Egyetemi doktori (PhD) értekezés tézisei

Figurális számok és diofantikus egyenletek

Varga Nóra

Témavezető: Dr. Pintér Ákos

Debreceni Egyetem
Matematika- és Számítástudományok Doktori Iskola

Debrecen, 2016

Bevezetés

Kombinatorikus hátterű problémák vizsgálata során, amikor két végtelen halmaz közös értékeit keressük, gyakran kapunk diofantikus egyenleteket. Dolgozatunkban olyan $f(x) = g(y)$ típusú szeparábilis egyenletekkel foglalkozunk, amelyekben az f és g polinomok speciális, kombinatorikus jelentéssel bírnak.

A disszertáció a Bevezetés után öt fejezetre oszlik. Az első fejezetben a felhasznált lemmákat mutatjuk be. A második, harmadik és negyedik fejezetben a figurális számok vizsgálata során nyert eredményeket közöljük, végül az ötödik fejezetben az Erdős-Graham probléma speciális eseteivel foglalkozunk. A disszertáció alapjául a [17], [12], [13], [20] és [21] cikkek szolgáltak.

A második, harmadik és negyedik fejezetben a vizsgálat tárgyát az alább definiált $f_{k,m}(X)$ polinom adja. Legyenek $k \geq 2, m \geq 3$ egész paraméterek és jelölje az

$$f_{k,m}(X) = \frac{X(X+1)\cdots(X+(k-2))((m-2)X+k+2-m)}{k!} \tag{1}$$

k-ad fokú, racionális együtthatós polinom az X-edik (k-dimenziós, m-szög alapú) figurális számot. Az $m = 3$ esetben az $f_{k,3}(X) = \frac{X(X+1)\cdots(X+k-1)}{k!}$ kifejezésből az $\binom{X+k-1}{k}$ binomiális együtthatókat, a $k = 2$, illetve $k = 3$ esetekben a poligonális, illetve a piramidális számokat kapjuk, amelyeket az $f_{2,m}(X)$

és az $f_{3,m}(X)$ polinomokkal jelölünk, azaz

$$f_{2,m}(X) = \ Pol_m(X) = \frac{X((m-2)X+4-m)}{2}$$

és

$$f_{3,m}(X) = \ Pyr_m(X) = \frac{X(X+1)((m-2)X+5-m)}{6},$$

ahol $m \geq 3$ egész paraméter.

Legyenek k, m és l, n rögzített egész számok, amelyekre $k > l \geq 2, m \geq 3, n \geq 3$ feltételek teljesülnek és tekintsük az

$$f_{k,m}(x) = f_{l,n}(y) \tag{2}$$

egyenletet, ahol x, y ismeretlen egészek. Ekkor a (2) egyenletet teljesítő (x, y) számpárok két figurális szám egyenlő értékeit határozzák meg. A megoldás reménytelen ilyen általánosságban vizsgálva, sőt rögzített (k, m, l, n) számnégyesekre effektív vagy ineffektív végességi állításokat is nehéz nyerni. A második és negyedk fejezetben a (2) egyenlet konkrét eseteit vizsgáljuk.

A harmadik fejezetben Mordell ismert egyenletét [16, 27. fejezet] általánosítjuk a figurális számok segítségével, és így az

$$f_{3,m}(x-2) + f_{2,m}(x-1) + x + 1 = f_{2,n}(y)$$

egyenlettel foglalkozunk.

Az ötödik fejezet motivációját az alábbi általános

$$\prod_{i=1}^{r} f(x_i, k_i, 1) = y^2$$

egyenlet adta, rögzített $r \geq 1$ és $\{k_1, k_2, \ldots, k_r\}$ esetén, ahol $k_i \geq 4$, $i = 1, 2, \ldots, r$. Erdős és Graham [5] vizsgálata annak a meghatározására irányult, hogy ennek az egyenletnek valóban csak legfeljebb véges sok pozitív egész $(x_1, x_2, \ldots, x_r, y)$ megoldása van-e, ha $x_i + k_i \leq x_{i+1}$ minden i-re teljesül, ahol $1 \leq i \leq r - 1$ és $f(X, k, 1) = X(X + 1) \cdots (X + (k - 1))$. A fejezetben a fenti összefüggés speciális eseteivel foglalkozunk.

1. Segéderedmények

Az első fejezetben a bizonyításokhoz felhasznált segéderedményeket adjuk meg. A dolgozatban többször előfordul Baker egy elliptikus egyenletekre vonatkozó effektív végességi állítása [1], illetve annak egy Brindza [3] nevéhez fűződő általános változata. A lemmák között szerepel továbbá Grytzuk és Schinzel eredménye [10], amely egy általános egyenletosztály megoldásaira vonatkozó tétel speciális esete, nevezetesen Runge módszerét [19] felhasználva ad effektív felső korlátot a megoldások nagyságára. Végezetül, az ötödik fejezetben alkalmazott, Fujiwara [9] által kidolgozott eredményt ismertetjük, amely tetszőleges polinom gyökeire ad korlátot az együtthatók függvényében.

2. Poligonális és piramidális számok egyenlő értékei

A dolgozat második fejezetében a Brindza, Pintér és Turjányi [4] cikkében szereplő sejtést igazoljuk, amely a piramidális és poligonális számok közös értékeit, azaz a (2) egyenletből $k = 3$ és $l = 2$ értékek mellett kapott

$$f_{3,m}(x) = f_{2,n}(y) \tag{3}$$

egyenletet vizsgálja x és y ismeretlen egészekben. Dolgozatukban bebizonyították, hogy eltekintve véges sok (m, n) pártól, az egyenletnek csak véges sok x, y megoldása van, amelyre $\max(|x|, |y|) < C_1$ teljesül, ahol C_1 az m-től és az n-től függő effektíven kiszámítható korlát, továbbá a kivételes (m, n) párokra teljesül, hogy $\max(m, n) < C_2$, ahol C_2 effektíven meghatározható abszolút konstans. Sejtésként fogalmazták meg, hogy csak egy kivételes pár létezik, nevezetesen az $(m, n) = (5, 4)$. Dolgozatunkban bizonyítani kívánjuk ezt a sejtést, amit az alábbi tétel mond ki.

1. Tétel. *Ha $(m, n) \neq (5, 4)$, akkor a (3) egyenletnek csak véges sok x, y egész megoldása van, és ezekre a megoldásokra*

$\max(|x|,|y|) < C_3$ *teljesül, ahol* C_3 *effektíven kiszámítható, az* m *és* n *paraméterektől függő korlát.*

Megjegyzés. Az $(m,n) = (5,4)$ számpárt behelyettesítve a (3)-ba, az $x^2(x+1)/2 = y^2$ egyenletet kapjuk, amelyről könnyen belátható, hogy végtelen sok (x,y) megoldása van.

3. Mordell eredményének általánosítása figurális számokkal

A harmadik fejezetben bizonyított állítás előzményeként Mordell klasszikusnak számító eredményét idézzük [16, 27. fejezet], amely az

$$\binom{x}{3} + \binom{x}{2} + \binom{x}{1} + \binom{x}{0} = y^2 \tag{4}$$

diofantikus egyenlettel foglalkozik, választ keresve arra a kérdésre, hogy valóban az $x = -1, 0, 2, 7, 15, 74$ számok alkotják-e csupán a (4) egyenlet egész megoldásait. Ljunggren [14] és Bremner [2] egymástól függetlenül meghatározta a $6y^2 = x^3 + 5x + 6$ alakban is felírható (4) egyenlet összes megoldását, megmutatva, hogy csak egyetlen további $x \in \mathbb{Z}$ esetén teljesül az egyenlőség, nevezetesen az $x = 767$ érték mellett. A (4) egyenlet tekintettel az $f_{k,m}(X)$ polinomra, megadható az alábbi módon is:

$$f_{3,3}(x-2)+f_{2,3}(x-1)+x+1=f_{2,4}(y). \tag{5}$$

A fejezet célja, hogy az (5) egyenletet általánosítsuk a poligonális és piramidális számok segítségével. Még pontosabban megfogalmazva, az

$$f_{3,m}(x-2)+f_{2,m}(x-1)+x+1=f_{2,n}(y) \tag{6}$$

diofantikus egyenletet vizsgáljuk és bizonyítjuk, hogy a kivételes pároktól eltekintve csak véges sok megoldás létezik. Állításunkat a következő tételben foglaltuk össze.

2. Tétel. *Legyenek adottak m és n pozitív egészek, ahol $m \geq 3, n \geq 3$ és $(m,n) \neq (50,3),(50,6)$. Ekkor a (6) egyenlet minden x és y megoldására teljesül, hogy $\max(x,y) < C_4$, ahol C_4 egy effektíven meghatározható konstans, amely csak az m és n értékektől függ.*

Megjegyzés. A kivételes esetekben, amikor $(m,n)=(50,3)$, illetve $(50,6)$, a $(16x+1)(2x-3)^2=(2y+1)^2$, illetve $(16x+1)(2x-3)^2=(4y-1)^2$ egyenleteket kapjuk, amelyeknek láthatóan végtelen sok egész (x,y) megoldása van.

4. Figurális számok egyenlő értékei

A negyedik fejezetben általánosítjuk a második fejezetben szereplő (3) egyenlet bal oldalát, vagyis az általános alakban felírt figurális számok és poligonális számok közös értékeire vonatkozó összefüggést, azaz az

$$f_{k,m}(x) = f_{2,n}(y) \tag{7}$$

egyenletet vizsgáljuk. Adott feltételek mellett effektív végességi állításokat adunk a (7) egyenletre egész x és y értékek esetén, meghatározva továbbá a kivételt képező eseteket. Foglalkozunk az $f_{k,k+2}(X) = \frac{X^2(X+1)\cdots(X+k-2)}{(k-1)!}$ alakban felírt figurális számmal és bizonyítjuk, hogy csak egyetlen esetben lehet teljes négyzet.

3. Tétel. *Legyenek m, n, k egész számok, amelyekre teljesül, hogy $k \geq 3$ és $(m,n,k) \neq (5,4,3),(6,4,4)$. Ha k páros, akkor tegyük fel továbbá, hogy $k!D$ nem r^2 vagy $2r^2$ alakú, ahol $D = \gcd(k!(n-4)^2, 8d(n-2))$ és $d = \gcd(k, m-2)$. Ekkor a (7) egyenletnek csak véges sok x, y megoldása van, amelyek effektív módon meghatározhatók.*

Megjegyzés. Ha $(m,n,k) = (5,4,3),(6,4,4)$, akkor könnyen belátható, hogy a (7) egyenletnek végtelen sok x, y megoldása van.

1. Következmény. *Legyenek* m, n, k *egészek és* $k \geq 4$*. Ha* k *páros, akkor tegyük fel továbbá, hogy létezik egy* p *prím, amely* $k/2 < p < k$*, ahol* $p \nmid n-2$*. Ekkor a* (7) *egyenletnek csak véges sok* x, y *megoldása van, amelyek effektív módon meghatározhatók.*

Megjegyzés. Ha $k > 2n$, akkor a fenti Következmény teljesül. A Bertrand-posztulátum garantálja a megfelelő p prím létezését $k/2 < p < k$ között. Mivel $p > k/2 > n > n-2$, van olyan prím, amelyre teljesül, hogy $p \nmid n-2$.

4. Tétel. *Tegyük fel, hogy* $k \geq 3, m \geq 3, n \geq 14$ *egészek, amelyekre*

$$10m - 26 \leq n$$

teljesül. Ekkor a (7) *egyenletnek csak véges sok* x, y *megoldása van, amelyek effektív módon meghatározhatók.*

5. Tétel. *A* $k \geq 5$*,* $x \geq k-2$ *és* $y \geq 1$ *egészek körében az egyetlen megoldása az*

$$f_{k,k+2}(x) = f_{2,4}(y) \tag{8}$$

egyenletnek a $(k, x, y) = (5, 47, 3290)$ *számhármas.*

Megjegyzések. $k = 5$ esetén a tétel következik Meyl [15] klasszikus eredményéből. Megjegyezzük továbbá, hogy a diofantikus egyenletek körében az összes egész x, y és k megoldása az $\binom{x+k-1}{k} = f_{k,3}(x) = f_{2,4}(y) = y^2$ alakú parametrikus családnak Győry [11], binomiális együtthatók hatványösszegét vizsgáló eredményére vezethető vissza.

5. Az Erdős-Graham probléma

Az ötödik fejezetben az Erdős-Graham probléma speciális eseteivel foglalkozunk. Tekintsük az alábbi

$$f(x,k,d) = x(x+d)\cdots(x+(k-1)d)$$

szorzatot. Erdős [6] és Rigge [18] egymástól függetlenül bizonyították, ha $x \geq 1$ és $k \geq 2$, akkor $f(x,k,1)$ nem lehet teljes négyzet. Erdős és Selfridge [8] híres eredményükben azt állították, hogy az $f(x,k,1)$ sosem lehet egy egész szám teljes hatványa, feltéve, hogy $x \geq 1$ és $k \geq 2$. Azaz, megoldották az $f(x,k,d) = y^l$ diofantikus egyenletet $d = 1$ esetén. Tekintsük, továbbá az alábbi egyenletet

$$\prod_{i=1}^{r} f(x_i, k_i, 1) = y^2$$

rögzített $r \geq 1$ és $\{k_1, k_2, \ldots, k_r\}$ esetén, ahol $k_i \geq 4$, $i = 1, 2, \ldots, r$. Erdős és Graham [5] vizsgálata annak a meghatározására irányult, hogy ennek az egyenletnek valóban csak legfeljebb véges sok pozitív egész $(x_1, x_2, \ldots, x_r, y)$ megoldása van-e, ha $x_i + k_i \leq x_{i+1}$ minden i-re teljesül, ahol $1 \leq i \leq r-1$. A fejezet első tétele az

$$\frac{x(x+1)(x+2)(x+3)}{(x+a)(x+b)} = y^2 \tag{9}$$

diofantikus egyenlettel foglalkozik, ahol $a, b \in \mathbb{Z}, a \neq b$ paraméterek. Az állítást és a hozzá kapcsolódó bizonyítást is két esetre bontottuk, attól függően, hogy a és b paritása megegyezik-e vagy sem.

Kiterjesztve ezt az eredményt, a fejezet további részében az

$$\frac{x(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)(x+5)}{(x+a)(x+b)} = y^2, \tag{10}$$

$$\frac{x(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)(x+5)}{(x+a)(x+b)(x+c)} = y^3, \tag{11}$$

$$\frac{x(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)(x+5)}{(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)} = y^2 \tag{12}$$

diofantikus egyenleteket vizsgáljuk, ahol $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ páronként különböző egészek úgy, hogy $a, b, c, d \notin \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. Ezen egyenletek megoldásaira sikerült korlátot nyernünk, amelyeket az alábbi tételekben mutatunk be.

6. Tétel. *(I) Legyen $a \equiv b \ (mod\, 2)$. Ha $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ megoldása a (9) diofantikus egyenletnek, akkor*

$$|x| \leq \max\{|A_2|, |A_1|^{1/2}, |A_0|^{1/3}, |B_2|, |B_1|^{1/2}, |B_0|^{1/3}, |\frac{1}{4}(a+b-6)^2 ab|\},$$

ahol

$$
\begin{aligned}
A_2 &= \frac{3}{4}\,a^2 + \frac{1}{2}\,ab + \frac{3}{4}\,b^2 - 2\,a - 2\,b + 7 \\
A_1 &= -\frac{1}{4}\,a^3 + \frac{1}{4}\,a^2b + \frac{1}{4}\,ab^2 + 2\,a^2 - \frac{1}{4}\,b^3 + 2\,b^2 - 4\,a - 4\,b + 6 \\
A_0 &= -\frac{1}{4}\,(a+b-4)^2ab \\
B_2 &= \frac{3}{4}\,a^2 + \frac{1}{2}\,ab + \frac{3}{4}\,b^2 - 4\,a - 4\,b - 5 \\
B_1 &= -\frac{1}{4}\,a^3 + \frac{1}{4}\,a^2b + \frac{1}{4}\,ab^2 + 4\,a^2 - \frac{1}{4}\,b^3 + 4\,b^2 - 16\,a - 16\,b + 6 \\
B_0 &= -\frac{1}{4}\,(a+b-8)^2ab.
\end{aligned}
$$

(II) Legyen $a \not\equiv b\,(mod\,2)$. *Ha* $(x,y) \in \mathbb{Z}^2$ *megoldása a (9) diofantikus egyenletnek, akkor*

$$|x| \le 2\max\{|C_2|, |C_1|^{1/2}, |C_0|^{1/3}, |D_2|, |D_1|^{1/2}, |D_0|^{1/3}\},$$

ahol

$$
\begin{aligned}
C_2 &= \frac{3}{4}\,a^2 + \frac{1}{2}\,ab + \frac{3}{4}\,b^2 - \frac{7}{2}\,a - \frac{7}{2}\,b - \frac{5}{4} \\
C_1 &= -\frac{1}{4}\,a^3 + \frac{1}{4}\,a^2b + \frac{1}{4}\,ab^2 + \frac{7}{2}\,a^2 - \frac{1}{4}\,b^3 + \frac{7}{2}\,b^2 - \frac{49}{4}\,a - \frac{49}{4}\,b + 6 \\
C_0 &= -\frac{1}{4}\,(a+b-7)^2ab \\
D_2 &= \frac{3}{4}\,a^2 + \frac{1}{2}\,ab + \frac{3}{4}\,b^2 - \frac{5}{2}\,a - \frac{5}{2}\,b + \frac{19}{4} \\
D_1 &= -\frac{1}{4}\,a^3 + \frac{1}{4}\,a^2b + \frac{1}{4}\,ab^2 + \frac{5}{2}\,a^2 - \frac{1}{4}\,b^3 + \frac{5}{2}\,b^2 - \frac{25}{4}\,a - \frac{25}{4}\,b + 6 \\
D_0 &= -\frac{1}{4}\,(a+b-5)^2ab.
\end{aligned}
$$

A fenti tételt alkalmazva meghatározzuk a (9) egyenlet összes egész megoldását $a, b \in \{-4, -3, -2, -1, 4, 5, 6, 7\}$ és

$a \neq b$ esetén.

2. Következmény. *Legyen $a, b \in \{-4, -3, -2, -1, 4, 5, 6, 7\}$ és $a \neq b$. Minden $(x, y) \in \mathbb{Z}^2, y \neq 0$ megoldását a (9) egyenletnek az alábbi táblázat tartalmazza:*

(a,b)	$(-4,-3)$,	$(-4,5)$	$(-2,7)$	$(6,7)$
(x,y)	$(-6,2),(1,2)$	$(-6,6)$	$(3,6)$	$(-4,2),(3,2)$

3. Következmény. *Legyen $a \equiv b\ (mod\, 2)$ és $t = \max\{|a|, |b|\}$. Ha $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ megoldása a (9) egyenletnek, akkor*

$$|x| \leq \max\{2t^2 + 13t,\ |\tfrac{1}{4}\,(a + b - 6)^2\, ab|\}.$$

4. Következmény. *Legyen $a \not\equiv b\ (mod\, 2)$ és $t = \max\{|a|, |b|\}$. Ha $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ megoldása a (9) egyenletnek, akkor*

$$|x| \leq 4t^2 + 20t.$$

7. Tétel. *Legyen $a, b \notin \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ és $t = \max\{|a|, |b|\}$. Ha $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ megoldása a (10) diofantikus egyenletnek, akkor vagy*

$$x \mid \left(3a^2 + 2ab + 3b^2 - 30a - 30b + 115\right)^2 ab \ \ \textit{vagy}\ \ |x| \leq 16t^3 + 440t^2.$$

8. Tétel. *Legyen $a, b, c \notin \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, $t = \max\{|a|, |b|, |c|\}$. Ha $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ megoldása a (11) diofantikus egyenletnek, akkor vagy*

$$x \mid (a + b + c - 15)^3 abc \quad \textit{vagy} \quad |x| \leq 6t^2 + 68t.$$

9. Tétel. *Legyen* $a, b, c, d \notin \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$*, továbbá legyen* $t = \max\{|a|, |b|, |c|, |d|\}$*. Ha* $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ *megoldása a* (12) *diofantikus egyenletnek, akkor vagy*

$$x \mid (a+b+c+d-15)^2 abcd \quad \textit{vagy} \quad |x| \leq 12t^2 + 132t.$$

Introduction

To consider equal values of two infinitely sets which has combinatorial background, we can sometimes get Diophantine equations. In our dissertation, we deal with separable equations $f(x) = g(y)$, where the polynomials f and g have combinatorial meanings.

Our dissertation consists of five chapters. In the first chapter we present auxiliary results. In the second, third and fourth chapters we deal with the figurate numbers and the last, fifth chapter we consider the special cases of the problem of Erdős and Graham. The dissertation is based on the papers [17], [12], [13], [20] and [21].

There are several results concerning arithmetical and Diophantine properties of certain combinatorial numbers.

Let k, m be integers with $k \geq 3$ and $m \geq 3$, further, denote by

$$f_{k,m}(X) = \frac{X(X+1)\dots(X+k-2)((m-2)X+k+2-m)}{k!}$$

the Xth figurate number with parameters k and m. The power and equal values of $f_{k,m}(X)$ in special cases, including, for instance, binomial coefficients (for $m = 3$), polygonal numbers (for $k = 2$) and pyramidal numbers (for $k = 3$) have been studied intensively. In the second, third and fourth chapter we will investigate the polygonal and pyramidal numbers, so we have to introduce the concepts of them.

Let

$$f_{2,m}(X) = Pol_m(X) = \frac{X\left((m-2)X + 4 - m\right)}{2}$$

and

$$f_{3,m}(X) = Pyr_m(X) = \frac{X(X+1)\left((m-2)X + 5 - m\right)}{6}$$

be the polygonal and pyramidal numbers with integral parameter $m \geq 3$.

Let k, m, l, n be fix integers, where $k > l \geq 2, m \geq 3, n \geq 3$ and we deal with the equation

$$f_{k,m}(x) = f_{l,n}(y), \tag{13}$$

where x, y are unknown integers. To examine the equation (13) in general is hopeless, so we concentrate on special quadruples (k, m, l, n).

In the second and fourth chapters we will investigate the equation (13) in special cases.

In the third chapter we will study the generalization of a classical equation of Mordell [16, Chapter 27]. We consider the equation

$$f_{3,m}(x-2) + f_{2,m}(x-1) + x + 1 = f_{2,n}(y). \tag{14}$$

Now, let $f(x,k,d) = x(x+d)\cdots(x+(k-1)d)$ and consider the Diophantine equation

$$f(x,k,d) = y^l. \tag{15}$$

Erdős and Graham [5] examined the Diophantine equation

$$\prod_{i=1}^{r} f(x_i, k_i, 1) = y^2$$

for fixed $r \geq 1$ and $\{k_1, k_2, \ldots, k_r\}$ with $k_i \geq 4$ for $i = 1, 2, \ldots r$. In the last chapter we deal with the special case of Erdős and Graham.

1 Auxiliary results

In the first chapter we show the lemmas concerning our proofs. The first lemma is Baker's classical result concerning the solutions of elliptic equations [1]. Our second lemma is a classical result from the modern theory of Diophantine equations, which is a consequence of the Theorem in Brindza [3]. We apply a special case of a Runge-type result due to Grytczuk and Schinzel [10] and in the last chapter we will use the result of Fujiwara [9] which gives a bound for roots of an arbitrary polynomial to prove our statements.

2 Equal values of polygonal and pyramidal numbers

In the second chapter we solve a Diophantine conjecture by Brindza, Pintér and Turjányi [4] without using any reduction methods. In [4], the authors proved that apart from an effectively computable set of m and n, the equation

$$f_{3,m}(x) = f_{2,n}(y) \tag{16}$$

possesses only finitely many solutions and $\max(x, y) < C_1$, where C_1 is an effectively computable constant depending only on m and n. They conjectured that the cardinality of this exceptional set is one, namely it consists of the pair $(m, n) = (5, 4)$. We obtain the following

Theorem 1 *Apart from the pair* $(m, n) = (5, 4)$ *all the solutions* x *and* y *to* (16) *satisfy* $\max(x, y) < C_2$ *where* C_2 *is an effectively computable constant depending only on* m *and* n*.*

Remark. In the special case, when $(m, n) = (5, 4)$ we get the equation $x^2(x + 1)/2 = y^2$. One can easily check that it has infinitely many integer solutions.

3 A generalization of a Mordell equation with figurate numbers

Mordell, in his classical book [16, Chapter 27] proposed the following Diophantine problem. Are the only integer solutions of the equation

$$\binom{x}{3} + \binom{x}{2} + \binom{x}{1} + \binom{x}{0} = y^2 \tag{17}$$

given by $x = -1, 0, 2, 7, 15, 74$? Ljunggren [14] and Bremner [2], independently, resolved this equation, showing that there exists one additional solution, namely $x = 767$. We can rewrite equation (17) by using figurate numbers as

$$f_{3,3}(x-2) + f_{2,3}(x-1) + x + 1 = f_{2,4}(y). \tag{18}$$

The aim of this part is to generalize equation (18) to polygonal and pyramidal numbers. More precisely, we study the Diophantine equation

$$f_{3,m}(x-2) + f_{2,m}(x-1) + x + 1 = f_{2,n}(y). \tag{19}$$

In this chapter we can prove

Theorem 2 *For fixed positive integers* $m \geq 3, n \geq 3$ *with* $(m,n) \neq (50,3), (50,6)$*, all the solutions* x *and* y *to* (19) *satisfy* $\max(x,y) < C_3$*, where* C_3 *is an effectively computable constant* *depending only on m and n.*

In the exceptional cases $(m, n) = (50, 3)$ and $(50, 6)$, we have the curves $(16x + 1)(2x - 3)^2 = (2y + 1)^2$ and $(16x + 1)(2x - 3)^2 = (4y - 1)^2$, respectively. It is trivial that there are infinitely many integer points (x, y) on these curves.

4 Equal values of figurate numbers

In the fourth chapter we will generalize the equation (16). The purpose of this chapter is to give effective finiteness statements for the more general equation

$$f_{k,m}(x) = f_{2,n}(y) \tag{20}$$

in integers x and y. Furthermore, we will investigate the square value of the polynomial $f_{k,k+2}(X) = \frac{X^2(X+1)\cdots(X+k-2)}{(k-1)!}$ and provide that it can be a perfect square in only one case.

Theorem 3 *Let m, n, k be integers with $k \geq 3$ and where $(m, n, k) \neq (5, 4, 3), (6, 4, 4)$. If k is even, then assume further that $k!D$ is not of the form $r^2, 2r^2$, where $D = \gcd(k!(n-4)^2, 8d(n-2))$ with $d = \gcd(k, m-2)$. Then equation* (20) *has only finitely many solutions in x, y which can be effectively determined.*

If $(m, n, k) = (5, 4, 3), (6, 4, 4)$, then one can easily see that equation (20) has infinitely many solutions in x, y. As an immediate consequence, we obtain the following statement.

Corollary 1 *Let m, n, k be integers with $k \geq 4$. If k is even, then assume further that there exists a prime p with $k/2 < p < k$ such that $p \nmid n - 2$. Then equation* (20) *has only finitely many solutions in x, y which can be effectively determined.*

Remark. Note that if $k > 2n$, then the condition in Corollary 1 is satisfied. Indeed, Bertrand's postulate guarantees the existence of a prime p with $k/2 < p < k$. Since now $p > k/2 > n > n - 2$, we also have $p \nmid n - 2$.

Theorem 4 *Suppose that $k \geq 3, m \geq 3, n \geq 14$ are integers with*

$$10m - 26 \leq n.$$

Then equation (20) *possesses only finitely many solutions in x, y which can be effectively determined.*

We closely follow arguments of Erdős [6, 7] and resolve an infinite family of Diophantine equations.

Theorem 5 *The only solution of the equation*

$$f_{k,k+2}(x) = f_{2,4}(y) \tag{21}$$

in integers $k \geq 5$, $x \geq k-2$ and $y \geq 1$ is $(k, x, y) = (5, 47, 3290)$.

For $k = 5$, our theorem follows from a classical theorem by Meyl [15]. The resolution of another parametric family of Diophantine problems $\binom{x+k-1}{k} = f_{k,3}(x) = f_{2,4}(y) = y^2$ in integers x, y and k follows from the result of Győry [11] on the power values of binomial coefficients.

5 The problem of Erdős-Graham

Let us define

$$f(x,k,d) = x(x+d)\cdots(x+(k-1)d)$$

and consider the Diophantine equation

$$f(x,k,d) = y^l. \tag{22}$$

Erdős [6] and independently Rigge [18] proved that the equation $f(x,k,1) = y^2$ has no integer solution. Erdős and Selfridge [8] extended this result when $d = 1$, $x \geq 1$ and $k \geq 2$ and they stated that $f(x,k,1)$ is never a perfect power. This type of Diophantine equations have been studied intensively. Erdős and Graham [5] asked if for fixed $r \geq 1$ and $\{k_1, k_2, \ldots, k_r\}$ with $k_i \geq 4$ for $i = 1, 2, \ldots, r$ the Diophantine equation

$$\prod_{i=1}^{r} f(x_i, k_i, 1) = y^2$$

has at most finitely many solutions in positive integers y and $(x_1, \dots, x_r)$ with $x_i + k_i \le x_{i+1}$ for $1 \le i \le r-1$.

In the fifth chapter we give bounds for the size of the solutions of the Diophantine equation

$$\frac{x(x+1)(x+2)(x+3)}{(x+a)(x+b)} = y^2, \tag{23}$$

where $a, b \in \mathbb{Z}, a \ne b$ are parameters. We expand this result and provide bounds for the size of the solutions of the Diophantine equations

$$\frac{x(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)(x+5)}{(x+a)(x+b)} = y^2, \tag{24}$$

$$\frac{x(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)(x+5)}{(x+a)(x+b)(x+c)} = y^3, \tag{25}$$

$$\frac{x(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)(x+5)}{(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)} = y^2, \tag{26}$$

where $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ are pairwise distinct integers.

Theorem 6 *(I) Let $a \equiv b \pmod 2$. If $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ is a solution of* (23)*, then*

$$|x| \le \max\{|A_2|, |A_1|^{1/2}, |A_0|^{1/3}, |B_2|, |B_1|^{1/2}, |B_0|^{1/3}, |\, \frac{1}{4}\,(a+b-6)^2\, ab\,|\},$$

where

$$A_2 = \frac{3}{4}\,a^2 + \frac{1}{2}\,ab + \frac{3}{4}\,b^2 - 2\,a - 2\,b + 7$$

$$
\begin{aligned}
A_1 &= -\frac{1}{4}\,a^3 + \frac{1}{4}\,a^2b + \frac{1}{4}\,ab^2 + 2\,a^2 - \frac{1}{4}\,b^3 + 2\,b^2 - 4\,a - 4\,b + 6\\
A_0 &= -\frac{1}{4}\,(a+b-4)^2ab\\
B_2 &= \frac{3}{4}\,a^2 + \frac{1}{2}\,ab + \frac{3}{4}\,b^2 - 4\,a - 4\,b - 5\\
B_1 &= -\frac{1}{4}\,a^3 + \frac{1}{4}\,a^2b + \frac{1}{4}\,ab^2 + 4\,a^2 - \frac{1}{4}\,b^3 + 4\,b^2 - 16\,a - 16\,b + 6\\
B_0 &= -\frac{1}{4}\,(a+b-8)^2ab.
\end{aligned}
$$

(II) Let $a \not\equiv b \,(mod\, 2)$*. If* $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ *is a solution of* (23)*, then*

$$|x| \leq 2\max\{|C_2|, |C_1|^{1/2}, |C_0|^{1/3}, |D_2|, |D_1|^{1/2}, |D_0|^{1/3}\},$$

where

$$
\begin{aligned}
C_2 &= \frac{3}{4}\,a^2 + \frac{1}{2}\,ab + \frac{3}{4}\,b^2 - \frac{7}{2}\,a - \frac{7}{2}\,b - \frac{5}{4}\\
C_1 &= -\frac{1}{4}\,a^3 + \frac{1}{4}\,a^2b + \frac{1}{4}\,ab^2 + \frac{7}{2}\,a^2 - \frac{1}{4}\,b^3 + \frac{7}{2}\,b^2 - \frac{49}{4}\,a - \frac{49}{4}\,b + 6\\
C_0 &= -\frac{1}{4}\,(a+b-7)^2ab\\
D_2 &= \frac{3}{4}\,a^2 + \frac{1}{2}\,ab + \frac{3}{4}\,b^2 - \frac{5}{2}\,a - \frac{5}{2}\,b + \frac{19}{4}\\
D_1 &= -\frac{1}{4}\,a^3 + \frac{1}{4}\,a^2b + \frac{1}{4}\,ab^2 + \frac{5}{2}\,a^2 - \frac{1}{4}\,b^3 + \frac{5}{2}\,b^2 - \frac{25}{4}\,a - \frac{25}{4}\,b + 6\\
D_0 &= -\frac{1}{4}\,(a+b-5)^2ab.
\end{aligned}
$$

We apply the above theorem to determine all integral solutions of (23) with $a, b \in \{-4, -3, -2, -1, 4, 5, 6, 7\}, a \neq b$.

Corollary 2 *Let* $a, b \in \{-4, -3, -2, -1, 4, 5, 6, 7\}, a \neq b$*. All the solutions* $(x, y) \in \mathbb{Z}^2, y \neq 0$ *of* (23) *are as follows*

(a,b)	$(-4,-3),$	$(-4,5)$	$(-2,7)$	$(6,7)$
(x,y)	$(-6,2),(1,2)$	$(-6,6)$	$(3,6)$	$(-4,2),(3,2)$

Corollary 3 *Let $a \equiv b \ (mod\, 2)$ and $t = \max\{|a|,|b|\}$. If $(x,y) \in \mathbb{Z}^2$ is a solution of the equation* (23) *then*

$$|x| \leq \max\{2t^2 + 13t,\ |\tfrac{1}{4}\left(a+b-6\right)^2 ab|\}.$$

Corollary 4 *Let $a \not\equiv b \ (mod\, 2)$ and $t = \max\{|a|,|b|\}$. If $(x,y) \in \mathbb{Z}^2$ is a solution of the equation* (23) *then*

$$|x| \leq 4t^2 + 20t.$$

Theorem 7 *Let $a, b \notin \{0,1,2,3,4,5\}$ and $t = \max\{|a|,|b|\}$. If $(x,y) \in \mathbb{Z}^2$ is a solution of the Diophantine equation* (24) *then either*

$$x \mid \left(3a^2 + 2ab + 3b^2 - 30a - 30b + 115\right)^2 ab \quad or \quad |x| \leq 16t^3 + 440t^2.$$

Theorem 8 *Let $a, b, c \notin \{0,1,2,3,4,5\}$ and denote by $t = \max\{|a|,|b|,|c|\}$. If $(x,y) \in \mathbb{Z}^2$ is a solution of the Diophantine equation* (25) *then either*

$$x \mid (a+b+c-15)^3 abc \quad or \quad |x| \leq 6t^2 + 68t.$$

Theorem 9 *Let $a, b, c, d \notin \{0,1,2,3,4,5\}$ and denote by $t = \max\{|a|,|b|,|c|,|d|\}$. If $(x,y) \in \mathbb{Z}^2$ is a solution of the Diophantine equation* (26) *then either*

$$x \mid (a+b+c+d-15)^2 abcd \quad or \quad |x| \leq 12t^2 + 132t.$$

Irodalomjegyzék

[1] A. Baker. Bounds for the solutions of the hyperelliptic equation. *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 65:439–444, 1969.

[2] A. Bremner. An equation of Mordell. *Math. Comput.*, 29:925–928, 1975.

[3] B. Brindza. On S-integral solutions of the equation $y^m = f(x)$. *Acta Math. Hungar.*, 44(1-2):133–139, 1984.

[4] B. Brindza, Á. Pintér, and S. Turjányi. On equal values of pyramidal and polygonal numbers. *Indag. Math. (N.S.)*, 9(2):183–185, 1998.

[5] P. Erdős and R. L. Graham. *Old and new problems and results in combinatorial number theory.* 1980.

[6] P. Erdős. Note on the product of consecutive integers (II). *J. London Math. Soc.*, 14:245–249, 1939.

[7] P. Erdős. On a Diophantine equation. *J. London Math. Soc.*, 26:176–178, 1951.

[8] P. Erdős and J. L. Selfridge. The product of consecutive integers is never a power. *Illinois J. Math.*, 19:292–301, 1975.

[9] M. Fujiwara. Über die obere Schranke des absoluten Betrages der Wurzeln einer algebraischen Gleichung. *Tôhoku Math. J.*, 10:167–171, 1916.

[10] A. Grytczuk and A. Schinzel. On Runge's theorem about Diophantine equations. In *Sets, graphs and numbers (Budapest, 1991)*, volume 60 of *Colloq. Math. Soc. János Bolyai*, pages 329–356. North-Holland, Amsterdam, 1992.

[11] K. Győry. On the Diophantine equation $\binom{n}{k} = x^l$. *Acta Arith.*, 80(3):289–295, 1997.

[12] L. Hajdu, Á. Pintér, Sz. Tengely, and N. Varga. Equal values of figurate numbers. *J. Number Theory*, 137:130–141, 2014.

[13] B. He, Á Pintér, A. Togbe, and N. Varga. A generalization of a problem of Mordell. *Glasnik Math.*, 50(1):35–41, 2015.

[14] W. Ljunggren. A diophantine problem. *J. London Math. Soc. (2)*, 3:385–391, 1971.

[15] A. J. J. Meyl. Solution de question 1194. *Nouv. Ann. Math.*, 17:464–467, 1878.

[16] L. J. Mordell. *Diophantine equations.* Pure and Applied Mathematics, Vol. 30. Academic Press, London, 1969.

[17] Á. Pintér and N. Varga. Resolution of a nontrivial Diophantine equation without reduction methods. *Publ. Math. Debrecen*, 79(3-4):605–610, 2011.

[18] O. Rigge. Über ein diophantisches problem. In *9th Congress Math. Scand.*, pages 155–160. Mercator 1939, Helsingfors 1938.

[19] C. Runge. Über ganzzahlige Lösungen von Gleichungen zwischen zwei Veränderlichen. *J. Reine Angew. Math.*, 100:425–435, 1887.

[20] Sz. Tengely and N. Varga. On a generalization of a problem of Erdős and Graham. *Publ. Math. Debrecen*, 84(3–4):475–482, 2014.

[21] Sz. Tengely and N. Varga. Rational function variant of a problem of Erdős and Graham. *Glasnik Math.*, 50(1):65–76, 2015.

A szerző publikációi/ Publications of the author

- Ákos Pintér, Nóra Varga: *Resolution of a Nontrivial Diophantine Equation without Reduction Methods.* Publicationes Mathematicae Debrecen, 79/3-4 (2011), 605-610.
- Tünde Kovács, Gyöngyvér Péter, Nóra Varga: *On Some Polynomial Values of Repdigit Numbers.* Periodica Mathematica Hungarica, 67/2 (2013), 221-230.
- Tünde Kovács, Gyöngyvér Péter, Nóra Varga: *On Some Polynomial Values of Repdigit Numbers.* Electronic Notes Discrete Math., 43 (2013), 417-423.
- Szabolcs Tengely, Nóra Varga: *On a Generalization of a Problem of Erdős and Graham.* Publicationes Mathematicae Debrecen, 84/3-4 (2014), 475-482.
- Lajos Hajdu, Ákos Pintér, Szabolcs Tengely, Nóra Varga: *Equal Values of Figurate Numbers.* Journal of Number Theory, 137 (2014), 130-141.
- Bo He, Ákos Pintér, Alain Togbe, Nóra Varga: *A Generalization of a Problem of Mordell* Glasnik Mathematicki, 50/1 (2015), 35-41.
- Szabolcs Tengely, Nóra Varga: *Rational Function Variant of a Problem of Erdős and Graham.* Glasnik Mathematicki, 50/1 (2015), 65-76.

A szerző fontosabb előadásai/ Talks held by the author

- *Resolution of a Nontrivial Diophantine Equation without Reduction Methods*, Paul Turán Memorial Conference, Budapest, 2011. augusztus 22-26.
- *Resolution of a Nontrivial Diophantine Equation without Reduction Methods*, 20th Czech and Slovak International Conference on Number Theory, Stara Lesna (Szlovákia), 2011. szeptember 5-9.
- *Equal Values of Figurate Numbers*, 28th Journées Arithmétiques, Grenoble (Franciaország), 2013. július 1-5.
- *On Some Polynomial Values of Repdigit Numbers* (poszter), Erdős Centennial, Budapest, 2013. július 1-5.
- *On a Generalization of a Problem of Erdős and Graham*, 21th Czech and Slovak International Conference on Number Theory, Ostravice (Csehország), 2013. szeptember 2-6.
- *Figurate Numbers and Diophantine Equations*, Recent Progress in Number Theory, Debrecen, 2014. április 3.
- *Figurális számok és diofantikus egyenletek*, A Magyar Tudomány Ünnepe. Debrecen, 2014. november 20.
- *Equal Values of Combinatorial Numbers*, Computational Aspects of Diophantine Equations, Salzburg (Ausztria), 2016. február 15-19.

Nyilvántartási szám: DEENK/23/2016.PL
Tárgy: PhD Publikációs Lista

Jelölt: Varga Nóra
Neptun kód: BXEAR6
Doktori Iskola: Matematika- és Számítástudományok Doktori Iskola
MTMT azonosító: 10035211

A PhD értekezés alapjául szolgáló közlemények

Idegen nyelvű tudományos közlemény(ek) hazai folyóiratban (2)

1. Tengely, S., **Varga, N.**: On a generalization of a problem of Erdős and Graham.
   Publ. Math.-Debr. 84 (3-4), 475-482, 2014. ISSN: 0033-3883.
   DOI: http://dx.doi.org/10.5486/PMD.2014.5862
   IF:0.503

2. Pintér, Á., **Varga, N.**: Resolution of a nontrivial Diophantine equation without reduction methods.
   Publ. Math.-Debr. 79 (3-4), 605-610, 2011. ISSN: 0033-3883.
   DOI: http://dx.doi.org/10.5486/PMD.2011.5149
   IF:0.358

Idegen nyelvű tudományos közlemény(ek) külföldi folyóiratban (3)

3. He, B., Pintér, Á., Togbé, A., **Varga, N.**: A generalization of a problem of Mordell.
   Glasnik Mat. 50 (1), 35-41, 2015. ISSN: 0017-095X.
   IF:0.333 (2014)

4. Tengely, S., **Varga, N.**: Rational function variant of a problem of Erdős and Graham.
   Glasnik Mat. 50 (1), 65-76, 2015. ISSN: 0017-095X.
   IF:0.333 (2014)

5. Hajdu, L., Pintér, Á., Tengely, S., **Varga, N.**: Equal values of figurate numbers.
   J. Number Theory. 137, 130-141, 2014. ISSN: 0022-314X.
   DOI: http://dx.doi.org/10.1016/j.jnt.2013.10.017
   IF:0.593

További Közlemények

Idegen nyelvű közlemény(ek) hazai folyóiratban (1)

6. Kovács, T., Péter, G., **Varga, N.**: On some polynomial values of repdigit numbers.
   Period. Math. Hung. 67 (2), 221-230, 2013. ISSN: 0031-5303.
   DOI: http://dx.doi.org/10.1007/s10998-013-1396-7

Idegen nyelvű közlemény(ek) külföldi folyóiratban (1)

7. **Varga, N.**, Kovács, T., Péter, G.: On some polynomial values of repdigit numbers.
   Electronic Notes in Discrete Mathematics. 43, 413-223, 2013. ISSN: 1571-0653.
   DOI: http://dx.doi.org//10.1016/j.endm.2013.07.061

A közlő folyóiratok összesített impakt faktora: 2,12
A közlő folyóiratok összesített impakt faktora (az értekezés alapjául szolgáló közleményekre): 2,12

A DEENK a Jelölt által az iDEa Tudóstérbe feltöltött adatok bibliográfiai és tudománymetriai ellenőrzését a tudományos adatbázisok és a Journal Citation Reports Impact Factor lista alapján elvégezte.

Debrecen, 2016.02.04.

Registry number: DEENK/23/2016.PL
Subject: Ph.D. List of Publications

Candidate: Nóra Varga
Neptun ID: BXEAR6
Doctoral School: Doctoral School of Mathematical and Computational Sciences
MTMT ID: 10035211

List of publications related to the dissertation

Foreign language scientific article(s) in Hungarian journal(s) (2)

1. Tengely, S., **Varga, N.**: On a generalization of a problem of Erdős and Graham.
   Publ. Math.-Debr. 84 (3-4), 475-482, 2014. ISSN: 0033-3883.
   DOI: http://dx.doi.org/10.5486/PMD.2014.5862
   IF:0.503

2. Pintér, Á., **Varga, N.**: Resolution of a nontrivial Diophantine equation without reduction methods.
   Publ. Math.-Debr. 79 (3-4), 605-610, 2011. ISSN: 0033-3883.
   DOI: http://dx.doi.org/10.5486/PMD.2011.5149
   IF:0.358

Foreign language scientific article(s) in international journal(s) (3)

3. He, B., Pintér, Á., Togbé, A., **Varga, N.**: A generalization of a problem of Mordell.
   Glasnik Mat. 50 (1), 35-41, 2015. ISSN: 0017-095X.
   IF:0.333 (2014)

4. Tengely, S., **Varga, N.**: Rational function variant of a problem of Erdős and Graham.
   Glasnik Mat. 50 (1), 65-76, 2015. ISSN: 0017-095X.
   IF:0.333 (2014)

5. Hajdu, L., Pintér, Á., Tengely, S., **Varga, N.**: Equal values of figurate numbers.
   J. Number Theory. 137, 130-141, 2014. ISSN: 0022-314X.
   DOI: http://dx.doi.org/10.1016/j.jnt.2013.10.017
   IF:0.593

List of other publications

Foreign language scientific article(s) in Hungarian journal(s) (1)

6. Kovács, T., Péter, G., **Varga, N.**: On some polynomial values of repdigit numbers.
   Period. Math. Hung. 67 (2), 221-230, 2013. ISSN: 0031-5303.
   DOI: http://dx.doi.org/10.1007/s10998-013-1396-7

Foreign language scientific article(s) in international journal(s) (1)

7. **Varga, N.**, Kovács, T., Péter, G.: On some polynomial values of repdigit numbers.
   Electronic Notes in Discrete Mathematics. 43, 413-223, 2013. ISSN: 1571-0653.
   DOI: http://dx.doi.org//10.1016/j.endm.2013.07.061

Total IF of journals (all publications): 2,12
Total IF of journals (publications related to the dissertation): 2,12

The Candidate's publication data submitted to the iDEa Tudóstér have been validated by DEENK on the basis of Web of Science, Scopus and Journal Citation Report (Impact Factor) databases.

04 February, 2016