

Debreceni Egyetem Természettudományi és Technológiai Kar



***A MATEMATIKAI GONDOLKODÁS SPECIFIKUMAINAK
MEGJELENÉSE A SAKKOZÓ GONDOLKODÁSÁBAN,
A SAKKOKTATÁS SZEREPE A MATEMATIKA TANÍTÁSÁBAN***

Doktori (PhD) értekezés

Misetáné Burján Anita

Témavezetők: Dr. Hajdu Lajos, Herendiné Dr. Kónya Eszter

***Debreceni Egyetem
Természettudományi Doktori Tanács
Matematika- és Számítástudományok Doktori Iskola
Debrecen, 2017***

Ezen értekezést a Debreceni Egyetem Természettudományi Doktori Tanács Matematika- és Számítástudományok Doktori Iskola Didaktika programja keretében készítettem a Debreceni Egyetem természettudományi doktori (PhD) fokozatának elnyerése céljából. Nyilatkozom arról, hogy a tézisekben leírt eredmények nem képezik más PhD disszertáció részét.

Debrecen, 2017. január

*Misetáné Burján Anita
doktorjelölt*

Tanúsítom, hogy Misetáné Burján Anita doktorjelölt 2015 - 2016 között a fent megnevezett Doktori Iskola Didaktika programjának keretében irányításommal végezte munkáját. Az értekezésben foglalt eredményekhez a jelölt önálló alkotó tevékenységével meghatározóan hozzájárult. Nyilatkozom továbbá arról, hogy a tézisekben leírt eredmények nem képezik más PhD disszertáció részét.

Az értekezés elfogadását javasolom.

Debrecen, 2017. január

*Dr. Hajdu Lajos
témavezető*

Tanúsítom, hogy Misetáné Burján Anita doktorjelölt 2015 - 2016 között a fent megnevezett Doktori Iskola Didaktika programjának keretében irányításommal végezte munkáját. Az értekezésben foglalt eredményekhez a jelölt önálló alkotó tevékenységével meghatározóan hozzájárult. Nyilatkozom továbbá arról, hogy a tézisekben leírt eredmények nem képezik más PhD disszertáció részét.

Az értekezés elfogadását javasolom.

Debrecen, 2017. január

*Herendiné Dr. Kónya Eszter
témavezető*

***A MATEMATIKAI GONDOLKODÁS SPECIFIKUMAINAK MEGJELENÉSE
A SAKKOZÓ GONDOLKODÁSÁBAN,
A SAKKOKTATÁS SZEREPE A MATEMATIKA TANÍTÁSÁBAN***

Értekezés a doktori (Ph.D.) fokozat megszerzése érdekében
a matematika- és számítástudományok tudományágban

Írta: Missetáné Burján Anita okleveles matematikatanár

Készült a Debreceni Egyetem Matematika- és Számítástudományok Doktori Iskolája
(Didaktika - Szakmódszertan programja) keretében

Témavezető: Dr. Hajdu Lajos, Herendiné Dr. Kónya Eszter

A doktori szigorlati bizottság:

elnök: Dr.

tagok: Dr.

Dr.

A doktori szigorlat időpontja: 2017.

Az értekezés bírálói:

Dr.

Dr.

Dr.

A bírálóbizottság:

elnök: Dr.

tagok: Dr.

Dr.

Dr.

Dr.

Az értekezés védésének időpontja: 2017.

KÖSZÖNETNYILVÁNÍTÁS

Köszönettel tartozom témavezetőimnek: Dr. Hajdu Lajos egyetemi tanárnak munkámhoz nyújtott rengeteg segítségével, tanácsaiért és Herendiné Dr. Kónya Eszter egyetemi adjunktusnak a matematikai didaktikai kutatások elméletének és eszköztárának megismerésénél adott hasznos megjegyzéseire és a segítő építő kritikáiért.

Hálás vagyok Dr. Kántor Sándorné és Dr. Kántor Sándor egyetemi adjunktusoknak a tudományos pályán való elindításért, a sok segítségért és biztatásért.

Köszönet illeti Dr. Csikos Csabát a Szegedi Tudományegyetem egyetemi docensét a neveléstudományi kérdésekben nyújtott segítségével.

Szeretnék köszönetet mondani az Oktatási Hivatalnak, illetve Urbán Ferenc Ábelnek a Tanügy-igazgatási és Területi Koordinációs Főosztály főosztályvezető-helyettesének a KÖZFELVIR kutatói adatbázist elérhetővé tételéért.

Szeretném megköszönni a Balatonlellel Általános Iskola és AMI tanárainak, illetve tanulóinak a felmérésekben nyújtott segítségét.

Külön köszönöm Birkás Györgynek a statisztikai elemzésekben nyújtott segítségét.

A legnagyobb köszönettel családomnak tartozom: gyermekeimnek türelmükért és szeretetükért, férjemnek Miseta Zoltánnak megértéséért és szakmai segítségével, szerető biztatásukért a nehéz pillanatokban, valamint szüleimnek, akiknek pedagógusi elhivatottságát példaértékűnek tartom.

TARTALOMJEGYZÉK

1.	Bevezetés.....	1
2.	Szakirodalmi áttekintés.....	5
2.1	A sakkozói és matematikai gondolkodás	5
2.2	A gondolkodás – problémamegoldás – tudás fejlesztése a matematika tanítási-tanulási folyamatában.....	7
2.2.1	Szakmai dimenzió	8
2.2.2	Pedagógiai dimenzió	9
2.2.3	Pszichológiai dimenzió.....	11
2.2.4	Konstruktív dimenzió	12
2.3	A sakk mint oktatási eszköz hatásai a gondolkodás fejlesztésére.....	17
2.4	A pedagógiai vizsgálatok formái.....	21
2.4.1	Pedagógiai kísérletek	21
2.4.2	Pedagógiai mérés és értékelés.....	22
2.4.3	Tantárgyi mérések matematikából.....	23
3.	A sakkoktatás szerepe a matematika tanításában	26
3.1	A tájékozódás megjelenése a sakkjátékban	26
3.1.1	Az anyag szerepe a sakkjátékban.....	26
3.1.2	A tér szerepe a sakkjátékban	28
3.1.3	Az idő szerepe a sakkjátékban	33
3.2	A matematikai gondolkodás néhány specifikumának megjelenése a sakkban.....	34
3.2.1	Az absztrakció.....	35
3.2.2	A logikai kvantorok.....	36
3.2.3	A lehetetlenség bizonyítása.....	38
3.2.4	Az egzisztencia bizonyítása.....	39
3.3	A problémamegoldás folyamata a matematikában és a sakkban.....	40

4.	<i>A sakkoktatás hatása a matematikai teljesítményre egy országos tudásszint mérés tükrében</i>	44
4.1	<i>A vizsgált csoportok bemutatása</i>	44
4.2	<i>A sakkozói csoport felvételi teljesítményének összehasonlító elemzése</i>	46
4.2.1	<i>Kutatási kérdések, hipotézisek</i>	46
4.2.2	<i>A kutatás módszertana</i>	47
4.2.3	<i>Eredmények</i>	51
4.2.4	<i>Következtetések</i>	62
4.3	<i>A sakkozói csoporton belüli fejlesztés hatásainak vizsgálata</i>	64
4.3.1	<i>Kutatási kérdések, hipotézisek</i>	64
4.3.2	<i>A kutatás módszertana</i>	64
4.3.3	<i>A fejlesztő foglalkozások bemutatása</i>	65
4.3.4	<i>Eredmények</i>	68
4.3.5	<i>Következtetések</i>	74
5.	<i>Összefoglalás, eredmények</i>	76
6.	<i>Summary</i>	80
7.	<i>Felhasznált irodalom</i>	84
8.	<i>Függelék</i>	93
1.	<i>függelék: A Kormány 110/2012. (VI. 4.) Korm. rendelete a Nemzeti alaptanterv kiadásáról, bevezetéséről és alkalmazásáról</i>	93
2.	<i>függelék: A 2014. évi középiskolai központi matematika felvételi írásbeli feladatsor 9. évfolyamra</i>	96
3.	<i>függelék: Javítási-értékelési útmutató a 2014. évi középiskolai központi matematika felvételi írásbeli feladatsorhoz 9. évfolyamra</i>	109

1. Bevezetés

A disszertációban a „tudományok királynője” (matematika) és a „királyi játék” (sakk) közötti kapcsolatot vizsgáljuk. A témát két aspektusból közelítjük meg. Egyrészt a matematikai gondolkodás specifikumainak megjelenését keressük a sakkozó gondolkodásban, másrészt a sakkoktatás szerepét vizsgáljuk a matematikatanításban. Gik (1989, 7. o.) így fogalmazza meg az összefüggéseket: „A matematikus és a sakkjátékos gondolkodásmódja elég közel áll egymáshoz, és aligha véletlen, hogy a matematikai képességek gyakran párosulnak sakktelhetséggel.” A két területet kiváló szakemberek kapcsolják össze (Lasker, Euwe, Botvinnik, Barcza). A sakk pedig bizonyos értelemben része a matematikának, mivel egy véges, diszkrét, kétszemélyes, teljes információjú, determinisztikus játék.

A disszertációban szereplő eredmények két csoportra bonthatók. Egyrészt bemutatjuk, hogy a sakkoktatás fontos szerepet játszhat a matematika tanításában. Természetesen ezt a kérdéskört már sokan, sok szempontból vizsgálták. A sakktanfolyamok matematikára gyakorolt hatását mérő pedagógiai kísérletek életkor szempontjából is nagyon eltérőek lehetnek, fő problémájuk Sala et al. (2015) szerint az, hogy nem garantálható, hogy a pozitív eredmények a sakk-specifikus faktornak köszönhetőek. Ezen a ponton csupán néhány dolgot ragadunk ki, a kapcsolódó szakirodalmat a későbbiekben mutatjuk be részletesen. Hong és Bart (2007) gyenge (matematikában, olvasásban és írásban), 8-12 éves tanulók vizsgálatakor megállapította, hogy a sakkoktatásnak nem volt szerepe a tanulók kognitív fejlődésében. Scholz et al (2008) alacsony IQ-val rendelkező, tanulási zavarokkal küzdő, 10 év körüli gyermekeknél differenciált eredményre jutottak, egyszerű összeadásoknál és számláláskor tapasztaltak javulást. Barrett és Fish (2011) gyógypedagógiai aspektusú cikke szerint a sakkozás képessége is tárgy specifikus és önmagában nem transzformálható azonnal, mindez a sakkoktatás módszerétől is függ. A vizsgálatoknak ez a csoportja az átlagostól eltérő, alacsonyabb képességű tanulókat vizsgál, az ő esetükben is okozhat a sakk oktatása (bár eltérő mértékű) pozitív változást.

A vizsgálatok egy másik csoportja átlagostól nem eltérő képességű tanulók esetén vizsgálja a fejlődést. Kazemi et al. (2012) a sakkoktatás pozitív hatásairól számoltak be 5., 8. és 9. osztályos tanulók esetében. Trinchero (2013) szerint a sakk tréning mérhető, de kicsi javulást eredményez általános iskolás tanulóknál. A téma kutatása egyáltalán nem lezárt, az erre vonatkozó pedagógiai kísérletek nagyon sok időt vesznek igénybe és nehezen mérhető annak a hatásnak a mértéke, amely a sakk specifikus faktornak köszönhető.

Kutatásainkban arra koncentráltunk, hogy bemutassuk, hogy a Nemzeti Alaptantervben (NAT) szereplő fejlesztési feladatok, úgy mint a *Tájékozódás, Gondolkodás, Problémakezelés- és megoldás* a sakkoktatás segítségével hatékonyabban megvalósíthatók. Ebben elsőként azt mutatjuk be, hogy a *Tájékozódáshoz* szükséges *Tér, Idő, Mennyiségi viszonyok* a sakokban is kézzelfogható módon megjelennek. Ezt példákon keresztül világítjuk meg.

A *Gondolkodás* területen is számos párhuzam állítható fel a matematikában és a sakokban, amelyet már sokan kutattak. Például De Groot (1946) a sakk mesterek gondolkodását vizsgálja, Eysenck és Keane (1997) a kezdő-szakértő problémát elemzi, Csíkos (2008) pedig már a sakk, a metakogníció és a kezdő-szakértő fogalmakat komplexen kapcsolja össze. Simon és Gilmarin (1973) a hosszú távú memória fontos szerepére utal a sakk mesterek gondolkodásában, amikor a táblaállásokhoz a legjobb lépéseket tudják asszociálni. Sweller és Cooper (1985) szerint szorosan összefüggő információk hatalmas hálózatát tároljuk a hosszú távú memóriában. Paas és van Gog (2006), illetve Van Merriënboer et al. (2007) tanulmányai szerint a matematikai problémamegoldó képesség nagy mennyiségű matematikai problémamegoldó stratégián keresztül ismerhető meg, amikhez releváns matematikai példákon keresztül jutunk el. Mi Kac és Ulam (1969), illetve Laczkovich (2010) kutatásait felhasználva kiválasztottunk négy olyan gondolkodási elemet, mely matematikai gondolkodási specifikumnak tekinthető. Ezek után példák segítségével bemutatjuk, hogy ezek a specifikumok a sakkozói gondolkodásnak is sajátjai.

Vizsgálataink alapján felállítható egy hipotézis, mely szerint a sakkoktatásnak egyértelműen pozitív hatása lehet a matematikai problémamegoldásra. A disszertációnk második részében ezzel a kérdéskörrel foglalkozunk. Valójában az alábbi négy kérdést (KK) fogalmazzuk meg és ezekre az alábbi négy hipotézist (H) állítjuk fel.

KK1: Mutat-e eltérést a sakkozói csoport matematikai problémamegoldó teljesítménye évfolyamtársaikhoz képest?

H1: Hipotézisünk szerint a sakkoktatásban részesült tanulók matematikai problémamegoldó teljesítménye jobb évfolyamtársaikhoz képest.

KK2: Melyek azok a matematikai témakörök, illetve kompetenciaterületek, ahol lényegesen jobb teljesítményt nyújtanak a sakkozók?

H2: Hipotézisünk szerint a *Számok, műveletek, Geometria* témakörökben, illetve a *Számolási készség, Kombinatívitas, Térlátás, térbeli viszonyok* kompetenciaterületeken nyújtanak lényegesen jobb teljesítményt a sakkozók.

KK3: Van-e eltérés a metakognitív fejlesztés eredményességében a versenysakkozó, amatőr sakkozó és csak a sakk alapjait ismerő tanulók esetében?

H3: Hipotézisünk szerint a fejlesztés hatásfoka a versenysakkozók esetében a legnagyobb.

KK4: Mutat-e eltérést a vizsgaszituációban nyújtott teljesítmény a korábbi mérésekhez képest a versenysakkozó, amatőr sakkozó és csak a sakk alapjait ismerő tanulók esetében?

H4: Hipotézisünk szerint a vizsgaszituációban nyújtott teljesítmény a versenysakkozók esetében mutat legnagyobb eltérést.

A kutatási kérdésekre adott válaszokat két szemszögből közelítjük meg. Egyrészt elhelyezzük egy kísérleti sakkozói csoport eredményeit az országos, illetve egy nem sakkozói csoport eredményeinek viszonylatában. Itt kapcsolódunk többek között Trinchero (2013) és Kazemi et al. (2012) sakktanfolyamok matematikai kompetenciákra gyakorolt hatásainak vizsgálatához. Másrészt vizsgáljuk a csoporton belüli fejlődés mértékét. Itt pedig Csíkos (2008) metakogníció, kezdő-szakértő problémakör, illetve Paas és van Gog (2006), illetve Van Merriënboer et al. (2007) matematikai problémamegoldó képesség fejlesztésére irányuló vizsgálatairól szóló tanulmányaihoz. Trinchero (2013) kutatásaiban már összekapcsolta két terület fejlesztését: a sakk és matematikai komplex képzés hatásait vizsgálta a matematikai problémamegoldó képességre. Sala et al. (2015) megállapították, hogy a sakk hatékony eszköz lehet a gyerekek matematikai problémamegoldó képességének fejlesztésére, bár a sakkozás lehetséges előnyeinek számos aspektusa még ismeretlen. Bart (2014) szerint szükséges az olyan empirikus pedagógiai kísérletek mennyiségének és minőségének növelésére, amelyek azt határozzák meg, hogy milyen mértékű sakk szakértelem könnyíti meg az iskolai szakértelem megszerzését a diákok körében.

Mi a sakkoktatás hatásainak vizsgálatát a matematikára 14-15 éves tanulók középiskolai matematika írásbeli felvételi vizsgán (lásd 2. függelék, 3. függelék) nyújtott teljesítményének alapján végeztük. Az erre való felkészülés egyes fázisainak alapján pedig megfigyeltük a sakkoktatás hatását a metakognitív fejlesztés hatékonyságára. A sakkozói csoport tanulóit az általános iskola nyolc osztályán keresztül (sakk szakkör,

matematika óra, osztályfőnöki teendők) ismertük meg. Fontos körülmény, hogy empirikus pedagógiai kísérletünk természetes környezetben történt: a kísérletben résztvevő tanulók nem tudták, hogy ők egy kísérlet részesei, szokásos módon készültek a matematika vizsgára és emellett sakkoztak (különböző szinteken), az elemzésekhez pedig statisztikai módszereket használunk fel.

Előrebocsájthatjuk, hogy eredményeink jórészt alátámasztják a megfogalmazott hipotéziseinket.

A disszertációban vizsgált témakörökben nyert eredményeinket az alábbi 8 publikáció tartalmazza: Missetáné (2014 a, b, c, d, e, 2015, 2017), Missetáné, Birkás (2016).

Végül szeretném megemlíteni, hogy személyesen is több szállal kötődöm a matematikához és a sakkhöz egyaránt. Balatonlellén 1994 óta tanítok matematikát, és mint minősített sakktornász és edző vezetem az iskolai sakkszakkört. Sakkozni ötéves koromban tanultam meg. Jelentősebb eredményeim: 11 évesen Polgár Zsófiával holtversenyben első helyezést értem el a Korcsoportos Országos Döntőben, majd a 15 évesen aluliaknál országos bajnok lettem, később a Bajor Női Bajnokságon értem el első helyezést. Országos versenybírói minősítéssel rendelkezem, versenyeket rendezek, sakktáborokban oktatok a kezdő sakkozók, és a Somogy Megyei Sakkszövetség elnökeként szervezem a megye sakklétét. A Magyar Sakkszövetség 2013-ban a Magyar Sakkozásért kitüntetésben részesített. Matematikatanári mesterképzési szakon, a Debreceni Egyetemen végeztem. Itteni tanulmányaim inspiráltak arra, hogy a több évtizedes matematikatanári és sakkozói tapasztalataimat összefoglaljam és a tárgykörben kutatásokat végezzek.

2. Szakirodalmi áttekintés

Ebben a fejezetben elsőként a sakkozói és a matematikai gondolkodás jellegzetességeit vizsgáló eredményeket mutatunk be. Bizonyos kapcsolódási pontokat vizsgálunk. A két terület között szoros kapcsolat van, így érdemesnek tűnik a sakkot a matematikaoktatásban felhasználni. Az oktatási folyamat tudatos tervezését és hatékony megvalósítását négy dimenzió (Wittmann 1981) kontextusában fejtjük ki. A gondolkodás – problémamegoldás – tudás összefüggéseinek néhány aspektusát a kapcsolódó diszciplínák kutatási eredményeinek segítségével világítjuk meg. Ennek tükrében a sakkoktatás hatásainak vizsgálatára irányuló kutatási eredményeket mutatunk be. A sakk általános készség- és képességfejlesztő, illetve a matematikai gondolkodásra irányuló transzfer hatásaival foglalkozunk. Végül áttekintjük a pedagógiai vizsgálatoknak azokat a formáit, amelyek kutatásainkhoz kapcsolódnak.

2.1 A sakkozói és matematikai gondolkodás

A gondolkodás fogalmára nagyon sok meghatározás született, amelyek egymástól lényegesen eltérőek is lehetnek attól függően, hogy pszichológusok vagy pedagógiai kutatók hozták létre. Nagy Sándor szerint „gondolkodásnak az olyan tevékenységet nevezzük, amely a meglévő tudásból új tudást hoz létre.” (in: Czeglédy et al. 2000, 50. o.) A „tudományok királynője” (matematika) és a „királyi játék” (sakk) közötti kapcsolat az átlagember számára abban nyilvánul meg, hogy mindkettő világos logikai készséget és kombináló képességet igényel. Gik *Sakk és matematika* című könyvében írja: „A matematikus és a sakkjátékos gondolkodásmódja elég közel áll egymáshoz, és aligha véletlen, hogy a matematikai képességek gyakran párosulnak sakktehetséggel.” (Gik, 1989, 7. o.) Több nevet is megemlíthetünk, akik mindkét területen kiváló szakemberek voltak: Emmanuel Lasker, a heidelbergi egyetem matematika professzora évtizedekig a sakk világbajnoka, egy másik világbajnok, Max Euwe az IBM cég vezető matematikusa, egy harmadik, Michail Botvinnik pedig elektromérnök-tervező volt. A magyarok közül fontos kiemelni Barcza Gedeon nagymestert, a huszármanőverek nagyszerű ismerőjét, aki matematikatanár is volt.

A mindkét területet magas szinten ismerő személyeken kívül más kapcsolódási pont is létezik. A sakk bizonyos értelemben része a matematikának: a sakk egy véges, diszkrét, kétszemélyes, teljes információjú, determinisztikus játék. A sakkozónak minden egyes lépés helyes megtételéhez egy jól definiált matematikai feladatot kellene megoldani. Ezt egyszerű helyzetekben meg tudja tenni a kezdő sakkozó is, de a legtöbb esetben a

világbajnok sem. A sakkozók ezért legtöbbször nem tipikusan matematikai gondolkodást követve, hanem más módszer használatával választják meg a lépésüket. De Groot 1946-ban a hangosan gondolkodtatás módszerének alkalmazásával a sakkozói gondolkodást vizsgálta (in: Eysenck, M. W. – Keane, M. T. 1997). Egy adott állásban kellett a legjobb lépést megtalálniuk a kísérleti személyeknek. A nagymesterek gondolkodásában 4 fázist azonosított: orientációs (az állás lényegének meghatározása), kereső (konkrét változatok elemzése), vizsgálati (döntés a legjobb lépésről) és igazoló (a megtett lépés helyességének igazolása) fázis. A kezdő sakkozóknál a tervezési és ellenőrzési fázis gyakran elmarad, konkrét lépések számítására és a legjobb lépés keresésére irányul a gondolkodás.

Érdemes megemlíteni, hogy a sakkozói gondolkodás más területeken is használható. Egy, évekig NB-s szinten sakkozó orvosprofesszor már negyven évvel ezelőtt hangoztatta, hogy minden orvostanhallgatónak meg kellene tanulni sakkozni, mert a gyakorló orvos sokszor úgy gondolkozik, mint a sakkozó: hiányos információ esetén is gyorsan döntenie kell a gyógyítás (pl. a diagnózis, vagy az operáció) menetében. Pár évvel később olvashattuk a sakkújságokban, hogy van olyan számítógépes sakkprogram, ami ugyanazon az elven működik, mint a számítógépes orvos-diagnosztizáló program.

A számítógépes sakk programok az évek során jelentős fejlődésen mentek keresztül, igazi áttörést jelentett 1997-ben a *Deep Blue* program, amely legyőzte az aktuális világbajnokot, Kaszparovot. A sakkozói gondolkodás modellezhetősége ezeken keresztül napjainkban is kutatások tárgyát képezi. Gik (1989, 196. o.) szerint: „A sakknak, mint modellnek megvan az az előnye, hogy egyrészt könnyen megfogalmazhatók a célok és feladatok, másrészt: ezeket a célokat nem is könnyű elérni.”

A két vizsgált terület, bár különbségek is mutatkoznak, mégis nagyban erősítheti egymást. Révész Géza így jellemzi az egyik eltérő vonást (in: Szilágyi 2007): „A matematikus gondolkodásának irányát a probléma, a sakkozóét nagyrészt a partner szabja meg.” Az oktatási-nevelési gyakorlatban való alkalmazást éppen ez az eltérő vonás erősítheti, a játék öröme, a győzelem motivációs hatása felhasználható a matematikai kompetenciák kialakításában és tudatos fejlesztésében.

A matematikai gondolkodást funkcióin keresztül vizsgálhatjuk, amelyek Czeglédy et al. (2000) szerint a megértés (amely a dolgok, jelenségek, illetve fogalmak lényegét és alapvető összefüggéseit tárja fel) és a problémamegoldás (amely inkább az új feladatok megoldására, törvényszerűségek felfedezésére, hipotézisek megalkotására irányul).

Pólya (1968, 1971) megkülönbözteti a termékeny gondolkodást, ami a felvetett probléma megoldásához vezet, és az alkotó gondolkodást, ami eszközt állít más problémák megoldásához is.

Treffinger (1990) modelljében a produktív gondolkodás feltételei: a meglévő tárgyi tudás (ismeretek, készségek), a motiváció és a diszpozíció (elrendezés, vázlat), valamint a metakogníció. Erre épülnek a gondolkodás irányultságát jelző művelési képességek: a kreatív és a kritikai gondolkodás. A gondolkodás divergens jellege a problémaszituációra adott újszerű válaszon, konvergens dimenziója a már meglévő tudáson, illetve logikán alapul. A kritikai gondolkodás tehát egy olyan kognitív folyamatnak tekinthető, amely önmegfigyelésen alapul és képes önmagát javítani, tökéletesíteni. A legfelső szinten helyezkednek el a komplex eljárások: a problémamegoldás és a következtetés, döntéshozatal.

Kürti J. (1982) szerint „... az ember számára mindaz problémává válhat, amiben nem bizonyos, de amiről legalább annyi ismerettel rendelkezik, hogy felkeltesse érdeklődését.” A matematika tanítási-tanulási folyamatának tudatos tervezésekor érdemes figyelembe venni ezt a meghatározást.

2.2 A gondolkodás – problémamegoldás – tudás fejlesztése a matematika tanítási-tanulási folyamatában

A matematika didaktika több diszciplínához kapcsolódó fogalomrendszert használ. Tartalmazza a matematika, a pszichológia, a pedagógia és a szociológia vonatkozó eredményeit. Az iskolai pedagógia az oktatási folyamat hatékony megtervezésével és megvalósításával foglalkozik. Ehhez kapcsolódóan Wittmann (1981) négy dimenziót különböztet meg: 1. szakmai dimenzió, 2. pedagógiai (társadalomtudományi) dimenzió, 3. pszichológiai dimenzió és 4. konstruktív dimenzió. A szakmai dimenzió a matematika mint tudomány feldolgozását, illetve a matematikai tartalom elsajátítását jelenti a matematika tanítása során. Az oktatási tartalmak alá vannak rendelve társadalmi céloknak, ezt a kapcsolatot mutatja a pedagógiai dimenzió. A pszichológiai dimenzió a tanulók pszichikai jellemzőit, életkori sajátosságait veszi figyelembe az oktatási folyamat során. A tervezés és a gyakorlati megvalósítás konkrét döntéseket és cselekvéseket igényel, amelyek meghozatala az előző három dimenzió meglétét feltételezi, ezt vizsgálja a konstruktív dimenzió. A továbbiakban a bemutatásra kerülő szakirodalmat ezek köré a dimenziók köré csoportosítjuk.

2.2.1 Szakmai dimenzió

A matematika tanításának-tanulásának célkitűzéseit az alapfokú oktatás általunk vizsgált korosztálya esetében Magyarországon a NAT szabályozza (Magyar Közlöny 2012). Meghatározza a matematika tantárgyra vonatkozó célokat és kimeneti követelményeket, valamint a fejlesztési feladatokat.

„Az iskolai matematikatanítás célja, hogy hiteles képet nyújtson a matematikáról, mint tudásrendszerről, és mint sajátos emberi megismerési, gondolkodási, szellemi tevékenységről.” (Magyar Közlöny 2012, 10688. o.).

A szakmai, pedagógiai és pszichológiai dimenzió kapcsolata már itt is megjelenik.

„A műveltségi terület a különböző témakörök szerves egymásra épülésével kívánja feltárni a matematika és a matematikai gondolkodás világát. A fogalmak, összefüggések érlelése és a matematikai gondolkodásmód kialakítása egyre emelkedő szintű spirális felépítést indokol – az életkori, egyéni fejlődési és érdeklődési sajátosságoknak, a bonyolódó ismereteknek, a fejlődő absztrakciós képességnek megfelelően.” (Magyar Közlöny 2012, 10688. o.)

Az alaptanterv az oktatás végcéljait is meghatározza az adott életszakaszban, körvonalazza az oktatási eszményt, az oktatási rendszer végzettjeiről szóló személyiségprofil. Ezek a felső tagozat vonatkozásában a következőképpen jelennek meg:

„(4) A felső tagozaton folyó nevelés-oktatás feladata elsősorban a sikeres iskolai tanuláshoz, a tanulási eredményességhez szükséges kulcskompetenciák, képesség-együttesek és tudástartalmak megalapozásának folytatása. A felső tagozat hetedik–nyolcadik évfolyamán folyó nevelés-oktatás alapvető feladata – a változó és egyre összetettebb tudástartalmakkal is összefüggésben – a már megalapozott kompetenciák továbbfejlesztése, bővítése, az életen át tartó tanulás és fejlődés megalapozása, valamint az, hogy fektessen hangsúlyt a pályaválasztásra, pályaorientációra.” (Magyar Közlöny 2012, 10635. o.)

A matematika mint tudomány feldolgozásához a tanterv 7-8. évfolyamon az alábbi fejlesztési feladatokat rendeli (Magyar Közlöny 2012, 10689. o.) :

1. Tájékozódás

1.1. *Tájékozódás a térben*

1.2. *Tájékozódás az időben*

1.3. *Tájékozódás a világ mennyiségi viszonyaiban*

2. Megismerés

2.1. *Tapasztalatszerzés: a tapasztalatok tudatosítása, közlése, rögzítése, jelölése, ezek értelmezése, visszaolvasása*

- 2.2. *Képzelet (követő, alkotó)*
- 2.3. *Emlékezés*
- 2.4. *Gondolkodás*
- 2.5. *Az ismeretek rendszerezése*
- 2.6. *Az ismerethordozók használata*
- 3. Az ismeretek alkalmazása
- 4. Problémakezelés és –megoldás
- 5. Alkotás és kreativitás: alkotás öntevékenyen, saját tervek szerint; alkotások adott feltételeknek megfelelően; átstrukturálás
- 6. Akarati, érzelmi szabályozás, az önfejlesztés képessége és az együttéléssel kapcsolatos értékek
 - 6.1. *Kommunikáció*
 - 6.2. *Együttműködés*
 - 6.3. *Motiváltság*
 - 6.4. *Önismeret, önértékelés, reflektálás, önszabályozás*
- 7. Matematikai tapasztalatszerzés, a matematika épülésének elvei

A matematikai gondolkodásmód kialakítását elsősorban a matematikai problémamegoldás szemszögéből vizsgáljuk. Nyolcadik osztályban a központi matematika felvételi vizsga segítségével képet kaphatunk a korosztály egy részének (gimnáziumokba és bizonyos szakközépiskolákba továbbtanuló diákok) esetében arról, hogyan realizálódtak a tantervben előírt célok és fejlesztési követelmények.

2.2.2 Pedagógiai dimenzió

A társadalmi célok figyelembevétele befolyásolja a matematikai tartalmakat.

Varga Tamás komplex matematikatanítási kísérletében a tananyag korszerűsítése mellett fontosnak tartotta, hogy a matematika szépsége, hasznossága és játékossága egyaránt érvényesüljön. „A matematikát nem a jövő matematikusai, egy törpe kisebbség, hanem minden tanuló igényeit szem előtt kell tanítani.” (Varga 1969, 45.o.).

Pólya György (1968) szerint a matematikaóra lehet egyaránt szép és hasznos. Az igazi cél, hogy a gyerekeket hozzásegítsük ahhoz, hogy a tudást már képesek legyenek maguk megszerezni, képesek legyenek ezt a tudást alkalmazni problémaszituációkban. (Stanic, G. & Kilpatrick, J. 1989).

A problémamegoldás tanítására több kutatási irány alakult ki. Pólya (1971) a problémamegoldás heurisztikus stratégiáit tárgyalja, ezek gyakran épülnek analógiára.

Létezik olyan irányzat is, amely konkrét utasítások nélkül, explicit irányítástól mentesen javasolja a problémamegoldás tanítását. Azonban ez a matematikatanulásnak sosem volt

hatékony módja. Kirschner, Sweller és Clark (2006) szerint a minimális utasítás a matematikában minimális tanuláshoz vezet.

Egy alternatív lehetőséget biztosított de Groot (1946, 1965) sakkozókval kapcsolatos kutatása (in: Eysenck, M. W. – Keane, M. T. 1997). Azt vizsgálta, hogy mi különbözteti meg az amatőröket a sakk mesterektől. Sakkállásokat mutatott 5 másodpercig, ezeket a mesterek 70%-a, az amatőrök 30%-a tudta visszarakni a táblára. Chase és Simon (1973) megismételte a kísérletet és azt tapasztalták, hogy random állásoknál mindkét csoport 30%-a teljesítette a feladatot. Megállapították, hogy az igazi játszmákból vett állásoknál jobban teljesítettek a sakkozók, mint az amatőrök. Simon és Gilmarin (1973) szerint mindez nem az általános problémamegoldó stratégiák ismeretéből származik, hanem hogy a sakk mesterek hosszú távú memóriájukban számtalan táblaállást tárolnak és ezekhez a legjobb lépést tudják asszociálni. A jó matematikai problémamegoldók is nagyon sok téma-specifikus stratégiai tudással rendelkeznek, mivel nagyon sok problémaszituációt a jó megoldási lépésekkel együtt tárolnak a hosszú távú memóriájukban hasonlóan a jó sakkozókhoz. Sweller és Cooper (1985) azt állítja, hogy az emberi felépítés egyik fontos részét a hosszú távú memóriát nem arra használjuk, hogy random, különálló tényeket, hanem a szorosan összefüggő információk hatalmas hálózatát tároljuk. Ez eredményezi a problémamegoldó képességet. A tudásnak ez a képessége téma-specifikus, amely már tanítható. Egy kidolgozott mintapélda segítségével a diákok a problémamegoldás lépéseit és a megoldást együtt ismerik meg (Van Merriënboer et al. 2007). Nagy számú randomizált kísérlet bizonyítja a típusfeladatok pozitív hatását. (Schwonke et al., 2009; Sweller & Cooper, 1985). Egy gyakorlott problémamegoldó képes hatalmas mennyiségű sémát felépíteni és tárolni a memóriájában, ami lehetőséget ad arra, hogy az adott témakörhöz tartozó problémákat kategorizálja a megoldás lépései szerint. A matematikai problémamegoldó képesség fejlődik azáltal, hogy nagy mennyiségű specifikus matematikai problémamegoldó stratégiát ismerünk meg, amelyekhez a hozzájuk releváns matematikai példákon keresztül jutunk el (Paas & van Gog 2006). Úgy tűnik, hogy a kidolgozott példák tanulmányozása hatékony módja a problémamegoldás tanulásának. A típuspélda összekapcsolódik a szükséges megoldási stratégiával, így ez automatikusan, a hosszú távú memória használata nélkül alkalmazható, felgyorsítva a tanulást. Ez a módszer különösen hasznos olyan területeken, amiket sok diák nehéznek talál. (Kirschner, Sweller & Clark 2006).

A matematikai problémamegoldás során fellépő nehézségek úgy is csökkenthetők, ha bevonjuk a tanulókat olyan tanulási helyzetekbe, amelyekben mindenki pozitív szerepet játszik (maga a pedagógus is). Sokan úgy gondolják, hogy nagyon keveset használnak az életben az iskolában tanult matematikából. Ugyanakkor nagyon fontos lenne számukra azoknak a képességeknek a megléte, amelyeket a matematikai problémák megoldása

során alakulnak ki. Ezért inkább az értelemfejlesztés, a logikus gondolkodás és a matematikai kompetenciák kialakítása az elsődleges cél. Ugyanakkor, ahogy Pólya (1968) fogalmaz: „... a matematika tanára ne szorítkozzék pusztán csak a tárgyi tudás közlésére, hanem fejlessze ki a diákok alkalmazóképességét. Tanítsa meg azt is, hogy a megszerzett tudással mit kezdjenek; szoktassa őket a célszerű magatartásra, megfelelő gondolkodásmód kialakítására.”

2.2.3 Pszichológiai dimenzió

Skemp (1975) szerint a matematika tanulásának és tanításának problémái pszichológiai problémák, ezek megoldásához pedig elengedhetetlenül szükséges, hogy jobban megismerjük magát a tanulási folyamatot. Minőségi különbség van a tanulás két fajtája, a mechanikus és az értelmes tanulás között. Az értelmes tanulás és a gondolkodás az, amely megkülönbözteti az embert minden más fajta élőlénytől. A kognitív pszichológia, amely az emberi gondolkodást információfeldolgozásként értelmezi (Csapó 1992), forradalmi változást hozott. A paradigmaváltásnak is nevezett folyamat fontos szerepet játszott a kognitív folyamatok modellezésében. Ezek közül a problémamegoldás modellezése, számítógépes szimulációja az egyik első és egyben mindmáig dinamikusan fejlődő terület.

A problémamegoldás folyamatát a 20. században több kutató hasonló fázisokra bontotta, azzal a különbséggel, hogy ezek száma eltér egymástól. Pólya (1971) négy lépést különböztet meg: megértés, tervkészítés, végrehajtás, ellenőrzés. Newell és Simon (1972) öt lépést állapít meg: bemenet átalakítás, belső reprezentáció, módszerváltás, végrehajtás és figyelés, újrafogalmazás. Johnson (1972) a problémamegoldás folyamatában szintén több lépést különböztet meg: információ keresése, reprezentáció és transzformáció, organizáció és reorganizáció, döntési folyamatok. Mindegyiknél találhatók párhuzamok a matematikai és a sakkbeli problémamegoldás vonatkozásában. Ezeket Pólya elméletére támaszkodva a 3.3 fejezetben fejtjük ki bővebben.

Bruner (1974) szerint az oktatás, a nevelés és a tanuló tapasztalatai egyaránt befolyásolják a gyermek gondolkodási folyamatát. Szerinte a tudást az ember három síkon tudja reprezentálni: 1. materiális sík (enaktív sík), 2. ikonikus sík, 3. szimbolikus sík. Az egyik reprezentációs síkról a másikra való áttérés növeli a problémamegoldás hatékonyságát.

Piaget (1974) genetikusan ismertelmélete az intellektuális struktúrák minőségi fejlődésével foglalkozik. Empirikus kutatásának eredményei szerint a gyermek pszichikai fejlődése szakaszonként, lépcsőzetesen megy végbe. Az egyes szakaszok sorrendet alkotnak.

(Érzékszervi-mozgásos szakasz, műveletek előtti szakasz, konkrét műveletek szakasza, formális műveletek szakasza). Szerinte az ismeretek konstrukciója a megismerő személy és a valóság közötti egyre jobb egyensúly kialakítására irányul a cselekvés és gondolkodás egyre intelligensebb sémáinak kidolgozása által. Skemp (1975) szerint ezen sémák, mint szellemi struktúrák segítségével az ismeretek integrálhatók. Az adaptálás asszimiláció vagy akkomodáció révén megy végbe. A matematika tanulása során fogalmi sémákat képzünk és alkalmazunk. A sémák átstrukturálása a hatékonyságot növelheti.

2.2.4 Konstruktív dimenzió

A kognitív pszichológia előző fejezetben tárgyalt eredményeinek az oktatás folyamatában történő alkalmazását a kognitív pedagógia vizsgálja, amelynek egyik központi fogalma a tudás. Csapó (2001) a kognitív pedagógia területeit a tudás köré csoportosítva határozza meg: a tudás állapotbeli sajátosságai, a tudás állapotváltozásai, a tudással és annak változásával kapcsolatos tudás, a tudás állapotváltozásának feltételei, a tudásnak és változásának egyéni különbségei, a tudás és változásának tartalmi kérdései. Az elsajátítás specifikumai határozzák meg a képződött tudás sajátosságait, amely a létrejött tudás változatosságához vezet, egyéni különbségek alakulnak ki. A tudás változásának feltételei alakítják ki a tudás sajátosságait. Az átalakulás környezeti (külső) és személyiségből adódó (belső) feltételei által meghatározott. A tanulás eredményességét több tényező is befolyásolja: az általános képességek, a tanulás speciális képességei, az előzetes tudás és a tudás egymásra épülése, a transzfer. Az egyéni különbségek minőségi és mennyiségi természetűek lehetnek. A kognitív pedagógia feladata ezek mértékének felmérése, okainak feltárása, valamint az optimális kognitív fejlődés és az iskolával szemben támasztott külső igényeknek való megfelelés összeegyeztetése. Több faktor is nehezíti a vizsgálatát, mert ezek a folyamatok a gyakorlatban nehezen elkülöníthetők, ezáltal komplex megközelítést igényelnek, illetve a pedagógiai folyamatok hatására bekövetkezett változások hosszabb időt igényelnek. A pedagógiai, pszichológiai és szakmai faktorok tehát egyaránt szerepet játszanak az oktatás tervezése és megvalósítása során a konkrét döntések meghozatalakor.

A 12-15 éves korosztály vizsgálata azért fontos, mert gondolkodási szintje jól mutatja az átmenetet az alsóbb évfolyamok és a középiskolai korosztály között. A matematikai gondolkodás fejlettségét meghatározza a gondolkodási műveletek ismeretének és alkalmazásának szintje. Lénárd (1978) az alábbi gondolkodási műveleteket különbözteti meg: absztrahálás, összehasonlítás, elvont adatok összehasonlítása, összefüggések felfogása, kiegészítés, általánosítás, konkretizálás, rendezés, analógia. Czeglédi et al.

(2000) szerint a lényegkiemelés, az ítéletalkotás, a fogalomalkotás és a transzferálás többszörösen összetett gondolkodási művelet. Az analízis-szintézis segítségével elérhetjük, hogy az egyszerű észleléstől eljuthatnak a tanulók a tudatos megfigyelésig. A lényeges és lényegtelen jegyek különválasztása az összefüggések tudatos feltárása segítségével érhető el. A rendezés, rendszerezés tervszerűsége nevel. Absztrahálás esetén konkrét dolgoknak közös tulajdonságát emeljük ki, azaz egy elemből következtetünk, az őt tartalmazó halmazra. A matematikában minden fogalom gondolati absztrakció, tehát az absztrahálásnak a matematikai fogalomalkotásban döntő szerepe van. A transzferáláson Czeglédy et al. (2000) valamely ismeretanyag alkalmazását értik olyan tárgyak esetében vagy a gyakorlati életben, amelyek látszólag sokban különböznek az adott ismeretanyagtól.

A továbbiakban a konstruktív dimenzióhoz kapcsolódóan három elemet: a matematikai kompetenciát, a metakogníciót és a tudástranszfert vizsgáljuk meg részletesen.

A matematikai kompetencia

A korszerű matematikatudás egyik jellemzője a realiztikus, azaz a mindennapi gyakorlati helyzetekben való alkalmazás képessége, tehát a tanítás során is vezető helyet kap az alkalmazás. A matematikatanítást szabályozó dokumentumokban is megjelentek a készség- és képességfejlesztésre, a kompetenciák kialakítására fókuszáló szemlélet elemei. A matematikai kulcskompetencia fejlesztése Magyarországon is kiemelt feladat. A *kompetencia* latin eredetű szó (*competentia*), jelentése: *illetékesség*. A Pedagógiai lexikon (szerk. Nagy 1979) szerint: „alapvetően értelmi (kognitív) alapú tulajdonság, de fontos szerepet játszanak benne motivációs elemek, képességek, egyéb emocionális tényezők” (II. kötet, 266. o.). A mai köznyelvben tágabb értelemben használjuk a kifejezést, jelentései: illetékesség, jogosultság, hatáskör, hozzáértés, szakértelem (Nagy J. 1985).

Vári (2001) a matematikai kompetencia összetevőit nyolc komponensre bontja: (1) gondolkodás, következtetés; (2) érvelés, bizonyítás; (3) kommunikáció; (4) modellezés; (5) problémafelvetés és -megoldás; (6) reprezentáció, megjelenítés; (7) szimbolikus és formális nyelv és műveletek; (8) eszközök használata. A felsoroltak alapján három csoportot képez: a reprodukív, az integratív és a kreatív klasztert.

A reprodukív csoport készségeinek, képességeinek birtoklása az alapvető ismeretek alkalmazására, a rutin számítások, eljárások végrehajtására, sztereotip szimbólumok és képletek használatára tesz alkalmassá. Az integratív csoport készségei, képességei a tanult ismeretek és eljárások kombinálását, a tanult stratégiák továbbfejlesztését, új módszerek alkalmazását is lehetővé teszik. Ebben a csoportban már az eredmények

értelmezése, a megoldások ellenőrzése, következtetések levonása is lehetséges. A szituációk ismerősek, de a feladatok nem rutin jellegűek. A kreatív csoport készségei, képességei újszerű szituációk kezelésére, új eljárások megtervezésére, végrehajtására, az eredmények értelmezésére és megfelelő kommunikációjára is alkalmasak. A feladatok megoldása magas szintű matematikai gondolkodást, modellezést, értelmezést, fejlett kommunikációt és eszközhasználatot igényel.

A matematikai kompetenciaterületeket különböző módszertani segédanyagok részletesen tárgyalják. A matematikai feladatok besorolásánál a Sulinet (Fábián et al., 2008) anyagban található csoportosítást használtuk fel, amelyet Vidákovich (2013) foglalt rendszerbe. A matematikai kompetencia készség- és képesség komponenseit az 1. táblázat tartalmazza:

<i>Készségek</i>	<i>Gondolkodási képességek</i>	<i>Kommunikációs képességek</i>	<i>Tudásszerző képességek</i>	<i>Tanulási képességek</i>
számlálás számolás mennyiségi következtetés becslés, mérés mértékegység-váltás szövegesfeladat-megoldás	rendszerezés kombinativitás deduktív következtetés induktív következtetés valószínűségi következtetés érvelés, bizonyítás	relációszőkincs szövegértés, szövegértelmezés térlet, térbeli viszonyok ábrázolás, prezentáció	probléma-érzékenység probléma-reprezentáció eredetiség, kreativitás probléma-megoldás metakogníció	figyelem rész-egész észlelés emlékezet feladattartás feladatmegoldási sebesség

1. táblázat A matematikai kompetencia készség- és képesség komponensei

A matematikai kompetencia ebben az értelmezésben a kognitív kompetencia részrendszere. Mivel ez a rendszerezés sokkal részletesebb, ezért alkalmasabb számunkra a matematika felvételi feladatok kompetenciaterületek szerinti besorolására, jobban illeszkedik vizsgálatainkhoz.

Metakogníció

Az oktatási hatékonyság növelésében a kognitív képességek fejlesztésén kívül a metakognitív tényezők is fontos szerepet töltenek be.

De Corte (1997) a matematikai tudást négy komponens együttes birtoklásaként értelmezi. Ezek a tantárgyspecifikus tudás, a heurisztikus módszerek, a metakognitív tudás és készségek és az érzelmi tényezők, például meggyőződés, szellemi beállítottság, érzelmek. Kiemeli, hogy az az értékes tudás, amely felhasználható a valós problémamegoldó helyzetekben és a további tanulásban.

A metakogníció értelmezése tartalmazza a metakognitív tudást és a metakogníció gyakorlatát vagy szabályozását (Flavell 1979). A metakogníciónak ezek szerint két területe van. Ezek közül az egyik a készségekre vonatkozó tudás (procedurális metakogníció). Alacsonyabb szinten a tárgyi készségekről való tudás tartozik ide, a **hogyan** tudásának tudása. A másik terület az ismeretekre vonatkozó tudás (deklaratív metakogníció). Ez a magasabb szint, ismeretekről, adatokról, tényekről, kognitív készségekről, információkezelőkről, a **miről** való tudásunk tudása. Minden tevékenység és minden ismeret egy meghatározott helyzetben történik, ennek ismerete a szituatív metakogníció.

A metakogníció fejlesztésének tervezésében Flavell (1979, in: Csíkos, 2004) három kategóriát különböztet meg:

- **A személy szerinti tervezés:** a személy saját tudásáról szerzett tapasztalatai hatására kialakul a személyes tanulási technika, tanulási kompetencia képe. A folyamatos visszacsatolások során megismeri tulajdon tanulásának leghatékonyabb módját, erősségeit, gyengeségeit.
- **A feladat szerinti tervezés:** a feladatok természetére, nehézségi szintjére vonatkozó folyamat. Adott feladaton belül a feladat könnyebb vagy nehezebb részeire, a feladatrészek időigényére, feltételeire.
- **A stratégia szerinti tervezés:** valójában a gondolkodás szervezése. Magában foglalja a kognitív és metakognitív stratégiákról szóló tudást, azaz hogy mikor, milyen esetben célszerű ezeket a stratégiákat használni egy jó megoldáshoz.

A metakogníció fejlesztéséhez alapvető metakognitív stratégiák alkalmazhatók: az új tudás kapcsolása a már meglévőhöz, a gondolkodási stratégia tudatos megválasztása, és az értelmi folyamat tervezése, nyomon követése, értékelése. Ezeket a stratégiákat a matematika felvételi vizsgára való felkészülés esetén tudatosan tervezhetjük, a tudás reprezentálására pedig az eredményből következtethetünk.

A tudás transzfere

Csapó (2002) szerint, ha az iskola releváns tudással szeretné ellátni a tanulókat, ha az a cél, hogy a tudásuk jól transzferálható, a mindennapokban hasznosítható legyen, akkor a vizsga sem az évek alatt megtanult ismeretek kikérdezésére korlátozódik, hanem arra irányul, hogy a tanulók mennyire képesek a megszerzett tudásuk alapján problémákat hatékonyan megoldani.

A hatékony tudásra a többszörös hozzáférés jellemző. Ennek a lényege a sokféle helyzetben való felhasználás lehetősége. Ilyen tudásra úgy lehet szert tenni, ha az elsajátítás is sokféle helyzetben megy végbe. Ha a gondolkodási képességek fejlesztése az ismeretek közvetítésével integráltan történik, az elősegítheti a sokféle helyzetben való alkalmazást (Csapó 1992). A kognitív kompetencia fejlődése összetett folyamat, melynek során az újonc szakértővé válik egy szakterületen. Nemcsak az adott terület ismeret- és készségrendszerének birtokolja egyre több elemét, de a tudás is egyre rendszerezettebbé válik. (Simon & Halford 1995). A megszerzett tudás felhasználása során megjelenő átviteli képesség a transzfer. Egyes gondolkodási képességek javíthatják a tudás transzferét. Royer (1979) több osztályozást is végrehajtott:

1. közeli transzfer (átfedés van a tanítási folyamat és a tudás vizsgálatokor jelenlevő stimuluselemek között) – távoli transzfer (a szokásostól lényegesen eltérő kontextusban való alkalmazás, a tanult jártasság újszerű helyzetben való elvégzése)
2. literális (egy tudáselem vagy jártasság sértetlen átvitele egy új feladatra) - figurális (a tudás problémamegoldás esetén történő gondolkodásbeli felhasználása)

A deklaratív tudás a literális transzfert foglalja magába, míg a procedurális, magas szinten sematizált tudás a figurális transzfert feltételezi. (Chi, Feltovich & Glaser, 1981). Perkins és Salomon (1994, in: Molnár, 2002) két, egymástól jelentősen eltérő transzfer-folyamatot különböztet meg. Az egyszerű transzferfolyamatok körébe a magas fokon begyakorolt képességek spontán, automatikus transzferálása vagy a csekély gondolkodást igénylő transzfermechanizmusok tartoznak. Megtanulunk, majd változatos helyzetekben gyakorolunk egy kognitív elemet, ami a változatosságnak köszönhetően fokozatosan automatikussá és flexibilissé válik. Matematikaórán mindezt típusfeladatokon keresztül érhetjük el. Később, a tanulási szituációhoz hasonló helyzetekben elő tudjuk hívni az érintett flexibilis elemet, amely rugalmasságának köszönhetően illeszkedik az új szituációhoz. Egyre szélesebb körben használható képesség jön létre, egyre jobban elszakadva az eredeti szituációtól. Ettől eltérő a *high road* transzferfolyamat, az *értelem csiszolása*, melynek fő elemei az absztrakció és bizonyos alapelvek alkalmazása. Az alapelvek dekontextualizálása, általános sémákká alakítása történik. Ennek egyik lehetséges útja az előkészített transzfer, melynek során már az előkészítő tanulási

fázisban elsajátítjuk az alapelvvvel együtt annak általánosításait is. Ebben a formában a korábbi tanulás kontextusfüggő helyzetben történik, eredményét később absztraháljuk és általánosítjuk, majd potenciálisan alkalmazható stratégiaként hívjuk elő a releváns szituációban (Molnár 2004).

A transzfer magas szintű sakkozói képességek esetén nem automatikus folyamat. Sala et al. (2005) szerint a sakkjátékos speciális képességei annyira kontextus-függőnek tekinthetők, hogy a transzfert valószínűtlennek tartják. Barrett és Fish (2011) több kutatás eredményéhez kapcsolódva azt állapítják meg, hogy a magas szintű sakkozás képessége tárgy specifikus, transzferálhatósága a sakkoktatás módszerétől is függ. Micheil Noir (2002, in: Szilágyi, 2007) szórványos megfigyelések alapján megállapítja, hogy a didaktikai transzfer két éves sakkkal való foglalkozás után a stratégia, az emlékezet és az absztrakciós készség tekintetében magasabb színvonalra emeli a gyerekeket. A sakknak és a matematikának vannak olyan közös területei, amelyek kölcsönösen erősíthetik a gondolkodási műveletek fejlődését, transzfer szerepet tölthetnek be az általános iskolás gyerekek matematikai probléma megoldási képességeik fejlődésében.

2.3 A sakk mint oktatási eszköz hatásai a gondolkodás fejlesztésére

Nagyon sokféle logikai játék létezik a gondolkodás fejlesztésére, azonban a sakk mégis egyedi. Különleges például abban, hogy kortól, nemtől és játéktudástól függetlenül bárki örömet lelheti benne a világ bármely részéről. Nagyfokú változatosságot, mindig új lehetőségeket teremt a sakkjátszmák óriási száma. Gik szerint: „A sakkjáték gyakorlatilag kimeríthetetlen: ha Ádám-Évától folyton a tábla mellett ülne az egész emberiség, akkor sem játszottuk volna le az összes elképzelhető játszmát. Matematikai szempontból azonban mégis véges játék, mert a lehetséges állások és játszmák számát elméletileg össze lehet számolni. Az állások számának végeességéből következik, hogy mindegyiknek „eleve el van rendelve” a jövője: kimenetele világos és sötét lehető legjobb játéka mellett már egyértelmű: vagy döntetlen lesz, vagy az egyik fél győz.” (Gik 1989, 197. o.).

A sakkjátszmák természetes körülmények között jönnek létre, nagyon eltérő lehet a partik színvonala, ezért rengeteg példát adnak. A játszmák régen játszmalap segítségével, ma már egyre inkább digitális formában elérhetők, emiatt lehetőség nyílik utólagos elemzésükre. Philip e. Ross szerint (2006, in: Szilágyi 2007) a nem laboratóriumi körülmények között született kísérletekből levont következtetések hitelesebbek. A sakkjátszmákra is igaz ez, hiteles képet adnak az adott életkorú játékosok gondolkodásmódjáról, adott időpontban nyújtott teljesítményéről. A versenysakk

esetében pedig még további, a versenyszituációból adódó faktorról bővíthető a vizsgálódás.

A szakirodalomból jól ismert jelenség a sakkoktatás általános készség- és képességfejlesztő hatása. Az óvodáskorú és az alsó tagozatos gyerekeket fejlődését Duró (2007a,b,c, 2009, 2013 a,b) vizsgálta. Szilágyi (2007) pszichológiai kutatásokat mutat be a sakk gondolkodás és személyiségfejlesztő hatására. Eysenck és Keane (1997) a kezdő-szakértő (novice - expert) problémát elemzi, Csikos (2008) pedig a sakk, a metakogníció és a kezdő - szakértő fogalmakat komplexen kapcsolja össze. A szakértőket szerinte két fontos dologgal jellemezhetjük: egyrészt óriási tárgyi tudással, ismeretanyaggal rendelkeznek, másrészt ezeket a problémamegoldás folyamatában tudatosan és gyorsan használják fel. Gondolkodásukban sok az automatikus elem, képesek gyors döntéseket hozni, ugyanakkor a gondolkodásuk tudatos is. A szakértői gondolkodási sémák a gondolkodás meta-szintű összetevői számára jelentős erőforrásokat szabadítanak fel. Az új helyzetek értelmezésekor a meglevő ismereteinket és tapasztalatainkat hívjuk elő. Mérő (1997) szerint a sémák ismerete a sakkjátékban nélkülözhetetlen, ez a jártasság a nagymestereknél 50000 és 100000 közé tehető. A matematikai szakterületen szakértővé váláshoz nagyon sok sémára van szükség. Ezek kialakulásához lehetőséget nyújtanak a sakkjáték azon elemei, amelyek a tanulók matematikai gondolkodásában is szerepet játszanak. A képesség és ismeret jellegű tudás mellett a metakogníció is fontos tényezője a szakértői gondolkodásnak.

A szakértelmet vizsgálhatjuk a gyorsaságot a hatékonysággal párosító gondolkodás modellezésére is. Ezt a felfogást a nyolcadik osztályosok matematika tudására vonatkoztatva azt látjuk, hogy a „szakértők” szaktárgyi tudásukat képesek az általunk vizsgált felvételi feladatsor (10 komplex feladat) megoldásakor az adott időkeret (45 perc) alatt minél hatékonyabban és tudatosabban felhasználni. A tesztre való gyakorlás során bizonyos feladatok rutinfeladatokká válnak, ez a megoldási sebességet is kedvezően befolyásolhatja. A problémamegoldó gondolkodás azoknál a feladatoknál figyelhető meg igazán, ahol a megszerzett ismereteket, sémákat a megszokottól eltérően kell felhasználni. A gyerekek, amikor már képesek megfogalmazni egy matematika feladat kapcsán, hogy milyen problémával szembesültek, hol léptek fel nehézségek (tárgyi tudás, eszköztudás), akkor egyéni fejlesztéssel segíthetünk ezek áthidalásában. A metakogníció fejlettsége, a tanuló saját erősségeinek és gyengeségeinek ismerete megköszorozhatja a fejlődés mértékét.

A sakktanfolyamok matematikára gyakorolt hatását mérő pedagógiai kísérletek különböző szempontokat vesznek figyelembe. Ezek életkor szempontjából és a sakkoktatás mennyiségét illetően is nagyon eltérőek lehetnek.

A sakk tréning pozitív kognitív hatásait iskoláskorú normálnál alacsonyabb képességű tanulóknál is vizsgálták. Hong és Bart (2007) tanulmányi kudarcos, veszélyeztetett, 8-12 éves tanulók körében végeztek vizsgálatokat. A diákok három hónapig heti kilencven perces sakkoktatásban részesültek. Megállapították, hogy a sakkoktatásnak nem volt egyértelmű szerepe a kognitív fejlődésben. Scholz et al. (2008) alacsony IQ-val rendelkező, tanulási zavarokkal küzdő, 10 év körüli gyermekeknél differenciált eredményre jutottak, egyszerű összeadásoknál és számlálásnál tapasztaltak javulást. Németországban végzett kutatásaik alapján megállapították, hogy a sakk értékes támogatást nyújthat tanulási nehézségekkel küzdő gyerekek esetében is. Barett és Fish (2011) az Egyesült Államok dél-nyugati részén 6., 7. és 8. évfolyamos diákokat vizsgáltak. A 31 résztvevőt két csoportra bontották, az egyik csoport a matematika mellett sakk képzésben is részesült. A szerzők szerint a sakkozás képessége is tárgy specifikus és önmagában nem transzferálható azonnal, mindez a sakkoktatás módszerétől is függ. Ez a tanulmány azt mutatta, hogy a sakk-csoport eredménye a *Számok, műveletek és mennyiségi érvelés* és a *Valószínűség és a statisztika* esetében szignifikánsan magasabb volt, mint a másik csoportnál, akik nem vettek részt semmilyen sakk tevékenységben.

A kutatások egy másik csoportja véletlenszerűen kiválasztott, nem válogatott tanulók esetén vizsgálja a fejlődést. Kazemi et al. (2012) a sakkoktatás pozitív hatásairól számoltak be 5., 8. és 9. osztályos tanulók esetében. A szerzők megállapították, hogy a sakkoktatás javítja az iskoláskorú diákok matematikai képességeit és metakognitív kapacitását. Trinchero (2013) Olaszországban végzett kutatásai szerint a sakk tréning mérhető, de kicsi javulást hozott a matematikai pontszámokban a matematikai problémamegoldó képességet igénylő komplex feladatokban. Ez a hatás nagyobb volt olyan diákok körében, akik több órás sakkoktatásban részesültek. Kutatásaiban már összekapcsolta két terület fejlesztését: a sakk és matematikai komplex képzés hatásait vizsgálta a matematikai problémamegoldó képességre. Sala et al. (2015) pozitív korrelációról számolnak be, azonban megállapítják, hogy kevés adat bizonyítja a sakkoktatás fejlesztő hatását a kognitív képességekre. A sakkoktatás és az online matematikai tréning miatt nem garantálható, hogy a sakk speciális faktornak köszönhető a pozitív változás.

A téma kutatása egyáltalán nem lezárt, az erre vonatkozó pedagógiai kísérletek nagyon sok időt vesznek igénybe és nehezen mérhető a hatás mértéke. A sakk azonban hatékony eszköz lehet a gyerekek matematikai problémamegoldó képességének fejlesztésére, bár a sakkozás lehetséges előnyeinek számos aspektusa még ismeretlen.

A sakk mint oktatási eszköz, napjainkban az érdeklődés középpontjába került. Tantárgyként való elterjesztéséhez az egyik érv éppen az, hogy a sakkozói gondolkodás nagyon sokrétű, az egyes formáinak gyakran nagyon eltérő jellemzői vannak, így ismerete sokféle gondolkodásnál hasznos lehet. Oktatási-nevelési gyakorlatban való alkalmazása egyre több országban jó gyakorlattá válik. New York Cityben például a *Chess in the Schools* mozgalom keretében 1986-tól a sakk oktatásának bevezetése igazi sikertörténet volt. Eddig már több, mint 500000 gyerek vett részt a programban. A mozgalom szervezői szerint a koncentráció, a stratégia, az alázatosság, az önbizalom és a flexibilis gondolkodás fejlesztése a gyerekek sikerének kulcsa. Óriási vívmány, hogy a program a közoktatási rendszer keretein belül ad lehetőséget a sakk megismerésére.

Magyarországon az iskolai oktatásban korábban a sakk inkább szakkör vagy délutáni szabadidős elfoglaltság keretei között valósult meg. Ezeken a foglalkozásokon lehetőség volt tehetségek azonosítására, akik egyesületekben, regionális sakkiskolákban fejleszthették tovább sakkozói képességeiket. A sakk tömegsport jellege is érvényesült, mivel voltak olyan tanulók, akik kizárólag a játék öröméért sakkoztak, szabadidejüket hasznosan töltötték el, egyáltalán nem szerettek volna versenysakkozással foglalkozni. Forradalmi változást hozott a közoktatásban, hogy 2013-tól a NAT-ban a sakk már választható tantárgyként szerepel. A sakkozás tantárgyként való elterjesztésének egyik érve, hogy a sakkozói gondolkodás nagyon sokrétű, így ismerete sokféle gondolkodásnál hasznos lehet. Polgár Judit szerint a sakk „A történelem egyik legősibb játéka - a jövő oktatási eszköze.” és azt a digitális kor „szuperfegyvereként” említi. Az általa kidolgozott *Sakkpalota* program egy komplex képességfejlesztő módszer, amellyel az óvodáskor végén, az iskoláskor kezdetén be lehet vezetni a gyermekeket a tudatos ismeretsajátítás világába. A program nem elsősorban sakkot, hanem sakkkal tanít (Gósi 2013). A pedagógusok számára kiváló szakmai segédanyagok is rendelkezésre állnak. Hazánkban tehát minden lehetőség adott arra, hogy a sakk a közoktatásban minél szélesebb körben elterjedjen.

A téma aktualitása, illetve a nemzetközi és hazai kutatások tehát megfelelő háttérrel adnak ahhoz, hogy a sakkozói és a matematikai gondolkodás közötti párhuzamokat, azok egymásra hatását vizsgáljuk. Mi a sakkoktatás hatásait a matematikára nyolcadik osztályos tanulók matematika vizsgán nyújtott teljesítményének alapján végeztük. Az erre való felkészülés egyes fázisainak alapján pedig megfigyeléseket végeztünk a sakkoktatás hatásaira a metakognitív fejlesztés hatékonyságára. Fontos körülmény, hogy kutatásunk természetes környezetben történt: a kísérletben résztvevő tanulók nem tudták, hogy ők egy kísérlet részesei, szokásos módon készültek a matematika vizsgára és emellett sakkoztak (különböző szinteken).

2.4 A pedagógiai vizsgálatok formái

Ebben az alfejezetben a pedagógiai vizsgálatok formái közül azokat mutatjuk be, amelyek szükségesek az általunk végzett elemzések elhelyezéséhez a szakirodalomban. A pedagógiai kísérletek tipizálása mellett a pedagógiai mérés és értékelés azon elemeit említjük meg Csapó (2002) felosztásait követve, amelyek a tudás eredményességének vizsgálatára irányulnak. Olyan nagymintás matematikai tantárgyi mérésekkel foglalkozunk, amelyek többnyire az általunk vizsgált korosztály matematikai kompetenciáit, illetve a hozzáadott pedagógiai munkát is mérik. Vidákovich és Csíkos (2009) csoportosítását követve helyezzük el a matematikai tudásszint mérések között a középiskolai matematikai felvételi feladatsort.

2.4.1 Pedagógiai kísérletek

A pedagógiai kísérletek történeti hagyományai a pszichológia és a szociológia kísérleti módszertanában gyökereznek (Csíkos 2012). A kísérlet egy független változón keresztül történő beavatkozás hatásait vizsgálja a függő változón, ahol a többi tényező változatlan eközben. A kísérlethez három dolog pontos meghatározására van szükség (Babbie 2000): 1. függő és független változók, 2. kísérleti és kontroll csoportok, 3. előzetes és utólagos mérés. A pedagógiai kísérletek többségében maga az előidézett hatás is alapvetően emberi ráhatásnak köszönhető, szándéka pedig a személyiség fejlesztése ennek a „duplán emberi hatásnak” (Csíkos 2012). A pedagógiai kísérlet a személyiség fejlesztése során érvényesülő összefüggések feltárására irányul (Falus 1993, in: Csíkos 2012).

A pedagógiai jelenségek világában szükségszerű az a törekvés, hogy megvizsgáljuk tudományos igénnyel az általunk pozitívnak ítélt beavatkozás (sakkoktatás) hatásait. Rendező szempontként a kísérlet „valódiságát” (természetes vagy laboratóriumi körülmények), a kísérleti tényezők számát (egyváltozós vagy többváltozós) és az oktatási rendszer vizsgált szintjét (országos vagy nemzetközi) választjuk (Csíkos 2012). Ha az oksági kapcsolatra utaló elképzelés csak utólag születik meg, akkor felidézett kísérletről (ex post facto) beszélünk. A kvázikísérletek esetén a kísérleti csoport jellemzőinek manipulálása is megtörténik (pl. sakkoktatás, metakognitív fejlesztés), míg a randomizált kísérletben az egyforma kiindulási csoportok kiválasztása jellemző. A dizájn kísérletek

esetében a kutatók az eredmények értelmezését egymással összevetik (De Corte 2001, Verschaffel et al. 1999).

A szakirodalom egyik leggyakoribb pedagógiai kísérleti fajtája osztálykeretek között, természetes tanulási környezetben valósul meg. A pedagógiai akciókutatások esetén az osztályterem a természetes laboratórium a tanítás-tanulás kutatásához. Az ökológiai validitás (Csapó, 2001) követelményei egyértelműen meghatározzák, hogy a kísérlet eredményei természetes körülmények között, közvetlenül alkalmazhatók legyenek. A Hawthorne-effektusnak, azaz a megfigyelő hatásának kiküszöbölésére az egyik legmegfelelőbb módszer, ha a kísérletben részt vevők nem is tudják, hogy éppen kísérlet folyik, illetve a kontroll csoport tagjai szintén fontosnak érzik, hogy ők is a kísérlet részesei (Csikos 2012). A bemutatásra kerülő kísérletünk mindhárom kritériumot teljesíti: természetes környezetben született, alkalmazható bármilyen természetes környezetben (ökológiailag valid), a részt vevők nem tudták, hogy egy kísérlet részesei. Minden bemutatásra kerülő résztvevő motivált volt a jó eredmény elérésében, mert a fő cél, a kiválasztott középiskolába való bejutás egyik feltétele a matematika feladatsor minél jobb teljesítése.

2.4.2 Pedagógiai mérés és értékelés

A tudásszint mérés a pedagógiai vizsgálatok egyik gyakorta alkalmazott formája. Az általunk vizsgált felmérés középpontjában a matematikai tantárgyi tudás és a matematika tantárgy keretében elsajátított konkrét készségek, képességek állnak. Az emberi értelem, a belső (pszichikumban kialakuló) tudás tanulmányozása rendkívül nehéz folyamat. A tudás eredményességének vizsgálatára, a tudás minőségének értékelésére sok kutatási irány alakult ki. Csapó (2002) három tradíciót emel ki, amelyből mi a harmadikat alkalmazzuk:

- az oktatás hatékonyságának, a tudás mennyiségének és minőségének leírásával foglalkozó rendszerszintű elemzéseket,
- a gyermekek természetes fejlődése és az iskolai oktatás közötti jobb összhang megteremtésére törekvő fejlődéslélektani orientációjú kutatásokat,
- a tudás keletkezésével, felhasználhatóságával foglalkozó kognitív pszichológiai megközelítést.

Kritériumorientált tesztelés esetén a tanulók fejlettségi szintjét, teljesítményét egy előre kitűzött célhoz, egy rögzített kritériumhoz viszonyítjuk (esetünkben ez a NAT-ban meghatározott követelményrendszer), normaorientált értékelés esetén a teljesítményeket a

kiválasztott populáció átlagához, a csoport normáihoz viszonyítjuk (nálunk az összehasonlító mérések ilyenek).

Taylor (1970) szerint: „Az értékelés lényegében az a művelet, amely választ ad arra, hogy milyen program, tanterv hatására a nevelési folyamatban milyen mértékben valósulnak meg a nevelési célok.” Scriven (1966) három értékelési funkciót különböztet meg:

- diagnosztikus (helyzetfeltáró)
- formatív (tanulási folyamatot fejlesztő, formáló)
- szummatív (lezáró, minősítő, összegző)

A diagnosztikus tesztek alkalmazásának célja, hogy megállapítsuk, mit tudnak a diákok és mit nem. Fő előnyük, hogy a tanítási-tanulási folyamat bármely szakaszában alkalmazhatók.

A pedagógiai értékelésekhez szükséges adatokat többféle módszer segítségével gyűjthetjük össze: megfigyelés, kikérdezés, szociometriai módszer, pszichológiai tesztek, tudásszintmérő tesztek, dokumentum- és tartalomelemzés (Falus, 1993). A tudásszintmérő tesztek pszichológiai tulajdonságokat, illetve annak egy speciális formáját a tudást mérik. Nemcsak a mindennapi iskolai gyakorlatban játszanak döntő szerepet, hanem a pedagógiai kutatásoknak is rendkívül fontos eszközei.

A pedagógiai mérésekkel szemben alapvetően három követelmény támasztható: objektivitás (tárgyszerűség), validitás (érvényesség) és reliabilitás (megbízhatóság) (Báthory 1992, Csapó 1996, Falus 1993). A pedagógia megfigyeléseinek, kísérleteinek szisztematikus feldolgozásával különféle elméleteket, paradigmákat támaszthatunk alá. Statisztikai elemzésre akkor van szükségünk, amikor adathalmazzal dolgozunk. A bonyolult adatrendszerek többváltozós elemzésével részletes képet kaphatunk egy adott problémáról, hipotéziseket igazolhatunk és cáfolhatunk segítségével. Az iskolai oktatás esetében ennek segítségével felmérhetjük egy adott tantárgyból egy korosztály teljesítményét.

2.4.3 Tantárgyi mérések matematikából

A matematika tantárgy kitüntetett szereplője az iskolai méréseknek. Ezeket a méréseket különböző szempontok szerint csoportosíthatjuk:

- a vizsgált populáció alapján (intézményi, települési, megyei, országos, nemzetközi)
- életkor szerint, iskolai évfolyam szerint
- tanterv szerint (központi vagy helyi tanterv szerinti a diagnosztikus teszt)
- matematikai (tartalmi) részterület szerint.

Több nagymintás nemzetközi és hazai mérés vizsgálja a 13–15 éves korosztály matematikai kompetenciáját, köztük vannak, amelyek tantervi és vannak, amelyek kulturális eszköztudás szerinti megközelítésben.

A nemzetközi területről két nagy méréssorozatot említünk.

A TIMSS (Trends in International Mathematics and Science Study) vizsgálatokban főszerepet kapott a tantervi szempontú megközelítés, de már megjelentek azok a nyílt végű kérdések is, amelyek túlmutatnak a konkrét tantárgyon.

A PISA-felmérések (Programme for International Student Assessment) a matematikát már a mindennapi életben történő boldogulás és a döntéshozatal eszközének tekintik (Csíkos 2005). A 2003-as mérésben már négy tartalmi területet definiáltak: tér és forma, változások és relációk, mennyiség, bizonytalanság. Meghatározták a matematikai megismerés három szintjét: reprodukciós, összekapcsoló és reflektív készségek.

A PISA vizsgálatok nyomán kezdődtek el Magyarországon is a kompetenciamérések, amelyek azok feladattípusait, módszereit követik. 2004-től már a 8. évfolyamon is történtek mérések. Ezek elemzéséről több tanulmány is megjelent (Balázsi et al. 2005, Horn és Sinka 2006, Kántor 2008, Vári 2003). A matematikai gondolkodás gyakorlati megvalósulásának, a hétköznapi matematikának, az alkalmazásnak a vizsgálata a 21. században egyre nagyobb teret nyer. Csíkos, Kelemen és Verschaffel (2011) arra az eredményre jutottak, hogy a tanulók konzisztens és erős matematikai meggyőződése lényegesen befolyásolja a feladatmegoldás folyamatát, valamint a feladatmegoldási stratégiák használata csak gyenge összefüggést mutat az iskolai eredményükkel.

A matematikai megértés a matematika tanulása és tanítása szempontjából egy igen fontos összetevő. Csapó 2002-es iskolaitudás-vizsgálat felméréskor használt teszt keretében a műveletvégzés, az alapértelmezések (fogalmak), a feladatmegoldás, a problémamegoldás és a grafikonértelmezés is helyet kapott. A vizsgálatban a 7. és a 11. évfolyam átlageredményei gyengébbek a tantárgyi teljesítményük alapján elvártnál. A szerző arra hívja fel a figyelmet, hogy a begyakorolt típusfeladatok esetében jobban teljesítenek a tanulók, mint az azoktól eltérő, gondolkodtató feladatok esetében.

A matematikai tudásszint méréseket Vidákovich és Csíkos (2009) négy csoportra osztja:

- Az iskolai matematikai tudás vizsgálata (tantervi követelmények, hagyományos feladatok)
- A matematikai kompetencia vizsgálata (alkalmazási követelmények, „realisztikus” feladatok)

- A matematikai szövegesfeladat- és probléma-megoldás vizsgálata (gondolkodási folyamatok, szöveges feladatok)
- A matematikai alapkészségek vizsgálata (strukturális modellek, elemi feladatok)

Léteznek olyan tudásszint-mérések is, amelyek komplex módon mindegyik részterületet vizsgálják. Ezek alkalmasak a tudásszint-állapot diagnosztizálására, ezáltal az oktatási-nevelési folyamat további feladatainak meghatározására az adott populáció esetében.

Az általunk vizsgált korosztály egyik mérése, teljesítményszintjének leírása monitor vizsgálatok segítségével évente történik az egész országra kiterjedően, központi középiskolai felvételi feladatsor segítségével. Ezek a feladatlapok egy többváltozós pedagógiai kutatás összefüggés vizsgálatában magas reliabilitásuk miatt fontos szerepet töltenek be. A tesztek szakértők állítják össze a matematikai tananyag elemzése alapján, a mérés validitását így biztosítják.

Ennek Békés megyére vonatkozó elemzését egy tanulmány (Marczis, 2010) rögzíti. Ebből kiderül, hogy a diákok magyar nyelvből rendkívül jól teljesítettek, matematikából gyengébb teljesítményt nyújtottak. Érdekes viszont, hogy az összteljesítményük eloszlása az elvárható ideális eloszlás. Az 2014. évi országos adatok elemzésre is készült egy tanulmány (Misetáné, Birkás 2016). Az itt megjelenő statisztikai elemzések szerint az összetettebb, több matematikai kompetenciaterületet is igénylő feladatoknál a tanulók sokkal gyengébb eredményeket értek el, mint a begyakorolható „rutinfeladatok” során.

3. A sakkoktatás szerepe a matematika tanításában

A sakkozói gondolkodás transzfer hatásai egyértelműen megmutatkoznak a matematikai gondolkodás fejlesztésében. A sakkozás egyik legnagyobb előnye, hogy korai életkorban játékosan alakulhatnak ki olyan képességek, melyeknek fontos szerepe van a matematikai gondolkodásban. Természetesen a sakknak nemcsak a matematikai, hanem az általános készség és képességfejlesztő hatása is ismert. A 3.1 részben a gondolkodás – problémamegoldás - tudás összefüggéseire hozott matematikai és sakkbeli példákat több mint 20 esztendő közoktatásban szerzett gyakorlati oktatási-nevelési tapasztalataiból merítettük. A sakkjátéknak azokat az elemeit gyűjtöttük össze, amelyek elősegítik a gondolkodás, illetve speciálisan a matematikai gondolkodás fejlődését. A 3.2 részben a matematikai gondolkodás néhány specifikumát vizsgáljuk abból a szemszögből, hogy ezek hogyan jelennek meg a sakkozói gondolkodásban. A 3.3 alfejezetben a problémamegoldás folyamatának néhány párhuzamát említjük meg a két vizsgált területen.

3.1 A tájékozódás megjelenése a sakkjátékban

A matematikai didaktikai kutatás szakmai dimenziójának vizsgálatát a Nemzeti Alaptanterv matematikai műveltségi területének fejlesztési feladatai közül a *Tájékozódásra*, a *Gondolkodásra* és a *Problémakezelés és - megoldásra* koncentrálna végezzük el. A NAT 7-8. osztályos fejlesztési feladatai között elsőként a *Tájékozódás (a térben, az időben és a világ mennyiségi viszonyaiban)* szerepel. A sakkjátékban az anyag, tér és idő hármas egysége, ezek harmóniája hozza létre az alkotást, a sakkjátszmát. Sakkbeli példákon keresztül szeretnénk megvilágítani ebben a fejezetben néhány kapcsolódási pontot, amelyek a sakkjáték segítségével már nagyon korai életkorban (óvoda, kisiskola) elősegítik a gyermekek matematikai tájékozódási képességeinek fejlődését.

3.1.1 Az anyag szerepe a sakkjátékban

A sakkban egy figura anyagiságát az üres táblán ellenőrzött mezők száma és milyensége határozza meg. A hozzájuk rendelt értékek (amelyeket mi is használunk a példák során): vezér-9, bástya-5, huszár-3, futó-3, gyalog-1.

Kezdő sakkozók (akár 4-5 évesek) azt számolják, hogy hány darab figurát ütöttek le ők a tábláról, és hányat az ellenfél. Pici gyerekek gyakran a tábla mellett és nem a táblán számolnak. Ez hibázásra is okot adhat, mert esetleg leesett egy bástya a földre. Ezt is a célszerűség diktálja azonban, mert a játék elején kevesebb a leütött figura, így könnyebb azokat megszámolni. Haladó sakkozók már különbséget tesznek a figura értékében. Például: Egy vezért és egy bástyát ütöttem le, az ellenfél csak egy huszárt és egy gyalogot $9 + 5 > 3 + 1$, vagyis nekem van anyagi előnyöm, pedig mindkettőnknek két figurája hiányzik a tábláról. Közben a matematikai gondolkodási műveletek közül az összehasonlítást, azonosítást, megkülönböztetést is felhasználják a gyerekek. A mennyiségi viszonyokat hamar felismerik (én több figurát ütöttem le). Egyszerű következtetéseket vonnak le: ha több figurát ütök le, akkor nekem van előnyöm. Hamar rájönnek, hogy ez az állítás nem mindig igaz, pl. négy gyalog kevesebbet ér, mint egy vezér. Újabb állítást fogalmaznak meg: ha az általam leütött figurák összértéke több, mint az ellenfélé, akkor nekem van anyagi előnyöm.

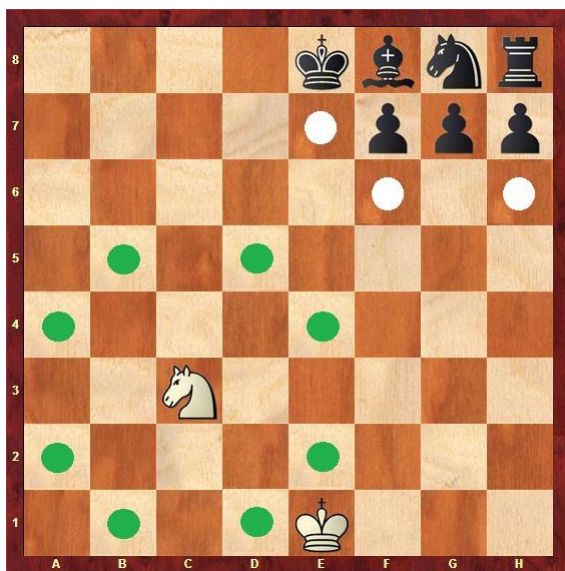
Az összefüggések felismerése közben matematikai logikai ismereteik és gondolkodásuk is fejlődik. Egyszerű állításokat fogalmaznak meg, sokszor ösztönösen. Felismerik ezek logikai értékét. Képesek ezekből új állításokat alkotni.

Hamar rájönnek arra, hogy célszerű a leütött figurákat értékük szerint csökkenő vagy növekvő sorrendben összeadni vagy csoportosítani (pl: vezér + gyalog = $9 + 1 = 10$, két bástya = $2 \cdot 5 = 10$.) A válogató, osztályozó, rendszerező képesség fejlődése nyomon követhető, amikor már úgy számolnak a táblán, hogy nekem is van egy vezérem, neked is, nekem két bástyám van, neked is, nekem öt gyalogom van, neked csak három, tehát 2 egység előnyöm van.

A pozitív és negatív számok összeadása (sötét és világos figurák értékét ellentétes előjellel figyelembe véve) és a műveleti tulajdonságok (kommutativitás, asszociativitás) ezáltal már egészen kis korban megjelennek. Ebben az életkorban a játék és a cselekvés (kezembe foghatom a figurákat és így csoportosíthatom őket) öröme a matematikai számolási készség gyors fejlődéséhez vezet. A procedurális, azaz folyamat jellegű, tevékenységben megjelenő tudás kerül előtérbe a deklaratív tudással szemben.

3.1.2 A tér szerepe a sakkjátékban

A sakkjátékban szorosan kapcsolódik egymáshoz az anyag és a tér. Az adott állásban ellenőrzött mezők száma és milyensége alkotja a sakkfigurák terét. (pl. a huszár a tábla közepéről 8 másik mezőt (ld. 1. ábra), a tábla széléről 3 vagy 4 mezőt, a sarokból 2 mezőt ellenőriz).



1. ábra A huszár által ellenőrzött mezők száma

A térbeli tájékozódás is fejleszthető a sakkjáték által. A geometriai ismeretek a sakkbán különböző szinteken jelennek meg. Alkalmazásuk a sakkparti folyamán nélkülözhetetlen. A térelemek, a koordináta-rendszer, a síkbeli alakzatok, a geometriai transzformációk egyaránt előkerülnek a sakk tanítása során már alsó tagozatban vagy akár fiatalabb gyerekeknél is. A matematikai tanítási folyamat részeként, a geometria oktatásakor a cselekvéses tanulás nemcsak a sakk segítségével érhető el, de kiváló módszer a játék segítségével a kisgyerekek ismereteinek fejlesztésére.

A sakk tanítását a legtöbbször a sakkfigurák megismertetése után a sakktáblával és részeivel folytatják. A sakktábla segítségével sok geometriai fogalmat játékos formában ismernek meg a gyerekek.

A síkidomok, sokszögek közül a *négyzet* fogalmával tapasztalatszerzés alapján: a sakktábla négyzet alakú. Mutasd meg a határoló vonalait! (kerület) A sakktáblán 64 mező (terület) található. Ezek is négyzet alakúak. Mutasd meg a centrumalkotó mezőket! A centrum is egy négyzetet alkot a sakktáblán (kívül-belül, rész-egész). A négyzet fogalma a gyalogbevétel szabályainál (négyzetszabály ld. 3.2.2, 10. ábra) is előkerül. Ebben az esetben már a gyerekeknek absztrakt módon, a képzeletükben kell megalkotniuk a négyzete(ke)t.

Téglalap: világos térfél, sötét térfél, királyszárny, vezérszárny. (2. ábra)



2. ábra

Nyolcszög, trapéz: a huszár menetmódjának megtanítása során. (lásd 5. ábra)

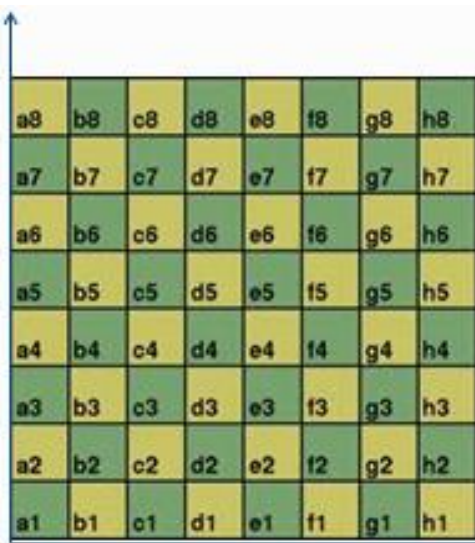
Ezeket a gyerekeknek életkori, gondolkodási szintjüknek megfelelő időben, de mindenképpen az iskolai matematikai tananyagban való megjelenése előtt már megtaníthatjuk.

A statikus gondolkodási folyamatok közül a térbeli relációk észlelése és létesítése már az egyszerű matt állások felismerésekor és létrehozásakor előkerül. A képzeletbeli mozgítás a sakkfigurák alapállásba való elhelyezésekor játékosan fejleszthető. A dinamikus gondolkodási folyamatok közül a vizualizáció a sakkjáték folyamán folyamatosan jelen

van. A snell-partik ezt a képességet még jobban fejlesztik, mivel időkorlát közé szorítják ezt a folyamatot (pl. amikor 5-5 perc gondolkodási idő áll rendelkezésre összesen az egész sakkparti folyamán). A vaksakk még sokkal magasabb szintet követel meg, amikor a játékos a tábla nélkül, a képzeletbeli térben eligazodik és tudja követni a tér dinamikus változását. A mentális forgatás tehát a sakkparti minden egyes lépése után új szituációként fordul elő. Barcza Gedeon nemzetközi nagymester és matematikatanár így fogalmazta meg, hogy „A sakkban az egyetlen állandó az, hogy minden mindig változik.” (Bilek 1990, 448. o.).

A térbeli tájékozódás fejlesztésére is sok lehetőség van a sakk segítségével. A sakktáblán a mezők elnevezését (3. ábra bal) nagyon hamar megtanítjuk a gyerekeknek, mert ez lehetővé teszi állások felállítását, illetve a sakkjátszma lejegyzését. Például: rakjuk fel a következő állást a sakktáblára: világos: Kg6, Vf8, sötét: Kh8! (Ilyenkor a gyerekek megkeresik az adott figurát, az adott mezőt, majd elhelyezik a figurát a sakktáblán.)

Nagyon látványos az élősakk bemutató (3. ábra jobb), ahol gyerekek jelmezbe öltözve mutatnak be egy korábban lejátszott sakkpartit, közben egyik mezőről a másikra mozognak utasítás alapján. Pl. a világos huszár f3-ra lép.



a8	b8	c8	d8	e8	f8	g8	h8
a7	b7	c7	d7	e7	f7	g7	h7
a6	b6	c6	d6	e6	f6	g6	h6
a5	b5	c5	d5	e5	f5	g5	h5
a4	b4	c4	d4	e4	f4	g4	h4
a3	b3	c3	d3	e3	f3	g3	h3
a2	b2	c2	d2	e2	f2	g2	h2
a1	b1	c1	d1	e1	f1	g1	h1



3. ábra A koordináta-rendszer megjelenése a sakkban

A sakkjátszma lejegyzése is a koordináták segítségével történik (4. ábra). Mivel már alsó tagozatos gyerekeknek is rendeznek olyan versenyeket, ahol a játszmák írása kötelező, ezért nekik már készség szinten tisztában kell lenniük mezők jelölésével, vagyis a koordinátákkal, így a rendezett párok fogalmával.

MAGYAR NEMZETI IFJÚSÁGI ÉS GYERMEK SAKK CSAPATBAJNOKSÁG
BUDAPEST, 2012. OKTÓBER 27-31.

L-16/8.

Forduló: 2.	Toldozás: 8.	Vegyesnapi: Idő:
Dátum: 2012. 03. 28		Vegyesnapi: Idő:

Világos Név: Csapat:

Sötét Név: Csapat:

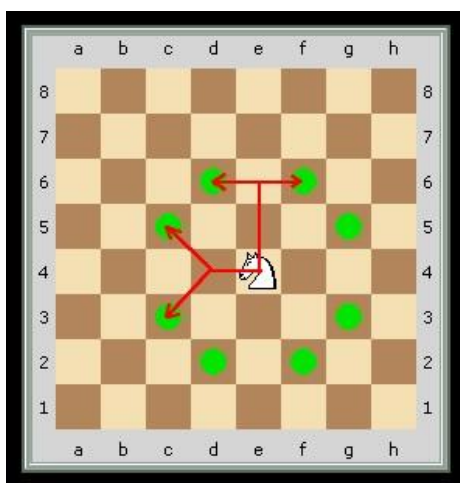
1.	e4	e5	21.	Fg4	Bg4	41.		
2.	Hg3	Hc6	22.	Rg3	Rg6	42.		
3.	d4	d6	23.	BRe1	c6	43.		
4.	dxe5	dxe5	24.	s4	Hg4	44.		
5.	Vcd8	Kcd8	25.	Bxe4	KP8	45.		
6.	Hc3	Fb4	26.	Bd8	Fd8	46.		
7.	Ff2	Hg6	27.	Bdxe8	KP7	47.		
8.	0-0-0	Fxc3	28.	BRe7	Kg8	48.		
9.	Fxc3	Hd7	29.	Bxg7	Hc3	49.		
10.	Hxe5	Hxe5	30.	Bd8	KR7	50.		
11.	Fxe5	Rg	31.	Ff5	Bg6	51.		
12.	Fg3	Bc8	32.	Bc6	KP6	52.		
13.	e5	Bxe5	33.	Bxg6	KR5	53.		
14.	Ff4	Bc7	34.	Bxg7	He2	54.		
15.	Fxe7	Kce7	35.	Kd2	Hf4	55.		
16.	Fd3	Hc5	36.	BR7#		56.		
17.	Ff7	Fc6	37.			57.		
18.	a3	BR8	38.	1-0		58.		
19.	Fd3	e4	39.			59.		
20.	Fd2	Ff7	40.			60.		

Világos Versenyző Sötét

4. ábra Játsszalap a sakkparti írására

A sakkpartiban a sakkfigurákat mozgatják (cselekvéses tanulás). A matt feladványokban, kombinációkban több lépést előre kell kiszámolni, melynek során képzeletben kell megalkotni a lépések után kialakult állásokat. Egy sakkjátszma során a térszemlélet részfaktorai komplex módon fejlődnek.

A figurák lépéseinek megtanítása elősegíti a vektorok és az eltolás fogalmának (5. ábra)



5. ábra A huszár menetmódja a sakktáblán

tapasztalati úton, kicsiknél cselekvéssel (végig próbálják a lépéseket), nagyobbaknál gondolkodással (fejben végigszámolva, absztrakt módon) való megtanítását.

A sakkfigurák lépései egy adott vektorral való eltolásnak is tekinthetők. A huszárlépéseknél egyenlő nagyságú, de más irányú vektorok mutathatók meg (vektorok összege is előkerülhet).

A bástyalépéseknél, futólépéseknél egyező irányú, ellentétes irányú, merőleges, egyenlő és különböző nagyságú vektorok mutathatók meg.

A vezérlépések a legbonyolultabbak, itt az előzőeken kívül a vektorok által bezárt szög is megláttatható.

A sakkjátékban két ismert fogalom a támadás és a védelem. Hány figura támadja a huszárt? (Keresd meg az összes olyan vektort, ami az adott pontba mutat és az ellenfél bármelyik figurájából, mint kezdőpontból indul ki!) Hány figura védi a huszárt? (Keresd meg az összes olyan vektort, ami az adott pontba mutat és bármelyik saját figurájából, mint kezdőpontból indul ki!) ellentett vektorok fogalma is megjelenik, amikor például két gyalog, vagy két huszár (lásd 6. ábra) kölcsönösen támadja egymást.



6. ábra Támadás és védelem fogalma, vektorok

3.1.3 Az idő szerepe a sakkjátékban

A sakkfigurák menetmódjának megtanulása után gyorsan felismerik a gyerekek, hogy vannak lassú (király, gyalog), közepes (huszár) és gyors (vezér, bástya, futó) figurák. A sakkjátékban az időt az határozza meg, hogy egy adott figurával egy adott mezőről egy másik adott mezőre hány lépésben juthatunk el. Az idő sakkbeli egysége a lépés.

Az idő szerepét egy sakk és egy matematikai példán keresztül mutatjuk be.

Sakk feladat (7. ábra):

Állás: V: Kb1, Vg4, Bh4 Hg5, a2,b3,c2

S: Kg8, Va3, Bf8, Fc3, f7,g7

Világos indul és nyer.



7. ábra

Megoldás: Jó tervnek tűnik Vh5, mert utána a matt h7-en vagy h8-on védhetetlen. Igen, de nincs rá idő, mert közben sötét Vb2-vel mattot ad. (Az idő elvesztegetésének tehát komoly következményei lehetnek.) A helyes játék (8. ábra): 1. Bh8 Kxh8, 2. Vh5 (vagy Vh3, vagy Vh4) Kg8, 3. Vh7 matt.



8. ábra A helyes játék világos lépései után

Matematikai feladat: Van kilenc érménk, amelyek közül az egyik hamis, könnyebb a többinél. Legalább hány mérést kell végeznünk a kétkarú mérleggel ahhoz, hogy megállapíthassuk, melyik a hamis?

Megoldás: Legalább két mérés szükséges. Az érmeket hármas csoportokba osztjuk. Két csoportot megmérünk. Ha egyforma a tömegük, akkor a harmadik csoportból egyet-egyet kiválasztunk és megmérünk. Ha egyformák, akkor a kimaradt a hamis, ha nem akkor a könnyebb a hamis. Amennyiben az első mérésnél nem egyforma a tömeg, akkor a könnyebb csoportból választunk ki egyet-egyet és ezeket az előzőhöz hasonlóan megmérjük. Természetesen sokkal több méréssel is megoldható a feladat (például kettőssel mérünk), azonban a legkevesebb mérést igénylő megoldást keressük.

Az idő jó beosztásának fontos szerepe van egy matematika vizsga megoldása esetében is, amelyet a későbbiekben vizsgálunk.

A sakkban létező fogalom a gondolkodási idő, amelyet a sakkóra segítségével mérnek a sakkparti folyamán. Ennek is lehet transzfer hatása a matematikában, tanítási tapasztalataink alapján a sakkozó gyerekek könnyebben tudják beosztani az idejüket az iskolai dolgozatoknál. Hamar megtanulják, hogy a sakkparti során a gondolkodási idejüket hogyan használják fel, és megismerik, hogy időzavarban hogyan tudnak gyors és hatékony döntéseket hozni. Az idővel való gazdálkodásuk fejlettebb társaiknál. A pontosságuk fejlesztését szolgálja, hogy a sakkpartiban minden egyes megtett lépésnek következménye van (ez gyakran a játszma elvesztése vagy megnyerése is lehet). A sok megtehető lépés közül nekik kell kiválasztani az adott állásban a legjobb lépést, mégpedig úgy, hogy legtöbbször nincs lehetőségük (például idő hiányában) az összes lehetőség megvizsgálására.

Tulajdonképpen a sakkjáték folyamán az anyag, a tér és az idő a küzdelem három eszköze. Ezek egymáshoz való viszonya határozza meg egy-egy állás valódi értékét. Mivel egyenlő erők küzdenek, a figurák gyorsabb mozgósítása döntő jelentőséggel bír a játszma minden szakaszában. A megnyitásban a figurák gyors fejlesztése térelőnyhöz, ennek elhanyagolása térhátrányhoz vezet. A középjátékban a térelőny gyakran kombinációs lehetőségeket rejt magában, amelyek anyagi előnyhöz vezethetnek. A végjátékokban nem mindegy, hogy mennyi idő alatt (hány lépésben) ér oda a király az átváltozási mezőhöz (négyzetszabály, gyalogbevétel stb.). Az anyag, tér és az idő tehát a sakkjáték folyamán szoros kapcsolatban állnak egymással, komplex egységet alkotnak.

3.2 A matematikai gondolkodás néhány specifikumának megjelenése a sakkban

A 3.2 alfejezetben a matematikai gondolkodás négy specifikumát vizsgáljuk, amelyek megjelennek a sakkozó gondolkodásában. Választottunk két olyan jellemző vonást, ami kis mértékben mindenféle gondolkodásban megtalálható, de a matematikai gondolkodásra ezek nagymértékű szereplése a jellemző. Ezek az absztrakció állandó

használata és a logikai kvantorok hangsúlyos szerepeltetése. További - szinte csak a matematikai gondolkodásra jellemző – vonások: a lehetetlenség bizonyítása, és az egzisztencia-bizonyításnak az a fajtája, aminél nem adjuk meg a létező objektumot. Tehát a matematikai gondolkodás jellemző vonásai közül az alábbiakat emeljük ki:

- az absztrakció állandó használata
- a logikai kvantorok nagy száma,
- a lehetetlenség bizonyítása,
- az egzisztencia-bizonyítás.

Példákkal szeretnénk alátámasztani, hogy a matematikai gondolkodásnak ezek a jellemző vonásai egyszerű formában, de megkerülhetetlenül szerepet kapnak a szóba jöhető legfiatalabb, a 12 -15 éves diákok matematika oktatásában is. (A 12 évesnél fiatalabb diákoknak a bizonyítási igénye és képessége még nem olyan fejlett, hogy ezeket a gondolkodási formákat meg lehessen tanítani az adott iskolai keretek között.) A matematikai gondolkodásnak ezek a jellemző vonásai ugyancsak egyszerű formában, de szintén megkerülhetetlenül szerepet kapnak és felismerhetők a sakk-oktatás (sakk tantárgy) esetében is.

A felsoroltak megjelenésének bemutatására egy-egy matematikai és néhány sakkbeli példát hozunk fel. A matematikai példák a jelzett életkornak megfelelően az általános iskolai anyagból, a sakkbeli példák a kezdők tananyagából valók. A példák tipikusnak mondhatók abban az értelemben, hogy további hasonló példákat könnyű találni. A sakkjáték esetében az állásértékeléshez tartozó olyan példákat választunk, amelyek nyerő, vagy döntetlent kiharcoló stratégia létezését mondják ki. Ezekben a sakkban szokásos szóhasználatot alkalmazzuk, például „az állásban világos indul és nyer”. A feladvány megoldását a kezdő sakkozók oktatásának színvonalán tárgyaljuk.

3.2.1 Az absztrakció

A matematikai gondolkodás absztrakt fogalmakkal történik. A sakkjáték, így a sakkozói gondolkodás is teljes egészében absztrakciót igénylő tevékenység. Már a figurák is absztrakt fogalmak, mert csak a definíciójukban leírt tulajdonságukat lehet használni, és ez teljesen független a figura alakjától és elnevezésétől. Ezt támasztja alá az, hogy különböző országokban különböző alakja és neve van a figuráknak (Vezér – Dame - Queen, Futó – Läufer - Bishop).

A matematikai és a sakkozói gondolkodásban az absztrakció szerepének illusztrálására az alábbi feladatokat választottuk ki:

Matematika feladat:

Egy kávépörkölő üzemben kétféle kávé pörkölnek, az egyiknek 2500 Ft, a másiknak 3300 Ft a kilogrammonkénti ára. Az üzemből 80 kg kávékeveréket rendeltek. Hány kilogrammot kell összekeverni az egyes fajtákból, hogy a keverék kilogrammonkénti ára 3000 Ft legyen?

A feladat megoldása során definiált *absztrakt fogalom* az egyik kávé ismeretlen mennyisége. A megoldást annak egyszerűsége miatt mellőzzük.

Sakk feladat (9. ábra):

Állás: V: Kg1, Ve3, Be1, Fa4, a3, b2, f2, g3, h2

S: Kf8, Vc7, Bb8, Be8, a7, b6, f7, g7, h6.

Világos indul és nyer.



9. ábra

Megoldás: 1. Vxe8+, Bxe8 2. Bxe8#. A megoldásnál fellépő gondolkodás során definiált *absztrakt fogalom* az áldozat. A matt álláshoz ennek a segítségével jutunk el.

3.2.2 A logikai kvantorok

A logikai kvantorok (minden - $\forall$ univerzális kvantor és létezik - $\exists$ egzisztenciális kvantor) minden tudományterületen előfordulnak, de a matematikában, a matematikai gondolkodás során feltűnően sokszor.

A logikai kvantorok szükségesek a kétszemélyes játékok esetében, például már a stratégia (a sakkban nyerő, vagy döntetlenre vezető stratégia) fogalmának definiálásához is. Ugyanis akinek van ilyen stratégiája, annak az ellenfél *bármely* lépésére *van olyan* lépése, hogy az így kialakult lépéssorozattal eléri a célját. Érdekes összevetni ezt a fogalmat az olyan sakkállás fogalmával, amelynél nem az állás szokásos értékelése történik, hanem a gondolkodási időt túllépő játékost vesztesnek nyilvánítja a versenybíró.

Ez olyan állásnál történik, ha *létezik* olyan lépéssorozat, amely az állásból indulva matthoz vezet.

A következőkben egy-egy példát mutatunk a kvantorok gyakori előfordulására.

Matematikai feladat:

Bizonyítsuk be, hogy *bármely* hét pozitív egész szám közt mindig *van két olyan*, amelyeknek vagy az összege, vagy a különbsége osztható tizeneggyel.

A feladat megoldása során a hét pozitív egész szám tizeneggyel való osztási maradékát vizsgáljuk. Ha *létezik* két egyező, akkor ez a feladat megoldását jelenti. Ha *bármelyik* kettő eltérő, akkor *létezik* két olyan maradék, aminek az összege 11, ami ugyancsak a megoldást jelenti.

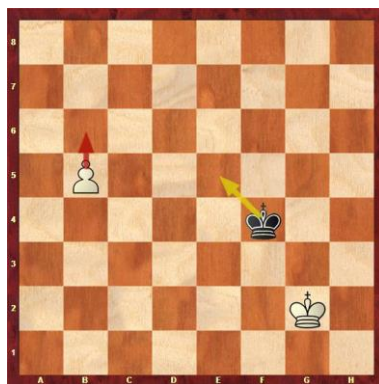
Sakk feladat (10. ábra):

Állás: V: Kg2, b5 S: Kf4.

Világos indul és nyer.

Megoldás: (négyzetszabály) 1. b6, Ke5 2. b7,

Kd6 3. b8V és világos nyer.



10. ábra

A megoldáshoz vezető úthoz a geometriai absztrakt távolságfogalom ismerete szükséges. A kiindulási állásban a kiindulási négyzet oldala 4 egység. Világos b6 lépése után a gyalog átváltozási négyzetének oldala már csak 3 egység. *Bármely* sötét lépés esetén (a megoldásban a legjobb lépést írtuk le, amellyel a legközelebb juthat a sötét király az újabb átváltozási négyzethez) *létezik* olyan világos lépés, amellyel az átváltozási négyzet oldala tovább csökkenthető, ezáltal a sötét király nem tudja megakadályozni a világos gyalog átváltozását.

3.2.3 A lehetetlenség bizonyítása

A matematikai gondolkodásban az, hogy valami nem lehetséges, igen fontos szerepet játszik. „Amikor azt bizonyítjuk, hogy valami lehetetlen, egy probléma megoldhatatlan, bizonyos matematikai objektum vagy eljárás nem létezik, akkor a gondolkodásunk az elvontság és a véglegesség olyan irányába fordul, amely a matematikára leginkább jellemző.” (Laczkovich 2010, Kac és Ulam (1969) - től átvéve.) A matematikatörténetből jól ismert példaként említhetjük a kocka-kettőzés, a szögharmadolás és a körnégyszögesítés problémáját. Ezeket több, mint 2500 évvel ezelőtt vetették fel görög matematikusok, bizonyításuk még sincs 250 éves. Itt nem arról van szó, hogy képességeink vagy lehetőségeink átmeneti korlátozottsága miatt nem sikerül, hanem arról, hogy a kitűzött feladatok elvégzése lehetetlen. Ilyen típusú feladatok már az általános iskolás matematika tananyagban és egyszerű sakkfeladványokban is előfordulnak

Matematikai feladat:

Ha a sakktáblából az egyik nagyátlón levő két átlellenes mezőt kivágjuk, akkor a maradék nem fedhető le olyan dominókkal, melyek két szomszédos mezőből állnak.

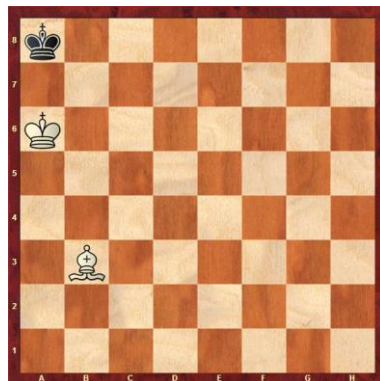
Megoldás: A sakktáblára helyezett dominó mindig egy világos és egy sötét mezőt fed. Mivel a nagyátló két átlellenes mezője egyforma színű, ezért 32 világos és 30 sötét mező vagy 32 sötét és 30 világos mező lefedésére van szükség, ami *lehetetlen*.

Az érdekesség kedvéért megemlítjük, hogy egy értelmes tanuló óra után rajzon próbálgatta a lefedést megvalósítani. Arra a figyelmeztetésre, miszerint bebizonyítottuk, hogy ez lehetetlen, nem érdemes próbálkozni a lefedéssel, a válasza az volt, hogy ő megpróbálja, hátha mégis lehetséges.

Sakk feladat (11. ábra):

Állás: V: Ka6, Fb3 S: Ka8.

Bizonyítsuk be, hogy bármelyik fél indul, ebben az állásban világos nem adhat mattot, tehát nem létezik ebből az állásból kiinduló olyan lépéssorozat, amelynél sötét mattot kap.



11. ábra

Megoldás: Ha a futó sakkot ad, akkor a világos királynak egyszerre kellene ellenőriznie legalább kettő, a sötét király melletti sötét mezőt (itt a7 és b8), ami azonban *lehetetlen*.

3.2.4 Az egzisztencia bizonyítása

Vannak olyan matematikai és sakkbeli problémák, amelyek annak eldöntését kívánják, hogy bizonyos objektumok léteznek-e vagy nem. A létezés bizonyítására kétfajta út is elképzelhető.

Az egyik, amely a kérdéses objektumot kézzel foghatóan megkonstruálja („konstruktív bizonyítás”), a másik csak az objektum létezését bizonyítja, magát az objektumot nem konstruálja meg. A második a mélyebb, absztraktabb, ami jellegzetesen matematikai gondolkodásra vall, ezt egzisztencia-bizonyításnak nevezzük. Erre az alábbi két példát mutatjuk be:

Matematika feladat:

Mutassuk meg, hogy 3 négyzetszám között mindig van két olyan, aminek a különbsége osztható 4-gyel.

Megoldás: Egy négyzetszám 4-gyel osztva 0 vagy 1 maradékot adhat, így a három négyzetszám között biztosan van két olyan, amely 4-gyel osztva ugyanazt a maradékot adja. Ezek különbsége 4-gyel osztható.

Sakk feladat (12. ábra):

Állás: V: Kf5, Bd5, Ff6, h6, h5 S: Ke8, Bh8, g5.

Világos indul és két lépésben mattot ad.

Megoldás: Ebben az állásban két eset lehetséges. Ha sötét már lépett a királyával vagy a bástyájával, akkor 1. Ke6, és sötét bármilyen lépésére 2. Bd8 matt.



12. ábra

Ha sem a király, sem a bástya nem mozdult még a játszma során, akkor sötét utolsó lépése csakis a g5 lehetett, hiszen a g6-on álló gyalog támadta volna a világos királyt. Ekkor azonban 1. h5xg6 (menet közbeni ütés), majd ha sötét sáncol, akkor 2. h7 matt, sötét bármely más lépésére pedig az előbb látott 2. Bd8 matt. Látjuk, hogy van matt két lépésben, de nem tudjuk, hogyan. Vagyis a matematikában oly gyakori egzisztencia-bizonyítás történt. (Ezt a problémát már W. Langstaff is közölte a Chess Amateur c. lapban 1922-ben.)

3.3 A problémamegoldás folyamata a matematikában és a sakkban

A problémamegoldás folyamatának feltérképezésében Pólya György munkássága igen nagy jelentőséggel bír. Ezek megjelenését is vizsgáltuk gyakorlatban a matematika és a sakk oktatásában. A matematikai problémák megoldásánál és a sakktáblák feladványok megfigyeltéskor hasonló lépések fordulnak elő a megoldás szakaszai esetében. (2. táblázat)

matematikai probléma	sakktáblák feladvány
Meg kell értenünk a feladatot! Mi a kérdés?	Értékelünk kell az állást! Mi a cél?
Tervet készítünk. Anyanyelvünkön megfogalmazott feladat alapján matematikai modell alkotása.	Megvizsgáljuk a számításba jöhető lépéseket. Tervet készítünk, fejben számolunk!
Végrehajtjuk a tervünket.	Meglépjük a lépést.
Ellenőrizzük, a kész megoldást megvizsgáljuk.	Megvizsgáljuk a létrejött állást.

2. táblázat Párhuzamok a matematikai problémák és a sakktáblák feladványok megoldása során

A célirányos gondolkodás mindkét területen egyértelműen megjelenik. A matematikai szöveges feladatok esetében: Mi a kérdés? Mit szeretnénk kiszámítani? Sakktáblák feladvány esetében Mi a cél? Melyik az a matt állás, amit el szeretnénk érni? Amikor a célt egyértelműen tisztáztuk, akkor kell megkeresni a megoldáshoz vezető utat, a megfelelő módszert, amellyel a kitűzött célt el tudjuk érni.

A Pólya által említett heurisztikus stratégiák közül többféle előfordul a sakkban, mi most egyet, a fordított irányú gondolkodást emeljük ki. A *fordított irányú gondolkodás*, vagyis a „*rák-módszer*” megjelenésére is mindkét területen találunk példákat.

A matt feladványokban (13. ábra) és a végjátékokban (14. ábra) is jelentős szerepe van az elérendő céltól visszafelé gondolkodva az odavezető út megkeresésének.

Sakk feladat:

A 13. ábrán látható sakk feladatot célirányos és fordított irányú gondolkodással is megoldhatjuk. A 16. ábrán a végső cél a matt állás látható.



13. ábra Kiindulási állás (mattfeladvány)



14. ábra Végállás (matt)

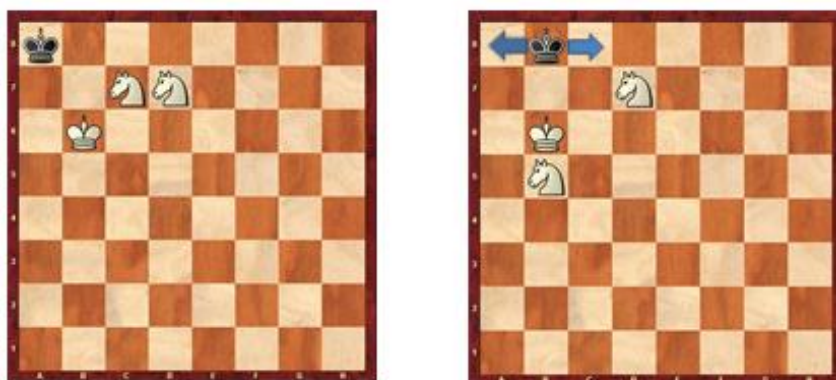
A 15. ábrán a többlépéses matt feladvány megoldásának lépéseit az első lépéspár (1.Bh8+, Kxh8) után láthatjuk.



15. ábra A megoldáshoz vezető út lépésenként

A 16. ábra bal oldalán található végjáték a két huszárral való matt állást mutatja be. Ha egy lépéspárral visszafelé gondolkodunk és megvizsgáljuk az előtte lévő állást (16. ábra jobb oldal), akkor láthatjuk, hogy a sötét királynak két lépéslehetősége van és csak az egyik (Ka8) vezet a matthoz. Könnyen igazolható, hogy az ellenfél hibája nélkül két huszárral lehetetlen mattot adni.

Sakk feladat:



16. ábra Fordított irányú gondolkodás végjátékokban

Matematikai feladat: Gondoltam egy számra, elosztottam öttel, hozzáadtam hatot, ezt megszoroztam nyolccal, így nyolcvanat kaptam. Melyik számra gondoltam?

Matematika feladat: Gondoltam egy természetes számra, megszoroztam hárommal, hozzáadtam hármat, így nullát kaptam. Melyik számra gondoltam?

A két matematikai feladat azért kapcsolódik szorosan egymáshoz, mert hasonló gondolkodási módszert lehet alkalmazni mindkettőnél, azonban a második feladat esetében egy plusz feltétel jelent meg (természetes szám). Amikor a tanulók egymás után a két matematika feladatot megoldották, tipikus rossz válaszként megjelent a 2. esetben a -1. Ezek a tanulók tudták a megfelelő matematikai gondolkodási módszert alkalmazni, de nem vizsgálták meg a feltételt. A „rutin eljárások” gondolkodás nélküli alkalmazása vezethet rossz eredményhez.

A feladatok megoldása során a csoportban a tanulók többféle módszert alkalmaztak: megjelent az *analitikus gondolkodás* (elemzés, részekre bontás), az *algoritmikus gondolkodás* (lépésenként haladtak, tudatos volt a lépések sorrendje) és az *intuitív*

gondolkodás is (nem lépésenként halad, nincs tudatosság). A *célirányos gondolkodás* a geometriában is megjelenik, amikor egy szerkesztési feladatnál elkészítjük a vázlatot. Tehát a kész feladatból indulunk ki, és megkeressük hozzá a szerkesztés lépéseit (szerkesztés menete). A matematikai szöveges feladatok megoldása és a sakkeladványok megfejtése már *divergens gondolkodást* feltételez. A sakkjáték korai megtanítása, tanulása tehát jelentősen elősegítheti a gyerekek geometriai ismereteinek fejlődését.

A jelenlegi Z generációnak éppen az egyik legnagyobb problémája, hogy a rá zúduló óriási információmennyiségből hogyan tud válogatni, hogyan tudja alkalmazni a megszerzett ismereteket. A gondolkodás, a kreativitás és a pontosság fejlesztésében pedig a matematika és a sakk is óriási szerepet játszik. Nem véletlen, hogy több országban, köztük Magyarországon is felismerték, hogy a sakkoktatás iskolai bevezetése milyen előnyökkel járhat, ha a világra nyitott, gondolkodni és cselekedni képes embereket szeretnénk nevelni, olyanokat, akik képesek önálló döntéseket hozni, és megállják a helyüket az életben.

4. A sakkoktatás hatása a matematikai teljesítményre egy országos tudásszint mérés tükrében

Ebben a fejezetben a sakk és a matematika oktatási-nevelési folyamatban való összekapcsolásával, a gondolkodás- és problémamegoldás-fejlesztésére irányuló hatásainak gyakorlatban való megvalósulását vizsgáljuk. Nyolcadik osztályosok matematikai tudását vizsgálva keresünk magyarázatot olyan teljesítménybeli különbségekre, amelyek feltételezésünk szerint a sakkoktatás hatására következnek be. Először elhelyezzük egy, a sakkoktatásban is részesülő csoport teljesítményét az országos eredmények és egy olyan nem sakkozói csoport eredményeinek viszonylatában, akik hasonló matematikai felkészítésben részesültek. A sakkjáték oktatási gyakorlatban való alkalmazásának és a metakognitív fejlesztésnek a hatásait szeretnénk összekapcsolni a matematikai kompetenciaterületek vizsgálatával. Ezért elemezzük azt is, hogy milyen tartalmi és kompetenciaterületeken teljesített jobban a kísérleti sakkozói csoport. Ezután a sakkozói csoporton belüli fejlődést vizsgáljuk a sakktudás szintjének függvényében.

4.1 A vizsgált csoportok bemutatása

Húsz fős kísérleti csoportunkat 2014-ben középiskolába felvételiző, 14-15 éves tanulók alkották, fiúk-lányok vegyesen. A gyerekek egy Somogy megyei kisváros egyetlen általános iskolájának tanulói, akik hetedik osztálytól csoportbontásban tanulják a matematikát. Azok a diákok kerültek ebbe a csoportba, akik középiskolai felvételi vizsgát szándékoztak tenni. Matematikából normál tanterv szerint haladtak, de nyolcadik osztályban heti plusz egy órában felvételi előkészítő foglalkozás zajlott. Ezen az órán a matematika felvételi feladatsorok feladatainak megoldásait a tanárral közösen beszélték meg. A tanulók otthon is oldottak meg feladatsorokat, ezeket önállóan javították ki a megoldási útmutató alapján, a szakköri órán segítséget kérhettek a tanártól a megoldás menetét illetően. Az iskolában három mérést végeztek. Az egyéni fejlődést folyamatosan nyomon követhették a gyerekek hétről-hétre az otthoni és az iskolai teljesítményük alapján.

A matematika szakköri órák végén gyakran sakkoztak, ezért a csoport minden tagja megismerte a sakkjáték alapszabályait. A tanulónak első osztálytól lehetősége nyílt az iskolában sakk szakkörre járni. Voltak olyan gyerekek, akik csak egy évig jártak, de voltak olyanok is, akik csak ötödik osztályban kapcsolódtak be a sakk szakkör munkájába

és olyanok is, akik több évig részt vettek sakkoktatásban. Heti egy óra áll rendelkezésre iskolai keretek között erre. Itt klasszikus értelemben folyik a sakkoktatás (megnyitás, középjáték, végjáték alapjainak megtanulása, elemzések, játszmák sakkórával). A csoport minden tagja foglalkozott azonban az iskolában sakkal, mert a matematika óra végén sakkoztak (aki akart), a többiek pedig figyelemmel kísérték a játszmákat és közben vagy utólag megbeszélték, néha elemezték a partikat. Ebben az életkorban már eldől, hogy ki foglalkozik majd profi szinten sakkozással, ők Élő-pontszámmal rendelkeznek. Ez a 20 tanuló kizárólag amatőr szinten sakkozott. Három részcsoportha bontottuk őket.

- Versenysakkozók (VS): Öt olyan tanuló volt, aki elindult közülük megyei szintű amatőr sakkbajnokságon (Diákolimpia), amit 2014. évben rendeztek először Élő-pontszámmal nem rendelkezők (amatőrök) számára. Ezek a tanulók 8. osztályban is versenyeztek.
- Iskolai sakkozók (IS): Tíz olyan tanuló volt, aki szintén járt legalább egy évig sakk szakkörre, de legfeljebb iskolai házbajnokságon szerepelt.
- Sakk szakkörre nem járók (NS): Öt olyan tanuló volt, aki csak a sakk alapjait ismerte, ők nem jártak iskolai keretek között sakk szakkörre, egyáltalán nem versenyeztek, azonban az iskolában ők is sakkoztak (matematika szakkörön).

Az összehasonlító vizsgálatainkhoz egy nem sakkozói csoportot is kiszűrtünk az adatbázisból. Egy környező kisváros olyan általános iskolájából választottunk ki tanulókat, akik biztosan nem részesültek iskolai sakkoktatásban, azonban a heti matematika óraszámuk ugyanannyi volt, mint a kísérleti csoport esetében. Ők is normál tanterv szerint haladtak. A K1 csoport heti plusz 2 matematika órában készült a felvételire. A két szakköri órát egymás után szervezték, amelyről jelenléti ívet vezetett az ott tanító tanárnő. Ide azok a diákok jártak, akik felvételi vizsgát tettek matematikából. A fiúk-lányok aránya hasonló volt. Az első órán a korábbi matematika felvételi feladatsorokat a gyerekek tanári felügyelet mellett 45 perces időtartamban önállóan oldották meg. Ennek a fő célja az időbeosztás megtanulása és a teljesítmény mérése volt iskolai környezetben. A második órában pedig ezeket a tanárral közösen kijavították a központi javítókulcs útmutatásai alapján és mindig megbeszélték a megoldás menetét. A tanulók otthon is oldottak meg feladatsorokat, ezeket önállóan javították ki és a szakköri órán segítséget kérhettek a tanártól a megoldás menetét illetően. Az egyéni fejlődést folyamatosan nyomon követték hétről-hétre. Az utolsó megírt gyakorló feladatsor után, az addig elért eredmények segítségével megpróbálták minden tanulóra vonatkozóan megjósolni a felvételi pontszámot az addig teljesített átlagpontszámok alapján. (Sajnos ezek az adatok nem állnak rendelkezésre a 2014. évből.) A nem sakkozói csoportot 37

tanuló alkotta. A matematika átlaguk 3,54 volt félévkor. A legjobb 20 tanuló csak négyes és ötös osztályzatot szerzett (átlaguk:4,25). Ez a kísérleti sakkozói csoport esetében 4, 35. Megállapíthatjuk, hogy a módosított K1 nem sakkozói és a kísérleti sakkozói csoport iskolai matematika eredményei csak kis eltérést mutatnak a felvételi vizsga időpontjában. A továbbiakban a csoportok matematika vizsgán nyújtott felvételi eredményeit hasonlítjuk össze.

4.2 A sakkozói csoport felvételi teljesítményének összehasonlító elemzése

Vizsgálatunk tárgya a 2013/2014. tanévben 9. évfolyamra történő beiskolázás központi írásbeli felvételi vizsgáinak matematika feladatsora (2. függelék, 3. függelék). Ez alapján a sakkozói csoport teljesítményét összehasonlítjuk az országos eredményekkel és egy nem sakkozói csoport eredményeivel. További elemzéseink arra irányulnak, hogy mely feladatokban érték el lényegesen jobb eredményt a kísérleti sakkozói csoport tanulói. Ennek megválaszolásához statisztikai módszerekkel további kvantitatív elemzéseket végzünk. Az országos adatbázis lehetőséget ad tartalmi és kompetenciaterületek szerinti összehasonlításokra is.

4.2.1 Kutatási kérdések, hipotézisek

KK1: Mutat-e eltérést a sakkozói csoport matematikai problémamegoldó teljesítménye évfolyamtársaikhoz képest?

H1: Hipotézisünk szerint a sakkoktatásban részesült tanulók matematikai problémamegoldó teljesítménye jobb évfolyamtársaikhoz képest.

KK2: Melyek azok a matematikai témakörök, illetve kompetenciaterületek, ahol lényegesen jobb teljesítményt nyújtanak a sakkozók?

H2: Hipotézisünk szerint a *Számok, műveletek, Geometria* témakörökben, illetve a *Számolási készség, Kombinatívitas, Térlátás, térbeli viszonyok* kompetenciaterületeken nyújtanak lényegesen jobb teljesítményt a sakkozók.

4.2.2 A kutatás módszertana

Ebben a fejezetben bemutatjuk a kutatásunk tárgyául szolgáló matematikai felvételi feladatsort, amely Magyarországon sok középiskolába a bejutáshoz szükséges követelmény (gimnáziumok és szakközépiskolák). Kitérünk a komplex vizsga céljaira, pontos idejére, időtartamára, illetve az egyes matematikai feladatok közműveltségi tartalom szerinti besorolására, amelyet a NAT szerint végeztünk el.

A tanulók a központi középiskolai felvételi vizsgát mindig egy szombati napon, 10 órai kezdettel magyarból, majd 11 órai kezdettel matematikából 45-45 perc időtartam alatt oldják meg. A matematika feladatsor tíz feladatot tartalmaz, amelyet a tanulók számológép használata nélkül oldanak meg. A maximálisan elérhető pontszám 50.

A vizsgált matematikai felvételi feladatsort 2014. január 18-án, Magyarországon 51 100 tanuló, az összes nyolcadik osztályos 59 %-a írta meg. Így ez a vizsgált populáció alapján országos szintű nagymintás mérés. Azok az általános iskolás korú gyermekek oldották meg ezt a feladatsort, akik olyan középiskolákba (gimnáziumok többsége és bizonyos szakközépiskolák) szerettek volna továbbtanulni, amelyek előírják bemeneti követelményként a felvételi vizsgát matematikából és magyar nyelvből. (A szakközépiskolák többsége és a szakiskolák nem kérnek ilyen felvételi vizsgát a beiskolázáshoz.) Minden résztvevő motivált a jó eredmény elérésében, mert a fő cél, a kiválasztott középiskolába való bejutás egyik feltétele a matematika feladatsor minél jobb teljesítése.

A komplex mérés középpontjában a matematikai tantárgyi tudás és a matematika tantárgy keretében elsajátított konkrét készségek állnak (Oktatási Hivatal 2014a, 2016). A feladatok megoldása a tanult ismeretek szokatlan mozgósítását, újszerű alkalmazását is igényli, ezáltal a kreativitásnak is teret ad. Ez a matematikai tudásszint mérés a matematikai alapkészségeket, a matematikai tudást, a matematikai kompetenciákat és a matematikai szövegesfeladat- és problémamegoldást egyaránt vizsgálja (lásd 2.4.3 fejezet). A teszt alapvető célkitűzése a tanulók differenciálása matematikai teljesítményük szerint, ami alapját képezi a középiskolai felvételi tanulói rangsoroknak. Az értékelési funkció alapján leginkább diagnosztikus (helyzetfeltáró), azonban szummatív is, mert az általános iskolai matematika tantárgy kimeneti tantervi követelményeit méri (lásd 2.4.2 fejezet).

Az adatfelvétel objektivitását az biztosítja, hogy nem abban az általános iskolában történik a felmérés, ahol tanulnak, hanem kijelölt középiskolákból választhatnak. Az

értékelés objektivitását az biztosítja, hogy a javítást azok a középiskolai tanárok végzik, ahol megírták a feladatsort, a központi javítókulcs alapján. A kijavított feladatlapokba betekintést biztosítanak a tanulók és szüleik számára.

A kutatáshoz a felvételi eredményeket tartalmazó adatbázist az Oktatási Hivatal (2014b) bocsátotta rendelkezésünkre. Ebben a tanulók a személyiségi jogok miatt kódokkal szerepelnek, azonban iskolájuk alapján kiszűrhetők. Az adatbázis többek között tartalmazza a tanulók elért pontszámait feladatonként és ítemenként. Ez az adatbázis teszi lehetővé azt is, hogy a korábban említett K1 nem sakkozói csoportot kiszűrjük.

A feladatok tartalmi jellemzői, vizsgált kompetenciák

A feladatok közműveltségi tartalom szerinti besorolását a Nemzeti Alaptanterv alapján végeztük el (3. táblázat). A NAT a táblázatban szereplő témaköröket részletesebben is kifejti (1. függelék). A feladatok kategorizálásánál ezeket is figyelembe vettük.

NAT 2012 közműveltségi tartalmak matematika 5-8. osztály	A 2014. évi matematika felvételi feladatsorban való előfordulásuk
1. Gondolkodási módszerek, halmazok, matematikai logika, kombinatorika, gráfok (1.1 Halmazok 1.2 Matematikai logika 1.3 Kombinatorika)	A témakörön belül az egyszerű matematikai szöveg értelmezése az egész feladatsort jellemzi. A halmazba rendezés adott szempontok alapján a 6. feladatban, definíció kimondása az 5. feladatban, kombinatorikai ismeretek (sorbarendezés az összes eset megadásával) pedig a 3. feladatban fordul elő.
2. Számelmélet, algebra (2.1 Számok, mérés, mértékegységek 2.2 Műveletek 2.3 Számelméleti ismeretek 2.4 Algebrai kifejezések 2.5 Hatvány, gyök, logaritmus 2.6 Egyenletek, egyenlőtlenségek, egyenletrendszerek)	A 2, 9, 10. feladat a számok, mérés, mértékegységek, az 1, 2, 4, 5, 8, 9, 10. feladat a műveletek, a 4, 8, 9. feladat a százalékszámítás, a 6. feladat számelméleti és hatványozási ismeretek tudását, a 8. feladat az egyenletek ismeretét feltételezi.
3. Geometria (3.1 A tér elemei 3.2 Síkbeli alakzatok 3.3 Térbeli alakzatok 3.4 Transzformációk 3.5 Szerkesztés 3.6 koordináta-geometria 3.7 Kerület, terület 3.8 Térfogat, felszín)	A tér elemei az 5., a síkbeli alakzatok az 5. és a 7., a térbeli alakzatok a 9., a transzformációk a 7., a koordináta-geometria a 7., a térfogatszámítás készség szintű alkalmazása pedig a 9. feladatban szükséges.

4. Függvények, az analízis elemei (4.1 Sorozatok 4.2 Függvények megadása, ábrázolása 4.3 Függvények jellemzése)	4. feladat (grafikon leolvasása)
1. Statisztika, valószínűség (5.1 Statisztika 5.2 A valószínűség-számítás elemei)	4. feladat (átlag kiszámítása)
2. Tudománytörténeti és matematikai érdekességek, neves matematikusok	10. feladat

3. táblázat A feladatok közműveltségi tartalom szerinti besorolása

A táblázat jól mutatja, hogy a tíz feladat a Nemzeti Alaptantervben megfogalmazott közműveltségi tartalmak nagy részét átfogja matematikából, ezáltal egy széles körű tudást mér.

A feladatok tartalmi részén túl a megoldásukhoz szükséges matematikai kompetenciákat is vizsgáljuk. Ezek készség- és képesség-komponenseit Vidákovich intelligencia faktoranalízisét követve (lásd: 2.2.4. fejezet) kategorizáljuk. Ehhez kiválasztunk a feladatsor alapján releváns 11 kompetenciaterületet, melyekhez hozzárendeljük az egyes feladatok megfelelő itemeit. Az egyes kompetenciaterületekhez a megfelelő itemeknél elért pontszámok összegzésével egy-egy pontértéket rendelünk.

A legtöbb feladat számolási készséget mér (számológépet nem lehetett használni). Ezen mutatjuk be, hogyan különítjük el az adott feladatokon belül a vizsgált kompetenciaterületet. Az 1. és a 2. feladat esetében az elért pontszámot, a 4-5-10. feladat esetében a megjelölt itemekre 1 vagy 0 pontot számolunk, a 8. és a 9. feladat is mér számolási készséget, azonban itt nem különíthető el egyértelműen, ezért nem rendelünk hozzá pontszámot.

A számolási készség területén elérhető pontszámot a 4. táblázat tartalmazza:

Feladat	1.	2.					4.			5.			10.	Összesen
Item	a	a	b	c	d	b	d	f	a	b	c	b	e	
Pontszám	4	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	16

4. táblázat A számolási készség kompetenciaterülethez rendelt pontszám kiszámításának módja

Hasonlóan járunk el a többi kompetenciaterület esetében is, előfordulásukat az 5. táblázat tartalmazza.

	<i>Számolási készség</i>	<i>Mértékegység-váltás</i>	<i>Mennyiségi következtetés</i>	<i>Kombinatívítás (rendszerzés)</i>	<i>Ábrázolás, prezentáció</i>	<i>Rész-egész észlelés</i>	<i>Érvelés, bizonyítás</i>	<i>Emlékezet, fogalomismeret</i>	<i>Térítés, térbeli viszonyok</i>	<i>Modellalkotás, probléma-prezentáció</i>	<i>Probléma-érzékenység</i>
Ebben a feladatban illetve itemben szerepel	1a	2abcd	2abcd	3a	4a	5abc	5abcd	5d	7*	8*	10*
	2abcd		4ce		5abc	8a	8a	6abcd	9*		
	4bdf		8a			9a	9a	7**			
	5abc		10acd				10abcd				
	10be										
Elérhető pontszám	16	4	15	5	4	14	21	7	11	6	5

5. táblázat A vizsgált matematikai kompetenciaterületek előfordulása a felvételi feladatsorban

A besorolást több éves oktatási tapasztalataink alapján végeztük el, de ez szükségszerűen tartalmazhat néhány szubjektív elemet is.

* az elért pontszám, ha az legalább 4

** 1 pont, ha az elért pontszám nullától különböző

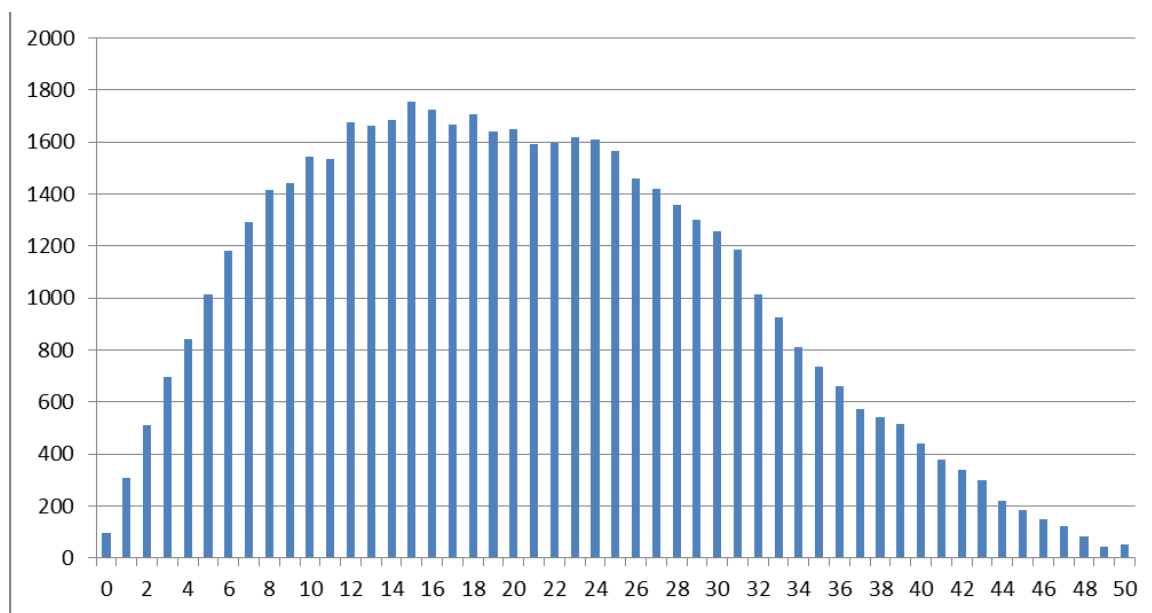
4.2.3 Eredmények

Az első vizsgálataink az átlagok összehasonlítására vonatkoznak országos és egy nem sakkozói csoport viszonylatában. Második lépésben tartalmi és kompetenciaterületi vizsgálatokat végzünk.

Az átlageredmények elemzése

Statisztikai vizsgálataink kiindulási lépése annak a feltárása, hogy a sakkozói csoport milyen eredményeket ért el a 2014. évi matematika felvételi teszten az országos eredményekhez képest. Az országos eredmények feldolgozását Missetáné és Birkás végezte el (Missetáné, Birkás 2016). Ennek segítségével képet kaphatunk arról, hogy az alapfokú oktatás lezárásakor - amely egyben a középfokú tanulmányok bemenetét is jelenti, ezáltal egy hidat képez az iskolatípusok között - milyen volt a tanulók teljesítménye a 2014. évben ezen a mérésen matematikából Magyarországon. Összehasonlító elemzéseinkhez az említett cikkben közölt adatokat, táblázatokat is felhasználjuk.

Az országos eredmények gyakoriságát tartalmazó grafikon a 17. ábrán látható. Ez a nagy elemszámú minta közelítőleg normális eloszlásúnak tekinthető.



17. ábra Az országos eredmények gyakorisága

A továbbiakban elhelyezzük a sakkozói csoport teljesítményét az országos eredmények viszonylatában. Az összehasonlításhoz szükséges adatokat a 6. táblázat tartalmazza.

	<i>összes</i>	<i>sakkozók</i>
<i>létszám</i>	51080	20
<i>átlagpontszám</i>	20,319	33,000
<i>szórás</i>	10,508	7,416

6. táblázat Az országos és a sakkozói létszám, az elért pontszámok átlaga és szórása

A fentiek szerint a sakkozói csoport az országos átlagnál lényegesen jobb eredményt ért el a matematika felvételi vizsgán.

A továbbiakban a sakkozói csoport teljesítményét a korábban bemutatott K1 nem sakkozói csoport teljesítményével hasonlítjuk össze átlagaik alapján.

	<i>sakkozók</i>	<i>K1</i>
<i>létszám</i>	20	37
<i>átlagpontszám</i>	33,000	21,595
<i>korrigált szórás</i>	7,609	8,713

7. táblázat A csoportok létszáma, átlaga és a korrigált szórás értékei

A fentiek szerint a sakkozói csoport a K1 csoport átlagánál lényegesen jobb eredményt ért el.

Annak érdekében, hogy körülbelül azonos képességű és azonos létszámú csoportokat tudjunk összehasonlítani, a K1 csoport 37 tanulója közül kiszűrjük a legjobb eredményt elérő 20 főt (8. táblázat).

	<i>sakkozók</i>	<i>módosított K1</i>
<i>létszám</i>	20	20
<i>átlagpontszám</i>	33,000	27,750
<i>korrigált szórás</i>	7,609	5,466

8. táblázat A csoportok létszáma, átlaga és a korrigált szórás értékei

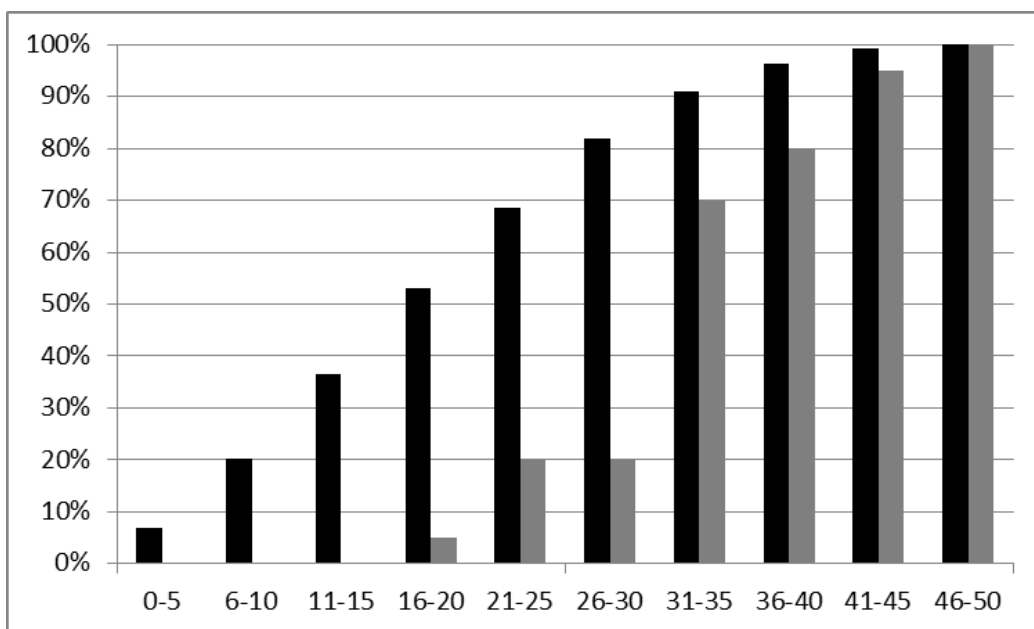
A fentiek szerint a sakkozói csoport a módosított K1 csoport átlagánál is jobb eredményt ért el. A módosított K1 csoport tanulói közel ugyanolyan felkészítésben részesültek matematikából a felvételi vizsgára, mint a kísérleti csoport, matematika átlagukban nagyon kis eltérés mutatkozott a felvételi vizsga idején, ezért a különbség okaként a sakkoktatás valószínűsíthető.

Tartalmi és kompetenciaterületek szerinti vizsgálatok

További vizsgálataink arra irányulnak, hogy mely területeken értek el jobb eredményt a kísérleti sakkozói csoport tanulói. Ennek megválaszolásához statisztikai módszerekkel további kvantitatív elemzéseket végzünk. Az országos adatbázis lehetősége ad tartalmi és kompetenciaterületek szerinti összehasonlításokra is.

A tanulók által elért pontszámokat tíz intervallumba soroltuk (0-5, 6-10, 11-15, 16-20, 21-25, 26-30, 31-35, 36-40, 41-45, 46-50).

Elkészítettük a kumulált relatív gyakoriság hisztogramját (18. ábra).



18. ábra A kumulált relatív gyakoriság hisztogramja

Ezen a grafikonon és a továbbiakban is sötétszürkével jelöljük az országos adatokat, világosszürkével pedig a sakkozók adatait.

A diagramról leolvasható, hogy országosan a tanulók 1/5 része az első két intervallumba esik, azaz ők maximum 10 pontot értek el. Az országos teljesítmény alapján ebben az évben a tanulók több mint 2/3 része az első 5 intervallumba került, tehát a teljesítményük a vizsgált matematikai teszt alapján maximum az 50%-ot érte el. Ez is megerősíti, hogy az elvárt és a megvalósult tanterv között nagy az eltérés, ami összhangban van ennek a korosztálynak az országos és nemzetközi méréseken nyújtott teljesítményével. (lásd 2.4.3 fejezet). Ugyanakkor a sakkozói csoport 1/5 része az első 6 intervallumba tartozik, azaz 4/5 részük 30 pont felett teljesített.

Elvégezzük feladatonként is az elemi statisztikai vizsgálatokat (átlag, medián, módusz), és összehasonlítjuk az országos eredményeket (**O**) a sakkozói csoport (**S**) eredményeivel (9. táblázat).

<i>Feladat sorszáma</i>	<i>Elérhető pontszám</i>	<i>Az elért pontszámok átlaga százalékban</i>		<i>Medián</i>		<i>Módusz</i>	
		O	S	O	S	O	S
1.	4	48,60	83,75	2	4	0	4
2.	4	62,56	90,00	3	4	4	4
3.	5	63,18	84,00	3	5	5	5
4.	6	67,88	90,83	4	6	6	6
5.	5	43,63	82,00	2	5	0	5
6.	4	72,71	86,25	3	4	4	4
7.	6	21,68	40,83	1	2	0	2
8.	6	12,91	55,83	0	5	0	6
9.	5	13,56	30,00	0	1	0	0
10.	5	15,97	31,00	0	2	0	2
össz.	50	40,64	66,00	20	32,5	15	32

9. táblázat Az országos (O) és a sakkozói csoport (S) átlaga, a medián és a módusz értékek feladatonként

Országosan a tanulók teljesítményének átlaga 40,64%, a sakkozóknál 66% volt. A leggyakrabban előforduló pontszám országosan a 15, a sakkozóknál pedig a 32 volt. Érdeemes megemlíteni, hogy a 10 feladatból 6-nál, köztük az utolsó 4-nél, a nulla pontszám szerepel leggyakrabban az országos adatoknál. A sakkozóknál csak a 9. feladatban fordul ez elő. Árnyalja a képet, hogy az időtényező is szerepet játszott az utolsó feladatokban elért teljesítményekben. Aki nem tudott jól gazdálkodni az idővel,

mert a többi (esetleg könnyebbnek ítélt) feladat megoldása is sok időt vett igénybe, ezekkel a feladatokkal már nem tudott foglalkozni a rendelkezésre álló 45 perc alatt. A sakkozói csoport minden tanulója (saját elmondásuk szerint) be tudta fejezni a feladatokat, többeknek még az átnézésükre, ellenőrzésükre is jutott ideje.

Most azt vizsgáljuk, hogy mely matematikai tartalmakban és milyen matematikai kompetenciaterületeken értek el jobb eredményt a sakkozók.

A 9. táblázat adatai alapján kiválasztjuk azt a három feladatot, amelyeknél a legnagyobb eltérések mutatkoznak. Ezek az 1., 5. és 8. feladatok, itt legalább 35%-os eltérés volt az elért pontszámok átlagaiban, a medián értékében legalább 2 és a módusz értékekben legalább 4 pont volt a különbség. Mivel a három feladat közül csupán egy szerepel a teszt végén, úgy tűnik, hogy nem csak az idő jó vagy rossz beosztása okozhatja az eltérést. Ezeket a feladatokat elemezzük tartalmi szempontok alapján és vizsgáljuk a feladatok megoldásához szükséges matematikai kompetenciaterületeket.

1. Az alábbi ábrán mindegyik nyíl fölé egy-egy alpműveletet (összeadást, kivonást, szorzást, osztást) írtunk. A nyíl fölé írt műveletet azzal a számmal kell elvégezned, amelyiktől a nyíl elindul. Az elvégzett művelet eredménye az a szám lesz, amelyre a nyíl mutat.

Az első művelet esetén: $\frac{2}{5} \cdot 2 = \frac{4}{5}$.

Végezd el a nyilakon jelölt műveleteket, és az eredményeket írd be a pontozott vonalakra!

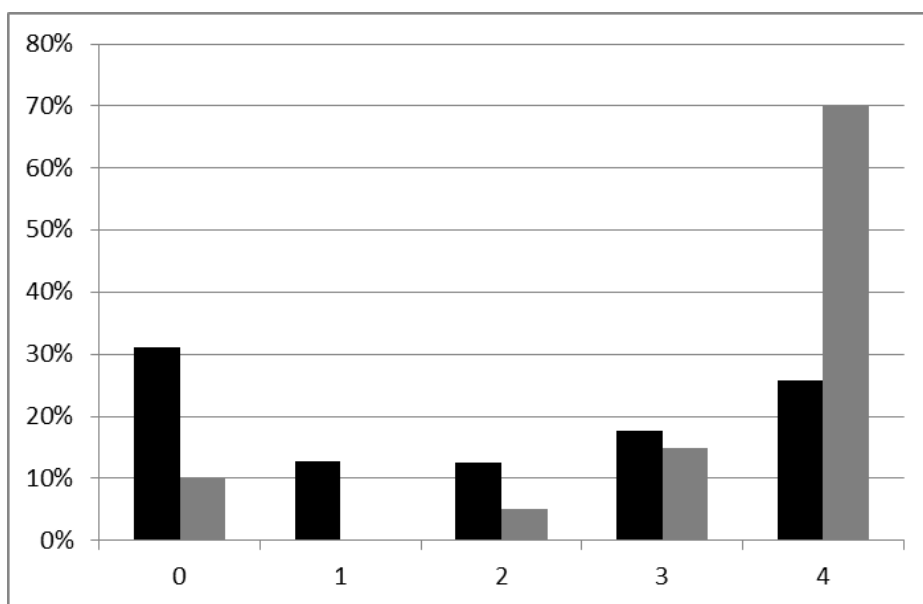
$$\frac{2}{5} \xrightarrow{\cdot 2} \frac{4}{5} \xrightarrow{+1,6} \dots\dots\dots \xrightarrow{:3} \dots\dots\dots \xrightarrow{-2} \dots\dots\dots \xrightarrow{+\frac{3}{2}} \dots\dots\dots$$

19. ábra A felvételi feladatsor 1. feladata

Az 1. feladat a 2014-ben érvényben lévő Nemzeti Alaptanterv (5-8. osztály) alapján a közműveltségi tartalom szerint az alábbi témakörökbe sorolható (lásd 3. táblázat):

- Gondolkodási módszerek, halmazok, matematikai logika, kombinatorika, gráfok (matematikai tartalmú szöveg értelmezése)
- Számelmélet, algebra (alpműveletek racionális számokkal)

Az általunk vizsgált matematikai kompetenciaterületek (5. táblázat) közül a *Számolási készséget* igényli a feladat megoldása. Bár a feladat a *Rész-egész észlelést* és a *Probléma-érzékenységet* is igényli, az elért pontszámból ezek meglétére nem tudunk következtetni. A 20. ábra grafikonja az elért pontszámokat mutatja az 1. feladatban.



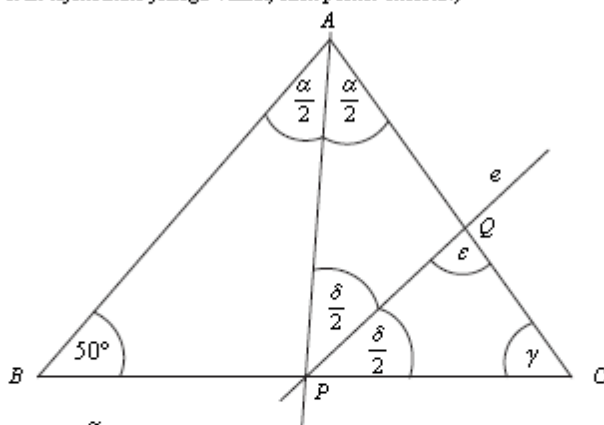
20. ábra Az elért pontszámok eloszlása az 1. feladatban

Jól látható, hogy az elért pontszámok eloszlása az országos adatok esetében nem normális. A két szélső érték gyakorisága igen magas. Tehát ezt a feladatot nagyon sokan egyáltalán nem tudták megoldani és sokan hibátlan megoldást adtak. A racionális számokkal való alapműveletek végzése az általános iskola végére már rutinfeladatokká kell(ene), hogy váljon. A képet egy kicsit árnyalja a feladat megfogalmazása (egyik feladatrészt végeredménye a másik feladatrészt kiindulási adata). Előfordult, hogy aki nem tudta megoldani az első lépést, már nem foglalkozott tovább a feladattal, pedig abban az esetben is adható részpontszám, ha a hibás eredménnyel a továbbiakban jól számol. A sakkozók esetében a teljes megoldottság igen magas. (Ez a tapasztalatunk összhangban van Barrett és Fish (2011) azon megállapításával, hogy a sakk a pontos számolást, a számolási készséget fejleszti.) A sakkozó csoporton belül az amatőr szinten versenyzők (VS) itt 100%-os eredményt értek el.

5. Az ábrán vázolt ABC háromszögben a B csúcsnál lévő belső szög nagysága 50° . Az A csúcsból induló belső szögfelező egyenes a BC oldalt a P pontban metszi úgy, hogy $\delta = 80^\circ$. Az e egyenes a δ szög szögfelezője.

Határozd meg az ábrán szereplő $\frac{\alpha}{2}$, γ és ϵ szög nagyságát, majd egészítsd ki a CPQ háromszögre vonatkozó állítást!

(Az ábra csak tájékoztató jellegű vázlat, nem pontos méretű.)



- Mekkora az $\frac{\alpha}{2}$ szög nagysága?
- Mekkora a γ szög nagysága?
- Mekkora a ϵ szög nagysága?
- Számításaid alapján egészítsd ki az alábbi mondatot úgy, hogy igaz legyen!

A CPQ háromszög háromszög, mert

.....

21. ábra A felvételi feladatsor 5. feladata

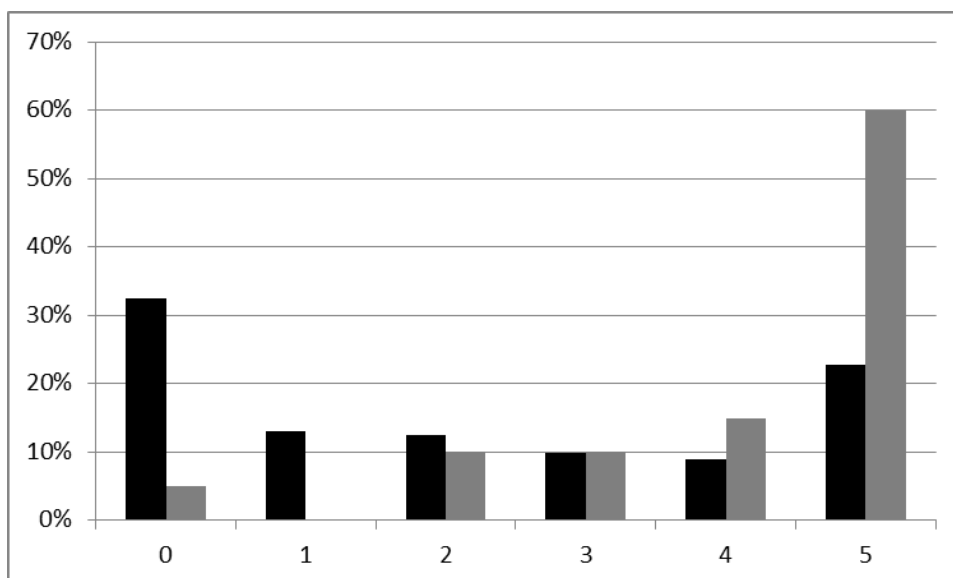
Az 5. feladat a 2014-ben érvényben lévő Nemzeti Alaptanterv (5-8. osztály) alapján a közműveltségi tartalom szerint az alábbi témakörökbe sorolható (lásd 3. táblázat).

- *Gondolkodási módszerek, halmazok, matematikai logika, kombinatorika, gráfok* (matematikai tartalmú szöveg értelmezése, definíció kimondása: egyenlő szárú háromszög, hegyesszögű háromszög)
- *Számelmélet, algebra* (alpműveletek racionális számokkal)
- *Geometria* (szögtartomány, háromszögek, osztályozásuk, háromszög belső szögeinek összege, az egyenlő szárú háromszög tulajdonságainak alkalmazása: alapon fekvő szögek egyenlők)

Az általunk vizsgált matematikai kompetenciaterületek (5. táblázat) közül a feladat megoldása az alábbiakat igényli: *Számolási készség; Ábrázolás, prezentáció; Rész-egész észlelés; Érvelés, bizonyítás; Emlékezet, fogalomismeret.*

A megoldás a háromszöggel kapcsolatos összefüggések ismeretét és alkalmazását igényli. Ilyen típusú feladatok szerepeltek a korábbi feladatsorokban is, azonban nem tekinthetők egyértelműen rutinfeladatoknak, mert a megoldás a tanult sémák megszokottól eltérő alkalmazását, átstrukturálását feltételezi. A matematikai kompetenciaterületek széles köre szükséges a feladat teljes megoldásához.

Ez a geometriai feladat országos szinten nagyon differenciálta a tanulókat (22. ábra).



22. ábra Az elért pontszámok eloszlása az 5. feladatban

Itt is megfigyelhető, hogy ezt a feladatot a sakkozók közül sokan (60%) oldották meg hibátlanul. Ez jelentős különbséget (több, mint 35 %) mutat az országos eredményekhez képest.

8.	A nekeresdi piacon 12 kg első osztályú és 8 kg másodosztályú almát vásároltunk. A másodosztályú alma kilogrammonkénti ára az első osztályú alma kilogrammonkénti árának 75%-a volt. Összesen 4176 tallért fizettünk. Hány tallér az első osztályú és a másodosztályú alma kilogrammonkénti ára? Írd le a számolás menetét is! Az első osztályú kilogrammonkénti ára: tallér. A másodosztályú alma kilogrammonkénti ára: tallér.	<table border="1"> <tr> <td style="width: 10px; height: 15px;">a</td> <td style="width: 10px; height: 15px;"></td> </tr> </table>	a	
a				

23. ábra A felvételi feladatsor 8. feladata

A 8. feladat a 2014-ben érvényben lévő Nemzeti Alaptanterv (5-8. osztály) alapján a közműveltségi tartalom szerint az alábbi témakörökbe sorolható (lásd 3. táblázat):

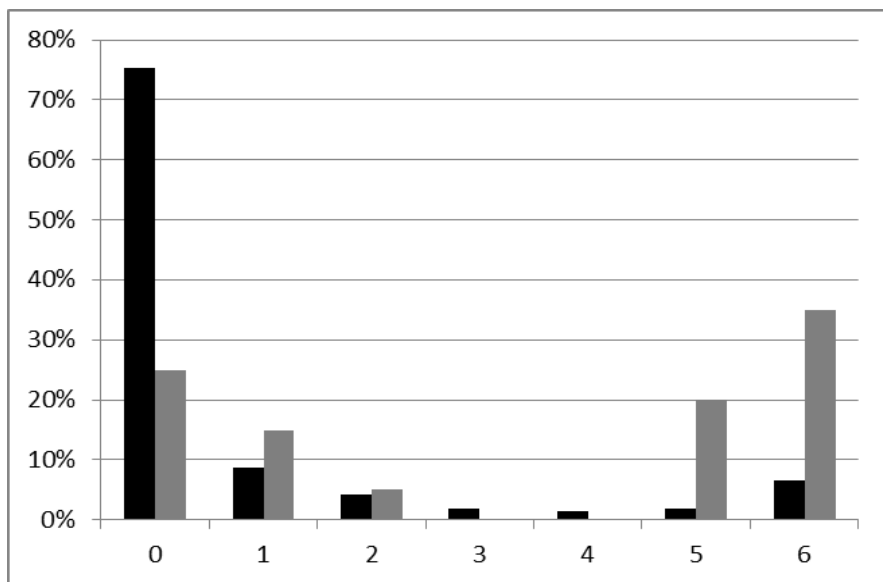
- *Gondolkodási módszerek, halmazok, matematikai logika, kombinatorika, gráfok* (matematikai tartalmú szöveg értelmezése)
- *Számelmélet, algebra* (alpműveletek racionális számokkal, százalékszámítás, elsőfokú egyenlet, egyszerű szöveges feladat megoldása egyenlettel, következtetéssel)

Az általunk vizsgált matematikai kompetenciaterületek (5. táblázat) közül a feladat megoldása az alábbiakat igényli: *Mennyiségi következtetés; Rész-egész észlelés; Érvelés, bizonyítás; Modellalkotás, probléma prezentáció.*

Bár a feladat megoldásához számolási készség is szükséges, azonban a részpontszámok alapján ez egyértelműen nem különíthető el.

Ez a matematikai szöveges feladat olyan megoldást feltételez, amely a feladat szövegéből matematikai modellt (például egyenletet) alkot. Az egyenlet megoldása után a feltett kérdésekre is válaszolni kell, illetve ismertetni kell a gondolkodás menetét is. A feladat más úton is megoldható (például arányos következtetéssel).

A szöveges feladat megoldása országos szinten óriási problémát okozott (23. ábra).



23. ábra Az elért pontszámok eloszlása a 8. feladatban

Országos szinten 75% körüli a 0 pontos teljesítmény. Ez az eredmény arra utal, hogy nagy szakadék van ezen a területen az elvárt és a megvalósult tanterv tekintetében. Mivel ez a feladat a teszt vége felé található, az időtényező itt már szerepet játszhatott.

A sakkozókát ez a feladat két csoportra osztotta: több, mint fele a csoportnak 5-6 pontot ért el. A megoldáshoz szükséges az absztrakció, amit a sakkozói és a matematikai gondolkodás közös elemeinek feltárásakor mutattunk be (lásd 3.2.1 fejezet) és megállapítottuk, hogy mindkettőben fontos szerepet tölt be. Tehát a két terület közötti transzfer is okozhatja ezt az eredményt.

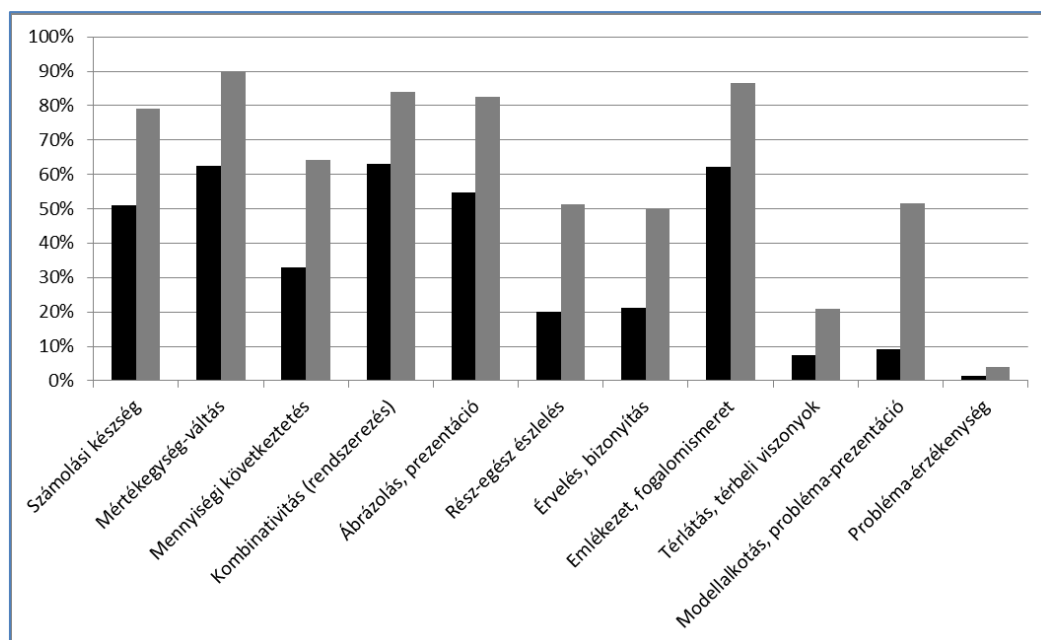
Mindezek alapján megállapíthatjuk, hogy a közműveltségi tartalmak közül a sakkozói csoport az adott felmérésen a *matematikai tartalmú szövegek értelmezése*, a *racióális számokkal végzett alpműveletek*, a *szöveges feladatok megoldása*, valamint a *síkbeli alakzatok* tekintetében teljesített az országos átlagnál lényegesen jobban.

A tartalmi területek vizsgálata után most a 3. táblázatban szereplő 11 matematikai kompetenciaterület szerinti bontásban hasonlítjuk össze az országos eredményeket a sakkozói csoportéval. A 10. táblázatban az egyes területekhez rendelt maximálisan elérhető pontszámok mellett az országos átlag és a sakkozói csoport átlaga szerepel.

	<i>Számolási készség</i>	<i>Mértékegység-váltás</i>	<i>Mennyiségi következtetés</i>	<i>Kombinativitás (rendszerezés)</i>	<i>Ábrázolás, prezentáció</i>	<i>Rész-egész észlelés</i>	<i>Érvelés, bizonyítás</i>	<i>Emlékezet, fogalomismeret</i>	<i>Térítés, térbeli viszonyok</i>	<i>Modellalkotás, probléma- prezentáció</i>	<i>Probléma-érzékenység</i>
Elérhető pontszám	16	4	15	5	4	14	21	7	11	6	5
Országos átlag	50,93%	62,56%	32,83%	63,18%	54,75%	19,90%	21,11%	62,16%	7,39%	9,11%	1,40%
Sakkozók átlaga	79,06%	90,00%	64,33%	84,00%	82,50%	51,43%	50,00%	86,43%	20,91%	51,67%	4,00%

10. táblázat Az országos eredmények és a sakkozók eredményei 11 matematikai kompetenciaterület szerinti bontásban

A 24. ábrán a vizsgált kompetenciaterületeken elért pontszámok százalékos eloszlását grafikonon is szemléltetjük.



24. ábra A teljesítmények eloszlása vizsgált kompetenciaterületek szerint

A legmagasabb százalékos eredményt mindkét csoporton belül a *Mértékegység váltás*; a *Kombinatívitas (rendszerzés)* és az *Emlékezet, fogalomismeret* területén figyelhetjük meg. Ezek a kompetenciák a rutinfeladatok megoldásaihoz is szükségesek, így tanórán is rendszeresen fejleszthetők.

Jól látható, hogy a sakkozói csoport tanulói mind a tizenegy kiválasztott kompetenciaterületen jobbak voltak az országos átlagnál. Kiemelkedő a *Modellalkotás, probléma-prezentáció*ban nyújtott teljesítményük. (A korábban bemutatott 8. feladat megoldása feltételezi ezt.) A legnagyobb mértékű eltérés a két csoport között itt figyelhető meg. Ez a kompetencia szükséges a sikeres problémamegoldáshoz. Így a fenti eredmény megerősíti Trinchero (2013) és Kazemi et al. (2012) a 2.3 fejezetben tárgyalt azon megállapításait, hogy a sakk tréning mérhető pozitív hatással van a matematikai problémamegoldásra. A *Mennyiségi következtetés*; a *Rész-egész észlelés*; az *Érvelés, bizonyítás* és a *Térlátás, térbeli viszonyok* területén is sokkal jobb eredményt értek el a sakkozók. Meg kell említenünk, hogy az általunk kidolgozott módszerrel nem sikerült a tanulók *Probléma-érzékenysége*ről érdemi információt szerezni. Bár ez a kompetencia minden feladat megoldásához szükséges volt, azt az itemek alapján nem tudtuk számszerűsíteni (kivéve a 10. feladatot).

4.2.4 Következtetések

Az előző fejezetben bemutatott eredmények alapján az alábbi következtetések vonhatók le. A sakkozói csoport a 2014. évi matematika felvételi teszten az országos eredményekhez képest jelentősen jobb eredményt ért el. A nem sakkozói csoporttal (K1) való összehasonlítás esetén is megállapítottuk, az átlagok különbségét a sakkozók javára. Feltételezésünk szerint ez a sakkoktatás hatására következett be. A K1 csoport esetében, amely nagyon hasonló matematika felkészítésben részesült, tovább javítottuk a feltételeket. Kiszűrtük a legjobb húsz eredményt elérő tanulót és így is összehasonlítottuk az átlagokat. Ebben az esetben is jobb eredményt értek el a sakkozók.

Országosan a tanulók 1/5 része maximum 10 pontot ért el, és a tanulók több mint 2/3 része az első 5 intervallumba került, tehát a teljesítményük a vizsgált matematikai teszt alapján maximum az 50%-ot érte el. Ugyanakkor a sakkozói csoport 4/5 része 30 pont felett teljesített. Országosan a tanulók teljesítményének átlaga 40,64%, a sakkozóknál 66% volt. A leggyakrabban előforduló pontszám országosan a 15, a sakkozóknál pedig a 32 volt.

A H1 hipotézisünk az előbbieik alapján igazolást nyert, mert a sakkoktatásban részesült tanulók teljesítménye jobb évfolyamtársaikhoz képest a felvételi teszten.

Érdemes megemlíteni, hogy a 10 feladatból 6-nál, köztük az utolsó 4-nél, a nulla pontszám szerepel leggyakrabban az országos adatoknál. A sakkozónál csak a 9. feladatban fordul ez elő. Árnyalja a képet, hogy az időtényező is szerepet játszott az utolsó feladatokban elért teljesítményekben. Aki nem tudott jól gazdálkodni az idővel, mert a többi (esetleg könnyebbnek ítélt) feladat megoldása is sok időt vett igénybe, ezekkel a feladatokkal már nem tudott foglalkozni a rendelkezésre álló 45 perc alatt. A sakkozói csoport minden tanulója (saját elmondásuk szerint) be tudta fejezni a feladatokat, többeknek még az átnézésükre, ellenőrzésükre is jutott ideje.

A közműveltségi tartalmak közül a sakkozói csoport az adott felmérésen a *matematikai tartalmú szövegek értelmezése*, a *racióális számokkal végzett alpműveletek*, a szöveges feladatok megoldása, valamint a *síkbeli alakzatok* tekintetében teljesített az országos átlagnál lényegesen jobban.

A H2 hipotézisünket ez részben megerősítette, mert közműveltségi tartalom alapján a sakkozói csoport a racionális számokkal való alpműveletek (*Számok, műveletek*), illetve a síkbeli alakzatok (*Geometria*) témakörből való feladatok esetén nyújtott lényegesen jobb eredményt.

A H2 hipotézisük második része szerint, hogy a *Számolási készség*, *Kombinatívitas*, *Térlátás*, *térbeli viszonyok* kompetenciaterületeken nyújtanak lényegesen jobb eredményt a sakkozók, szintén részben igazolódott.

A tizenegy kiválasztott kompetenciaterület közül a legmagasabb százalékos eredményt mindkét csoporton belül a *Mértékegység váltás*; a *Kombinatívitas (rendszerzés)* és az *Emlékezet, fogalomismeret* területén figyelhettük meg. Ezek a kompetenciák a rutinfeladatok megoldásaihoz is szükségesek, így tanórán is rendszeresen fejleszthetők.

Megállapítottuk, hogy a sakkozói csoport tanulói minden kiválasztott kompetenciaterületen jobbak voltak az országos átlagnál. Kiemelkedő a *Modellalkotás, probléma-prezentációban* nyújtott teljesítményük. (A korábban bemutatott 8. feladat megoldása feltételezi ezt.) A legnagyobb mértékű eltérés a két csoport között itt figyelhető meg. Ez a kompetencia szükséges a sikeres problémamegoldáshoz. Így a fenti eredmény megerősíti Trinchero (2013) és Kazemi et al. (2012) a 2.3 fejezetben tárgyalt azon megállapításait, hogy a sakk tréning mérhető pozitív hatással van a matematikai problémamegoldásra. Kísérletünkben a *Mennyiségi következtetés*; a *Rész-egész észlelés*; az *Érvelés, bizonyítás* és a *Térlátás, térbeli viszonyok* területén is sokkal jobbak voltak a sakkozók társaiknál. Meg kell említenünk, hogy az általunk kidolgozott módszerrel nem sikerült a tanulók probléma-érzékenységéről érdemi információt szerezni. Bár ez a

kompetencia minden feladat megoldásához szükséges volt, azt az itemek alapján nem tudtuk számszerűsíteni (kivéve a 10. feladatot).

4.3 A sakkozói csoporton belüli fejlesztés hatásainak vizsgálata

Röviden korábban már említettük, hogy ebben a részben a sakkozói csoportra vonatkozóan egy fejlesztő oktatási kísérletet mutatunk be. Nyolcadik osztályban heti plusz egy óra áll rendelkezésre, a felvételire való felkészítésre. Itt fő cél a tantárgyi tudás és a tanulók metakognitív tudásának fejlesztése. Mivel a tanulók ugyanabban a felkészítésben részesültek a csoporton belül, arra kerestük a választ, hogy a 4. részben bemutatott VS, IS, NS részcsoporthoz ennek hatására hogyan fejlődtek. Kísérletünk célja annak vizsgálata volt, hogy a versenysakkozók esetében a felkészítés hatékonyabb volt-e amatőr sakkozók, illetve csak a sakk alapjait ismerő társaikhoz képest.

4.3.1 Kutatási kérdések, hipotézisek

KK3: Van-e eltérés a metakognitív fejlesztés eredményességében a versenysakkozók, amatőr sakkozók és csak a sakk alapjait ismerő tanulók esetében?

H3: Hipotézisünk szerint a fejlesztés határfoka a versenysakkozók esetében a legnagyobb.

KK4: Mutat-e eltérést a vizsgaszituációban nyújtott teljesítmény a korábbi mérésekhez képest a versenysakkozók, amatőr sakkozók és csak a sakk alapjait ismerő tanulók esetében?

H4: Hipotézisünk szerint a vizsgaszituációban nyújtott teljesítmény a versenysakkozók esetében mutat legnagyobb eltérést.

4.3.2 A kutatás módszertana

A sakkozói csoportból mindenki írt központi középiskolai felvételi vizsgát, az utolsó évben már erre koncentráltak. Nyolcadik osztályban a rendelkezésre álló plusz egy matematika órában az iskolában három diagnosztizáló mérést végeztek (a felvételihez hasonló feladatsorok alapján). A feladatsorokat minden mérést követően részletesen kielemezték. A gyerekek harminc komplett feladatsort oldottak meg összesen (Fazekas, 2005, Oktatási Hivatal 2016) a legtöbbet otthon, szintén időre (45 perc alatt), ezek

javítását önállóan, a megadott javítókulcs alapján végezték el. Ezáltal lehetőségük nyílt a gyerekeknek akár heti bontásban saját egyéni fejlődésük nyomon követésére is. Az ezekben elkövetett hibákat javították csoportosan, illetve személyre szabottan a fejlesztő órákon (itt derültek ki a gyengeségek és erősségek matematikából). Sok megoldási sémára tettek szert, az ún. „típusfeladatok” terén. Főként ezekhez kapcsolódva történt a metakognitív tudásuk fejlesztése. A fejlesztő foglalkozások tapasztalatait folyamatosan gyűjtöttük és a tanulók fejlődési folyamatát 3+1 hasonló szerkezetű tesztel mértük. A bemeneti mérés (1. mérés) szeptember közepén történt. Ezelőtt egyetlen olyan feladatsort oldottak meg a tanulók a tanárral közösen, amely a felvételi feladatsorhoz hasonló. A második mérés decemberben (a téli szünet előtti utolsó órán) történt, a felkészülés záró időszakában. A harmadik mérésre januárban, a téli szünetet követő órán került sor. Tehát a második és a harmadik mérés között a tanulók csak egyénileg gyakorolhattak. Az első három diagnosztizáló mérést az általános iskolában végezték, a feladatsort a matematikát tanító tanár (a szerző) javította. Ezután következett a felvételi vizsga januárban, amelyet a kijelöltek közül szabadon kiválasztott középiskolában (a sakkozói csoportból a többség ugyanazt a helyet választotta) írtak meg a tanulók, ennek a javítását az ott tanító középiskolai matematika tanárok végezték. Ezt a matematika írásbeli feladatsort központilag állították össze, feladatlap formájában kapták meg a gyerekek. Konkrét feladatai csak a vizsga időpontjában derültek ki, országosan mindenki ugyanabban az időpontban írta meg és ugyanannyi (45 perc) időtartamot kapott a példák megoldására.

4.3.3 A fejlesztő foglalkozások bemutatása

A fejlesztés eredményét a következőképpen értékeltük: a mérések eredményeit tanulókra lebontva táblázatokba gyűjtöttük és ezeket összevetettük gyerekenként a saját korábbi eredményekkel, illetve az egyes tanulói részcsoportokat (VS, IS, NS) egymással is összehasonlítottuk.

Az első fejlesztő foglalkozáson szeptemberben a gyerekek a tanárral közösen megoldottak egy feladatsort. A következő órán történt az első iskolai mérés. Ezek után a tanulók a többi feladatsort otthon oldották meg, a foglalkozásokon már csak a megoldások, illetve a megoldáshoz vezető gondolatmenet megbeszélésére került sor. A csoportszintű diszkusszió menete rendszerint a következő volt, amelyet a tanár irányító kérdései alapján mutatunk be.

Tanár: Mennyi lett a végeredmény?

Ez általában két, néha három csoportra bontotta a tanulókat. Az első csoportba azok tartoztak, akiknél helyes volt a végeredmény, a másodikba azok, akiknél helytelen, a harmadikba pedig azok, akik egyáltalán nem oldották meg a feladatot.

Tanár: Hogyan gondolkodtál? Kérlek, mondd el a többieknek!

Erre nagyon sokféle válasz érkezett. Csak néhány ízelítőt szeretnénk bemutatni:

Tanuló1: Hát, kiszámoltam.

Tanuló2: Elszámoltam.

Tanuló3: Nem tudom.

Tanuló4: Ahogy órán szoktuk.

Tanuló5: Apa elmagyarázta.

Tanuló6: Az adott idő alatt nem jutottam el ideig.

Tanuló7: Ez pofonegyszerű volt.

Nagyon kevesen voltak először a tanulók közül, akik a problémamegoldásuk folyamatát el tudták mondani.

Tanár: Kérlek, írd fel a táblára a megoldásodat, és közben magyarázd el a lépéseket is!

Amikor ez nem ment senkinek, akkor a tanár átvette az irányító szerepet és megbeszélték, hogy ki melyik lépésnél akadt el. Helytelen végeredmény esetén is el kellett mondani a gondolatmenetet. Ilyenkor közösen keresték azt a pontot, ahol hiba csúszott a megoldásba. Megkülönböztették, hogy számolási hiba vagy gondolkodási hiba okozta a rossz végeredményt.

Tanár: Van valakinek esetleg más megoldása?

Ezáltal gyönyörű megoldási diszkussziók kerültek elő. Megjegyezzük, hogy mindig voltak olyan tanulók, akik kevésbé szerettek szerepelni, azonban nagyon ügyesen oldották meg a feladatokat. Ők egy olyan társuknak (páros munkaformában) magyarázták el a megoldás menetét, aki nem tudta egyáltalán megoldani vagy rosszul oldotta meg az adott példát.

A bemutatott beszélgetésekből is kiderül, hogy egy adott csoporton belül az egyéni különbségek szembetűnőek lehetnek. A metakognitív tudás feltérképezésével lehetőség nyílik arra, hogy a tanulók egyéni ritmusukban fejlődjenek a tanár, a tanuló, és a tanulóársak együttműködése következtében. A tanulást megkönnyíti a működő példák tanulmányozása, azonban ezt mindig a csoport meglevő szintjéhez kell igazítani. Van, aki a hosszú távú memóriájában még kevés sémát tárol, ezért ezek bővítésére van szüksége. Másoknak azzal van problémája, hogy a sémákkal való megoldásoknak bár birtokában van, de figyelmen kívül hagyja az adott feladatnál fellépő speciális feltételeket. Van, akinek magával a problémamegoldás folyamatával van problémája és nagyon megrémül, ha olyan feladattal találkozik, amihez hasonlót még egyáltalán nem látott. Nekik nagy segítséget nyújt a probléma részekre bontási folyamatának megtanulása, mert ezáltal legalább egy ideig önállóan el tudnak jutni a feladat megoldásában, majd később már azzal is tisztában lesznek, hogy melyik lépés okozza nekik a legnagyobb gondot. A metakognitív tudás fejlesztése, az erősségek, gyengeségek megismerése mindig utat nyit a továbbfejlődéshez.

Hasonló szerkezetű megbeszélést tartottunk a kísérleti sakkozói csoportban a felvételi megírása után is. Ekkor már ismert volt a részletes megoldókulcs is (3. függelék), mi most csak az egyik feladatnál elhangzott párbeszédet szeretnénk bemutatni.

Először egy helytelen, rossz sémára alapuló megoldás:

Tanár: Mennyi lett a végeredmény?

Tanuló1: 2200 m^3

Tanár: Hogyan gondolkodtál? Kérlek, mondd el a többieknek!

Tanuló1: Összeszoroztam az 50, a 20 és a 2,2 m-t.

Tanár: Miért?

Tanuló1: Mert a medence téglatest alakú szokott lenni.

Tanár: De ez a medence mélyül. És mit jelenthetett a negyedik adat?

Tanuló1: Akkor ez nem is téglatest...

Bemutatunk a tanulók által alkalmazott helyes gondolatmeneteket is.

Tanár: Hogyan gondolkodtál? Kérlek, mondd el a többieknek!

Tanuló4: Könnyű volt, mivel ez egy trapéz alapú hasáb, aminek a térfogatát kell kiszámítani.

Tanuló8: Szerintem bontsuk két részre. Az egyik egy téglatest, a másik egy háromszög alapú hasáb, ezek térfogatának kiszámítási módját már tanultuk. Alkalmazzuk a megfelelő képleteket.

Tanuló9: Én átlagoltam a 0,8 és a 2,2 m-t, majd összeszoroztam az 50, a 20 és a 1,5 m-t.

Tanár: Miért?

Tanuló9: Nem tudom.

Tanuló7: Én is így gondolkodtam, mert ekkor átdaraboljuk a trapéz alapú hasábot egy téglatestté, aminek könnyen kiszámíthatjuk a térfogatát. (Tudatos, időmegtakarító szép megoldás.)

Érdemes megjegyezni, hogy a 2014. évi középiskolai matematika feladatsor 9. feladatát országos szinten a tanulók háromnegyede nem tudta megoldani (vagy egyáltalán nem jutott el ideig). A bemutatott beszélgetések alapján látható, hogy a tanulók metakognitív tudása hogyan fejlődhetett az adott időszakban. A „nem tudom”-tól hogyan jutottak el a gondolatmenetük bemutatásához. A gyerekek elmondása alapján a kísérleti csoport minden tagja be tudta fejezni az adott időkeret alatt a feladatsort. A maradék időt a feladatok átnézésére és a számukra nehezebb feladatokon való gondolkodásra használták fel. A feladatok megoldásának sorrendjét minden tanulónál az határozta meg, hogy ismerték saját erősségeiket és gyengeségeiket matematikából.

4.3.4 Eredmények

A megfigyeléseken kívül a továbbiakban a statisztika segítségével is vizsgáljuk a fejlődés mértékét. Az alábbiakban a 11 – 14. táblázatok segítségével bemutatjuk a sakkozói csoport teljesítményét. Minden táblázat tartalmazza a kísérleti csoport tanulóinak azonosítóját, az egyes méréseken elért eredményeket és a 8. osztály év végi kiemelkedő tanulmányi eredményeket. (Az utóbbinál a kitűnő azt jelenti, hogy az adott tanuló minden tantárgyból ötös érdemjegyet szerzett, a jeles pedig, hogy legfeljebb két négyese volt.)

A 11. táblázat a tanulókat a nyolcadik osztály végi tanulmányi eredményük alapján rendezi. (Az elért pontszámokat százalékban adjuk meg.)

<i>azonosító</i>	<i>1. mérés szeptember</i>	<i>2. mérés december</i>	<i>3. mérés január</i>	<i>felvételi eredmény</i>	<i>tanulmányi eredmény</i>
VS2	58	94	86	94	kitűnő
VS3	74	84	86	80	kitűnő
IS2	54	76	82	72	kitűnő
IS8	44	70	84	64	kitűnő
IS5	52	70	62	64	kitűnő
NS5	38	84	72	62	kitűnő
NS2	58	80	76	84	jeles
VS5	44	66	80	70	jeles
IS3	22	68	56	62	jeles
IS1	34	76		84	
NS1	30	54	78	42	
VS4	36	74	60	70	
NS3	50	76	80	64	
IS6	36	76	72	64	
IS9	16	34	64	44	
IS4	34	76	52	44	
VS1	74	82	82	84	
NS4	18	42	76	66	
IS10	46	50	40	38	
IS7	62	70	68	68	

11. táblázat A tanulók sorrendje a 8. osztály végi tanulmányi eredmény alapján

A csoportban a VS-ek közül 2, az IS-ek közül 3, a NS-ek közül 1 tanuló ért el kitűnő eredményt, mindhárom részcsoportból 1-1 tanuló lett jeles.

Az 11. táblázatban is megtalálható első mérés eredménye alapján újra sorba rendeztük a gyerekeket. Ebben az esetben az első 5 között 3 VS, 1 IS és 1 NS szerepel, a kitűnő tanulók közül pedig csak kettő. Érdekes, hogy az itt szereplő NS2 később (7. osztály eleje) került az iskolába egy környező településről és óriási szorgalma és akaratereje kellett ahhoz, hogy a hiányosságokat pótolja matematikából.

A matematika felvételi vizsgán elért eredmény alapján újra rendeztük a gyerekeket. A tanulókat az elért pontszámaik csökkenő sorrendje alapján írtuk a 12. táblázatba. (Az elért pontszámokat százalékban adjuk meg.)

<i>azonosító</i>	<i>1. mérés szeptember</i>	<i>2. mérés december</i>	<i>3. mérés január</i>	<i>felvételi eredmény</i>	<i>tanulmányi eredmény</i>
VS2	58	94	86	94	kitűnő
VS1	74	82	82	84	
NS2	58	80	76	84	jeles
IS1	34	76		84	
VS3	74	84	86	80	kitűnő
IS2	54	76	82	72	kitűnő
VS5	44	66	80	70	jeles
VS4	36	74	60	70	
IS7	62	70	68	68	
NS4	18	42	76	66	
IS8	44	70	84	64	kitűnő
NS3	50	76	80	64	
IS6	36	76	72	64	
IS5	52	70	62	64	kitűnő
NS5	38	84	72	62	kitűnő
IS3	22	68	56	62	jeles
IS9	16	34	64	44	
IS4	34	76	52	44	
NS1	30	54	78	42	
IS10	46	50	40	38	

12. táblázat A tanulók sorrendje a matematika felvételi vizsgán elért eredményük alapján

Jól látható, hogy a kiemelkedő tanulmányi eredmény nem jelenti egyértelműen a felvételi nagyon jó megírását: három kitűnő és két jeles tanuló a csoport első felében, három kitűnő és egy jeles a csoport második felében helyezkedik el a matematika felvételin elért teljesítménye alapján. Ez megerősíti Csíkos, Kelemen, Verschaffel (2011) (2.4.3 fejezetben bemutatott) kutatásait: az iskolai eredmény és a tanulók feladat megoldási stratégiáinak használata csak gyenge összefüggést mutat. Szembetűnő a versenysakkozók (VS) nagyon jó szereplése a vizsgaszituációban és a csak sakk alapjait ismerők (NS) teljesítményének csökkenése, akik az utolsó iskolai méréshez képest (ötből négyen) rosszabb százalékos eredményt értek el. Egyetlen tanuló volt a csoportból, aki a bemeneti

méréshez képest rosszabb teljesítményt nyújtott a felvételi vizsgán, tehát elmondhatjuk, hogy a felkészítés hatékony volt.

A továbbiakban azt vizsgáltuk, hogy a metakognitív tudás fejlesztése, a személy szerinti, feladat szerinti és stratégia szerinti tervezés a csoporton belül melyik részcsoporthoz (VS, IS, NS) esetében volt a leghatékonyabb. Ennek kimutatására az egyes tanulók által elért százalékos eredmények arányait használjuk.

A 13. táblázat a tanulókat a **h1** hatásfok alapján rendezi. (Az elért pontszámokat százalékban adjuk meg.)

<i>azonosító</i>	<i>1. mérés</i>	<i>h1</i>	<i>2. és 3. mérés átlaga</i>	<i>h2</i>	<i>felvételi eredmény</i>	<i>tanulmányi eredmény</i>
NS4	18	3,28	59	1,12	66	
IS9	16	3,06	49	0,90	44	
IS3	22	2,82	62	1,00	62	jeles
IS1	34	2,24	76	1,11	84	
NS1	30	2,20	66	0,64	42	
IS6	36	2,06	74	0,86	64	
NS5	38	2,05	78	0,79	62	kitűnő
IS4	34	1,88	64	0,69	44	
VS4	36	1,83	66	1,06	70	
IS8	44	1,75	77	0,83	64	kitűnő
VS5	44	1,66	73	0,96	70	jeles
NS3	50	1,56	78	0,82	64	
VS2	58	1,55	90	1,04	94	kitűnő
IS2	54	1,46	79	0,91	72	kitűnő
NS2	58	1,34	78	1,08	84	jeles
IS5	52	1,27	66	0,97	64	kitűnő
VS3	74	1,15	85	0,94	80	kitűnő
VS1	74	1,11	82	1,02	84	
IS7	62	1,11	69	0,99	68	
IS10	46	0,98	45	0,84	38	

13. táblázat A metakognitív fejlesztés hatásai a felkészülési időszakban

A 13. táblázat 4. oszlopában a 2. és 3. mérés százalékaiknak átlagát írtuk, mivel ez a két mérés elég közeli időpontban (december vége, január eleje) történt. Ezt elosztottuk az 1. mérés százalékos eredményével, így kaptuk a **h1** hatásfokot, majd a felvételin elért százalékos eredményt osztottuk a 2. és 3. mérés átlagának százalékos eredményével, ami a **h2** hatásfokot eredményezte. Így számszerűsítjük a felkészülési időszakban, illetve a felkészülési időszak vége és a felvételi vizsga közötti hatásfokokat. Ennek a segítségével szeretnénk kimutatni a fejlődés mértékét az első és az utolsó mérések, valamint az utolsó mérések és a felvételi között.

A sakkozói csoporton belül az első és az utolsó iskolai mérések között a **h1** hatásfok alapján több mint kétszeres fejlődést 7 tanuló ért el, és ezek között egyetlen versenysakkozó sem szerepel. Az eredmények tehát hipotézisünket a felkészülési időszak alapján nem támasztják alá: a nem versenysakkozók fejlődésének mértéke a felkészülési időszak mérései alapján nagyobb mértékű volt. A gyerekek elmondása szerint ezt az ő esetükben főként az idővel való gazdálkodás megtanulása segítette elő. Valószínű, hogy ezt a versenysakkozók az időre játszott sakk partik segítségével már korábban megtanulták. A képet az is erősen árnyalja, hogy a nem versenysakkozó gyerekek több esetben alacsonyabb teljesítményértékről indultak, így náluk a javulás mértéke értelemszerűen magasabb lehetett. A sakk szakköre járók (IS) között pedig jelentős eltérés mutatkozik: voltak, akik jelentősen és voltak, akik csak nagyon kis mértékben fejlődtek. Az egyéni különbségek okainak feltárására további mérésekre lenne szükség.

A 14. táblázat az egyes tanulókat a **h2** hatásfok alapján rendezi, a felvételi vizsgán, illetve a felkészítés utolsó méréseinél elért eredmények eltérését mutatják. (Az elért pontszámokat százalékban adjuk meg.)

<i>azonosító</i>	<i>1. mérés szeptember</i>	<i>h1</i>	<i>2. és 3. mérés átlaga</i>	<i>h2</i>	<i>felvételi eredmény</i>	<i>tanulmányi eredmény</i>
NS4	18	3,28	59	1,12	66	
IS1	34	2,24	76	1,11	84	
NS2	58	1,34	78	1,08	84	jeles
VS4	36	1,83	66	1,06	70	
VS2	58	1,55	90	1,04	94	kitűnő
VS1	74	1,11	82	1,02	84	
IS3	22	2,82	62	1,00	62	jeles
IS7	62	1,11	69	0,99	68	
IS5	52	1,27	66	0,97	64	kitűnő
VS5	44	1,66	73	0,96	70	jeles
VS3	74	1,15	85	0,94	80	kitűnő
IS2	54	1,46	79	0,91	72	kitűnő
IS9	16	3,06	49	0,90	44	
IS6	36	2,06	74	0,86	64	
IS10	46	0,98	45	0,84	38	
IS8	44	1,75	77	0,83	64	kitűnő
NS3	50	1,56	78	0,82	64	
NS5	38	2,05	78	0,79	62	kitűnő
IS4	34	1,88	64	0,69	44	
NS1	30	2,20	66	0,64	42	

14. táblázat A felkészítés hatásfoka az egyes tanulók esetében

Jól látható, hogy a versenysakkozók többsége a hatásfok alapján a csoport első felébe tartozik és hasonló vagy jobb teljesítményt nyújtottak a matematika felvételi vizsgán, mint a felkészülés záró időszakában. A korábban már említett tanuló (NS2) pedig az iskolaváltás miatt számtalanszor került nehéz helyzetbe hiányosságai következtében, de óriási motivációja és akaraterije a felvételi eredményben is tükröződött, még tovább tudta javítani eredményét. Szembetűnő a többi csak sakk alapjait ismerő tanuló (NS) teljesítménye, ami az utolsó méréshez képest gyengébb. A sakk szakkörre járók (IS) itt is jelentős szóródást mutatnak, ugyanúgy, mint a felkészülési időszak méréseinél.

A fenti táblázat a H4 hipotézisünket alátámasztja: a vizsgaszituációban nyújtott teljesítmény a versenysakkozók esetében mutatja a legnagyobb (pozitív) eltérést.

4.3.5 Következtetések

A matematika tantárgy területén is kialakulhatnak a kezdők-szakértők közti gondolkodásbeli különbségek. A bemutatott beszélgetések alapján látható, hogy a tanulók metakognitív tudása valóban fejlődött a vizsgált időszakban. A „nem tudom”-tól többen eljutottak a gondolatmenetük ismertetéséhez. Míg a bemeneti mérésnél (szeptember) csak kis eltérést mutatott a kísérleti csoport átlaga az országos eredményekhez képest, addig a felvételi vizsgán már 80%-uk az ország legjobb 10% között szerepelt. A szakértői gondolkodás, a metakognitív tudás és az időre játszott sakkjátszmák egyaránt hozzájárulhattak az idő megfelelő beosztásához. Egyetlen tanuló volt a csoportból, aki a bemeneti méréshez képest rosszabb teljesítményt nyújtott a felvételi vizsgán, tehát elmondhatjuk, hogy a felkészítés hatékony volt.

A kiemelkedő tanulmányi eredmény nem jelentette egyértelműen a felvételi nagyon jó megírását. Ez összhangban áll Csikos, Kelemen és Verschaffel (2011) (2.4.3 részben bemutatott) kutatásaival: az iskolai eredmény és a tanulók feladat megoldási stratégiáinak használata csak gyenge összefüggést mutat.

Azt is megvizsgáltuk, hogy a metakognitív tudás fejlesztése, a személy szerinti, feladat szerinti és stratégia szerinti tervezés a csoporton belül melyik részcsoporthoz (VS, IS, NS) esetében volt a leghatékonyabb. Ennek kimutatására az egyes tanulók által elért százalékos eredmények arányait használtuk. A sakkozói csoporton belül az első és az utolsó mérések között a **h1** határfok alapján több mint kétszeres fejlődést 7 tanuló ért el, és ezek között egyetlen versenysakkozó sem szerepelt.

Az eredmények tehát a H3 hipotézisünket a felkészülési időszak alapján nem támasztják alá. A nem versenysakkozók fejlődésének mértéke a felkészülési időszak mérései alapján nagyobb mértékű volt. A gyerekek elmondása szerint ezt az ő esetükben főként az idővel való gazdálkodás megtanulása segítette elő. Valószínű, hogy ezt a versenysakkozók az időre játszott sakk partik segítségével már korábban megtanulták. A képet az is erősen árnyalja, hogy a nem versenysakkozó gyerekek (IS, NS) több esetben alacsonyabb teljesítményértékről indultak, így náluk a javulás mértéke értelemszerűen magasabb lehetett.

Szembevetve a versenysakkozók (VS) nagyon jó szereplése a vizsgaszituációban és a csak a sakk alapjait ismerők (NS) teljesítményének csökkenése, akik az utolsó iskolai méréshez képest (ötből négyen) rosszabb százalékos eredményt értek el. A versenysakkozók mindegyike hasonló vagy jobb teljesítményt nyújtott a matematika

felvételi vizsgán, mint a felkészülés záró időszakában. Ez az eredmény a H4 hipotézisünket alátámasztja: a vizsgaszituációban nyújtott teljesítmény a versenysakkozók esetében mutatja a legnagyobb (pozitív) eltérést.

5. Összefoglalás, eredmények

Ebben a disszertációban a „tudományok királynője” (matematika) és a „királyi játék” (sakk) közötti kapcsolatot vizsgáltuk. A témát két aspektusból közelítettük meg. Egyrészt a sakkoktatás szerepét vizsgáltuk a matematikatanításban, illetve a matematikai gondolkodás specifikumainak megjelenését kerestük a sakkozói gondolkodásban. Másrészt arra kerestük a választ, hogy a sakkoktatásnak van-e szerepe a matematikai problémamegoldás fejlesztésében.

Először azt vizsgáltuk meg, hogy a Nemzeti Alaptanterv matematikai műveltségi területének fejlesztési feladatai közül a *Tájékozódás* hogyan jelenik meg a sakkjátékban. Konkrét példákon keresztül mutattunk rá a *Tér, Idő, Mennyiségi viszonyok* kézzelfogható megjelenésére a sakkban.

Ezen túl a matematikai gondolkodás néhány olyan specifikumát is megvizsgáltuk, amelyek megjelennek a sakkozói gondolkodásában. A matematikai gondolkodás jellemző vonásai közül az alábbiakat emeltük ki:

- az absztrakció állandó használata
- a logikai kvantorok nagy száma,
- a lehetetlenség bizonyítása,
- az egzisztencia-bizonyítás.

Példákkal támasztottuk alá, hogy a matematikai gondolkodásnak ezek a jellemző vonásai egyszerű formában, de megkerülhetetlenül szerepet kapnak a 12-14 éves diákok matematika oktatásában is. Szintén példákon keresztül mutattunk rá arra, hogy ezek az aspektusok ugyancsak egyszerű formában, de fontos szerepet kapnak a sakk oktatásában is.

Ezt követően egy országos felmérés és egy fejlesztő kísérlet segítségével vizsgáltuk a sakkoktatás hatását a matematikai problémamegoldó képességre.

Húsz fős kísérleti csoportunkat 2014-ben középiskolába felvételiző, 14-15 éves tanulók alkották, fiúk-lányok vegyesen. A gyerekek egy Somogy megyei kisváros egyetlen általános iskolájának tanulói, akik hetedik osztálytól csoportbontásban tanulják a matematikát. Azok a diákok kerültek ebbe a csoportba, akik középiskolai felvételi vizsgát szándékoztak tenni. Matematikából normál tanterv szerint haladtak, de nyolcadik

osztályban heti plusz egy órában felvételi előkészítő foglalkozás zajlott. A matematika szakköri órák végén gyakran sakkoztak, ezért a csoport minden tagja megismerte a sakkjáték alapszabályait. Ebben az életkorban már eldől, hogy ki foglalkozik majd profi szinten sakkozással, ők Élő-pontszámmal rendelkeznek. Ez a 20 tanuló kizárólag amatőr szinten sakkozott. Három részcsoportha bontottuk őket.

- Versenysakkozók (VS): Öt olyan tanuló volt, aki elindult közülük megyei szintű amatőr sakkbajnokságon (Diákolimpia), amit 2014. évben rendeztek először Élő-pontszámmal nem rendelkezők (amatőrök) számára. Ezek a tanulók 8. osztályban is versenyeztek.
- Iskolai sakkozók (IS): Tíz olyan tanuló volt, aki szintén járt legalább egy évig sakk szakkörre, de legfeljebb iskolai házibajnokságon szerepelt.
- Sakk szakkörre nem járók (NS): Öt olyan tanuló volt, aki csak a sakk alapjait ismerte, ők nem jártak iskolai keretek között sakk szakkörre, egyáltalán nem versenyeztek, azonban az iskolában ők is sakkoztak (matematika szakkörön).

A pedagógiai vizsgálatainkat két aspektusból közelítettük meg: összehasonlító mérésekkel (országos eredményekkel és egy nem sakkozói csoport eredményével), illetve a csoporton belüli fejlesztő oktatási kísérlet hatásainak kimutatásával.

Pontosabban az alábbi kutatási kérdéseket (KK) vizsgáltuk és az alábbi hipotéziseket (H) állítottuk fel:

KK1: Mutat-e eltérést a sakkozói csoport matematikai problémamegoldó teljesítménye évfolyamtársaikhoz képest?

H1: Hipotézisünk szerint a sakkoktatásban részesült tanulók matematikai problémamegoldó teljesítménye jobb évfolyamtársaikhoz képest.

KK2: Melyek azok a matematikai témakörök, illetve kompetenciaterületek, ahol lényegesen jobb teljesítményt nyújtanak a sakkozók?

H2: Hipotézisünk szerint a Számok, műveletek, Geometria témakörökben, illetve a Számolási készség, Kombinatívitas, Térlátás, térbeli viszonyok kompetenciaterületeken nyújtanak lényegesen jobb teljesítményt a sakkozók.

KK3: Van-e eltérés a metakognitív fejlesztés eredményességében a versenysakkozó, amatőr sakkozó és csak a sakk alapjait ismerő tanulók esetében?

H3: Hipotézisünk szerint a fejlesztés hatásfoka a versenysakkosók esetében a legnagyobb.

KK4: Mutat-e eltérést a vizsgaszituációban nyújtott teljesítmény a korábbi mérésekhez képest a versenysakkosó, amatőr sakkosó és csak a sakk alapjait ismerő tanulók esetében?

H4: Hipotézisünk szerint a vizsgaszituációban nyújtott teljesítmény a versenysakkosók esetében mutat legnagyobb eltérést.

Megállapítottuk, hogy a sakkosói csoport a 2014. évi matematika felvételi teszten jobb eredményt ért el az országos eredményekhez képest.

További összehasonlító vizsgálatainkhoz egy nem sakkosói csoportot is kiszűrtünk az adatbázisból. Egy környező kisváros olyan általános iskolájából választottunk ki tanulókat, akik biztosan nem részesültek iskolai sakkoktatásban, azonban a heti matematika óraszámuk ugyanannyi volt, mint a kísérleti csoport esetében. Ők is normál tanterv szerint haladtak.

A sakkosói csoport a kiválasztott nem sakkosói csoport (K1) átlagánál is jobb eredményt ért el. Ebből a nem sakkosói csoportból kiszűrtük a legjobb húsz eredményt elérő tanulót (módosított K1 csoport). Matematika tantárgyból nyolcadik osztály félévkor, a felvételi vizsga idején a módosított K1 csoport és a sakkosói csoport osztályzatainak átlagában nagyon kis eltérés mutatkozott. Mivel a nem sakkosói csoport tanulói közel ugyanolyan felkészítésben részesültek matematikából a felvételi vizsgára, mint a kísérleti csoport, a különbség okaként a sakkoktatás valószínűsíthető. Ez H1 hipotézisünket alátámasztja.

Azt is megállapítottuk, hogy a közműveltségi tartalmak közül a sakkosói csoport az adott felmérésen a *Matematikai tartalmú szövegek értelmezése*, a *Racionális számokkal végzett alapműveletek*, a *Szöveges feladatok megoldása*, valamint a *Síkbeli alakzatok* tekintetében teljesített az országos átlagnál lényegesen jobban. A tizenegy kiválasztott kompetenciaterület közül a legmagasabb százalékos eredményt mindkét csoporton belül a *Mértékegység váltás*; a *Kombinatívítás (rendszerzés)* és az *Emlékezet, fogalomismeret* területén figyelhettük meg. Ugyanakkor a sakkosói csoport tanulói minden kiválasztott kompetenciaterületen jobbak voltak az országos átlagnál. Kiemelkedő a *Modellalkotás, probléma-prezentációban* nyújtott teljesítményük. A *Mennyiségi következtetés*; a *Rész-egész észlelés*; az *Érvelés, bizonyítás* és a *Térlátás, térbeli viszonyok* területén is sokkal jobbak voltak a sakkosók társaiknál. Meg kell említenünk, hogy az általunk kidolgozott módszerrel nem sikerült a tanulók probléma-

érzékenységről érdemi információt szerezni. A fentiek a H2 hipotézist jórészt alátámasztják.

Azt is megvizsgáltuk, hogy a metakognitív tudás fejlesztése, a személy szerinti, feladat szerinti és stratégia szerinti tervezés a csoporton belül melyik részcsoport (versenysakkozók, sakk szakkörre járók, csak a sakk alapjait ismerők) esetében volt a leghatékonyabb. A sakkozói csoporton belül az első és az utolsó mérések között több mint kétszeres fejlődést 7 tanuló ért el, és ezek között egyetlen versenysakkozó sem szerepelt. Az eredmények tehát a H3 hipotézisünket a felkészülési időszak alapján nem támasztják alá. A nem versenysakkozók fejlődésének mértéke a felkészülési időszak mérései alapján nagyobb mértékű volt. A képet erősen árnyalta, hogy a nem versenysakkozó gyerekek több esetben alacsonyabb teljesítményértékekről indultak, így náluk a javulás mértéke értelemszerűen magasabb lehetett.

Szembetűnő volt a versenysakkozók nagyon jó szereplése a vizsgaszituációban és a csak a sakk alapjait ismerők teljesítményének csökkenése. A versenysakkozók mindegyike hasonló vagy jobb teljesítményt nyújtott a matematika felvételi vizsgán, mint a felkészülés záró időszakában. Ez az eredmény a H4 hipotézisünket alátámasztja: a vizsgaszituációban nyújtott teljesítmény a versenysakkozók esetében mutatja a legnagyobb (pozitív) eltérést.

Ezek alapján megállapítható, hogy vizsgálataink a fenti hipotéziseket jórészt alátámasztották.

Vizsgálataink alapján úgy gondoljuk, hogy a korai sakkoktatás és versenyzés elősegíti a matematikai kompetenciák komplex fejlesztését. A sakk alapfokú oktatásban való bevezetése általános készség- és képességfejlesztő hatásán túl új távlatokat nyithat meg a matematika tanítása során is. A sakk szabályrendszerének alapszintű ismerete már elegendő ahhoz, hogy a gyerekek matematikai ismereteit játékos formában fejlesszük.

6. Summary

In this dissertation we have studied the relations between the “queen of sciences” (mathematics) and the “royal game” (chess). We have approached to topic from two aspects. On the one hand, we have investigated the role of chess education in the teaching of mathematics, and we have looked for features of mathematical understanding in the thinking process of the chess player. On the other hand, we have studied whether chess education has some effects for the development of the mathematical problem solving ability.

First we have studied that how the mathematical contents of *Orientation* from the NAT appears in chess. We have shown concrete examples to illustrate that *Space*, *Time*, *Quantitative relations* appear in chess. After that, we have also investigated some specific features of mathematical understanding, which also appear in the thinking process of the chess player. Among these features we mention the following ones:

- constant use of abstraction,
- large number of logic quantifiers,
- proof of impossibility,
- existence proofs.

We have given concrete examples which show that these specific features in a simple form, but necessarily appear in the mathematical education of students of age 12-14, as well as in chess education.

After that, we have investigated the effects of chess education onto the mathematical problem solving ability. For this we used the database of a national assessment, and the experiences of a development experiment.

The group whose results and development has been recorded was formed by 20 students (boys and girls mixed) of grade 8 (age 14-15) in 2014. The children were the students of the only primary school of a small city of Somogy county, learning mathematics from grade 7 in the same group. Those students were selected to enter this group, who wanted to take an entrance exam to the secondary school. They followed the normal curriculum from mathematics, but in grade 8 there was an extra preparatory class for the entrance

exam, too. All members of the group knew the rules of chess. Some of them attended chess competitions, some of them played chess only at the school, but all of them have taken part in playing chess at the end of the preparatory mathematical classes. We have divided them into three subgroups:

- Competitors (VS): There were five students who took part in county level chess championships (which was first organized for non-rated players in 2014). These students took parts in such competitions at grade 8, too.
- School players (IS): There were ten students, who have attended the chess student circle at least for one year, but who took part only at school chess championships.
- Others (NS): There were five students, who only new the basics of chess. They have not even attended the chess student circle. However, they have also played chess at the end of the preparatory mathematics classes.

Our pedagogical investigation has two main parts: (1) comparison of the results of the experimental group with the national results then with the results of a non-chess-players group; (2) analysis of the developmental process within the experimental group.

We have formulated the following research questions and hypotheses:

Q1: Is there any difference between the mathematical problem solving ability of the group of chess players compared with other groups?

H1: According to our hypothesis, students having chess education have better mathematical problem solving abilities.

Q2: Which are those mathematical fields and competence areas, where chess players perform significantly better?

H2: According to our hypothesis, chess players perform significantly better on the fields Numbers, operations; Geometry and in the competence areas Counting skills; Combinativity; Spatial visualization, spatial orientation.

Q3: Is there any difference between the efficiency of the metacognitive development of chess competitors, amateur chess players and students having only basic chess knowledge?

H3: According to our hypothesis, the efficiency of development is the highest for chess competitors.

Q4: Is there any difference in the performance of chess competitors, amateur chess players and students having only basic chess knowledge, during the preparation and on the test?

H4: According to our hypothesis, the performance on the test is the best in case of chess competitors.

Based upon our results, we have concluded that the chess player group performed better on the national entrance examination test in mathematics in 2014, than the national average.

For comparison, we have chosen a group of non-chess players from a nearby school (K1), as well. They have not got any chess education, but the number of their weekly mathematics classes has been the same as for the group of chess players. The group K1 also took part in an extra preparatory mathematical class a week, but otherwise they followed the normal curriculum.

The chess player group has also performed better than the K1 group on the entrance examination test. From the K1 group, we have taken out 20 students, reaching the best scores on the exam test (modified K1 group). The performance of the chess player group has been better than this modified K1 group, too. Since after the first semester of grade 8, at the time of the entrance exam test, the averages of the marks from mathematics of both groups were similar, and the preparation of the K1 group was also similar to that of the group of chess players, chess education is a candidate to be the main reason behind the difference. This supports our hypothesis H1.

We have also concluded that from the point of view of mathematical contents, the chess player group performed significantly better than the national average on the followings: *Understanding mathematical text, Basic operations with rational numbers, Solving word problems, and Plane figures*. Among the eleven chosen competence areas, the highest scores have been achieved in *Unit conversion, Combinativity (ordering), and Memory, knowledge of notions* in both groups. At the same time, the members of the chess player group performed better than the national average on each competence area. Their performance has been outstanding at *Modeling, problem presentation*, while they performed much better than the others at *Quantitative reasoning; Part-whole perception; Arguing, proving; Visualization, spatial relations*. We have to mention that our method has not been capable to collect information about the problem sensitivity of the students. The above things mostly support hypothesis H2.

We also investigated that the development of the metacognitive knowledge in case of which subgroup of the chess player group proved to be most efficient. Inside the group of chess players, between the first and last measurements, there were seven students with development 100% or larger, and none of them was a chess competitor. That is, our results do not support our *hypothesis H3* in the preparatory period. The development of non-competitors proved to be higher based upon to the measurements in the preparatory period. According to the students, this mainly was caused by learning to use the timeframe more economically. Probably the chess competitors have learned this by the help of playing chess matches with time control before. It is also important to mention that non-competitors (IS, NS) in many cases started from a lower stage, thus in their cases the level of improvement obviously could be larger.

It is an eye-catching phenomenon that chess competitors (VS) performed very well in the exam situation, while those knowing only the basics of chess performed worse - four out of five among them reached worse scores on the exam test than on the last school measurement. All the chess competitors performed similarly or better on the exam task than during the preparatory period. This supports our hypothesis H4: the performance on the exam shows the largest (positive) difference in case of the chess competitors.

Based upon the above things, we may state that our investigations mostly support the above hypotheses.

In the light of our investigations, we think that chess education and competition at an early age helps the complex development of mathematical competencies. The introduction of chess in the primary education, besides its possible general positive effects for developing skills and abilities, may be helpful also in teaching mathematics. Knowing the basic rules of chess can already be sufficient to develop the mathematical knowledge of students in a playful way.

7. Felhasznált irodalom

- [1] Babbie, E. (2000): *A társadalomtudományi kutatás gyakorlata*. Balassi Kiadó, Budapest.
- [2] Barrett D. C., Fish W. W. (2011): *Our move: Using chess to improve math achievement for students who receive special education services*. International Journal of Special Education, 26, 181-193.
- [3] Bart W. M. (2014): On the effect of chess training on scholastic achievement, *Front Psychol.* 5, 762.
- [4] Báthory Zoltán (1992): *Tanulók, iskolák – különbségek*. Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest.
- [5] Bilek István (szerk.) (1990): *Barcza Gedeon élete és játszmái*. Sport Kiadó, Budapest.
- [6] Bruner, J. S. (1974): *Új utak az oktatás elméletéhez*. Gondolat Kiadó, Budapest.
- [7] Chase, W. G. and Simon, H. A. (1973): *Perception in Chess*. Cognitive Psychology 4, no. 1, January 1973, 55–81.
- [8] Chess in the Schools, *Program*. <http://chessintheschools.org/s/index.cfm?SSID=1> (utolsó letöltés: 2016. 08. 31.).
- [9] Chi, M. T., Feltovich, P.J.& Glaser, R. (1981): *Categorization and representation of physics problems by experts and novices*. Cognitive Science 5, 121-152.
- [10] De Corte, E. (1997): *A matematikatanulás és -tanítás kutatásának fő áramlatai és távlatai*. Iskolakultúra 12. sz., 14-29.
- [11] De Corte, E. (2001): *Az iskolai tanulás: a legfrissebb eredmények és a legfontosabb tennivalók*. In: Magyar Pedagógia 101. 4. sz., 413-434.
- [12] Czeglédy István, Orosz Gyuláné, Szalontai Tibor, Szilák Aladárné (2000): *Matematikai tantárgypedagógia*. Bessenyei György Könyvkiadó, Nyíregyháza.
- [13] Csapó Benő (1992): *Kognitív pedagógia*. Akadémiai Kiadó, Budapest.

- [14] Csapó Benő (1996): *Tudásszintfelmérő tesztek*. In: Falus Iván (1996): Bevezetés a pedagógiai kutatás módszereibe, Keraban Könyvkiadó, Budapest.
- [15] Csapó Benő (2001): *A kognitív képességek szerepe a tudás szervezésében*. In: Báthory Zoltán és Falus Iván (szerk.): *Tanulmányok a neveléstudomány köréből*. Osiris Kiadó, Budapest, 270–293.
- [16] Csapó Benő (szerk.) (2002): *Az iskolai tudás* (2. kiadás). Osiris Kiadó, Budapest.
- [17] Csíkos Csaba (2004): *Metakogníció a tanulásban és a tanításban: az EARLI 10. konferenciájának kutatási eredményei*. Iskolakultúra, 2. sz. 3–10.
- [18] Csíkos Csaba (2005): *Metakognícióra alapozott fejlesztő kísérlet 4. osztályos tanulók körében a matematika és az olvasás területén*. Magyar Pedagógia, 105, 127-152.
- [19] Csíkos Csaba (2008): *Sakk, metakogníció és a kezdő-szakértő problematika*. Hadmérnök, különszám „A sakk oktatásának hatása a képességfejlesztésre és a személyiségfejlesztésre”.
http://www.zmne.hu/hadmernok/kulonszamok/sakk_2007/htm/csikos.htm (utolsó letöltés: 2016. 08. 31.).
- [20] Csíkos, Cs., Kelemen, R. és Verschaffel, L. (2011): *Fifth-grade students' approaches to and beliefs of mathematics word problem solving: a large sample Hungarian study*. ZDM – International Journal on Mathematics Education, 43. 4. sz. 561–571.
- [21] Csíkos Csaba (2012): *Pedagógiai kísérletek kutatómódszertana*. Gondolat Kiadó, Budapest.
- [22] Csíkos Csaba, Vidákovich Tibor (2012): *A matematikatudás alakulása az empirikus vizsgálatok tükrében*. In: Csapó Benő (szerk.): *Mérlegen a magyar iskola*. Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 2012. 83-130.
- [23] Duró Zsuzsa (2007a): *A sakk képességfejlesztő hatásainak vizsgálata*. Új Pedagógiai Szemle, 09. sz., 46-72.
- [24] Duró Zsuzsa (2007b): *A sakk hatása a képességek fejlődésére*. Módszertani Közlemények 03. sz., 97-104.
- [25] Duró Zsuzsa (2007c): *A sakkoktatás hatásainak pedagógiai-pszichológiai vizsgálata*. Fejlesztő Pedagógia 03-04. sz., 100-111.

- [26] Duró Zsuzsa (2009): *A sakk és az iskolai nevelés A sakkoktatás pedagógiai-pszichológiai hatásainak vizsgálata.*
[www.ppk.elte.hu/2009/images/stories/ UPLOAD/DOKUMENTUMOK/Nevelestudomany/Phd/duro_zsuzsanna_sakk_es_iskolai_neveles.pdf](http://www.ppk.elte.hu/2009/images/stories/UPLOAD/DOKUMENTUMOK/Nevelestudomany/Phd/duro_zsuzsanna_sakk_es_iskolai_neveles.pdf) (utolsó letöltés: 2016. 08. 31.).
- [27] Duró Zsuzsa (2013a): *Miért sakkozzunk az iskolában?* Új Köznevelés 02. sz., 28-29.
- [28] Duró Zsuzsa (2013b): *A tehetséggondozás lehetőségei az iskolában a sakkoktatás képességfejlesztő hatásainak felhasználásával.* (In: Bábosik István (szerk.): *Az iskola optimalizálásának lehetőségei.*), Eötvös József Könyvkiadó, Budapest.
- [29] Eysenck, M. W. – Keane, M. T. (1997): *Kognitív pszichológia.* Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest.
- [30] Fábián Mária, Olasz Tamásné, Lajos Józsefné, Vidákovich Tibor (2008): *Matematika kompetenciaterület- szakmai koncepció.* Educatio Kht., 2008, 18.
www.sulinet.hu/tanar/kompetenciateruletek/2_matematika/1_koncepcio/matematikai_kompetencia (utolsó letöltés: 2014-07-09).
- [31] Falus Iván (szerk.) (1993): *Bevezetés a pedagógiai kutatás módszereibe.* Keraban Kiadó, Budapest, 9-33.
- [32] Fazekas Sándor (2005): *MATEMATIKA felvételi feladatok középiskolába készülőknél.* Pedellus Tankönyvkiadó Kft, Debrecen.
- [33] Flavell, J. H. (1979): *Metacognition and cognitive monitoring. A new area of cognitive-developmental inquiry.* American Psychologist, 34, 906–911.
- [34] Gik, J. J. (1989): *Sakk és matematika.* Gondolat Kiadó, Budapest.
- [35] Gósi Lilla (2013): *Polgár Judit - Királynői játszma az iskolában.* Új Köznevelés 02. sz., 32-34.
- [36] Hong S., Bart W. M.(2007): *Cognitive effects of chess instruction on students at risk for academic failure.* International Journal of Special Education, 22, 89-96.
- [37] Horn Dániel és Sinka Edit (2006): *A közoktatás minősége és eredményessége.* (In: Halász Gábor és Lannert Judit (szerk.): *Jelentés a magyar közoktatásról 2006*), Országos Közoktatási Intézet, Budapest, 341-375.
- [38] Johnson, D. M. (1972): *A systematic introduction to the psychology of thinking.* New York: Harper & Row.

- [39] Kac, M. – Ulam, S. M. (1969): *Mathematics and Logic*. The New American Library.
- [40] Kántor Sándorné (2008): *A PISA és az ahhoz hasonló típusú feladatok megoldásának tapasztalatairól*. A matematika tanítása, 2008. január, 3-11.
- [41] Kazemi F., Yektayar M., Abad A. M. B. (2012): *Investigation the impact of chess play on developing meta-cognitive ability and math problem-solving power of students at different levels of education*. Procedia: Social and Behavioral Sciences, 32, 372-379.
- [42] Kirschner, P. A., Sweller, J. and Clark, R. E. (2006): *Why Minimal Guidance during Instruction Does Not Work: An Analysis of the Failure of Constructivist, Discovery, Problem-Based, Experiential, and Inquiry-Based Teaching*. Educational Psychologist 41, no. 2, 75–86.
- [43] Kürti Jarmila (1982): *Kreativitásfejlesztés kisiskoláskorban*. Tankönyvkiadó Vállalat, Budapest.
- [44] Laczkovich Miklós (2010): *Sejtés és bizonyítás*. TYPOTEX, Budapest.
- [45] Lénárd Ferenc (1978): *A problémamegoldó gondolkodás* (4. kiadás). Akadémiai Kiadó, Budapest
- [46] Marczis György (2010): *A 8.-os központi matematika felvételi Békés megyei tapasztalatai*. A matematika tanítása, 2010. szeptember, 3-11.
- [47] Mérő László (1997): *Észjárások*. Tericum Kiadó, Budapest.
http://enel.web.elte.hu/origo.origin/Gorol_irtak/eszjarasok.htm (utolsó letöltés: 2016. 08. 31.).
- [48] Van Merriënboer, Jeroen, J. G. and Kirschner, P. A. (2007): *Ten Steps to Complex Learning: A Systematic Approach to Four-Component Instructional Design*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.
- [49] Molnár Gyöngyvér (2002): *A tudástranszfer*. Iskolakultúra. 2. sz. 65-75.
- [50] Molnár Gyöngyvér (2004): *Az iskolai és az alkalmazható tudáskettség a hazai és nemzetközi mérések tükrében*. Iskolakultúra, 8. sz. 21–31.
- [51] Nagy József (1985): *A tudástechnológia elméleti alapjai*. Országos Oktatástechnikai Központ, Veszprém.

- [52] Nagy Sándor (szerk.) (1979): *Pedagógiai lexikon II. G-K*. Akadémiai Kiadó, Budapest.
- [53] Nemzeti Alaptanterv (NAT) (2012): 110/2012. (VI. 4.) Korm. rendelet a Nemzeti alaptanterv kiadásáról, bevezetéséről és alkalmazásáról. Magyar Közlöny 2012/66. szám, 10635-10847.
- [54] Newell, A., Simon, H. A. (1972): *Human problem solving*. Englewood Cliffs. New Jersey: Prentice-Hall.
- [55] Oktatási Hivatal (2014a): *Középfokú felvételi eljárás*.
http://www.oktatas.hu/koznevelas/kozepfoku_felveteli_eljaras/2014_2015beiskolazas/irasbeli_vizsgak_feladatlapjairol (utolsó letöltés: 2015. 06.20.)
- [56] Oktatási Hivatal (2014b): *KÖZFELVIR2014 adatbázis*.
- [57] Oktatási Hivatal (2016): *Felvételi feladatsorok*.
http://www.oktatas.hu/koznevelas/kozepfoku_felveteli_eljaras/kozponti_feladatsorok (utolsó letöltés: 2016.08.31.).
- [58] Paas, F. and van Gog, T. (2006): *Optimising Worked Example Instruction: Different Ways to Increase Germane Cognitive Load*. Learning and Instruction 16, no. 2 (2006) 87–91.
- [59] Perkins D. N., Salomon G. (1994): *Transfer of learning*. In: Husen T., Postelwhite T. N. (Eds.): *International handbook of educational research*. 2nd ed., Pergamon Press, Oxford Vol. 11, 6452-6457.
- [60] Piaget, J. (1974): *Az értelem pszichológiája*. Gondolat Kiadó, Budapest.
- [61] Polgár Judit: *Sakkpalota program*.
<http://www.sakkpalota.hu/index.php/hu/sakkpalota-program> (utolsó letöltés: 2016. 08. 31.).
- [62] Pólya György (1968): *A problémamegoldás iskolája*. Tankönyvkiadó, Budapest.
- [63] Pólya György (1971): *A gondolkodás iskolája*. Gondolat Kiadó, Budapest.
- [64] Royer, J. M. (1979): *Theories of the transfer of learning*. Educational Psychologist, 14. 53–69.

- [65] Sala, G., Gorini, A., Pravettoni, G. (2015): *Mathematical Problem-Solving Abilities and Chess An Experimental Study on Young Pupils*. SAGE Open, 2015;5(3).
- [66] Scholz M., Niesch H., Steffen O., Ernst B., Loeffler M., Witruk E., Schwarz H. (2008): *Impact of chess training on mathematics performance and concentration ability of children with learning disabilities*. International Journal of Special Education, 23, 138-148.
- [67] Scriven, M. (1966): *The methodology of evaluation*. In: Social Science Education Consortium Newsletter, Publication No.110, Purdue University, Lafayette, Indiana. <http://www.comp.dit.ie/dgordon/Courses/ILT/ILT0005/TheMethodologyOfEvaluation.pdf> (utolsó letöltés: 2016. 08. 30).
- [68] Simon, H. A. & Gilmarin, K. (1973): *A Simulation of Memory for Chess Positions*. Cognitive Psychology 5, no. 1(July 1973): 29–46.
- [69] Simon, T.J. & Halford, G.S. (1995): *Computational models and cognitive change*. In: T.J.
- [70] Simon & G.S. Halford (Eds.), *Developing cognitive competence: New approaches to process modeling*. Hillsdale, NJ: Erlbaum, 1-30.
- [71] Skemp, R. R. (1975): *A matematikatanulás pszichológiája*. Gondolat Kiadó, Budapest.
- [72] Stanic, G. & Kilpatrick, J. (1989): *Historical perspectives on problem solving in the mathematics curriculum*. In: R. Charles & E. Silver (Eds.): *The teaching and assessing of mathematical problem solving* Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, 1-22.
- [73] Sweller, J. and Cooper, G. A. (1985): *The Use of Worked Examples as a Substitute for Problem Solving in Learning Algebra*. Cognition and Instruction 2, no. 1 (1985), 59–89.
- [74] Schwonke, R., Renkl, A. Krieg, C., Wittwer, J., Aleven, V. and Salden, R. (2009): *The Worked- Example Effect: Not an Artefact of Lousy Control Conditions*. Computers in Human Behavior 25, no. 2 (2009): 258–266.
- [75] Szilágyi Péter (2007): *Állomások és mérfoldkövek. A sakk képességfejlesztő hatásainak kutatása külföldön és Magyarországon*. Új Pedagógiai Szemle, 2007. június. <http://folyoiratok.ofi.hu/uj-pedagogiai-szemle/allomasok-es-merfoldkovek> (utolsó letöltés: 2016. 08. 28.).

- [76] Taylor, A. L. (1970): *Curriculum and instructional evaluation in science*. Science Education, July/September 1970, Volume 54 Issue 3, 237-239.
- [77] Treffinger, D. J. – Feldhusen, J. F. – Isaksen, S. G. (1990): *Organization and structure of productive thinking*. Creative Learning Today 4/2. p68.
- [78] Trinchero, R.(2013): *Can chess training improve Pisa scores in mathematics? An experiment in Italian primary schools*. Kasparov Chess Foundation Europe. Retrieved from www.kcfe.eu/sites/default/files/Trinchero_KCFE.pdf (utolsó letöltés: 2016. 08. 31.).
- [79] Varga Tamás (1969): *A matematika tanítása*.
http://old.tok.elte.hu/matek/mat_tan.pdf (utolsó letöltés: 2016. 08. 31.).
- [80] Vári Péter, Bánfi Ilona, Felvégi Emese, Krolopp Judit, Rózsa Csaba és Szalay Balázs (2001): *A PISA 2000 vizsgálatról*. Új pedagógiai szemle. 51. 12. sz. 31-43.
- [81] Vári Péter (szerk., 2003): *PISA-vizsgálat 2000*. Műszaki Könyvkiadó, Budapest.
- [82] Verschaffel, L., De Corte, E., Lasure, S., Van, V. G., Bogarts, H. & Ratinckx, E. (1999): *Learning to solve mathematical application problems: A design experiment with fifth graders*. *Mathematical Thinking and Learning*. An International Journal, 1(3), 195–229.
- [83] Vidákovich Tibor (2005): *A matematikai kompetencia fejlesztésének koncepciója*. sulinova Kht., Budapest.
- [84] Vidákovich Tibor és Csikos Csaba (2009): *A tanulók matematikai tudásának alakulása –nemzetközi és hazai vizsgálatok*. In: Fazekas Károly (szerk.): *Oktatás és foglalkoztatás*. MTA Közgazdaságtudományi Intézet, Budapest, 150–160.
- [85] Vidákovich Tibor (2013): *A matematikai kompetencia értelmezése, értékelésének és fejlesztésének lehetőségei*. (nettantar.edu.rs/letoltes/Vidakovich_Szabad_130606.ppt) (utolsó letöltés: 2016. 08. 31.).
www.sulinet.hu/tanar/kompetenciateruletek/2_matematika/1_koncepcio/matematikai_kompetencia (utolsó letöltés: 2016. 08. 28.).
- [86] Wittmann, E. Ch. (1981): *Grundfragen des Mathematikunterrichts*. Vieweg.

A disszertáció témaköréhez kapcsolódó publikációk, tanulmányok és előadások

PUBLIKÁCIÓK:

Misetáné Burján Anita (2014a): *Az anyag, a tér és az idő szerepe a sakkjátékban transzfer hatások a matematikai gondolkodás fejlesztésében.* Agora, BGF KVIK tudományos folyóirata, Scientific Journal of the BBS CCCT 2014/11, 59-72.

Misetáné Burján Anita (2014b): *Sakk és Matematika: Játéktól a valóságig.* "GONDOLOD, HOGY EGYRE MEGY?" Konferencia Szendrei Julianna emlékére, Budapest, 2014. május 10. Sakk és Matematika: Játéktól a valóságig, konferenciakötet CD.

Misetáné Burján Anita (2014c): *Sakk és matematika. Játéktól a valóságig.* Gyermeknevelés, 2. évf. 2. sz. / 2014 37–44.

Misetáné Burján, A. (2014d): *The appearance of the representative features of mathematical thinking in the thinking of a chess player.* Report of Meeting, Researches in Didactics of Mathematics and Computer Sciences, January 24-26, 2014 Eger, Hungary, Teaching Mathematics and Computer Science 12. vol. 1. issue/2014, 117-134.

Misetáné Burján, A.(2014e): *The appearance of the characteristic features of mathematical thinking in the thinking of a chess player.* Teaching Mathematics and Computer Science, 12. vol. 2. issue / 2014, 201-211.

Misetáné Burján Anita (2015): *Sakk és matematika: „A játék a kutatás legjobb módja”(Albert Einstein).* In: Matematikát, fizikát és informatikát oktatók XXXIX. országos konferenciája Kaposvár, 2015 augusztus 24-26. konferenciakötet, Kaposvári Egyetem, Gazdaságtudományi Kar (151-157).

Misetáné Burján Anita, Birkás György (2016): *Út a középiskolába... A matematikai tudásszint diagnosztikus vizsgálata Magyarországon az alapfokú és a középfokú oktatás határán.* Közlésre elfogadva: Iskolakultúra 2016/6.

Misetáné Burján, A. (2017): *The effects of chess education on mathematical problem solving performance.* Közlésre elfogadva: Teaching Mathematics and Computer Science.

KONFERENCIÁK, ELŐADÁSOK:

Varga Tamás Módszertani Napok Konferencia, Budapest, 2012. november 17. Sakk és matematika: Sakk-maTTematikai didaktika (A gondolkodás fejlesztése az általános iskolában). *Chess and Mathematics Poster*

Matematika és Informatika Didaktikai Konferencia, Eger 2013. január 25. Sakk és matematika: A matematikai gondolkodás jellegzetes vonásainak megjelenése a sakkozó gondolkodásban.

Varga Tamás Módszertani Napok Konferencia, Budapest, 2013. november 9. Sakk és matematika: A sakk szerepe az általános iskolások geometriai gondolkodásának játékos fejlesztésében. *The role of chess in the development of primary school students' geometrical thinking in a playful way.*

"GONDOLOD, HOGY EGYRE MEGY?" Konferencia Szendrei Julianna emlékére, Budapest, 2014. május 10. Sakk és Matematika: Játéktól a valósáig.

Varga Tamás Módszertani Napok Konferencia, Budapest, 2014. november 8. Sakk és matematika: Tehetségfejlesztés az ötödik osztályban „...jó szóval oktasd, játszani is engedd szép, komoly fiadat!” (József Attila).

MAFIOK Konferencia, Kaposvár, 2015. augusztus 25. Sakk és matematika: Az alkalmazott matematikatudás fejlesztése az alapfokú oktatásban „A játék a kutatás legjobb módja.” (Albert Einstein).

Varga Tamás Módszertani Napok Konferencia, Budapest, 2015. november 7. Sakk és matematika: Út a középiskolába... A 2014. évi középiskolai központi írásbeli matematika feladatsor (9. évfolyamra) néhány tapasztalatáról.

Matematika és Informatika Didaktikai Konferencia, Pozsony, 2016. január 24. Sakk és matematika: A sakkoktatás hatása a matematikai tudásszint mérésen nyújtott teljesítményre. „A tanítás céljáról régimódi felfogást vallok: először és elsősorban GONDOLKODNI kell tanítanunk!” (Pólya György).

„Somogyi-háló” szakszolgálat a tehetségekért szakmai nap, Lengyeltóti, 2016. 03. 30. TEHETSÉGNAPOK A BALATONLELLEI ISKOLÁBAN.

Varga Tamás Módszertani Napok Konferencia, Budapest, 2016. november 11-12. Sakk és matematika

8. Függelék

1. függelék: A Kormány 110/2012. (VI. 4.) Korm. rendelete a Nemzeti alaptanterv kiadásáról, bevezetéséről és alkalmazásáról

NEMZETI ALAPTANTERV

II. 3.3. MATEMATIKA

A, ALAPELVEK, CÉLOK

B, FEJLESZTÉSI FELADATOK

C, KÖZMŰVELTSÉGI TARTALMAK

1-4. évfolyam

5-8. évfolyam

1. Gondolkodási módszerek, halmazok, matematikai logika, kombinatorika, gráfok

1.1. Halmazok

- Halmazba rendezés több szempont alapján. A részhalmaz fogalma.
- Két véges halmaz egyesítése, közös része.

1.2. Matematikai logika

- Egyszerű matematikai tartalmú szöveg értelmezése. Állítások igazságtartalma.
- Definíció, tétel kimondása.

1.3. Kombinatorika

- Sorbarendezési és kiválasztási feladatok az összes eset megadásával.

2. Számelmélet, algebra

2.1. Számok, mérés, mértékegységek

- Racionális számkör. Számok írása, olvasása, összehasonlítása, ábrázolása számegyenesen.
- Ellentett, abszolút érték, reciprok, normálalak fogalma.
- Mérés, mértékegység használata, átváltás. Egyenes arányosság, fordított arányosság.

2.2. Műveletek

- Alapműveletek racionális számokkal írásban és számológéppel.
- A zárójelek, a műveleti sorrend biztos alkalmazása. Helyes és értelmes kerekítés, az eredmények becslése, a becslés használata ellenőrzésre is. — Százalékszámítás.

2.3. Számelméleti ismeretek

- Osztó, többszörös, közös osztó, közös többszörös. Oszthatósági szabályok (2, 3, 5, 9, 10, 100).
- Prímszám, összetett szám.

2.4. Algebrai kifejezések

- Egyszerű algebrai egész kifejezések helyettesítési értéke. Összevonás.

2.5. Hatvány, gyök, logaritmus

- Négyzetre emelés, négyzetgyökvonás, hatványozás pozitív egész kitevők esetén egész számok körében.

2. 6. Egyenletek, egyenlőtlenségek, egyenletrendszerek

- Elsőfokú egyenletek és egyenlőtlenségek. Egyszerű szöveges feladatok megoldása következtetéssel és egyenlettel, ellenőrzés.

3. *Geometria*

3.1. A tér elemei

— Pont, vonal, egyenes, félegyenes, szakasz, sík, szögtartomány. Két pont, pont és egyenes távolsága.

3.2. Síkbeli alakzatok

2. függelék: A 2014. évi középiskolai központi matematika felvételi írásbeli feladatsor 9. évfolyamra

MATEMATIKA FELADATLAP

a 8. évfolyamosok számára

2014. január 18. 11:00 óra

NÉV: _____

SZÜLETÉSI ÉV: HÓ: NAP:

Tollal dolgozz! Zsebszámológépet nem használhatsz.

A feladatokat tetszés szerinti sorrendben oldhatod meg.

Minden próbálkozást, mellékszámítást a feladatlapon végezz!

Mellékszámításokra az utolsó oldalt is használhatod.

A megoldásra összesen 45 perced van.

Csak azokban a feladatokban kell indokolnod a megoldásokat, ahol azt külön kérjük. Indoklásaidat részletesen írd le annak érdekében, hogy azokat megfelelően tudjuk értékelni.

Jó munkát kívánunk!

1. Az alábbi ábrán mindegyik nyíl fölé egy-egy alapműveletet (összeadást, kivonást, szorzást, osztást) írtunk. A nyíl fölé írt műveletet azzal a számmal kell elvégezned, amelyiktől a nyíl elindul. Az elvégzett művelet eredménye az a szám lesz, amelyre a nyíl mutat.

Az első művelet esetén: $\frac{2}{5} \cdot 2 = \frac{4}{5}$.

Végezd el a nyílakon jelölt műveleteket, és az eredményeket írd be a pontozott vonalakra!

$$\frac{2}{5} \xrightarrow{\cdot 2} \frac{4}{5} \xrightarrow{+ 1,6} \dots \xrightarrow{: 3} \dots \xrightarrow{- 2} \dots \xrightarrow{+ \frac{3}{2}} \dots$$

2. Tedd igazzá az alábbi egyenlőségeket a hiányzó adatok beírásával!

a) $13 \text{ liter} + 14 \text{ dm}^3 = \dots \text{ dm}^3$

b) $3 \text{ nap} + \dots \text{ óra} = 90 \text{ óra}$

c-d) $19821 \text{ m} = 27 \text{ km} - \dots \text{ m} = 27 \text{ km} - \dots \text{ dm}$

3. Luca (L), Krisztina (K), Angéla (A) és Nóra (N) 400 méteres futásban mérték össze az erejüket. A verseny után a következőket mondták el a barátjuknak, Rékának (aki nem látta a versenyt): Sem Luca, sem Angéla nem lett utolsó, sem Krisztina, sem Nóra nem lett első.

Milyen sorrendben érkezhettek a célba, ha nem volt holtverseny?

Írd a táblázat mezőibe a versenyzők nevének kezdőbetűit a feltételnek megfelelő valamennyi lehetséges sorrend szerint! Egy lehetséges sorrendet előre beírtunk a megoldások táblázatába.

Megoldásaidat a vastag vonallal körülvett mező táblázataiba kell beleírnod, mivel csak ezeket értékeljük. A többi táblázatban próbálkozhatsz, de azokat NEM értékeljük!

Lehet, hogy a bekeretezett részben több táblázat van, mint ahány megoldás lehetséges.

Vigyázz! Ha a megoldásaid között hibásan kitöltött táblázat is szerepel, azért pontlevonás jár.

Megoldásaim:

1. L	2. A	3. K	4. N
------	------	------	------

1.	2.	3.	4.
----	----	----	----

1.	2.	3.	4.
----	----	----	----

1.	2.	3.	4.
----	----	----	----

1.	2.	3.	4.
----	----	----	----

1.	2.	3.	4.
----	----	----	----

1.	2.	3.	4.
----	----	----	----

1.	2.	3.	4.
----	----	----	----

1.	2.	3.	4.
----	----	----	----

1.	2.	3.	4.
----	----	----	----

1.	2.	3.	4.
----	----	----	----

1.	2.	3.	4.
----	----	----	----

1.	2.	3.	4.
----	----	----	----

1.	2.	3.	4.
----	----	----	----

1.	2.	3.	4.
----	----	----	----

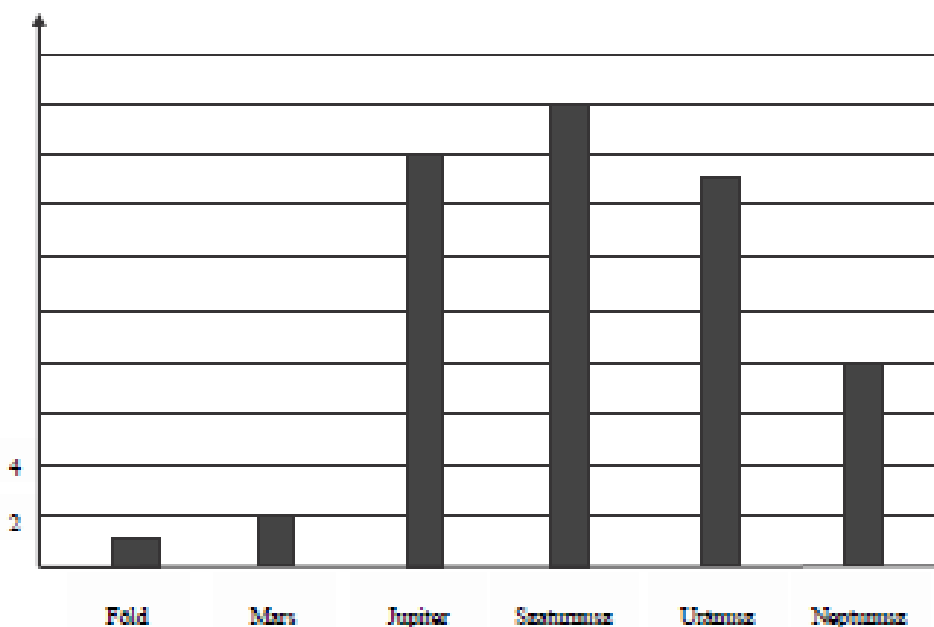
1.	2.	3.	4.
----	----	----	----

1.	2.	3.	4.
----	----	----	----

1.	2.	3.	4.
----	----	----	----

4. Az alábbi oszlopdiagramon hat bolygó holdjainak számát ábrázoltuk.
A kérdések erre a hat bolygóra vonatkoznak.

Holdak
száma



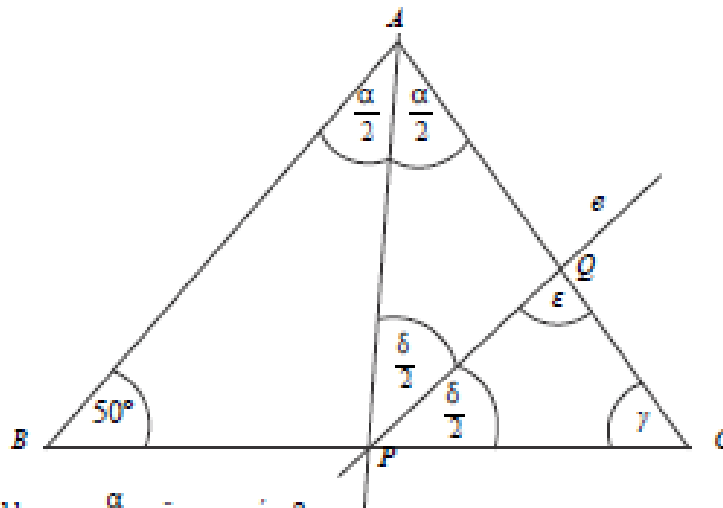
- a-b) Hány holdja van összesen a hat bolygónak? Írd le a számolás menetét!
- c-d) A Szaturnusz holdjainak száma hány százaléka a hat bolygó holdjai számának?
Írd le a számolás menetét!
- e-f) Hány holdja van átlagosan egy bolygónak? Írd le a számolás menetét!

a	
b	
c	
d	
e	
f	

5. Az ábrán vázolt ABC háromszögben a B csúcsnál lévő belső szög nagysága 50° . Az A csúcsból induló belső szögfelező egyenes a BC oldalt a P pontban metszi úgy, hogy $\delta = 80^\circ$. Az e egyenes a δ szög szögfelezője.

Határozd meg az ábrán szereplő $\frac{\alpha}{2}$, γ és ϵ szög nagyságát, majd egészítsd ki a CPQ háromszögre vonatkozó állítást!

(Az ábra csak tájékoztató jellegű vázlat, nem pontos méretű.)



- Mekkora az $\frac{\alpha}{2}$ szög nagysága?
- Mekkora a γ szög nagysága?
- Mekkora a ϵ szög nagysága?
- Számításaid alapján egészítsd ki az alábbi mondatot úgy, hogy igaz legyen!

A CPQ háromszög háromszög, mert

.....

a	
b	
c	
d	

6. Adott a következő öt szám: 4 ; 7 ; 20 ; 25 ; 28.
Ezek közül írd be a pontozott helyekre a feltételnek megfelelő összes számot!

a	
b	
c	
d	

a) Páros szám:

b) Prímszám:

c) 7-tel osztható szám:

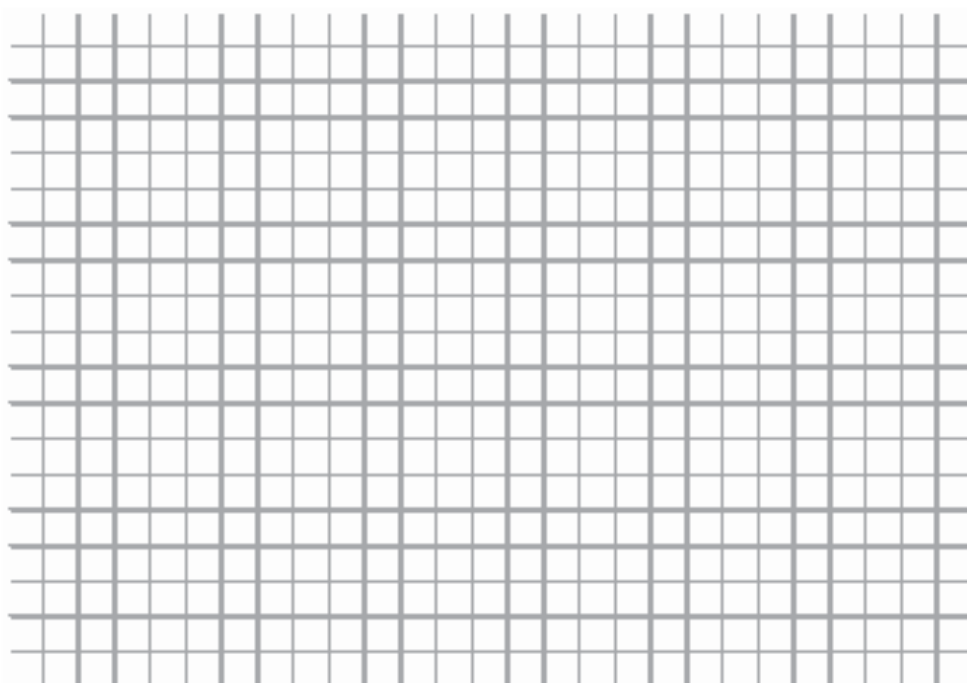
d) Négyzetszám:

7. Az alábbi koordináta-rendszerben adott három pont: $A(3; 7)$, $B(5; 3)$ és $C(11; 4)$.

a	
---	--

- a) Keres olyan D pontot, hogy az A , a B a C és a D pont valamilyen sorrendben egy paralelogramma négy csúcsa legyen!

Rajzold be az összes ilyen D pontot az ábrába, és add meg a koordinátáikat!



8. A nekeresdi piacon 12 kg első osztályú és 8 kg másodosztályú almát vásároltunk.
 A másodosztályú alma kilogrammonkénti ára az első osztályú alma kilogrammonkénti árának 75%-a volt. Összesen 4176 tallért fizettünk.
 Hány tallér az első osztályú és a másodosztályú alma kilogrammonkénti ára?
 Írd le a számolás menetét is!

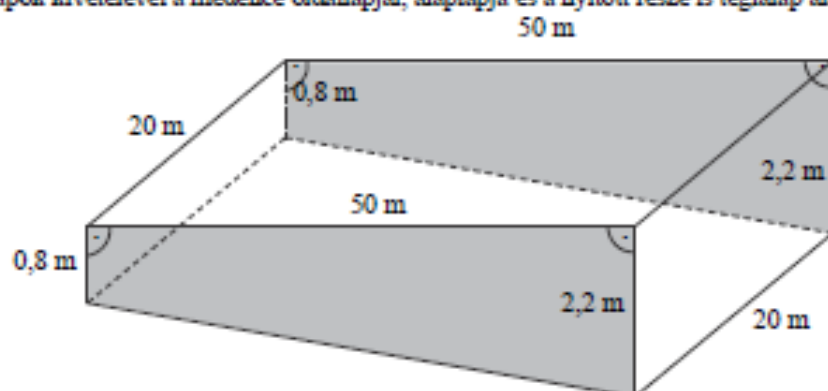
a

Az első osztályú kilogrammonkénti ára: tallér.

A másodosztályú alma kilogrammonkénti ára: tallér.

9. A nekeresdi strandon új medencét építettek. Az alábbi ábra ennek a medencének a vázlatos rajza. A medence mélysége egyenletesen növekszik 0,8 métertől 2,2 méterig. A szürke oldallapok kivételével a medence oldallapjai, alaplappja és a nyitott része is téglalap alakú.

a



- a) Hány m^3 víz szükséges a medence teljes feltöltéséhez?
Írd le a számolás menetét is!

10. A különböző országokban többféle hőmérsékleti skálát használnak.
 A leggyakoribb a Celsius ($^{\circ}\text{C}$), a Fahrenheit ($^{\circ}\text{F}$) és a Réaumur ($^{\circ}\text{R}$).
 A Celsius-skálához hasonlóan a másik két skála is egyenletes beosztású (lineáris).
 A két alább, Celsius-fokokban mért hőmérséklet az egyes skálákon a következő értékeket veszi fel:

$$0\text{ }^{\circ}\text{C} = 32\text{ }^{\circ}\text{F}$$

$$0\text{ }^{\circ}\text{C} = 0\text{ }^{\circ}\text{R}$$

$$100\text{ }^{\circ}\text{C} = 212\text{ }^{\circ}\text{F}$$

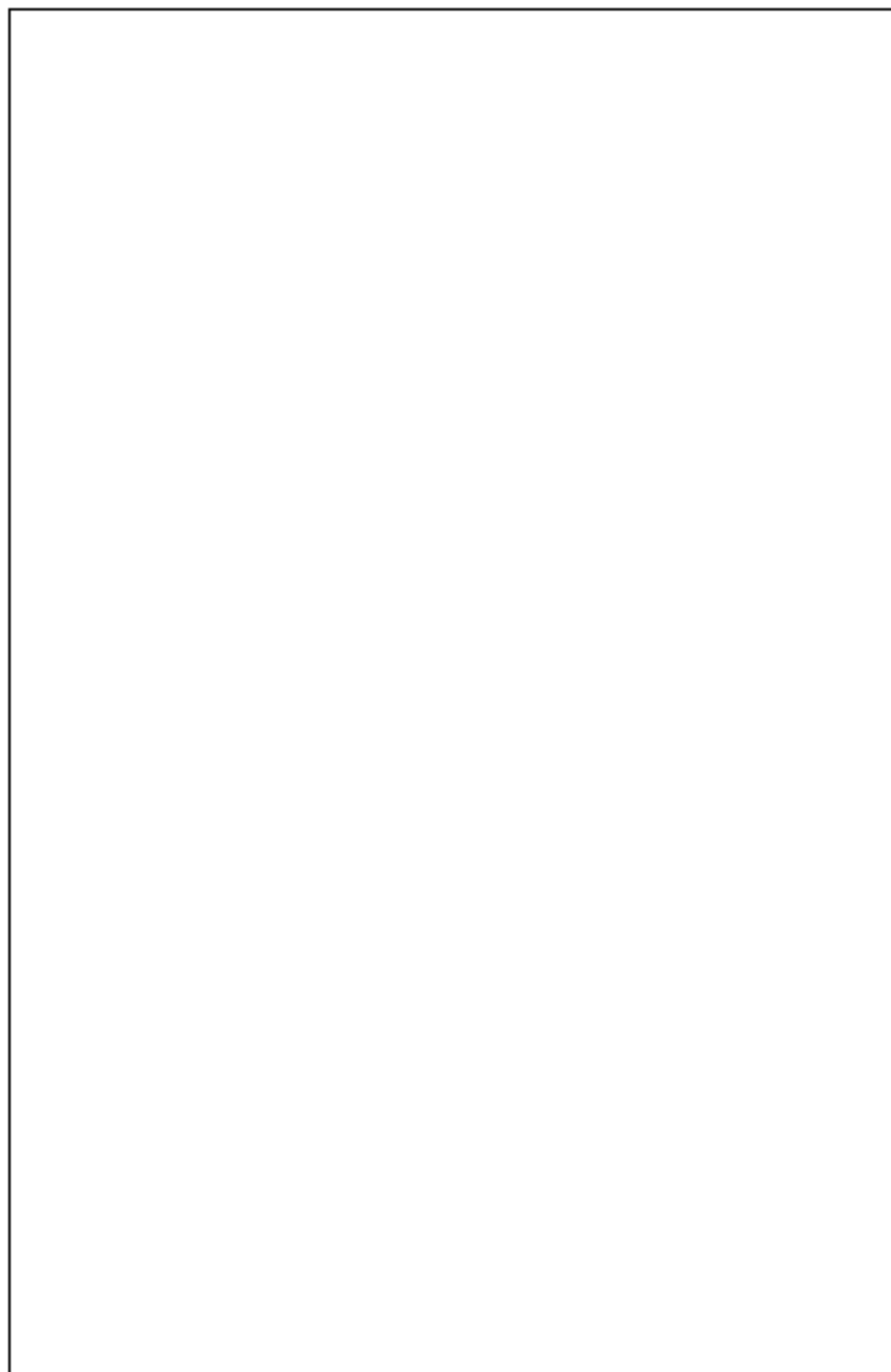
$$100\text{ }^{\circ}\text{C} = 80\text{ }^{\circ}\text{R}$$

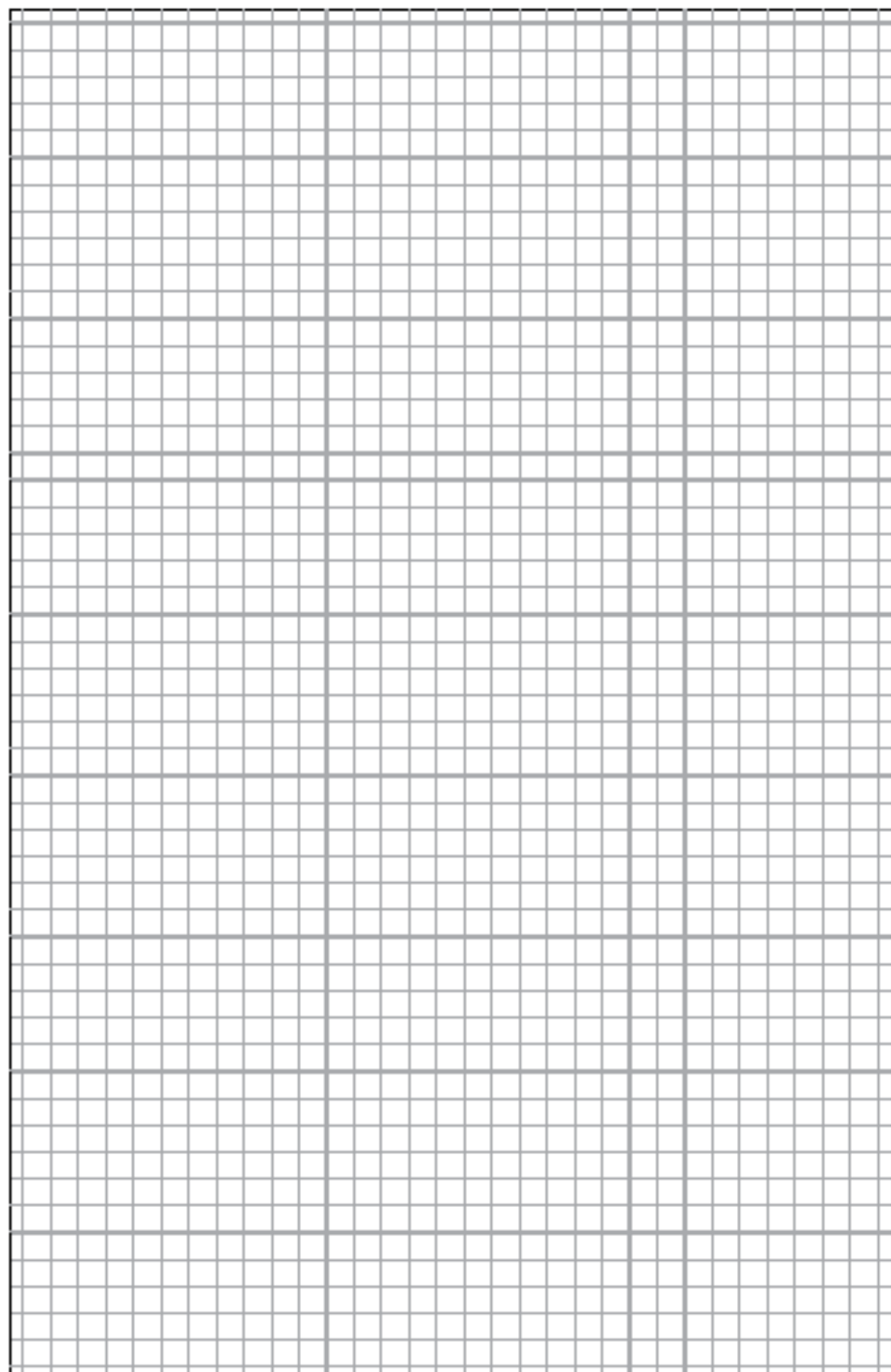
Határozd meg a hiányzó értékeket! Írd le a számolás menetét is!

a-b) $40\text{ }^{\circ}\text{C} = \dots\dots\dots\text{ }^{\circ}\text{R}$

c-e) $140\text{ }^{\circ}\text{F} = \dots\dots\dots\text{ }^{\circ}\text{C}$

a	
b	
c	
d	
e	





3. függelék: Javítási-értékelési útmutató a 2014. évi középiskolai központi matematika felvételi írásbeli feladatsorhoz 9. évfolyamra.

MATEMATIKA
a 8. évfolyamosok számára

Mat1

JAVÍTÁSI-ÉRTÉKELÉSI
ÚTMUTATÓ

2014. január 18.

**A javítókulcsban feltüntetett válaszokra a megadott pontszámok adhatók.
A pontszámok részekre bontása csak ott lehetséges, ahol erre külön utalás van.**

1. a) $\frac{2}{5} \xrightarrow{\cdot 2} \frac{4}{5} \xrightarrow{+1,6} 2\frac{2}{5} \xrightarrow{:3} \frac{4}{5} \xrightarrow{-2} -1\frac{1}{5} \xrightarrow{+\frac{3}{2}} \frac{3}{10}$ 4 pont

Minden helyesen beírt szám 1 pontot ér. Ha a tanuló hibázik valamelyik műveletben, arra nem jár pont, de ha a hibás számmal helyesen számol tovább, a további pontokat kapja meg! Az eredményeket bármilyen alakban megadhatja (például közönséges tört alakban, amelyet nem egyszerűsít, vagy nem választja le az egészeket, vagy tizedes tört alakban...).

2. a) $13 \text{ liter} + 14 \text{ dm}^3 = 27 \text{ dm}^3$ 1 pont
 b) $3 \text{ nap} + 18 \text{ óra} = 90 \text{ óra}$ 1 pont
 c) $19\,821 \text{ m} = 27 \text{ km} - 7\,179 \text{ m} =$ 1 pont
 d) $= 27 \text{ km} - 71\,790 \text{ dm} =$ 1 pont

A d) item pontját akkor is kapja meg, ha a c) itemben hibás értéket adott meg, de ezt a hibás értéket helyesen váltotta át a d) itemben.

3. a) A táblázatnak további hét helyes kitöltése van: 5 pont

L	A	K	N	L	A	N	K	L	K	A	N
L	N	A	K	A	L	K	N	A	L	N	K
A	K	L	N	A	N	L	K				

Ha (a példaként megadott sorrendtől eltérő) egy vagy két különböző helyes sorrendet adott meg, akkor 1 pontot kap, ha három vagy négy különböző helyes sorrendet adott meg, akkor 2 pontot kap, minden további különböző helyes sorrendért 1-1 pontot kap, tehát a feladatra összesen 5 pont adható. Ha hibás sorrendet is leírt a bekeretezett ábrák valamelyikébe, akkor a hibás sorrendek számától függetlenül **összesen 1 pontot** le kell vonni a jó megoldásaiért kapható pontokból, de ekkor is legalább 0 pontot kapjon erre a feladatra! Nem kell pontot levonni a példaként megadott sorrend beírásáért, vagy ha többször leírt egy sorrendet.

4. a) A megoldásból egyértelműen kiderül, hogy mind a hat adatot helyesen olvasta le (pl. a holdak számát beírja az egyes oszlopok fölé, vagy leírja az $1+2+16+18+15+8$ összeget). *1 pont*
- b) Helyes az összeadás (60) *1 pont*
- c) $\frac{18}{60} =$ *1 pont*
- d) 30 (%) *1 pont*
- e) $\frac{60}{6} =$ *1 pont*
- f) 10 *1 pont*

Ha a tanuló az oszlopdiagrammról egy vagy több értéket rosszul olvasott le, de az általa leolvasott értékeket helyesen adta össze, akkor is kapja meg a b) item 1 pontját.

Ha a tanuló a b) itemre rossz eredményt adott meg, de azzal helyesen számolt tovább, akkor is kapja meg a további itemek megfelelő pontjait.

5. a) 30° *1 pont*
- b) 70° *1 pont*
- c) 70° *1 pont*

Ha a tanuló a szögeértékeket csak az ábrába írta be, az eredményeit akkor is értékelni kell. Ha a felvételiző dolgozatából egyértelműen kiderül, hogy valamelyik szög értékét rosszul számolta ki, de azzal a továbbiakban helyesen és pontosan számol, akkor is kapja meg a megfelelő pontokat!

- d) A helyes megállapítás és a helyes indoklás is 1-1 pontot ér. *2 pont*

Például: A CPQ háromszög egyenlő szárú háromszög, mert az ϵ és a γ szög is 70° -os. Vagy: A CPQ háromszög hegyesszögű háromszög, mert mindhárom szöge kisebb 90° -nál.

A tanuló által kiszámított szögeértékekből következő bármely helyes megállapítást és az ezek alapján helyesen leírt indoklást értékelni kell.

6. a) 4 ; 20 ; 28 *1 pont*
- b) 7 *1 pont*
- c) 7 ; 28 *1 pont*
- d) 4 ; 25 *1 pont*

Az egyes itemekre csak akkor jár az 1 pont, ha az összes helyes számot leírta, és hibás számot nem sorolt fel.

7. a) **A három lehetséges megoldás:** **6 pont**

$$D_1 (9; 8)$$

$$D_2 (13; 0)$$

$$D_3 (-3; 6)$$

Minden helyesen berajzolt D pont 1 pontot ér, és minden helyes koordinátapár 1 pontot ér.

Ha a tanuló helyesen rajzolt be az ábrába egy csúcsot, de nem helyesen adta meg a csúcs mindkét koordinátáját, akkor arra a csúcsra 1 pontot kap.

Ha egy csúcs koordinátáit helyesen adta meg, de rosszul rajzolta be az ábrába, akkor arra 1 pontot kap.

Ha egy csúcsot nem rajzolt be az ábrába, de a koordinátáit megadta, akkor annak a csúcsnak a helyes koordinátáira 1 pontot kap.

8. a) **A teljes megoldás.** **6 pont**

Egy lehetséges megoldási mód:

Az első osztályú almára költött pénzből $12 \cdot \frac{4}{3}$, 1 pont

azaz 16 kg másodosztályú almát vásárolhatunk volna. 1 pont

Így összesen 24 kg másodosztályú almát vehettünk volna. 1 pont

Egy kilogramm másodosztályú alma ára $4176 : 24 = 174$ tallér. 1 pont

Egy kilogramm első osztályú alma ára $174 \cdot \frac{4}{3} =$ 1 pont

$= 232$ tallér. 1 pont

Egy másik megoldási mód:

A másodosztályú almára költött pénzből $8 \cdot \frac{3}{4}$, 1 pont

azaz 6 kg első osztályú almát vásárolhatunk volna. 1 pont

Így összesen 18 kg első osztályú almát vehettünk volna. 1 pont

Egy kilogramm első osztályú alma ára $4176 : 18 = 232$ tallér. 1 pont

Egy kilogramm másodosztályú alma ára $232 \cdot \frac{3}{4} =$ 1 pont

$= 174$ tallér. 1 pont

Egy harmadik megoldási mód:

Az első osztályú alma kilogrammonkénti ára x tallér,

a másodosztályúé $\frac{3}{4}x$ tallér. 1 pont

$12x + 8 \cdot \frac{3}{4}x = 4176$ 1 pont

$$18x = 4176 \quad 1 \text{ pont}$$

$$x = 232 \quad 1 \text{ pont}$$

$$\frac{3}{4} \cdot 232 = 174 \quad 1 \text{ pont}$$

Az első osztályú alma kilogrammonkénti ára 232 tallér, a másodosztályúé 174 tallér. 1 pont

A feladat más módon is megoldható, a részpontozás a pontozási gyakorlatnak megfelelően történjen.

Ha a választ nem a pontozott részre írta, akkor is kapja meg az utolsó pontot.

9. a) **A feladat teljes megoldása.** **5 pont**

Egy lehetséges megoldási mód:

$$1500 \text{ (m}^3 \text{ víz szükséges a medence feltöltéséhez.)} \quad 1 \text{ pont}$$

A medence egy trapéz alapú hasábnak tekinthető.* 1 pont

$$\text{A szürkével jelzett trapéz területe: } \frac{0,8 + 2,2}{2} \cdot 50 = \quad 1 \text{ pont}$$

$$= 75 \text{ (m}^2\text{).} \quad 1 \text{ pont}$$

$$\text{A medence térfogata: } 75 \cdot 20 \text{ (= 1500 m}^3\text{)} \quad 1 \text{ pont}$$

*Ha a megoldásban a *-gal jelzett gondolat a számolás menetéből egyértelműen kiderül, akkor az érte járó pontot meg kell adni.*

A feladat itt megadott megoldási módjától eltérő más helyes megoldási módot is el kell fogadni (például testdarabolás).

10. a) $40^\circ\text{C} = 32^\circ\text{R}$ 1 pont

b) A $^\circ\text{R}$ -ban meghatározott hőmérséklet a $^\circ\text{C}$ -ban megadott hőmérséklet 0,8-szerese. 1 pont

c) $140^\circ\text{F} = 60^\circ\text{C}$ 1 pont

(Ha c-vel jelölünk egy hőmérsékletet Celsius-fokban és f-fel Fahrenheit-fokban, akkor $c = (f - 32) \cdot \frac{100}{180}$ alakban kifejezhető.)

d) A 1°F változás $\frac{100}{180}^\circ\text{C}$ változás. 1 pont

e) A Fahrenheit-értékből 32-t le kell vonni. 1 pont

A b), a d) és az e) item pontjait akkor is kapja meg, ha a gondolat csak a számítás menetéből derül ki.

A feladat más módon (például grafikusán) is megoldható, a részpontozás a pontozási gyakorlatnak megfelelően történjen.