1. Bevezetés

A csoportalgebrák a csoportok reprezentációinak vizsgálata során keletkeztek, azonban a matematika számos területén, így a homológia és a kohomológia elméletben, valamint az algebrai topológiában is alkalmazzák őket. Először Frobenius használta ezt a testekből és csoportokból felépülő érdekes algebrai konstrukciót, mely segítségével a véges csoportok reprezentációit tanulmányozta. A csoportalgebra elnevezés azonban Noether nevéhez fűződik.

A csoportalgebrák kutatása a múlt század 30-as éveinek elején kezdődött főleg Frobenius, Schur, Magnus, Noether, Higman és Jennings eredményeivel. Alapvető struktúratételek az 1960-as évektől születnek, és azóta a csoportalgebrák elméletén belül nagy kutatási területek alakultak ki. Ma ilyen meghatározó kutatási irányok a gyűrűelméleti tulajdonságok vizsgálata mellett a csoportalgebrák egységcsoportjának, valamint asszociált Lie algebrájának a tanulmányozása.

2. Alapfogalmak és jelölések

Legyen G egy csoport és $\mathbb{F}$ egy test, melynek az egységeleme 1. Jelöljük $\mathbb{F}G$-vel az összes $\sum_{g\in G}\alpha_g g$ alakú formális összegek halmazát, ahol csak véges sok $\alpha_g \in \mathbb{F}$ együttható nem nulla. Nyilván $\mathbb{F}G$ vektortér az $\mathbb{F}$ test felett, amelynek G a bázisa és a G csoport szorzásművelete indukál egy szorzást az $\mathbb{F}G$ halmazon. Könnyen belátható, hogy $\mathbb{F}G$ algebra az $\mathbb{F}$ test felett, melyet *csoportalgebrának* nevezünk. Abban az esetben, ha $\mathbb{F}$ egy p karakterisztikájú test, és G tartalmaz p-rendű elemet, *moduláris csoportalgebráról* beszélünk.

Most megemlítünk egy problémát, amely Higmantól és Thralltól származik, és nagy hatást gyakorolt a csoportalgebrák szerkezetének a tanulmányozására, és az egységcsoport vizsgálatára.

Legyenek az $\mathbb{F}G$ és $\mathbb{F}H$ csoportalgebrák izmorfak mint algebrák az $\mathbb{F}$ test felett. Milyen összefüggés van a G és a H csoportok között, milyen feltételek kellenek a G és a H csoportok izomorfiájához?

Deskins [26] véges Abel p-csoportok esetén pozitív választ adott erre az izomorfia kérdésre, azaz ha az algebrák izomorfak, akkor a csoportok is izomorfak. Nem Abel-csoportokra sok szerző vizsgálta ezt a kérdést, amely máig sem megoldott. Baginski [3] bebizonyította, hogy maximális osztályú 2-csoportok csoportalgebrái a két elemű test felett egyértelműen meghatározzák a csoportokat. A további ide vonatkozó eredmények Sandling [42] áttekintő cikkében megtalálhatóak.

A csoportalgebrák egységeinek $U(\mathbb{F}G)$ halmaza csoportot alkot, és a

$$V(\mathbb{F}G) = \Big\{ \sum_{g\in G} \alpha_g g \in U(\mathbb{F}G) \;\Big|\; \sum_{g\in G} \alpha_g = 1 \Big\}$$

részhalmaza normális részcsoport, melyet *normalizált egységcsoportnak* nevezünk. Ismert, hogy $U(\mathbb{F}G) = V(\mathbb{F}G) \times U(\mathbb{F})$, ahol $U(\mathbb{F})$ az $\mathbb{F}$ test egységcsoportja, így a teljes egységcsoport vizsgálata helyett annak $V(\mathbb{F}G)$ normalizált egységcsoportját vizsgálva juthatunk információkhoz az egységcsoportról. Ez az elmélet áttekintő jelleggel megtalálható Artamonov és Bódi [1], Bódi [11] cikkeiben, valamint Bódi [22] könyvében.

A G csoport Frattini részcsoportját $\Phi(G)$, a centrumát pedig $\zeta(G)$ jelöli. Jól ismert, hogy a Frattini részcsoport véges G p-csoportok esetén egybeesik a $G'G^p$ részcsoporttal, ahol $G^p = \langle \; g^p \;\mid\; g \in G \; \rangle$, és G' a G csoport kommutátor részcsoportja.

3. Új eredmények

Az értekezés témája a csoportalgebra multiplikatív filtrációs bázisának tanulmányozása, és az egységcsoport egyes tulajdonságainak a vizsgálata.

Legyen G véges p-csoport és $\mathbb{F}_p$ a p elemű test. Ekkor az

$$A(\mathbb{F}_pG) = \Big\{ \sum_{g\in G} \alpha_g g \in \mathbb{F}_pG \;\Big|\; \sum_{g\in G} \alpha_g = 0 \Big\}$$

fundamentális ideál nilpotens, és a $V(\mathbb{F}_pG)$ normalizált egységcsoport egybeesik $1+A(\mathbb{F}_pG)$-vel. Tehát az $\mathbb{F}_pG$ csoportalgebra $\sum_{g\in G} \alpha_g g$ eleme akkor és csak akkor tartozik a normalizált egységcsoporthoz, ha $\sum_{g\in G} \alpha_g = 1$. Emiatt a $V(\mathbb{F}_pG)$ normalizált egységcsoport rendje $p^{|G|-1}$.

Mivel a véges egyszerű csoportok leírása után a véges p-csoportok szerkezete került a csoportelméleti vizsgálatok középpontjába, így aktuálissá vált a véges p-csoportok csoportalgebra egységcsoportjának tanulmányozása.

A disszertáció első részében a $V(\mathbb{F}_2G)$ normalizált egységcsoport struktúráját vizsgáljuk, ha G egy 2^n-rendű maximális osztályú csoport, azaz a G csoport nilpotencia osztálya $n-1$. Ismert, hogy a maximális osztályú 2-csoportok a $C = \langle \; a \;\mid\; a^{2^n} = 1 \; \rangle$ ciklikus csoport következő bővítései:

$$\begin{aligned}
Q_{2^{n+1}} &= \langle \; a, b_1 \;\mid\; a^{2^n} = 1, b_1^2 = a^{2^{n-1}}, (a,b_1) = a^{-2} \rangle \text{ és } \; n \geq 2;\\
D_{2^{n+1}} &= \langle \; a, b_2 \;\mid\; a^{2^n} = 1, b_2^2 = 1, (a,b_2) = a^{-2} \rangle \text{ és } \; n \geq 2;\\
SD_{2^{n+1}} &= \langle \; a, b_3 \;\mid\; a^{2^n} = 1, b_3^2 = 1, (a,b_3) = a^{-2+2^{n-1}} \rangle \text{ és } \; n \geq 3.
\end{aligned}$$

Megemlítjük, hogy az $\mathbb{F}_pG$ csoportalgebra $x \mapsto x^\sigma$ leképezését *involúciónak* nevezzük, ha

$$(x+y)^\sigma = x^\sigma + y^\sigma, \quad (xy)^\sigma = y^\sigma x^\sigma, \quad \text{és} \quad (x^\sigma)^\sigma = x.$$

Egy adott σ involúcióra a

$$V_\sigma(\mathbb{F}_pC) = \left\{\, x \in V(\mathbb{F}_pC) \;\middle|\; x^{-1} = x^\sigma \,\right\}$$

halmaz a normalizált egységcsoport részcsoportja lesz, melyet *σ-unitér részcsoportnak* nevezünk.

Az $\mathbb{F}_2C$ algebra kanonikus involúciója a C csoport $a^i \mapsto a^{-i}$ automorfizmusának $x \mapsto x^*$ lineáris kiterjesztése az $\mathbb{F}_2C$ csoportalgebrára. Az $\mathbb{F}_2C$ csoportalgebrának van egy másik $x \mapsto x^\circledast$ involúciója, amely a C csoport $a^i \mapsto a^{(2^{n-1}-1)i}$ automorfizmusának lineáris kiterjesztése az $\mathbb{F}_2C$ csoportalgebrára.

A második fejezetben a $V(\mathbb{F}_2G)$ normalizált egységcsoport másodrendű elemeinek struktúráját határozzuk meg maximális osztályú 2-csoportok esetén. Megmutatjuk, hogy szoros összefüggés van a $V(\mathbb{F}_2G)$ csoport másodrendű elemei és a $V(\mathbb{F}_2C)$ csoport unitér részcsoportjai között, ha G maximális osztályú 2-csoport. A fejezet főtételének bizonyításához szükségünk van a $V_\circledast(\mathbb{F}_2C)$ csoport rendjére, és a következő felbontására:

Tétel. *A $V_\circledast(\mathbb{F}_2C)$ unitér részcsoport rendje $2^{\frac{|C|}{2}}$ és*

$$V_\circledast(\mathbb{F}_2C) = W_\circledast(C) \times \langle\, 1 + \widehat{C} \rangle,$$

ahol $\widehat{C}$ a C csoport elemeinek az összege, $W_\circledast(C)$ pedig a $\varphi(x) = x^\circledast x^{-1}$ $\big(x \in V(\mathbb{F}_2C)\big)$ homomorfizmus képe.

A kanonikus involúció által meghatározott unitér részcsoport és a fent definiált $\circledast$ involúció unitér részcsoportjának rendje között fennáll a következő összefüggés:

Következmény. *Legyen C ciklikus csoport, ekkor*

$$\big|V_\circledast(\mathbb{F}_2C)\big| = \frac{|V_*(\mathbb{F}_2C)|}{2}.$$

Az előző eredmények felhasználásával bebizonyítjuk a fejezet főtételét:

Tétel. *Jelölje $\Theta_G(2)$ a másodrendű elemek számát a $V(\mathbb{F}_2G)$ normalizált egységcsoportban. Ekkor*

$$\begin{aligned}
\Theta_{D_{2^{n+1}}}(2) &= 2^{2^n+n-1} + 2^{2^n};\\
\Theta_{SD_{2^{n+1}}}(2) &= 2^{2^n+n-1};\\
\Theta_{Q_{2^{n+1}}}(2) &= 2^{2^n+n-1} - 2^{2^n}.
\end{aligned}$$

Természetes az a kérdés, amely Berman nevéhez fűződik, és amelyet a normalizált egységcsoport izomorfia problémájának nevezünk. Vajon a $V(\mathbb{F}_pG)$ csoport egyértelműen határozza-e meg a G csoportot? Berman [9] igazolta, hogy véges G Abel p-csoportok esetén a $V(\mathbb{F}_pG)$ csoport egyértelműen meghatározza a G csoportot izomorfia erejéig. A főtétel következményeként azonnal adódik a normalizált egységcsoport izomorfia problémájának megoldása maximális osztályú 2-csoportokra:

Következmény. *Legyen G és H maximális osztályú 2-csoport. Ekkor $V(\mathbb{F}_2G)$ izomorf a $V(\mathbb{F}_2H)$ normalizált egységcsoporttal akkor és csak akkor, ha G és a H izomorfak.*

Megjegyezzük, hogy ez a következmény Baginski [3] eredményének az általánosítása.

Másik időszerű probléma a véges p-csoportok elméletében a p-hatványstruktúra leírása. Az ezekből származó eredmények sok tétel bizonyítását tették lehetővé a véges p-csoportok elméletében. A csoportalgebra $V(\mathbb{F}_pG)$ normalizált egységcsoportjára ilyen vizsgálatok nem terjedtek ki.

A harmadik fejezetben a normalizált egységcsoport p-hatványstruktúrájának tulajdonságait vizsgáljuk, ha a $V(\mathbb{F}_pG)$ csoport nilpotencia osztálya p. Baginski [2], Shalev és Mann [39, 43] bebizonyították, hogy a $V(\mathbb{F}_pG)$ nilpotencia osztálya akkor és csak akkor p, ha a G' kommutátor részcsoport rendje p.

Tétel. *Legyen G olyan p-csoport, melynek a kommutátor részcsoportja p prímrendű. A $V(\mathbb{F}_pG)^p$ csoport részcsoportja a $\zeta\big(V(\mathbb{F}_pG)\big)$ centrumnak.*

Jelölje $C_{g_1}, C_{g_2}, \dots, C_{g_t}$ a G csoport összes különböző, legalább kételemű konjugált osztályát, és legyen $\widehat{C_{g_i}}$ a C_{g_i} konjugált osztály elemeinek az összege.

Tétel. *Legyen G véges nem Abel p-csoport ciklikus p-rendű Frattini részcsoporttal, és $N = \prod_{i=1}^{t}\langle 1+\widehat{C_{g_i}}\rangle$. Ekkor a $V(F_pG)^p$ centrális részcsoport a $V\big(F_pG^p\big)$ és az N csoportok direkt szorzata.*

Johnson [35] cikkében található a következő érdekes kérdés: Igaz-e hogy $G^p = V(\mathbb{F}_pG)^p \cap G$? Az előző eredmények következményeként bebizonyítjuk:

Következmény. *Legyen $p > 2$ és G p-csoport, p-rendű Frattini részcsoporttal. Ekkor*

$$G^p = V(\mathbb{F}_pG)^p \cap G.$$

Berger, Kovács és Newman [8] leírták azokat a G véges p-csoportokat, melyek Frattini részcsoportja ciklikus. Ez és a normalizált egységcsoport struktúrájára vonatkozó eddigi eredményeink lehetővé tették a következő tétel bizonyítását:

Tétel. *Legyen G és H p-csoport ($p > 2$) ciklikus Frattini részcsoporttal. Ekkor $V(\mathbb{F}_pG)$ izomorf $V(\mathbb{F}_pH)$ akkor és csak akkor, ha G és a H izomorfak.*

Az értekezés negyedik fejezetében a csoportalgebra multiplikatív filtrációs bázisát vizsgáljuk p karakterisztikájú $\mathbb{F}$ testek felett, melyet 1965-ben Kupisch vezetett be.

Legyen A egy véges dimenziós algebra az $\mathbb{F}$ test felett, melynek $rad(A)$ a Jacobson radikálja, és B az algebra $\mathbb{F}$ test feletti bázisa. Tegyük fel, hogy a B bázis a következő tulajdonsággal rendelkezik:

1. ha $u, v \in B$, akkor vagy $u \cdot v = 0$ vagy $u \cdot v \in B$,
2. $B \cap rad(A)$ a $rad(A)$ radikál egy $\mathbb{F}$-bázisa.

Az ilyen B bázist az A algebra *multiplikatív filtrációs* $\mathbb{F}$*-bázisának* nevezzük.

A multiplikatív filtrációs bázis jelentőségét Bautista, Gabriel, Roiter, és Salmeron [7] reprezentációelméleti vizsgálatai adták meg. Bebizonyították, hogy ha egy algebrailag zárt $\mathbb{F}$ test felett az A algebrának csak véges sok felbonthatatlan reprezentációja van, akkor A-nak van multiplikatív filtrációs $\mathbb{F}$-bázisa. A problémát, hogy az $\mathbb{F}G$ csoportalgebrának mikor létezik multiplikatív filtrációs bázisa, Bautista, Gabriel, Roiter, és Salmeron vetették fel [7] cikkükben.

Csoportalgebrák esetében Higman [30] bebizonyította, hogy az $\mathbb{F}G$ csoportalgebra véges reprezentáció típusú akkor és csak akkor, ha az $\mathbb{F}$ test karakterisztikája p, és G Sylow p-csoportjai ciklikusak.

Landrock és Michler [38] 1978-ban megmutatták, hogy a legkisebb Janko-csoport csoportalgebrája 2 karakterisztikájú test felett nem tartalmaz multiplikatív filtrációs $\mathbb{F}$-bázist. 1987-ben Parisnak [40] sikerült példát adnia olyan nem kommutatív $\mathbb{F}G$ csoportalgebrára, melynek van multiplikatív filtrációs $\mathbb{F}$-bázisa.

A multiplikatív filtrációs bázis szisztematikus tanulmányozása Bódi dolgozataiban található meg. A [16] és [17] cikkekben megadta az összes metaciklikus csoportot, amely csoportalgebrája tartalmaz multiplikatív filtrációs bázist, továbbá az összes olyan p^m-rendű csoportot, amely tartalmaz p^{m-2}-rendű ciklikus részcsoportot, és a csoportalgebrája tartalmaz multiplikatív filtrációs bázist. Bebizonyította továbbá, hogy a hatványteljes, azaz powerful csoportok csoportalgebrái nem tartalmaznak ilyen bázist.

Ezen kutatásokhoz kapcsolódva a negyedik fejezetben megadjuk az összes olyan p^5-nél kisebb rendű p-csoportot, amely csoportalgebrájának van multiplikatív filtrációs $\mathbb{F}$-bázisa, és megadjuk a bázist is:

Tétel. *Legyen G egy nem Abel p-csoport, melynek a rendje kisebb vagy egyenlő mint p^4, és $\mathbb{F}$ egy p karakterisztikájú test. Az $\mathbb{F}G$ csoportalgebrának akkor és csak akkor van multiplikatív filtrációs $\mathbb{F}$-bázisa, ha G egybeesik a következő csoportok egyikével:*

1. *8-ad vagy 16-od rendű D_n diédercsoport,*
2. *Q_8 nyolcadrendű kvaterniócsoport vagy Q_8 és a C_2 másodrendű ciklikus csoport direkt szorzata és $\mathbb{F}$ tartalmaz primitív harmadik egységgyököt,*
3. *D_8 nyolcadrendű diédercsoport és a C_2 másodrendű ciklikus csoport direkt szorzata, vagy D_8 és a C_4 negyedrendű ciklikus csoport centrális szorzata,*
4. $$H_{16} = \langle\ a, c \mid a^4 = b^2 = c^2 = 1,\ (a,b) = 1, (a,c) = b, (b,c) = 1\ \rangle.$$

Ennek a következménye, hogy $\mathbb{F}G$-ben, ahol G teljesíti az előző tétel feltételeit, filtrációs bázis csak akkor létezik, ha $p = 2$.

Teljes leírást adunk az összes 2^5-rendű csoportok csoportalgebráiról, amelyek tartalmaznak multiplikatív filtrációs bázist. A vizsgálathoz felhasználtuk a GAP [28] computer algebrai rendszert és a LAGUNA [18] csomagját. A tételben a csoportok felsorolásában szereplő indexek megegyeznek a GAP csoportazonosító sorszámával.

Tétel. *Legyen G egy 2^5-rendű nem Abel 2-csoport, és $\mathbb{F}$ egy 2 karakterisztikájú test. Ekkor az $\mathbb{F}G$ csoportalgebrának akkor és csak akkor van multiplikatív filtrációs $\mathbb{F}$-bázisa, ha G a következő csoportok valamelyike:*

1. *$G_{25} = D_8 \times C_4$, $G_{46} = D_8 \times C_2 \times C_2$, $G_{39} = D_{16} \times C_2$ vagy $G_{18} = D_{32}$;*
2. *$G_{26} = Q_8 \times C_4$, vagy $G_{47} = Q_8 \times C_2 \times C_2$ és $\mathbb{F}$ tartalmaz primitív harmadik egységgyököt;*
3. *$G_{22} = H_{16} \times C_2$, ahol H_{16} az előző tételben definiált;*
4. *$G_{48} = (D_8 \curlyvee C_4) \times C_2$, ahol $\curlyvee$ centrális szorzást jelöl;*
5.

$$
\begin{aligned}
G_2 &= \langle\ a, b \mid a^4 = b^4 = c^2 = 1,\ (a,b) = c,\ (a,c) = 1,\ (b,c) = 1\ \rangle;\\
G_5 &= \langle\ a, b \mid a^8 = b^2 = c^2 = 1,\ (a,b) = c,\ (a,c) = (b,c) = 1\ \rangle;\\
G_7 &= \langle\ a, b, c \mid a^8 = b^2 = c^2 = 1,\ (a,c) = a^4,\\
&\qquad\qquad (a,b) = a^4c,\ (b,c) = 1\ \rangle;\\
G_8 &= \langle\ a, b, c \mid a^8 = c^2 = 1,\ b^2 = a^4,\ (a,c) = a^4,\\
&\qquad\qquad (a,b) = a^4c,\ (b,c) = 1\ \rangle;\\
G_9 &= \langle\ a, b, c \mid a^2 = b^8 = c^2 = 1,\ (b,c) = ab^6,\ (a,c) = (a,b) = 1\ \rangle;\\
G_{10} &= \langle\ a, b, c \mid a^8 = b^4 = c^2 = 1,\ a^4 = b^2,\ (a,b) = a^6c,\\
&\qquad\qquad (a,c) = (b,c) = 1\ \rangle;\\
G_{11} &= \langle\ a, b, c \mid a^4 = b^4 = c^2 = 1,\ (b,c) = ab^2,\ (a,c) = (a,b) = 1\ \rangle;\\
G_{49} &= \langle\ a, b, c, d \mid a^4 = 1,\ b^2 = c^2 = d^2 = a^2,\ (a,b) = a^2,\ (c,d) = a^2,\\
&\qquad\qquad (a,c) = (a,d) = (b,c) = (b,d) = 1\ \rangle.
\end{aligned}
$$

Ezenkívül bebizonyítottuk 2-csoportokra a következő tételt:

Tétel. *Legyen $\mathbb{F}$ 2 karakterisztikájú test.*

1. *Ha*

$$
\begin{aligned}
G = \langle\ a, b \mid a^{2^n} = b^2 = c^2 = d^2 = 1,\ (a,b) = c,\ (a,c) = d,\\
(a,d) = (b,c) = (b,d) = (c,d) = 1\ \rangle,
\end{aligned}
$$

ahol $n > 1$, akkor az $\mathbb{F}G$ csoportalgebrának nincs multiplikatív filtrációs $\mathbb{F}$-bázisa.

2. *Ha*

$$
\begin{aligned}
G = \langle\ a, b \mid a^{2^n} = b^{2^m} = c^2 = 1,\ (a,b) = c,\\
(a,c) = 1,\ (b,c) = 1\ \rangle,
\end{aligned}
$$

ahol $n, m \geq 2$, akkor az $\mathbb{F}G$ csoportalgebrának van multiplikatív filtrációs $\mathbb{F}$-bázisa.

1. Introduction

The concept of a group algebra was introduced during the study of representation of groups. They are, however applied in numerous fields of mathematics as well, such as homology, cohomology and algebraic topology. It was Frobenius who first used this interesting algebraic construction consisting of fields and groups, by the help of it he studied representations of finite groups. The coinage group algebra comes from Noether.

The study of group algebras started at the begining of the 30s of the past century, mainly with the results of Frobenius, Schur, Magnus, Noether, Higman and Jennings. The most fundamental characterization theorems were proved during the 1960s and since then diverse fields of research have developed. Today the major directions of research include, besides the study of ring theoretical properties of the group algebras, the examination of groups of units of group algebras and their associated Lie algebras.

2. Definitions and notations

Let G be a group, and $\mathbb{F}$ a field with unity 1. Denote by $\mathbb{F}G$ the all formal sums $\sum_{g\in G}\alpha_g g$, where only finite coefficient $\alpha_g \in \mathbb{F}$ is not zero. Evidently, $\mathbb{F}G$ is a vector space over $\mathbb{F}$ with basis G. The multiplication of the group G induces a multiplication on $\mathbb{F}G$. Then $\mathbb{F}G$ is an algebra over the field $\mathbb{F}$ which is called *group algebra*. In the special case when $\mathbb{F}$ is a field of characteristic p and G contains an element of order p, $\mathbb{F}G$ is called *modular group algebra*.

Now let us mention a problem originating from Higman and Thrall, and which exerted a great influence on the study of the structure of group algebras and their groups of units.

If the group algebras $\mathbb{F}G$ and $\mathbb{F}H$ are isomorphic as algebras over the field $\mathbb{F}$ then what is the relation between the groups G and H, and under what conditions are G and H isomorphic?

Deskins [26] gave a positive answer to this isomorphism problem for finite abelian p-groups. Numerous authors have investigated this question with nonabelian groups which has not been solved so far. Baginski [3] solved the problem above for group algebras of 2-groups of maximal class over the field of elements two. Additional results can be found in the survey article of Sandling [42].

The set of units $U(\mathbb{F}G)$ of the group algebra $\mathbb{F}G$ forms a group and its subset

$$V(\mathbb{F}G) = \Big\{ \sum_{g\in G}\alpha_g g \in U(\mathbb{F}G) \;\Big|\; \sum_{g\in G}\alpha_g = 1 \Big\}$$

is a normal subgroup, which is called *normalized group of units*. It is well known fact that $U(\mathbb{F}G)$ is isomorphic to the direct product $V(\mathbb{F}G) \times U(\mathbb{F})$, where $U(\mathbb{F})$ is the group of units of the field $\mathbb{F}$. To get information on the group of units $U(\mathbb{F}G)$ it is enough to examine the normalized group of units $V(\mathbb{F}G)$ instead of the examination of the full group of units $U(\mathbb{F}G)$. A good survey of this theory can be found in Artamonov and Bovdi [1] and Bovdi [11], [22].

Let us mention some general remarks which will be used. The Frattini subgroup and the center of G will be denoted by $\Phi(G)$ and $\zeta(G)$, respectively. It is well known that for finite p-groups G the Frattini subgroup $\Phi(G)$ coincides with $G'G^p$, where $G^p = \langle\ g^p \mid g \in G\ \rangle$ and G' is the commutator subgroup of G. Let $\gamma_1(G) = G$ and

$$\gamma_{i+1}(G) = \big(\gamma_i(G), G\big).$$

The series of subgroups of G with the property

$$\gamma_1(G) \supseteq \gamma_2(G) \supseteq \cdots \supseteq \gamma_i(G) \supseteq \cdots$$

is called *lower central series*. Evidently, $\gamma_2(G)$ coincides with the commutator subgroup G'.

New results

The subject of the thesis is the examination of filtered multiplicative bases and groups of units of group algebras.

Let G be a finite p-group and $\mathbb{F}_p$ the field of p elements. Then the fundamental ideal

$$A(\mathbb{F}_pG) = \Big\{ \sum_{g \in G} \alpha_g g \in \mathbb{F}_pG \;\Big|\; \sum_{g \in G} \alpha_g = 0 \Big\}$$

is nilpotent, and the normalized group of units $V(\mathbb{F}_pG)$ coincides with $1 + A(\mathbb{F}_pG)$. Therefore, the element $\sum_{g \in G} \alpha_g g$ of group algebra $\mathbb{F}_pG$ is an element of the normalized group of units if and only if $\sum_{g \in G} \alpha_g = 1$. That is why the order of the normalized group of units $V(\mathbb{F}_pG)$ is $p^{|G|-1}$.

After the simple groups had been described, the structure of finite p-groups became the focus of studies on group theory, the study of groups of units of group algebras of finite p-groups has become topical.

In the first part of this thesis we investigate the structure of $V(\mathbb{F}_2G)$, where G is a group of maximal class of order 2^n, that is, its nilpotency class is $n-1$. It is well known that the 2-groups of maximal class are the following extensions of $C = \langle\ a \mid a^{2^n} = 1\ \rangle$:

$$\begin{aligned} Q_{2^{n+1}} &= \langle\ a, b_1 \mid a^{2^n} = 1, b_1^2 = a^{2^{n-1}}, (a, b_1) = a^{-2}\rangle \text{ with } n \geq 2; \\ D_{2^{n+1}} &= \langle\ a, b_2 \mid a^{2^n} = 1, b_2^2 = 1, (a, b_2) = a^{-2}\rangle \text{ with } n \geq 2; \\ SD_{2^{n+1}} &= \langle\ a, b_3 \mid a^{2^n} = 1, b_3^2 = 1, (a, b_3) = a^{-2+2^{n-1}}\rangle \text{ with } n \geq 3. \end{aligned}$$

Let us mention that the mapping $x \mapsto x^\sigma$ of the group algebra $\mathbb{F}_pG$ is called *involution*, if

$$(x+y)^\sigma = x^\sigma + y^\sigma, \quad (xy)^\sigma = y^\sigma x^\sigma, \quad \text{and} \quad (x^\sigma)^\sigma = x.$$

The set

$$V_\sigma(\mathbb{F}_pG) = \{\ x \in V(\mathbb{F}_pG) \mid x^{-1} = x^\sigma\ \}$$

is a subgroup of the group $V(\mathbb{F}_pG)$, which is called *σ-unitary subgroup.*

The linear extension $x \mapsto x^*$ of the automorphism $a^i \mapsto a^{-i}$ of the group C to the group algebra $\mathbb{F}_2C$ is the *canonical involution* of $\mathbb{F}_2C$. There is an other involution of $\mathbb{F}_2C$ which is the linear extension of the automorphism $a^i \mapsto a^{(2^{n-1}-1)i}$ of the group C to the algebra $\mathbb{F}_2C$.

In the second chapter the structure of elements of order two of the normalized group of units $V(\mathbb{F}_2G)$ is determined, where G is a 2-group of maximal class. We show that there is a strong correlation between elements of order two of the normalized group of units $V(\mathbb{F}_2G)$, where G is a 2-group of maximal class and the unitary subgroups of $V(\mathbb{F}_2C)$. To prove the main theorem of the chapter we need the order of the group $V_\circledast(\mathbb{F}_2C)$ and the following decomposition:

Theorem. *The order of the $\circledast$-unitary subgroup $V_\circledast(\mathbb{F}_2C)$ is $2^{\frac{|C|}{2}}$ and*

$$V_\circledast(\mathbb{F}_2C) = W_\circledast(C) \times \langle\ 1 + \widehat{C}\rangle,$$

where $\widehat{C}$ is the sum of the elements of the group C and $W_\circledast(C) = \varphi\big(V(\mathbb{F}_2C)\big)$ and the homomorphism $\varphi : V(\mathbb{F}_2C) \to V(\mathbb{F}_2C)$ is defined by $\varphi(x) = x^\circledast x^{-1}$.

The following relation can be established between the order of the unitary subgroup determined by the canonical involution and the order of the $\circledast$-unitary subgroup:

Corollary. *Let C be a cyclic group. Then*

$$|V_\circledast(\mathbb{F}_2C)| = \frac{|V_*(\mathbb{F}_2C)|}{2}.$$

Using the previous results we prove the main theorem of the chapter:

Theorem. *Denote by $\Theta_G(2)$ the number of the elements of order two of the normalized group of units $V(\mathbb{F}_2G)$. Then*

$$\begin{aligned} \Theta_{D_{2^{n+1}}}(2) &= 2^{2^n+n-1} + 2^{2^n};\\ \Theta_{SD_{2^{n+1}}}(2) &= 2^{2^n+n-1};\\ \Theta_{Q_{2^{n+1}}}(2) &= 2^{2^n+n-1} - 2^{2^n}. \end{aligned}$$

The question raised by Berman naturally follows which is called the isomorphism problem of the normalized group of units. The problem occurs whether the normalized group of units $V(\mathbb{F}_pG)$ uniquely determines the group G. In 1967 Berman [9] proved that the normalized group of units $V(\mathbb{F}_pG)$ uniquely determines group G for finite abelian p-group G. As a consequence of the main Theorem that the Berman's question is true for 2-groups of maximal class:

Corollary. *Let $\mathbb{F}_2$ be the field of two elements, and let G and H be finite 2-groups of maximal class. Then $V(\mathbb{F}_2G)$ is isomorphic to $V(\mathbb{F}_2H)$ if and only if G and H are isomorphic.*

Let us mention that this corollary is a generalization of Baginski's result [3].

An other topical problem in the theory of finite p-groups is the description of the p th power structure. The results achieved during these inquiries made it possible to prove many theorems in the theory of finite p-groups. These inquiries have not been extended to normalized group of units $V(\mathbb{F}_pG)$ of group algebra.

In the third section we examine the properties of the $p\,th$ power structure of the normalized group of units if the nilpotency class of $V(\mathbb{F}_pG)$ is p. Baginski [2], Shalev és Mann [39, 43] proved that the nilpotency class of $V(\mathbb{F}_pG)$ is p if and only if the commutator subgroup of G is of order p.

Theorem. *Let G be a p-group with commutator subgroup of order $p > 2$. Then the group $V(\mathbb{F}_pG)^p$ is a subgroup of the center $\zeta\big(V(\mathbb{F}_pG)\big)$.*

Let $C_{g_1}, C_{g_2}, \dots, C_{g_t}$ be the all conjugacy classes of G, which consists of at least two elements, and $\widehat{C_{g_i}}$ is the sum of all elements of C_{g_i}.

Theorem. *Let G be a finite nonabelian p-group with cyclic Frattini subgroup of order p and $N = \prod_{i=1}^{t} \langle 1 + \widehat{C_{g_i}} \rangle$. Then $V(F_pG)^p$ is the direct product of the groups $V\big(F_pG^p\big)$ and N.*

The following question which is also attached to the power structure of normalized group of units can be found in Johnson's paper [35]. Is it true that

$$G^p = V(\mathbb{F}_p G)^p \cap G?$$

Using the previous results we prove that:

Corollary. *Let G be a p-group with Frattini subgroup of order p and $p > 2$. Then*

$$G^p = V(\mathbb{F}_p G)^p \cap G.$$

Berger, Kovács és Newman [8] described the finite p-groups G with cyclic Frattini subgroup. This result and the results obtained so far on the structure of normalized group of units enable us to prove of the following theorem:

Theorem. *Let G and H be finite nonabelian p-groups with cyclic Frattini subgroup and $p > 2$. Then $V(\mathbb{F}_p G)$ is isomorphic to $V(\mathbb{F}_p H)$ if and only if G and H are isomorphic.*

The fourth chapter of this thesis we investigate the existence of filtered multiplicative $\mathbb{F}$-basis of the algebra $\mathbb{F}G$ over a field of characteristic p. In 1960s Kupisch introduced the concept of the filtered multiplicative basis of algebras. Let A be a finite-dimensional algebra over a field $\mathbb{F}$ with the Jacobson radical $rad(A)$ and $\mathbb{F}$-basis B. Assume that B, an $\mathbb{F}$-basis, has the following properties:

1. if $u, v \in B$ then either $u \cdot v = 0$ or $u \cdot v \in B$;
2. $B \cap rad(A)$ is an $\mathbb{F}$-basis for $rad(A)$.

Then B is called a *filtered multiplicative* $\mathbb{F}$*-basis* of the algebra A.

The significance of the filtered multiplicative basis for algebras with finitely many indecomposable representations has been given by the research of Bautista, Gabriel, Roiter, and Salmeron [7]. They showed that if there are only finitely many isomorphism classes of indecomposable A-modules over an algebraically closed field $\mathbb{F}$, then A has a filtered multiplicative $\mathbb{F}$-basis. That problem when the group algebra $\mathbb{F}G$ has a filtered multiplicative basis was raised by the paper of Bautista, Gabriel, Roiter, and Salmeron [7].

Higman [30] proved that the group algebra $\mathbb{F}G$ has only finitely many isomorphism classes of indecomposable $\mathbb{F}G$-modules if and only if all the Sylow p-subgroups of G are cyclic.

In 1978, Landrock and Michler [38] proved that the group algebra of the smallest Janko group over a field of characteristic 2 does not have a filtered multiplicative $\mathbb{F}$-basis. In 1987, Paris [40] gave an example for nonabelian group algebra $\mathbb{F}G$ which has a filtered multiplicative $\mathbb{F}$-basis.

The systematic study of filtered multiplicative $\mathbb{F}$-basis has been begun by Bovdi [16]. In [16] the following theorem is proved: Let G be a finite metacyclic p-group and $\mathbb{F}$ a field of characteristic p. Then the group algebra $\mathbb{F}G$ possesses a filtered multiplicative $\mathbb{F}$-basis if and only if $p = 2$ and either G is a dihedral 2-group or G is the quaternion group of order 8 and $\mathbb{F}$ contains a primitive cube root of the unity.

In [17] an explicit list of all p-groups G of order p^m with a cyclic subgroup of order p^{m-2} is given, such that the group algebra $\mathbb{F}G$ over a field $\mathbb{F}$ of characteristic p has a filtered multiplicative $\mathbb{F}$-basis. Further Bovdi [17] proved that the group algebras of the powerful groups does not have a filtered multiplicative $\mathbb{F}$-basis.

Pertaining to this research we give a complete list of all p-groups G of order less than p^5, such that the group algebra $\mathbb{F}G$ has a filtered multiplicative $\mathbb{F}$-basis, and we give these bases as well.

Theorem. *Let $\mathbb{F}G$ be the group algebra of a finite nonabelian p-group G of order p^n over a field $\mathbb{F}$ of characteristic p, where $n < 5$. Then $\mathbb{F}G$ possesses a filtered multiplicative $\mathbb{F}$-basis if and only if $p = 2$ and G is one of the following groups:*

1. *dihedral group D_n of order n, where n equals either 8 or 16;*
2. *either the quaternion group Q_8 of order 8 or $Q_8 \times C_2$, and $\mathbb{F}$ contains a primitive cube root of the unity;*
3. *either $D_8 \times C_2$, or the central product $D_8 \curlyvee C_4$ of D_8 with the cyclic group C_4 of order 4;*
4. $$H_{16} = \langle\ a, c \mid a^4 = b^2 = c^2 = 1,\ (a,b) = 1, (a,c) = b, \\ (b,c) = 1\ \rangle.$$

Let us mention that this result suggests that a group algebra $\mathbb{F}G$ has a filtered multiplicative $\mathbb{F}$-basis only if $p = 2$.

Group algebras of all groups of order 2^5 which contain filtered multiplicative $\mathbb{F}$-basis are also described. For the inquiry we used the computer algebra system GAP [28] and its package LAGUNA [18]. In the theorem, indices that appear in the list of groups are identical with the GAP numbers identifying the groups.

Theorem. *Let $\mathbb{F}G$ be the group algebra of a finite nonabelian 2-group G of order 2^5 over a field $\mathbb{F}$ of characteristic 2. Then $\mathbb{F}G$ possesses a filtered multiplicative $\mathbb{F}$-basis if and only if G is one of the following groups:*

1. $G_{18} = D_{32}$, $G_{25} = D_8 \times C_4$, $G_{39} = D_{16} \times C_2$ *or* $G_{46} = D_8 \times C_2 \times C_2$;
2. $G_{26} = Q_8 \times C_4$, *or* $G_{47} = Q_8 \times C_2 \times C_2$ *and* $\mathbb{F}$ *contains a primitive cube root of the unity;*
3. $G_{22} = H_{16} \times C_2$, $G_{48} = (D_8 \curlyvee C_4) \times C_2$;
4.

$$\begin{aligned}
G_2 =&\langle\ a, b \mid a^4 = b^4 = c^2 = 1,\ (a, b) = c,\ (a, c) = 1,\ (b, c) = 1\ \rangle;\\
G_5 =&\langle\ a, b \mid a^8 = b^2 = c^2 = 1,\ (a, b) = c,\ (a, c) = (b, c) = 1\ \rangle;\\
G_7 =&\langle\ a, b, c \mid a^8 = b^2 = c^2 = 1,\ (a, c) = a^4,\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad (a, b) = a^4c,\ (b, c) = 1\ \rangle;\\
G_8 =&\langle\ a, b, c \mid a^8 = c^2 = 1,\ b^2 = a^4,\ (a, c) = a^4,\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad (a, b) = a^4c,\ (b, c) = 1\ \rangle;\\
G_9 =&\langle\ a, b, c \mid a^2 = b^8 = c^2 = 1,\ (b, c) = ab^6,\ (a, c) = (a, b) = 1\ \rangle;\\
G_{10} =&\langle\ a, b, c \mid a^8 = b^4 = c^2 = 1,\ a^4 = b^2,\ (a, b) = a^6c,\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad (a, c) = (b, c) = 1\ \rangle;\\
G_{11} =&\langle\ a, b, c \mid a^4 = b^4 = c^2 = 1,\ (b, c) = ab^2,\ (a, c) = (a, b) = 1\ \rangle;\\
G_{49} =&\langle\ a, b, c, d \mid a^4 = 1,\ b^2 = c^2 = d^2 = a^2,\ (a, b) = a^2,\ (c, d) = a^2,\\
&\qquad\qquad (a, c) = (a, d) = (b, c) = (b, d) = 1\ \rangle.
\end{aligned}$$

Apart from these, we proved the following theorem:

Theorem. *Let* $char(\mathbb{F}) = 2$.

1. *If*

$$\begin{aligned}
G = \langle\ a, b \mid a^{2^n} = b^2 =& c^2 = d^2 = 1,\ (a, b) = c,\ (a, c) = d,\\
&(a, d) = (b, c) = (b, d) = (c, d) = 1\ \rangle,
\end{aligned}$$

   where $n > 1$, then the group algebra $\mathbb{F}G$ does not have filtered multiplicative $\mathbb{F}$-basis.

2. *If*

$$G = \langle\ a, b\ \mid\ a^{2^n} = b^{2^m} = c^2 = 1,\ (a,b) = c,\\ (a,c) = 1,\ \ (b,c) = 1\ \rangle,$$

where $n, m \geq 2$*, then the group algebra* $\mathbb{F}G$ *have a filtered multiplicative basis.*

References

[1] V. Artamonov and A. Bovdi, *Integral group rings: group of invertible elements and classical k-theory.*, Itogi Nauki i Tekhniki, Algebra. Topology. Geometry. **27** (1989), 3–43.

[2] C. Baginski, *Groups of units of modular group algebras*, Proc. Amer. Math. Soc. **101** (1987), no. 4, 619–624.

[3] ______, *Modular group algebras of* 2*-groups of maximal class*, Comm. algebra **20** (1992), no. 5, 1229–1241.

[4] Zs. Balogh, *On existing of filtered multiplicative bases in group algebras*, Acta Acad. Paed. Nyíregyháziensis **20** (2004), 11–30.

[5] Zs. Balogh and A. Bovdi, *Group algebras with unit group of class p*, Publ. Math. Debrecen **65** (2004), no. 3-4, 261–268.

[6] ______, *On units of group algebras of* 2*-groups of maximal class*, Comm. Algebra **32** (2004), no. 8, 3227–3245.

[7] R. Bautista, P. Gabriel, A. V. Roiter, and L. Salmeron, *Representation-finite algebras and multiplicative bases*, Invent. Math. **81** (1985), no. 2, 217–285.

[8] T. R. Berger, L. G. Kovács, and M. F. Newman, *Groups of prime power order with cyclic Frattini subgroup*, Nederl. Akad. Wetensch. Indag. Math. **42** (1980), no. 1, 13–18.

[9] S. D. Berman, *Group algebras of countable abelian p-group*, Publ. Math. Debrecen **14** (1967), 365–405.

[10] N. Blackburn, *On prime-power groups with two generators*, Proc. Camb. Philos. Soc. **54** (1958), 327–337.

[11] A. Bovdi, *The group of units of a group algebra of characteristic p*, Publ. Math. Debrecen **52** (1998), no. 1–2, 193–244.

[12] A. Bovdi and I. I. Khripta, *Generalized Lie nilpotent group rings*, Mat. Sb. **129** (1986), no. 1, 154–158.

[13] A. Bovdi and J. Kurdics, *Lie properties of the group algebra and the nilpotency class of the group of units*, J. Algebra **212** (1999), no. 1, 28–64.

[14] A. Bovdi and C. Polcino Milies, *Normal subgroups of the group of units in group rings of torsion groups*, Publ. Math. Debrecen **59** (2001), no. 1–2, 235–242.

[15] A. A. Bovdi and A. Sakach, *The unitary subgroup of the multiplicative group of the modular group algebra of a finite alelian p-group*, Math. Zametki **45** (1989), no. 6, 23–29.

[16] V. Bovdi, *On a filtered multiplicative bases of group algebras*, Arch. Math. (Basel) **74** (2000), no. 2, 81–88.

[17] ______, *On a filtered multiplicative bases of group algebras II.*, Algebr. Represent. Theory **6** (2003), no. 3, 353–368.

[18] V Bovdi, A. B. Konovalov, A. R. Rossmanith, and Cs. Schneider, *Laguna — Lie AlGebras and UNits of group Algebras. (http://ukrgap.exponenta.ru/laguna.htm)*, Version 3.0, 2003.

[19] V. Bovdi, L. G. Kovács, and S. K. Sehgal, *Symmetric units in modular group algebras*, Comm. Algebra **24** (1996), no. 3, 803–808.

[20] V. Bovdi and A. L. Rosa, *On the order of the unitary subgroup of a modular group algebra*, Comm. Algebra **28** (2000), no. 4, 1897–1905.

[21] V. Bovdi and T. Rozgonyi, *On the unitary subgroup of modular group algebras*, Acta Acad. Paedagogicae Nyíregyháza **13/D** (1992), 13–17.

[22] A. Bovdi (Bódi B.), *Bevezetés a csoportgyűrűk elméletébe*, Kossuth Egyetemi Kiadó, Debrecen, 1996.

[23] R. Brauer, *Zur Darstellungstheorie der Gruppen endlicher Ordnung*, Math. Z. **63** (1956), 406–444.

[24] G. L. Carns and C. Y. Chao, *On the radical of the group algebra of a p-group over a modular field*, Proc. Amer. Math. Soc. **33** (1972), 323–328.

[25] D. B. Coleman and D. S. Passman, *Units in modular group rings*, Proc Amer. Math. Soc. **25** (1970), 510–512.

[26] W. E. Deskins, *Finite abelian groups with isomorphic group algebras*, Duke Math. J. **23** (1956), 35–40.

[27] X. Du, *The centers of a radical ring*, Canad. Math. Bull. **35** (1992), no. 2, 174–179.

[28] The GAP Group, *Gap — Groups, Algorithms, and Programming, Version 4.2 (http://www.gap-system.org)*, Aachen, St. Andrews, 1999.

[29] M. Hall, *The theory of groups*, The Macmillan Co., New-York, 1959.

[30] G. Higman, *The units of group-rings*, Proc. London Math. Soc. **46** (1940), 231–248.

[31] E. T. Hill, *The annihilator of radical powers in the modular group ring of a p-group*, Proc. Amer. Math. Soc. **25** (1970), 811–815.

[32] B. Huppert, *Endliche gruppen I.*, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1967.

[33] B. Huppert and N. Blackburn, *Finite groups. II.*, Springer-Verlag, Berlin-New-York, 1982.

[34] S. A. Jennings, *The structure of the group ring of a p-group over a modular field*, Trans. Amer. Math. Soc. **50** (1941), 175–185.

[35] D. L. Johnson, *The modular group-ring of a finite p-group*, Proc. Amer. Math. Soc. **68** (1978), no. 1, 19–22.

[36] I. I. Khripta, *The nilpotency of the multiplicative group of a group ring*, Mat. Zametki **11** (1972), 191–200.

[37] H. Kupisch, *Symmetrische Algebren mit endlich vielen unzerlegbaren Darstellungen. I.*, J. Reine Angew. Math. **219** (1965), 1–25.

[38] P. Landrock and G. O. Michler, *Block structure of the smallest janko group*, Math. Ann. **232** (1978), no. 3, 205–238.

[39] A. Mann and A. Shalev, *The nilpotency class of the unit group of a modular group algebra, II.*, Israel J. Math. **70** (1990), no. 3, 267–277.

[40] L. Paris, *Some examples of group algebras without filtered multiplicative basis*, Enseign. Math. **33** (1987), no. 3–4, 307–314.

[41] D. S. Passman, *Algebraic structure of group rings*, Interscience, New-York, 1977.

[42] R. Sandling, *The isomorphism problem for group rings: a survey*, Lecture Notes in Math. **1142** (1985), 258–288.

[43] A. Shalev, *The nilpotency class of the unit group of a modular group algebra I.*, Israel. J. Math. **70** (1990), no. 3, 257–266.

List of papers of the author

1. Zs. Balogh, *On existing of filtered multiplicative bases in group algebras*, Acta Acad. Paed. Nyíregyháziensis **20** (2004), 11 – 30.
2. Zs. Balogh and A. Bovdi, *On units of group algebras of* 2*-groups of maximal class*, Comm. Algebra **32** (2004), no. 8, 3227 – 3245.
3. Zs. Balogh and A. Bovdi, *Group algebras with unit group of class* p, Publ. Math. Debrecen **65** (2004), no. 3 – 4, 261 – 268.

List of conference talks of the author

1. Balogh Zs., *Csoportalgebrák normalizált egységcsoportjának izomorfia problémája*, Magyar Tudományos Akadémia Szegedi Központja, 1998.
2. Balogh, Zs., *Isomorphism problem of the normalized group of units of group algebras*, Konstanca (Románia), 2000.
3. Balogh Zs., *Csoportalgebrák multiplikatív filtrációs bázisa*, Gödöllő, 2001.
4. Balogh Zs., *Csoportalgebrák normalizált egységcsoportja*, Nyíregyháza, 2003.
5. Balogh Zs., *Csoportalgebrák egységcsoportjának szerkezete* Rényi Alfréd Matematika Kutatóintézet, 2004.