

Dr. Kézi Csaba Gábor
Közönséges elsőrendű
differenciálegyenletek
és alkalmazásaik



Debreceni Egyetem Műszaki Kar
Műszaki Alaptárgyi Tanszék

DEBRECENI EGYETEM
MŰSZAKI KAR
MŰSZAKI ALAPTÁRGYI TANSZÉK

Dr. Kézi Csaba Gábor

KÖZÖNSÉGES ELSŐRENDŰ
DIFFERENCIÁLEGYENLETEK
ÉS ALKALMAZÁSAIK



Debreceni Egyetemi Kiadó
Debrecen University Press
2019

Lektorok:

Dr. Kocsis Imre

Tanszékvezető főiskolai tanár

Debreceni Egyetem Műszaki Kar Műszaki Alaptárgyi Tanszék

© Debreceni Egyetemi Kiadó Debrecen University Press,
beleértve az egyetemi hálózaton belüli elektronikus terjesztés jogát is

ISBN 978-963-318-816-3

Kiadta: a Debreceni Egyetemi Kiadó Debrecen University Press

Felelős kiadó: Karácsony Gyöngyi

Nyomdai munkálatokat

a Debreceni Egyetem sokszorosítóüzeme végezte 2019-ben

dupress.unideb.hu

1. Alapfogalmak

1.1. **Megjegyzés.** Amennyiben mást nem mondunk, úgy a továbbiakban I egy rögzített nyílt intervallumot jelöl.

1.2. **Definíció.** *Differenciálegyenletnek* nevezünk egy olyan egyenletet, melyben szerepel egy vagy több (független) változó, azoknak valamilyen ismeretlen függvénye és azok derivált függvényei. Ha az ismeretlen függvény egyváltozós, akkor *közönséges differenciálegyenletről*, ha többváltozós, akkor *parciális differenciálegyenletről* beszélünk.

1.3. **Példa.** Az

$$y'(x) - 2x \cdot y(x) = 0$$

egyenlet közönséges, míg a

$$\partial_x u(x; y) + \partial_y u(x; y) = 0$$

egyenlet parciális differenciálegyenlet.

1.4. **Megjegyzés.** Ezen jegyzet további fejezeteiben közönséges differenciálegyenletekkel foglalkozunk.

1.5. **Definíció.** Egy differenciálegyenlet *rendje* az egyenletben előforduló legmagasabb rendű derivált rendje. Ha a legmagasabb rendű derivált ki van fejezve a változó és a többi derivált függvényeként, akkor *explicit* egyenletről beszélünk, ellenkező esetben *implicit* egyenletről szolunk.

1.6. **Példa.** Ha $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ nyílt halmaz és $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos függvény, akkor az

$$y^{(n)}(x) = f(x; y(x); y'(x); \dots; y^{(n-1)}(x))$$

egyenlet n -edrendű, explicit, közönséges differenciálegyenlet.

Speciálisan, ha $D \subset \mathbb{R}^2$ nyílt halmaz és $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos függvény, akkor az

$$y'(x) = f(x; y(x))$$

differenciálegyenlet elsőrendű, explicit, közönséges differenciálegyenlet.

1.7. **Példa.** Az $y'(x) = 2x \cdot y(x)$ egyenlet elsőrendű, explicit, közönséges differenciálegyenlet.

1.8. **Megjegyzés.** Amennyiben egyértelmű a differenciálegyenletben szereplő függvény változója, úgy azt elhagyhatjuk, így az előbbi $y'(x) = 2x \cdot y(x)$ egyenlet helyett az $y' = 2x \cdot y$ írásmód is szokásos.

1.9. Megjegyzés. Amennyiben a differenciálegyenletben szereplő függvény változója időt jelöl, úgy a változót t -vel, a deriváltat ponttal szokás jelölni. Például $\dot{s}(t) = 2t + 3$ egy mozgás hely-idő függvényére felírt differenciálegyenlet, ahol $\dot{s}$ a $t \mapsto s(t)$ függvény deriváltját jelöli.

1.10. Példa. Newton második törvénye szerint egy test tömegének és gyorsulásának szorzata egyenlő a rá ható erők eredőjével, ami általános esetben függhet az időtől, a helytől és a sebességtől, azaz felírható az

$$F(t; s(t); v(t)) = m \cdot a(t)$$

differenciálegyenlet.

Figyelembe véve, hogy a sebesség-idő függvény a hely-idő függvény deriváltja, továbbá a gyorsulás-idő függvény a hely-idő függvény második deriváltja, ezért az előbbi egyenletet az

$$F(t; s(t); \dot{s}(t)) = m \cdot \ddot{s}(t)$$

alakban is felírhatjuk, amit m -el elosztva azt kapjuk, hogy

$$\ddot{s}(t) = \frac{1}{m} \cdot F(t; s(t); \dot{s}(t)),$$

ami egy közönséges, másodrendű, explicit differenciálegyenlet.

1.11. Definíció. Legyen $f: D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ nyílt halmaz. Azt mondjuk, hogy a $\varphi: I \rightarrow \mathbb{R}$ függvény *megoldásfüggvénye* vagy *megoldása* az

$$y^{(n)}(x) = f(x; y(x); y'(x); \dots; y^{(n-1)}(x))$$

n -edrendű, explicit differenciálegyenletnek, ha

- φ n -szer differenciálható függvény az I intervallumon;
- minden $x \in I$ esetén $(x; \varphi(x); \varphi'(x); \dots; \varphi^{(n-1)}(x)) \in D$;
- minden $x \in I$ esetén $\varphi^{(n)}(x) = f(x; \varphi(x); \varphi'(x); \dots; \varphi^{(n-1)}(x))$.

Tehát azt mondjuk, hogy egy függvény megoldása a fenti differenciálegyenletnek, ha n -szer differenciálható és behelyettesítve az eredeti egyenletbe igaz egyenlőséget kapunk (feltéve, hogy van értelme a behelyettesítésnek).

1.12. Megjegyzés. Legyen $f: D \subset \mathbb{R}^2$ nyílt halmaz. A $\varphi: I \rightarrow \mathbb{R}$ függvény megoldásfüggvénye (vagy röviden megoldása) az

$$y'(x) = f(x; y(x))$$

differenciálegyenletnek, ha

- φ differenciálható függvény az I intervallumon;
- minden $x \in I$ esetén $(x; \varphi(x)) \in D$;
- minden $x \in I$ esetén $\varphi'(x) = f(x; \varphi(x))$.

Ezen jegyzet további fejezeteiben elsőrendű differenciálegyenletekkel foglalkozunk.

1.13. Példa. Az $y'(x) = 2y(x)$ differenciálegyenletnek a

$$\varphi(x) = C \cdot e^{2x}$$

függvény megoldásfüggvénye, ugyanis minden $C \in \mathbb{R}$ konstans esetén a bal oldal

$$\varphi'(x) = (C \cdot e^{2x})' = 2C \cdot e^{2x};$$

a jobb oldal

$$2 \cdot \varphi(x) = 2C \cdot e^{2x}.$$

így $\varphi'(x) = 2 \cdot \varphi(x)$.

1.14. Definíció. Egy differenciálegyenlet *általános megoldásán* a differenciálegyenlet összes megoldásfüggvényének halmazát értjük.

1.15. Megjegyzés. Egy n -edrendű differenciálegyenlet általános megoldása n darab tetszőleges, egymástól független konstans tartalmaz.

1.16. Definíció. Egy n -edrendű differenciálegyenlet *partikuláris megoldásán* olyan megoldást értünk, amely legfeljebb $n - 1$ darab tetszőleges, egymástól független konstans tartalmaz.

1.17. Megjegyzés. Egy elsőrendű differenciálegyenlet általános megoldása egy tetszőleges konstans tartalmaz.

Egy elsőrendű differenciálegyenlet partikuláris megoldása egy konkrét függvény.

1.18. Példa. Az $y'(x) = y(x)$ differenciálegyenlet általános megoldása az $y(x) = C \cdot e^x$, ahol C tetszőleges valós szám.

Az $y'(x) = y(x)$ differenciálegyenlet egy partikuláris megoldása $y(x) = 2 \cdot e^x$.

1.19. Definíció. Egy differenciálegyenlet megoldásfüggvényeinek grafikonjait a differenciálegyenlet *integrálgörbéinek* nevezzük.

1.20. **Definíció.** Legyen $D \subset \mathbb{R}^n$ nyílt halmaz és $(x_0; y_0; \dots; y_{n-1}) \in D$. Az

$$y^{(n)}(x) = f(x; y(x); y'(x); \dots; y^{(n-1)}(x))$$

differentiálegyenletre vonatkozó *kezdetiérték problémán*, *kezdetiérték feladaton*, *Cauchy-problémán* vagy *Cauchy-feladaton* azt a feladatot értjük, amikor az egyenlet azon $\varphi: I \rightarrow \mathbb{R}$ megoldását keressük, melyre

$$(1) \ x_0 \in I;$$

$$(2) \ \varphi(x_0) = y_0, \quad \varphi'(x_0) = y_1, \dots, \varphi^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}.$$

Ilyenkor a φ függvényt a kezdetiérték probléma, vagy Cauchy-feladat *megoldásának* nevezzük. A kezdetiérték probléma megoldása során tehát a differentiálegyenlet olyan megoldását keressük, amely eleget tesz további, úgynevezett kezdetiérték feltétel(ek)nek is.

1.21. **Megjegyzés.** A kezdetiérték feltételek száma megegyezik a differentiálegyenlet rendjével. Speciálisan egy elsőrendű differentiálegyenlet esetén egy kezdetiérték feltételt írunk elő.

1.22. **Megjegyzés.** Legyen $D \subset \mathbb{R}^2$ nyílt halmaz és $(x_0; y_0) \in D$. Az

$$y'(x) = f(x; y(x))$$

differentiálegyenletre vonatkozó kezdetiérték problémán (kezdetiérték feladaton), vagy Cauchy-feladaton azt a feladatot értjük, amikor az egyenlet azon $\varphi: I \rightarrow \mathbb{R}$ megoldását keressük, melyre

$$(1) \ x_0 \in I;$$

$$(2) \ \varphi(x_0) = y_0.$$

Ezen jegyzet további fejezeteiben elsőrendű differentiálegyenletekre vonatkozó kezdetiérték problémákkal foglalkozunk.

1.23. **Példa.** Az $y'(x) = 2y(x)$, $y(0) = 1$ feladat kezdetiérték feladat. Ennek megoldása $y(x) = e^{2x}$. Az előbb láttuk, hogy $y(x) = e^{2x}$ megoldása az $y' = 2y$ differentiálegyenletnek, továbbá eleget tesz az $y(0) = 1$ feltételnek is, ugyanis $y(0) = e^0 = 1$, így megoldása a kezdetiérték problémának.

1.24. **Definíció.** Legyenek $a_i, b: I \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos függvények. A

$$\sum_{i=1}^n a_i(x) \cdot y^{(i)}(x) = b(x),$$

differentiálegyenletet n -edrendű közönséges *lineáris differentiálegyenletnek* nevezzük. Ellenkező esetben azt mondjuk, hogy az egyenlet *nem lineáris*.

1.25. Megjegyzés. Egy differenciálegyenlet lineáris, ha a differenciálegyenletben az ismeretlen függvény és annak deriváltjainak lineáris kombinációja, valamint az ismeretlen függvényt nem tartalmazó kifejezés szerepel.

1.26. Példa. Az

$$y'(x) = x^2 \cdot y(x)$$

egyenlet lineáris, míg az

$$y'(x) = \sin y(x)$$

egyenlet nem lineáris.

1.27. Definíció. Legyenek $a_i, b: I \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos függvények. A

$$\sum_{i=1}^n a_i(x) \cdot y^{(i)}(x) = b(x),$$

lineáris differenciálegyenletet *homogénnek* nevezzük, ha b az azonosan zéró függvény. Ellenkező esetben azt mondjuk, hogy az egyenlet *inhomogén*.

1.28. Megjegyzés. Egy lineáris differenciálegyenletet homogén, ha minden tag tartalmazza az ismeretlen függvényt, vagy annak deriváltját. Ellenkező esetben az egyenlet inhomogén.

1.29. Definíció. Legyenek $a_i, b: I \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos függvények. A

$$\sum_{i=1}^n a_i(x) \cdot y^{(i)}(x) = b(x),$$

lineáris differenciálegyenletet *konstansegyütthatós*nak vagy más szóval *állandó együtthatós*nak nevezzük, ha minden $i \in \{1; \dots; n\}$ esetén az a_i függvények konstans függvények. Ellenkező esetben azt mondjuk, hogy az egyenlet *függvényegyütthatós*.

1.30. Megjegyzés. Ha egy lineáris differenciálegyenletben minden ismeretlen függvény együtthatója és az ismeretlen függvény deriváltjainak együtthatója is konstans, úgy az egyenletet konstansegyütthatós, ellenkező esetben függvényegyütthatós.

1.31. Példa. Az

$$y'(x) + 3y(x) = 5$$

differenciálegyenlet *konstansegyütthatós*, míg az

$$x \cdot y'(x) + 3y(x) = 5$$

differenciálegyenlet *függvényegyütthatós*.

1.32. **Példa.** Az

$$y'(x) - 2y(x) = 0$$

differentiálegyenlet homogén, míg az

$$y'(x) - 2y(x) = x^2$$

differentiálegyenlet inhomogén.

1.33. **Példa.** Az

$$y'''(x) = \cos x - x^5 \cdot y'(x)$$

differentiálegyenlet

- közönséges;
- harmadrendű;
- lineáris;
- inhomogén;
- függvényegyütthatós;
- explicit.

2. Közvetlenül integrálható (elsőrendű) differenciálegyenletek

2.1. Definíció. Legyen $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos függvény. Az $y'(x) = f(x)$ alakú differenciálegyenletet *közvetlenül integrálható elsőrendű differenciálegyenletnek* nevezzük.

2.2. Tétel. Legyen $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos függvény.

Egy differenciálható $y: I \rightarrow \mathbb{R}$ függvény pontosan akkor megoldása az

$$y'(x) = f(x)$$

egyenletnek, ha $y(x) = F(x) + c$, ahol $c \in \mathbb{R}$ tetszőleges és F az f függvény primitív függvénye.

Bizonyítás: Mivel f folytonos, ezért integrálható.

Az $y'(x) = f(x)$ egyenlet mindkét oldalt x -szerint integrálva

$$y(x) = \int f(x) \, dx$$

adódik, így

$$y(x) = F(x) + c,$$

ahol $c \in \mathbb{R}$. Ezzel igazoltuk az állítást. ■

2.3. Megjegyzés. A közvetlenül integrálható differenciálegyenlet megoldását lényegében úgy kapjuk meg, hogy az explicit alakban megadott egyenlet jobb oldalán szereplő f függvényt integráljuk.

2.4. Példa. Az $y'(x) = \sin x$ egyenlet közvetlenül integrálható. Ennek megoldása

$$y(x) = \int \sin x \, dx = -\cos x + c,$$

ahol $c \in \mathbb{R}$ tetszőleges.

2.5. Tétel. Legyen $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos függvény, $x_0 \in I$. Az $y'(x) = f(x)$, $y(x_0) = y_0$ kezdetiérték feladat megoldása

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t) \, dt$$

Bizonyítás: Legyen az F függvény az f függvény azon primitív függvénye, amelyre teljesül, hogy $F(x_0) = y_0$. Ekkor

$$F(x) - F(x_0) = \int_{x_0}^x f(t) \, dt,$$

tehát

$$y(x) - y_0 = \int_{x_0}^x f(t) \, dt,$$

amiből azt kapjuk, hogy

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t) \, dt,$$

ami a bizonyítandó állítás. ■

2.6. Példa. Tekintsük az $y'(x) = 2x$, $y(0) = 1$ kezdetiérték feladatot. A feladatot kétféleképpen oldjuk meg.

1. Megoldás:

Az előző tétel alapján

$$y(x) = 1 + \int_0^x 2t \, dt = 1 + [t^2]_0^x = 1 + x^2.$$

2. Megoldás:

Mivel $y'(x) = 2x$, ezért

$$y(x) = \int 2x \, dx = x^2 + c.$$

Mivel $y(0) = 1$, ezért

$$1 = y(0) = 0^2 + c,$$

így $c = 1$ adódik, tehát a kezdetiérték feladat megoldása

$$y(x) = x^2 + 1.$$

2.7. Mozgás állandó gyorsulással. Egy pontszerű test egyenes pályán mozog a állandó gyorsulással. Tudjuk továbbá, hogy a $t = 0$ időpillanatban a sebessége $v(0) = v_0$, továbbá a $t = 0$ időpillanatban a megfigyelés helyén van, azaz $s(0) = s_0$. Meghatározzuk a sebesség-idő és a hely-idő függvényeket.

Mivel $\dot{v}(t) = a(t) = a$, ezért ez egy közvetlenül integrálható differenciálegyenlet. Tehát

$$v(t) = \int a \, dt = a \cdot t + c_1,$$

ahol $c_1 \in \mathbb{R}$. Mivel $v(0) = v_0$, ezért

$$v_0 = a \cdot 0 + c_1 \quad \Rightarrow \quad c_1 = v_0,$$

így azt kaptuk, hogy a sebesség-idő függvény

$$v(t) = a \cdot t + v_0.$$

Mivel $\dot{s}(t) = v(t) = a \cdot t + v_0$, ezért ez egy közvetlenül integrálható differenciálegyenlet. Tehát

$$s(t) = \int a \cdot t + v_0 \, dt = a \cdot \frac{t^2}{2} + v_0 \cdot t + c_2,$$

ahol $c_2 \in \mathbb{R}$. Mivel $s(0) = s_0$, ezért

$$s_0 = a \cdot \frac{0^2}{2} + v_0 \cdot 0 + c_2 \quad \Rightarrow \quad c_2 = s_0,$$

így azt kaptuk, hogy a hely-idő függvény

$$s(t) = \frac{a}{2} \cdot t^2 + v_0 \cdot t + s_0.$$

2.8. Példa. Egy gépkocsi $54 \left[\frac{\text{km}}{\text{h}} \right]$ sebességről $5 \left[\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right]$ lassulással egyenletesen fékez. Kiszámoljuk, hogy mekkora a fékút.

Mivel

$$v(0) = v_0 = 54 \left[\frac{\text{km}}{\text{h}} \right] = 15 \left[\frac{\text{m}}{\text{s}} \right]$$

és $a = -5 \left[\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right]$, ezért az előbbi modell szerint

$$v(t) = \int a \, dt = \int -5 \, dt = -5t + c_1.$$

Mivel $v(0) = 15$, ezért $c_1 = 15$, így

$$v(t) = -5t + 15.$$

Azt az időpillanatot keressük, amikor a gépkocsi megáll, vagyis azt a t értéket, melyre $v(t) = 0$, így a

$$0 = 15 - 5t$$

egyenletet kell megoldanunk, amelyre azt kapjuk, hogy $t = 3$.

Ismételten felhasználva az előbbi modell eredményét a gépkocsi hely-idő függvénye

$$s(t) = \int a \cdot t + v_0 dt = \int -5 \cdot t + 15 dt = -\frac{5}{2} \cdot t^2 + 15t + c_2.$$

Mivel $s(0) = 0$, ezért $c_2 = 0$, így azt kapjuk, hogy a mozgás hely-idő függvénye

$$s(t) = -2,5t^2 + 15t.$$

Tehát

$$s(3) = -2,5 \cdot 3^2 + 15 \cdot 3 = 22,5 \text{ [m]},$$

így a fékút $22,5 \text{ [m]}$.

2.9. Szabadesés közegellenállás nélkül. Jelölje $h(t)$ annak a testnek a magasságát a t időpillanatban, melyet a $t = 0$ időpillanatban $h(0) = h_0$ magasságról, $v(0) = v_0$ kezdősebességgel ejtünk el.

Newton második törvénye szerint egy test tömegének és gyorsulásának szorzata egyenlő a testre ható eről eredőjével. Jelen esetben a közegellenállástól eltekinthetünk, így a testre csak egy súlyerő hat, tehát az $m \cdot a = -m \cdot g$ egyenlethez jutunk. Felhasználva, hogy a gyorsulás-idő függvény a sebesség-idő függvény idő szerinti deriváltja azt kapjuk, hogy

$$m \cdot \dot{v}(t) = -m \cdot g, \quad \text{azaz} \quad \dot{v}(t) = -g.$$

Ez egy közvetlenül integrálható egyenlet, így mindkét oldalt integrálva

$$v(t) = -g \cdot t + c_1$$

adódik. Mivel $v(0) = v_0$, ezért $c_1 = v_0$, így

$$v(t) = -g \cdot t + c_1$$

Felhasználva, hogy a sebesség-idő függvény a hely-idő függvény deriváltja azt kapjuk, hogy

$$\dot{h}(t) = -g \cdot t + v_0.$$

Mindkét oldalt integrálva

$$h(t) = -\frac{g}{2} \cdot t^2 + v_0 \cdot t + c_2$$

adódik. Mivel $h(0) = h_0$, ezért $c_2 = h_0$, így

$$h(t) = -\frac{g}{2} \cdot t^2 + v_0 \cdot t + h_0.$$

2.10. Példa. Függőlegesen felfelé kilövünk egy nyílpuskából egy nyílvesszőt. Legyen a nyílvessző kezdősebessége $v_0 = 49 \left[\frac{\text{m}}{\text{s}} \right]$. Meghatározzuk, hogy a kilövés után mennyi idő múlva tér vissza a nyílvessző a kilövés helyére, ha a közegellenállástól eltekintünk.

A függőlegesen kilőtt nyílvessző hely-idő függvénye az előbbi modell szerint

$$h(t) = -\frac{g}{2} \cdot t^2 + v_0 \cdot t = -4,9t^2 + 49t.$$

Azt az időpillanatot keressük, amikor $h(t) = 0$, így a

$$-4,9t^2 + 49t = 0$$

egyenletet kell megoldanunk. A bal oldalt szorzattá alakítva azt kapjuk, hogy

$$4,9t \cdot (-t + 10) = 0,$$

amiből az egyenlet megoldásaira $t_1 = 0$, illetve $t_2 = 10$ adódik.

Tehát azt kaptuk, hogy a kilövés után 10 másodperccel tér vissza a nyílvessző a kilövés helyére.

2.11. Megjegyzés. Ha a közegellenállástól eltekintünk, akkor egy szabadon eső test talajra érése nem függ a test tömegétől. Ezzel kapcsolatban végeztek kísérleteket a Holdon, ahol igazolták, hogy ez valóban így van.

A Holdnak nincs számottevő légköre és a nehézségi gyorsulás is lényegesen kisebb, mint a Földön, így ideális helyszín annak bemutatására, hogy az egyszerű elejtett, szabadon eső testek tömegüktől függetlenül, azonosan mozognak és egyszerre érnek a talajra. A kísérletet 1971. augusztus 2-án David Scott, az Apollo 15 űrhajósa ténylegesen is elvégezte a Holdon.

2.12. Megjegyzés. Mivel a gyakorlatban az elhajított (kilőtt) test nem pontszerű, ezért további tényezők is befolyásolják a test mozgását. Ezek közül az egyik legjelentősebb a közegellenállás (légellenállás). A közegellenállási erő nagysága függ a test sebességére merőleges keresztmetszettől, a test sebességének nagyságától, a levegő sűrűségétől és a test alakjától. Az ilyen típusú differenciálegyenletek azonban már nem közvetlenül integrálhatóak, ezekkel a későbbiekben fogunk foglalkozni.

2.13. Adiabtikus állapotváltozás által végzett munka. Egy V_0 térfogatú henger alakú edényben lévő normál nyomású levegőt adiabatikusan összenyomunk V térfogatra. Mekkora a végzett munka?

Egy gáz adiabatikus állapotváltozásánál a nyomás a térfogat függvényében a Poisson-egyenlet segítségével írható le:

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{V_0}{V}\right)^k \quad \Rightarrow \quad p(V) = p_0 \cdot \left(\frac{V_0}{V}\right)^k,$$

ahol p_0 a normál nyomást jelöli és k a vizsgált gázra jellemző állandó. A végzett munkára felírható a

$$W'(V) = -p(V)$$

differenciálegyenlet, amiből

$$W(V) = \int -p(V) dV.$$

Tehát

$$W(V) = \int -p_0 \cdot \left(\frac{V_0}{V}\right)^k dV = -p_0 \cdot V_0^k \cdot \frac{V^{-k+1}}{-k+1} + c,$$

ahol $c \in \mathbb{R}$.

Ha $V = V_0$, akkor a végzett munka 0, ami a $W(V_0) = 0$ kezdetérték feltételt jelenti. Ezt felhasználva

$$0 = -p_0 \cdot V_0^k \cdot \frac{V_0^{-k+1}}{-k+1} + c \quad \Rightarrow \quad c = \frac{p_0 \cdot v_0}{1-k}.$$

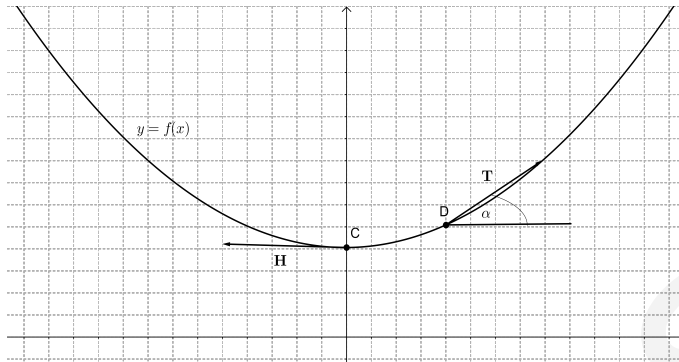
Tehát a végzett munka a térfogat függvényében

$$W(V) = -p_0 \cdot V_0^k \cdot \frac{V^{-k+1}}{-k+1} + \frac{p_0 \cdot V_0}{1-k} = \frac{p_0 \cdot V_0}{1-k} \cdot \left(1 - \left(\frac{V_0}{V}\right)^{k-1}\right).$$

2.14. Kötélhíd kötelének alakját leíró függvény. Tegyük fel, hogy egy kötélhíd kötelének alakját az $y = f(x)$ függvény grafikonja írja le. Tegyük fel, hogy a kötel súlyát elhanyagoljuk.

Legyen C a kötel legalsó pontja, D a kötélhíd egy tetszőleges C -től különböző pontja.

Ekkor a kötel CD szakasza egyensúlyban van a C pontban ható vízszintes H húzóerő, a D pontban ható kötel menti T feszítőerő és a hídpálya C és D pontja közötti része súlyának hatására.



A hídpálya C és D pontok közötti részének súlya arányos az x hosszával, ezért $k \cdot x$ -el egyenlő, ahol k az egységnyi hosszúságú pálya súlya.

Mivel a CD ív nyugalomban van, ezért a rá ható erők vízszintes és függőleges komponenseinek összege zérus.

Legyen α a D pontbeli kötélérő szöge. Ekkor egyrészt

$$H = T \cdot \cos \alpha,$$

másképp

$$k \cdot x = T \cdot \sin \alpha$$

teljesül.

A második egyenletet elosztva az elsővel azt kapjuk, hogy

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{k \cdot x}{H}.$$

Mivel $\operatorname{tg} \alpha = y'(x)$, ezért az

$$y'(x) = \frac{k \cdot x}{H}$$

közvetlenül integrálható differenciálegyenlethez jutunk.

Az egyenlet megoldás

$$y(x) = \int \frac{k \cdot x}{H} dx = \frac{k}{2H} \cdot x^2 + c$$

ahol $c \in \mathbb{R}$. Tehát a lánchíd alakja parabola.

3. Szeparábilis differenciálegyenletek

3.1. Definíció. Legyenek I és J nyílt intervallumok, továbbá $g: I \rightarrow \mathbb{R}$ és $h: J \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos függvények. Az

$$y'(x) = g(x) \cdot h(y(x))$$

egyenletet *szétválasztható változójú* vagy *szeparábilis differenciálegyenletnek* nevezzük.

3.2. Tétel. Legyenek I és J nyílt intervallumok, $g: I \rightarrow \mathbb{R}$ és $h: J \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos függvények. Az

$$y'(x) = g(x) \cdot h(y(x))$$

egyenletnek $y: I \rightarrow \mathbb{R}$ pontosan akkor megoldása, ha

$$\int \frac{1}{h(y)} dy = \int g(x) dx,$$

azaz $H(y(x)) = G(x)$, ahol H az $1/h(x)$ és G a $g(x)$ primitív függvénye.

Bizonyítás: Mivel

$$y'(x) = g(x) \cdot h(y(x)),$$

ezért $h \neq 0$ esetén

$$\frac{1}{h(y)} \cdot y'(x) = g(x).$$

Mindkét oldalt integrálva azt kapjuk, hogy

$$\int \frac{1}{h(y)} dy = \int g(x) dx,$$

amivel igazoltuk az állítást. ■

3.3. Példa. Tekintsük az $y'(x) = y(x)$ differenciálegyenletet! Ez egy szeparábilis differenciálegyenlet, mert $y'(x) = 1 \cdot y(x)$. A korábban tett megállapodásunk szerint az ismeretlen függvény változóit elhagyhatjuk, így $y' = 1 \cdot y$ adódik. Az $y = 0$ nyilván megoldás. Másrészt az előbbi tétel jelöléseit megtartva $g(x) = 1$ és $h(y) = y$. Ekkor a tétel szerint az

$$\int \frac{1}{y} dy = \int 1 dx$$

egyenletet kell megoldanunk y -ra. Elvégezve az integrálásokat

$$\ln |y| = x + c,$$

adódik, azaz

$$y(x) = e^{x+c} = e^x \cdot e^c = C \cdot e^x,$$

ahol $C \in \mathbb{R}$ tetszőleges.

3.4. Példa. Tekintsük az $y'(x) = y^2(x)$ differenciálegyenletet! Ez egy szeparábilis differenciálegyenlet, mert $y'(x) = 1 \cdot y^2(x)$.

Az ismeretlen függvény változóit elhagyva az

$$y' = 1 \cdot y^2$$

egyenlet adódik. Az $y = 0$ nyilván megoldás. Másrészt az előbbi tétel jelöléseit megtartva azt kapjuk, hogy $g(x) = 1$ és $h(y) = y^2$. A tétel szerint

$$\int \frac{1}{y^2} dy = \int 1 dx,$$

elvégezve az integrálásokat

$$-\frac{1}{y} = x + c,$$

adódik, azaz a differenciálegyenlet megoldás

$$y(x) = -\frac{1}{x + c},$$

ahol $c \in \mathbb{R}$ tetszőleges.

3.5. Radioaktív anyagok bomlása. Jelölje egy radioaktív anyag mennyiségét a t időpontban $N(t)$.

Az atomok számának idő szerinti változási gyorsasága egyenes arányos a jelen lévő atomok $N(t)$ számával (azaz minél több van belőle időegység alatt annál több bomlik el.)

Tehát az

$$\dot{N}(t) = -\lambda \cdot N(t),$$

szeparábilis differenciálegyenlethez jutunk, ahol $\lambda > 0$ az anyag jellegétől függő arányossági tényező, amelyet *bomlási állandónak* is nevezünk.

Az $\dot{N}(t) = -\lambda \cdot N(t)$ differenciálegyenlet megoldásához tekintsük a $g(t) = -\lambda$ és $h(N) = N$ függvényeket. Ekkor teljesülnie kell az

$$\int \frac{1}{h(N)} dN = \int g(t) dt$$

egyenletnek. Az adatok behelyettesítése után azt kapjuk, hogy

$$\int \frac{1}{N} dN = \int -\lambda dt.$$

Elvégezve az integrálásokat

$$\ln N = -\lambda \cdot t + c$$

adódik, amiből azt kapjuk, hogy

$$N(t) = e^{-\lambda \cdot t + c} = e^{-\lambda \cdot t} \cdot e^c = C \cdot e^{-\lambda \cdot t}.$$

Ha az atomok száma a $t = 0$ időpillanatban $N(0) = N_0$, akkor

$$N_0 = C \cdot e^0 \quad \Rightarrow \quad C = N_0,$$

így a t időpillanatban az atomok száma

$$N(t) = N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t} \quad (t > 0).$$

3.6. Megjegyzések a modellhez. A következőkben a radioaktivitás előbbi modelljéhez kapcsolódóan néhány megjegyzést teszünk.

- 1) Az előbbi modellben kapott $N(t)$ függvény szigorúan monoton csökkenő és $\lim_{t \rightarrow \infty} N(t) = 0$, ami azt jelenti, hogy az atomok száma csökken és a nullához tart, ami összhangban van azzal, amit elvárunk.
- 2) *Felezési idő*nek nevezzük azt az időpillanatot, amikor a radioaktív atomok száma a kiinduló atomok számának fele. (A felezési időt szokás úgy is jelölni, hogy $t_{\frac{1}{2}}$.)

A felezési idő

$$t_{\frac{1}{2}} = \frac{\ln 2}{\lambda},$$

ugyanis $N(t) = \frac{N_0}{2}$, így

$$\frac{N_0}{2} = N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2} = e^{-\lambda \cdot t},$$

tehát

$$t_{\frac{1}{2}} = \frac{\ln \frac{1}{2}}{-\lambda} = \frac{-\ln 2}{-\lambda} = \frac{\ln 2}{\lambda}.$$

3) *Aktivitásnak* vagy *radioaktivitásnak* nevezzük az

$$A(t) = \lambda \cdot N(t)$$

mennyiséget. Az aktivitás SI mértékegysége a becquerel (jele: Bq). Definíció szerint egy becquerel az aktivitása annak a radioaktív anyagnak, amelyben másodpercenként egy atom bomlik el. A becquerel mértékegysége $\left[\frac{1}{s}\right]$.

4) Az aktivitás kifejezhető a felezési idő segítségével. Mivel $t_{\frac{1}{2}} = \frac{\ln 2}{\lambda}$, ezért

$$\lambda = \frac{\ln 2}{t_{\frac{1}{2}}}, \text{ így}$$

$$A(t) = \frac{\ln 2}{t_{\frac{1}{2}}} \cdot N(t).$$

5) Az atomok száma a felezési idő segítségével is kifejezhető. A könnyebb áttekinthetőség érdekében jelölje a felezési időt T . Ekkor

$$\begin{aligned} N(t) &= N_0 \cdot e^{-\lambda t} = N_0 \cdot e^{-\frac{\ln 2}{T} \cdot t} = \\ &= N_0 \cdot \left(e^{\ln 2}\right)^{-\frac{t}{T}} = N_0 \cdot 2^{-\frac{t}{T}}. \end{aligned}$$

3.7. Példa. Állapítsuk meg, hogy a rádium hány százaléka bomlik el 100 év alatt, ha tudjuk, hogy a rádium felezési ideje 1 590 év, azaz ennyi idő alatt bomlik el a jelen lévő atomok számának a fele?

A t időpillanatban jelen lévő atomok száma

$$N(t) = N_0 \cdot e^{-\lambda t}.$$

A felezési idő 1 590 év, így $t = 1590$ esetén $N(1590) = \frac{1}{2}N(0)$. Ezt felhasználva

$$\frac{1}{2}N(0) = N(0) \cdot e^{-1590\lambda},$$

amiből

$$\ln \frac{1}{2} = -1590\lambda \Rightarrow \lambda = -\frac{\ln 0,5}{1590} \approx 0,00044.$$

Ezt felhasználva 100 év múlva a jelen lévő atomok száma

$$N(100) = N(0) \cdot e^{-0,00044 \cdot 100} = N(0) \cdot 0,957,$$

így az atomok 4,3%-a bomlik el 100 év alatt.

3.8. Egyszerű szaporodási folyamat. Tekintsünk egy populációt. Jelentse a populáció egyedeinek a számát a t időpillanatban $N(t)$. Tegyük fel, hogy a populációt egyetlen egyed sem hagyja el és senki nem hal meg, továbbá a szaporodásnak a környezet sem szab határt.

Legyen az egyedek száma kezdetben $N(0) = N_0$. Az egyedek számának (idő szerinti) változási gyorsasága (deriváltja) egyenes arányos a t időpillanatban jelen lévő egyedek számával, azaz $N(t)$ -vel. (Ez azt jelenti, hogy minél több van belőlük időegység alatt annál nagyobb a szaporulat.)

Ezt a kapcsolatot az

$$\dot{N}(t) = \lambda \cdot N(t)$$

szeparábilis differenciálegyenlet fejezi ki.

A differenciálegyenlet megoldásához tekintsük a $g(t) = \lambda$ és a $h(N) = N$ függvényeket. Ekkor teljesülnie kell az

$$\int \frac{1}{h(N)} dN = \int g(t) dt$$

egyenletnek. Az adatok behelyettesítése után azt kapjuk, hogy

$$\int \frac{1}{N} dN = \int \lambda dt.$$

Elvégezve az integrálásokat

$$\ln N = \lambda t + c$$

adódik, amiből azt kapjuk, hogy

$$N(t) = e^{\lambda \cdot t + c} = e^{\lambda \cdot t} \cdot e^c = C \cdot e^{\lambda \cdot t}.$$

Mivel $N(0) = N_0$, ezért $N_0 = C$, így a t időpillanatban az egyedek száma

$$N(t) = N_0 \cdot e^{\lambda \cdot t}.$$

Ez a modell elsősorban a baktériumok szaporodásának leírására alkalmazható. Ebben a modellben a populáció egyedszámának nincs felső korlátja. Ez azt jelenti, hogy korlátlan élelem, korlátlan hely áll rendelkezésre, ami a baktériumok esetében úgy képzelhető el, hogy olyan modellt vizsgálunk, amelyben a baktériumok szeparált környezetben vannak és olyan időintervallumban vizsgálódunk, amely rövid az egyedek élethosszához képest, de elég hosszú a szaporodási ciklushoz képest. Azaz gyorsan szaporodnak és sokáig élnek az egyedek.

3.9. Példa. Egy adott baktériumtenyészetben a baktériumok számának változási gyorsasága egyenesen arányos a baktériumok számával. Ha a baktériumok száma 48 óra alatt 100-ról 1 000-re nő, akkor hány baktérium volt a 24. óra végén?

Az előbbi modell szerint a baktériumok száma a t időpillanatban

$$N(t) = N_0 \cdot e^{\lambda \cdot t}.$$

A feltételek szerint $N(0) = N_0 = 100$ és $N(48) = 1\,000$, így egyrészt

$$100 = N(0) = C,$$

másrészt

$$1\,000 = N(48) = 100 \cdot e^{48\lambda},$$

tehát

$$10 = e^{48\lambda} \Rightarrow \lambda = \frac{\ln 10}{48}.$$

Ezt felhasználva

$$\begin{aligned} N(24) &= 100 \cdot e^{24 \cdot \frac{\ln 10}{48}} = 100 \cdot e^{\frac{1}{2} \cdot \ln 10} = \\ &= 100 \cdot e^{\ln \sqrt{10}} = 100 \cdot \sqrt{10} \approx 316. \end{aligned}$$

Tehát körülbelül 316 baktérium volt a 24. óra végén.

3.10. Születési-halálozási folyamat. Tegyük fel, hogy egy populáció egyedszámának változása egyenlő a születések és halálozások számának különbségével. Tehát

$$\dot{N}(t) = \dot{S}(t) - \dot{H}(t),$$

ahol N a populáció egyedszáma, S a születések száma és H a halálozások száma.

A 3.8 modellben leírt megfontolásokhoz hasonlóan azt kapjuk, hogy

$$\dot{S}(t) = \lambda \cdot N(t)$$

$$\dot{H}(t) = \mu \cdot N(t),$$

ahol λ a már korábban említett szaporodási állandó és μ az úgynevezett *halálozási állandó*.

A differenciálegyenlet megoldásához tekintsük a $g(t) = \lambda - \mu$ és a $h(N) = N$ függvényeket. Ekkor teljesülnie kell az

$$\int \frac{1}{h(N)} dN = \int g(t) dt$$

egyenletnek. Az adatok behelyettesítése után azt kapjuk, hogy

$$\int \frac{1}{N} dN = \int \lambda - \mu dt.$$

Elvégezve az integrálásokat

$$\ln N = (\lambda - \mu) \cdot t + c$$

adódik, amiből azt kapjuk, hogy

$$N(t) = e^{(\lambda - \mu) \cdot t + c} = e^{(\lambda - \mu) \cdot t} \cdot e^c = C \cdot e^{(\lambda - \mu) \cdot t}.$$

Mivel $N(0) = N_0$, ezért $N_0 = C$, így a t időpillanatban az egyedek száma

$$N(t) = N_0 \cdot e^{(\lambda - \mu) \cdot t}.$$

3.11. Szaporodási folyamat újragondolva. A 3.8 során alkalmazott modell a baktériumok szaporodásán kívül más populáció egyedszámának leírására nem alkalmas. Ha figyelembe vesszük, hogy például a táplálékért folyhat küzdelem, vagy hogy a környezet eltartóképessége véges, akkor az egyedszám növekedése mellett az egyedek számának csökkenését is be kell építenünk a modellbe. Erre egy szokásos stratégia például az, hogy az egyedek számának négyzetével arányos csökkenést alkalmaznak. Ekkor az

$$\dot{N}(t) = a \cdot N(t) - b \cdot N^2(t)$$

differenciálegyenlethez jutunk, ahol a a szaporodási ráta, továbbá $b = \frac{a}{k}$, ahol k a környezet eltartóképessége. Tegyük fel, hogy a megfigyelés kezdetén a populáció egyedszáma $N(0) = N_0$.

A fenti differenciálegyenlet szeparábilis, megoldásához vezessük be a $g(t) = 1$ és a $h(N) = N \cdot (a - b \cdot N)$ függvényeket! Ekkor teljesülnie kell az

$$\int \frac{1}{h(N)} dN = \int g(t) dt$$

egyenletnek. Az adatok behelyettesítése után azt kapjuk, hogy

$$\int \frac{1}{N \cdot (a - b \cdot N)} dN = \int 1 dt.$$

A bal oldalon szereplő integrált a parciális törtekre bontás módszerével tudjuk elvégezni. Tekintsük az

$$\frac{1}{N \cdot (a - b \cdot N)} = \frac{A}{N} + \frac{B}{a - b \cdot N}$$

felbontást! Az egyenletet a közös nevezővel szorozva azt kapjuk, hogy

$$1 = A \cdot (a - b \cdot N) + B \cdot N.$$

Az egyenletet fokszám szerint rendezve

$$1 = N \cdot (B - A \cdot b) + A \cdot a$$

adódik. Ebből azt kapjuk, hogy $A \cdot a = 1$, így $A = \frac{1}{a}$. Ezt felhasználva

$$B = A \cdot b = \frac{b}{a}$$

adódik. Tehát

$$\frac{1}{N \cdot (a - b \cdot N)} = \frac{1}{a} \cdot \left(\frac{1}{N} + \frac{b}{a - b \cdot N} \right).$$

Ezt felhasználva

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{N \cdot (a - b \cdot N)} dN &= \frac{1}{a} \cdot \int \left(\frac{1}{N} + \frac{b}{a - b \cdot N} \right) dN = \\ &= \frac{1}{a} \cdot \int \left(\frac{1}{N} - \frac{-b}{a - b \cdot N} \right) dN = \\ &= \frac{1}{a} \cdot (\ln |N| - \ln |a - b \cdot N|) = \\ &= \frac{1}{a} \cdot \ln \left| \frac{N}{a - b \cdot N} \right|. \end{aligned}$$

Másrészt

$$\int 1 dt = t + c,$$

így az

$$\frac{1}{a} \cdot \ln \left| \frac{N}{a - b \cdot N} \right| = t + c$$

egyenlethez jutunk. Az egyenletet a -val szorozva azt kapjuk, hogy

$$\ln \left| \frac{N}{a - b \cdot N} \right| = a \cdot t + c_1.$$

Ebből

$$\frac{N}{a - b \cdot N} = e^{a \cdot t} \cdot C$$

adódik. A nevezővel szorozva mindkét oldalt azt kapjuk, hogy

$$N = e^{a \cdot t} \cdot C \cdot (a - b \cdot N).$$

Az N -et kifejezve

$$N(t) = \frac{a \cdot e^{a \cdot t} \cdot C}{1 + e^{a \cdot t} \cdot C \cdot b}$$

adódik. Felhasználva, hogy $N(0) = N_0$ azt kapjuk, hogy

$$N_0 = \frac{a \cdot C}{1 + C \cdot b},$$

így

$$C \cdot (a - N_0 \cdot b) = N_0,$$

tehát

$$C = \frac{N_0}{a - N_0 \cdot b}.$$

Ezt felhasználva azt kapjuk, hogy

$$N(t) = \frac{\frac{N_0 \cdot a \cdot e^{a \cdot t}}{a - N_0 \cdot b}}{1 + \frac{N_0 \cdot b \cdot e^{a \cdot t}}{a - N_0 \cdot b}}.$$

A kapott kifejezést átalakítva

$$N(t) = \frac{N_0 \cdot a \cdot e^{a \cdot t}}{a - N_0 \cdot b} \cdot \frac{a - N_0 \cdot b}{a - N_0 \cdot b + N_0 \cdot b \cdot e^{a \cdot t}},$$

adódik, tehát

$$N(t) = \frac{k}{\frac{a - N_0 \cdot b}{N_0 \cdot b} \cdot e^{-a \cdot t} + 1}.$$

A kapott függvényt *logisztikus függvénynek*, magát a modellt *logisztikus modellnek* is szokás nevezni.

3.12. Példa. Egy populáció egyedszáma a megfigyelés kezdetén $N_0 = 500$. A szaporodási ráta 0,2. Ekkor a logisztikus modell szerint a t időpillanatban a populáció egyedszáma

$$N(t) = \frac{500}{\frac{0,2 - \frac{1}{500}}{\frac{1}{500}} + 1} = \frac{500}{99 \cdot e^{-0,2t} + 1}.$$

Fel fogjuk vázolni a függvény grafikonját.

Az N függvénynek nincs zérushelye, hiszen az

$$\frac{500}{99 \cdot e^{-0,2t} + 1} = 0$$

egyenletnek nincs megoldása.

Az N függvény határértéke a ∞ -ben

$$\lim_{t \rightarrow \infty} N(t) = 500.$$

Az N függvény határértéke a 0 helyen

$$\lim_{t \rightarrow 0} N(t) = 5.$$

Az N függvény deriváltja

$$\dot{N}(t) = 500 \cdot \frac{-99 \cdot e^{-0,2t} \cdot (-0,2)}{(99 \cdot e^{-0,2t} + 1)^2} = 500 \cdot \frac{19,8 \cdot e^{-0,2t}}{(99 \cdot e^{-0,2t} + 1)^2}.$$

Mivel $\dot{N}(t) > 0$, ezért a függvény szigorúan monoton növekvő.

Az N függvény második deriváltja

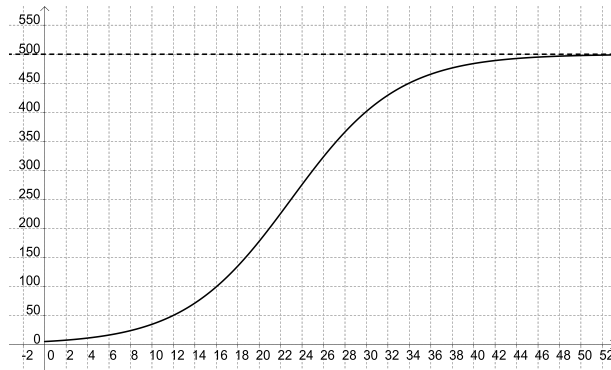
$$\begin{aligned} \ddot{N}(t) &= 500 \cdot \frac{19,8 \cdot e^{-0,2t} \cdot (-0,2) \cdot (-99 \cdot e^{-0,2t} + 1)^2}{(99 \cdot e^{-0,2t} + 1)^4} \\ &- 500 \cdot \frac{19,8 \cdot e^{-0,2t} \cdot 2 \cdot ((99 \cdot e^{-0,2t} + 1)) \cdot 99 \cdot e^{-0,2t} \cdot (-0,2)}{(99 \cdot e^{-0,2t} + 1)^4} = \\ &= 500 \cdot \frac{19,8 \cdot e^{-0,2t} \cdot (-0,2) \cdot (-99 \cdot e^{-0,2t} + 1) \cdot (-99 \cdot e^{-0,2t} + 1)}{(99 \cdot e^{-0,2t} + 1)^4}. \end{aligned}$$

A $\ddot{N}(t) = 0$ egyenlet megoldása

$$t = \frac{\ln \frac{1}{99}}{-0,2} \approx 23.$$

t	$]0; 23[$	23	$]23; \infty[$
$\ddot{N}(t)$	+	0	–
$N(t)$	konvex	inflexiós pont	konkáv
$N(t)$		250	

Az előbbieket szerint a függvény grafikonja:



3.13. Newton-féle lehűlési törvény. Tekintsünk egy pontszerű testet, amelyet állandó hőmérsékletű közeg vesz körül. Határozzuk meg a test hőmérsékletét leíró függvényt, ha ismerjük a test kezdeti hőmérsékletét!

Jelöljük a környezet (állandó) hőmérsékletét T_k -val, a test hőmérsékletét a t időpillanatban $T(t)$ -vel és az ismert, $t = 0$ időpillanatbeli (kezdeti) hőmérsékletét T_0 -lal!

A Newton-féle hűlési törvény szerint a test hőmérsékletének $\dot{T}(t)$ változási gyorsasága arányos a test és környezete hőmérsékletének különbségével, azaz $T - T_k$ -val. Ezt felhasználva a

$$\dot{T}(t) = -\kappa \cdot (T(t) - T_k)$$

differenciálegyenletet kapjuk, ahol κ rögzített, a test anyagára és alakjára jellemző pozitív állandó. A jobb oldalon szereplő κ arányossági tényező pozitív, így $-\kappa$ negatív, így az egyenlet visszaadja a folyamatnak azt a tulajdonságát, miszerint a test T hőmérséklete csökken (azaz deriváltja a negatív), ha a környezet hidegebb (azaz $T - T_k > 0$) és melegszik, ha a környezet a melegebb.

A T függvény meghatározásához rendelkezésünkre áll az előbbi differenciálegyenlet. Ezen kívül a T függvénynek ismerjük még egy rögzített pontjában az értékét, hiszen tudjuk, hogy kezdetben a test hőmérséklete T_0 . Így egy kezdeti-érték feladatot kapunk.

A fenti differenciálegyenlet szeparábilis, amelynek megoldásához vezessük be a $g(t) = -\kappa$ és a $h(T) = T - T_k$ függvényeket. Ekkor teljesülnie kell az

$$\int \frac{1}{h(T)} dT = \int g(t) dt$$

egyenletnek. Az adatok behelyettesítése után azt kapjuk, hogy

$$\int \frac{1}{T - T_k} dT = \int -\kappa dt.$$

Elvégezve az integrálásokat

$$\ln(T - T_k) = -\kappa \cdot t + c$$

adódik, amiből azt kapjuk, hogy

$$T(t) = T_k + e^{-\kappa \cdot t + c} = T_k + e^{-\kappa \cdot t} \cdot e^c = T_k + C \cdot e^{-\kappa \cdot t}.$$

Mivel $T(0) = T_0$, ezért $T_0 - T_k = C$, így a t időpillanatban a test hőmérséklete

$$T(t) = T_k + (T_0 - T_k) \cdot e^{-\kappa \cdot t}.$$

3.14. Példa. Egy frissen sült kenyér 10 perc alatt 100°C -ról 60°C -ra hűlt le. A környező levegő hőmérsékletét 20°C -on tartják. Mennyi idő alatt hűl le a kenyér 25°C hőmérsékletre?

Jelölje $T(t)$ a kenyér hőmérsékletét a t időpillanatban. Ekkor $T(0) = 100$ és $T(10) = 60$. A külső környezet hőmérséklete $T_k = 20$. Azt a t időpillanatot keressük, amikor $T(t) = 25$.

Az előbbi modellben kapott eredmény szerint a test hőmérséklete a t időpillanatban

$$T(t) = T_k + (T_0 - T_k) \cdot e^{-\kappa \cdot t} = 20 + 80 \cdot e^{-\kappa \cdot t}.$$

Mivel $T(10) = 60$, ezért az előbbi egyenletből azt kapjuk, hogy

$$60 = 20 + 80 \cdot e^{-10\kappa}.$$

Ebből a κ ismeretlent kifejezve azt kapjuk, hogy

$$\frac{40}{80} = e^{-10\kappa} \Rightarrow \ln \frac{1}{2} = -10\kappa \Rightarrow \kappa = \frac{\ln \frac{1}{2}}{-10} = \frac{\ln 2}{10}.$$

Tehát a test hőmérséklete a t időpillanatban

$$T(t) = 20 + 80 \cdot e^{-\frac{\ln 2}{10} \cdot t} = 20 + 80 \cdot (e^{\ln 2})^{-\frac{1}{10} \cdot t} = 20 + 80 \cdot 2^{-\frac{t}{10}}.$$

Azt a t időpillanatot keressük, amikor $T(t) = 25$, így megoldandó a

$$25 = 20 + 80 \cdot 2^{-\frac{t}{10}}$$

exponenciális egyenlet. Mindkét oldalból kivonva 20-at, majd az egyenlet mindkét oldalát elosztva 80-nal azt kapjuk, hogy

$$\frac{1}{16} = 2^{-\frac{t}{10}}.$$

A bal oldalt 2 hatványaként felírva

$$2^{-4} = 2^{-\frac{t}{10}}$$

adódik, így az exponenciális függvény szigorú monotonitása miatt

$$-\frac{t}{10} = -4,$$

amiből azt kapjuk, hogy $t = 40$. Tehát a frissen sült kenyér 40 perc múlva lesz 25°C hőmérsékletű.

3.15. Folyadék-csepp párolgása. Egy folyadék-csepp a felszínével arányosan párolog. Határozzuk meg a 0 időpillanatban R sugarú gömb alakú folyadék-csepp sugarát az idő függvényében!

Tapasztalatok szerint a folyadék-csepp sugarának idő szerinti változási gyorsasága a felszínével arányosan csökken, így felírható az

$$\dot{r}(t) = -k \cdot 4r^2(t) \cdot \pi$$

differentiálegyenlet. Ez egy szeparábilis egyenlet.

Legyen $h(r) = r^2$ és $g(t) = -4k \cdot \pi$. Meg kell oldanunk az

$$\int \frac{1}{h(r)} dr = \int g(t) dt$$

egyenletet az r ismeretlen függvényre. Az adatok behelyettesítése után azt kapjuk, hogy

$$\int \frac{1}{r^2} dr = \int -k \cdot \pi dt.$$

Az integrálásokat elvégezve

$$-\frac{1}{r} = -k \cdot \pi \cdot t + c$$

adódik, amiből

$$r(t) = \frac{1}{4k \cdot \pi \cdot t - c}.$$

Mivel $r(0) = R$, ezért

$$R = -\frac{1}{c} \quad \Rightarrow \quad c = -\frac{1}{R},$$

így a folyadék-csepp sugara az idő függvényében

$$r(t) = \frac{1}{4k \cdot \pi \cdot t + \frac{1}{R}} = \frac{R}{4k \cdot \pi \cdot R \cdot t + 1}.$$

3.16. Példa. Egy folyadékcsepp a felszínével arányosan párolog. Egy folyadékcsepp a megfigyelés kezdetekor 5 [mm] sugarú, gömb alakú. Ekkor az előbbi modell szerint a folyadékcsepp sugara az idő függvényében

$$r(t) = \frac{R}{4k \cdot \pi \cdot R \cdot t + 1} = \frac{5}{20k \cdot \pi \cdot t + 1}.$$

Megfigyeltük, hogy a folyadékcsepp 5 másodperc múlva 3 mm sugarú volt. Ebből az információból kiszámolhatjuk a párolgásra jellemző együttható értékét.

Mivel az előbbi feltétel szerint $r(5) = 3$, ezért

$$3 = \frac{5}{100k \cdot \pi + 1} \quad \Rightarrow \quad 300k \cdot \pi + 3 = 5,$$

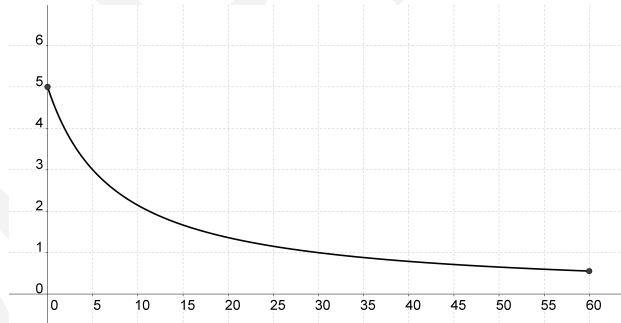
amiből azt kapjuk, hogy a keresett állandó értéke

$$k = \frac{1}{150\pi}.$$

Felhasználva, hogy $k = \frac{1}{150\pi}$, a folyadékcsepp sugara az idő függvényében

$$r(t) = \frac{5}{20 \cdot \frac{1}{150\pi} \cdot t + 1} = \frac{5}{\frac{2}{15}t + 1} = \frac{75}{2t + 15}.$$

A $t \mapsto r(t)$ függvény grafikonja a $[0; 60]$ időintervallumban az alábbi lesz:



3.17. Szabadesés közegellenállással. Felírjuk egy szabadon eső test sebesség-idő függvényét, ha a közegellenállástól nem tekintünk el.

Jelölje $h(t)$ egy szabadon eső testnek a Föld felszínétől mért távolságát a t időpillanatban.

Newton második törvénye szerint egy test tömegének és gyorsulásának szorzata egyenlő a rá ható erők eredőjével. A testre két erő hat: egy $m \cdot g$ nagyságú gravitációs erő és egy közegellenállási erő, amely a mozgás irányával ellentétes

irányú és nagysága (tapasztalatok szerint) a sebesség négyzetével arányos.

Tehát az alábbi differenciálegyenlet írható fel:

$$m \cdot a(t) = m \cdot g - k \cdot v^2(t),$$

ahol k az úgynevezett *közegellenállási együttható*.

Mivel $a(t) = \dot{v}(t)$, ezért az

$$m \cdot \dot{v}(t) = m \cdot g - k \cdot v^2(t) \quad \Rightarrow \quad \dot{v}(t) = g - \frac{k}{m} \cdot v^2(t)$$

differenciálegyenlethez jutunk. Ez az egyenlet szeparálható.

Tekintsük a $z(v) = g - \frac{k}{m} \cdot v^2$ és a $g(t) = 1$ függvényeket. Az

$$\int \frac{1}{z(v)} dv = \int g(t) dt$$

egyenletet kell megoldanunk a v ismeretlen függvényre. Az adatok behelyettesítése után azt kapjuk, hogy

$$\int \frac{1}{g - \frac{k}{m} \cdot v^2} dv = \int 1 dt.$$

A bal oldalon szereplő integrálás:

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{g - \frac{k}{m} \cdot v^2} dv &= \frac{1}{g} \cdot \int \frac{1}{1 - \left(\sqrt{\frac{k}{g \cdot m}} \cdot v\right)^2} = \\ &= \frac{1}{g} \cdot \operatorname{arth} \left(\sqrt{\frac{k}{g \cdot m}} \cdot v \right) \cdot \sqrt{\frac{g \cdot m}{k}}. \end{aligned}$$

A jobb oldalon szereplő integrálás:

$$\int 1 dt = t + c.$$

Tehát az

$$\frac{1}{g} \cdot \operatorname{arth} \left(\sqrt{\frac{k}{g \cdot m}} \cdot v \right) \cdot \sqrt{\frac{g \cdot m}{k}} = t + c$$

egyenletet kell megoldanunk az ismeretlen v függvényre, amire azt kapjuk, hogy

$$v(t) = \sqrt{\frac{m \cdot g}{k}} \cdot \operatorname{th} \left(\sqrt{\frac{g \cdot k}{m}} \cdot (t + c) \right).$$

Ha feltesszük, hogy a $t = 0$ időpillanatban a sebesség $v(0) = v_0 = 0$, akkor $c = 0$ adódik. Ekkor a sebesség-idő függvény

$$v(t) = \sqrt{\frac{m \cdot g}{k}} \cdot \text{th} \left(\sqrt{\frac{g \cdot k}{m}} \cdot t \right).$$

Mivel a th függvény végtelenbeli határértéke 1, ezért a végsebesség

$$v_{\max} = \lim_{t \rightarrow \infty} v(t) = \sqrt{\frac{g \cdot m}{k}}.$$

3.18. Megjegyzések a modellhez. A közegellenállási együttható értéke függ a levegő sűrűségétől (ρ), a közegellenállási tényezőtől (C) és a szabadon eső test keresztmetszetének területétől (A), mégpedig az alábbi módon:

$$k = \frac{\rho \cdot A \cdot C}{2}.$$

3.19. Példa. Egy ping-pong labda sugara 2 [cm], tömege 3 [g], a közegellenállási tényező értéke 0,2. A levegő sűrűsége $1\,000 \left[\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \right]$. Mivel

$$A = 0,02^2 \cdot \pi = 1,26 \cdot 10^{-3} [\text{m}^2],$$

ezért a közegellenállási együttható értéke

$$k = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot C \cdot A = 0,126 \left[\frac{\text{kg}}{\text{m}} \right],$$

így a (függőleges irányú) végsebesség

$$v_{\max} = \sqrt{\frac{g \cdot m}{k}} = \sqrt{\frac{9,81 \cdot 0,003}{0,126}} = 0,4833 \left[\frac{\text{m}}{\text{s}} \right].$$

3.20. Sebességgel arányos ellenállás. Bizonyos esetekben egy tárgy mozgásánál olyan ellenállást veszünk figyelembe, amely a tárgy sebességével arányos. Ekkor a mozgásegyenlet

$$m \cdot a(t) = -k \cdot v(t).$$

Mivel $a(t) = \dot{v}(t)$, ezért az

$$m \cdot \dot{v}(t) = -k \cdot v(t)$$

egyenlethez jutunk. Az egyenletet explicit alakra írva azt kapjuk, hogy

$$\dot{v}(t) = -\frac{k}{m} \cdot v(t).$$

Ez egy szeparábilis differenciálegyenlet.

Vezessük be a $h(v) = v$ és a $g(t) = -\frac{k}{m}$ függvényeket. Az

$$\int \frac{1}{h(v)} dv = \int g(t) dt$$

egyenletet kell megoldanunk az v ismeretlen függvényre. Az adatok behelyettesítése után azt kapjuk, hogy

$$\int \frac{1}{v} dv = \int -\frac{k}{m} dt.$$

Az integrálások elvégzése után azt kapjuk, hogy

$$\ln |v| = -\frac{k}{m} \cdot t + c.$$

Ebből kifejezve a v ismeretlen függvényt

$$v(t) = C \cdot e^{-\frac{k}{m} \cdot t}$$

adódik. Ha a megfigyelés kezdetén a sebesség $v(0) = v_0$, akkor azt kapjuk, hogy

$$v_0 = C,$$

a sebesség-idő függvény

$$v(t) = v_0 \cdot e^{-\frac{k}{m} \cdot t}.$$

A kapott függvényről látszik például az, hogy ha az m tömeg nagy, akkor sok ideig tart, amíg a sebesség nulla lesz, mert t -nek nagynak kell lennie ahhoz, hogy a $\frac{k \cdot t}{m}$ hányados nagy legyen. A hely-idő függvény meghatározásához az

$$\dot{s}(t) = v_0 \cdot e^{-\frac{k}{m} \cdot t} \quad s(0) = s_0$$

kezdetiérték feladatot kell megoldanunk. A differenciálegyenlet közvetlenül integrálható, megoldása

$$s(t) = \int v_0 \cdot e^{-\frac{k}{m} \cdot t} dt = -\frac{v_0 \cdot m}{k} \cdot e^{-\frac{k}{m} \cdot t} + c.$$

Legyen a megfigyelés kezdetén $s(0) = s_0$. Ekkor

$$s_0 = -\frac{v_0 \cdot m}{k} + c,$$

amiből azt kapjuk, hogy

$$c = s_0 + \frac{v_0 \cdot m}{k}.$$

Tehát a kezdetiérték feladat megoldása, azaz a hely-idő függvény

$$s(t) = -\frac{v_0 \cdot m}{k} \cdot e^{-\frac{k}{m} \cdot t} + s_0 + \frac{v_0 \cdot m}{k} = \frac{v_0 \cdot m}{k} \cdot (1 - e^{-\frac{k}{m} \cdot t}) + s_0.$$

3.21. Példa. Tegyük fel, hogy egy 51 000 tonna tömegű hajó $9 \left[\frac{\text{m}}{\text{s}} \right]$ sebességgel halad, amikor leáll a motorja. Tegyük fel, hogy az ellenállás arányos a hajó sebességével. Az arányossági tényező legyen $59\,000 \text{ [kg.s]}$. Meghatározzuk, hogy milyen messzire jut a hajó, mire megáll.

Mivel a hajó ellenállása arányos a hajó sebességével, ezért az előbbi modell szerint a sebesség-idő függvény

$$v(t) = v_0 \cdot e^{-\frac{k}{m} \cdot t}.$$

Az adatok behelyettesítése után azt kapjuk, hogy

$$v(t) = 9 \cdot e^{-\frac{59\,000}{51\,000\,000} \cdot t} = 9 \cdot e^{-\frac{59}{51\,000} \cdot t}.$$

Mivel

$$\dot{s}(t) = v(t),$$

ezért

$$s(t) = \int 9 \cdot e^{-\frac{59}{51\,000} \cdot t} dt = -\frac{459\,000}{59} \cdot e^{-\frac{59}{51\,000} \cdot t} + c.$$

Felhasználva, hogy $s(0) = 0$ azt kapjuk, hogy

$$c = \frac{459\,000}{59}.$$

A hajó hely-idő függvénye tehát

$$s(t) = \frac{459\,000}{59} \cdot (1 - e^{-\frac{59}{51\,000} \cdot t}).$$

A hajó akkor áll meg, amikor a sebessége 0 lesz, azaz $t \rightarrow \infty$ esetén. Ekkor

$$\lim_{t \rightarrow \infty} s(t) = \frac{459\,000}{59} \approx 7780 \text{ [m]}.$$

3.22. Tumorok növekedése. Az 1960-as években használták először az úgynevezett Gompertz-modellt a tumorok növekedésének leírására. Ha $y(t)$ jelenti a tumor tömegét a t időpillanatban, akkor felírható az

$$\dot{y}(t) = -A \cdot y(t) \cdot \ln(y(t))$$

differenciálegyenlet.

Tekintsük a $h(y) = y \cdot \ln y$ és a $g(t) = -A$ függvényeket. Az

$$\int \frac{1}{h(y)} dy = \int g(t) dt$$

egyenletet kell megoldanunk a v ismeretlen függvényre. Az adatok behelyettesítése után azt kapjuk, hogy

$$\int \frac{1}{y \cdot \ln y} dy = \int -A dt.$$

A bal oldalon szereplő integrálás:

$$\int \frac{1}{y \cdot \ln y} dy = \int \frac{\frac{1}{y}}{\ln y} dy = \ln |\ln y|.$$

A jobb oldalon szereplő integrálás:

$$\int -A dt = -A \cdot t + c.$$

Tehát az

$$\ln |\ln y| = -A \cdot t + c$$

egyenletet kell megoldanunk az ismeretlen y függvényre:

$$\ln y = C \cdot e^{-A \cdot t},$$

így

$$y(t) = e^{C \cdot e^{-A \cdot t}}.$$

3.23. Tartály kiürítése. Torricelli törvénye szerint egy tartályból a pillanatnyi kifolyó vízmennyiség, azaz a leengedés változási gyorsasága arányos a vízmagasság négyzetgyökével. Az arányossági tényező függ a nyílás méretétől és a nehézségi gyorsulástól.

Egy egyenes körhenger alakú tartály alapkörének sugara r , a tartály magassága h . A tartály alján egy lyuk található, amelyen kifolyik a víz. Megadjuk a tartályban lévő víz térfogatát az idő függvényében és azt, hogy mennyi idő alatt ürül ki a tartály.

A tartályban lévő víz térfogata az idő függvényében:

$$V(t) = r^2 \cdot \pi \cdot x(t).$$

A tartályban lévő víz térfogatának változási gyorsasága

$$V'(t) = r^2 \cdot \pi \cdot x'(t).$$

A Torricelli törvény szerint a kifolyó víz térfogatának változási gyorsasága

$$V'(t) = -k \cdot \sqrt{x(t)}.$$

Tehát az

$$r^2 \cdot \pi \cdot x'(t) = -k \cdot \sqrt{x(t)}$$

szeparábilis differenciálegyenlethez jutunk. Az egyenletet átrendezve azt kapjuk, hogy

$$x'(t) = \frac{-k}{r^2 \cdot \pi} \cdot \sqrt{x(t)}.$$

Vezessük be a $h(x) = \sqrt{x}$ és a $g(t) = \frac{-k}{r^2 \cdot \pi}$ függvényeket. Az

$$\int \frac{1}{h(x)} dx = \int g(t) dt$$

egyenletet kell megoldanunk az x ismeretlen függvényre. Az adatok behelyettesítése után azt kapjuk, hogy

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \int -\frac{k}{r^2 \cdot \pi} dt.$$

A bal oldalon szereplő integrálás:

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \int x^{-\frac{1}{2}} dx = 2\sqrt{x}.$$

A jobb oldalon szereplő integrálás:

$$\int \frac{-k}{r^2 \cdot \pi} dt = \frac{-k}{r^2 \cdot \pi} \cdot t + c.$$

Tehát a

$$2\sqrt{x} = \frac{-k}{r^2 \cdot \pi} \cdot t + c$$

egyenletet kell megoldanunk az ismeretlen x függvényre:

$$x(t) = \left(\frac{-k}{2r^2 \cdot \pi} \cdot t + \frac{c}{2} \right)^2.$$

Mivel a hengerben kezdetben h magasságig volt a víz, ezért $x(0) = h$, így

$$\left(\frac{c}{2} \right)^2 = h,$$

amiből azt kapjuk, hogy

$$c = 2 \cdot \sqrt{h}.$$

Tehát a hengerben lévő víz magassága az idő függvényében

$$x(t) = \left(\frac{-k}{2r^2 \cdot \pi} \cdot t + \frac{\sqrt{h}}{4} \right)^2.$$

A hengerben lévő víz abban a t időpillanatban ürül ki, amikor $x(t) = 0$ teljesül, vagyis meg kell oldanunk a

$$0 = \frac{-k}{2r^2 \cdot \pi} \cdot t + \frac{\sqrt{h}}{4},$$

egyenletet. Az egyenlet megoldására azt kapjuk, hogy

$$t = \frac{2 \cdot \sqrt{h} \cdot r^2 \cdot \pi}{k}.$$

3.24. Légköri nyomás. A légköri nyomást gyakran olyan modellel írják le, ahol a p nyomásnak a h tengerszint feletti magasságának függvényében való változási gyorsasága p -vel arányos, azaz teljesül a

$$p'(h) = k \cdot p(h).$$

Ez egy szeparábilis differenciálegyenlet.

Vezessük be a $g(h) = k$ és $a(p) = p$ függvényeket. Ekkor teljesülnie kell az

$$\int \frac{1}{a(p)} dp = \int g(h) dh$$

egyenletnek. Az adatok behelyettesítése után azt kapjuk, hogy

$$\int \frac{1}{p} dp = \int k dh.$$

Elvégezve az integrálásokat

$$\ln p = k \cdot h + c$$

adódik, amiből azt kapjuk, hogy

$$p(h) = e^{k \cdot h + c} = e^{k \cdot h} \cdot e^c = C \cdot e^{k \cdot h}.$$

Ha a 0 magasságban a nyomás p_0 , azaz $p(0) = p_0$, akkor

$$p_0 = C \cdot e^0 \quad \Rightarrow \quad C = p_0,$$

így azt kapjuk, hogy a nyomás a tengerszint feletti magasság függvényében

$$p(h) = p_0 \cdot e^{k \cdot h}.$$

3.25. Példa. Tegyük fel, hogy a tengerszinten a légköri nyomás 1 013 [hPa] és 20 [km] magasságban a nyomás 90 [hPa]. Ekkor az előbbi modell szerint

$$p(h) = 1\,013 \cdot e^{k \cdot h}.$$

Mivel $p(20) = 90$, ezért

$$90 = 1\,013 \cdot e^{20k}.$$

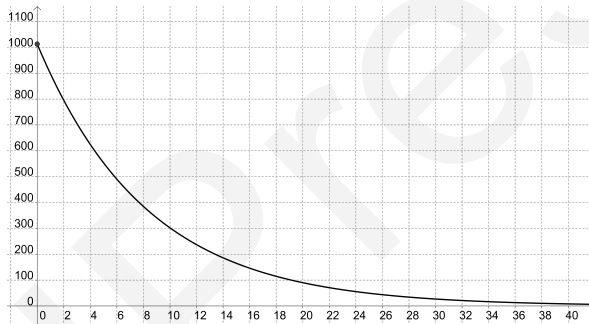
Ebből azt kapjuk, hogy

$$90 = 1\,013 \cdot e^{20k} \quad \Rightarrow \quad k = \frac{1}{20} \cdot \ln \frac{90}{1\,013}.$$

Ebből azt kapjuk, hogy $k = -0,121$. Tehát

$$p(h) = 1\,013 \cdot e^{-0,121 \cdot h}.$$

A függvény grafikonja:



3.26. Folytonos kamatozás. Legyen $y > 0$ valamely banki betét egyenlege a t időpillanatban és legyen $r(t)$ a folytonosan alakuló változó kamatláb. Ekkor teljesül az

$$\dot{y}(t) = r(t) \cdot y(t)$$

differenciálegyenlet, amely szeparábilis. A differenciálegyenlet y megoldásfüggvényére teljesül az

$$\int \frac{1}{y} dy = \int r(t) dt$$

egyenlet. Legyen a jobb oldalon szereplő $r(t)$ függvény egy primitív függvénye $R(t)$. Elvégezve a bal oldalon lévő integrálást azt kapjuk, hogy

$$\ln y = R(t) + c.$$

Az egyenlet megoldása

$$y(t) = C \cdot e^{R(t)}.$$

Tegyük fel, hogy a nyitó számla egyenlege $y(0) = y_0$. Ekkor

$$y_0 = C \cdot e^{R(0)},$$

amiből azt kapjuk, hogy

$$C = \frac{y_0}{e^{R(0)}}.$$

Ezt felhasználva

$$y(t) = y_0 \cdot e^{R(t)-R(0)} = y_0 \cdot e^{\int_0^t r(s) ds}.$$

3.27. Reakciókinetika. A gyakorlati tapasztalatok azt mutatják, hogy a kémiai reakciók sebessége és a reakciókban részt vevő komponensek koncentrációja között összefüggés van.

A reakciók sebessége az egymásra ható, kiindulási anyagok koncentrációjával arányos.

Az A anyag koncentrációját C_A vagy $[A]$ módon jelöljük.

A fentiek szerint az



reakció esetén valamely

$$f: D \subset \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}$$

függvény segítségével a reakciósebességi egyenlet minden $p \in \{1; 2; \dots; m\}$ esetén

$$C'_{B_p}(t) = -k \cdot f(C_{A_1}; C_{A_2}; \dots; C_{A_n}; C_{B_1}; C_{B_2}; \dots; C_{B_m})$$

alakban írható fel, ahol $k > 0$ egy arányossági tényező.

A legegyszerűbb (de a gyakorlatban sokszor előforduló) esetekben a reakciósebességi egyenletben szereplő f függvény

$$\begin{aligned} f(C_{A_1}; C_{A_2}; \dots; C_{A_n}; C_{B_1}; C_{B_2}; \dots; C_{B_m}) &= \\ &= -k \cdot C_{A_1}^{r_1} \cdot C_{A_2}^{r_2} \cdot \dots \cdot C_{A_n}^{r_n} \cdot C_{B_1}^{s_1} \cdot C_{B_2}^{s_2} \cdot \dots \cdot C_{B_m}^{s_m} \end{aligned}$$

alakú, vagyis ekkor a reakciósebességi egyenlet

$$\begin{aligned} C'_{B_p}(t) &= C_{A_1}^{r_1} \cdot C_{A_2}^{r_2} \cdot \dots \cdot C_{A_n}^{r_n} \cdot \\ &\cdot C_{B_1}^{s_1} \cdot C_{B_2}^{s_2} \cdot \dots \cdot C_{B_m}^{s_m}. \end{aligned}$$

A reakciósebességi egyenletben szereplő koncentrációk hatványkitevőinek összegét a reakció (*kinetikus*) *rendjének* nevezzük. Az előző általános egyenletben szereplő reakció kinetikus rendje

$$r_1 + r_2 + \dots + r_n + s_1 + s_2 + \dots + s_m.$$

A k tényező (*reakció*)*sebességi együttható*nak hívjuk.

Az egy lépésben lejátszódó reakciókat *elemi reakció*knak nevezzük, a több lépésben lejátszódókat *összetett* vagy *sorozatos* reakcióknak mondjuk.

Kémiai reakciók szempontjából egy reakció lehet *monomolekuláris* (más szóval *unimolekuláris*), *bimolekuláris* vagy *polimolekuláris* aszerint, hogy a reakció lejátszódásához egy, kettő vagy kettőnél több molekula ütközése szükséges.

A következőkben megadjuk a nulladrendű, elsőrendű és másodrendű kémiai reakciók koncentráció-idő függvényét.

Ha egy kémiai reakció nulladrendű, akkor a reakció sebessége állandó, nem függ a kiindulási anyag koncentrációjától. Tekintsük az $A \rightarrow B$ reakcióegyenletet. Ekkor a reakciósebességi egyenlet

$$v(t) = \dot{C}_A(t) = -k.$$

Ez egy közvetlenül integrálható differenciálegyenlet, melynek megoldása

$$C_A(t) = -k \cdot t + c.$$

Ha feltesszük, hogy kezdetben a kiindulási anyag koncentrációja $C_A(0) = C_{A_0}$ volt, akkor

$$C_{A_0} = c$$

adódik, így a kiindulási anyag koncentrációja az idő függvényében

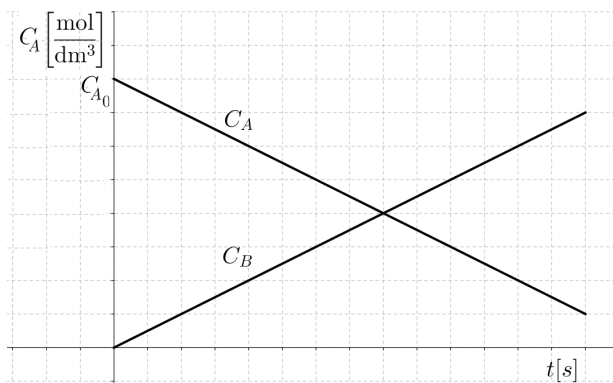
$$C_A(t) = C_{A_0} - k \cdot t.$$

Természetesen ennek a megoldásfüggvénynek csak akkor van értelme, ha az értékei nem negatívak, azaz ha $0 \leq t \leq \frac{C_{A_0}}{k}$. Ha minden nem negatív valós szám esetén szeretnénk értelmezni a koncentráció-idő függvényt, akkor az alábbi módon adhatjuk meg

$$C_A(t) = \begin{cases} C_{A_0} - k \cdot t, & \text{ha } 0 \leq t \leq \frac{C_{A_0}}{k} \\ 0, & \text{ha } t > \frac{C_{A_0}}{k} \end{cases}.$$

(A későbbiekben ettől eltekintünk és a gyakorlat szempontjából lényeges esetet foglalkozunk, vagyis a nemnegatív valós számok halmazán értelmezzük a koncentráció-idő függvényt.) A sebességi együttható mértékegysége $\left[\frac{\text{mol}}{\text{dm}^3 \cdot \text{s}}\right]$.

A kiindulási anyag és keletkezett anyag koncentráció-idő függvénye:



A reakció felezési idejét a

$$\frac{C_{A_0}}{2} = C_{A_0} - k \cdot t_{\frac{1}{2}}$$

egyenlet megoldása adja, amire azt kapjuk, hogy

$$t_{\frac{1}{2}} = \frac{C_{A_0}}{2k}.$$

Ha egy kémiai reakció elsőrendű, akkor a reakciósebességi egyenlet

$$v(t) = \dot{C}_A(t) = -k \cdot C_A(t).$$

Ez egy szeparábilis differenciálegyenlet.

Vezessük be a $g(t) = -k$ és $h(C_A) = C_A$ függvényeket. Ekkor teljesülnie kell az

$$\int \frac{1}{h(C_A)} dC_A = \int g(t) dt$$

egyenletnek. Az adatok behelyettesítése után azt kapjuk, hogy

$$\int \frac{1}{C_A} dC_A = \int -k dt.$$

Elvégezve az integrálásokat

$$\ln C_A = -k \cdot t + c$$

adódik, amiből azt kapjuk, hogy

$$C_A(t) = e^{-k \cdot t + c} = C \cdot e^{-k \cdot t}.$$

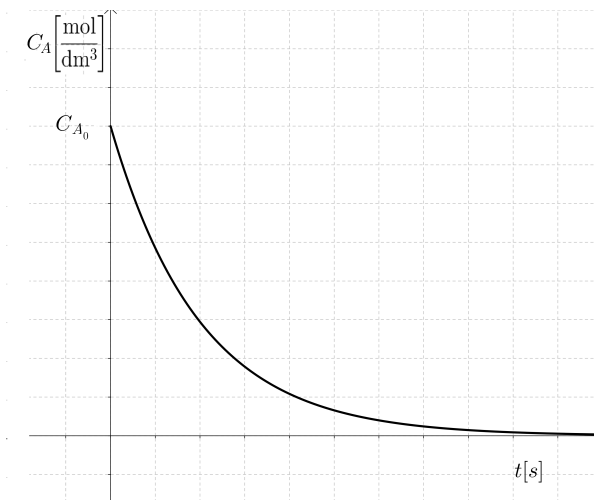
Ha feltesszük, hogy kezdetben a kiindulási anyag koncentrációja $C_A(0) = C_{A_0}$ volt, akkor

$$C_{A_0} = C$$

adódik, így a kiindulási anyag koncentrációja az idő függvényében

$$C_A(t) = C_{A_0} \cdot e^{-k \cdot t}.$$

A koncentráció-idő függvény grafikonja:



A sebességi együttható mértékegysége $\left[\frac{1}{s} \right]$.

Megjegyezzük, hogy a kinetikusan elsőrendű reakcióknál a molekulák belső instabilitásuk miatt bomlanak el. Tipikusan elsőrendű reakció a radioaktív atomok bomlása.

A reakció felezési idejét a

$$\frac{C_{A_0}}{2} = C_{A_0} \cdot e^{-k \cdot t}$$

egyenlet megoldása adja, amire azt kapjuk, hogy

$$t_{\frac{1}{2}} = \frac{\ln 2}{k}.$$

Ha az $A + B \rightarrow D$ ($A \neq B$, azaz a kiinduló anyagok nem azonosak) kémiai reakció másodrendű és a kiinduló anyagok koncentrációja azonos (azaz tegyük fel, hogy $C_{A_0} = C_{B_0}$), akkor a reakciósebességi egyenlet

$$v(t) = \dot{C}_A(t) = -k \cdot C_A^2(t).$$

Ez egy szeparábilis differenciálegyenlet.

Vezessük be a $g(t) = -k$ és $h(C_A) = C_A^2$ függvényeket. Ekkor teljesülnie kell az

$$\int \frac{1}{h(C_A)} dC_A = \int g(t) dt$$

egyenletnek. Az adatok behelyettesítése után azt kapjuk, hogy

$$\int \frac{1}{C_A^2} dC_A = \int -k dt.$$

Elvégezve az integrálásokat

$$-\frac{1}{C_A} = -k \cdot t + c$$

adódik, amiből azt kapjuk, hogy

$$C_A(t) = \frac{1}{k \cdot t - c}.$$

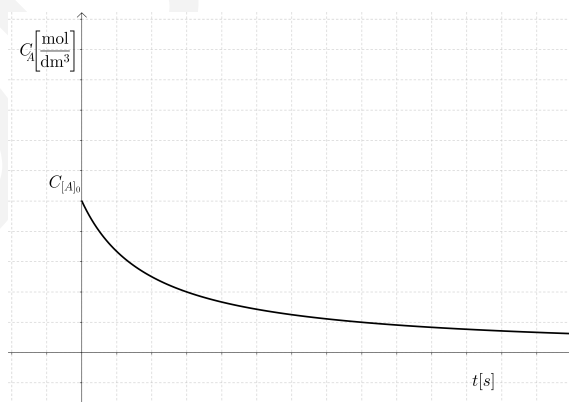
Tegyük fel, hogy kezdetben a kiindulási anyagok koncentrációja $C(0) = C_{A_0}$ volt, akkor

$$C_{A_0} = -\frac{1}{c} \Rightarrow c = -\frac{1}{C_{A_0}}$$

adódik, így a kiindulási anyag koncentrációja az idő függvényében

$$C_A(t) = \frac{1}{k \cdot t + \frac{1}{C_{A_0}}} = \frac{C_{A_0}}{C_{A_0} \cdot k \cdot t + 1}.$$

A koncentráció-idő függvény grafikonja:



A sebességi együttható mértékegysége $\left[\frac{\text{dm}^3}{\text{mol} \cdot \text{s}} \right]$.

A reakció felezési ideje a

$$\frac{C_{A_0}}{2} = \frac{C_{A_0}}{C_{A_0} \cdot k \cdot t + 1}$$

egyenlet megoldása, vagyis

$$t_{\frac{1}{2}} = \frac{1}{k \cdot C_{A_0}}.$$

Ha az $A + A \rightarrow D$ kémiai reakció másodrendű, akkor a reakciósebességi egyenlet

$$v(t) = \dot{C}_A(t) = -k \cdot 2C_A^2(t).$$

Ez egy szeparábilis differenciálegyenlet.

Vezessük be a $g(t) = -2k$ és $h(C_A) = C_A^2$ függvényeket. Ekkor teljesülnie kell az

$$\int \frac{1}{h(C_A)} dC_A = \int g(t) dt$$

egyenletnek. Az adatok behelyettesítése után azt kapjuk, hogy

$$\int \frac{1}{C_A^2} dC_A = \int -2k dt.$$

Elvégezve az integrálásokat

$$-\frac{1}{C_A} = -2k \cdot t + c$$

adódik, amiből azt kapjuk, hogy

$$C_A(t) = \frac{1}{2k \cdot t - c}.$$

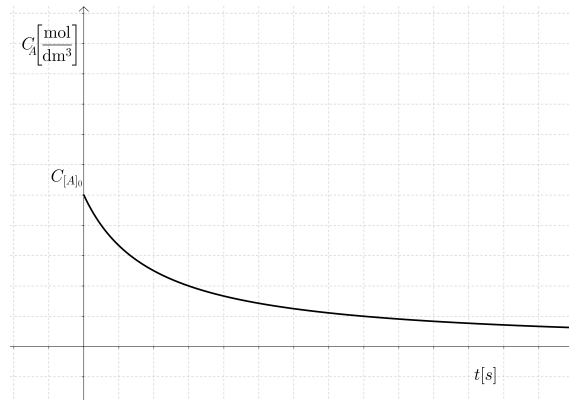
Ha feltesszük, hogy kezdetben a kiindulási anyagok koncentrációja $C_A(0) = C_{A_0}$ volt, akkor

$$C_{A_0} = -\frac{1}{c} \quad \Rightarrow \quad c = -\frac{1}{C_{A_0}}$$

adódik, így a kiindulási anyag koncentrációja az idő függvényében

$$C_A(t) = \frac{1}{2k \cdot t + \frac{1}{C_{A_0}}} = \frac{C_{A_0}}{C_{A_0} \cdot 2k \cdot t + 1}.$$

A koncentráció-idő függvény grafikonja:



A sebességi együttható mértékegysége $\left[\frac{\text{dm}^3}{\text{mol} \cdot \text{s}} \right]$.

A reakció felezési ideje a

$$\frac{C_{A0}}{2} = \frac{C_{A0}}{C_{A0} \cdot k \cdot t + 1}$$

egyenlet megoldása, vagyis

$$t_{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2k \cdot C_{A0}}.$$

Ha az $A + B \rightarrow D$ kémiai reakció másodrendű és a kiindulási anyagok koncentrációja nem azonos, akkor a reakciósebességi egyenletek

$$\dot{C}_A(t) = -k \cdot C_A(t) \cdot C_B(t)$$

$$\dot{C}_B(t) = -k \cdot C_A(t) \cdot C_B(t).$$

Valójában itt egy differenciálegyenlet rendszert kellene megoldani, azonban a probléma redukálható egy differenciálegyenletté.

Legyen x a kiindulási anyagok elbomlott koncentrációja. Ekkor egyrészt

$$C_A(t) = C_{A0} - x(t),$$

másrészt

$$C_B(t) = C_{B0} - x(t).$$

Továbbá

$$\dot{C}_A(t) = \frac{d}{dt}(C_{A0} - x(t)) = -\dot{x}(t)$$

és

$$\dot{C}_B(t) = \frac{d}{dt}(C_{B0} - x(t)) = -\dot{x}(t).$$

Ezeket az eredményeket felhasználva az

$$\dot{x}(t) = k \cdot (C_{A_0} - x(t)) \cdot (C_{B_0} - x(t))$$

differentiálegyenlethez jutunk.

Vezessük be a $g(t) = k$ és $h(x) = (C_{A_0} - x) \cdot (C_{B_0} - x)$ függvényeket. Ekkor teljesülnie kell az

$$\int \frac{1}{h(x)} dx = \int g(t) dt$$

egyenletnek. Az adatok behelyettesítése után azt kapjuk, hogy

$$\int \frac{1}{(C_{A_0} - x) \cdot (C_{B_0} - x)} dx = \int k dt.$$

A bal oldalon szereplő integrálást parciális törtekre bontás módszerével végezhajuk el.

Tekintsük az

$$\frac{1}{(C_{A_0} - x) \cdot (C_{B_0} - x)} = \frac{L}{C_{A_0} - x} + \frac{M}{C_{B_0} - x}$$

előállítást. Az egyenlet mindkét oldalát szorozva a közös nevezővel, majd rendezve a jobb oldalon szereplő tagokat azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} 1 &= L \cdot (C_{B_0} - x) + M \cdot (C_{A_0} - x) \\ 1 &= x \cdot (-L - M) + L \cdot C_{B_0} + M \cdot C_{A_0}. \end{aligned}$$

A két oldalon a megfelelő fokszámú tagokat összehasonlítva az

$$\left. \begin{aligned} -L - M &= 0 \\ L \cdot C_{B_0} + M \cdot C_{A_0} &= 1 \end{aligned} \right\}$$

egyenletrendszerhez jutunk. Azt első egyenletből azt kapjuk, hogy $L = -M$. Ezt behelyettesítve a második egyenletbe

$$-M \cdot C_{B_0} + M \cdot C_{A_0} = 1,$$

így

$$M \cdot (C_{A_0} - C_{B_0}) = 1,$$

tehát

$$M = \frac{1}{C_{A_0} - C_{B_0}}.$$

Ezt felhasználva

$$L = \frac{1}{C_{B_0} - C_{A_0}}.$$

A kapott eredményeket felhasználva azt kapjuk, hogy

$$\int \frac{1}{C_{B_0} - C_{A_0}} \cdot \frac{1}{C_{A_0} - x} + \frac{1}{C_{A_0} - C_{B_0}} \cdot \frac{1}{C_{B_0} - x} dx = \int k dt.$$

Elvégezve az integrálásokat

$$-\frac{1}{C_{B_0} - C_{A_0}} \cdot \ln |C_{A_0} - x| - \frac{1}{C_{A_0} - C_{B_0}} \cdot \ln |C_{B_0} - x| = k \cdot t + c$$

adódik, így azt kapjuk, hogy

$$\frac{1}{C_{A_0} - C_{B_0}} \cdot \ln \frac{C_{A_0} - x}{C_{B_0} - x} = k \cdot t + c$$

Felhasználva, hogy $x(0) = 0$ azt kapjuk, hogy

$$\frac{1}{C_{A_0} - C_{B_0}} \cdot \ln \frac{C_{A_0}}{C_{B_0}} = c.$$

Tehát

$$\frac{1}{C_{A_0} - C_{B_0}} \cdot \ln \frac{C_{A_0} - x}{C_{B_0} - x} = \frac{1}{C_{A_0} - C_{B_0}} \cdot \ln \frac{C_{A_0}}{C_{B_0}}.$$

Az egyenletet átrendezve

$$\frac{1}{C_{A_0} - C_{B_0}} \cdot \left(\ln \frac{C_{A_0} - x}{C_{B_0} - x} - \ln \frac{C_{A_0}}{C_{B_0}} \right) = k \cdot t,$$

vagyis

$$\frac{1}{C_{A_0} - C_{B_0}} \cdot \ln \frac{(C_{A_0} - x(t)) \cdot C_{B_0}}{(C_{B_0} - x(t)) \cdot C_{A_0}} = k \cdot t.$$

Felhasználva a

$$C_{A_0} - x(t) = C_A(t)$$

$$C_{B_0} - x(t) = C_B(t)$$

összefüggéseket azt kapjuk, hogy

$$\frac{1}{C_{A_0} - C_{B_0}} \cdot \ln \frac{C_A(t) \cdot C_{B_0}}{C_B(t) \cdot C_{A_0}} = k \cdot t.$$

Az egyenletet átrendezve

$$\frac{C_A(t)}{C_B(t)} = \frac{C_{A_0}}{C_{B_0}} \cdot e^{(C_{A_0} - C_{B_0}) \cdot k \cdot t}$$

adódik. Mivel ez az egyenlet az A és B anyag koncentrációját is tartalmazza és mi elsőként az A koncentrációját szeretnénk megkapni az idő függvényében, ezért az alábbi átalakítással élünk:

$$C_B(t) = C_{B_0} - x(t) = C_{B_0} - C_{A_0} + C_{A_0} - x(t) = C_{B_0} - C_{A_0} + C_A(t).$$

Ezt felhasználva

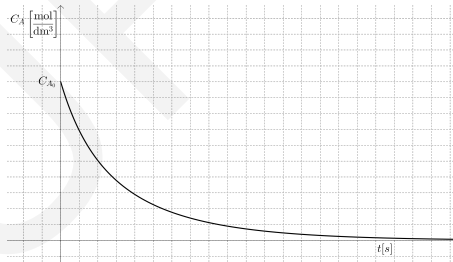
$$\frac{C_A(t)}{C_{B_0} - C_{A_0} + C_A(t)} = \frac{C_{A_0}}{C_{B_0}} \cdot e^{(C_{A_0} - C_{B_0}) \cdot k \cdot t}.$$

Az egyenletet átrendezve azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} C_A(t) - \frac{C_{A_0}}{C_{B_0}} \cdot e^{(C_{A_0} - C_{B_0}) \cdot k \cdot t} \cdot C_A(t) &= \\ &= (C_{B_0} - C_{A_0}) \cdot \frac{C_{A_0}}{C_{B_0}} \cdot e^{(C_{A_0} - C_{B_0}) \cdot k \cdot t}, \end{aligned}$$

így az A anyag koncentrációja az idő függvényében

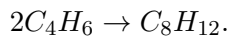
$$\begin{aligned} C_A(t) &= \frac{(C_{B_0} - C_{A_0}) \cdot \frac{C_{A_0}}{C_{B_0}} \cdot e^{(C_{A_0} - C_{B_0}) \cdot k \cdot t}}{1 - \frac{C_{A_0}}{C_{B_0}} \cdot e^{(C_{A_0} - C_{B_0}) \cdot k \cdot t}} = \\ &= \frac{(C_{B_0} - C_{A_0})}{\frac{C_{B_0}}{C_{A_0}} \cdot e^{(C_{B_0} - C_{A_0}) \cdot k \cdot t} - 1}. \end{aligned}$$



Az előzőhöz hasonló számolással adódik, hogy a B anyag koncentrációja az idő függvényében

$$C_B(t) = \frac{(C_{A_0} - C_{B_0})}{\frac{C_{A_0}}{C_{B_0}} \cdot e^{(C_{A_0} - C_{B_0}) \cdot k \cdot t} - 1}.$$

3.28. Példa. A butadién másodrendű reakcióban dimerizálódik a következő reakcióegyenlet szerint



A reakciósebességi együttható

$$k = 4,9 \cdot 10^{-3} \left[\frac{\text{dm}^3}{\text{mol} \cdot \text{s}} \right].$$

Meghatározzuk, hogy 30 perc alatt a butadién hány százaléka dimerizálódik, ha a koncentrációja kezdetben $0,05 \left[\frac{\text{mol}}{\text{dm}^3} \right]$.

Mivel $A + A \rightarrow D$ típusú másodrendű reakcióról van szó (vagyis kiindulási anyagok azonosak, egyenlő koncentrációban), ezért a reakciósebességi egyenlet

$$v(t) = \dot{C}_A(t) = -k \cdot 2C_A^2(t).$$

Ez egy szeparábilis differenciálegyenlet.

Vezessük be a $g(t) = -2k$ és $h(C_A) = C_A^2$ függvényeket. Ekkor teljesülnie kell az

$$\int \frac{1}{h(C_A)} dC_A = \int g(t) dt$$

egyenletnek. Az adatok behelyettesítése után azt kapjuk, hogy

$$\int \frac{1}{C_A^2} dC_A = \int -2k dt.$$

Elvégezve az integrálásokat

$$-\frac{1}{C_A} = -2k \cdot t + c$$

adódik, amiből azt kapjuk, hogy

$$C_A(t) = \frac{1}{2k \cdot t - c}.$$

A kiindulási anyagok koncentrációja kezdetben $C_A(0) = 0,05$ volt, akkor

$$0,05 = -\frac{1}{c} \quad \Rightarrow \quad c = -\frac{1}{0,05}$$

adódik, így a kiindulási anyag koncentrációja az idő függvényében

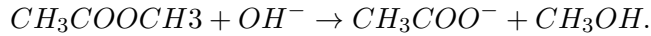
$$C_A(t) = \frac{0,05}{0,05 \cdot 2 \cdot 4,9 \cdot 10^{-3} \cdot t + 1}.$$

Ezt felhasználva

$$C_A(1800) = \frac{0,05}{0,05 \cdot 2 \cdot 4,9 \cdot 10^{-3} \cdot 1800 + 1} \approx 0,0266 \left[\frac{\text{mol}}{\text{dm}^3} \right].$$

Ez azt jelenti, hogy a kezdeti koncentráció 53,2%-a van jelen fél óra múlva, tehát 46,8%-a dimerizálódott.

3.29. Példa. A metil acetát lúgos hidrolízise jó közelítéssel másodrendű reakció szerint játszódik le:



Legyen mindkét reaktáns kezdeti koncentrációja $0,5 \left[\frac{\text{mol}}{\text{dm}^3} \right]$, a sebességi együttható $0,599 \left[\frac{\text{dm}^3}{\text{mol} \cdot \text{s}} \right]$. Mennyi idő alatt játszódik le a folyamat? Tekintsük lejátszódnak a reakciót, ha a jelenlévő koncentráció az eredeti koncentráció 2%-a.

Az előbbi modell szerint a másodrendű reakciók koncentráció-idő függvénye

$$C_A(t) = \frac{C_{A_0}}{C_{A_0} \cdot k \cdot t + 1}.$$

Behelyettesítve az adatokat azt kapjuk, hogy

$$0,02C_{A_0} = \frac{C_{A_0}}{C_{A_0} \cdot k \cdot t + 1},$$

így

$$0,02 = \frac{1}{0,599 \cdot 0,05 \cdot t + 1},$$

amiből $t = 1\,636 \text{ [s]}$ adódik.

4. Szeparábilis differenciálegyenletre visszavezethető egyenletek

4.1. **Definíció.** Tegyük fel, hogy $g:]0; \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ folytonos függvény. Az

$$y'(x) = g\left(\frac{y(x)}{x}\right)$$

differenciálegyenletet *változóban homogén* vagy *homogén fokszámú differenciálegyenletnek* nevezzük.

4.2. **Tétel.** Tegyük fel, hogy $g:]0; \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ folytonos függvény. Az

$$y'(x) = g\left(\frac{y(x)}{x}\right)$$

differenciálegyenlet visszavezethető szeparábilis differenciálegyenletre.

Bizonyítás: Vezessük be az

$$u(x) = \frac{y(x)}{x}$$

függvényt! Ekkor

$$y(x) = x \cdot u(x),$$

így

$$y'(x) = u(x) + x \cdot u'(x).$$

Ezt felhasználva az eredeti differenciálegyenlet

$$u(x) + x \cdot u'(x) = g(u(x)).$$

Az egyenletet explicit alakban felírva azt kapjuk, hogy

$$u'(x) = \frac{1}{x} \cdot (g(u(x)) - u(x)),$$

amely egy szeparábilis differenciálegyenlet az u függvényre vonatkozóan. ■

4.3. **Példa.** Oldjuk meg az

$$y'(x) = e^{\frac{y(x)}{x}} + \frac{y(x)}{x}$$

differenciálegyenletet!

Megoldás:

Vezessük be az

$$u(x) = \frac{y(x)}{x}$$

függvényt. Ekkor

$$y(x) = x \cdot u(x).$$

Az $y(x)$ függvény deriváltja

$$y'(x) = u(x) + x \cdot u'(x).$$

Ezt felhasználva az eredeti egyenlet átírható

$$u(x) + x \cdot u'(x) = e^{u(x)} + u(x) \quad \Rightarrow \quad x \cdot u'(x) = e^{u(x)}$$

módon, amely egy szeparábilis egyenlet.

Legyen $h(u) = e^u$ és $g(x) = \frac{1}{x}$. Ekkor az

$$\int \frac{1}{h(u)} du = \int g(x) dx$$

egyenletet kell megoldanunk az u ismeretlenre függvényre.

Az megfelelő függvények behelyettesítése után azt kapjuk, hogy

$$\int \frac{1}{e^u} du = \int \frac{1}{x} dx.$$

Az integrálások elvégzése után az

$$-e^{-u} = \ln x + c$$

egyenlet adódik, amiből az u ismeretlen függvényt kifejezve

$$u(x) = -\ln(-\ln x + c).$$

Mivel $y(x) = x \cdot u(x)$, ezért

$$y(x) = -x \cdot \ln(-\ln x + c),$$

ahol c tetszőleges olyan valós szám, amelyre az előbbi függvény értelmezve van.

4.4. Tétel. Legyen $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos függvény, $a, b, c \in \mathbb{R}$. Az

$$y'(x) = f(a \cdot x + b \cdot y(x) + c)$$

differenciálegyenlet szeparábilis differenciálegyenletre visszavezethető egyenlet.

Bizonyítás: Vezessük be az $u(x)$ függvényt az alábbi módon:

$$u(x) = a \cdot x + b \cdot y(x) + c.$$

Ekkor

$$y(x) = \frac{u(x) - a \cdot x - c}{b}.$$

Az $y(x)$ függvény deriváltja

$$y'(x) = \frac{u'(x) - a}{b}.$$

Az eredeti egyenletbe behelyettesítve az $y(x)$ és $y'(x)$ függvényeket azt kapjuk, hogy

$$\frac{u'(x) - a}{b} = f(u(x)),$$

amit átrendezve az

$$u'(x) = b \cdot f(u(x)) + a$$

szeparábilis differenciálegyenlethez jutunk. Az $u(x)$ függvény meghatározása után az $y(x)$ függvényt az

$$y(x) = \frac{u(x) - a \cdot x - c}{b}.$$

összefüggéssel határozzuk meg. ■

4.5. Példa. Oldjuk meg az

$$y'(x) = x + y(x), \quad y(0) = 2$$

kezdetiérték feladatot!

Megoldás:

Vezessük be az

$$u(x) = x + y(x)$$

függvényt! Ekkor

$$u'(x) = 1 + y'(x).$$

A helyettesítés után az

$$u'(x) - 1 = u(x)$$

differenciálegyenletet kapjuk. Az egyenletet átrendezve

$$u'(x) = 1 + u(x)$$

adódik, amely egy szeparábilis differenciálegyenlet.

Legyen $h(u) = 1 + u$ és $g(x) = 1$. Ekkor az

$$\int \frac{1}{h(u)} du = \int g(x) dx$$

egyenletet kell megoldanunk az u ismeretlenre függvényre.

Az megfelelő függvények behelyettesítése után azt kapjuk, hogy

$$\int \frac{1}{1+u} du = \int 1 dx.$$

Az integrálásokat elvégezve azt kapjuk, hogy

$$\ln |1+u| = x + c$$

adódik, így

$$u(x) = C \cdot e^x - 1.$$

Mivel $y(x) = u(x) - x$, ezért a differenciálegyenlet megoldása

$$y(x) = C \cdot e^x - 1 - x.$$

Mivel $y(0) = 2$, ezért

$$2 = C - 1 \quad \Rightarrow \quad C = 3.$$

Tehát az egyenlet megoldása

$$y(x) = 3 \cdot e^x - 1 - x.$$

4.6. Tétel. Legyen I egy nyílt intervallum és $g: I \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos függvény.

Legyenek továbbá $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2$ valós számok. Ekkor az

$$y'(x) = g\left(\frac{\alpha_1 \cdot x + \beta_1 \cdot y(x) + \gamma_1}{\alpha_2 \cdot x + \beta_2 \cdot y(x) + \gamma_2}\right)$$

differenciálegyenlet szeparábilis egyenletre visszavezethető.

Bizonyítás: Ha

$$\det \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{pmatrix} = \alpha_1 \cdot \beta_2 - \alpha_2 \cdot \beta_1 \neq 0,$$

akkor az

$$\alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 = 0$$

$$\alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 = 0$$

lineáris egyenletrendszer egyértelműen megoldható. Legyen az egyenletrendszer megoldása az $(x_0; y_0)$ számpár. Vezessük be az u változót és a $v(u)$ függvényt úgy, hogy

$$\begin{aligned}x &= u + x_0 \\ y &= v + y_0\end{aligned}$$

teljesüljön! Ezzel a transzformációval a differenciálegyenlet

$$v'(u) = \left(\frac{\alpha_1 \cdot u + \beta_1 \cdot v(u)}{\alpha_2 \cdot u + \beta_2 \cdot v(u)} \right)$$

alakú lesz, amiből azt kapjuk, hogy

$$v'(u) = \left(\frac{\alpha_1 + \beta_1 \cdot \frac{v(u)}{u}}{\alpha_2 + \beta_2 \cdot \frac{v(u)}{u}} \right),$$

amely egy homogén fokszámú differenciálegyenlet a v függvényre nézve.

Ha

$$\det \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{pmatrix} = \alpha_1 \cdot \beta_2 - \alpha_2 \cdot \beta_1 = 0,$$

akkor

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{\beta_1}{\beta_2} = \lambda.$$

Másrészt a fenti determináns nulla volta miatt az is teljesül, hogy

$$\alpha_1 x + \beta_1 y = \lambda \cdot (\alpha_2 x + \beta_2 y).$$

Vezessük be a

$$v'(x) = \alpha_1 \cdot x + \beta_1 \cdot y(x)$$

függvényt! Ekkor

$$v(x) = \alpha_1 + \beta_1 \cdot y'(x) = \alpha_1 + \beta_1 \cdot g \left(\frac{\lambda \cdot v(x) + \gamma_1}{v(x) + \gamma_2} \right),$$

amely egy szeparábilis differenciálegyenlet. ■

4.7. Példa. Oldjuk meg az

$$y'(x) = \frac{4x - y(x) + 7}{2x + y(x) - 1}$$

differenciálegyenletet.

Mivel

$$\det \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = 6 \neq 0,$$

ezért meg kell oldanunk a

$$4x - y + 7 = 0$$

$$2x + y - 1 = 0$$

egyenletrendszer. A két egyenletet összeadva $6x + 6 = 0$ adódik, így $x = -1$. Ezt felhasználva azt kapjuk, hogy $y = 3$.

Hajtsuk végre az

$$x = u - 1$$

$$y(x) = v(u) + 3$$

helyettesítést! Ekkor azt kapjuk, hogy

$$v'(u) = \frac{4 \cdot (u - 1) - v(u) - 3 + 7}{2 \cdot (u - 1) + v(u) + 3 - 1} = \frac{4u - v(u)}{2u + v(u)} = \frac{4 - \frac{v(u)}{u}}{2 + \frac{v(u)}{u}}.$$

Vezessük be a

$$z(u) = \frac{v(u)}{u}$$

függvényt! Ekkor

$$v(u) = u \cdot z(u),$$

így

$$v'(u) = z(u) + u \cdot z'(u).$$

Ezt felhasználva a

$$z(u) + u \cdot z'(u) = \frac{4 - z(u)}{2 + z(u)}$$

differenciálegyenlethez jutunk. Az egyenletet explicit alakra hozva

$$z'(u) = \frac{1}{u} \cdot \frac{4 - z(u) - 2z(u) - z^2(u)}{2 + z(u)}$$

adódik. Az összevonás után azt kapjuk, hogy

$$z'(u) = \frac{1}{u} \cdot \frac{4 - 3z(u) - z^2(u)}{2 + z(u)}.$$

Ez egy szeparábilis differenciálegyenlet. Legyen

$$h(z) = \frac{4 - 3z - z^2}{2 + z}$$

és

$$g(u) = \frac{1}{u}.$$

Ekkor az

$$\int \frac{1}{h(z)} dz = \int g(u) du$$

egyenletet kell megoldanunk az z ismeretlenre függvényre.

Az megfelelő függvények behelyettesítése után azt kapjuk, hogy

$$\int \frac{2+z}{-z^2-3z+4} dz = \int \frac{1}{u} du.$$

A bal oldalon szereplő integrált átalakítva azt kapjuk, hogy

$$-\int \frac{2+z}{z^2+3z-4} dz.$$

A kapott integrált a parciális törtekre bontás módszerével végezhetjük el.

Először szorzattá alakítjuk a tört nevezőjét. Ehhez keressük a $z^2 + 3z - 4$ polinom gyökeit. A másodfokú egyenlet megoldóképletét felhasználva

$$z_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9+16}}{2} = \frac{-3 \pm 5}{2},$$

adódik, így $x_1 = 1$, illetve $x_2 = -4$. Ezt felhasználva

$$z^2 + 3z - 4 = (z - 1) \cdot (z + 4).$$

Tehát azt kapjuk, hogy

$$-\int \frac{2+z}{z^2+3z-4} dz = -\int \frac{2+z}{(z-1) \cdot (z+4)} dz.$$

A fenti törtet felbontjuk parciális törtek összegére:

$$\frac{2+z}{(z-1) \cdot (z+4)} = \frac{A}{z-1} + \frac{B}{z+4}.$$

Meghatározzuk az A és B együtthatókat. Mindkét oldalt szorozva a közös nevezővel azt kapjuk, hogy

$$2+z = A \cdot (z+4) + B \cdot (z-1).$$

Felbontjuk a zárójelet, majd z hatványai szerint csoportosítjuk a tagokat. Ekkor azt kapjuk, hogy

$$2+z = z \cdot (A+B) + 4A - B$$

adódik. A jobb oldal pontosan akkor egyezik meg a bal oldallal, ha az z együtt-hatója és a konstans tag megegyezik a két oldalon, azaz ha teljesül az alábbi egyenletrendszer:

$$\begin{aligned} 1 &= A + B \\ 2 &= 4A - B. \end{aligned}$$

A két egyenletet összeadva $A = \frac{3}{5}$ adódik, amelyet visszahelyettesítve az első egyenletbe azt kapjuk, hogy $B = \frac{2}{5}$. Tehát

$$\begin{aligned} - \int \frac{2+z}{(z-1) \cdot (z+4)} dz &= -\frac{3}{5} \cdot \int \frac{1}{z-1} - \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{z+4} dz = \\ &= -\frac{3}{5} \cdot \ln |z-1| - \frac{2}{5} \cdot \ln |z+4| + c_1. \end{aligned}$$

Másrészt

$$\int \frac{1}{u} du = \ln |u| + c_2.$$

Tehát azt kaptuk, hogy

$$-\frac{3}{5} \cdot \ln |z-1| - \frac{2}{5} \cdot \ln |z+4| = \ln |u| + c.$$

A kapott egyenlet mindkét oldalát -5 -tel szorozva és a logaritmus azonosságait felhasználva azt kapjuk, hogy

$$(z-1)^3 \cdot (z+4)^2 = \frac{C}{u^5}.$$

Mivel $z = \frac{v}{u}$, ezért

$$\left(\frac{v}{u} - 1\right)^3 \cdot \left(\frac{v}{u} + 4\right)^2 = \frac{C}{u^5}.$$

A kapott egyenletet átalakítva azt kapjuk, hogy

$$\frac{(v-u)^3 \cdot (v+4u)^2}{u^5} = \frac{C}{u^5},$$

így

$$(v-u)^3 \cdot (v+4u)^2 = C.$$

Mivel $v = y-3$ és $u = x+1$, ezért a differenciálegyenlet általános megoldására

$$(y(x) - x - 4)^2 \cdot (y(x) + 4x + 1)^2 = C$$

adódik, ahol $C \in \mathbb{R}$ tetszőleges.

4.8. **Példa.** Tekintsük az

$$y'(x) = \frac{2x + y(x) + 3}{4x + 2y(x) + 2}$$

differenciálegyenletet!

Mivel

$$\det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = 0,$$

ezért be kell vezetnünk az

$$u(x) = 2x + y(x)$$

függvényt. Ekkor

$$u'(x) = 1 - 2y'(x),$$

így

$$y'(x) = u'(x) - 2.$$

Ezt felhasználva a differenciálegyenlet

$$u'(x) - 2 = \frac{u(x) + 3}{2u(x) + 2}$$

alakúra írható át. Az egyenletet explicit alakra hozva azt kapjuk, hogy

$$u'(x) = \frac{u(x) + 3 + 4u(x) + 4}{2u(x) + 2},$$

így

$$u'(x) = \frac{5u(x) + 7}{2u(x) + 2}$$

adódik, ami egy szeparábilis differenciálegyenlet.

Legyen $h(u) = \frac{5u+7}{2u+2}$ és $g(x) = 1$. Ekkor az

$$\int \frac{1}{h(u)} du = \int g(x) dx$$

egyenletet kell megoldanunk az u ismeretlenre függvényre.

A megfelelő függvények behelyettesítése után azt kapjuk, hogy

$$\int \frac{2u+2}{5u+7} du = \int 1 dx.$$

Mivel

$$\begin{aligned}\frac{2u+2}{5u+7} &= \frac{2}{5} \cdot \frac{u+1}{u+\frac{7}{5}} = \frac{2}{5} \cdot \frac{u+\frac{7}{5}-\frac{2}{5}}{u+\frac{7}{5}} = \\ &= \frac{2}{5} - \frac{\frac{4}{25}}{u+\frac{7}{5}} = \frac{2}{5} - \frac{4}{25u+35},\end{aligned}$$

ezért

$$\int \frac{2u+2}{5u+7} du = \frac{2}{5}u - \frac{4}{25} \cdot \ln |25u+35| + c,$$

így a differenciálegyenlet megoldása azon u függvény, amelyre teljesül, hogy

$$\frac{2}{5}u - \frac{4}{25} \cdot \ln |25u+35| = x + C.$$

Felhasználva, hogy $u = 2x + y$ azt kapjuk, hogy

$$\frac{2}{5} \cdot (2x + y) - \frac{4}{25} \cdot \ln |25 \cdot (2x + y) + 35| = x + C,$$

ahol $C \in \mathbb{R}$ tetszőleges.

5. Elsőrendű lineáris homogén differenciálegyenletek

5.1. **Definíció.** Legyen $a: I \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos függvény. Az

$$y'(x) + a(x) \cdot y(x) = 0$$

differenciálegyenletet *elsőrendű, lineáris, homogén differenciálegyenletnek* nevezzük.

5.2. **Példa.** Az

$$y'(x) - 6y(x) = x^2 + 2x - 1$$

differenciálegyenlet elsőrendű, lineáris, konstans együtthatós, homogén egyenlet.

5.3. **Példa.** Az

$$y'(x) - 6x \cdot y(x) = x^2 + 2x - 1$$

differenciálegyenlet elsőrendű, lineáris, függvényegyütthatós, homogén egyenlet.

5.4. **Tétel.** Az előbbi definícióban szereplő differenciálegyenlet általános megoldása

$$y(x) = C \cdot e^{-\int a(x) dx},$$

ahol $C \in \mathbb{R}$ tetszőleges.

Bizonyítás: Az $y'(x) + a(x) \cdot y(x) = 0$ egyenletet átrendezve azt kapjuk, hogy

$$y'(x) = -a(x) \cdot y(x),$$

amely egy szeparábilis differenciálegyenlet.

Ennek megoldását úgy kapjuk, hogy az

$$\int \frac{1}{y} dy = \int -a(x) dx$$

egyenletből kifejezzük az ismeretlen y függvényt:

$$\ln |y| = \int -a(x) dx.$$

Ebből y -t kifejezve

$$y(x) = C \cdot e^{-\int a(x) dx}$$

adódik, ahol $C \in \mathbb{R}$ tetszőleges.

A kapott $y(x)$ függvény valóban megoldása az eredeti egyenletnek, ugyanis

$$\begin{aligned} & \left(e^{-\int a(x) dx} \right)' + a(x) \cdot e^{-\int a(x) dx} = \\ & = e^{-\int a(x) dx} \cdot (-a(x)) + a(x) \cdot e^{-\int a(x) dx} = 0. \end{aligned}$$

Ezzel az állítást igazoltuk. ■

5.5. Példa. Az

$$y'(x) + 2x \cdot y(x) = 0$$

egyenlet elsőrendű, lineáris, homogén differenciálegyenlet. Az általános elméletben szereplő a függvény jelen esetben $a(x) = 2x$. Az egyenlet általános megoldása

$$y(x) = C \cdot e^{-\int 2x dx} = C \cdot e^{-x^2}.$$

6. Elsőrendű lineáris inhomogén differenciálegyenletek megoldása konstansvariálással

6.1. **Definíció.** Legyenek $a, b: I \rightarrow \mathbb{R}$ adott, folytonos függvények. Az

$$y'(x) + a(x) \cdot y(x) = b(x)$$

differenciálegyenletet *elsőrendű lineáris differenciálegyenlet*nek nevezzük. Ha $b(x) = 0$, akkor az egyenletet *homogén*nek, ellenkező esetben *inhomogén*nek mondjuk. A b függvényt szokás *zavaró függvény*nek is hívni.

6.2. **Megjegyzés.** Az, hogy egy differenciálegyenlet lineáris azt jelenti, hogy az ismeretlen függvény és annak deriváltja elsőfokú vagy nulladfokú hatványon van, továbbá az ismeretlen függvénynek és deriváltjának valamilyen adott szám vagy függvényszerese és ezek összege (különbsége) szerepel.

6.3. **Példa.** Az $y'(x) = 2y(x) + \ln x$ differenciálegyenlet elsőrendű függvény-eggyütthatós lineáris inhomogén.

6.4. **Tétel.** Legyenek $a, b: I \rightarrow \mathbb{R}$ adott, folytonos függvények. Az

$$y'(x) + a(x) \cdot y(x) = b(x)$$

lineáris differenciálegyenlet általános megoldása

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x),$$

ahol y_h a homogén lineáris differenciálegyenlet általános megoldása, és y_p pedig az inhomogén lineáris differenciálegyenlet egy partikuláris megoldása.

Tehát egy elsőrendű lineáris inhomogén differenciálegyenlet általános megoldása a megfelelő homogén egyenlet általános megoldása, valamint az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldásának összegeként áll elő.

Bizonyítás: Először megmutatjuk azt, hogy az inhomogén egyenlet két partikuláris megoldásának különbsége megoldása az inhomogén egyenlethez tartozó homogén egyenletnek.

Ha y_1 és y_2 partikuláris megoldásai az

$$y'(x) + a(x) \cdot y(x) = b(x)$$

differenciálegyenletnek, akkor egyrészt

$$y_1'(x) + a(x) \cdot y_1(x) = b(x),$$

másképpen

$$y_2'(x) + a(x) \cdot y_2(x) = b(x).$$

Ha képezzük az előbbi két egyenlet különbségét, akkor azt kapjuk, hogy

$$y_1'(x) - y_2'(x) + a(x) \cdot (y_1(x) - y_2(x)) = 0.$$

A derivált függvény additív tulajdonsága miatt

$$y_1'(x) - y_2'(x) = (y_1(x) - y_2(x))'(x),$$

így

$$(y_1(x) - y_2(x))' + a(x) \cdot (y_1(x) - y_2(x)) = 0,$$

tehát az $y_1 - y_2$ függvény valóban megoldása az

$$y'(x) + a(x) \cdot y(x) = 0$$

homogén egyenletnek.

A homogén egyenlet megoldásfüggvényét y_h -val jelölve azt kapjuk, hogy

$$y_h(x) = y_1(x) - y_2(x),$$

így

$$y_1(x) = y_h(x) + y_2(x),$$

tehát az inhomogén egyenlet általános megoldása valóban a homogén egyenlet általános megoldásának és az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldásának összegeként áll elő. ■

6.5. Megjegyzés. Egy inhomogén lineáris egyenlet megoldását tehát meghatározhatjuk úgy, hogy először megoldjuk a (megfelelő) homogén egyenletet, majd megkeressük az inhomogén egyenlet egy megoldását. Az inhomogén egyenlet egy megoldásának megkeresésére több módszer is létezik. Ezek közül a következőkben elsőként az úgynevezett konstansvariálás módszerét ismertetjük.

6.6. Eljárás. (konstansvariálás)

A módszer lényege az

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x)$$

általános megoldásában található $y_h(x)$ és $y_p(x)$ függvények megkeresése.

Először meghatározzuk a homogén differenciálegyenlet általános megoldását. Legyen ez

$$y_h(x) = C \cdot y_1(x),$$

ahol $C \in \mathbb{R}$ és $y_1(x)$ a homogén egyenlet egy megoldása. Ezután az inhomogén egyenlet egy megoldását

$$y_p(x) = C(x) \cdot y_1(x)$$

alakban keressük (vagyis a homogén egyenlet általános megoldásában szereplő C konstans kicseréljük egy $C'(x)$ függvényre).

Ezután az $y_p(x)$ függvényt visszahelyettesítjük az eredeti (inhomogén) differenciálegyenletbe, majd abból meghatározzuk a $C'(x)$ függvényt.

6.7. Tétel. Legyenek $a, b: I \rightarrow \mathbb{R}$ adott, folytonos függvények és $b(x) \neq 0$. Az

$$y'(x) + a(x) \cdot y(x) = b(x)$$

lineáris inhomogén differenciálegyenlet egyik partikuláris megoldása mindig megadható konstansvariálás segítségével.

Bizonyítás: Az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldását

$$y_p(x) = C(x) \cdot y_h(x)$$

alakban keressük, ahol y_h az

$$y'(x) + a(x) \cdot y(x) = 0$$

egyenlet egy nem azonosan zérus megoldása, vagyis

$$y'_h(x) + a(x) \cdot y_h(x) = 0.$$

Az y_p függvény deriváltfüggvénye

$$y'_p(x) = C'(x) \cdot y_h(x) + C(x) \cdot y'_h(x).$$

Ezt behelyettesítve az eredeti inhomogén differenciálegyenletbe a

$$C'(x) \cdot y_h(x) + C(x) \cdot y'_h(x) + a(x) \cdot C(x) \cdot y_h(x) = b(x)$$

egyenlethez jutunk. Az egyenletet átalakítva

$$C'(x) \cdot y_h(x) + C(x) \cdot (y'_h(x) + a(x) \cdot y_h(x)) = b(x)$$

adódik. Felhasználva, hogy y_h megoldása a homogén egyenletnek azt kapjuk, hogy

$$C'(x) \cdot y_h(x) = b(x).$$

Ebből kifejezve a $C'(x)$ függvényt

$$C'(x) = \frac{b(x)}{y_h(x)}.$$

Mivel a kapott $C'(x)$ függvény folytonos függvények hányadosa, ezért ő maga is folytonos, így létezik primitív függvénye. Elegendő egyetlen primitív függvényt magadni (például a 0 konstanshoz tartozót), mert csak egy megoldását szeretnénk megadni az inhomogén egyenletnek. ■

6.8. Megjegyzés. A konstansvariálás módszere elsőrendű lineáris inhomogén differenciálegyenletek esetén az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldásának megkeresésére alkalmazható. Az algoritmus működik függvényegyütthatós és konstansegyütthatós differenciálegyenletek esetén is. A következő két fejezetben olyan módszerekkel ismerkedünk meg, amelyek csak állandó együtthatós (inhomogén) lineáris differenciálegyenletek partikuláris megoldásának megkeresésére használhatóak.

6.9. Példa. Oldjuk meg az

$$y'(x) = y(x) + e^x$$

differenciálegyenletet!

Első lépésben megoldjuk az $y'(x) = y(x)$ homogén egyenletet.

Az $y'(x) - y(x) = 0$ egyenlet általános megoldása

$$y_h = C \cdot e^{-\int -1 dx} = C \cdot e^x.$$

Ezután az inhomogén egyenlet egy megoldását

$$y_p = C(x) \cdot e^x$$

alakban keressük. Ezt visszahelyettesítve az eredeti differenciálegyenletbe azt kapjuk, hogy

$$(C(x) \cdot e^x)' = C(x) \cdot e^x + e^x.$$

Elvégezve a deriválást azt kapjuk, hogy

$$C'(x) \cdot e^x + C(x) \cdot e^x = C(x) \cdot e^x + e^x.$$

Vegyük észre, hogy a $C(x)$ -et tartalmazó tag kiesik (ennek a tagnak mindig ki kell esnie). Ha az e^x kifejezéssel egyszerűsítünk, akkor a $C'(x) = 1$ egyenlethez jutunk. Ennek egy primitív függvénye (elegendő egy primitív függvény, mert egy megoldást keresünk) $C(x) = x$. Tehát az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldása

$$y_p = x \cdot e^x.$$

Az eredeti inhomogén differenciálegyenlet általános megoldása

$$y = y_h + y_p = C \cdot e^x + x \cdot e^x = (C + x) \cdot e^x.$$

6.10. Példa. Oldjuk meg az

$$y'(x) - 2x \cdot y(x) = e^{x^2}$$

differenciálegyenletet!

Első lépésben megoldjuk az

$$y'(x) - 2x \cdot y(x) = 0$$

homogén egyenletet. Az egyenlet általános megoldása

$$y_h = C \cdot e^{-\int -2x \, dx} = C \cdot e^{x^2}.$$

Ezután az inhomogén egyenlet egy megoldását

$$y_p = C(x) \cdot e^{x^2}$$

alakban keressük. Ezt visszahelyettesítve az eredeti differenciálegyenletbe azt kapjuk, hogy

$$(C(x) \cdot e^{x^2})' - 2x \cdot C(x) \cdot e^{x^2} = e^{x^2}.$$

Elvégezve a deriválást azt kapjuk, hogy

$$C'(x) \cdot e^{x^2} + C(x) \cdot e^{x^2} \cdot 2x - 2x \cdot C(x) \cdot e^{x^2} = e^{x^2}.$$

Vegyük észre, hogy a $C(x)$ -et tartalmazó tag kiesik (ennek a tagnak mindig ki kell esnie). Az egyenlet rendezése után azt kapjuk, hogy

$$C'(x) = 1,$$

aminek egy primitív függvénye (elegendő egy primitív függvény, mert egy megoldást keresünk) $C(x) = x$. Tehát az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldása

$$y_p = x \cdot e^{x^2}.$$

Az eredeti inhomogén differenciálegyenlet általános megoldása

$$y = y_h + y_p = C \cdot e^{x^2} + x e^{x^2} = (C + x) \cdot e^{x^2}.$$

7. Elsőrendű konstans együtthatós lineáris inhomogén differenciálegyenletek megoldása próbafüggvénnyel

7.1. Megjegyzés. Ebben a fejezetben elsőrendű konstans együtthatós lineáris inhomogén differenciálegyenlet partikuláris megoldásának meghatározására ismertetünk egy módszert, amelyet *próbafüggvény módszernek* szokás nevezni.

7.2. Eljárás. (próbafüggvény)

Abban az esetben, ha az elsőrendű lineáris inhomogén differenciálegyenlet konstans együtthatós, továbbá a zavaró függvény speciális alakú, nevezetesen polinom-, exponenciális-, szinusz-, vagy koszinuszfüggvény, továbbá ezek összege (vagy különbsége), akkor a differenciálegyenlet partikuláris megoldása a zavaró függvényhez hasonló szerkezetű lesz. Az alábbi táblázatban összefoglaljuk, hogy az egyes esetekben milyen úgynevezett próbafüggvényt használhatunk a partikuláris megoldás meghatározásához.

Ha a partikuláris megoldásban nincs olyan tag, ami a homogén egyenlet megoldása lenne, akkor

zavaró függvény	a partikuláris megoldás általános alakja
$a_n \cdot x^n + \dots + a_1 \cdot x + a_0$	$A_n \cdot x^n + \dots + A_1 \cdot x + A_0$
$a \cdot e^{\alpha x}$	$A \cdot e^{\alpha x}$
$a \cdot \sin(\alpha x)$	$A \cdot \sin(\alpha x) + B \cdot \cos(\alpha x)$
$a \cdot \cos(\alpha x)$	$A \cdot \sin(\alpha x) + B \cdot \cos(\alpha x)$

Ha a partikuláris megoldásban van olyan tag, ami a homogén egyenlet megoldása lenne, akkor

zavaró függvény	a partikuláris megoldás általános alakja
$a_n \cdot x^n + \dots + a_1 \cdot x + a_0$	$x \cdot (A_n \cdot x^n + \dots + A_1 \cdot x + A_0)$
$a \cdot e^{\alpha x}$	$A \cdot x \cdot e^{\alpha x}$
$a \cdot \sin(\alpha x)$	$A \cdot x \cdot (\sin(\alpha x) + B \cdot \cos(\alpha x))$
$a \cdot \cos(\alpha x)$	$A \cdot x \cdot (\sin(\alpha x) + B \cdot \cos(\alpha x))$

Ebben az esetben (vagyis ha a próbafüggvény valamely tagja csak konstans szorzóban tér el a homogén egyenlet általános megoldásától) úgynevezett *rezonanciáról* beszélünk.

7.3. **Példa.** Tekintsük az

$$y'(x) - 2y(x) = 6x + 2$$

differenciálegyenletet!

A megfelelő homogén egyenlet

$$y'(x) - 2y(x) = 0.$$

A homogén egyenlet általános megoldása

$$y_h = C \cdot e^{-\int -2 dx} = C \cdot e^{2x}.$$

A próbafüggvényt

$$y_p(x) = Ax + B$$

alakban keressük. Ekkor

$$y_p'(x) = A.$$

Az y_p és y_p' függvényeket behelyettesítve az eredeti inhomogén egyenletbe azt kapjuk, hogy

$$A - 2 \cdot (Ax + B) = 6x + 2.$$

A tagokat fogszám szerint rendezve

$$-2Ax + A - 2B = 6x + 2$$

adódik. Tehát

$$\left. \begin{array}{rcl} -2A & & = 6 \\ A - 2B & & = 2 \end{array} \right\}.$$

Az egyenletrendszer megoldására azt kapjuk, hogy $A = -3$ és $B = -2,5$. Tehát az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldása

$$y_p(x) = -3x - 2,5.$$

Ezt felhasználva az inhomogén egyenlet általános megoldása

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = C \cdot e^{2x} - 3x - 2,5.$$

7.4. **Példa.** Tekintsük az

$$y'(x) - 3y(x) = e^{2x}$$

differenciálegyenletet!

A megfelelő homogén egyenlet

$$y'(x) - 3y(x) = 0.$$

A homogén egyenlet általános megoldása

$$y_h = C \cdot e^{-\int -3 dx} = C \cdot e^{3x}.$$

A próbafüggvényt

$$y_p(x) = A \cdot e^{2x}$$

alakban keressük. Ekkor

$$y_p'(x) = 2A \cdot e^{2x}.$$

Az y_p és y_p' függvényeket behelyettesítve az eredeti inhomogén egyenletbe azt kapjuk, hogy

$$2A \cdot e^{2x} - 3A \cdot e^{2x} = e^{2x},$$

így

$$-A \cdot e^{2x} = e^{2x},$$

amiből $A = -1$ adódik. Tehát az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldása

$$y_p(x) = -e^{2x}.$$

Ezt felhasználva az inhomogén egyenlet általános megoldása

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = C \cdot e^{3x} - e^{2x}.$$

7.5. Példa. Tekintsük az

$$y'(x) - 6y(x) = 6x + e^x$$

differenciálegyenletet!

A megfelelő homogén egyenlet

$$y'(x) - 6y(x) = 0.$$

A homogén egyenlet általános megoldása

$$y_h = C \cdot e^{-\int -6 dx} = C \cdot e^{6x}.$$

A próbafüggvényt

$$y_p(x) = Ax + B + D \cdot e^x$$

alakban keressük. Ekkor

$$y_p'(x) = A + De^x.$$

Az y_p és y_p' függvényeket behelyettesítve az eredeti inhomogén egyenletbe azt kapjuk, hogy

$$A + De^x - 6 \cdot (Ax + B + D \cdot e^x) = 6x + e^x,$$

így

$$-6Ax + A - 6B - 5D \cdot e^x = 6x + e^x,$$

amiből a megfelelő tagok összehasonlításából egyrészt $-6A = 6$, vagyis $A = -1$ adódik, másrészt $A - 6B = 0$, így $B = -\frac{1}{6}$ és $D = -\frac{1}{5}$. Tehát az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldása

$$y_p(x) = -x - \frac{1}{6} - \frac{1}{5} \cdot e^{5x}.$$

Ezt felhasználva az inhomogén egyenlet általános megoldása

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = C \cdot e^x - x - \frac{1}{6} - \frac{1}{5} \cdot e^{5x}.$$

7.6. Példa. Tekintsük az

$$y'(x) - 3y(x) = e^{2x}$$

differenciálegyenletet!

A megfelelő homogén egyenlet

$$y'(x) - 3y(x) = 0.$$

A homogén egyenlet általános megoldása

$$y_h = C \cdot e^{-\int -3 dx} = C \cdot e^{3x}.$$

A próbafüggvényt

$$y_p(x) = A \cdot e^{2x}$$

alakban keressük. Ekkor

$$y'_p(x) = 2A \cdot e^{2x}.$$

Az y_p és y'_p függvényeket behelyettesítve az eredeti inhomogén egyenletbe azt kapjuk, hogy

$$2A \cdot e^{2x} - 3A \cdot e^{2x} = e^{2x},$$

így

$$-A \cdot e^{2x} = e^{2x},$$

amiből $A = -1$ adódik. Tehát az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldása

$$y_p(x) = -e^{2x}.$$

Ezt felhasználva az inhomogén egyenlet általános megoldása

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = C \cdot e^{3x} - e^{2x}.$$

8. Elsőrendű konstansgyütthetős lineáris inhomogén differenciálegyenletek megoldása Laplace-transzformációval

8.1. Definíció. Az $f: [0; \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ függvény *Laplace-transzformáltjának* nevezzük az

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-st} dt$$

függvényt amennyiben az előbbi improprius integrál véges. Ilyenkor az f függvényt *generátorfüggvénynek* is mondjuk. Az f függvény Laplace-transzformáltját $\mathcal{L}[f]$ módon is szokás jelölni.

Ha ismerjük egy generátorfüggvény Laplace-transzformáltját, akkor a generátorfüggvényt *inverz Laplace-transzformációval* kapjuk meg a Laplace-transzformáltból. Az F függvény inverz Laplace-transzformáltját $\mathcal{L}^{-1}[F]$ módon jelöljük.

8.2. Megjegyzés. Megjegyezzük, hogy a fenti integrál $s > 0$ esetén lesz konvergens, így a fejezet további részeiben feltesszük, hogy $s > 0$.

8.3. Tétel. A Laplace-transzformáció additív tulajdonságú. Ez azt jelenti, hogy ha $f, g: [0; \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ esetén

$$\mathcal{L}[f + g] = \mathcal{L}[f] + \mathcal{L}[g].$$

Bizonyítás: Felhasználva a Laplace-transzformált definícióját és az integrál additív tulajdonságát azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f + g] &= \int_0^{\infty} (f + g)(t) \cdot e^{-st} dt = \int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-st} dt + \\ &+ \int_0^{\infty} g(t) \cdot e^{-st} dt = \mathcal{L}[f] + \mathcal{L}[g], \end{aligned}$$

amivel igazoltuk az állítást. ■

8.4. Tétel. A Laplace-transzformáció homogén tulajdonságú, ami azt jelenti, hogy $f: [0; \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ és $\alpha \in \mathbb{R}$ esetén

$$\mathcal{L}[\alpha \cdot f] = \alpha \cdot \mathcal{L}[f].$$

Bizonyítás: Felhasználva a Laplace-transzformált definícióját és az integrál homogén tulajdonságát azt kapjuk, hogy

$$\mathcal{L}[\alpha \cdot f] = \int_0^{\infty} (\alpha \cdot f)(t) \cdot e^{-st} dt = \alpha \cdot \int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-st} dt = \alpha \cdot \mathcal{L}[f],$$

amivel igazoltuk az állítást. ■

8.5. Következmény. A Laplace-transzformáció lineáris tulajdonságú, ami azt jelenti, hogy $f, g: [0; \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ és $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ esetén

$$\mathcal{L}[\alpha \cdot f + \beta \cdot g] = \alpha \cdot \mathcal{L}[f] + \beta \cdot \mathcal{L}[g].$$

Bizonyítás: Mivel a Laplace-transzformált additív és homogén, ezért

$$\mathcal{L}[\alpha \cdot f + \beta \cdot g] = \mathcal{L}[\alpha \cdot f] + \mathcal{L}[\beta \cdot g] = \alpha \cdot \mathcal{L}[f] + \beta \cdot \mathcal{L}[g],$$

amivel igazoltuk az állítást. ■

8.6. Tétel. (Derivált függvény Laplace-transzformáltja)

Ha $f: [0; \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ differenciálható függvény, akkor

$$\mathcal{L}[f'] = s \cdot \mathcal{L}[f] - f(0).$$

Bizonyítás: Felhasználva a Laplace-transzformált definícióját és parciális integrálás tételét azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f'] &= \int_0^{\infty} f'(t) \cdot e^{-st} dt = \lim_{c \rightarrow \infty} \int_0^c f'(t) \cdot e^{-st} dt = \\ &= \lim_{c \rightarrow \infty} \left[f(t) \cdot e^{-st} \right]_0^c - \lim_{c \rightarrow \infty} \int_0^c f(t) \cdot e^{-st} \cdot (-s) dt = \\ &= \lim_{c \rightarrow \infty} \frac{f(c)}{e^{s \cdot c}} - f(0) - \lim_{c \rightarrow \infty} \int_0^c f(t) \cdot e^{-st} \cdot (-s) dt = \\ &= s \cdot \mathcal{L}[f] - f(0), \end{aligned}$$

amivel igazoltuk az állítást. ■

8.7. Tétel. (csillapítási tétel)

Tekintsük az $f: [0; \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ függvényt és legyen $\lambda \in \mathbb{R}$. Ekkor

$$\mathcal{L}\left[e^{-\lambda \cdot t} \cdot f(t)\right] = \mathcal{L}[s + \lambda].$$

Bizonyítás: Felhasználva a Laplace-transzformált definícióját azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left[e^{-\lambda \cdot t} \cdot f(t)\right] &= \int_0^{\infty} e^{-\lambda \cdot t} \cdot e^{-st} dt = \int_0^{\infty} e^{-(\lambda+s) \cdot t} dt = \\ &= \mathcal{L}[\lambda + s],\end{aligned}$$

amivel igazoltuk az állítást. ■

8.8. Tétel. Ha $f: [0; \infty] \rightarrow \mathbb{R}$ a pozitív félegyenesen szakaszonként folytonos és exponenciálisan felülről korlátos, azaz van olyan $M > 0$ és s_0 valós szám, hogy

$$f(t) \leq M \cdot e^{s_0 \cdot t},$$

akkor az f függvénynek létezik Laplace-transzformáltja.

8.9. Tétel. Az $f(t) = 1$ függvény Laplace-transzformáltja

$$\mathcal{L}[1] = \frac{1}{s}.$$

Bizonyítás: A Laplace-transzformált definíciója szerint

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[1] &= \int_0^{\infty} e^{-st} dt = \lim_{c \rightarrow \infty} \int_0^c e^{-st} dt = \\ &= \lim_{c \rightarrow \infty} \left[\frac{e^{-st}}{-s} \right]_0^c = \lim_{c \rightarrow \infty} \frac{e^{-s \cdot c}}{-s} + \frac{1}{s} = \frac{1}{s},\end{aligned}$$

amivel igazoltuk az állítást. ■

8.10. Tétel. Az $f(t) = t$ függvény Laplace-transzformáltja

$$\mathcal{L}[t] = \frac{1}{s^2}.$$

Bizonyítás: A Laplace-transzformált definícióját és a parciális integrálás tételét alkalmazva azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[t] &= \int_0^{\infty} t \cdot e^{-st} dt = \lim_{c \rightarrow \infty} \int_0^c t \cdot e^{-st} dt = \\ &= \lim_{c \rightarrow \infty} \left[t \cdot \frac{e^{-s \cdot t}}{-s} \right]_0^c - \lim_{c \rightarrow \infty} \int_0^c \frac{e^{-st}}{-s} dt = \\ &= \lim_{c \rightarrow \infty} \left[t \cdot \frac{e^{-s \cdot t}}{-s} - \frac{e^{-st}}{s^2} \right]_0^c = \\ &= \lim_{c \rightarrow \infty} \left(c \cdot \frac{e^{-s \cdot c}}{-s} - \frac{e^{-s \cdot c}}{s^2} \right) + \frac{1}{s^2} = \frac{1}{s^2},\end{aligned}$$

ugyanis

$$\lim_{c \rightarrow \infty} \frac{e^{-s \cdot c}}{s^2} = 0$$

és a L'Hospital-szabály szerint

$$\begin{aligned}\lim_{c \rightarrow \infty} c \cdot \frac{e^{-s \cdot c}}{-s} &= \lim_{c \rightarrow \infty} -\frac{c}{e^{s \cdot c} \cdot s} = \\ &= \lim_{c \rightarrow \infty} -\frac{1}{e^{s \cdot c} \cdot s^2} = 0.\end{aligned}$$

Ezzel igazoltuk az állítást. ■

8.11. Tétel. Legyen $n \in \mathbb{N}$. Az $f(t) = t^n$ függvény Laplace-transzformáltja

$$\mathcal{L}[t^n] = \frac{n!}{s^{n+1}}.$$

8.12. Példa. Az

$$f(t) = t^3 - t^2 + 5t + 2$$

függvény Laplace-transzformáltjára a linearitás tulajdonsága miatt és felhasználva az előbbi tétel állítását azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[f] &= \mathcal{L}[t^3 - t^2 + 5t + 2] = \mathcal{L}[t^3] - \mathcal{L}[t^2] + 5\mathcal{L}[t] + \mathcal{L}[2] = \\ &= \frac{3!}{s^4} - \frac{2!}{s^3} + 5 \cdot \frac{1}{s^2} + \frac{2}{s} = \\ &= \frac{6 - 2s + 5s^2 + 2s^3}{s^4} = \frac{2s^3 + 5s^2 - 2s + 6}{s^4}.\end{aligned}$$

8.13. Tétel. Legyen $a \in \mathbb{R}$. Az $f(t) = e^{a \cdot t}$ függvény Laplace-transzformáltja

$$\mathcal{L}[e^{at}] = \frac{1}{s - a}.$$

Bizonyítás: A Laplace-transzformált definícióját alkalmazva azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[e^{at}] &= \int_0^{\infty} e^{at} \cdot e^{-st} dt = \int_0^{\infty} e^{(a-s)t} dt = \\ &= \int_0^{\infty} e^{(a-s)t} dt = \lim_{c \rightarrow \infty} \int_0^c e^{(a-s)t} dt = \lim_{c \rightarrow \infty} \left[\frac{e^{(a-s)t}}{a-s} \right]_0^c = \\ &= \lim_{c \rightarrow \infty} \frac{e^{(a-c)t}}{a-s} - \frac{1}{a-s} = \frac{1}{s-a}. \end{aligned}$$

Ezzel igazoltuk az állítást. ■

8.14. Példa. Az

$$f(t) = e^{2t} + e^{-3t}$$

függvény Laplace-transzformáltjára a linearitás tulajdonsága miatt és felhasználva az előbbi tétel állítását azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f] &= \mathcal{L}[e^{2t} + e^{-3t}] = \mathcal{L}[e^{2t}] + \mathcal{L}[e^{-3t}] = \\ &= \frac{1}{s-2} + \frac{1}{s+3} = \frac{s+3+s-2}{(s-2) \cdot (s+3)} = \frac{2s+1}{s^2+s-6}. \end{aligned}$$

8.15. Tétel. Legyen $\omega \in \mathbb{R}$. Az $f(t) = \sin(\omega \cdot t)$ függvény Laplace-transzformáltja

$$\mathcal{L}[\sin(\omega \cdot t)] = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}.$$

Bizonyítás: A Laplace-transzformált definícióját alkalmazva azt kapjuk, hogy

$$\mathcal{L}[\sin(\omega \cdot t)] = \int_0^{\infty} \sin(\omega \cdot t) \cdot e^{-st} dt.$$

Első lépésben meghatározzuk a $\sin(\omega \cdot t) \cdot e^{-st}$ függvény egy primitív függvényét. A parciális integrálás képletét kétszer alkalmazva azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \int \sin(\omega \cdot t) \cdot e^{-st} dt &= \sin(\omega \cdot t) \cdot \frac{e^{-st}}{-s} - \int \omega \cdot \cos(\omega \cdot t) \cdot \frac{e^{-st}}{-s} dt = \\ &= \sin(\omega \cdot t) \cdot \frac{e^{-st}}{-s} - \left(\omega \cdot \cos(\omega \cdot t) \cdot \frac{e^{-st}}{s^2} + \int \omega^2 \cdot \sin(\omega \cdot t) \cdot \frac{e^{-st}}{s^2} dt \right). \end{aligned}$$

Tehát

$$\left(\frac{\omega^2}{s^2} + 1\right) \cdot \int \sin(\omega \cdot t) \cdot e^{-st} dt = \left(\frac{\sin(\omega \cdot t)}{-s} - \frac{\omega \cdot \cos(\omega \cdot t)}{s^2}\right) \cdot e^{-st},$$

így

$$\begin{aligned} \int \sin(\omega \cdot t) \cdot e^{-st} dt &= \\ &= \frac{s^2}{\omega^2 + s^2} \cdot \left(\frac{\sin(\omega \cdot t)}{-s} - \frac{\omega \cdot \cos(\omega \cdot t)}{s^2}\right) \cdot e^{-st} + c. \end{aligned}$$

Ezt felhasználva azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \sin(\omega \cdot t) \cdot e^{-st} dt &= \\ &= \frac{s^2}{\omega^2 + s^2} \cdot \lim_{c \rightarrow \infty} \left[\left(\frac{\sin(\omega \cdot t)}{-s} - \frac{\omega \cdot \cos(\omega \cdot t)}{s^2}\right) \cdot e^{-st} \right]_0^c = \\ &= \frac{s^2}{\omega^2 + s^2} \cdot \left(\lim_{c \rightarrow \infty} \left(\frac{\sin(\omega \cdot c)}{-s} - \frac{\omega \cdot \cos(\omega \cdot c)}{s^2}\right) \cdot e^{-sc} + \frac{\omega}{s^2} \right) = \\ &= \frac{s^2}{\omega^2 + s^2} \cdot \frac{\omega}{s^2} = \frac{\omega}{\omega^2 + s^2}. \end{aligned}$$

Ezzel igazoltuk az állítást. ■

8.16. Tétel. Legyen $\omega \in \mathbb{R}$. Az $f(t) = \cos(\omega \cdot t)$ függvény Laplace-transzformáltja

$$\mathcal{L}[\cos(\omega \cdot t)] = \frac{s}{s^2 + \omega^2}.$$

Bizonyítás: A Laplace-transzformált definícióját alkalmazva azt kapjuk, hogy

$$\mathcal{L}[\cos(\omega \cdot t)] = \int_0^{\infty} \cos(\omega \cdot t) \cdot e^{-st} dt.$$

Első lépésben meghatározzuk a $\cos(\omega \cdot t) \cdot e^{-st}$ függvény egy primitív függvényét. A parciális integrálás képletét kétszer alkalmazva azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \int \cos(\omega \cdot t) \cdot e^{-st} dt &= \cos(\omega \cdot t) \cdot \frac{e^{-st}}{-s} + \int \omega \cdot \sin(\omega \cdot t) \cdot \frac{e^{-st}}{-s} dt = \\ &= \cos(\omega \cdot t) \cdot \frac{e^{-st}}{-s} + \left(\omega \cdot \sin(\omega \cdot t) \cdot \frac{e^{-st}}{s^2} - \int \omega^2 \cdot \cos(\omega \cdot t) \cdot \frac{e^{-st}}{s^2} dt \right). \end{aligned}$$

Tehát

$$\left(\frac{\omega^2}{s^2} + 1\right) \cdot \int \cos(\omega \cdot t) \cdot e^{-st} dt = \left(\frac{\cos(\omega \cdot t)}{-s} + \frac{\omega \cdot \sin(\omega \cdot t)}{s^2}\right) \cdot e^{-st},$$

így

$$\begin{aligned} \int \cos(\omega \cdot t) \cdot e^{-st} dt &= \\ &= \frac{s^2}{\omega^2 + s^2} \cdot \left(\frac{\cos(\omega \cdot t)}{-s} + \frac{\omega \cdot \sin(\omega \cdot t)}{s^2}\right) \cdot e^{-st} + c. \end{aligned}$$

Ezt felhasználva azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \cos(\omega \cdot t) \cdot e^{-st} dt &= \\ &= \frac{s^2}{\omega^2 + s^2} \cdot \lim_{c \rightarrow \infty} \left[\left(\frac{\cos(\omega \cdot t)}{-s} + \frac{\omega \cdot \sin(\omega \cdot t)}{s^2}\right) \cdot e^{-st} \right]_0^c = \\ &= \frac{s^2}{\omega^2 + s^2} \cdot \left(\lim_{c \rightarrow \infty} \left(\frac{\cos(\omega \cdot c)}{-s} + \frac{\omega \cdot \sin(\omega \cdot c)}{s^2}\right) \cdot e^{-sc} + \frac{1}{s} \right) = \\ &= \frac{s^2}{\omega^2 + s^2} \cdot \frac{1}{s} = \frac{s}{\omega^2 + s^2}. \end{aligned}$$

Ezzel igazoltuk az állítást. ■

8.17. Példa. Az

$$f(t) = -2 \cos 6t + 5 \sin 6t$$

függvény Laplace-transzformáltjára a linearitás tulajdonsága miatt és felhasználva az előbbi két tétel állítását azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f] &= \mathcal{L}[-2 \cos 6t + 5 \sin 6t] = -2\mathcal{L}[\cos 6t] + 5\mathcal{L}[\sin 6t] = \\ &= -2 \cdot \frac{s}{s^2 + 36} + 5 \cdot \frac{6}{s^2 + 36} = \frac{-2s + 30}{s^2 + 36}. \end{aligned}$$

8.18. Tétel. Legyen $n \in \mathbb{N}$ és $a \in \mathbb{R}$. Az

$$f(t) = t^n \cdot e^{at}$$

függvény Laplace-transzformáltja

$$\mathcal{L}[f] = \frac{n!}{(s - a)^{n+1}}.$$

8.19. Megjegyzés. A Laplace-transzformáció alkalmazható többek között konstanseggyütthetős lineáris differenciálegyenletre vonatkozó kezdetiérték feladat megoldására is. Laplace-transzformációval az említett típusú differenciálegyenlet egy algebrai egyenletté transzformálható, amely egyenletből meghatározható az ismeretlen függvény Laplace-transzformáltja, amiből megadható a kezdetiérték feladat megoldásfüggvénye.

8.20. Példa. Megoldjuk Laplace-transzformációval az

$$y'(t) - 6y(t) = 2t + 1, \quad y(0) = 0$$

kezdetiérték feladatot!

Elsőként vegyük a differenciálegyenlet mindkét oldalának Laplace-transzformáltját! Ekkor azt kapjuk, hogy

$$\mathcal{L}[y'(t) - 6y(t)] = \mathcal{L}[2t + 1].$$

Felhasználva a Laplace-transzformált linearitását

$$\mathcal{L}[y'] - 6\mathcal{L}[y] = \mathcal{L}[2t + 1]$$

adódik.

Mivel

$$\mathcal{L}[y'] = s \cdot \mathcal{L}[y] - y(0)$$

és

$$\mathcal{L}[2t + 1] = 2\mathcal{L}[t] + \mathcal{L}[1] = \frac{2}{s^2} + \frac{1}{s},$$

ezért az

$$s \cdot \mathcal{L}[y] - y(0) - 6\mathcal{L}[y] = \frac{2}{s^2} + \frac{1}{s}$$

egyenlethez jutunk.

Mivel $y(0) = 0$, ezért

$$s \cdot \mathcal{L}[y] - 6\mathcal{L}[y] = \frac{2}{s^2} + \frac{1}{s}.$$

Az egyenletet átrendezve

$$\mathcal{L}[y] \cdot (s - 6) = \frac{2}{s^2} + \frac{1}{s}$$

adódik, amiből kifejezve a $\mathcal{L}[y]$ kifejezést azt kapjuk, hogy

$$\mathcal{L}[y] = \frac{2 + s}{s^2 \cdot (s - 6)}.$$

A kapott törtet parciális törtek összegére bontva

$$\frac{2+s}{s^2 \cdot (s-6)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s-6}$$

adódik. Az egyenletet szorozva a közös nevezővel azt kapjuk, hogy

$$2+s = A \cdot s \cdot (s-6) + B \cdot (s-6) + C \cdot s^2.$$

A tagokat mindkét oldalon fokszámuk szerint csoportosítva

$$(A+C) \cdot s^2 + (-6A+B) \cdot s - 6B = s+2$$

adódik. A két oldalon a megfelelő fokszámú tagok egyenlőségéből azt kapjuk, hogy

$$\left. \begin{array}{rcl} A & + & C = 0 \\ -6A & + & B = 1 \\ & - & 6B = 2 \end{array} \right\}.$$

Az utolsó egyenletből $B = -\frac{1}{3}$ következik. Ezt behelyettesítve a második egyenletbe azt kapjuk, hogy $A = -\frac{2}{9}$. Ezt felhasználva az első egyenletből $C = \frac{2}{9}$ adódik. Tehát azt kaptuk, hogy

$$\mathcal{L}[y] = -\frac{2}{9} \cdot \frac{1}{s} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{s^2} + \frac{2}{9} \cdot \frac{1}{s-6}.$$

Ebből a kezdetiérték feladat megoldására azt kapjuk, hogy

$$y(t) = -\frac{2}{9} - \frac{1}{3} \cdot t + \frac{2}{9} \cdot e^{6t}.$$

9. Bernoulli differenciálegyenlet

9.1. Definíció. Legyen I egy nyílt intervallum, $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0; 1\}$, továbbá legyenek $p, q \in I \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos függvények. Az

$$y'(x) + p(x) \cdot y(x) = q(x) \cdot y^\alpha(x)$$

differenciálegyenletet *Bernoulli-differenciálegyenlet*nek nevezzük.

9.2. Tétel. A Bernoulli-differenciálegyenlet visszavezethető elsőrendű lineáris differenciálegyenletté.

Bizonyítás: Tekintsük az

$$y'(x) + p(x) \cdot y(x) = q(x) \cdot y^\alpha(x),$$

ahol $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0; 1\}$ Bernoulli-differenciálegyenlet! Az egyenlet mindkét oldalát elosztva az $y^\alpha(x)$ függvénnyel azt kapjuk, hogy

$$\frac{y'(x)}{y^\alpha(x)} + p(x) \cdot y^{1-\alpha}(x) = q(x). \quad (1)$$

Vezessük be az

$$u(x) = y^{1-\alpha}(x)$$

függvényt! Ekkor

$$u'(x) = (1 - \alpha) \cdot y^{-\alpha}(x) \cdot y'(x) \quad \Rightarrow \quad u'(x) = (1 - \alpha) \cdot \frac{y'(x)}{y^\alpha(x)},$$

amiből

$$\frac{y'(x)}{y^\alpha(x)} = \frac{u'(x)}{1 - \alpha}$$

adódik. Ezt behelyettesítve a (1) egyenletbe azt kapjuk, hogy

$$\frac{1}{\alpha - 1} \cdot u'(x) + p(x) \cdot u(x) = q(x),$$

amely már egy elsőrendű lineáris differenciálegyenlet. ■

9.3. Példa. Oldjuk meg az

$$y'(x) + \frac{4}{x} \cdot y(x) = x^3 \cdot y^2(x), \quad y(1) = 1, \quad x > 0$$

kezdetiérték feladatot!

Az egyenletet az $y^2(x)$ függvénnyel osztva azt kapjuk, hogy

$$\frac{y'(x)}{y^2(x)} + \frac{4}{x} \cdot y^{-1}(x) = x^3. \quad (2)$$

Vezessük be az

$$u(x) = y^{-1}(x)$$

függvényt! Ekkor az u függvény deriváltja

$$u'(x) = -y^{-2}(x) \cdot y'(x) = -\frac{y'(x)}{y^2(x)}.$$

Ebből azt kapjuk, hogy

$$\frac{y'(x)}{y^2(x)} = -u'(x).$$

Az (2) egyenletet átalakítva azt kapjuk, hogy

$$-u'(x) + \frac{4}{x} \cdot u(x) = x^3.$$

Ez az egyenlet egy elsőrendű, lineáris, inhomogén differenciálegyenlet.

Az egyenletnek megfelelő homogén egyenlet

$$-u'(x) + \frac{4}{x} \cdot u(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad u'(x) - \frac{4}{x} \cdot u(x) = 0.$$

A homogén egyenlet megoldása

$$u_h(x) = C \cdot e^{-\int -\frac{4}{x} dx} = C \cdot e^{4 \cdot \ln |x|} = C \cdot e^{\ln x^4} = C \cdot x^4.$$

Az inhomogén egyenlet partikuláris megoldását

$$u_p(x) = C(x) \cdot x^4$$

alakban keressük. Ezt behelyettesítve az

$$-u'(x) + \frac{4}{x} \cdot u(x) = x^3$$

egyenletbe azt kapjuk, hogy

$$-C'(x) \cdot x^4 - C(x) \cdot 4x^3 + \frac{4}{x} \cdot C(x) \cdot x^4 = x^3.$$

Ebből az egyenletből kifejezve a $C'(x)$ függvényt

$$C'(x) = -\frac{1}{x}$$

adódik, amelyet integrálva

$$C(x) = -\ln |x|.$$

Ezt felhasználva

$$u_p(x) = -x^4 \cdot \ln x$$

adódik, így

$$u(x) = u_h(x) + u_p(x) = C \cdot x^4 - x^4 \cdot \ln x.$$

Mivel

$$u(x) = y^{-1}(x) \quad \Rightarrow \quad u(x) = \frac{1}{y(x)},$$

ezért

$$y(x) = \frac{1}{u(x)} = \frac{1}{x^4 \cdot (C - \ln x)}.$$

Mivel $y(1) = 1$, ezért

$$1 = \frac{1}{C} \quad \Rightarrow \quad C = 1,$$

így a kezdetiérték feladat megoldása

$$y(x) = \frac{1}{x^4 \cdot (1 - \ln x)}.$$

10. Egzisztencia és unicitási tételek elsőrendű differenciálegyenletekre

A differenciálegyenletek elméletében fontos kérdés, hogy egy differenciálegyenletnek, és az arra vonatkozó kezdetiérték feladatnak mikor van megoldása, továbbá, ha létezik megoldás, akkor az egyértelmű-e. Ezen fejezetben szereplő tételekre erre fognak választ adni.

10.1. Tétel. (Cauchy-Peano-féle egzisztencia tétel)

Ha $f: D \subset \mathbb{R}^2$ zárt és korlátos halmaz és $f: D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos függvény, akkor az

$$y'(x) = f(x; y(x))$$

differenciálegyenletnek és a D halmaz tetszőleges belső pontjához tartozó kezdetiérték feladatnak létezik megoldása.

10.2. Példa. Az $y'(x) = x \cdot y(x)$ differenciálegyenletnek van megoldása.

Mivel az $f(x; y) = x \cdot y$ függvény az $\mathbb{R}^2$ halmaz minden pontjában folytonos, ezért az előbbi tétel szerint a differenciálegyenletnek van megoldása.

10.3. Definíció. Az $f: D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ függvény a második változójában eleget tesz a *Lipschitz-feltételnek*, ha létezik olyan $L > 0$ valós szám, amelyre

$$|f(x; y_1) - f(x; y_2)| \leq L \cdot |y_1 - y_2|$$

teljesül minden $(x; y_1) \in D$ és minden $(x; y_2) \in D$ esetén.

10.4. Tétel. Legyen $D \subset \mathbb{R}^2$ és $(x_0; y_0) \in D$. Ha $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos az $(x_0; y_0)$ pont egy környezetében és az f függvény a második változójában eleget tesz a Lipschitz-feltételnek, akkor az

$$y'(x) = f(x; y(x)), \quad y(x_0) = y_0$$

kezdetiérték feladatnak egyértelműen létezik megoldása.

10.5. Tétel. (Picard-Lindelöf-féle egzisztencia és unicitás tétel)

Legyenek x_0 és y_0 valós számok, a és b pozitív valós számok. Tekintsük a

$$T = [x_0 - a; x_0 + a] \times [y_0 - b; y_0 + b] \subset \mathbb{R}^2$$

téglalaptartományt! Ha $f: T \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos függvény, amiből következően korlátos is, azaz létezik olyan K valós szám, amelyre

$$|f(x; y)| \leq K$$

minden $(x; y) \in T$ esetén és f a második változójában eleget tesz a Lipschitz-feltételnek, akkor az

$$\begin{aligned}y'(x) &= f(x; y(x)) \\ y(x_0) &= y_0\end{aligned}$$

kezdetiérték feladatnak az

$$I_h = [x_0 - h; x_0 + h], \quad h = \min \left\{ a; \frac{b}{K} \right\}$$

intervallumon, egyértelműen létezik megoldása.

10.6. Példa. Tekintsük az

$$y'(x) = x - y^2(x), \quad y(0) = 0$$

kezdetiérték feladatot! A Picard-Lindelöf-féle tétel jelöléseit használjuk. Ekkor $x_0 = 0, y_0 = 0$. A T téglalaptartomány

$$T = [-1; 1] \times [-1; 1].$$

Bevezetjük az

$$f(x; y) = x - y^2$$

függvényt. Ekkor

$$f'_y(x; y) = -2y.$$

Mivel $y \in [-1; 2]$, ezért

$$|-2y| \leq 2,$$

ezért így a Lipschitz-konstans 2. Legyen

$$K = \max_{(x; y) \in T} |f(x; y)| = \max_{(x; y) \in T} \{x - y^2\} = 2.$$

Jelen esetben $a = 1$ és $b = 1$. Ekkor

$$h = \min \left\{ a; \frac{b}{K} \right\} = \min \left\{ 1; \frac{1}{2} \right\} = \frac{1}{2}.$$

Tehát az

$$I_h = [x_0 - h; x_0 + h] = \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2} \right]$$

intervallumon egyértelműen megoldható a kezdetiérték probléma.

10.7. Tétel. Az előbbi tétel jelöléseit megtartjuk. Ha az f függvény folytonosan differenciálható a második változójában (azaz létezik az $f_y(x; y)$ parciális derivált függvény és az folytonos) a T tartományon, akkor a Lipschitz-feltétel mindig teljesül.

Bizonyítás: Tekintsük az $(x; y_1) \in T$ és $(x; y_2) \in T$ pontokat. Mivel f folytonosan differenciálható a második változójában, ezért a Lagrange-féle középértéktétel szerint létezik olyan $\xi \in \mathbb{R}$, amelyre

$$f(x; y_1) - f(x; y_2) = f'_y(\xi) \cdot (y_1 - y_2)$$

Mivel $f'_y(x; y)$ folytonos, ezért korlátos, így létezik olyan K valós szám, melyre

$$|f'_y(x; y)| \leq L.$$

Ezt felhasználva

$$|f(x; y_1) - f(x; y_2)| \leq L \cdot |y_1 - y_2|,$$

ami azt jelenti, hogy az f függvény a második változójában eleget tesz a Lipschitz-feltételnek. ■

10.8. Következmény. Ha $f: D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos függvény és létezik az $f'_y(x; y)$ parciális derivált függvény, továbbá f folytonos a D tartományon és $(x_0; y_0) \in D$, akkor az

$$y'(x) = f(x; y(x)), \quad y(x_0) = y_0$$

kezdetiérték feladat egyértelműen megoldható.

11. Elsőrendű differenciálegyenletek iránymezője

11.1. Definíció. Legyen D nyílt halmaz és $f: D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ folytonosan differenciálható függvény. Az elsőrendű differenciálegyenlet

$$y'(x) = f(x; y(x))$$

explicit alakja összefüggést ad az $x - y$ sík egy $(x_0; y_0)$ pontja és a ponton áthaladó megoldásfüggvénynek a pontbeli meredeksége (differenciálhányadosa) között.

Ha az $x - y$ sík néhány pontjában ábrázoljuk megoldásfüggvény adott pontbeli meredekségeit, akkor a differenciálegyenlet *iránymezőjét* kapjuk.

Azon pontok halmazát, amelyekhez a differenciálegyenlet ugyanazt az irányt rendel *izoklinának* nevezzük.

11.2. Megjegyzés. Az izoklina pontjaiban a vonalelemek párhuzamosak.

11.3. Példa. Tekintsük az

$$y'(x) = x \cdot y(x)$$

differenciálegyenletet! Néhány pontban kiszámoljuk az adott differenciálegyenlet megoldásfüggvényének meredekségét.

Ehhez először vezessük be az

$$f(x; y) = x \cdot y$$

függvényt! Néhány pontban kiszámoljuk a megoldásfüggvény meredekségét, majd felvázoljuk az iránymezőt.

Ha $P_1 = (-2; -2)$, akkor

$$y' = f(P_1) = f(-2; -2) = -2 \cdot (-2) = 4.$$

Ha $P_2 = (-2; -1)$, akkor

$$y' = f(P_2) = f(-2; -1) = -2 \cdot (-1) = 2.$$

Ha $P_3 = (-2; 0)$, akkor

$$y' = f(P_3) = f(-2; 0) = -2 \cdot 0 = 0.$$

Ha $P_4 = (-2; 1)$, akkor

$$y' = f(P_4) = f(-2; 1) = -2 \cdot 1 = -2.$$

Ha $P_5 = (-2; 2)$, akkor

$$y' = f(P_5) = f(-2; 2) = -2 \cdot 2 = -4.$$

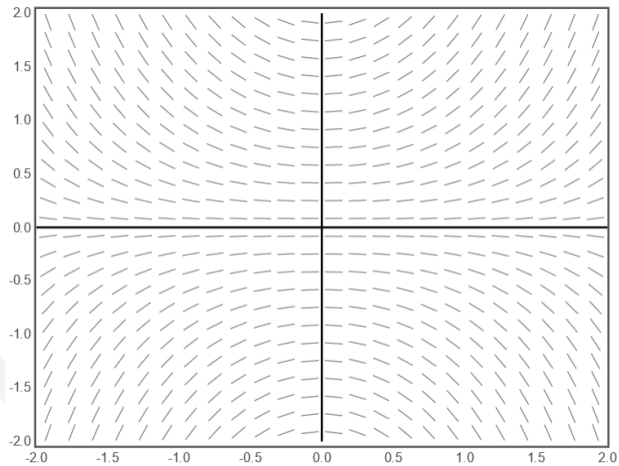
Táblázatba foglaljuk a

$$H = \{(x; y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid -2 \leq x \leq 2, -2 \leq y \leq 2\}$$

pontokban a meredekségeket:

$x \backslash y$	-2	-1	0	1	2
-2	4	2	0	-2	-4
-1	2	1	0	-1	-2
0	0	0	0	0	0
1	-1	-2	0	1	2
2	-4	-2	0	2	4

Az iránymező felvázolása:



11.4. Példa. Tekintsük az

$$y'(x) = y(x)$$

differenciálegyenletet! Néhány pontban kiszámoljuk az adott differenciálegyenlet megoldásfüggvényének meredekségét.

Ehhez először vezessük be az

$$f(x; y) = y$$

függvényt! Néhány pontban kiszámoljuk a megoldásfüggvény meredekségét, majd felvázoljuk az iránymezőt.

Ha $P_1 = (-2; -2)$, akkor

$$y' = f(P_1) = f(-2; -2) = -2.$$

Ha $P_2 = (-2; -1)$, akkor

$$y' = f(P_2) = f(-2; -1) = -1.$$

Ha $P_3 = (-2; 0)$, akkor

$$y' = f(P_3) = f(-2; 0) = 0.$$

Ha $P_4 = (-2; 1)$, akkor

$$y' = f(P_4) = f(-2; 1) = -1.$$

Ha $P_5 = (-2; 2)$, akkor

$$y' = f(P_5) = f(-2; 2) = 2.$$

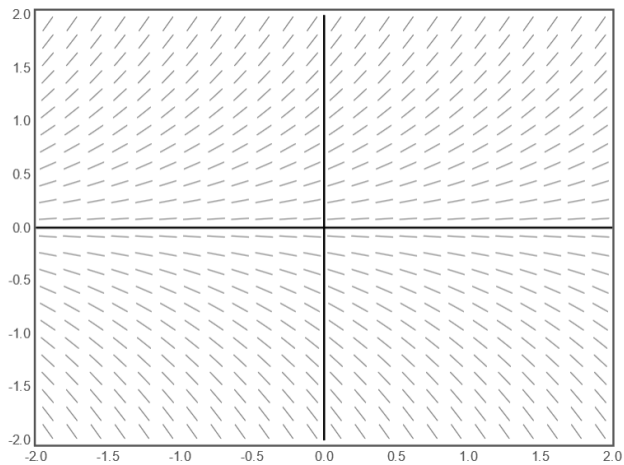
Táblázatba foglaljuk a

$$H = \{(x; y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid -2 \leq x \leq 2, -2 \leq y \leq 2\}$$

pontokban a meredekségeket:

$x \backslash y$	-2	-1	0	1	2
-2	-2	-1	0	1	2
-1	-2	-1	0	1	2
0	-2	-1	0	1	2
1	-2	-1	0	1	2
2	-2	-1	0	1	2

Az iránymező felvázolása:



12. Numerikus módszerek elsőrendű differenciálegyenletekre

12.1. Tétel. Legyen $D \subset \mathbb{R}^2$ nyílt halmaz és $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ korlátos, azaz létezik olyan $K \in \mathbb{R}$, amelyre

$$f(x; y) \leq K \quad (x, y \in D)$$

és f folytonos függvény egy olyan tartományon, amelynek belső pontja az $(x_0; y_0)$ pont, továbbá az f függvény a második változójában eleget tesz a *Lipschitz-feltételnek*, azaz létezik olyan $L > 0$ valós szám, amelyre

$$|f(x; y_1) - f(x; y_2)| \leq L \cdot |y_1 - y_2|,$$

akkor az

$$\begin{aligned} y_1(x) &= y_0 + \int_{x_0}^x f(t; y_0) dt \\ y_2(x) &= y_0 + \int_{x_0}^x f(t; y_1(t)) dt \\ &\vdots \\ y_n(x) &= y_0 + \int_{x_0}^x f(t; y_{n-1}(t)) dt \end{aligned}$$

módon definiált rekurzív függvényt sorozat konvergál az

$$y'(x) = f(x, y(x)), \quad y(x_0) = y_0$$

kezdetiérték feladat egyetlen megoldásához.

Az n -edik közelítésre fennáll, hogy

$$|y_n(x) - y(x)| \leq \frac{K}{L} \cdot \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{L^k \cdot (x - x_0)^k}{k!}.$$

12.2. Definíció. Az előző tételben szereplő ismertett eljárásban módszert adunk arra, hogy egy elsőrendű differenciálegyenletre vonatkozó kezdetiérték feladat megoldásfüggvényére „közelítő” függvényeket adjunk meg. Ezt az eljárást *Picard-féle iterációs eljárásnak* vagy *Picard-Lindelöf-féle szukcesszív aproximációnak* nevezzük.

12.3. Következmény. Legyen $D \subset \mathbb{R}^2$, I nyílt intervallum, $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, továbbá $(x_0; y_0) \in D$. A $\varphi: I \rightarrow \mathbb{R}$ függvény akkor és csak akkor megoldása az

$$y'(x) = f(x; y(x)), \quad y(x_0) = y_0$$

kezdetiérték feladatnak, ha folytonos és eleget tesz az

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t; y(t)) \, dt$$

integrálegyenletnek minden $(x; y) \in D$ esetén, azaz ha

$$\varphi(x) = y_0 + \int_{x_0}^x \varphi(t; y(t)) \, dt$$

teljesül.

Irodalomjegyzék

- [1] Babcsányi István – Csank Lajos – Nagy Attila – Szép Gabriella – Zibolen Bence, *Matematika feladatgyűjtemény III.*, Műegyetemi Kiadó, 2007.
- [2] Bajcsy Pál, *Matematika III.*, Műegyetemi Kiadó, 1996.
- [3] Bartha Gábor – Bogdán Zoltán – , Duró Lajosné dr. – Gyapjas Ferencné – Hack Frigyes – dr. Kántor Sándorné – dr. Korányi Erzsébet, *Matematika feladatgyűjtemény II.*, Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 2000.
- [4] Benkő Pálné – Diószegi Ferencné – Serény György, *Matematika feladattár II.*, Műegyetemi Kiadó, 2002.
- [5] C. Henry Edwards, David E. Penney, *Elementary differential equations*, Pearson, 2008.
- [6] Farkas Miklósné, *Közönséges differenciálegyenletek*, Műegyetemi Kiadó, 2009.
- [7] Gémes Margit–Szentmiklóssy Zoltán, *Bevezetés a matematikába - jegyzet és példatár kémia BsC-s hallgatók számára*, elektronikus jegyzet, 2015.
- [8] Ernest F. Haeussler, *Introductory Mathematical Analysis for Business, Economics, the Life and Social Sciences*, Prentice Hall, 2011.
- [9] Jakus G. – Kis M. – Magyar T. – Zombori N., *Analízis példatár*, Budapest, 2014.
- [10] Keszei Ernő, *A reakciókinetika alapjai*, ELTE, Budapest, 2015.
- [11] Király Balázs, *Analízis (gyakorlat támogató jegyzet)*, elektronikus oktatási segédanyag, <http://tamop412a.ttk.pte.hu/files/analizis.pdf>, 2011.
- [12] Kovács Márton, *Reakciókinetika feladatgyűjtemény*, elektronikus jegyzet, 2018.
- [13] Kovács József – Takács Gábor – Takács Miklós, *Analízis*, Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 1986.
- [14] Lial M. L. – Greenwell R. N. – Ritchey N. P., *Calculus with applications*, Pearson, 2012.
- [15] Lökös Sándor, *Differenciálegyenletek környezettan alapszakos hallgatóknak*, elektronikus jegyzet, 2018.
- [16] Mendelson E., *3000 solved problems in calculus*, McGraw-Hill Companies, 1988.
- [17] Ősz Katalin, *Fizikai kémia II. példatár*, elektronikus jegyzet, <http://web.unideb.hu/uh9v32/peldatar.html>, 2019.
- [18] Pintér Lajos, *Analízis I.*, Typotex, 1998.
- [19] Rosser M., *Basic mathematics for economists*, Routledge, 2003.
- [20] Rujp Veronika, *Differenciálegyenletek felállítása és megoldása fizikai példákon keresztül*, ELTE, szakdolgozat, 2013.
- [21] Stewart J., *Calculus*, Brooks/Cole, 2012.
- [22] Knut Sydsaeter, Peter Hammond, *Matematika közgazdászoknak*, Aula, 2006.
- [23] Tan S. T., *Applied Calculus for the Managerial*, Life and Social Sciences, Brooks/Cole, 1999.
- [24] Thomas G. B. – Weir M. D. – Hass J. – Giordano F. R., *Thomas féle kalkulus I. kötet*, Typotex, Budapest, 2008.
- [25] Turányi Tamás, *Fizikai kémiai előadások (reakciókinetika)*, ELTE, Kémiai Intézet, 2018.

Tartalomjegyzék

1. Alapfogalmak	4
2. Közvetlenül integrálható (elsőrendű) differenciálegyenletek	10
3. Szeparábilis differenciálegyenletek	17
4. Szeparábilis differenciálegyenletre visszavezethető egyenletek	51
5. Elsőrendű lineáris homogén differenciálegyenletek	61
6. Elsőrendű lineáris inhomogén differenciálegyenletek megoldása konstansvariálással	63
7. Elsőr. konstansh. lin. inhom. diff.egyenletek megold. próbafüggvénnyel	68
8. Elsőr. konstansh. lin. inhom. diff.egyenletek megold. Laplace-transzformációval	72
9. Bernoulli differenciálegyenlet	81
10. Egzisztencia és unicitási tételek elsőrendű differenciálegyenletekre	84
11. Elsőrendű differenciálegyenletek iránymezője	87
12. Numerikus módszerek elsőrendű differenciálegyenletekre	91