Egyetemi doktori (PhD) értekezés tézisei

Diophantine equations with separated variables

Péter Gyöngyvér

Témavezető: Dr. Pintér Ákos

Debreceni Egyetem
Matematika- és Számítástudományok Doktori Iskola

Debrecen, 2016

Chapter 1

Introduction

Our PhD dissertation consists of an Introduction and three more chapters. Our results have been published in [57], [64] and [43]. Here we shall give an introduction to the topic of our investigation and an overview of our results.

The questions and problems of Diophantine equations can be found all over through mathematical history in every great civilisations but without any tools for solving general Diophantine equations.

This is Hilbert's tenth problem (from 1900), namely the determination of the solvability of a Diophantine equation. Whether there exists a general finite algorithm for any Diophantine equation with any number of variables which determines whether the equation has rational integer solutions. In

1970 Matijasevic [59] proved that such an algorithm does not exist.

As a result, since there is no universal algorithm, methods for solving certain classes of Diophantine equations gained big interest since then.

Such an efficient tool for solving different types of Diophantine equations is the Baker method, based on Baker's inequality giving a non-trivial lower bound for linear logarithmic forms. Baker gained his famous result in 1966. Based on this result since then also several further improvements and applications were born. For further details in this topic we refer to [3], [5], [6] and [7].

We introduce here a sharper version of the original theorem, the Baker-Wüstholz Theorem [9].

Let $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ be algebraic numbers, not 0 or 1, and by $\log \alpha_1, \ldots, \log \alpha_n$ we mean fixed determinations of the logarithms. Let K be the field generated by $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ over the rationals $\mathbb{Q}$ and let d be the degree of K.

Set $A_j = \max(H(\alpha_j), e)$, where $H(\alpha_j)$ denotes the classical height of α_j, i.e. the maximum of the absolute values of the coefficients of the minimal defining polynomial of α_j and $e = 2,718....$

Theorem A *Let $b_1, \ldots, b_n$ be rational integers, not all 0 and suppose that $B \geq \max|b_j|$. If $\Lambda = b_1 \log \alpha_1 + b_2 \log \alpha_2 + \ldots + b_k \log \alpha_k \neq 0$ then*

$$\log|\Lambda| > -(16nd)^{2(n+2)} \log A_1 \ldots \log A_n \log B.$$

There are several important applications of the Baker method for special families of equations. We refer here to [77].

Two of the important classes of equations are the hyper- and superelliptic equations in integers x and y. Let

$$f(x) = by^m \tag{1.1}$$

where $f \in \mathbb{Z}[x]$, $\deg f \geq 2$ and $m \geq 2$ fixed and further $b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$. The equation is called hyperelliptic in case $m = 2$, and called superelliptic in case $m \geq 3$. Applying his method Baker reached the following results in some special cases.

Theorem B *Let $m \geq 3$. Suppose that $f(X)$ has at least two simple roots. If x and y are rational integers satisfying equation 1.1, then*

$$\max(|x|, |y|) \leq C_3$$

for some computable C_3 depending only on b, m and f.

See [4].

Theorem C *Suppose that $m = 2$ and $f(X)$ has at least three simple roots. Then all the solutions of equation 1.1 in rational* *integers x and y satisfy*

$$\max(|x|, |y|) \leq C_4$$

where C_4 is a computable number depending only on b and f.

See [4].

Using the Baker method Schinzel and Tijdeman got an effective result also with the exponent as a variable.

Theorem D *Let $f(X)$ be a polynomial with rational integer coefficients and with at least two distinct roots. Suppose $b \neq 0$, $m \geq 0$, x and y with $|y| > 1$ are rational integers satisfying*

$$f(x) = by^m$$

then m is bounded by a computable number depending only on b and f.

This is the main result of [76].

However there are theorems which present general ineffective results for the equations of the type $f(x) = g(y)$. There are two key results concerning separable Diophantine equations. The first one is due to Davenport, Lewis and Schinzel, see [29].

The second one is the Bilu-Tichy Theorem [16] which is an improvement of the theorem of Davenport, Lewis and Schinzel.

To formulate the theorem, we define *five kinds of standard pairs of polynomials.*

In the sequel α and β denote non-zero rational numbers, q, s and t are positive integers, r is a non-negative integer and $v(X) \in \mathbb{Q}[X]$ is a non-zero polynomial, which may be constant.

A *standard pair of the first kind* is

$$(X^q, \alpha X^r v(X)^q), \text{ (or switched, } (\alpha X^r v(X)^q, X^q))$$

where $0 \le r < q$, $(r, q) = 1$ and $r + \deg v(X) > 0$.

A *standard pair of the second kind* is

$$(X^2, (\alpha X^2 + \beta)\nu(X)^2) \text{ (or switched).}$$

Denote by $D_s(X, \alpha)$ the sth Dickson polynomial, defined by, for example, the explicit formula

$$D_s(X, \alpha) = \sum_{i=0}^{[s/2]} \frac{s}{s-i} \binom{s-i}{i} (-\alpha)^i X^{s-2i}.$$

A *standard pair of the third kind* is

$$\left(D_s(X, \alpha^t), D_t(X, \alpha^s)\right)$$

where $\gcd(s, t) = 1$.

A *standard pair of the fourth kind* is

$$\left(\alpha^{-s/2}D_s(X,\alpha), -\beta^{-t/2}D_t(X,\beta)\right),$$

where $\gcd(s,t)=2$.

A *standard pair of the fifth kind* is

$$\left((\alpha X^2-1)^3, 3X^4-4X^3\right) \text{ (or switched).}$$

Theorem E *Let $P(X)$, $Q(X) \in \mathbb{Q}[X]$ be non-constant polynomials such that the equation $P(x)=Q(y)$ has infinitely many solutions x, y with a bounded denominator. Then we have $P=\phi\circ f\circ\lambda$ and $Q=\phi\circ g\circ\mu$, where $\lambda(X)$, $\mu(X)\in\mathbb{Q}[X]$ are linear polynomials, $\phi(X)\in\mathbb{Q}[X]$ and $(f(X),g(X))$ is a standard pair.*

This result relies on Siegel's theorem.

In our dissertation we were going to investigate some specific types of separable Diophantine equations. In our research we were focusing to find and give ineffective and effective theorems on certain classes of separable Diophantine equations based on classical results like the Bilu-Tichy Theorem or the Baker Theorem. Our goal was to be able to give ineffective general results, effective results for specific classes just as to give numerical results for known parameters.

Chapter 2

On some polynomial values of repdigit numbers

In chapter two we investigated the arithmetic properties of repdigit numbers. Namely we studied the equal values of repdigit and lth order k dimensional polygonal numbers.

Let

$$f_{k,l}(x) = \frac{x(x+1)\cdots(x+k-2)((l-2)x+k+2-l)}{k!}$$

be the lth order k dimensional polygonal number, where $k \geq 2$ and $l \geq 3$ are fixed integers. These figural numbers have already been investigated from several aspects and therefore have a rich literature, see Dickson [30].

Another important class of combinatorial numbers is the numbers of the form $d \cdot \frac{10^n-1}{10-1}$, $1 \leq d \leq 9$. They are called repdigits and for $d = 1$, repunits. Various results and conjectures have been stated concerning prime repunits and certain Diophantine problems related to repdigits, see [35] and in [77, Chapter 12], respectively.

One can also define the so-called generalized repunits with the formula $\frac{b^n-1}{b-1}$ for an integer $b \geq 2$.

In our work we studied the equal values of repdigits and the k dimensional polygonal numbers. We stated some effective finiteness theorems, and for small parameter values we completely solved the corresponding equations.

A common generalization of repdigits and generalized repunits are numbers of the form

$$d \cdot \frac{b^n - 1}{b - 1},$$

i.e., taking repdigits with repeating digit d in the number system of base b, where $1 \leq d < b$ and $b \geq 2$ integers.

We consider equation

$$d \cdot \frac{b^n - 1}{b - 1} = f_{k,l}(x) \tag{2.1}$$

and its special cases

$$d \cdot \frac{10^n - 1}{10 - 1} = f_{k,l}(x) \tag{2.2}$$

and

$$\frac{b^n - 1}{b - 1} = f_{k,l}(x). \tag{2.3}$$

In our first result we represent an effective finiteness statement concerning the most general equation 2.1.

Theorem 1 *Suppose that $k \geq 3$ or $k = 2$ and $l = 4$ or $l > 13$. Then equation 2.1 has only finitely many integer solutions in x and n, further,*

$$\max(|x|, n) < c_1,$$

where c_1 is an effectively computable constant depending on k, l, b and d. For $k = 2$ and $l \in \{3, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$ equation 2.1 has infinitely many solutions for infinitely many values of the parameters b, d.

In the following two theorems we consider the special cases of equation 2.1 with repdigits or generalized repunits.

Theorem 2 *Equation 2.2 with $k \geq 2$ has only finitely many integer solutions n, x except for the values $(d, l) = (3, 8)$. In these cases the equation has infinitely many solutions that can be given explicitly.*

Theorem 3 *Equation 2.3 with $k \geq 2$ has only finitely many integer solutions n, x except for the values $(b, l) = (4, 8), (9, 3), (9, 6), (25, 5)$. In these cases the equation has infinitely many solutions that can be given explicitly.*

The proofs of the previous three theorems are based on the theorem of Schinzel and Tijdeman on hiper- and superelliptic type equations and on an elementary approach.

In our numerical investigations we take those polynomials $f_{k,l}(x)$, where $k \in \{2, 3\}$. For both cases we let $d \in \{1, 2, \ldots, 9\}$ and $l \in \{3, 4, \ldots, 20\}$ and solve completely the corresponding equation. To state our numerical results, we need the following concept. A solution to equation 2.2 is called trivial if it yields $0 = 0$ or $1 = 1$. This concept is needed because of the huge number of trivial solutions, on the other hand, such solutions of 2.2 can be listed easily for any fixed k.

In the proof by transforming our original equation we obtain an elliptic equation which can further be solved by the program package MAGMA.

Theorem 4 *All nontrivial solutions of equation 2.2 in case of $k = 2, 3$, respectively, are exactly those contained in Tables 2.2 and 2.1 respectively.*

We would like to remark here that we considered some other related equations, corresponding to larger values of the parameter k of the polynomial $f_{k,l}(x)$, that lead to genus 2 equations. However, because of certain technical difficulties, we could not solve them by the Chabauty method.

The results of this chapter were published in paper [57].

(d, l)	solutions (n, x)	$f_{k,l}(x)$
$(1, 10)$	$(2, 2)$	11
$(2, 6)$	$(2, 3)$	22
$(4, 3)$	$(1, 2)$	4
$(5, 4)$	$(1, 2)$	5
$(5, 4)$	$(2, 5)$	55
$(6, 5)$	$(1, 2)$	6
$(6, 17)$	$(2, 3)$	66
$(7, 6)$	$(1, 2)$	7
$(8, 7)$	$(1, 2)$	8
$(9, 8)$	$(1, 2)$	9

Table 2.1: The case of $f_{3,l}(x)$

(d,l)	solutions (n,x)	$f_{k,l}(x)$	(d,l)	solutions (n,x)	$f_{k,l}(x)$
$(1,9)$	$(3,6)$	111	$(6,3)$	$(2,11)$	66
$(1,11)$	$(2,2)$	11	$(6,3)$	$(2,-12)$	66
$(1,14)$	$(2,-1)$	11	$(6,3)$	$(3,36)$	666
$(1,19)$	$(4,-11)$	1111	$(6,3)$	$(3,-37)$	666
$(2,5)$	$(1,-1)$	2	$(6,6)$	$(1,2)$	6
$(2,5)$	$(2,4)$	22	$(6,6)$	$(2,6)$	66
$(2,5)$	$(3,-12)$	222	$(6,6)$	$(3,-18)$	666
$(2,10)$	$(2,-2)$	22	$(6,9)$	$(1,-1)$	6
$(3,3)$	$(1,2)$	3	$(6,9)$	$(2,-4)$	66
$(3,3)$	$(1,-3)$	3	$(6,9)$	$(4,44)$	6666
$(3,6)$	$(1,-1)$	3	$(6,17)$	$(3,-9)$	666
$(3,11)$	$(3,9)$	333	$(7,5)$	$(1,-2)$	7
$(3,12)$	$(2,3)$	33	$(7,5)$	$(2,-7)$	77
$(4,4)$	$(1,2)$	4	$(7,7)$	$(1,2)$	7
$(4,4)$	$(1,-2)$	4	$(7,10)$	$(1,-1)$	7
$(4,7)$	$(1,-1)$	4	$(8,8)$	$(1,2)$	8
$(5,3)$	$(2,-11)$	55	$(8,11)$	$(1,-1)$	8
$(5,3)$	$(2,10)$	55	$(8,16)$	$(2,4)$	88
$(5,5)$	$(1,2)$	5	$(9,4)$	$(1,3)$	9
$(5,6)$	$(2,-5)$	55	$(9,4)$	$(1,-3)$	9
$(5,7)$	$(2,5)$	55	$(9,7)$	$(2,-6)$	99
$(5,8)$	$(1,-1)$	5	$(9,9)$	$(1,2)$	9
$(6,3)$	$(1,3)$	6	$(9,12)$	$(1,-1)$	9
$(6,3)$	$(1,-4)$	6	$(9,19)$	$(2,-3)$	99

Table 2.2: The case of $f_{2,l}(x)$

Chapter 3

On equal values of trinomials

Secondly we were examining the question whether one could give general conditions for two trinomials of the form $ax^m + bx^n + c = dy^p + ey^q$ having infinitely many equal values.

Previously many classical partial results were born. In the second chapter using the Bilu-Tichy Theorem and the decomposition properties of trinomials we could give an ineffective criterion in general for two trinomials to have infinitely many equal values at rationals with a bounded denominator.

Let a, b, c, d, e, m, n, p and q be fixed rational integers. In this chapter we proved

Theorem 5 *The Diophantine equation*

$$ax^m + bx^n + c = dy^p + ey^q$$

where $m > n > 0$, $p > q > 0$, $(m,n) = (p,q) = 1$, $ab \neq 0$, $de \neq 0$ *and either* $m > p \geq 3$ *or* $m = p \geq 3$, $n \geq q$ *has infinitely many solutions* x, y *with a bounded denominator if and only if either*

$$m = p, n = q, a = dt^m, b = et^n, t \in \mathbb{Q}, c = 0,$$

or

$$m = p = 3, n = q = 2, a^2e^3 + b^3d^2 = 0, c = -\frac{4b^3}{27a^2},$$

or

$$m = p = 3, n = 2, q = 1, 27a^4e^3 + b^6d = 0, c = \frac{2a^2e^3}{b^3d^2}.$$

In the special case $p = 2$ we gave an upper bound for the solutions x and y. Set $H = \max(|a|, |b|, |c|, |d|, |e|, m, n)$.

Theorem 6 *Suppose that* $m \geq 5$, $m > n > 0$, $abd \neq 0$, $m \neq 2n$ *and* $(m,n) \notin \{(6,2),(6,4)\}$, *further, if* $4dc + e^2 = 0$ *then assume that* $m - n \geq 3$ *or* $m - n = 2$ *and* n *is odd. The*

Diophantine equation

$$ax^m + bx^n + c = dy^2 + ey \textit{ in integers } x \textit{ and } y$$

implies $max(|x|, |y|) < c_2$, *where* c_2 *is an effectively computable constant depending only on H.*

The proof was mainly based on Brindza's theorem on hyperelliptic equations and on the fact that apart from the exceptional cases the corresponding trinomial possesses at least three zeros of odd multiplicity.

In Table 3.1 we give some families of Diophantine equations with infinitely many integer solutions x and y for the exponential pairs (m, n) (here t, u and v are integer parameters).

The results of this chapter were published in paper [64].

(m,n)	equation	solutions
$(2n,n)$	$x^{2n}+2bx^n+b^2-1=$ y^2+2y	$y=x^n+b-1$
$(3,1)$	$x^3-3t^4x+t^6=$ $2y^2+4t^2y$	$x=u^2-2t^2$, $y=u(u^2-3t^2)-t^3$
$(3,2)$	$x^3+3t^2x^2-5t^6=$ y^2+2t^3y	$x=u^2+t^2$, $y=u(u^2+3t^2)-t^3$
$(4,1)$	$x^4+4t^3x+t^4=$ $2y^2+4t^2y$	$u^2+2t^2=2v^2$, $x=u+t$, $y=v(u+2t)-t^2$
$(4,3)$	$x^4+4tx^3+25t^4=$ $x=u+t$	$u^2+2t^2=2v^2$, , $y=v(u+4t)-t^2$
$(6,2)$	$x^6-3t^4x^2=$ $2y^2+4t^3y$	$u^2+2t^2=2v^2$, $x=u$, $y=v(u^2-t^2)-t^3$
$(6,4)$	$x^6-3t^2x^4+2t^6=$ $2y^2+4t^3y$	$u^2+t^2=2v^2$, $x=u$, $y=v(u^2-2t^2)-t^3$

Table 3.1: Equations with infinitely many solutions

Chapter 4

Equal values of standard counting polynomials

Lastly in Chapter 4 we were dealing with the question of separable Diophantine equations of discrete geometrical background.

The most fundamental polynomials counting integer points are X^n in an n-dimensional unit cube, $\binom{X+n}{n}$ in a standard n-simplex,

$$S_{n-1}(X) = 1^{n-1} + 2^{n-1} + \ldots + X^{n-1}$$

in an n-dimensional pyramid, and

$$P_n(X) = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \binom{X+n-j}{n}$$

for an octahedron in dimension n. Our purpose was to consider the possible equal values of these polynomials in case of integral variables. In other words, for given positive integers m, n, how often can two bodies (unit cube, simplex, pyramid, octahedron) of dimensions m and n, respectively, contain equally many integral points? One can see that the above problems lead to 9 nontrivial families of Diophantine equations, see Table 4.1.

No	equation	remark
1	$S_m(x) = S_n(y)$	$n > m \geq 1$
2	$S_m(x) = y^n$	$m \geq 1, n \geq 2$, (m,n)$\notin \{(1,2),(3,2),(3,4),(5,2)\}$
3	$S_m(x) = \binom{y}{n}$	$m \geq 1, n \geq 2, (m,n) \neq (1,2)$
4	$S_m(x) = P_n(y)$	$m \geq 1, n \geq 2, (m,n) \neq (1,2)$
5	$\binom{x}{m} = y^n$	$m \geq 2, n \geq 2, (m,n) \neq (2,2)$
6	$\binom{x}{m} = \binom{y}{n}$	$n > m \geq 2$
7	$\binom{x}{m} = P_n(y)$	$m \geq 2, n \geq 2, (m,n) \neq (2,2)$
8	$P_m(x) = y^n$	$m \geq 2, n \geq 2, (m,n) \neq (2,2)$
9	$P_m(x) = P_n(y)$	$n > m \geq 2$

Table 4.1: The investigated families of Diophantine equations

For the equation of **Family 1** we propose the following

Conjecture 1 *All the solutions to the equation* $S_m(x) = S_n(y)$ *in integers* $n > m \geq 1$ *and* x, y *are* $(m, n, x, y) = (1, 2, 10, 5)$, $(1, 2, 13, 6), (1, 3, 8, 3), (1, 5, 23, 3), (1, 5, 353, 9)$.

This conjecture is based upon an extensive numerical investigation. However, its proof seems well beyond the reach of current techniques.

Our ineffective new results rely mainly on the Bilu-Tichy Theorem and the effective results on the Baker Theorem.

In case of the equations of **Family 3** further using Rakaczki's theorem [71] on $S_m(x) = a\binom{y}{n} + b$ we proved that

Theorem 7 *If* $m \geq 1, n \geq 2$ *and* $(m, n) \neq (1, 2)$ *then* $S_m(x) = \binom{y}{n}$ *has only finitely many solutions in integers* x *and* y.

In case if m or n is small using an effective theorem of Rakaczki [72] for equation $s(1^m + 2^m + \ldots + x^m) + r = y^n$, an effective finiteness theorem of Yuan [88] for equation $a\binom{x}{n} = by^n + c$ and Győry's theorem [38] on equation $\binom{x}{m} = y^n$, we got the following effective result.

Theorem 8 *Let* $n \in \{2, 4\}$ *and* $m \geq 1$ *with* $(m, n) \neq (1, 2)$ *or* $m \in \{1, 3\}$ *and* $n \geq 2$. *Then all the solutions of the equation* $S_m(x) = \binom{y}{n}$ *in integers* x *and* y *are bounded by an effectively computable constant depending only on* m *or* n, *respectively. Further, if* $m = 3$ *and* $n \geq 2$, *then there is no solution.*

In case of **Family 4** for small values of m or n based on the theorem of Pintér over simple zeros of polynomials [65], the effective finiteness theorem of Rakaczki and Baker's theorem on hyperelliptic equations [4] we proved the following.

Theorem 9 *If* $m \in \{1, 3\}$ *and* $n \geq 2$ *or* $n \in \{2, 4\}$ *and* $m \geq 1$ *then the equation* $S_m(x) = P_n(y)$ *implies that* $\max(x, y) < c_9$*, where* c_9 *is an effectively computable constant depending only on* n *or* m*, respectively.*

In the general case, using the Bilu-Tichy Theorem we reached the following result.

Theorem 10 *Assume that* $m \geq 2, n > 2$ *and* $\gcd(m+1, n) = 1$*. Then equation* $S_m(x) = P_n(y)$ *has only finitely many solutions in integers* x *and* y*.*

We conjecture that this last Theorem is true omitting the condition for the greatest common divisor of $m + 1$ and n.

In case of **Family 7** for small values of m or n we proved the following theorem relying on the results of Pintér, Baker and Yuan.

Theorem 11 *If* $m \in \{2, 4\}$ *and* $n \geq 3$ *or* $n \in \{2, 4\}$ *and* $m \geq 3$ *then equation* $\binom{x}{m} = P_n(y)$ *implies that* $\max(x, y) < c_{10}$*, where* c_{10} *is an effectively computable constant depending only on* n *or* m*, respectively.*

Based on the Bilu-Tichy Theorem we got the next result.

Theorem 12 *Suppose that* $\min\{m,n\} \geq 3$. *Then equation* $\binom{x}{m} = P_n(y)$ *has only finitely many solutions in integers* x *and* y.

In case of **Family 8** we gained the following result using Pintér's theorem and the bounds on the superelliptic and hyperelliptic equations.

Theorem 13 *Let* m, n *be integers with* $m \geq 2, n \geq 2$ *and suppose that* $(m,n) \neq (2,2)$. *The equation* $P_m(x) = y^n$ *in integers* x, y *and* n *implies* $\max\{|x|, |y|, n\} < c_{11}$ *where* c_{11} *is an effectively computable constant depending only on* m.

Based on the resolution of Cohn on the equation $x^2+1 = y^n$ [27] we have

Theorem 14 *All the solutions of the equation* $P_2(x) = y^n$ *in integers* x, y *and* $n > 2$ *are* $x = 0$, $y = 1$ *and* $x = 119$, $y = 13$, $n = 4$.

The results of this chapter were published in [43].

1. fejezet

Bevezető

Disszertációnk a bevezetőből és 3 további fejezetből áll, melynek mindegyike új eredményeket is tartalmaz. Eredményeinket az [57], [64] és a [43] cikkekben közöltük. A bevezetőben bemutatjuk a témakört és előzményeit illetve bemutatjuk a cikkek és az egyes fejezetek tartalmát.

A diofantikus egyenletekkel kapcsolatos kérdések, problémák a matematikatörténet során végig jelen voltak minden nagyobb civilizációban, azonban tetszőleges diofantikus egyenletre általános megoldási módszer sohasem létezett.

Ez volt Hilbert (1900-ból származó) 10. kérdése, nevezetesen, hogy eldönthető-e tetszőleges diofantikus egyenlet megoldhatósága. Azaz létezik-e olyan általános, véges lépésszámú algoritmus tetszőleges számú változóval, tetszőleges diofantikus egyenletre, mely meghatározza, hogy az egyenletnek létezik-e racionális egész értékű megoldása? 1970-ben Matijasevic [59] bebizonyította, hogy ilyen nem létezik.

Ennek az eredménynek az lett a következménye, hogy mivel nem létezik univerzális algorimus, bizonyos típusú egyenletosztályok egyes típusaira alkalmazható megoldási módszerek kerültek a tudományos érdeklődés középpontjába.

Ilyen, nagy jelentőségű eredmény például a Baker-módszer, amely diofantikus egyenletek több osztályának megoldását szolgáltatja. Alapja a Baker egyenlőtlenség, amely lineáris logaritmikus formák egy nem triviális alsó becslését adja meg. Bakernek ez az eredménye 1966-ból származik. Ebből az eredményből kiindulva azóta több további eredmény és alkalmazás is született. Ebben a témakörben további részletek a [3], [5], [6] és [7] cikkekben és jegyzetekben találhatók.

A következő tételben mi itt most az eredeti tétel egy élesítését, a Baker-Wüstholz tételt [9] mutatjuk be.

Legyenek $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ 0-tól és 1-től különböző algebrai számok és jelölje $\log \alpha_1, \ldots, \log \alpha_n$ a logaritmusok egy-egy rögzített értékét. Legyen K a $\mathbb{Q}$ racionális számtest $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ általi algebrai bővítése, melynek fokát jelölje d.

Legyen továbbá $A_j = \max\left(H(\alpha_j), e\right)$, ahol jelölje $H(\alpha_j)$ az α_j klasszikus magasságát, amely alatt az α_j algebrai szám definiáló főpolinomjában szereplő együtthatók abszolutértékének maximumát értjük és legyen $e = 2,718....$

Tétel A. *Legyenek* $b_1, \ldots, b_n$ *nem mind azonosan* 0 *racionális egészek és tegyük föl, hogy* $B \geq \max |b_j|$. *Ha* $\Lambda = b_1 \log \alpha_1 + b_2 \log \alpha_2 + \ldots + b_k \log \alpha_k \neq 0$ *teljesül, akkor*

$$\log |\Lambda| > -(16nd)^{2(n+2)} \log A_1 \ldots \log A_n \log B.$$

A Baker-módszer diofantikus egyenletek több osztálya esetén is alkalmazható.

Ilyenek például az x, y egész változójú hiper- és szuperelliptikus egyenletek. Legyen

$$f(x) = by^m, \tag{1.1}$$

ahol $f \in \mathbb{Z}[x]$, $\deg f \geq 2$, $m \geq 2$ és $b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$ rögzített.

Az egyenletet $m = 2$ esetén hiperelliptikus, $m \geq 3$ esetén szuperelliptikus egyenletnek nevezzük. Baker, alkalmazva a módszerét, speciális esetekben az alábbi eredményt nyerte.

Tétel B. *Legyen* $m \geq 3$. *Tegyük fel, hogy* $f(X)$*-nek van legalább két egyszeres gyöke. Ha* x *és* y *olyan racionális egészek, melyek kielégítik az 1.1 egyenletet, akkor*

$$\max(|x|, |y|) \leq C_3$$

valamely kiszámítható C_3 *konstansra, amely csak* b*-től,* m*-től és* f*-től függ.*

Lásd [4].

Tétel C. *Legyen* $m = 2$ *és tegyük fel, hogy* $f(X)$*-nek van legalább három egyszeres gyöke. Ekkor az 1.1 egyenlet minden* x, y *racionális egész megoldására teljesül, hogy*

$$\max(|x|, |y|) \leq C_4,$$

ahol C_4 *kiszámítható konstans, amely csak* b*-től és* f*-től függ.*

Lásd [4].

A Baker-módszert felhasználva Schinzel és Tijdeman effektív végességi állítást nyert a fenti egyenletnél arra az esetre, amikor a kitevőt is változónak tekintjük.

Tétel D. *Legyen* $f(X)$ *racionális egész együtthatós polinom, melynek van legalább két különböző gyöke. Legyenek* $b \neq 0$, $m \geq 0$, *továbbá* x *és* y *olyan racionális egészek, melyekre* $|y| > 1$, *és legyen*

$$f(x) = by^m.$$

Ekkor m *értéke felülről korlátos, felső korlátja kiszámítható konstans, mely csak* b*-től és* f*-től függ.*

Ez a tétel a [76] fő eredménye.

Léteznek ugyanakkor az $f(x) = g(y)$ típusú egyenletekre általános esetben is ineffektív, végességi állítások. A szeparábilis diofantikus egyenletek körében két csúcseredmény született. Az első Davenport, Lewis és Schinzel eredménye [29].

Ennek egy javítása a másik eredmény, a Bilu-Tichy tétel [16]. A tétel kimondásához szükségünk van a polinomok *ötféle standard párjának* definíciójára.

Legyen α és β nem nulla racionális számok, q, s és t pozitív egészek, r nem negatív egész és $v(X) \in \mathbb{Q}[X]$ nemnulla polinom, amely lehet konstans is.

A *első típusú standard pár*

$$(X^q, \alpha X^r v(X)^q),\ \text{vagy fordítva},\ (\mathrm{\alpha X^r v(X)^q, X^q})$$

ahol $0 \leq r < q$, $(r, q) = 1$ és $r + \deg v(X) > 0$.

A *második típusú standard pár*

$$(X^2, (\alpha X^2 + \beta)\nu(X)^2)\ \text{(vagy fordítva)}.$$

Jelölje $D_s(X, \alpha)$ az s-edik Dickson polinomot, amely, például explicit formulával megadva a következő alakú:

$$D_s(X, \alpha) = \sum_{i=0}^{[s/2]} \frac{s}{s-i} \binom{s-i}{i} (-\alpha)^i X^{s-2i}.$$

A *harmadik típusú standard pár*

$$\left(D_s(X, \alpha^t), D_t(X, \alpha^s)\right),$$

ahol $(s, t) = 1$.

A *negyedik típusú standard pár*

$$\left(\alpha^{-s/2}D_s(X,\alpha), -\beta^{-t/2}D_t(X,\beta)\right),$$

ahol $(s,t)=2$.

Az *ötödik típusú standard pár*

$$\left((\alpha X^2-1)^3, 3X^4-4X^3\right) \text{ (vagy fordítva).}$$

Tétel E. *Legyenek $P(X)$, $Q(X)\in\mathbb{Q}[X]$ olyan nem konstans polinomok, melyekre a $P(x)=Q(y)$ egyenletnek végtelen sok x, y korlátos nevezőjű megoldása van. Ekkor $P=\phi\circ f\circ\lambda$ és $Q=\phi\circ g\circ\mu$, ahol $\lambda(X)$, $\mu(X)\in\mathbb{Q}[X]$ lineáris polinomok, $\phi(X)\in\mathbb{Q}[X]$ és $(f(X),g(X))$ pedig egy standard pár.*

A bizonyítás alapja Siegel tétele.

Disszertációnkban néhány speciális típusú szeparábilis diofantikus egyenletet vizsgáltunk. Kutatásunk során célunk volt szeparábilis diofatikus egyenletek bizonyos osztályaira olyan ineffektív és effektív végességi állításokat kimondani, melyek olyan klasszikus eredményeken alapulnak, mint a Bilu-Tichy tétel vagy a Baker tétel. Célunk volt az ineffektív általános végességi eredmények és speciális osztályokon effektív tételek kimondása mellett ismert paraméterek esetén numerikus eredmények megfogalmazása is.

2. fejezet

Repdigitek és figurális számok egyenlő értékei

Ebben a fejezetben az ún. repdigit számok aritmetikai tulajdonságainak vizsgálatával foglalkoztunk, nevezetesen a repdigitek és az l-ed rendű, k dimenziójú figurális számok egyenlő értékeinek vizsgálatával.

Legyen

$$f_{k,l}(x) = \frac{x(x+1)\cdots(x+k-2)((l-2)x+k+2-l)}{k!}$$

l-ed rendű k dimenzójú figurális szám, ahol $k \geq 2$ és $l \geq 3$ rögzített egészek. Ezeket a figurális számokat korábban már gyakran és többféle szempont alapján vizsgálták, így gazdag irodalmuk van, lásd Dickson [30].

Kombinatorikus számok egy másik fontos osztályát alkotják a $d \cdot \frac{10^n-1}{10-1}$, $1 \leq d \leq 9$ alakú számok. Ezeket repdigiteknek, speciálisan $d = 1$ esetén pedig repunitoknak nevezzük. Több különböző eredmény és sejtés is született prím repunitokkal és bizonyos diofantikus egyenletekkel kapcsolatos problémákban szereplő repdigitekkel kapcsolatban. Lásd [35] illetve [77, 12. fejezet].

Tetszőleges $b \geq 2$-re a $\frac{b^n-1}{b-1}$ formula segítségével definiálhatjuk az ún. általánosított repunitokat is.

Kutatásunk során repdigitek és k dimenziós figurális számok egyenlő értékeit vizsgáltuk. Effektív végességi állításokat fogalmaztunk meg és kis paraméterértékek mellett teljesen meg is oldottuk a megfelelő egyenleteket.

A repdigitek és az általánosított repunitok közös általánosítása a

$$d \cdot \frac{b^n - 1}{b - 1},$$

alakú számok. Azaz vegyük a d ismétlődő számjegyből álló repdigiteket b alapú számrendszerben, $1 \leq d < b$ és $b \geq 2$ egészek mellett.

Tekintsük a

$$d \cdot \frac{b^n - 1}{b - 1} = f_{k,l}(x) \tag{2.1}$$

egyenletet és speciális esetben a

$$d \cdot \frac{10^n - 1}{10 - 1} = f_{k,l}(x) \tag{2.2}$$

illetve a

$$\frac{b^n - 1}{b - 1} = f_{k,l}(x). \tag{2.3}$$

egyenleteket.

Első eredményünk egy, a legáltalánosabb 2.1 egyenletre vonatkozó effektív végességi állítás.

1. Tétel. *Tegyük fel, hogy $k \geq 3$ vagy $k = 2$ és $l = 4$ vagy $l > 13$. Ekkor a 2.1 egyenletnek csak véges sok x n egész megoldása van, továbbá*

$$\max(|x|, n) < c_1,$$

ahol c_1 effektíven kiszámolható konstans, amely csak k, l, b és d értékétől függ. $k = 2$ és $l \in \{3, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$ esetén a 2.1 egyenletnek végtelen sok megoldása van a b, d paraméterek végtelen sok értéke mellett.

A következő két tétel a 2.1 típusú egyenlet repdigitekre és általánosított repunitokra vonatkozó eseteit tárgyalja.

2. Tétel. *A 2.2 egyenletnek $k \geq 2$ esetén csak véges sok egész n, x megoldása van kivéve a $(d, l) = (3, 8)$ esetet. Ebben az esetben az egyenletnek végtelen sok expliciten megadható megoldása van.*

3. Tétel. *A 2.3 egyenletnek $k \geq 2$ esetén csak véges sok egész n, x megoldása van, kivéve, ha $(b, l) = (4, 8), (9, 3), (9, 6), (25, 5)$.*

Ezekben az esetekben az egyenletnek végtelen sok expliciten megadható megoldása van.

Az előző három tétel bizonyítása Schinzel és Tijdeman hiperelliptikus és szuperelliptikus egyenletekről szóló eredményén illetve elemi eszközökön alapszik.

Numerikus vizsgálataink során az $f_{k,l}(x)$ polinomokkal foglalkozunk, ahol $k \in \{2, 3\}$. Mindkét esetben $d \in \{1, 2, \ldots, 9\}$ és $l \in \{3, 4, \ldots, 20\}$ és az összes ilyen érték esetén megoldjuk a megfelelő egyenleteket. Numerikus eredményeink megfogalmazásához szükségünk van a következő fogalomra. A 2.2 egyenlet egy megoldását triviálisnak nevezzük, ha eredményül $0 = 0$ vagy $1 = 1$ egyenletet kapunk. Erre az elnevezésre a triviális megoldások nagy száma miatt van szükség, ugyanakkor ezek a megoldások a 2.2 esetén bármely rögzített k esetén könnyen megadhatók.

A bizonyítás során az eredeti egyenlet átalakításának segítségével egy elliptikus egyenletet kaptunk, melyet aztán a MAGMA programcsomaggal oldottunk meg.

4. Tétel. *A 2.2 egyenlet összes nemtriviális megoldását* $k = 2, 3$ *esetén rendre a 2.2. illetve 2.1. táblázat tartalmazza.*

Itt jegyezzük meg, hogy a fenti egyenletekkel azonos típusú további egyenleteket is vizsgáltunk numerikusan $f_{k,l}(x)$ esetén k nagyobb értékeire. Ezek 2 génuszú egyenletekhez vezettek.

Azonban a fellépő technikai nehézségek miatt ezeket nem tudtuk megoldani a Chabuty-módszerrel.

Ennek a fejezetnek az eredményeit az [57] cikkünk tartalmazza.

(d, l)	megoldások (n, x)	$f_{k,l}(x)$
$(1, 10)$	$(2, 2)$	11
$(2, 6)$	$(2, 3)$	22
$(4, 3)$	$(1, 2)$	4
$(5, 4)$	$(1, 2)$	5
$(5, 4)$	$(2, 5)$	55
$(6, 5)$	$(1, 2)$	6
$(6, 17)$	$(2, 3)$	66
$(7, 6)$	$(1, 2)$	7
$(8, 7)$	$(1, 2)$	8
$(9, 8)$	$(1, 2)$	9

2.1. táblázat: Az $f_{3,l}(x)$ eset

(d,l)	megoldások (n,x)	$f_{k,l}(x)$	(d,l)	megoldások (n,x)	$f_{k,l}(x)$
$(1,9)$	$(3,6)$	111	$(6,3)$	$(2,11)$	66
$(1,11)$	$(2,2)$	11	$(6,3)$	$(2,-12)$	66
$(1,14)$	$(2,-1)$	11	$(6,3)$	$(3,36)$	666
$(1,19)$	$(4,-11)$	1111	$(6,3)$	$(3,-37)$	666
$(2,5)$	$(1,-1)$	2	$(6,6)$	$(1,2)$	6
$(2,5)$	$(2,4)$	22	$(6,6)$	$(2,6)$	66
$(2,5)$	$(3,-12)$	222	$(6,6)$	$(3,-18)$	666
$(2,10)$	$(2,-2)$	22	$(6,9)$	$(1,-1)$	6
$(3,3)$	$(1,2)$	3	$(6,9)$	$(2,-4)$	66
$(3,3)$	$(1,-3)$	3	$(6,9)$	$(4,44)$	6666
$(3,6)$	$(1,-1)$	3	$(6,17)$	$(3,-9)$	666
$(3,11)$	$(3,9)$	333	$(7,5)$	$(1,-2)$	7
$(3,12)$	$(2,3)$	33	$(7,5)$	$(2,-7)$	77
$(4,4)$	$(1,2)$	4	$(7,7)$	$(1,2)$	7
$(4,4)$	$(1,-2)$	4	$(7,10)$	$(1,-1)$	7
$(4,7)$	$(1,-1)$	4	$(8,8)$	$(1,2)$	8
$(5,3)$	$(2,-11)$	55	$(8,11)$	$(1,-1)$	8
$(5,3)$	$(2,10)$	55	$(8,16)$	$(2,4)$	88
$(5,5)$	$(1,2)$	5	$(9,4)$	$(1,3)$	9
$(5,6)$	$(2,-5)$	55	$(9,4)$	$(1,-3)$	9
$(5,7)$	$(2,5)$	55	$(9,7)$	$(2,-6)$	99
$(5,8)$	$(1,-1)$	5	$(9,9)$	$(1,2)$	9
$(6,3)$	$(1,3)$	6	$(9,12)$	$(1,-1)$	9
$(6,3)$	$(1,-4)$	6	$(9,19)$	$(2,-3)$	99

2.2. táblázat: Az $f_{2,l}(x)$ eset

3. fejezet

Trinomok egyenlő értékei

Disszertációnk következő fejezetében azt vizsgáltuk, hogy van-e olyan általános feltétel, amely esetén két trinomnak végtelen sok egyenlő értéke van, azaz, hogy van-e az $ax^m + bx^n + c = dy^p + ey^q$ típusú egyenletnek végtelen sok korlátos nevezőjű megoldása.

Korábban ebben a témában több eredmény is született, de csak speciális egyenletekre. Dolgozatunk 3. fejezetében Bilu-Tichy tételét és a trinomok dekompozíciós tulajdonságait felhasználva általános ineffektív kritériumot tudtunk adni arra, hogy két trinom mikor rendelkezik végtelen sok azonos értékkel korlátos nevezőjű racionális változók esetén.

Legyenek a, b, c, d, e, m, n, p és q rögzített racionális egészek. Ekkor

5. Tétel. *Az*

$$ax^m + bx^n + c = dy^p + ey^q$$

diofantikus egyenletnek, ahol $m > n > 0$, $p > q > 0$, $(m, n) = (p, q) = 1$, $ab \neq 0$, $de \neq 0$ *és vagy* $m > p \geq 3$ *vagy* $m = p \geq 3$, $n \geq q$ *pontosan akkor van végtelen sok* x, y *korlátos nevezőjű megoldása, ha*

$$m = p, n = q, a = dt^m, b = et^n, t \in \mathbb{Q}, c = 0$$

vagy

$$m = p = 3, n = q = 2, a^2e^3 + b^3d^2 = 0, c = -\frac{4b^3}{27a^2},$$

vagy

$$m = p = 3, n = 2, q = 1, 27a^4e^3 + b^6d = 0, c = \frac{2a^2e^3}{b^3d^2}.$$

feltételek közül valamelyik teljesül.

A $p = 2$ speciális esetben felső korlátot is tudunk adni x és y lehetséges értékeire. Legyen $H = \max(|a|, |b|, |c|, |d|, |e|, m, n)$.

6. Tétel. *Legyen* $m \geq 5$, $m > n > 0$, $abd \neq 0$, $m \neq 2n$ *és*

$$(m, n) \notin \{(6, 2), (6, 4)\},$$

továbbá, ha $4dc+e^2 = 0$, *akkor legyen* $m-n \geq 3$ *vagy* $m-n = 2$ *illetve* n *páratlan. Ekkor az*

$$ax^m + bx^n + c = dy^2 + ey$$

diofantikus egyenlet x *és* y *egész megoldásaira* $\max(|x|, |y|) < c_2$, *ahol* c_2 *olyan effektíven kiszámítható konstans, amely csak* H *értékétől függ.*

A bizonyítás Brindza, egy a hiperelliptikius egyenletek megoldásaira vonatkozó eredményén [19] alapszik. A 3.1. táblázat diofantikus egyenletek olyan osztályait tartalmazza, melyeknek végtelen sok x és y egész megoldása van valamely adott (m, n) kitevők esetén (itt t, u és v egész paraméterek).

Az ebben a fejezetben szereplő eredményeket a [64] cikk tartalmazza.

(m,n)	equation	solutions
$(2n,n)$	$x^{2n}+2bx^n+b^2-1=$ y^2+2y	$y=x^n+b-1$
$(3,1)$	$x^3-3t^4x+t^6=$ $2y^2+4t^2y$	$x=u^2-2t^2,$ $y=u(u^2-3t^2)-t^3$
$(3,2)$	$x^3+3t^2x^2-5t^6=$ y^2+2t^3y	$x=u^2+t^2,$ $y=u(u^2+3t^2)-t^3$
$(4,1)$	$x^4+4t^3x+t^4=$ $2y^2+4t^2y$	$u^2+2t^2=2v^2,$ $x=u+t,\ y=v(u+2t)-t^2$
$(4,3)$	$x^4+4tx^3+25t^4=$ $x=u+t$	$u^2+2t^2=2v^2,$ $,\ y=v(u+4t)-t^2$
$(6,2)$	$x^6-3t^4x^2=$ $2y^2+4t^3y$	$u^2+2t^2=2v^2,\ x=u$ $,\ y=v(u^2-t^2)-t^3$
$(6,4)$	$x^6-3t^2x^4+2t^6=$ $2y^2+4t^3y$	$u^2+t^2=2v^2,$ $x=u,\ y=v(u^2-2t^2)-t^3$

3.1. táblázat: Egyenletosztályok végtelen sok megoldással

4. fejezet

Standard számlálópolinomok egyenlő értékei

Az utolsó, 4. fejezetben diszkrét geometriai háttérrel rendelkező szeparábilis diofantikus egyenletekkel foglalkoztunk.

A legalapvetőbb számlálópolinomok az n-dimenziós egységkocka X^n számlálópolinomja, a standard n-szimplex $\binom{X+n}{n}$ számlálópolinomja, az n-dimenziós gúla

$$S_{n-1}(X) = 1^{n-1} + 2^{n-1} + \ldots + X^{n-1}$$

számlálópolinomja és az n-dimenziós oktahedron

$$P_n(X) = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \binom{X+n-j}{n}$$

számlálópolinomja. Dolgozatunkban ezen polinomok esetleges egyenlő értékeit vizsgáltuk egész értékű változók esetén. Adott pozitív m, n egészek esetén mikor, milyen feltételek mellett tartalmaz két, fent említett m illetve n dimenziós test (egységkocka, szimplex, gúla, oktahedron) azonos számú egész pontot? Ez a probléma nemtiriviális diofantikus egyenletek 9 különböző osztályát határozza meg, lásd 4.1. táblázat.

No	egyenlet	megjegyzés
1	$S_m(x) = S_n(y)$	$n > m \geq 1$
2	$S_m(x) = y^n$	$m \geq 1, n \geq 2$, (m,n)$\notin \{(1,2),(3,2),(3,4),(5,2)\}$
3	$S_m(x) = \binom{y}{n}$	$m \geq 1, n \geq 2, (m,n) \neq (1,2)$
4	$S_m(x) = P_n(y)$	$m \geq 1, n \geq 2, (m,n) \neq (1,2)$
5	$\binom{x}{m} = y^n$	$m \geq 2, n \geq 2, (m,n) \neq (2,2)$
6	$\binom{x}{m} = \binom{y}{n}$	$n > m \geq 2$
7	$\binom{x}{m} = P_n(y)$	$m \geq 2, n \geq 2, (m,n) \neq (2,2)$
8	$P_m(x) = y^n$	$m \geq 2, n \geq 2, (m,n) \neq (2,2)$
9	$P_m(x) = P_n(y)$	$n > m \geq 2$

4.1. táblázat: A vizsgált diofantikus egyenletek osztályai

Az egyenletek **1. osztály**a esetén a következő sejtést mondtuk ki.

1. Sejtés. *Az* $S_m(x) = S_n(y)$ *egyenlet összes egész* $n > m \geq 1$ *és* x, y *megoldása az alábbi számnégyesek valamelyike.*

$(m, n, x, y) = \{(1, 2, 10, 5), (1, 2, 13, 6), (1, 3, 8, 3), (1, 5, 23, 3), (1, 5, 353, 9)\}$.

Sejtésünk alapja kiterjedt numerikus vizsgálat. A bizonyítás azonban túlmutat a jelenlegi módszerek adta lehetőségeken.

Új eredményeink bizonyításai alapvetően ineffektív esetben a Bilu-Tichy tételen illetve effektív esetben a Baker tételen alapszanak.

Az egyenletek **3. osztály**a esetén Rakaczkinak az $S_m(x) = a\binom{y}{n} + b$ típusú egyenletre alkalmazható ineffektív végességi tételének [71] segítségével a következő tételt bizonyítottuk be.

7. Tétel. *Legyen* $m \geq 1, n \geq 2$ *és* $(m, n) \neq (1, 2)$. *Ekkor az* $S_m(x) = \binom{y}{n}$ *egyenletnek csak véges sok* x *és* y *egész megoldása van.*

Adott, kis m vagy n értékek esetén Rakaczki effektív véges ségi tételét [72] az $s(1^m + 2^m + \ldots + x^m) + r = y^n$ egyenletre, Yuan effektív eredményét [88] az $a\binom{x}{n} = by^n + c$ egyelnetre illetve Győry effektív végességi állítását [38] felhasználva az $\binom{x}{m} = y^n$ egyenletre, az alábbi tételt bizonyítottuk be.

8. Tétel. *Legyen* $n \in \{2, 4\}$ *és* $m \geq 1$*, ahol* $(m, n) \neq (1, 2)$ *vagy* $m \in \{1, 3\}$ *és* $n \geq 2$*. Ekkor az* $S_m(x) = \binom{y}{n}$ *összes egész* x *és* y *megoldásaira effektív kiszámítható felső korlát adható, amely rendre csak* m*-től illetve* n*-től függ. Továbbá, ha* $m = 3$ *és* $n \geq 2$*, akkor nincs megoldás.*

Az egyenletek **4. osztály**ában kis m és n értékekre Pintér [65], Rakaczki [72] és Baker [4] tételei alapján a következő effektív tétel mondható ki.

9. Tétel. *Legyen* $m \in \{1, 3\}$ *és* $n \geq 2$ *vagy* $n \in \{2, 4\}$ *és* $m \geq 1$*. Ekkor az* $S_m(x) = P_n(y)$ *egyenlet megoldásaira teljesül, hogy* $\max(x, y) < c_9$*, ahol* c_9 *rendre csak* n*-től illetve* m*-től függö effektíven kiszámítható konstans.*

Általános esetben a Bilu-Tichy tétel segítségével a következő ineffektív eredményt mondtuk ki.

10. Tétel. *Legyen* $m \geq 2, n > 2$ *és* $(m + 1, n) = 1$*. Ekkor az* $S_m(x) = P_n(y)$ *egyenletnek csak véges sok* x *és* y *egész megoldása van.*

Az **egyenletek 7. osztályá**ban kis m és n értékek esetén Pintér [65], Baker [4] és Yuan [88] eredményeinek felhasználásával beláttuk a következő effektív tételt.

11. Tétel. *Legyen* $m \in \{2, 4\}$ *és* $n \geq 3$ *vagy* $n \in \{2, 4\}$ *és* $m \geq 3$ *ekkor az* $\binom{x}{m} = P_n(y)$ *egyenlet megoldásaira* $\max(x, y) < c_{10}$, *ahol c_{10} rendre csak n-től vagy m-től függö effektíven kiszámítható konstans.*

A Bilu-Tichy tétel illetve az Erdős-Selfridge tétel segítségével a következő általános ineffektív tételt mondtuk ki.

12. Tétel. *Legyen* $\min\{m, n\} \geq 3$. *Ekkor az* $\binom{x}{m} = P_n(y)$ *egyenletnek csak véges sok egész x és y megoldása van.*

Az **egyenletek 8. osztályá**ban Pintér tételének felhasználásával és a szuper- és hiperelliptikus egyenletek változóira adható korlátok alapján a következő effektív tételt mondtuk ki.

13. Tétel. *Legyenek m, n egészek, ahol $m \geq 2, n \geq 2$ és legyen $(m, n) \neq (2, 2)$. Ekkor a $P_m(x) = y^n$ egyenlet egész x, y és n megoldásaira* $\max\{|x|, |y|, n\} < c_11$, *ahol c_11 effektíven kiszámolható konstans, amely csak m-től függ.*

Az $m = 2$ speciális esetben Cohn tételének [27] segítségével meg is tudtuk határozni az összes megoldást.

14. Tétel. *A $P_2(x) = y^n$ egyenletnek az x, y és $n > 2$ egészek körében az $x = 0$, $y = 1$ és $x = 119$, $y = 13$, $n = 4$ értékeken kívül nincs más megoldása.*

Ennek a fejezetnek az erdményeit a [43] cikk tartalmazza.

Irodalomjegyzék

[1] E. T. Avanesov, *The Diophantine equation* $3y(y+1) = x(x+1)(2x+1)$. Volz. Mat. Sb., (8):3-6, 1971.

[2] E. T. Avanesov, *Solution of a problem on figurate numbers*, Acta Arith. 12:409–420, 1966/67.

[3] A. Baker, *Linear forms in the logarithms of algebraic numbers IV*, Mathematika 15:204-216, 1968.

[4] A. Baker, *Bounds for the solutions of the hyperelliptic equation.* Proc. Cambridge Philos. Soc., 65:439-444, 1969.

[5] A. Baker, *A sharpening of the bounds for linear forms in logarithms II*, Acta Arith. 24:33-36, 1973.

[6] A. Baker, *The theory if linear forms in logarithms*, Transcendence Theory: Advances and Applications, London 1977.

[7] A. Baker, *Transcendental number theory.* Cambridge Mathematical Library. Cambridge University Press, Cambridge, second edition, 1990.

[8] A. Baker and H. Davenport, *The equations* $3x^2 - 2 = y^2$ *and* $8x^2 - 7 = z^2$, Quart. J. Math. Oxford Ser., 20:129–137, 1969.

[9] A. Baker and G. Wüstholz, *Logarithmic forms and group varieties*, J. reine angew. Math. 442:19-62, 1993.

[10] D.W. Ballew, R.C. Weger, *Repdigit triangular numbers*, J. Recreational Math. 8:96–98, 1975/76.

[11] M. Beck and S. Robins, *Computing the continuous discretely.* Undergraduate Texts in Mathematics, Springler, New York, 2007. Integer-point enumeration in polyhedra.

[12] M. A. Bennett, and B. M. M. de Weger, *On the Diophantine equation* $|ax^n - by^m| = 1$. Math. Comp., 67(221):413-438, 1998.

[13] M. A. Bennett, K. Győry, and Á. Pintér, *On the Diophantine equation* $1^k + \cdots + x^k = y^n$. Compos. Math., 140(6):1417-1431, 2004.

[14] F. Beukers, T. N. Shorey, and R. Tijdeman, *Irreducibility of polynomials and arithmetic progressions with equal*

products of terms. In Number theory in progress, Vol.1 (Zakopane-Koscielisko, 1997), pages 11-26. de Gruyter, Berlin, 1999.

[15] Y. F. Bilu, B. Brindza, P. Kirschenhofer, Á. Pintér, and R. F. Tichy, *Diophantine equations and Bernoulli polynomials.* Compositio Math., 131(2):173-188, 2002. With an appendix by A. Schinzel.

[16] Y. F. Bilu, R. F. Tichy, *The Diophantine equation* $f(x) = g(y)$, *Acta Arith.*, 95(3):261–288, 2000.

[17] W. Bosma, J. Cannon, C. Playoust, *The Magma algebra system. I. The user language.*, J. Symbolic Comput. 24:235–265, 1997.

[18] B. Brindza, *On a special superelliptic equation*, Publ. Math. Debrecen, 39:159–162, 1991.

[19] B. Brindza, *On S-integral solutions of the equation* $y^m = f(x)$, *Acta Math. Hungar.,* 44(1–2):133-139, 1984.

[20] B. Brindza, *On some generalizations of the Diophantine equation* $1^k + 2^k + \cdots + x^k = y^z$, Acta Arith., 44(2):99-107, 1984.

[21] B. Brindza and Á. Pintér, *On equal values of power sums.* Acta Arith., 77(1):97-101, 1996.

[22] B. Brindza and Á. Pintér, *On the number of solutions of the equation* $1^k + 2^k + \cdots + (x-1)^k = y^z$. Publ. Math. Debrecen, 56(3-4):271-277, 2000. Dedicated to Professor Kálmán Győry on the occasion of his 60th birthday.

[23] B. Brindza, Á. Pintér and S. Turjányi, *On equal values of pyramidal and polynomial numbers*, Indag. Math. (N.S.), 9:183–185, 1998.

[24] Y. Bugeaud, *Bounds for the solutions of superelliptic equations*, *Compositio Math.*, 107(2):187–219, 1997.

[25] Y. Bugeaud, M. Mignotte, M. Stoll, S. Siksek, Sz. Tengely, *Integral Points on Hyperelliptic Curves*, Algebra and Number Theory 2, 859–885, 2008.

[26] J. W. S. Cassels, *Integral points on certain elliptic curves*, Proc. London Math. Soc. (3), 14a:55-57, 1965.

[27] J. H. E. Cohn, *Perfect Pell powers*, Glasgow Math. J., 38(01):19-20, 1996.

[28] H. Darmon and L. Merel, *Winding quotients and some variants of Fermat's last theorem*, J. Reine Angew. Math., 490:81-100, 1997.

[29] H. Davenport, D. J. Lewis, A. Schinzel, *Equations of the form* $f(x) = g(y)$, *Quart. J. Math. Oxford Ser. (2)*, 12:304–312, 1961.

[30] L. E. Dickson, *History of the theory of numbers*, Vol. II: Diophantine analysis, Chelsea Publishing Co., New York, 1966, XXV+803 pp.

[31] H. Dubner, *Generalized repunit primes*, Math. Comp., 61:927–930, 1993.

[32] P. Erdős, *Note on the product of consecutive integers* (II), J. London Math. Soc., 14:245-249, 1939.

[33] P. Erdős, *On a Diophantine equation*, J. London Math. Soc., 26:176-178, 1951.

[34] P. Erdős and J. L. Selfridge, *The product of consecutive integers is never a perfect power*, Illinois J. Math., 19:262-301, 1975.

[35] R.L. Francis, *Mathematical haystacks: another look at repunit numbers*, College Math. J. 19:240–246, 1988.

[36] M. Fried, A.Schinzel, *Reducibility of quadrinomials*, Acta Arith., 21:153–171, 1972, Corrigendum and addendum ibid. 99:409–410, 2001.

[37] K. Győry, *Über die diophantische Gleichung* $x^p + y^p = cz^p$. Publ. Math. Debrecen, 13:301-305, 1966.

[38] K. Győry, *On the Diophantine equation* $\binom{n}{k} = x^l$, Acta Arith., 80:289–295, 1997.

[39] K. Győry, *On the Diophantine equation* $n(n+1)\cdots(n+k-1) = bx^l$, Acta Arith., 83(1):87-92, 1998.

[40] K. Győry, *Perfect powers in products with consecutive terms from arithmetic progressions*, More sets, graphs and numbers, volume 15 of Bolyai Soc. Math. Stud., pages 143-155, Springer, Berlin, 2006.

[41] K. Győry, *Perfect powers in products with consecutive terms from arithmetic progressions*, II, Erdős Centennial, Bolyai Soc. Math. Stud., pages 311-324, Springer, Berlin, 2013.

[42] K. Győry and Á. Pintér, *On the equation* $1^k + 2^k + \cdots + x^k = y^n$, Publ. Math. Debrecen, 62(3-4):403-414, 2003. Dedicated to Professor Lajos Tamássy on the occasion of his 80th birthday.

[43] K. Győry, T. Kovács, Gy. Péter and á. Pintér, *Equal values of standard counting polynomials*, Publ. Math. Debrecen, 84:259-277, 2014.

[44] K. Győry, R. Tijdeman, and M. Voorhoeve, *On the equation* $1^k + 2^k + \cdots + x^k = y^z$, Acta Arith., 37:233-240, 1980.

[45] L. Hajdu, *On a Diophantine equation concerning the number of integer points in special domains.* II. Publ. Math. Debrecen, 51(3-4):331-342, 1997.

[46] L. Hajdu, *On a Diophantine equation concerning the number of integer points in special domains*, Acta Math., Hungar., 78(1-2):59-70, 1998.

[47] L. Hajdu, Á. Pintér, *Combinatorial diophantine equations*, Publ. Math., Debrecen 56:391–403, 2000.

[48] Hajós György, *A 41. probléma megoldása*, Mat. Lapok, 4:40–41, 1953.

[49] M. J. Jacobson, Jr., Á. Pintér, and P. G. Walsch, *A computational approach for solving* $y^2 = 1^k + 2^k + \cdots + x^k$, Math. Comp., 72(244):2099-2110 (electronic), 2003.

[50] J.H. Jaroma, *Triangular repunit - there is but* 1, Czechoslovak Math. Journal, 60(135):1075–1077, 2010.

[51] M. Keith, *Repdigit polygonal numbers*, J. Recreational Math. 12:9–15, 1979/80.

[52] M. Keith, *On Repdigit Polygonal Numbers*, Journal of Integer Sequences, Volume 1, Article 98.1.6, 1998.

[53] P. Kirschenhofer, A. Pethő, and R. F. Tichy, *On analytical and Diophantine properties of a family of counting polynomials.* Acta Sci. Math. (Szeged), 65(1-2):47-59, 1999.

[54] P. Kiss, *On the number of solutions of the Diophantine equation* $\binom{x}{p} = \binom{y}{2}$, Fibonacci Quart., 26:127–130, 1988.

[55] T. Kovács, *Combinatorial Diophantine equations - the genus 1 case*, Publ. Math. Debrecen, 72(1-2):243-255, 2008.

[56] T. Kovács, *Combinatorial numbers in binary recurrences*, Period. Math. Hungar. 58:83–98, 2009.

[57] T. Kovács, Gy. Péter, N. Varga, *On Some Polynomial Values of Repdigit Numbers*, Periodica Mathematica Hungarica - 67/2:221-230, 2013.

[58] W. Ljunggren, *Solution compléte de quelques équations du sixième degré á deux indéterminées*, Arch. Math. Naturvid., 48(7):35, 1946.

[59] Yuri V. Matijasevic, *The Diophantineness of enumerable sets*, Dokl. Akad. Nauk SSSR 191:279–282, 1970.

[60] A. J. J. Meyl, *Question 1194*, nouv. Ann. Math, 2(17):464-467, 1878.

[61] M. Mignotte, A. Pethő, *On the Diophantine equation* $x^p - x = y^q - y$, Publ. Mat., 43(1):207–216, 1999.

[62] L. J. Mordell, *On the integer solutions of* $y(y+1) = x(x+1)(x+2)$, Pacific J. Math., 13:1347–1351, 1963.

[63] R. Obláth, *Note on the binomial coefficients*, J. London Math. Soc., 23:252-253, 1948.

[64] Gy. Péter, Á. Pintér, A. Schinzel, *On equal values of trinomials*, Monatshefte für Mathematik, Volume 162, Number 3, 313-320, 2011.

[65] Á. Pintér, *On the number of simple zeros of certain polynomials*, Publ. Math., Debrecen, 42(3-4):329-332, 1993.

[66] Á. Pintér, *A note on the Diophantine equation* $\binom{x}{4} = \binom{y}{2}$, Publ. Math. Debrecen, 47:411–415, 1995.

[67] Á. Pintér, *A note on the equation* $1^k+2^k+\cdots+(x-1)^k = y^m$, Indag. Math. (N.S), 8(1):119-123, 1997.

[68] Á. Pintér, *On a class of diophantine equations related to the numbers of cells in hyperplane arrangements*, Journal of Number Theory, 129(7):1664-1668, 2009.

[69] Á. Pintér and N. Varga, *Resolution of a nontrivial Diophantine equation without reduction methods*, Publ. Math. Debrecen, 79:605-610, 2011.

[70] Cs. Rakaczki, *On the Diophantine equation* $F\left(\binom{x}{4}\right) = b\binom{y}{2}$, Period. Math. Hungar., 49(2):119-132, 2004.

[71] Cs. Rakaczki, *On the Diophantine equation* $S_m(x) = g(y)$, Publ. Math. Debrecen, 65(3-4):439-460, 2004.

[72] Cs. Rakaczki, *On some generalizations of the Diophantine equation* $s(1^k+2^k+\cdots+x^k)+r = dy^n$, Acta Arith., 151(2):201-216, 2012.

[73] N. Saradha, *On perfect powers in products with terms from arithmetic progressions*, Acta Arith., 82(2):147-172, 1997.

[74] J. J. Schäffer, *The equation* $1^p + 2^p + 3^p + \cdots + n^p = m^q$, Acta Math., 95:155-189, 1956.

[75] A. Schinzel, *Equal Values of Trinomials Revisited*, Proceedings of the Steklov Institute if Mathematics, 2012, Vol. 276, pp. 250-256.

[76] A. Schinzel and R. Tijdeman, *On the equation* $y^m = P(x)$, Acta Arith., 31:199-204, 1976.

[77] T. N. Shorey, R. Tijdeman, *Exponential diophantine equations*, Cambridge University Press, Cambridge, 1986, X+240. pp.

[78] T. Stoll and R. F. Tichy, *Diophantine equations involving general meixner and krawtchouk polynomials*, Quaestiones Mathematicae, 28(1):105-115, 2005.

[79] R. J. Stroeker and B. M. M. de Weger, *Elliptic binomial Diophantine equations*, Math. Comp., 68(227):1257-1281, 1999.

[80] N. Terai, *On a Diophantine equation of Erdős*, Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci., 70(7):213-217, 1994.

[81] Y. F. Tichy, T. Stoll and R. F. Tichy, *Octahedrons with equally many lattice points*, Period. Math. Hungar., 40(2):229-138, 2000.

[82] R. Tijdeman, *Applications of the Gel'fond-Baker method to rational number theory*, In Topics in number theory (Proc. Colloq., Debrecen, 1974), pages 399-416. Colloq. Math. Soc. János Bolyai, Vol. 13. North-Holland, Amsterdam, 1976.

[83] S. Uchiyama, *Solution of a Diophantine problem*, Tsukuba J. Math., 8(1):131-157, 1984.

[84] M. Voorhoeve, K. Győry, and R. Tijdeman, *On the Diophantine equation* $1^k + 2^k + \cdots + x^k + R(x) = y^z$, Acta Math., 143(1-2):1-8, 1979.

[85] G. N. Watson, *The problem of the square pyramid*, Messenger of Math, 48:1-22, 1918.

[86] B. M. M. de Weger, *A binomial Diophantine equation*, Quart. J. Math. Oxford Ser. (2) 47:221–231, 1996.

[87] B. M. M. de Weger, *Equal binomial coefficients: some elementary considerations*, J. Number Theory, 63(2):373-386, 1997.

[88] P. Z. Yuan, *On a special Diophantine equation* $a\binom{x}{n} = by^r + c$, Publ. Math. Debrecen, 44(1-2):137-143, 1994.

Publications of the author/A szerző publikációi

1. Gy. Péter, Á. Pintér, A. Schinzel, *On equal values of trinomials*, Monatshefte für Mathematik, Volume 162, Number 3, 313-320, 2011.

2. T. Kovács, Gy. Péter, N. Varga, *On Some Polynomial Values of Repdigit Numbers*, Periodica Mathematica Hungarica - 67/2:221-230, 2013.

3. K. Győry, T. Kovács, Gy. Péter and á. Pintér, *Equal values of standard counting polynomials*, Publ. Math. Debrecen, 84:259-277, 2014.

Talks of the author/A szerző konferencia-előadásai

1. *Convex functions of higher order*, 2. ISCA, Síkfőkút, 2006.
2. *Some properties of subadditive functions*, 3. ISCA, Szczyrk, Lengyelország, 2007.
3. *On equal values of trinomials*, Number Theory and its Applications, An International Conference Dedicated to Kálmán Győry, Attila Pethő, János Pintz and András Sárközy, Debrecen, 2010.
4. *On equal values of trinomials*, 27th Journées Arithmétiques, Vilnius University, Faculty of Mathematics and Informatics, Litvánia, 2011.
5. *On equal values of trinomials*, Paul Turán Memorial Conference, Budapest, 2011.
6. *On equal values of trinomials*, 20th Czech and Slovak International Conference on Number Theory, Stará Lesná, Szlovákia, 2011.
7. *On some polynomial values of repdigit numbers*, International Conference on Fibonacci Numbers and Their Applications, Eger, 2012.