista koromban érdeklődésemet az adott téma felé irányította és az elmúlt években észrevételeivel, tanácsaival segítette munkámat.

1. Introduction

The thesis discusses an extensive domain of geometric transformations in several topics. In the introduction I established that symmetry is a fundamental phenomenon of our environment, we see it in nature and apply it in architecture and in arts. Symmetry has been the subject of scientific investigation for centuries. The Erlanger Program (of Felix Klein), i.e.the problem: which geometric properties remain invariant under certain transformations, became to a fundamental aspect of the research of geometries. These investigations have also contributed to the development of group theory and several other mathematical topics.

2. Outline of geometric transformations

In Chapter 2 I gave a survey of isometries and similarities in Euclidean plane and space, mentioning a wider range of transformations as well. I presented the basic concepts and theorems which are important from the point of view of interpretation and systematization of transformations. Transformations were classified according to the number of fixed points and whether they preserve the orientiation of plane and space, respectively, or not. We define the product of transformations as successive application of transformations. Theorem 2.4. deals with the representation of plane isometries as product of reflections, whereas, Theorem 2.16. provides the analogous statement in space applying plane-reflections. As regards similarity, I emphasized that, due to the arbitrary choice of the longitudinal unit, Euclidean geometry investigates properties that remain invariant while applying similarity. In Section 2.5 an outlook was given on affine and projective transformations. I briefly referred to connections with descriptive geometry, to application in computer graphics and mentioned the possibility of n-dimensional interpretation. I also touched upon group theoretical and linear algebraical connections in addition to elementary geometrical approach. The aim of this chapter was to provide the theoretical background for the topics discussed later on.

3. Steps of teaching geometric transformations in school education

In Chapter 3 I analysed the methods used for teaching geometric transformations at school based on my several decennial educational experience. I expressed my thoughts in this topic at the László Rátz Itinerary Congress and at the Tamás Varga Days as well.

I have been teaching at an eight-form secondary school for children of age between 10 and 18. This provided me the opportunity to sum up and report on my experience on methodology regarding the material taught both at senior section of elementary school and at secondary school. The presentation of the lecture, I gave at the László Rátz Itinerary Congress, is available on my website (www.szolda.hu/he).

4. The application of geometric transformations in a competition exercise

I have been a member of the special mathematical classes' committee of the National Secondary School Competition for ages. The following exercise was set in the school year 2006/2007 at my initiative:

Let the triangle ABC be named in positive sense. The angles of the triangle at vertices A, B and C are α, β and γ, respectively. We rotate vertex B about point A in negative direction through angle α, then we rotate the resulting point B_1 about point B in negative direction through angle β, finally rotating the obtained point B_2 about point C in negative direction through angle γ we get point B_3. Let us construct the triangle, if points B, B_3 and the centre O of the incircle of triangle ABC are given!

In Chapter 4 in connection with this exercise, I illustrate on what level students can apply geometric transformations in solving exercises based on knowledge discussed in the previous chapter.

5. On the application of fundamental theorem of reflection geometry

The above thoughts led to an axiomatical problem, the solution of which I provided in Chapter 5. Following the presentation of the basic concepts of reflection geometry I state the spatial equivalent of Theorem 5.5.:

Theorem 5.9. *Let a and b be two distinct lines in the space and let X be an arbitrary point in the space not incident with both lines. Then there exists a line g, such that X is incident with g and agb can be replaced with a line-reflection h.*

The proof was given not only within the scope of Euclidean geometry. I also show that the contruction is not always unique. In Theorem 5.10. I gave the condition of the uniqueness:

Theorem 5.10. *In Euclidean space the construction in Theorem 5.9 is unique precisely if a and b are intersecting or skew lines and X is not on their common perpendicular.*

In hyperbolic space the construction is unique either if a and b have a common perpendicular line and X is not incident with it, or if a and b do not have a common perpendicular line. This latter case occurs in the classical Bolyai-Lobachevskian hyperbolic space iff a and b are parallel in hyperbolic sense, i.e. they lie in a plane without common point and without common perpendicular line.

The subject of this Chapter was published in [30], which contains the two theorems mentioned above as new results.

6. Crystallographic groups

I got acquainted with a topic of multidimentional crystallography at my university studies which lead to today's researches as well. In his paper [51] S.S. Ryshkov gave the group of integral automorphisms of the following quadratic forms as maximal groups:

$$q(\mathbf{x}) = 4x^1x^1 + 4x^2x^2 + 4x^3x^3 + 4x^4x^4 + 2x^1x^2 - 4x^1x^3 - \\ - 4x^1x^4 - 4x^2x^3 - 4x^2x^4 + 2x^3x^4 \ . \qquad (T)$$

$$q(\mathbf{x}) = 4x^1x^1 + 4x^2x^2 + 4x^3x^3 + 4x^4x^4 - 2x^1x^2 - 2x^1x^3 - \\ - 2x^1x^4 - 2x^2x^3 - 2x^2x^4 - 2x^3x^4 \ , \qquad (P_4)$$

$$q(\mathbf{x}) = x^1x^1 + x^2x^2 + x^3x^3 + x^4x^4 - x^1x^2 - x^2x^3 - x^3x^4 \ . \qquad (S_4)$$

This latter is equivalent with the quadratic form in [11]:

$$q(\mathbf{x}) = x^1x^1 + x^2x^2 + x^3x^3 + x^4x^4 + x^1x^2 + x^1x^3 + \\ + x^1x^4 + x^2x^3 + x^2x^4 + x^3x^4 \ . \qquad (S_4)$$

Futhermore, we have the following forms:

$$q(\mathbf{x}) = x^1x^1 + x^2x^2 + x^3x^3 + x^4x^4 - x^1x^2 - x^3x^4 \ , \qquad (B)$$

$$q(\mathbf{x}) = x^1x^1 + x^2x^2 + x^3x^3 + x^4x^4 \ , \qquad (C_4)$$

$$q(\mathbf{x}) = x^1x^1 + x^2x^2 + x^3x^3 + x^4x^4 + x^1x^2 - x^1x^3 - \\ - x^1x^4 - x^2x^3 - x^2x^4 \ . \qquad (Q_4)$$

This is again equivalent with the quadratic form in [11] :

$$q(\mathbf{x}) = x^1x^1 + x^2x^2 + x^3x^3 + x^4x^4 + x^1x^2 + x^1x^4 + \\ + x^2x^3 - x^3x^4 \ . \qquad (Q_4)$$

G. Maxwell [35] raised the question whether the group of T above was a reflection group. In my thesis I answer this question in the negative. I determined the maximal reflection subgroup of the point group of T, which is denoted as a direct product $A_2 \times A_2$ according to the notation in [8]. The Coxeter graph of this group is shown in Figure 18:

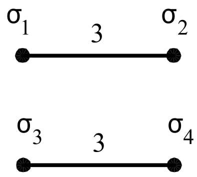


Figure 18.

I determined the fundamental domain of $A_2 \times A_2$. With this knowledge I found transformations that cannot be represented as product of reflections. Eventually I was able to define the whole point group consisting of 144 elements. In the next step I determined the maximal reflection subgroup in the whole symmetry group of the lattice Λ, which is $\tilde{A}_2 \times \tilde{A}_2$ according to the notation [8]. The Coxeter graph of this group is shown in Figure 20. I also determined the appropriate fundamental domain; its 2-dimensional axonometric projection is indicated in Figure 21.

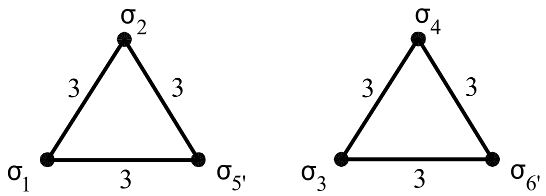


Figure 20.

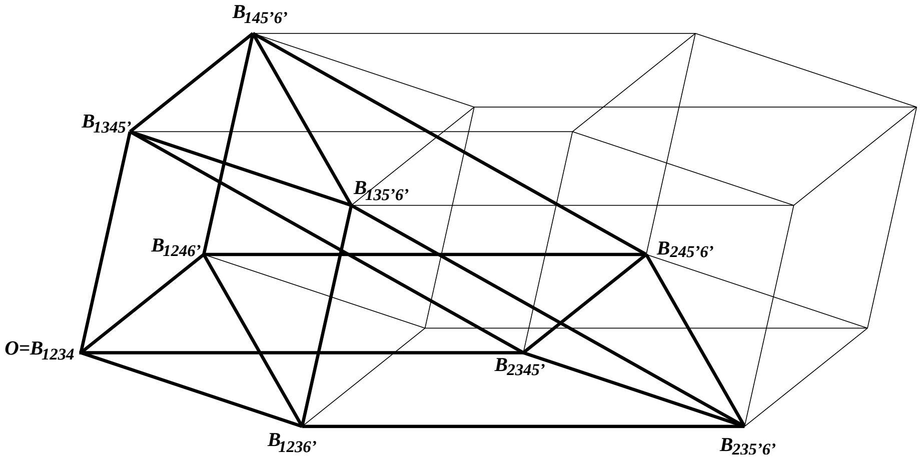


Figure 21.

I answered these questions in the other cases as well. Finally I gave the location of the considered groups in the tables of monograph [11]. Table 3 and Table 4 contain a summary of the results. This chapter has been published in [31].

Table 3: Results for the different cases I.(ld.[8],[11])

The group	T	P_4	S_4
The maximal reflection group of point group	$A_2 \times A_2$	A_4	A_4
Is the group a pure reflection group?	NO	NO	NO
The location in the tables of monograph [11]	XXI.29/09/01	XXII.31/07/01	XXII.31/07/02
The reflection subgroup in the whole symmetry group	$\tilde{A}_2 \times \tilde{A}_2$	$\tilde{A}_4$	$\tilde{A}_4$

Table 4: Results for the different cases II.(ld.[8],[11])

The group	B	C_4	Q_4
The maximal reflection group of point group	$G_2 \times G_2$	C_4	F_4
Is the group a pure reflection group?	NO	IGEN	IGEN
The location in the tables of monograph [11]	XXI.30/13/01	XXIII.32/21/01	XXIII.33/16/01
The reflection subgroup in the whole symmetry group	$\widetilde{G_2} \times \widetilde{G_2}$	$\widetilde{C_4}$	$\widetilde{F_4}$

7. Acknowledgement

I would like to take the opportunity and express my gratitude towards my supervisor, Professor Dr. Emil Molnár, who directed my interest to this topic while I was a university student and, over the past years, assisted my work with his comments and advices.

Hivatkozások-References

[1] Ács, L.; Molnár, E.: Algorithm for D-V cells and fundamental domains of E4 space groups with broken translations in the icosahedral family *J. for Geometry and Graphics.* **6**(2002), No.1, 1–16.

[2] Ahrens, J: Begründung der absoluten Geometrie des Raumes aus dem Spiegelungsbegriff , *Math. Zeitschrift.* **71** (1959), 154-185.

[3] Bachmann, F: *Aufbau der Geometrie aus dem Spiegelungsbegriff*, Springer, 1959,1973

[4] Bácsó, S.; Hoffmann, M.: *Fejezetek a geometriából.* EKF Líceum Kiadó, 2003.

[5] Baziljev, V. T.; Dunyicsev, K. I.; Ivanyickaja; V. P.: *Geometria I.*. Tankönyvkiadó, Budapest, 1985.

[6] Baziljev, V. T.; Dunyicsev, K. I.: *Geometria II.*. Tankönyvkiadó, Budapest, 1985.

[7] Bódi, B.: *Algebra I.* Kossuth Egyetemi Kiadó, Debrecen, 2002.

[8] Bourbaki, N.: *Groupes et Algébres de Lie. Chap. IV-VI.* Hermann, Paris, 1968, Russian translation Mir, Moscow, 1972, English translation Springer, 2002.

[9] Bovdi, V. A.; Gudovik, P. M.; Rudko, V. P.: Torsion-free Goups with indecomposable Holonomy Group. I. *J. Group Theory.* **5**(2002), No.1, 75–96.

[10] Bovdi, V. A.; Gudovik, P. M.; Rudko, V. P.: Torsion-free Goups with indecomposable Holonomy Group. II. *J. Group Theory.* **7**(2004), No.4, 555–569.

[11] Brown, H.; Bülow, R.; Neubüser, J.; Wondratschek, H.; Zassenhaus, H.: *Crystallographic Groups of Four-dimensional Space.* Wiley-Interscience, 1978.

[12] Coxeter, H.S.M; Moser, W.O.J.: *Generators and Relations for Discrete Groups.* 4th ed., Ergebnisse der Math. und ihrer Grenzgebiete, Bd.14, Springer Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1980.

[13] Coxeter, H.S.M.: *A geometriák alapjai.* Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1973.

[14] Dade, E.C.: The maximal finite groups of 4×4 integral matrices. *Illinois J. Math.* **9**(1965) 99–122.

[15] Emmer, M.: *Simmetria e spazio.*, ART and MATHEMATICS , video

[16] Emmer, M.: *Geometries and impossible worlds.*, ART and MATHEMATICS , video

[17] Foley, J.D.; van Dam, A.; Feiner, S.K.; Hughes, J.F.: *Computer Graphics: Principles and Practice.* Addison-Wesley, 1997

[18] Freud, R.: *Lineáris algebra.* ELTE Eötvös Kiadó, Budapest, 2004.

[19] Gazsó Dr., I.: *Transzformációk.* Általános iskolai szakköri füzet, Tankönyvkiadó, Budapest, 1972.

[20] Grossman, I.; Magnus, W.: *Csoportok és gráfjaik.* Műszaki könyvkiadó, Budapest, 1972.

[21] Hajós, Gy.: *Bevezetés a geometriába* Tankönyvkiadó, Budapest, 1972.

[22] Hargittai, M.; Hargittai, I.: *Fedezzük fel a szimmetriát!.* Tankönyvkiadó, Budapest, 1989.

[23] Hargittai, M.; Hargittai, I.: *Képes szimmetria.* Galenus, Budapest, 2005.

[24] Hollai, M.: A merőleges vetítés korábbi tanításának előnyei, *ELTE TTK Szakmódszertani Közleményei* **IV.** (1971) 91-116.

[25] Hollai, M.: A geometriai gondolkodás és a transzformáció-szemlélet szintjei, *ELTE TTK Szakmódszertani Közleményei* **V.** (1972) 41-48.

[26] Hollai, M.: A transzformációkra alapozott geometriai fogalmak fejlődése és kapcsolataik a matematika más területeivel, *ELTE TTK Szakmódszertani Közleményei* **VIII.** (1975) 22-41.

[27] Hollai, M.; Horváth J.: A sík és a tér affin transzformációi, *ELTE TTK Szakmódszertani Közleményei* **VI.** (1973) 36-84.

[28] Horváth, J.: A sík és a tér egybevágósági transzformációi, *ELTE TTK Szakmódszertani Közleményei* **IV.** (1971) 48-70.

[29] Horvay, K.: Geometriai transzformációk az általános- és középiskolai tanításban , *ELTE TTK Szakmódszertani Közleményei* **I.** (1968) 24-46.

[30] Horváth, E.: On a fundamental theorem of reflection geometry. *Annales Univ.Sci. Budapest.* **46** (2003) 133–148.

[31] Horváth, E.: On four-dimensional crystallographic groups. *Teaching Mathematics and Computer Science* **4/2** (2006) 391–404.

[32] Kiss, E.: *Bevezetés az algebrába.* Typotex kiadó,Budapest, 2007.

[33] Kovács, Z.: *Geometria.* Kossuth Egyetemi Kiadó, Debrecen, 2004.

[34] Martin, G.M.: *Transformation Geometry.* Springer Verlag, New York-Heidelberg-Berlin, 1982.

[35] Maxwell, G.: The crystallography of Coxeter groups. *J. Algebra.* **35**(1975) 159–178.

[36] Molnár, E.: *Elemi matematika II. (Geometriai transzformációk).* Tankönyvkiadó, 1974.

[37] Molnár, E.: A tükrözésgeometriáról, *ELTE TTK Szakmódszertani Közleményei* **VII.** (1974) 86-130.

[38] Molnár, Emil: Tükrözésgeometria a térben, *ELTE TTK Szakmódszertani Közleményei* **VIII.** (1975) 76-107.

[39] Molnár, E.: Some old and new aspects on the crystallographic groups. *Periodica Polytechnica Ser. Mech. Eng.* **36**(1992) 191–218.

[40] Molnár, E.; Prok, I.; Szirmai, J.: D-V Cells and Fundamental Domain for Crystallographic Groups, Algorithms, and Graphic Realizations. *Mathematical and Computer Modelling*, Vol. **38**, No.**7-9** (2003), Hungarian Applied Mathematics and Computer Applications, Guest Editor: A. Benczur, 929–943, www.elsevier.com/locate/mcm

[41] Nyisztor, K.: *Grafika és játékprogramozás DirectX-szel.* SZAK kiadó, 2005.

[42] Pataki, T.:*Papírcsodák.* Ságvári Endre Könyvszerkesztőség, 1983.

[43] Rédling, E.: Megjegyzések a hasonlóság tanításához, *ELTE TTK Szakmódszertani Közleményei* **V.** (1972) 170-178.

[44] Rédling, E.: A hasonlóság témakörének felépítéséről, *ELTE TTK Szakmódszertani Közleményei* **VII.** (1974) 131-154.

[45] Rédling, E.: A hasonlósági transzformáció tulajdonságai, *ELTE TTK Szakmódszertani Közleményei* **VII.** (1974) 155-175.

[46] Rédling, E.: Az egybevágóság és a szimetria kapcsolatáról, *ELTE TTK Szakmódszertani Közleményei* **VIII.** (1975) 109-133.

[47] Rédling, E.; Szénásy M.: A hasonlóság tanításának néhány tapasztalata, *ELTE TTK Szakmódszertani Közleményei* **X.** (1977) 147-160.

[48] Reiman, I.: A geometriai transzformációk és a függvénytranszformációk kapcsolata matematatika tanításában, *ELTE TTK Szakmódszertani Közleményei* **III.** (1970) 21-39.

[49] Reiman, I.: *Matematika.* Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1992.

[50] Reiman, I.: *A geometria és határterületei.* Gondolat, Budapest, 1986.

[51] Ryshkov, S.S.: Maximal finite groups of integral $n \times n$ matrices and full groups of integral authomorphisms of positive quadratic forms (Bravais models). *Trudy Mat. Inst. Steklov.* **128**(1972) 183–211.(in Russian), *Proc. Steklov Inst. Math.* **128**(1972) 217–250,(in English)

[52] Ryshkov, S.S.: On complete groups of integral automorphisms of quadratic forms. *Soviet. Math. Dokl.* **13**(1972) 1251–1254.

[53] Szirmay-Kalos, L.;Antal, Gy.; Csonka, F.: *Háromdimenziós grafika, animáció és játékfejlesztés.* ComputerBooks, Budapest, 2006.

[54] Temesvári, Á.: A sík és a tér hasonlósági transzformációi, *ELTE TTK Szakmódszertani Közleményei* **V.** (1972) 179-198.

[55] Temesvári, Á.: A tér hasonlósági transzformációi, *ELTE TTK Szakmódszertani Közleményei* **VII.** (1974) 204-218.

[56] Vigassy, L.: *Egybevágósági transzformációk a síkban és a térben.* Középiskolai szakköri füzet, Tankönyvkiadó, 1979.