Doktori (PhD) értekezés tézisei

EXPONENTIAL DIOPHANTINE EQUATIONS AND REPRESENTATION PROBLEMS

Bertók Csanád

Témavezető: Dr. Hajdu Lajos
egyetemi tanár

DEBRECENI EGYETEM
Matematika– és Számítástudományok Doktori Iskola
Debrecen, 2019.

Tézisek

Jelen tézisfüzet első kérdésköre az egész számokat érintő reprezentációs problémákhoz kapcsolódik. Elöljáróban legyenek $a_1, \ldots, a_l$ különböző pozitív egészek és legyen $A = \{a_1, \ldots, a_l\}$. Tekintsük az alábbi halmazt

$$A' := \{a_1^{x_1} \cdot \ldots \cdot a_l^{x_l} | x_1, \ldots, x_l \text{ nemnegatív egészek}\}.$$

Természetes problémaként merül fel a kérdés, miszerint legkevesebb hány elemre van szükségünk A'-ből ahhoz, hogy egy adott pozitív egészet kifejezhessünk ezen elemek összegeként? Amennyiben A csupán egyetlen b számból áll, úgy a kérdés lényegében a pozitív egészek felírására korlátozódik a b alapú számrendszerben. Amennyiben A mindössze két prímet tartalmaz, úgy úgynevezett "két alapú" reprezentációs problémáról beszélhetünk (kapcsolódó irodalomként ld. például Dimitrov és Howe [9] eredményeit). Definiáljuk az $F(k)$ $(k \in \mathbb{N})$ függvényt úgy, hogy jelentse a legkisebb olyan természetes számot, melyet nem tudunk előállítani k-nál kevesebb A'-beli elem összegeként. Legyen továbbá $F_\pm(k)$ hasonlóan definiálva, azzal az eltéréssel, hogy A' helyett az $A'_\pm = A' \cup (-A')$ halmazt használjuk. Amennyiben $F(k)$ és $F_\pm(k)$ tulajdonságaira vagyunk kíváncsiak, úgy eljutunk egy Nathanson [17] által vizsgált problémakörhöz.

A disszertáció 2.1-es fejezetében alsó korlátot adunk mind $F(k)$-ra, mind pedig $F_\pm(k)$-ra abban az általános esetben amikor A tetszőleges egészekből áll. Az alábbi tételeket látjuk be.

1. Tétel (2.1-es Tétel [1]-ben)**.** *Legyenek $A, A', A'_\pm, F(k)$ és $F_\pm(k)$ a fentiek szerint definiálva és tegyük fel, hogy A tartalmaz két multiplikatíve független elemet. Ekkor minden $k > 1$ esetén:*

i) $F(k) > k^{C_1 k}$*, ahol C_1 egy csak A-tól függő konstans.*

ii) $F(k) < C_2(kl)^{(1+\varepsilon)kl}$ *minden $\varepsilon > 0$ esetén, ahol C_2 egy csak ε-tól függő konstans,*

iii) $F_\pm(k) < \exp((kl)^{C_3})$*, ahol C_3 egy abszolút konstans.*

2. Tétel (2.1-es Állítás [1]-ben)**.** *Amennyiben A elemei páronként multiplikatíve függőek, úgy léteznek olyan, csak A-tól függő $1 < C_4 < C_5$ konstansok, hogy*

$$C_4^k < F(k) \leq F_\pm(k) < C_5^k \quad \textit{minden } k > 1 \textit{ esetén.}$$

Ezen eredmények megválaszolják Nathanson [17] egy kérdését és kiterjesztik Hajdu és Tijdeman [13, 14] eredményeit. Az így nyert korlátok igen élesek. A fenti tételek bizonyításához felhasználjuk továbbá az alábbi eredményt.

3. Tétel (2.2-es Tétel [1]-ben)**.** *Tegyük fel, hogy A tartalmaz legalább két multiplikatíve független elemet és jelöljük $1 = a'_0 < a'_1 < \ldots$-val A' elemeinek sorozatát. Ekkor létezik olyan pozitív N egész, illetve csak A-tól függő pozitív C_5, C_6 konstansok, melyekre az alábbi két állítás teljesül.*

i) $a'_{n+1} - a'_n > \frac{a'_n}{(\log a'_n)^{C_6}}$ *minden* $a'_n \geq 3$ *esetén,*

ii) $a'_{n+1} - a'_n < \frac{a'_n}{(\log a'_n)^{C_7}}$ *minden* $a'_n \geq N$ *esetén.*

A 2.2-es fejezetben ún. "többalapú" reprezentációs problémákkal foglalkozunk, nevezetesen egész számok olyan "többalapú" számrendszerbeli előállításait vizsgáljuk, mely előállításoknak csupán "néhány" nem-nulla számjegyük van egyszerre több ilyen számrendszerben. Ehhez legyen S prímeknek egy véges halmaza és jelölje $\mathbb{Z}_S$ (hasonlóan $\mathbb{Z}_S^+$) egészek (hasonlóan pozitív egészek) azon halmazát, melyeknek nincs S-en kívüli prímosztójuk. Az egész n-ek olyan

$$n = u_1 + \cdots + u_t$$

alakú reprezentációival foglalkozunk, ahol $u_1, \ldots u_t \in \mathbb{Z}_S$. Jelölje továbbá $w_S(n)$ azt a legkisebb t számot, melyre a fenti egyenletnek van megoldása. Amennyiben n pozitív és az egyenlet jobb oldalán szereplő számok a $\mathbb{Z}_S^+$ halmaz elemei, úgy a fenti jelölés helyett $w_S^+(n)$-t írunk. Az alábbi tételeket bizonyítjuk.

4. Tétel (2.1-es Tétel [5]-ben)**.** *Legyen k egy pozitív egész, $S_1, \dots, S_k$ pedig prímeket tartalmazó olyan véges halmazok, melyekre $S_1 \cap \dots \cap S_k = \emptyset$. Ekkor bármely T-re a*

$$w_{S_1}^+(n) + \dots + w_{S_k}^+(n) \leq T$$

egyenlőtlenség csupán véges sok egész n esetén áll fent. Továbbá ezen egész n-ek száma legfeljebb $C_{14} = C_{14}(T,\, k,\, s)$, ahol C_{14} egy effektíven meghatározható konstans, mely csupán T-től, k-tól és $s := |S_1 \cup \dots \cup S_k|$-tól függ.

5. Tétel (2.2-es Tétel [5]-ben)**.** *Legyen ℓ egy pozitív egész és legyenek $p_1, \dots, p_\ell,\, q$ különböző prímek. Legyen továbbá $S_1 = \{p_1, \dots, p_\ell\}$ és $S_2 = \{q\}$. Ha n egy olyan pozitív egész, melyre $n > e^{e^e}$ és $w_{S_1}^+(n) = 1$, úgy*

$$w_{S_2}^+(n) > \frac{C_{15} \log\log n}{\log\log\log n},$$

ahol $C_{15} = C_{15}(\ell,\, p_1, \dots, p_\ell,\, q)$ egy effektíven meghatározható, csak $\ell,\, p_1, \dots, p_\ell,\, q$ értékétől függő pozitív konstans.

A disszertáció 2.3-as fejezetében binér rekurzív sorozatok előállításával foglalkozunk hatványok lineáris kombinációjaként. Marques és Togbé [16] bizonyos megkötések mellett meghatározták az összes olyan Fibonacci és Lucas számot, melyek előállnak, a $2, 3, 5$ számok hatványainak összegeként. Pethő és de Weger [19] kifejlesztettek egy algoritmust az $U_n = wp_1^{x_1} \cdot \ldots \cdot p_m^{x_m}$ Diofantikus egyenlet megoldására, ahol U_n egy pozitív diszkriminánsú binér rekurzív sorozat. Pethő [18], illetve Shorey és Stewart [22] egymástól függetlenül belátták, hogy bizonyos feltételek teljesülése mellett egy lineáris rekurzív sorozat csupán véges sok teljes hatványt tartalmazhat. Néhány speciális rekurzív sorozat esetén lehetőség van meghatározni a sorozatban előforduló összes teljes hatványt is. A Pell sorozat esetén Pethő [20] belátta, hogy a sorozat nem tartalmaz nem-triviális hatványokat. Bugeaud, Mignotte és Siksek [8] bizonyította, hogy a Fibonacci sorozatban csupán a $0, 1, 8$, illetve a 144 fordulnak elő mint teljes hatványok, míg a Lucas sorozatban csupán az 1 és a 4 jelennek meg. Pethő és Tichy [21] eredményei alapján ismert, hogy csupán véges sok olyan Fibonacci szám létezik, mely előáll $p^x + p^y + p^z$ alakban, ahol p egy rögzített prím. Kovács [15] megtalálta a Fibonacci, Lucas, Pell és asszociált Pell sorozatokban szereplő összes, bizonyos tulajdonságokkal rendelkező kombinatorikus számot. Ezen fejezetben az alábbi tételt látjuk be.

6. Tétel (2.1-es Tétel [6]-ban)**.** *Legyen* U_n *egy nem-degenerált, pozitív diszkriminánsú binér rekurzió,* $p_1 \leq p_2 \leq \cdots \leq p_s$ *pedig adott, nem szükségszerűen különböző prímek. Legyenek továbbá* $b_1, \ldots, b_s$ *nem-nulla egészek. Legyen végül* $T = \max\limits_{1 \leq i \leq s} |b_i|$*. A fejezetben felhasznált jelölések mellett tegyük fel továbbá, hogy* $\log(|a/b_s\sqrt{D}|)$, $\log|\alpha|$ *és* $\log p_s$ *lineárisan függetlenek a racionális számok felett. Tekintsük az*

$$U_n = b_1 p_1^{x_1} + b_2 p_2^{x_2} \cdots + b_s p_s^{x_s} \tag{2.29}$$

egyenletet, ahol $n, x_1, \ldots, x_s$ *nemnegatív egész ismeretlenek. Legyen* $0 < \varepsilon < 1$*, és jelölje* H_ε *azon* $(n, x_1, \ldots, x_s)$ *megoldások halmazát, melyekre egyrészt* $x_s = \max\limits_{1 \leq i \leq s} x_i$ *teljesül, másrészt pedig azon* $i = 1, \ldots, s-1$ *indexek esetén, melyekre* $p_i = p_s$*, az* $x_i < (1-\varepsilon)x_s$ *egyenlőtlenség is fennáll. Ekkor* H_ε *véges, és minden* $(n, x_1, \ldots, x_s) \in H_\varepsilon$ *esetén*

$$\max\{n, x_1, \ldots, x_s\} < C_{16}$$

teljesül, ahol C_{16} *egy effektíven meghatározható konstans, mely csupán az* $\varepsilon, A, B, U_0, U_1, T, s, p_s$ *paraméterektől függ.*

Ezen eredmények bizonyítását követően a harmadik fejezetben olyan

$$a_1 b_{11}^{x_{11}} \dots b_{1\ell}^{x_{1\ell}} + \dots + a_k b_{k1}^{x_{k1}} \dots b_{k\ell}^{x_{k\ell}} = c \tag{A}$$

alakú exponenciális Diofantikus egyenletekkel foglalkozunk, ahol az $x_{11}, \dots, x_{1\ell}, \dots, x_{k1}, \dots, x_{k\ell}$ kitevők ismeretlen nemnegatív egészek, míg az alapok, illetve az egyenlet jobb oldala előre megadott nemnegatív egészek. A disszertációban fontos szerepet játszik a fenti egyenletből kapható kongruencia (valamilyen $m \geq 2$ modulus szerint), így ezt a későbbiekben (A')-vel jelöljük. Ha $k = 2$ (vagy bizonyos megszorítások mellett ha $k = 3, 4$), akkor a Baker módszer segítségével lehetőségünk van meghatározni egy felső korlátot a fenti egyenlet megoldásainak nagyságára. Ehhez kapcsolódó eredményekért ld. többek között Győry [12] munkáját, vagy Evertse és Győry [11] könyvét. Azonban teljes általánosságban amennyiben $k \geq 3$, úgy ez a probléma lényegesen nehezebbé válik. Ebben az esetben a Baker módszer nem használható, a rendelkezésünkre álló altér tétel pedig egyrészt ineffektív, másrészt csupán a nem-degenerált megoldások számára ad felső korlátot, azok nagyságára nem. Ehhez kapcsolódó irodalomért ld. Evertse [10] munkáját, Evertse és Győry [11] könyvét, illetve az ott található hivatkozásokat. Igen fontos megjegyezni, hogy a szakirodalomban nincs olyan ismert algoritmus, melynek segítségével lehetséges lenne a fenti típusú egyenletek összes megoldásának meghatározása. A disszertációban bemutatjuk az alábbi – Skolem exponenciális kongruenciákra kimondott sejtésén alapuló – algoritmust, mely lehetőséget nyújt ezen egyenletcsalád megoldásainak megkeresésére. Az algoritmus négy fő lépésre tagolódik.

(I) Megkeressük (A) összes olyan megoldását mely egy bizonyos, előre meghatározott korlát alá esik. Természetesen ez nem garantálja, hogy az összes megoldást megtaláltuk, ám a későbbi lépések alapján vagy bizonyosságot nyerünk erről vagy pedig a korlát módosításával az algoritmust újból lefuttathatjuk.

(II) Kiválasztjuk valamely ismeretlent (legyen ez pl. x_{11}) és az előző pontban szerzett ismereteink alapján válasszunk egy olyan x_0 egészet mely nagyobb, mint az x_{11}-re kapott megoldások.

(III) Innentől (A) helyett azon egyenletet vizsgáljuk melyben az a_1 együtthatót $a_1 b_{11}^{x_0}$-al helyettesítjük. Ezen x_0 választása alapján azt sejtjük, hogy az új egyenletnek nincsenek megoldásai.

(IV) Keresünk egy olyan m modulust mely szerint a módosított egyenletnek nincs megoldása modulo m. Ha sikerül, akkor azzal felső korlátot kapunk x_{11}-re.

Ezen témakörhöz kapcsolódóan az alábbi elméleti tételt sikerült bizonyítanunk.

7. Tétel (2.1-es Tétel [3]-ben)**.** *Legyenek az $a_1, \ldots, a_k$ együtthatók és $b_{11}, \ldots, b_{1\ell}, \ldots, b_{k1}, \ldots, b_{k\ell}$ alapok rögzítettek és definiáljuk H-t a következőképp:*

$$H = \{c \in \mathbb{Z} \ : \text{(A) } \textit{nem megoldható, de } \text{(A')} \textit{ megoldható minden } m \textit{ esetén}\}.$$

Ekkor H sűrűsége 0 a

$$H_0 = \{c \in \mathbb{Z} \ : \ \text{(A) } \textit{nem megoldható}\}$$

halmazban.

Ezen tétel mellett több érdekes numerikus eredményt is nyertünk, melyeket az alábbiakban ismertetünk. Első tételünk Brenner és Foster [7] egy kérdéséhez kapcsolódik és a 0 különböző prímhatványok összegeként és különbségeként történő előállításával foglalkozik.

8. Tétel (3.1-es Tétel [3]-ben)**.**

1. *Legyen* $2 \leq t \leq 5$*, továbbá legyenek* $p_1, \ldots, p_{t+1}$ *különböző prímek, melyekre* $p_i \leq 19$ $(i = 1, \ldots, t+1)$ *teljesül.Tekintsük a*

$$\sum_{i=1}^{t} p_i^{x_i} = p_{t+1}^{x_{t+1}}$$

   Diofantikus egyenletet. Az egyenlet összes $x_1, \ldots, x_{t+1}$ *megoldására teljesül, hogy* $\min_{1 \leq i \leq t+1}(x_i) \leq 15$.

2. *A*

$$3^{x_1} + 5^{x_2} + 11^{x_3} + 13^{x_4} + 17^{x_5} = 19^y$$

   Diofantikus egyenletnek csupán két megoldása van az $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, y$ *ismeretlenekben, melyek*

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, y) = (0, 1, 1, 0, 0, 1), (1, 0, 0, 1, 0, 1).$$

A következő eredmény azt az esetet vizsgálja, mikor az egyenlet bal oldalán elhelyezkedő prímek megegyeznek.

9. Tétel (3.2-es Tétel [3]-ben)**.**

1. *Legyen* $2 \leq t \leq 8$*, illetve legyenek* p *és* q *különböző,* 19*-nél kisebb prímek. Tekintsük az alábbi Diofantikus egyenleteket.*

$$\sum_{i=1}^{t} p^{x_i} = q^y - 1.$$

   Ezen egyenletek összes megoldására $\min_{1\leq i\leq t}(x_i, y) \leq 6$ *teljesül.*

2. *Az*

$$5^{x_1} + 5^{x_2} + 5^{x_3} + 5^{x_4} + 5^{x_5} + 5^{x_6} + 5^{x_7} + 5^{x_8} + 5^{x_9} = 17^y$$

   diofantikus egyenlet megoldásai a $x_i \leq x_{i+1}$ $(i = 1, \ldots, 8)$ *feltétel mellett*

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, y) = (0,0,0,0,0,0,0,1,1,1), \\ (0,0,0,0,1,1,2,3,3,2).$$

Az utolsó numerikus eredményünk az (A) egyenlet $\ell = 2$ esetével foglalkozik.

10. Tétel (3.3-as Tétel [3]-ben)**.**

1. *Legyenek* $p_1, \ldots, p_6$ *különböző prímek melyekre*

$p_i \leq 19$ $(i = 1, \ldots, 6)$ *teljesül. Tekintsük a*

$$p_1^{x_1} p_2^{x_2} + p_3^{x_3} p_4^{x_4} - p_5^{x_5} p_6^{x_6} = 1$$

Diofantikus egyenletet. Ezen egyenlet összes $x_1, \ldots, x_6$ *megoldására* $\min_{1 \leq i \leq 6}(x_i) \leq 5$ *teljesül.*

2. *A*

$$2^{x_1} 3^{x_2} + 5^{x_3} 7^{x_4} - 11^{x_5} 13^{x_6} = 1$$

Diofantikus egyenletnek csupán két megoldása van az $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ *változókban, melyek*

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = (0, 0, 0, 0, 0, 0), (0, 2, 1, 0, 0, 1).$$

A disszertáció 3.2-es fejezetében ezen probléma kiterjesztésével is foglalkozunk. Az egyenletünket és a hozzá kapcsolódó kongruenciát immár nem $\mathbb{Z}$ felett vizsgáljuk hanem az együtthatók, alapok és a jobb oldal is egy tetszőleges algebrai számtest egészeinek gyűrűjéből kerülnek ki. Több tételt bizonyítunk, mely Skolem sejtésének számtestekre való kiterjesztéséhez kapcsolódik, illetve bemutatjuk az algoritmusunk kiterjesztett változatát, mellyel lehetővé válik az

(A) alakú egyenletek megoldásainak meghatározása algebrai számtestek egészeiben. Végezetül több numerikus eredménnyel demonstráljuk ezen algoritmus hatékonyságát. Legfontosabb numerikus eredményünk, mely a [4]-as cikkben található az alábbi.

11. Tétel. *Legyen* $\mathbb{K} = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$*, ahol* d *a* $2, 3, 5$ *számok valamelyike. Legyenek továbbá* a_i*,* b_i *olyan tetszőleges egészek, melyekre* $\max\{|a_i|, |b_i|\} \leq 3$ $(i = 1, 2, 3)$ *teljesül. Végül legyen* $\beta_i = a_i + b_i\sqrt{d}$*. Tekintsük az összes lehetséges*

$$\beta_1^{x_1} + 2\beta_2^{x_2} - 3\beta_3^{x_3} = 1, \tag{3.10}$$

alakú egyenletet az x_1, x_2, x_3 *egészekben. Amennyiben ezen egyenletnek nincs megoldása, úgy létezik egy olyan* $\mathfrak{M}$ *ideál mely szerint az egyenletnek modulo* $\mathfrak{M}$ *sincs megoldása.*

A disszertáció utolsó fejezetében bemutatunk több – az előzőekben felmerült problémákhoz kapcsolódó – alkalmazást. Ezen tételek és alkalmazások a [2, 4, 5, 6] cikkeinkben szerepelnek. Elsőként tekintsük Terai egy klasszikus sejtését. Legyen t egy tetszőleges, de rögzített pozitív egész, x, y, illetve z pedig ismeretlen pozitív egészek. Tekintsük továbbá a

$$(4t^2+1)^x + (5t^2-1)^y = (3t)^z \tag{1}$$

egyenletet. Az alábbi tételt bizonyítjuk.

12. Tétel (1-es Tétel [2]-ben)**.** *Bármely rögzített t mellett az* (1) *egyenletnek csupán egyetlen megoldása van az x, y, z ismeretlenekben, mely* $(x, y, z) = (1, 1, 2)$.

Újabb alkalmazásként rekurzív sorozatok hatványösszegekként történő előállításával foglalkozunk. Ehhez legyen U_n a Fibonacci, Lucas, Pell, vagy asszociált Pell sorozat n-edik tagja, x, y, z pedig ismeretlen nemnegatív egészek. Ezen feltételek mellett a következő tételt igazoljuk.

13. Tétel (2.2-es Tétel [6]-ban)**.** *Legyen U_n az F_n, L_n, P_n, Q_n sorozatok valamelyike. Ekkor az*

$$U_n = 2^x + 3^y$$

egyenlet összes megoldása az n, x, y nemnegatív egészekben

	(n, x, y)
F_n	$(3,0,0),(4,1,0),(5,1,1),(5,2,0),(7,2,2),(11,3,4)$
L_n	$(0,0,0),(3,0,1),(2,1,0),(5,1,2),$ $(7,1,3),(4,2,1),(13,9,2),(5,3,1)$
P_n	$(2,0,0),(3,1,1),(5,1,3),(3,2,0),(9,8,6)$
Q_n	$(2,1,0),(3,2,1),(4,3,2),(4,4,0),(5,5,2)$

Továbbá a fenti sorozatok esetén az

$$U_n = 2^x + 3^y + 5^z$$

egyenlet összes megoldása az n, x, y, z *nemnegatív egészekben*

	(n, x, y, z)
F_n	$(4,0,0,0),(5,0,1,0),(6,1,0,1),(9,1,3,1),$ $(6,2,1,0),(9,3,0,2),(12,4,1,3),(9,5,0,0)$
L_n	$(2,0,0,0),(4,0,0,1),(7,0,1,2),(5,0,2,0),(7,0,3,0),$ $(3,1,0,0),(6,2,2,1),(6,3,2,0),(6,4,0,0)$
P_n	$(3,0,1,0),(5,0,3,0),(4,1,2,0),(5,0,1,2),(4,2,1,1),$ $(4,3,1,0),(6,6,0,1),(8,8,3,3),(10,10,6,4)$
Q_n	$(2,0,0,0),(3,0,0,1)$

Újabb alkalmazásként meghatározzuk az összes olyan $2, 3, 5$ és 7 hatványt melyek előállnak mint három balansz szám összege. Ehhez jelentse B_i az i-edik balansz számot és tekintsük a

$$B_u + B_v + B_w = b^z \tag{2}$$

egyenletet az u, v, w, z nemnegatív egészekben a már említett $b \in \{2, 3, 5, 7\}$ feltétel mellett. Az alábbi tételt igazoljuk.

14. Tétel (2-es Tétel [4]-ban)**.** *A* (2)*-es egyenlet összes megoldása az u, v, w, z nemnegatív egészekben*

b	u	v	w	z
2	0	1	1	1
2	1	1	2	3
3	1	1	1	1
7	0	1	2	1

A disszertáció utolsó alkalmazásaként a többalapú reprezentációkhoz kapcsolódó alkalmazásokkal foglalkozunk. Ehhez legyen $w_S^+(n)$ a tézisfüzet elején megadott módon definiálva. A disszertációban az alábbi tételt igazoljuk.

15. Tétel (2.3-as Tétel [5]-ben)**.** *Legyenek S_1 és S_2 diszjunkt halmazok, melyekre $S_1 \cup S_2 = \{2,\ 3,\ 5\}$ teljesül. Ekkor a*

$$w_{S_1}^+(n) + w_{S_2}^+(n) \leq 4$$

egyenlőtlenségben

1. *ha* $S_1 = \{2\}$ *és* $S_2 = \{3, 5\}$ *úgy* $n \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 16, 18, 20, 24, 25, 32, 34, 36, 40, 48, 72, 80, 81, 96, 128, 130, 136, 144, 160, 258, 260, 288, 384, 640, 1152, 2050, 2052, 4104, 32832\}$*;*

2. *ha* $S_1 = \{3\}$ *és* $S_2 = \{2, 5\}$ *úgy* $n \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 9, 10, 12, 18, 27, 28, 30, 36, 54, 81, 82, 84, 90, 108, 162, 252, 270, 324, 729, 756, 810, 6561, 6570\}$*;*

3. *ha* $S_1 = \{5\}$ *és* $S_2 = \{2, 3\}$ *úgy* $n \in \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 25, 26, 27, 30, 50, 125, 126, 130, 150, 625, 630, 650, 3125, 3126, 15625, 78750\}$.

Theses

The first problem in this book of theses is connected to representation problems concerning integers. Let $a_1, \ldots, a_l$ be distinct integers and let $A = \{a_1, \ldots, a_l\}$. Consider the set

$$A' := \{a_1^{x_1} \cdot \ldots \cdot a_l^{x_l} | x_1, \ldots, x_l \text{ are non-negative integers}\}.$$

A natural question to ask is that at least how many elements do we need from A' to represent a given positive integer as their sum? If A consists of only one number b then the question basically asks about the representation of positive integers in the base b number system. If A consists of two primes, then we have a so-called "double base" representation problem (as a related paper, see e.g. the work of Dimitrov and Howe [9]). If we define the function $F(k)$ $(k \in \mathbb{N})$ to be the smallest natural number which cannot be represented as the sum of less than k terms from A', and $F_{\pm}(k)$ to be the function defined similarly, except that A' is replaced by $A'_{\pm} = A' \cup (-A')$ and ask about the properties of $F(k)$ and $F_{\pm}(k)$, then we get a similar problem proposed by Nathanson [17].

In Section 2.1, we give a lower and upper bound for $F(k)$ and $F_{\pm}(k)$ in the case, where A consists of arbitrary integers. We prove the following theorems.

Theorem 1 (Theorem 2.1 in [1]). *Let $A, A', A'_{\pm}, F(k)$ and $F_{\pm}(k)$ be as above and suppose that A has two multiplicatively independent elements. Then for every $k > 1$ we have:*

i) *$F(k) > k^{C_1 k}$, where C_1 is a constant depending only on A,*

ii) *$F(k) < C_2(kl)^{(1+\varepsilon)kl}$ for every $\varepsilon > 0$, where C_2 is a constant depending only on ε,*

iii) *$F_{\pm}(k) < \exp((kl)^{C_3})$, where C_3 is an absolute constant.*

Theorem 2 (Proposition 2.1 in [1]). *If all pairs of elements of A are multiplicatively dependent, then there exist constants $1 < C_4 < C_5$ depending only on A such that*

$$C_4^k < F(k) \leq F_{\pm}(k) < C_5^k \quad \textit{for all } k > 1.$$

These results answer a question of Nathanson [17] in the above setting, and extend results of Hajdu and Tijdeman [13, 14]. These bounds are relatively sharp, as well. To prove these theorems we use the following result.

Theorem 3 (Theorem 2.2 in [1]). *Suppose that A has at least two multiplicatively independent elements and write $1 = a'_0 < a'_1 < \ldots$ for the sequence of the elements of A'. Then there* *exist a positive integer N and positive constants C_6, C_7 depending only on A such that:*

i) $a'_{n+1} - a'_n > \frac{a'_n}{(\log a'_n)^{C_6}}$ *for* $a'_n \geq 3$,

ii) $a'_{n+1} - a'_n < \frac{a'_n}{(\log a'_n)^{C_7}}$ *for* $a'_n \geq N$.

In Section 2.2 we consider multi-base representations. In this subsection we study representations of integers which have only a "few" non-zero digits in different multi-base representations simultaneously. For this, let S be a finite set of primes, and write $\mathbb{Z}_S$ (resp. $\mathbb{Z}_S^+$) for the set of integers (resp. positive integers) having no prime divisors outside S. We consider the representations of integers n of the form

$$n = u_1 + \cdots + u_t$$

with $u_1, \ldots u_t \in \mathbb{Z}_S$. We write $w_S(n)$ for the minimal t for which the above equation holds. If n is positive and the numbers on the right hand side are elements of $\mathbb{Z}_S^+$, we write $w_S^+(n)$ instead. In this subsection we prove the following theorems.

Theorem 4 (Theorem 2.1 in [5])**.** *Let k be a positive integer, $S_1, \ldots, S_k$ be finite sets of primes such that $S_1 \cap \cdots \cap S_k = \emptyset$.*

Then for any T the inequality

$$w^+_{S_1}(n) + \cdots + w^+_{S_k}(n) \leq T$$

is valid only for finitely many integers n. Furthermore, the number of such integers n is at most $C_{14} = C_{14}(T,\, k,\, s)$, where C_{14} is an effectively computable constant depending only on T, k and $s := |S_1 \cup \cdots \cup S_k|$.

Theorem 5 (Theorem 2.2 in [5]). *Let ℓ be a positive integer, $S_1 = \{p_1, \ldots, p_\ell\}$ and $S_2 = \{q\}$, where $p_1, \ldots, p_\ell$, q are distinct primes. If n is a positive integer with $n > e^{e^e}$ such that $w^+_{S_1}(n) = 1$, then we have*

$$w^+_{S_2}(n) > \frac{C_{15} \log\log n}{\log\log\log n},$$

where $C_{15} = C_{15}(\ell,\, p_1, \ldots, p_\ell,\, q)$ is an effectively computable positive constant depending only on ℓ, $p_1, \ldots, p_\ell$, q.

In Section 2.3 of the dissertation we consider the problem of representation of terms of binary recurrence sequences as linear combinations of powers. Marques and Togbé [16] determined all Fibonacci and Lucas numbers which can be written as the sum of powers of $2, 3, 5$ under certain assumptions. Pethő and de Weger [19] gave an algorithm which can be used to solve the Diophantine equation $U_n = wp_1^{x_1} \cdot \ldots \cdot p_m^{x_m}$, where U_n is a binary recurrence sequence with positive discriminant. Pethő [18] and Shorey and Stewart [22] independently proved that under certain natural assumptions, a linear recurrence sequence may contain only finitely many perfect powers. In the case of some special, famous sequences all perfect powers have been determined. In the case of the Pell sequence P_n, Pethő [20] proved that it does not contain non-trivial powers. Bugeaud, Mignotte and Siksek [8] proved that the Fibonacci-sequence F_n contains only the powers $0, 1, 8, 144$, and the only powers in the sequence of Lucas numbers L_n are $1, 4$. Results of Pethő and Tichy [21] imply that there are only finitely many Fibonacci numbers of the form $p^x + p^y + p^z$, where p is a fixed prime. Kovács [15] found all combinatorial numbers of certain shapes among the terms of F_n, L_n, P_n and Q_n (the associated Pell-sequence). We prove the following theorem.

Theorem 6 (Theorem 2.1 in [6])**.** *Let U_n be a non-degenerate binary recurrence sequence with a positive discriminant, $p_1 \leq p_2 \leq \cdots \leq p_s$ be given, not necessarily distinct prime numbers and $b_1, \ldots, b_s$ be nonzero integers. Put $T = \max_{1 \leq i \leq s} |b_i|$. Using the notations from the corresponding section, assume further that* $\log(|a/b_s\sqrt{D}|)$, $\log|\alpha|$ *and* $\log p_s$ *are linearly in-*

dependent over the rationals.

Consider the equation

$$U_n = b_1 p_1^{x_1} + b_2 p_2^{x_2} \cdots + b_s p_s^{x_s} \tag{2.29}$$

in non-negative integers $n, x_1, \ldots, x_s$. Let $0 < \varepsilon < 1$, and write H_ε for the set of those solutions $(n, x_1, \ldots, x_s)$, for which $x_s = \max_{1 \le i \le s} x_i$, and $x_i < (1-\varepsilon)x_s$ for those $i = 1, \ldots, s-1$ for which $p_i = p_s$. Then H_ε is finite, and for all $(n, x_1, \ldots, x_s)$ in H_ε we have

$$\max\{n, x_1, \ldots, x_s\} < C_{16},$$

where C_{16} is an effectively computable constant depending only on ε, A, B, U_0, U_1, T, s, p_s.

After proving these results, in Section 3 we consider exponential Diophantine equations of the form

$$a_1 b_{11}^{x_{11}} \ldots b_{1\ell}^{x_{1\ell}} + \cdots + a_k b_{k1}^{x_{k1}} \ldots b_{k\ell}^{x_{k\ell}} = c \tag{A}$$

in non-negative integers $x_{11}, \ldots, x_{1\ell}, \ldots, x_{k1}, \ldots, x_{k\ell}$, where the coefficients, bases and the right hand side are given non-negative integers. Denote by (A') the "congruence version" of (A) modulo $m \ge 2$. If $k = 2$ (under some restrictive assumptions if $k = 3, 4$), then by Baker's method it is possible to give an upper bound for the size of the solutions. For related results see e.g. Győry [12] or the book of Evertse and Győry [11]. However in general if $k \geq 3$ then this problem becomes significantly more difficult. In this case we cannot use Baker's method and we need to use the subspace theorem, which is ineffective, and is capable only to provide a bound for the number of non-degenerate solutions. Here we refer to Evertse [10], and again to the book of Evertse and Győry [11] and the references given there. It is important to note that there is no known algorithm in the literature, which would be capable to produce all the solutions of such an equation. In the dissertation we present an algorithm – based on a conjecture of Skolem – which can be used to determine all solutions of these type of equations. The algorithm consists of four main steps.

(I) Find all solutions to equation (A) by an exhaustive search. Note that at this point we cannot be sure that we found all solutions. However, heuristically we may assume this.

(II) Choose any of the unknowns, x_{11} say, and based upon the suspected list of solutions find an integer x_0 such that this number is larger than any of the solutions for x_{11}.

(III) Instead of equation (A) consider the equation obtained from (A) by replacing the coefficient a_1 by $a_1 b_{11}^{x_0}$. By the choice of this x_0 we expect that the new equation has no solutions.

(IV) Find an m such that the new equation has no solution already modulo m. If we succeed then x_0 is an upper bound for x_{11}.

In this section we were prove the following theorem.

Theorem 7 (Theorem 2.1 in [3])**.** *Let $a_1, \dots, a_k$, $b_{11}, \dots, b_{1\ell}, \dots, b_{k1}, \dots, b_{k\ell}$ be fixed, and let H be defined by*

$$H = \{c \in \mathbb{Z} \ : \ \text{(A)} \textit{ is not solvable, but } \text{(A')} \textit{ is solvable for all } m\}.$$

Then H has density zero inside the set

$$H_0 = \{c \in \mathbb{Z} \ : \ \text{(A)} \textit{ is not solvable}\}.$$

We also achieved several numerical results which shows the usefullness of our algorithm. The first theorem is connected to a result of Brenner and Foster [7] and considers the representation of 0 as a sum and difference of powers of several distinct primes.

Theorem 8 (Theorem 3.1 in [3])**.**

1. *Let* $2 \leq t \leq 5$ *and let* $p_1, \ldots, p_{t+1}$ *be distinct primes, with*
   $p_i \leq 19$ $(i = 1, \ldots, t+1)$. *Consider the Diophantine equations*

   $$\sum_{i=1}^{t} p_i^{x_i} = p_{t+1}^{x_{t+1}}.$$

   For all the solutions of these equations we have $\min_{1 \leq i \leq t+1}(x_i) \leq 15$.

2. *The Diophantine equation*

   $$3^{x_1} + 5^{x_2} + 11^{x_3} + 13^{x_4} + 17^{x_5} = 19^y$$

   has only two solutions in $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, y)$*, given by*

   $$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, y) = (0, 1, 1, 0, 0, 1), (1, 0, 0, 1, 0, 1).$$

The next theorem concerns the case where the primes on the left hand side are the same.

Theorem 9 (Theorem 3.2 in [3])**.**

1. *Let* $2 \le t \le 8$ *and let* p, q *be distinct primes with* $p, q \le 19$ *and consider the Diophantine equations*

$$\sum_{i=1}^{t} p^{x_i} = q^y - 1.$$

   For all the solutions of these equations we have $\min_{1 \le i \le t}(x_i, y) \le 6$.

2. *The Diophantine equation*

$$5^{x_1} + 5^{x_2} + 5^{x_3} + 5^{x_4} + 5^{x_5} + 5^{x_6} + 5^{x_7} + 5^{x_8} + 5^{x_9} = 17^y$$

   has only two solutions with $x_i \le x_{i+1}$ $(i = 1, \ldots, 8)$, *namely*

$$\begin{aligned}(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, y) =&(0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1),\\ &(0, 0, 0, 0, 1, 1, 2, 3, 3, 2).\end{aligned}$$

The final result in connection with (A) concerns the case where $l = 2$.

Theorem 10 (Theorem 3.3 in [3])**.**

1. *Let* $p_1, \ldots, p_6$ *be distinct primes with* $p_i \leq 19$ $(i = 1, \ldots, 6)$ *and consider the Diophantine equations*

$$p_1^{x_1} p_2^{x_2} + p_3^{x_3} p_4^{x_4} - p_5^{x_5} p_6^{x_6} = 1.$$

   For all the solutions of these equations we have $\min_{1 \leq i \leq 6}(x_i) \leq 5$.

2. *The Diophantine equation*

$$2^{x_1} 3^{x_2} + 5^{x_3} 7^{x_4} - 11^{x_5} 13^{x_6} = 1$$

   has only two solutions in $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$*, namely*

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = (0, 0, 0, 0, 0, 0), (0, 2, 1, 0, 0, 1).$$

In Section 3.2 we consider a similar problem, with the difference that instead of working in $\mathbb{Z}$, now we work in the ring of integers of an arbitrary algebraic number field. We present several theorems related to an extension of Skolem's conjecture over number fields, and provide an extended algorithm which can be used to find the solutions of equations of type (A). Finally, we also give some numerical examples which demonstrate the usability of our algorithm. The results from this section are published in [4].

Theorem 11. *Let* $\mathbb{K} = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$*, where* d *is one of* $2, 3, 5$ *and consider the equations*

$$\beta_1^{x_1} + 2\beta_2^{x_2} - 3\beta_3^{x_3} = 1, \tag{3.10}$$

where $\beta_i = a_i + b_i\sqrt{d}$ *such that* a_i *and* b_i *are integers with* $\max\{|a_i|, |b_i|\} \leq 3$ *and* x_i *is a non-zero integer for every* $i = 1, 2, 3$*. If these equations have no solutions, then there exists an ideal* $\mathfrak{M}$ *such that the equations have no solutions modulo* $\mathfrak{M}$ *as well.*

In the last section of the dissertation we present several applications of the theorems and methods from the previous sections. These applications and theorems appear in our papers [2, 4, 5, 6]. Consider first a classical conjecture of Terai regarding the solutions of the equation

$$(4t^2 + 1)^x + (5t^2 - 1)^y = (3t)^z, \tag{1}$$

where t is an arbitrary but fixed positive integer and x, y, z are unknown positive integers. We prove the following.

Theorem 12 (Theorem 1 in [2]). *For any positive integer* t*, the Diophantine equation* (1) *has only one solution in* x, y *and* z*, namely* $(x, y, z) = (1, 1, 2)$.

For the following application denote by U_n the n-th term of the Fibonacci, Lucas, Pell or associated Pell sequence and let x, y and z be unknown, non-negative integers. We prove the following theorem.

Theorem 13 (Theorem 2.2 in [6]). *Let* U_n *be one of* F_n, L_n, P_n, Q_n. *Then the solutions of the equation*

$$U_n = 2^x + 3^y$$

in non-negative integers n, x, y *are*

	(n, x, y)
F_n	$(3, 0, 0), (4, 1, 0), (5, 1, 1), (5, 2, 0), (7, 2, 2), (11, 3, 4)$
L_n	$(0, 0, 0), (3, 0, 1), (2, 1, 0), (5, 1, 2),$ $(7, 1, 3), (4, 2, 1), (13, 9, 2), (5, 3, 1)$
P_n	$(2, 0, 0), (3, 1, 1), (5, 1, 3), (3, 2, 0), (9, 8, 6)$
Q_n	$(2, 1, 0), (3, 2, 1), (4, 3, 2), (4, 4, 0), (5, 5, 2)$

Furthermore, still with U_n *being one of* F_n, L_n, P_n, Q_n*, the* *solutions of the equation*

$$U_n = 2^x + 3^y + 5^z$$

in non-negative integers n, x, y, z *are*

	(n, x, y, z)
F_n	$(4,0,0,0), (5,0,1,0), (6,1,0,1), (9,1,3,1),$ $(6,2,1,0), (9,3,0,2), (12,4,1,3), (9,5,0,0)$
L_n	$(2,0,0,0), (4,0,0,1), (7,0,1,2), (5,0,2,0), (7,0,3,0),$ $(3,1,0,0), (6,2,2,1), (6,3,2,0), (6,4,0,0)$
P_n	$(3,0,1,0), (5,0,3,0), (4,1,2,0), (5,0,1,2), (4,2,1,1),$ $(4,3,1,0), (6,6,0,1), (8,8,3,3), (10,10,6,4)$
Q_n	$(2,0,0,0), (3,0,0,1)$

As an other application we determine all powers of $2, 3, 5$ and 7 which equals to the sum of three balancing numbers. For this denote by B_i the i-th balancing number and let $b \in \{2, 3, 5, 7\}$. Consider the equation

$$B_u + B_v + B_w = b^z \tag{2}$$

in non-negative integers u, v, w, z. We prove the following theorem.

Theorem 14 (Theorem 2 in [4]). *All solutions to equation* (2) *are*

b	u	v	w	z
2	0	1	1	1
2	1	1	2	3
3	1	1	1	1
7	0	1	2	1

As our last application we consider again the problem of multi-base representations. For this let $w_S^+(n)$ be the same as in the first part of this paper. In the dissertation we prove the following theorem.

Theorem 15 (Theorem 2.3 in [5]). *Let S_1, S_2 be disjoint, non-empty sets with $S_1 \cup S_2 = \{2, 3, 5\}$. Then*

$$w_{S_1}^+(n) + w_{S_2}^+(n) \leq 4$$

implies that

1. *if $S_1 = \{2\}$ and $S_2 = \{3, 5\}$ then $n \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 16, 18, 20, 24, 25, 32, 34, 36, 40, 48, 72, 80, 81, 96, 128, 130, 136, 144, 160, 258, 260, 288, 384, 640, 1152, 2050, 2052, 4104, 32832\}$;*
2. *if $S_1 = \{3\}$ and $S_2 = \{2, 5\}$ then $n \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 9, 10, 12, 18, 27, 28, 30, 36, 54, 81, 82, 84, 90, 108, 162, 252, 270, 324, 729, 756, 810, 6561, 6570\}$;*

3. *if* $S_1 = \{5\}$ *and* $S_2 = \{2, 3\}$ *then* $n \in \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 25, 26, 27, 30, 50, 125, 126, 130, 150, 625, 630, 650, 3125, 3126, 15625, 78750\}$.

Hivatkozások

[1] Cs. Bertók, *Representing integers as sums or differences of general power products*, Acta Mathematica Hungarica **141** (2013), 291–300.

[2] Cs. Bertók, *The complete solution of the Diophantine equation* $(4m^2+1)^x + (5m^2-1)^y = (3m)^z$, Periodica Mathematica Hungarica **72** (2016), 37–42.

[3] Cs. Bertók, L. Hajdu, *On a Hasse-type principle for exponential diophantine equations and its applications*, Mathematics of Computations **85** (2016), 849–860.

[4] Cs. Bertók, L. Hajdu, *A Hasse-type principle for exponential Diophantine equations over number fields and its applications*, Monatshefte für Mathematik **187** (2018), 425–436.

[5] Cs. Bertók, L. Hajdu, F. Luca, D. Sharma, *On the number of non-zero digits of integers in multi-base representations*, Publicationes Mathematicae Debrecen, **90** (2017), 181-194.

[6] Cs. Bertók, L. Hajdu, I. Pink, Zs. Rábai, *Linear combinations of prime powers in binary recurrence sequences*, International Journal of Number Theory, **13** (2017), 261–271.

[7] J. L. Brenner, L. L. Foster, *Exponential diophantine equations*, Pacific J. Math. **101** (1982), 263–301.

[8] Y. Bugeaud, M. Mignotte, S. Siksek Classical and modular approaches to exponential Diophantine equations. I. Fibonacci and Lucas perfect powers, *Ann. Math.* **163** (2006), 969–1018.

[9] V. S. Dimitrov, E. W. Howe, Lower bounds on the lengths of double-base representations, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **139** (2011), 3423–3430.

[10] J.-H. Evertse, *On sums of S-units and linear recurrences*, Compositio Math. **53** (1984), 225–244.

[11] J.-H. Evertse, K. Győry, *Unit Equations in Diophantine Number Theory*, pp. 378, Cambridge University Press, Cambridge (2015).

[12] K. Győry, *On the number of solutions of linear equations in units of an algebraic number field*, Comment. Math. Helv. **54** (1979), 583–600.

[13] L. Hajdu, R. Tijdeman, *Representing integers as linear combinations of powers*, Publ. Math. Debrecen **79** (2011), 461–468.

[14] L. Hajdu, R. Tijdeman, *Representing integers as linear combinations of power products*, Arch. Math. **98** (2012), 527–533.

[15] T. Kovács, *Combinatorial numbers in binary recurrences*, Period. Math. Hungar. **58** (2009), 83–98.

[16] D. Marques, A. Togbé, Fibonacci and Lucas numbers of the form $2^a + 3^b + 5^c$, *Proc. Japan Acad. Ser. A Math Sci.* **89** (2013), 47–50.

[17] M. B. Nathanson, *Geometric group theory and arithmetic diameter*, Publ. Math. Debrecen **79** (2011), 563–572.

[18] A. Pethő, Perfect powers in second order linear recurrences, *J. Number Theory* **15** (1982) 5–13.

[19] A. Pethő, B. M. M. de Weger, *Products of Prime Powers in Binary Recurrence Sequences, Part I: The Hyperbolic Case, with an Application to the Generalized Ramanujan-Nagell Equation*, Math. Comp. **47** (1986), 714–727.

[20] A. Pethő, *The Pell sequence contains only trivial perfect powers*, Proc. Sets Graphs and Numbers. Coll. Math. Soc. János Bolyai Vol. **60** (1992), 561–568.

[21] A. Pethő, R. F. Tichy, *S-unit equations, linear recurrences and digit expansions*, Publ. Math. Debrecen **42** (1993), 145–154.

[22] T. N. Shorey, C. L. Stewart, *On the Diophantine equation $ax^{2t}+bx^ty+cy^2=d$ and pure powers in recurrence sequences*, Math. Scand. **52** (1983), 24–36.

Bertók Csanád publikációi/Publications of Csanád Bertók

[i] Cs. Bertók, *Representing integers as sums or differences of general power products*, Acta Mathematica Hungarica **141** (2013), 291–300.

[ii] Cs. Bertók, *The complete solution of the Diophantine equation* $(4m^2+1)^x+(5m^2-1)^y=(3m)^z$, Periodica Mathematica Hungarica **72** (2016), 37–42.

[iii] Cs. Bertók, K. Győry, L. Hajdu, A. Schinzel, *On the smallest number of terms of vanishing sums of units in number fields*, Journal of Number Theory **192** (2018), 328–347.

[iv] Cs. Bertók, L. Hajdu, *On a Hasse-type principle for exponential diophantine equations and its applications*, Mathematics of Computations **85** (2016), 849–860.

[v] Cs. Bertók, L. Hajdu, *A Hasse-type principle for exponential Diophantine equations over number fields and its applications*, Monatshefte für Mathematik **187** (2018), 425–436.

[vi] Cs. Bertók, L. Hajdu, F. Luca, D. Sharma, *On the number of non-zero digits of integers in multi-base representations*, Publicationes Mathematicae Debrecen, **90** (2017), 181-194.

[vii] Cs. Bertók, L. Hajdu, A. Pethő, *On the distribution of polynomials with bounded height*, Journal of Number Theory **179** (2017), 172–184.

[viii] Cs. Bertók, L. Hajdu, I. Pink, Zs. Rábai, *Linear combinations of prime powers in binary recurrence sequences*, International Journal of Number Theory, **13** (2017), 261–271.

[ix] Cs. Bertók, G. Nyul, *On monochromatic linear recurrence sequences*, Contributions to Discrete Mathematics, **11** (2016), 58–62.

[x] Cs. Bertók, A. Pethő, M. Pohst, *On multidimensional Diophantine approximation of algebraic numbers*, Journal of Number Theory, **171** (2017), 422–448.

DEBRECENI EGYETEM
EGYETEMI ÉS NEMZETI KÖNYVTÁR
H-4002 Debrecen, Egyetem tér 1, Pf.: 400
Tel.: 52/410-443, e-mail: publikaciok@lib.unideb.hu

Nyilvántartási szám: DEENK/370/2018.PL
Tárgy: PhD Publikációs Lista

Jelölt: Bertók Csanád
Neptun kód: FVBZZI
Doktori Iskola: Matematika- és Számítástudományok Doktori Iskola
MTMT azonosító: 10055504

A PhD értekezés alapjául szolgáló közlemények

Idegen nyelvű tudományos közlemények hazai folyóiratban (3)

1. **Bertók, C.**, Hajdu, L., Luca, F., Sharma, D.: On the number of non-zero digits of integers in multi-base representations.
   Publ. Math. Debr. 90 (1-2), 181-194, 2017. ISSN: 0033-3883.
   DOI: http://dx.doi.org/10.5486/PMD.2017.7562
   IF: 0.526

2. **Bertók, C.**: The complete solution of the Diophantine equation (4m^2+1)^x+(5m^2-1)^y=(3m)^z.
   Period. Math. Hung. 72 (1), 37-42, 2016. ISSN: 0031-5303.
   DOI: http://dx.doi.org/10.1007/s10998-016-0111-x
   IF: 0.415

3. **Bertók, C.**: Representing integers as sums or differences of general power products.
   Acta Math. Hung. 141 (3), 291-300, 2013. ISSN: 0236-5294.
   DOI: http://dx.doi.org/10.1007/s10474-013-0309-9
   IF: 0.401

Idegen nyelvű tudományos közlemények külföldi folyóiratban (3)

4. **Bertók, C.**, Hajdu, L.: A Hasse-type principle for exponential Diophantine equations over number fields and its applications.
   Mon.hefte Math. 187 (3), 425-436, 2018. ISSN: 0026-9255.
   DOI: http://dx.doi.org/10.1007/s00605-018-1169-8
   IF: 0.735 (2017)

DEBRECENI EGYETEM

DEBRECENI EGYETEM
EGYETEMI ÉS NEMZETI KÖNYVTÁR
H-4002 Debrecen, Egyetem tér 1, Pf.: 400
Tel.: 52/410-443, e-mail: publikaciok@lib.unideb.hu

5. **Bertók, C.**, Hajdu, L., Pink, I., Rábai, Z.: Linear combinations of prime powers in binary recurrence sequences.
   Int. J. Number Theory. 13 (261), [1-12], 2017. ISSN: 1793-0421.
   DOI: http://dx.doi.org/10.1142/S1793042117500166
   IF: 0.536

6. **Bertók, C.**, Hajdu, L.: A Hasse-type principle for exponential Diophantine equations and its applications.
   Math. Comput. 85 (298), 849-860, 2016. ISSN: 0025-5718.
   DOI: http://dx.doi.org/10.1090/mcom/3002
   IF: 1.569

További közlemények

Idegen nyelvű tudományos közlemények külföldi folyóiratban (5)

7. **Bertók, C.**, Győry, K., Hajdu, L., Schinzel, A.: On the smallest number of terms of vanishing sums of units in number fields.
   J. Number Theory. 192, 328-347, 2018. ISSN: 0022-314X.
   DOI: http://dx.doi.org/10.1016/j.jnt.2018.04.020
   IF: 0.774 (2017)

8. **Bertók, C.**, Nyul, G.: On monochromatic linear recurrence sequences.
   Contrib. Discret. Math. 11 (2), 58-62, 2017. ISSN: 1715-0868.
   IF: 0.353

9. Pethő, A., Pohst, M., **Bertók, C.**: On multidimensional Diophantine approximation of algebraic numbers.
   J. Number Theory. 171, 422-448, 2017. ISSN: 0022-314X.
   DOI: http://dx.doi.org/10.1016/j.jnt.2016.07.002
   IF: 0.774

10. **Bertók, C.**, Hajdu, L., Pethő, A.: On the distribution of polynomials with bounded height.
    J. Number Theory. 179, 172-184, 2017. ISSN: 0022-314X.
    IF: 0.774

DEBRECENI EGYETEM
EGYETEMI ÉS NEMZETI KÖNYVTÁR
H-4002 Debrecen, Egyetem tér 1, Pf.: 400
Tel.: 52/410-443, e-mail: publikaciok@lib.unideb.hu

11. Oláh, V., Lakatos, G., **Bertók, C.**, Kanalas, P., Szőllősi, E., Kis, J., Mészáros, I.: Short-term chromium(VI) stress induces different photosynthetic responses in two duckweed species, Lemna gibba L. and Lemna minor L.
    Photosynthetica. 48 (4), 513-520, 2010. ISSN: 0300-3604.
    DOI: http://dx.doi.org/10.1007/s11099-010-0068-6
    IF: 1.016

A közlő folyóiratok összesített impakt faktora: 7,873
A közlő folyóiratok összesített impakt faktora (az értekezés alapjául szolgáló közleményekre): 4,182

A DEENK a Jelölt által az iDEa Tudóstérbe feltöltött adatok bibliográfiai és tudománymetriai ellenőrzését a tudományos adatbázisok és a Journal Citation Reports Impact Factor lista alapján elvégezte.

Debrecen, 2018.12.04.

UNIVERSITY of DEBRECEN

UNIVERSITY AND NATIONAL LIBRARY
UNIVERSITY OF DEBRECEN
H-4002 Egyetem tér 1, Debrecen
Phone: +3652/410-443, email: publikaciok@lib.unideb.hu

Registry number: DEENK/370/2018.PL
Subject: PhD Publikációs Lista

Candidate: Csanád Bertók
Neptun ID: FVBZZI
Doctoral School: Doctoral School of Mathematical and Computational Sciences
MTMT ID: 10055504

List of publications related to the dissertation

Foreign language scientific articles in Hungarian journals (3)

1. **Bertók, C.**, Hajdu, L., Luca, F., Sharma, D.: On the number of non-zero digits of integers in multi-base representations.
   Publ. Math. Debr. 90 (1-2), 181-194, 2017. ISSN: 0033-3883.
   DOI: http://dx.doi.org/10.5486/PMD.2017.7562
   IF: 0.526

2. **Bertók, C.**: The complete solution of the Diophantine equation (4m^2+1)^x+(5m^2-1)^y=(3m)^z.
   Period. Math. Hung. 72 (1), 37-42, 2016. ISSN: 0031-5303.
   DOI: http://dx.doi.org/10.1007/s10998-016-0111-x
   IF: 0.415

3. **Bertók, C.**: Representing integers as sums or differences of general power products.
   Acta Math. Hung. 141 (3), 291-300, 2013. ISSN: 0236-5294.
   DOI: http://dx.doi.org/10.1007/s10474-013-0309-9
   IF: 0.401

Foreign language scientific articles in international journals (3)

4. **Bertók, C.**, Hajdu, L.: A Hasse-type principle for exponential Diophantine equations over number fields and its applications.
   Mon.hefte Math. 187 (3), 425-436, 2018. ISSN: 0026-9255.
   DOI: http://dx.doi.org/10.1007/s00605-018-1169-8
   IF: 0.735 (2017)

UNIVERSITY of DEBRECEN

UNIVERSITY AND NATIONAL LIBRAY
UNIVERSITY OF DEBRECEN
H-4002 Egyetem tér 1, Debrecen
Phone: +3652/410-443, email: publikaciok@lib.unideb.hu

5. **Bertók, C.**, Hajdu, L., Pink, I., Rábai, Z.: Linear combinations of prime powers in binary recurrence sequences.
   Int. J. Number Theory. 13 (261), [1-12], 2017. ISSN: 1793-0421.
   DOI: http://dx.doi.org/10.1142/S1793042117500166
   IF: 0.536

6. **Bertók, C.**, Hajdu, L.: A Hasse-type principle for exponential Diophantine equations and its applications.
   Math. Comput. 85 (298), 849-860, 2016. ISSN: 0025-5718.
   DOI: http://dx.doi.org/10.1090/mcom/3002
   IF: 1.569

List of other publications

Foreign language scientific articles in international journals (5)

7. **Bertók, C.**, Győry, K., Hajdu, L., Schinzel, A.: On the smallest number of terms of vanishing sums of units in number fields.
   J. Number Theory. 192, 328-347, 2018. ISSN: 0022-314X.
   DOI: http://dx.doi.org/10.1016/j.jnt.2018.04.020
   IF: 0.774 (2017)

8. **Bertók, C.**, Nyul, G.: On monochromatic linear recurrence sequences.
   Contrib. Discret. Math. 11 (2), 58-62, 2017. ISSN: 1715-0868.
   IF: 0.353

9. Pethő, A., Pohst, M., **Bertók, C.**: On multidimensional Diophantine approximation of algebraic numbers.
   J. Number Theory. 171, 422-448, 2017. ISSN: 0022-314X.
   DOI: http://dx.doi.org/10.1016/j.jnt.2016.07.002
   IF: 0.774

10. **Bertók, C.**, Hajdu, L., Pethő, A.: On the distribution of polynomials with bounded height.
   J. Number Theory. 179, 172-184, 2017. ISSN: 0022-314X.
   IF: 0.774

UNIVERSITY of DEBRECEN

UNIVERSITY AND NATIONAL LIBRAY
UNIVERSITY OF DEBRECEN
H-4002 Egyetem tér 1, Debrecen
Phone: +3652/410-443, email: publikaciok@lib.unideb.hu

11. Oláh, V., Lakatos, G., **Bertók, C.**, Kanalas, P., Szőllősi, E., Kis, J., Mészáros, I.: Short-term chromium(VI) stress induces different photosynthetic responses in two duckweed species, Lemna gibba L. and Lemna minor L.
    Photosynthetica. 48 (4), 513-520, 2010. ISSN: 0300-3604.
    DOI: http://dx.doi.org/10.1007/s11099-010-0068-6
    IF: 1.016

Total IF of journals (all publications): 7,873
Total IF of journals (publications related to the dissertation): 4,182

The Candidate's publication data submitted to the iDEa Tudóstér have been validated by DEENK on the basis of Web of Science, Scopus and Journal Citation Report (Impact Factor) databases.

04 December, 2018