



**EFFEKTÍV EREDMÉNYEK  
A SZUPERELLIPTIKUS  
EGYENLETEK ELMÉLETÉBEN**

doktori (PhD) értekezés

Készítette:

**Pink István**

Debreceni Egyetem, Debrecen, 2006



Ezen értekezést a Debreceni Egyetem Matematika- és Számítástudományok Doktori Iskola Diofantikus és konstruktív számelmélet programja keretében készítettem a Debreceni Egyetem TTK doktori (PhD) fokozatának elnyerése céljából. Debrecen, 2006.

.....  
Pink István  
jelölt

Tanúsítom, hogy Pink István doktorjelölt 1998-2001 között a fent nevezett Doktori Iskola Diofantikus és konstruktív számelmélet programjának keretében irányítással végezte munkáját. Az értekezésben foglaltak a jelölt önálló munkáján alapulnak, az eredményekhez önálló alkotó tevékenységével meghatározóan hozzájárult. Az értekezés elfogadását javaslom.

Debrecen, 2006.

.....  
Dr. Győry Kálmán  
témavezető



## Köszönetnyilvánítás

Ezúton is szeretnék köszönetet mondani mindazoknak, akik bármi módon hozzájárultak disszertációm elkészítéséhez.

Elsősorban szüleimnek, akik felneveltek, s az emberi értékek, a tudás tiszteletére, a kitartó munka becsületére tanítottak,

Témavezetőmnek, Dr. Győry Kálmán Professzor Úrnak, kinek belém vetett bizalma, biztatása, útmutatása, számtalan hasznos tanácsa, segítségével nélkül ez a dolgozat nem készülhetett volna el,

Gyermek- és ifjúkori nevelőimnek: Bérczes Jenő általános iskolai és Dr. Nyéki Lajosné középiskolai matematika tanáraimnak, akik megszereztették velem a matematikát, s bevezettek a számelmélet világába,

Egyetemi tanáraimnak: Dr. Brindza Bélának, Dr. Pethő Attilának, Dr. Gaál Istvánnak, mert példaként álltak előttem és gyarapították tudásomat,

Kollégáimnak: Dr. Pintér Ákosnak, Dr. Hajdu Lajosnak, Dr. Bérczes Attilának szakmai és baráti segítségükért,

Végül, de nem utolsó sorban feleségemnek és kislányomnak a sok-sok türelemért, biztatásért, a szerető, nyugodt családi háttér megteremtéséért. Feleségem szüleinek pedig köszönöm, hogy életem nehéz időszakaiban gyermekükként szeretve mellettem álltak.



## TARTALOMJEGYZÉK

<b>1</b>	<b>Bevezetés</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Polinomok hatványértékei és binom Thue-Mahler egyenletek</b>	<b>5</b>
2.1	Eredmények . . . . .	5
2.2	Segéderedmények . . . . .	9
2.3	Bizonyítások . . . . .	13
<b>3</b>	<b>Polinomok értékei és teljes hatványok közötti különbségek</b>	<b>25</b>
3.1	Eredmények . . . . .	25
3.2	Segéderedmények . . . . .	27
3.3	Bizonyítások . . . . .	29
<b>4</b>	<b>Másodfokú polinomok hatványértékei</b>	<b>35</b>
4.1	Eredmények . . . . .	35
4.2	Segéderedmények . . . . .	40
4.3	Bizonyítások . . . . .	43
<b>5</b>	<b>Az <math>x^2 + 2^\alpha 3^\beta 5^\gamma 7^\delta = y^n</math> egyenlet megoldása</b>	<b>50</b>
5.1	Eredmények . . . . .	50
5.2	Segéderedmények . . . . .	51
5.3	Bizonyítások . . . . .	52
<b>6</b>	<b>Összefoglaló</b>	<b>62</b>
<b>7</b>	<b>Summary</b>	<b>65</b>
	<b>Irodalomjegyzék</b>	<b>69</b>
	<b>A Függelék - A szerző publikációs listája</b>	<b>74</b>
	<b>B Függelék - A szerző tudományos előadásainak listája</b>	<b>76</b>



## 1 BEVEZETÉS

A diofantikus egyenletek elméletében központi szerepet játszanak a kétismeretlenes polinomiális egyenletek és az exponenciális egyenletek. A kétismeretlenes egyenletek egy széles, és alkalmazások szempontjából rendkívül fontos osztályát képezik az

$$(1.1) \quad f(x) = wy^n$$

alakú ún. szuperelliptikus egyenletek, ahol  $f(X)$  egész együtthatós polinom,  $w \neq 0$  és  $n \geq 2$  adott egészek,  $x, y$  pedig egész ismeretlenek. Mordell, Siegel és mások eredményei után LeVeque 1964-ben kritériumot adott (1.1) megoldásszámának a végeességére. Ez az eredmény azonban ineffektív abban az értelemben, hogy a bizonyítás nem szolgáltat semmilyen eljárást a megoldások megkeresésére. 1969-ben A. Baker elsőként adott effektív felső korlátot (1.1) megoldásaira abban az esetben, amikor az  $f$  polinomnak van legalább három egyszeres gyöke. Ezt később Brindza általánosította és LeVeque tételét effektivizálta. Mindkét effektív eredmény bizonyítása Baker nevezetes, mély módszerén, algebrai számok logaritmusainak lineáris kombinációira vonatkozó effektív becsléseken alapszik.

1976-ban Schinzel és Tijdeman [65] az (1.1) egyenletet abban az általánosabb esetben vizsgálták, amikor nem csupán  $x$  és  $y$ , hanem az  $n$  kitevő is ismeretlen, azaz (1.1) egy három ismeretlenes polinomiális-exponenciális egyenlet. Amennyiben  $f(X)$ -nek nincs két különböző gyöke, úgy (1.1)-nek tetszőlegesen nagy  $n$  kitevő mellett is lehet megoldása. Feltéve, hogy  $f(X)$ -nek van legalább két különböző gyöke, Schinzel és Tijdeman a Baker módszer felhasználásával egy csupán  $f$ -től és  $w$ -tól függő felső korlátot adtak  $n$ -re. Vizsgálataikhoz később igen sokan, közöttük Shorey, van der Poorten, Brindza, Evertse, Győry, Turk, Bugeaud, Bérczes, Hajdu, Pintér és Haristoy kapcsolódtak. Az  $n$  kitevőre különféle felső korlátok születtek, a  $w$ , az  $f$  fokszáma, valamint az  $f$  magassága, illetve diszkriminánsa függvényében. A nyert eredményeket kiterjesztették arra az esetre is, amikor (1.1)-ben  $f$  helyett egy  $f(x, z)$  binér formát tekintünk egy újabb  $z$  ismeretlennel, illetve amikor  $f$  együtthatói,  $w$  és az  $x, y$  ismeretlenek egy  $\mathbf{Z}$  felett végesen generált integritástartomány elemei.

Értekezésünk egyik fő célkitűzése annak tisztázása, hogy az  $n$ -re nyert felső korlátokban meddig gyengíthető az  $f$  paramétereitől való függés. A 2. fejezetben  $f$  főpolinomok esetén megmutatjuk, hogy bizonyos természetes kivételektől eltekintve  $n$ -re adható olyan effektív felső korlát, mely csupán  $f$  fokszámától,  $Q(w)$ -től és  $Q(D_f)$ -től függ, ahol  $D_f$  az  $f$  maximális négyzetmentes

$\mathbf{Z}[X]$ -beli osztójának a diszkriminánása,  $Q(a)$  pedig az  $a \neq 0$  egész különböző prímosztóinak a szorzata (vagy másképpen a radikálja). Eredményünk már véglegesnek tekinthető abban az értelemben, hogy itt már mindegyik paramétertől való függés külön-külön szükséges, egyik paraméter sem hagyható el. A bizonyítás egyebek között egy önmagában is érdekes és fontos, az  $S$ -egységegyenletek és a binom Thue-Mahler egyenletek egy közös általánosítására vonatkozó effektív végességi tételünkön alapszik. A 3. és 4. fejezetben az  $f$  fokszáma és magassága, valamint  $w$  függvényében a korábbiaknál lényegesen pontosabb felső korlátokat nyerünk az (1.1)-ben szereplő  $n$  kitevőre. Ennek felhasználásával csupán  $w$ -től, valamint  $f$  fokszámától és magasságától függő alsó korlátot adunk az  $|f(x) - wy^n|$  különbségre, feltéve hogy az  $x, y$  egészekre  $f(x) \neq wy^n$ . Végül az 5. fejezetben az (1.1) egyenlet összes megoldását meghatározzuk bizonyos másodfokú  $f$  polinomok esetén. A bizonyításaink során egyebek között felhasználjuk a Baker-módszer legújabb, legélesebb változatait.

Az alábbiakban röviden vázoljuk az egyes fejezetek legfontosabb eredményeit. Az egyszerűség kedvéért eredményeinket itt csupán egy-egy fontos speciális esetben mutatjuk be.

## II

Legyen (1.1)-ben  $f \in \mathbf{Z}[X]$  egy  $m$ -ed fokú főpolinom legalább két különböző gyökkel és  $H(f)$  magassággal. Ha  $f$  összes gyökei különbözők, úgy  $D_f$  éppen az  $f$   $D(f)$  diszkriminánása. Fontos megjegyezni, hogy  $|D_f|$ -hez illetve  $|D(f)|$ -hez képest  $H(f)$  tetszőlegesen nagy lehet.

Mint említettük, Schinzel és Tijdeman majd többen mások az (1.1)-ben szereplő  $n$  kitevőre csupán  $w$ -től,  $m$ -től és  $H(f)$ -től függő effektív felső korlátot adtak. Abban az esetben, amikor (1.1)-ben  $f$  irreducibilis és  $w = 1$ , Brindza, Evertse és Győry [14] olyan korlátot nyertek az  $n$  kitevőre, mely csak  $m$ -től és  $D(f)$ -től függ, de nem függ  $H(f)$ -től. Újabban ezt az eredményt Haristoy [39] reducibilis főpolinomokra is kiterjesztette.

A 2. fejezetben a [14] és [39]-beli eredményeknek jelentős mértékű finomítását, pontosítását adjuk, mely bizonyos értelemben az ilyen irányú vizsgálatok lezárásának tekinthető. Legyenek  $p_1, \dots, p_s$  különböző prímek, legyen  $Q = p_1 \cdots p_s$ , és jelöljük  $S$ -sel azon egészek halmazát, melyek nem oszthatók  $p_1, \dots, p_s$ -től különböző prímszámmal. Tekintsük az (1.1) egyenletet abban az általánosabb esetben, amikor  $x, y, w, n$  valamennyien ismeretlen egészek az  $|y| > 1$ ,  $w \in S$ ,  $n \geq 2$  és  $D_f \in S$  tulajdonsággal. A 2.1 Tételünk - bizonyos (explicit módon leírt) kivételes esetektől eltekintve -  $n$ -re egy csupán  $m$ -től és  $Q$ -tól függő

effektív felső korlátot szolgáltat. Tehát a korábbi eredményekkel ellentétben az általunk nyert korlát már  $D(f)$ -től sem függ, csupán  $Q(D_f)$ -től (és persze  $m$ -től és  $Q(w)$ -től). Itt az  $f$  paramétereitől való függés tovább már nem gyengíthető.

A 2.2 Tételünkben eredményünket kiterjesztjük az általánosabb,

$$(1.2) \quad F(x, z) = wy^n$$

alakú egyenletek esetére is, ahol  $F \in \mathbf{Z}[X, Z]$  binér forma,  $F(1, 0) = 1$ ,  $F(X, 1)$ -nek van legalább két különböző gyöke,  $D_F \in S$ ,  $x, z, w, y, n$  ismeretlenek az  $|y| > 1, z \in S, w \in S, \text{lko}(x, z) = 1, n \geq 2$  tulajdonsággal. Tételünk lényegesen finomítja, pontosítja Shorey, van der Poorten, Tijdeman és Schinzel [67] egy (1.2)-re vonatkozó klasszikus tételét, melyben az  $n$ -re nyert korlát  $Q(D_F)$  helyett az  $F$  magasságától függ.

A 2.1 és 2.2 Tételünk bizonyításában fontos szerepet játszik a binom Thue-Mahler egyenletekre vonatkozó, algebrai számtestek felett nyert 2.3 Tételünk. Az egyszerűség kedvéért itt csupán egy speciális esetben,  $\mathbf{Z}$  felett fogalmazzuk meg. Tekintsük az

$$(1.3) \quad ax^n - by^n = c$$

egyenletet, ahol  $a, b, c, x, y, n$  egész ismeretlenek,  $a, b, c \in S$ ,  $|xy| > 1$  és  $n \geq 3$ . Továbbá feltehető, hogy  $\text{lko}(ax^n, by^n, c) = 1$ . Megjegyezzük, hogy  $x = y = 1$  esetén (1.3) éppen egy  $S$ -egységegyenlet, míg rögzített  $a, b$  mellett (1.3) egy ismeretlen fokszámú binom Thue-Mahler egyenlet. Számos korábbi,  $S$ -egységegyenletekre illetve binom Thue-Mahler egyenletekre vonatkozó effektív végességi tétel közös általánosításaként egy csupán  $Q$ -tól függő effektív felső korlátot adunk  $n$ -re, amiből következik, hogy (1.3)-nak csak véges sok és effektíve meghatározható megoldása van.

A fejezet eredményeit a [37] dolgozatban publikáltuk.

### III

A 3.fejezet 3.1 Tételében olyan explicit felső korlátot adunk az (1.1)-ben szereplő  $n$  kitevőre, mely  $w$ -től, valamint  $m = \deg f$ -től és  $H(f)$ -től függ. Eredményünk javítja és minden paraméter függvényében explicitté teszi a Bérczes, Brindza és Hajdutól [11] származó, eddig ismert legjobb felső korlátot. Ennek felhasználásával  $f(x) \neq wy^n$  esetén explicit alsó korlátot nyerünk  $|f(x) - wy^n|$ -re, ahol  $x, y, w, n$  egészek,  $w \neq 0$ ,  $|y| > 1$  és  $n \geq 3$ . Bizonyos természetes kivételektől eltekintve a 3.2 és 3.3 Tételünkben  $w, m$  és  $H(f)$ -től, valamint  $n$ -től illetve  $|f(x)|$ -től függő alsó korlátot vezetünk le a tekin-

tett különbségre. Eredményeink általánosítják Bugeaud és Hajdunak [23] az  $f(x) = ax^m$  speciális esetben nyert becsléseit.

A 3. fejezet eredményei a [60] cikkünkben kerültek publikálásra.

#### IV

A 4. fejezetben a másodfokú  $f(X)$  főpolinomok esetével foglalkozunk. Ebben az esetben az (1.1) egyenletnek rendkívül kiterjedt irodalma van; a 4. fejezetben áttekintést adunk a korábbi eredményekről.

A 4.1 Tételben az általános 2.1 Tételünk egy éles, explicit változatát adjuk  $w = 2$ -re és az

$$f(X) = X^2 + (p_1^{z_1} \dots p_s^{z_s})^2$$

alakú polinomokra, ahol  $p_1, \dots, p_s$  adott prímelek,  $z_1, \dots, z_s$  pedig ismeretlen nemnegatív egészek. Egyben általánosítjuk a szerző és Tengely [63], [70] korábbi idevágó eredményeit. Bizonyos kivételes egyenlet családtól eltekintve a 4.2 Tételünkben az  $f(X) = X^2 + AX + B$ ,  $w = 1$ , a 4.3 Tételünkben az  $f(X) = X^2 + D$ ,  $w \in \{1, 4\}$  esetben nyerünk éles korlátokat az (1.1)-ben szereplő  $n$  kitevőre.

A 4. fejezet eredményeit a [61] és [62] dolgozatokban közöltük.

#### V

Az 5. fejezetben az (1.1) egyenletet abban az esetben vizsgáljuk, amikor  $w = 1$  és

$$f(X) = X^2 + 2^{z_1} 3^{z_2} 5^{z_3} 7^{z_4},$$

ahol  $z_1, z_2, z_3, z_4$  nemnegatív egész ismeretlenek. A 4.3 Tételünket Cohn és de Weger bizonyos eredményeivel kombinálva, az 5.1 Tételben a tekintett  $f$  és  $w$  mellett az (1.1) egyenlet összes olyan  $x, y, n, z_1, z_2, z_3, z_4$  megoldását meghatározzuk, melyekben  $z_1 \geq 1$ . Ezzel általánosítjuk Luca [49] egy újabb eredményét, mely a  $z_3 = z_4 = 0$  esetre vonatkozik.

A fejezet eredményeit a [62] cikkünkben publikáltuk.

Végül megjegyezzük, hogy mivel az egyes fejezetek eredményei külön álló cikkekben lettek publikálva s mivel disszertációnkban a cikkek eredeti szerkezeti felépítését követjük, ezért helyenként előfordul, hogy egyes lemmák más és más változatait használjuk a különböző fejezetekben.

## 2 POLINOMOK HATVÁNYÉRTÉKEI ÉS BINOM THUE-MAHLER EGYENLETEK

### 2.1 EREDMÉNYEK

A fejezet eredményeinek ismertetéséhez legyen  $f$  egy legalább két különböző gyökkel rendelkező egész együtthatós polinom és legyen  $w$  egy nemnulla egész szám. Schinzel és Tijdeman [65] bebizonyították, hogy ha az

$$(2.1) \quad f(x) = wy^n$$

egyenlet fennáll valamilyen ismeretlen  $x$ ,  $|y| > 1$  és  $n \geq 2$  egészekre, akkor  $n$ -re egy, csak  $f$ -től és  $w$ -től függő, effektív felső korlát adható. Később sokan nyertek felső korlátot  $n$ -re, mely csak  $w$ -től valamint  $f$  magasságától és fokszámától függ (lásd a [68], [15], [72], [13], [16], [11], [60] munkákat és az ott előforduló hivatkozásokat). Az említett eredmények közül egyeseket arra az általánosabb esetre is kiterjesztették, amikor  $f$  együtthatói valamilyen algebrai számtest egészei és/vagy  $w$  különböző prímosztói fixek.

Amikor (2.1)-ben  $f$  irreducibilis főpolinom és  $w = 1$ , Brindza, Evertse és Győry [14] olyan korlátot adtak az  $n$  kitevőre, mely csak az  $f$  fokszámától és diszkriminánsától,  $D(f)$ -től függ. Nem régen Haristoy [39] általánosította ezt az eredményt tetszőleges főpolinomokra valamint arra az esetre, amikor  $f$  együtthatói valamely algebrai számtest egészei.

Ebben a fejezetben egyebek között bebizonyítjuk, hogy ha  $f$  egész együtthatós főpolinom 0 -tól különböző diszkriminánsal, és  $x, y, w$  ismeretlen egészek, akkor néhány kivételes esettől eltekintve a (2.1) egyenletben  $n$ -re egy, csak  $f$  fokszámától valamint  $w$  és  $D(f)$  különböző prímosztóitól függő, effektív felső korlát adható. Eredményünk már végleges abban az értelemben, hogy az említett paraméterektől való függés tovább már nem gyengíthető.

Állításunkat általánosabb formában, tetszőleges algebrai számtest felett bizonyítjuk. Szükségünk lesz az alábbi jelölésekre: Legyen  $\mathbf{K}$  egy  $d$ -ed fokú algeb-

rai számtest és jelölje  $O_{\mathbf{K}}$  az egészek gyűrűjét,  $O_{\mathbf{K}}^*$  pedig az  $O_{\mathbf{K}}$  egységeinek a csoportját. Legyenek továbbá  $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_s$  ( $s \geq 0$ )  $O_{\mathbf{K}}$  különböző prímeáljai és jelölje  $S$  azon  $\alpha \in O_{\mathbf{K}} \setminus \{0\}$  egészek halmazát, amelyre az  $(\alpha)$  ideál prímeál osztói az adott  $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_s$  ideálok közül kerülnek ki. Továbbá legyen

$$Q = \begin{cases} N_{\mathbf{K}/\mathbf{Q}}(\mathfrak{p}_1 \cdots \mathfrak{p}_s), & \text{ha } s > 0, \\ 1, & \text{ha } s = 0. \end{cases}$$

Legyen a (2.1) egyenletben  $f \in O_{\mathbf{K}}[X]$  egy  $m$ -ed fokú  $k \geq 2$  különböző gyökkel rendelkező főpolinom. Jelölje  $\mathbf{L}$  a  $\mathbf{K}$  felbontási testét és legyen  $D_f$  az  $f$  maximális fokszámú négyzetmentes  $O_{\mathbf{K}}[X]$ -beli osztójának a diszkriminánsa. Tegyük fel, hogy  $D_f \in S$ . Tekintsük a (2.1) egyenletet  $x, y, w, n$ -ben, ahol  $x \in O_{\mathbf{K}}, y \in O_{\mathbf{K}} \setminus \{0\}, w \in S$  és  $n \geq 2$  egész.

Könnnyen látható, hogy ha  $y \in O_{\mathbf{K}}^*$ , akkor  $n$  tetszőlegesen nagy lehet. Továbbá, ha

$$(2.2) \quad f(X) = u^m f'(u^{-1}(X + a))$$

alakú, ahol  $a \in O_{\mathbf{K}}, u \in S, f' \in O_{\mathbf{K}}[X]$  és  $x + a = u = v^n$  teljesül valamilyen  $v \in S$  esetén, akkor  $y = v^m$  megoldása (2.1)-nek, feltéve hogy  $f'(1) \in S$ . Ekkor  $D_{f'} \in S$  és  $u \in S \setminus O_{\mathbf{K}}^*$  esetén  $y \in S \setminus O_{\mathbf{K}}^*$  is teljesül és ezért  $n$  tetszőlegesen nagy lehet  $m, k, Q$ -hoz és  $\mathbf{L}$  paramétereire képest. Az  $f$ -et *redukált*-nak nevezzük, ha (2.2) nem áll fenn semmilyen  $a, f'$  és  $u \in S \setminus O_{\mathbf{K}}^*$  esetén. A fenti eset kizárható, ha  $y \in S \setminus O_{\mathbf{K}}^*$  esetén  $f$ -ről feltesszük, hogy redukált. Jelölje  $D_{\mathbf{L}}$  az  $\mathbf{L}$  diszkriminánsát.

**2.1. Tétel** *Legyen  $x, y \neq 0, w, n$  a (2.1) egyenlet olyan megoldása, amelyre  $x \in O_{\mathbf{K}}, y \in O_{\mathbf{K}} \setminus O_{\mathbf{K}}^*, w \in S$  és  $n \geq 2$ . Ha  $y \notin S$  vagy  $y \in S$  és  $f$  redukált, akkor*

$$(2.3) \quad n \leq c_1 Q^{c_2},$$

*teljesül, ahol  $c_1$  és  $c_2$  csak  $m, k, d$  és  $D_{\mathbf{L}}$ -től függő effektív konstansok.*

Megjegyezzük, hogy abban az esetben, ha  $y$ -nak van egy nagy normájú prímeál osztója vagy  $y \in S$  és  $f$  redukált, a fenti Tétel bizonyításából sokkal jobb korlát adódik  $n$ -re. Továbbá, mivel  $D_f \in S$ , egyszerűen látható, hogy

$$(2.4) \quad |D_{\mathbf{L}}| \leq c_3 Q^{c_4},$$

ahol  $c_3$  és  $c_4$  csak  $k, d$  és  $D_{\mathbf{K}}$ -től függő effektív konstansok. Itt  $D_{\mathbf{K}}$  a  $\mathbf{K}$  diszkriminánsát jelöli. A  $c_3$  és  $c_4$  konstansok explicit módon is megadhatók (lásd 2.5

Megjegyzést a 2.2 Tétel bizonyítása után). Ezért, (2.4)-et a 2.1 Tétellel kombinálva látható, hogy  $n$ -re egy olyan korlát is nyerhető, amely csak  $m, k, d, D_{\mathbf{K}}$  és  $Q$ -tól függ. Az így kapott korlát összehasonlítható [39] 2.2 Tételéből származó becslésekkel, ahol azonban az  $n$ -re adott korlát magától  $D_f$ -től is függ.

Shorey, van der Poorten, Tijdeman és Schinzel [67] általánosították Schinzel és Tijdeman [65] (2.1) egyenletre vonatkozó eredményeit az

$$(2.5) \quad F(x, z) = wy^n,$$

egyenletre, ahol  $F \in \mathbf{Z}[X, Y]$  egy  $\overline{\mathbf{Q}}$  fölött legalább két különböző lineáris faktoral rendelkező binér forma, amelyre  $F(1, 0) \neq 0$ . Továbbá feltételezték, hogy  $\text{lnc}_0(x, z)$  korlátos és  $z, w$  csak adott, véges sok különböző prímmel osztható. Az  $F(1, 0) = 1$  esetben a fenti eredményt [68]-ben Shorey és Tijdeman kiterjesztették algebrai számtestek esetére. Nem régen Haristoy [39] az említett eredmény explicit verzióját adta, ahol azonban az  $n$ -re adott korlát az  $F$  magasságától is függ.

Az alábbiakban általánosítjuk a 2.1 Tételt. Legyen  $F(X, Z)$  egy  $O_{\mathbf{K}}$ -beli együtthatókkal rendelkező egy főegyütthatós  $m$ -ed fokú binér forma. Tegyük fel, hogy  $F(X, 1)$ -nek  $k \geq 2$  különböző gyöke van. Jelölje  $D_F$  az  $F(X, 1) \in O_{\mathbf{K}}[X]$  maximális fokszámú négyzetmentes osztójának a diszkriminánsát és tegyük fel, hogy  $D_F \in S$ . Legyen továbbá  $\mathbf{L}$  az  $F$   $\mathbf{K}$  feletti felbontási teste és legyen  $D_{\mathbf{L}}$  az  $\mathbf{L}$  diszkriminánsa. Tekintsük a (2.5) egyenletet, ahol  $x \in O_{\mathbf{K}}, y \in O_{\mathbf{K}} \setminus \{0\}, z, w \in S, n \geq 2$  ismeretlenek.

Nyilván elegendő az  $y \notin O_{\mathbf{K}}^*$  esettel foglalkozni, hiszen különben  $n$  tetszőlegesen nagy lehet. Ha  $F(1, 1) \in S$ , akkor  $x = z = v^n, y = v^m$  nyilván megoldása (2.5)-nek minden  $v \in S$  és  $n$  esetén, ezért  $n$ -re nem adható felső korlát. Hasonlóan, ha

$$(2.6) \quad F(X, Z) = F'(X + aZ, uZ),$$

ahol  $a \in O_{\mathbf{K}}, u \in S, F' \in O_{\mathbf{K}}[X, Z]$  és  $F'(1, 1) \in S$ , akkor  $D_{F'} \in S$  és  $z = 1, x + a = u = v^n, y = v^m$  a (2.5) egyenlet egy megoldását adják bármely  $v \in S$ -re, ezért  $n$ -re nem adható csak  $m, k, d, D_{\mathbf{L}}$  és  $Q$ -tól függő felső korlát.

A fenti két esettől eltekintve  $n$ -re a 2.1 Tételhez hasonló korlát adható. Az  $F$ -et *redukált*-nak nevezzük, ha (2.6) nem teljesül semmilyen  $a, F'$  és  $u \in S \setminus O_{\mathbf{K}}^*$  esetén. Az alábbi Tételnek a 2.1 Tétel speciális este a  $z = 1$  és  $\mu = 0$  választással.

**2.2. Tétel** *Ha  $x, y \neq 0, z, w, n$  a (2.5) egyenlet egy megoldása, ahol  $x \in O_{\mathbf{K}}, y \in$*

$O_{\mathbf{K}} \setminus O_{\mathbf{K}}^*$ ,  $z \in S$ ,  $w \in S$  és  $n \geq 2$ , akkor

$$(2.7) \quad n \leq c_5 Q^{c_6} + \mu c_7 \log Q,$$

ahol  $\mu = 0$ , ha  $y \notin S$ , és

$$(2.8) \quad \text{ord}_{\mathfrak{p}_i}((x, z)) \leq \mu, \quad i = 1, \dots, s,$$

ha  $y \in S \setminus O_{\mathbf{K}}^*$  és  $F$  redukált.

A (2.7)-ben szereplő felső korlátban a  $D_{\mathbf{L}}$ -től való függés a (2.4) felhasználásával kiküszöbölhető.

**Binom Thue-Mahler egyenletek.** Tekintsük az

$$(2.9) \quad ax^n - by^n = c,$$

egyenletet, ahol  $a$  és  $b$   $O_{\mathbf{K}}$  adott nemnulla elemei és  $x, y \in O_{\mathbf{K}} \setminus \{0\}$ ,  $c \in S$ ,  $n \geq 3$  ismeretlenek. Ismert, hogy  $ax^n + by^n$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ , egy speciális binér rekurzív sorozatnak is tekinthető. Az irodalomban sok szerző foglalkozott a (2.9) egyenlettel és adott csak  $a, b$  és  $S$ -től függő korlátot  $n$ -re (lásd [68] [77] [22] valamint az itt előforduló hivatkozásokat).

A 2.2 Tétel bizonyításához szükségünk lesz arra az általánosításra, amikor (2.9)-ben  $a$  és  $b$   $S$ -beli ismeretlenek. Jelölje  $h$  és  $R$  a  $\mathbf{K}$  test ideálosztályszámát illetve regulátorát.

**2.3. Tétel** *Legyen  $a, b, c \in S$ ,  $x, y \in O_{\mathbf{K}} \setminus \{0\}$ ,  $n \geq 3$  a (2.9) egyenlet egy megoldása és tegyük fel, hogy az  $x$  és  $y$  közül legalább az egyik nincs  $O_{\mathbf{K}}^*$ -ban. Ekkor létezik egy csak  $d, h$  és  $R$ -től függő effektív pozitív  $c_8$  konstans, amellyel*

$$(2.10) \quad n \leq c_8 Q^{3h} + \nu \log Q,$$

ahol  $\nu = 0$ , ha  $x \notin S$  vagy  $y \notin S$ , és

$$(2.11) \quad \text{ord}_{\mathfrak{p}_i}((ax^n, by^n, c)) \leq \nu, \quad i = 1, \dots, s$$

különben.

Egyszerűen belátható, hogy az  $x, y \in S$  esetben a (2.11) feltétel szükséges.

Megjegyezzük, hogy a 2.3 Tétel bizonyításából lényegesen jobb korlát adódik  $n$ -re az alábbi speciális esetekben:  $x, y \in S$  (lásd. (2.45), (2.52) );  $x$  vagy  $y$  -nak van egy nagy normájú prímeál osztója (lásd (2.40) ); vagy  $c \in O_{\mathbf{K}}^*$  (lásd a 2.3

Tétel bizonyítása után lévő 2.4 Megjegyzést). Az ezekben a speciális esetekben adódó jobb korlátok egyben javítják az  $n$ -re adott korlátot az 2.1 és 2.2 Tételben a megfelelő esetekben.

Abban az esetben, ha  $\mathbf{K} = \mathbf{Q}$  a 2.3 Tételből adódik, hogy ha  $a, b, x, y, n$  olyan nemnulla racionális egészek, amelyekre  $|xy| > 1, n \geq 3$  és  $xy$ -nak van olyan prímosztója, amelyik nem osztója  $ab(ax^n - by^n)$ -nek, akkor  $Q(ax^n - by^n)$ -re az alábbi becslés adható :

$$(2.12) \quad |ax^n - by^n| \geq Q(ax^n - by^n) \geq (c_9/Q(ab))n^{1/3},$$

ahol  $Q(ax^n - by^n)$  illetve  $Q(ab)$  jelölik az  $ax^n - by^n$  illetve  $ab$  különböző prímosztóinak a szorzatát, valamint  $c_9$  egy effektív abszolút konstans. Összehasonlítva a 2.3 Tételt és (2.12)-t Yu és Hung [77] 2. Tételével láthatjuk, hogy [77]-ben az  $n$ -től való függés jobb, viszont a  $Q(ax^n - by^n)$ -re adott alsó becslés nem csak  $Q(ab)$ -től, hanem maguktól az  $a$  és  $b$ -től is függ.

**2.1. Megjegyzés.** Megjegyezzük, hogy a fenti  $c_1$ - $c_9$  konstansok explicit formában is kifejezhetők, felhasználva a bizonyításokban szereplő explicit becsléseket valamint az 2.1-2.8 Lemmák explicit verzióit.

**2.2. Megjegyzés.** A 2.3 Tétel bizonyításában - egyéb eredmények mellett - felhasználjuk Matveev [51] és Yu [76] lineáris formákra vonatkozó új becsléseit valamint Győry és Yu [38] S-egység egyenletekre vonatkozó új eredményét. A 2.2 Tételt a 2.3 Tételből vezetjük le, ahol felhasználjuk Győry [36] S-beli diszkriminánssal rendelkező binér formákra vonatkozó effektív eredményét. Megjegyezzük, hogy a 2.1 és 2.2 Tétel bizonyítható - más korlátokkal - a 2.3 Tétel felhasználása nélkül is.

## 2.2 SEGÉDEREDMÉNYEK

A tételek bizonyításához szükségünk lesz az alábbi jelölésekre és lemmákra. Ha  $\alpha$  egy  $l$ -ed fokú nemnulla algebrai szám és  $\alpha \in \mathbf{Z}$  feletti definiáló polinomja  $a \prod_{i=1}^l (X - \alpha_i)$ , úgy az  $\alpha$  abszolút logaritmikus magasságát a

$$h(\alpha) = \frac{1}{l} \left( \log |a| + \sum_{i=1}^l \log \max(1, |\alpha_i|) \right)$$

képlettel definiáljuk. A logaritmikus magasság tulajdonsága végett lásd pl. [73].

Legyen  $\mathbf{K}$  egy algebrai számtest,  $O_{\mathbf{K}}$  a  $\mathbf{K}$ -beli egészek gyűrűje és  $O_{\mathbf{K}}^*$  az egységek csoportja. Legyenek  $d, h, R$  és  $D_{\mathbf{K}}$  a  $\mathbf{K}$  test korábban már definiált paraméterei. Jelölje  $r$  az  $O_{\mathbf{K}}$  egységirangját és legyen  $\delta_d = 2/(\log 3d)^3$ , ha  $d \geq 2$  és  $\delta_d = \log 2$ , ha  $d = 1$ .

**2.1. Lemma** *Tegyük fel, hogy  $r \geq 1$ . Ekkor  $\mathbf{K}$ -ban létezik egy olyan  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r$  alapegységrendszer, amelyre*

$$h(\varepsilon_i) \leq c_{10}R \quad (1 \leq i \leq r) \quad \text{és} \quad \left| \varepsilon_i^{(j)} \right| \geq \exp\{-dc_{10}R\}$$

teljesül  $\varepsilon_i$  minden  $\varepsilon_i^{(j)}$  konjugáltjára,  $1 \leq i \leq r$ ,  $1 \leq j \leq d$ , és

$$\prod_{i=1}^r h(\varepsilon_i) \leq c_{11}R,$$

ahol

$$c_{10} = \frac{(r!)^2}{2^{r-1}d^r} \left( \frac{\delta_d}{d} \right)^{1-r} \quad \text{és} \quad c_{11} = c_{10} \left( \frac{d}{\delta_d} \right)^{1-r}.$$

**Bizonyítás.** Az első és harmadik becslés a [21] -ben szereplő 1.Lemma következménye, míg a második egyenlőtlenség egyszerűen adódik az elsőből.  $\square$

**2.2. Lemma** *Minden  $\alpha \in O_{\mathbf{K}} \setminus \{0\}$  esetén létezik egy  $\varepsilon \in O_{\mathbf{K}}$  egység úgy, hogy*

$$h(\varepsilon\alpha) \leq \frac{\log |N_{\mathbf{K}/\mathbf{Q}}(\alpha)|}{d} + c_{12}R,$$

és

$$\left| (\varepsilon\alpha)^{(j)} \right| \geq |N_{\mathbf{K}/\mathbf{Q}}(\alpha)|^{1/d} \exp\{-c_{12}R\}$$

teljesül  $\varepsilon\alpha$  minden  $(\varepsilon\alpha)^{(j)}$  konjugáltjára, ahol  $j = 1, \dots, d$ , és  $c_{12} = r^{r+1}\delta_d^{-(r-1)}/2$ , ha  $r \geq 1$  és  $c_{12} = 0$ , ha  $r = 0$ .

**Bizonyítás.** Az első egyenlőtlenség a [21] -ben szereplő 2.Lemma speciális esete, míg a második a [20] -beli 2.Lemma bizonyításában szereplő (15) egyenlőtlenség közvetlen következménye.  $\square$

**2.3. Lemma** *Ha  $d \geq 2$ , akkor*

$$Rh < c_{13}|D_{\mathbf{K}}|^{1/2}(\log |D_{\mathbf{K}}|)^{d-1} \quad \text{és} \quad R \geq 0.2052,$$

ahol  $c_{13} = 2d^d / ((2\pi)^{d/2} d!)$ .

**Bizonyítás.** Az első egyenlőtlenség bizonyításához lásd [42]-t, míg a második bizonyítása a [32] dolgozatban található.  $\square$

A következő lemma ismertetéséhez legyenek  $\alpha_1, \dots, \alpha_m$  a  $\mathbf{K}$  test nem-nulla elemei, legyenek  $b_1, \dots, b_m$  racionális egészek és  $B = \max(|b_1|, \dots, |b_m|, 3)$ . Legyen

$$\Lambda = \alpha_1^{b_1} \cdots \alpha_m^{b_m} - 1.$$

**2.4. Lemma** *Legyen*

$$A_j \geq \max\{dh(\alpha_j), |\log \alpha_j|, 0.16\} \quad (1 \leq j \leq m).$$

*Ha  $\Lambda \neq 0$ , akkor*

$$\log |\Lambda| > -C_1(m, d) \log(m\epsilon B) A_1 A_2 \cdots A_m,$$

*ahol*

$$C_1(m, d) = 3.15 \cdot 30^{m+4} (m+1)^{5.5} d^2 \log(ed).$$

**Bizonyítás.** Ismert, hogy ha  $0 < |\Lambda| < 1/3$ , akkor

$$|b_0 \log(-1) + b_1 \log \alpha_1 + \dots + b_m \log \alpha_m| \leq 2|\Lambda|,$$

teljesül, ahol  $b_0 \in \mathbf{Z}$ ,  $|b_0| \leq mB$  és a  $\log$  a logaritmus főértékét jelöli. Ezért a 2.4. Lemma könnyen adódik Matveev [51] 2.3 Következményéből.  $\square$

**2.3 Megjegyzés.** Legyen  $c_{14} = 3.22d/\delta_d$ . Könnyű ellenőrizni, hogy a 2.4 Lemmában  $A_j = \pi$  vagy  $A_j = c_{14}h(\alpha_j)$  választással élhetünk attól függően, hogy  $\alpha_j$  egységgyök vagy nem.

Legyen  $\mathfrak{p}$  egy  $p$  racionális prím feletti  $O_{\mathbf{K}}$ -beli prímeál és jelölje  $e_{\mathfrak{p}}$  a  $\mathfrak{p}$  ramifikációs indexét. Tetszőleges  $\alpha \in \mathbf{K}^*$  esetén legyen  $\text{ord}_{\mathfrak{p}}\alpha$   $\mathfrak{p}$ -nek az a legmagasabb hatványa, amellyel az  $(\alpha)$   $\mathbf{K}$ -beli ideál osztható.

**2.5. Lemma** *Ha  $\alpha \in \mathbf{K}^*$ , akkor*

$$\text{ord}_{\mathfrak{p}}\alpha \leq \frac{d}{\log N_{\mathbf{K}/\mathbf{Q}}(\mathfrak{p})} h(\alpha).$$

**Bizonyítás.** Lásd Yu [75] 124. oldal.  $\square$

Az alábbi Lemma Yu [76] 3.Tételének következménye és  $p$ -adikus megfelelője a 2.4 Lemmának.

**2.6. Lemma** *Legyenek ismét  $\alpha_1, \dots, \alpha_m$  a  $\mathbf{K}$  test nemnulla elemei és tegyük fel, hogy egyikük sem egységgyök. Ha  $\Lambda \neq 0$ , akkor*

$$\text{ord}_{\mathfrak{p}} \Lambda < C_2(m, d, \mathfrak{p}) h(\alpha_1) \cdots h(\alpha_m) \log B,$$

ahol

$$C_2(m, d, \mathfrak{p}) = (16ed)^{2(m+1)} m^{5/2} e_{\mathfrak{p}}^m \frac{N_{\mathbf{K}/\mathbf{Q}}(\mathfrak{p})}{\log^2 N_{\mathbf{K}/\mathbf{Q}}(\mathfrak{p})} \log(2md) \log(2d).$$

A 2.2 alfejezethez ahsonlóan legyenek most is  $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_s$   $O_{\mathbf{K}}$  különböző prímeáljai, valamint vezessük be az alábbi jelöléseket: Legyen

$$P = \begin{cases} \max_{1 \leq i \leq s} N_{\mathbf{K}/\mathbf{Q}}(\mathfrak{p}_i) & , \quad \text{ha } s > 0, \\ 1 & , \quad \text{ha } s = 0. \end{cases}$$

Továbbá legyen

$$W = (\log^* N_{\mathbf{K}/\mathbf{Q}}(\mathfrak{p}_1)) \cdots (\log^* N_{\mathbf{K}/\mathbf{Q}}(\mathfrak{p}_s)),$$

ha  $s > 0$  és  $W = 1$  ha  $s = 0$ . Itt  $\log^* a = \max\{\log a, 1\}$ .

Az  $\alpha \in \mathbf{K}$  elemet  $S$ -egységnek nevezzük, ha  $\text{ord}_{\mathfrak{p}}(\alpha) = 0$  minden,  $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_s$ -től különböző  $\mathfrak{p}$  prímeál esetén. Jelölje  $O_S^*$  a  $\mathbf{K}$ -beli  $S$ -egységek csoportját. Világos, hogy  $S = O_S^* \cap O_{\mathbf{K}}$ . Tekintsük az alábbi  $S$ -egység egyenletet:

$$(2.13) \quad x_1 + x_2 + x_3 = 0 \quad , \quad x_1, x_2, x_3 \in O_S^*.$$

Legyenek

$$T = \prod_{i=1}^s \max\{h \log p_i, c_{12} R\} \quad \text{és} \quad H = \max\{h, c_{12} R\},$$

ahol  $p_1, \dots, p_s$  a  $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_s$  prímeállokkal osztható racionális prímekeket jelölik.

**2.7. Lemma** *A (2.13) egyenlet minden  $x_1, x_2, x_3$  megoldásához létezik  $\sigma \in O_S^*$  és  $\varrho_k \in S$  úgy, hogy*

$$x_k = \sigma \varrho_k, \quad k = 1, 2, 3$$

és

$$\max_{1 \leq k \leq 3} h(\varrho_k) \leq c_{15} h R^2 (\log^* R) H P T \log T,$$

ahol  $c_{15} = (13d)^{3(2r+s+7)}$ . Továbbá, ha  $x_k \in S$   $k = 1, 2, 3$ , akkor  $\sigma$  választható  $S$ -ből.

**Bizonyítás.** A 2.7. Lemma a [38]-ban szereplő 2. Tétel következménye.  $\square$

Egy algebrai együtthatós  $F$  polinom esetén jelölje  $h(F)$  az  $F$  együtthatói magasságainak a maximumát.

**2.8. Lemma** *Legyen  $F \in O_{\mathbf{K}}[X, Y]$  egy  $D(F)$  diszkriminánssal rendelkező  $k \geq 3$ -ad fokú egy főegyütthatós binér forma. Tegyük fel, hogy  $D(F) \in S$  és jelölje  $\mathbf{L}$  az  $F$   $\mathbf{K}$  fölötti felbontási testét. Ekkor létezik egy egy főegyütthatós  $F^* \in O_{\mathbf{K}}[X, Y]$  binér forma, valamint  $a, u \in O_{\mathbf{K}}$ ,  $u \in S$  úgy, hogy*

$$F(X, Y) = F^*(X + aY, uY)$$

és

$$h(F^*) \leq c_{18}c_{19}^s(PW)^l,$$

ahol  $l = [\mathbf{L} : \mathbf{K}]$  és  $c_{18}, c_{19}$  csak  $d, k$  és  $D_{\mathbf{L}}$ -től függő pozitív effektív konstansok.

**Bizonyítás.** A 2.8. Lemma speciális esete a [36]-ban szereplő 2. Következménynek.  $\square$

Végül szükségünk lesz még az  $S$ -norma fogalmára. Ha  $\alpha \in \mathbf{K}$ , akkor  $(\alpha)$  egyértelműen felírható  $\mathfrak{a}_1 \cdot \mathfrak{a}_2$  alakban, ahol  $\mathfrak{a}_1$  prímeideál osztói a  $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_s$  közül kerülnek ki, míg  $\mathfrak{a}_2$  nem osztható  $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_s$  egyikével sem. Ekkor az  $\alpha$   $S$ -normáját az  $N_S(\alpha) = N_{\mathbf{K}/\mathbf{Q}}(\mathfrak{a}_2)$  által definiáljuk. Világos, hogy az  $\alpha \in O_{\mathbf{K}}$  pontosan akkor van  $S$ -ben, ha  $N_S(\alpha) = 1$ .

## 2.3 BIZONYÍTÁSOK

Először a 2.3 Tételt bizonyítjuk.

**A 2.3. Tétel bizonyítása.** A bizonyítás során felhasználjuk az előző alfejezetekben bevezetett jelöléseket, továbbá a [77] és [22] dolgozatokban alkalmazott gondolatmenetet, ahol a (2.9) egyenletet fix  $a, b$ -vel tekintették. Ha  $r + s = 0$ , akkor (2.10) azonnal adódik  $\nu = 0$  választással Zsigmondy [78] egy klasszikus tételéből. Így feltehető, hogy  $r + s > 0$ . Ezért  $s > 0$  esetén írható, hogy

$$(a) = \prod_{i=1}^s \mathfrak{p}_i^{a_i}, \quad (b) = \prod_{i=1}^s \mathfrak{p}_i^{b_i}$$

ahol  $a_i, b_i$  nemnegatív egészek. Jelölje  $h_i$  azt a legkisebb pozitív egészet, amelyre  $\mathfrak{p}_i^{h_i}$  főideál. Legyen  $a_i = c_i h_i + d_i$ ,  $b_i = e_i h_i + f_i$ , ahol  $c_i, d_i, e_i, f_i$  olyan

nemnegatív egészek, amelyekre

$$0 \leq d_i, f_i < h_i$$

$i = 1, 2, \dots, s$ . Ezért

$$(2.14) \quad a = \varepsilon_a \alpha \prod_{i=1}^s \pi_i^{c_i}, \quad b = \varepsilon_b \beta \prod_{i=1}^s \pi_i^{e_i},$$

ahol  $\varepsilon_a, \varepsilon_b$  egységek és  $\pi_i, \alpha, \beta$  az  $O_{\mathbf{K}}$  olyan egészei, amelyekre

$$(\pi_i) = \mathfrak{p}_i^{h_i}, \quad (\alpha) = \prod_{i=1}^s \mathfrak{p}_i^{d_i}, \quad (\beta) = \prod_{i=1}^s \mathfrak{p}_i^{f_i}.$$

Alkalmazva a 2.2 Lemmát könnyen látható, hogy (2.14)-ben az  $\alpha$  és  $\beta$  megválasztható úgy, hogy

$$(2.15) \quad \min\{|\alpha^{(j)}|, |\beta^{(j)}|\} \geq \exp\{-c_{12}R\}$$

minden  $1 \leq j \leq d$  esetén. Továbbá

$$h(\alpha) \leq \frac{\log |N_{\mathbf{K}/\mathbf{Q}}(\alpha)|}{d} + c_{12}R \quad \text{és} \quad h(\beta) \leq \frac{\log |N_{\mathbf{K}/\mathbf{Q}}(\beta)|}{d} + c_{12}R,$$

amiből azt kapjuk, hogy

$$(2.16) \quad \max(h(\alpha), h(\beta)) \leq (sh/d) \log P + c_{12}R = c_{18}.$$

Az előző gondolatmenethez hasonlóan  $s > 0$  esetén a  $\pi_i$  is megválasztható úgy, hogy

$$(2.17) \quad |\pi_i^{(j)}| \geq \exp\{-c_{12}R\} \quad , \quad j = 1, \dots, d$$

és

$$(2.18) \quad h(\pi_i) \leq \frac{h_i \log N_{\mathbf{K}/\mathbf{Q}}(\mathfrak{p}_i)}{d} + c_{12}R,$$

amiből

$$(2.19) \quad \prod_{i=1}^s h(\pi_i) \leq \prod_{i=1}^s ((h_i/d) \log N_{\mathbf{K}/\mathbf{Q}}(\mathfrak{p}_i) + c_{12}R) = c_{19}.$$

Emlékeztetünk, hogy  $c_{12} = 0$  esetén  $r = 0$ . Ha  $r \geq 1$ , rögzítsünk egy a 2.1 Lemma feltételeinek eleget tevő  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r$   $\mathbf{K}$ -beli alapegységrendszert. Ekkor, az  $\varepsilon_a$  és  $\varepsilon_b$  egységeket ezen alapegységrendszer segítségével felírva és az előforduló egységgyököket beolvastva az  $\alpha$  és  $\beta$ -ba adódik, hogy

$$(2.20) \quad \alpha \prod_{j=1}^r \varepsilon_j^{u_j} \prod_{i=1}^s \pi_i^{t_i} (x')^n - \beta \prod_{j=1}^r \varepsilon_j^{v_j} \prod_{i=1}^s \pi_i^{w_i} (y')^n = c,$$

ahol feltehető, hogy  $t_i, w_i, u_j, v_j$  olyan racionális egészek, amelyekre

$$(2.21) \quad 0 \leq u_j, v_j, t_i, w_i < n$$

minden  $j$ -re és  $i$ -re. Továbbá  $x'$  és  $y'$   $\mathbf{K}$  olyan nemnulla egészeit jelentik, amelyekre

$$\max(N_S(x'), N_S(y')) = \max(N_S(x), N_S(y)).$$

Ezért, az egyszerűség kedvéért (2.20)-ban  $x'$  és  $y'$  helyére  $x$  és  $y$ -t fogunk írni. Legyen

$$R_n = ax^n - by^n,$$

ahol most

$$(2.22) \quad a = \alpha \prod_{j=1}^r \varepsilon_j^{u_j} \prod_{i=1}^s \pi_i^{t_i} \quad \text{és} \quad b = \beta \prod_{j=1}^r \varepsilon_j^{v_j} \prod_{i=1}^s \pi_i^{w_i}.$$

A (2.20) összefüggés miatt könnyen következik, hogy  $((x)^h, (y)^h) = (\omega)$ , ahol  $\omega \in S$ . Legyen

$$(2.23) \quad x_\omega = \frac{x^h}{\omega}, \quad y_\omega = \frac{y^h}{\omega}.$$

Világos, hogy az  $x_\omega$  és  $y_\omega$  a  $\mathbf{K}$  test algebrai egészei. Jelölje  $x_\omega^{(j)}, y_\omega^{(j)}$ ,  $j = 1, \dots, d$  az  $x_\omega$  és  $y_\omega$  konjugáltjait. Legyen

$$(2.24) \quad M_\omega = \prod_{j=1}^d \max(|x_\omega^{(j)}|, |y_\omega^{(j)}|),$$

és

$$S_n = \frac{R_n^h}{\omega^n}.$$

Könnyen ellenőrizhető, hogy  $S_n \in S$ . Egyszerű számolás után adódik, hogy

$$(2.25) \quad S_n = b^h y_\omega^n \left( \frac{a}{b} \left( \frac{x}{y} \right)^n - 1 \right)^h = a^h x_\omega^n \left( \frac{b}{a} \left( \frac{y}{x} \right)^n - 1 \right)^h.$$

Két esetet különböztetünk meg. Először tegyük fel, hogy

$$(2.26) \quad |N_{\mathbf{K}/\mathbf{Q}}(S_n)| \leq M_\omega^{0,99n}.$$

Megjegyezzük, hogy a fenti egyenlőtlenség  $s = 0$  vagy  $s > 0$  és  $c \in O_{\mathbf{K}}^*$  esetén fennáll. A továbbiakban alsó becslést szeretnénk nyerni  $|N_{\mathbf{K}/\mathbf{Q}}(S_n)|$ -re. Az általánosság megszorítása nélkül feltehető, hogy  $|y_\omega| \geq |x_\omega|$ . Ekkor (2.25) miatt azt kapjuk, hogy

$$|S_n| \geq (\min(|a|, |b|))^h (\max(|x_\omega|, |y_\omega|))^n \left| \left( \frac{\alpha}{\beta} \right) \prod_{j=1}^r \varepsilon_j^{u_j - v_j} \prod_{i=1}^s \pi_i^{t_i - w_i} \left( \frac{x}{y} \right)^n - 1 \right|^h.$$

Először alsó korlátot adunk  $\min(|a|, |b|)$  -re. A (2.22), (2.15) és (2.17) összefüggéseket a 2.1 Lemmával kombinálva azt kapjuk, hogy

$$|a| = |\alpha| \prod_{j=1}^r |\varepsilon_j|^{u_j} \prod_{i=1}^s |\pi_i|^{t_i} \geq \exp\{-n(r+s+1)dc_0R\},$$

ahol  $c_0 = \max\{c_{12}, c_{10}\}$ . A fenti gondolatmenethez analóg módon látható, hogy ugyanaz az alsó korlát adódik  $|b|$ -re is. Itt  $c_0 \geq 1/2$ , ha  $r \geq 1$  és legyen  $c_0 = 0$ , ha  $r = 0$ . Azt kapjuk, hogy

$$\min(|a|, |b|) \geq \exp\{-nc_{20}\},$$

ahol  $c_{20} = (r+s+1)dc_0R$ . Legyen

$$(2.27) \quad \Lambda_1 = \left( \frac{\alpha}{\beta} \right) \prod_{j=1}^r \varepsilon_j^{u_j - v_j} \prod_{i=1}^s \pi_i^{t_i - w_i} \left( \frac{x}{y} \right)^n - 1.$$

A (2.9) és (2.22) felhasználásával könnyen látható, hogy  $\Lambda_1 \neq 0$ . Most alkalmazni fogjuk a 2.4. Lemmát és alsó korlátot nyerünk  $|\Lambda_1|$ -re. Feltehető, hogy  $x/y$  nem egységgyök, hiszen különben (2.9) és (2.11) -ből adódik, hogy  $n \leq \nu$ . Most Yu és Hung [77] (lásd 352-353 old.) gondolatmenetét alkalmazva kapjuk,

hogy,  $h(x/y) \leq \log M_\omega$ . Továbbá feltehető, hogy  $n > (2e(r+s+2))^{10}$  és ezért az is, hogy  $\log(2n) \leq 1.1n$ . Ekkor alkalmazva a 2.4 Lemmát azt kapjuk, hogy

$$|\Lambda_1| \geq \exp\{-c_{21} \log M_\omega \log n\},$$

ahol

$$c_{21} = 2.2C_1(r+s+2, d)(c_{11}R)c_{14}^{r+s+2}c_{18}c_{19},$$

ahol a  $C_1, c_{11}, c_{14}, c_{18}$  és  $c_{19}$  konstansok a fentiekben definiáltak. Sőt  $r = 0$  esetén a fenti  $c_{21}$  konstansban  $c_{11}R$  helyett 1 írható. Alkalmazva a fenti gondolatmenetet  $S_n$  minden konjugáltjára és összeszorozva az így kapott egyenlőtlenségeket az adódik, hogy

$$(2.28) \quad |N_{\mathbf{K}/\mathbf{Q}}(S_n)| \geq \exp\{-nhdc_{20}\}M_\omega^n \exp\{-dhc_{21} \log M_\omega \log n\}.$$

Összehasonlítva (2.26)-ot és (2.28)-at, a  $c_{22} = \exp\{dc_{20}\}$  jelölés mellett azt kapjuk, hogy

$$(2.29) \quad n(0.01 \log M_\omega - h \log c_{22}) \leq dhc_{21} \log M_\omega \log n.$$

Megjegyezzük, hogy  $c_{22} > 1$ , ha  $r \geq 1$  és  $c_{22} = 1$ , ha  $r = 0$ . Tegyük fel, hogy

$$(2.30) \quad \max(N_S(x), N_S(y)) > c_{22}^{200}.$$

A (2.23) és (2.24) összefüggéseket felhasználva egyszerűen látható, hogy

$$(2.31) \quad (\max(N_S(x), N_S(y)))^h \leq \max(|N_{\mathbf{K}/\mathbf{Q}}(x_\omega)|, |N_{\mathbf{K}/\mathbf{Q}}(y_\omega)|) \leq M_\omega.$$

Ezért (2.29) és (2.30) miatt

$$n \leq 200dhc_{21} \log n,$$

amiből

$$n \leq 400dhc_{21} \log(200dhc_{21})$$

adódik. Ebből

$$(2.32) \quad n \leq c_{23}c_{24}^s W(\log P),$$

következik, ahol  $c_{23}$  és  $c_{24}$  csak  $d, h$  és  $R$ -től függő konstansok és egyszerűen explicitté tehetők a  $c_{21}$  felhasználásával. Ebből, a (2.30) feltétel mellett (2.10) adódik a  $\nu = 0$  választással.

Maradt az az eset, amikor

$$(2.33) \quad |N_{\mathbf{K}/\mathbf{Q}}(S_n)| > M_\omega^{0.99n}.$$

Ekkor nyilván  $s > 0$ . A továbbiakban felső korlátot adunk  $|N_{\mathbf{K}/\mathbf{Q}}(S_n)|$ -re. Rögzítsünk egy  $i \in \{1, \dots, s\}$  indexet. Mivel  $(x_\omega, y_\omega) = 1$ , így feltehető, hogy  $\text{ord}_{\mathfrak{p}_i}(y_\omega) = 0$ . Ezért (2.25) -ből és (2.27) -ből azt kapjuk, hogy

$$(2.34) \quad \text{ord}_{\mathfrak{p}_i}(S_n) = \text{hord}_{\mathfrak{p}_i}(b) + \text{hord}_{\mathfrak{p}_i}(\Lambda_1).$$

Továbbá a 2.5 Lemma és (2.22) felhasználásával

$$(2.35) \quad \text{ord}_{\mathfrak{p}_i}(b) \leq hw_i + \frac{d}{\log N_{\mathbf{K}/\mathbf{Q}}(\mathfrak{p}_i)} h(\beta) < hn + c_{25},$$

következik, ahol  $c_{25} = dc_{18}/\log N_{\mathbf{K}/\mathbf{Q}}(\mathfrak{p}_i)$ . A 2.6 Lemmát alkalmazva felső korlátot adunk  $\text{ord}_{\mathfrak{p}_i}(\Lambda_1)$ -re. Jelölje  $m$  a  $\mathbf{K}$ -beli egységgyökök számát. Ekkor  $\phi(m) \mid d$  és ezért  $m \leq 20d \log \log d$  (lásd [64]), ahol  $\phi(m)$  az Euler-féle függvényt jelöli. A továbbiakban feltehetjük, hogy  $\log(2mn) \leq 2n$  és hogy  $\text{ord}_{\mathfrak{p}_i} \Lambda_1 > m$ . A 2.1 és 2.6 Lemmák valamint (2.22), (2.16) és (2.19) felhasználásával azt kapjuk, hogy

$$(2.36) \quad \text{ord}_{\mathfrak{p}_i} \Lambda_1 < \text{ord}_{\mathfrak{p}_i} \left( \left( \left( \frac{\alpha}{\beta} \right) \prod_{j=1}^r \varepsilon_j^{u_j - v_j} \prod_{i=1}^s \pi_i^{t_i - w_i} \left( \frac{x}{y} \right)^n \right)^m - 1 \right) \\ \leq c_{26} \log M_\omega \log n,$$

ahol

$$c_{26} = 4(\log 7d)C_2(r + s + 2, d, \mathfrak{p}_i)(c_{11}R)c_{18}c_{19}$$

a fentebb bevezetett  $C_2, c_{11}, c_{18}, c_{19}$  konstansokkal. A  $c_{26}$  konstansban  $r = 0$  esetén  $c_{11}R$  helyett ismét írhatunk 1-et. Így (2.34), (2.35), (2.36) és  $c_{26} > c_{25}$  felhasználásával adódik, hogy

$$\text{ord}_{\mathfrak{p}_i}(S_n) < h^2 n + 2hc_{26} \log M_\omega \log n,$$

amiből

$$(2.37) \quad \log |N_{\mathbf{K}/\mathbf{Q}}(S_n)| = \sum_{i=1}^s \text{ord}_{\mathfrak{p}_i}(S_n) \log N_{\mathbf{K}/\mathbf{Q}}(\mathfrak{p}_i) \leq n \log c_{27} + c_{28} \log M_\omega \log n$$

következik, ahol  $c_{27} = Q^{h^2}$  és  $c_{28} = 2h(\log Q)c_{26}$ . Összehasonlítva (2.33) és (2.37)-et azt kapjuk, hogy

$$(2.38) \quad n(0.99 \log M_\omega - \log c_{27}) \leq c_{28} \log M_\omega \log n.$$

Ha most

$$(2.39) \quad \max(N_S(x), N_S(y)) > Q^{1.02h},$$

akkor (2.31) miatt  $\log M_\omega > 1.02 \log c_{27}$  adódik. Ezért (2.38) -ből egyszerű számítással látható, hogy

$$n \leq 400c_{28} \log(200c_{28}).$$

Összevetve az előbbi eseteket, beláttuk tehát, hogy ha (2.30) és (2.39) fennáll, akkor

$$n \leq 400 \max\{dhc_{21} \log(200dhc_{21}), c_{28} \log(200c_{28})\}.$$

A továbbiakban feltehető, hogy

$$\log Q > 200(r + s + 1)dRc_0,$$

hiszen különben  $n$ -re jobb,  $S$ -től függő korlát adódik. Ekkor  $Q^{1.02h} > c_{22}^{200}$  is fennáll. Felhasználva, hogy  $\log Q \leq s \log P$ , azt kapjuk, hogy ha (2.39) fennáll, akkor

$$(2.40) \quad n \leq c_{29}c_{30}^s PW(\log^* W),$$

ahol  $c_{29}$  és  $c_{30}$  csak  $d, h$  és  $R$ -től függenek továbbá könnyen megadhatók explicit formában is. Mivel (2.39) miatt  $x \notin S$  vagy  $y \notin S$  teljesül ezért (2.40) felhasználásával szintén megkapjuk (2.10)-et  $\nu = 0$  választással.

A továbbiakban azt az esetet tekintjük, amikor

$$(2.41) \quad \max(N_S(x), N_S(y)) \leq C_3,$$

ahol

$$C_3 = \begin{cases} Q^{1.02h} & \text{ha } s > 0, \\ c_{22}^{200} & \text{ha } s = 0. \end{cases}$$

Emlékeztetőül megjegyezzük, hogy  $s = 0$  estén  $c_{22} = \exp\{(r + 1)d^2c_0R\} > 1$ . Először tegyük fel, hogy  $x$  vagy  $y$  nem eleme  $S$ -nek. Legyenek  $\mathfrak{q}_1, \dots, \mathfrak{q}_t$

az  $xy$   $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_s$ -től különböző prímeál osztói. Jelölje  $P_q$  és  $Q_q$  a  $\mathfrak{q}_1, \dots, \mathfrak{q}_t$  prímeállok normáinak maximumát, illetve szorzatát. Ekkor (2.41) miatt

$$(2.42) \quad P_q \leq Q_q \leq N_S(xy) \leq C_3^2.$$

Továbbá Rosser és Schoenfeld [64] prímeállokra vonatkozó explicit becsléseiből adódik, hogy

$$t \leq 3 \frac{\log Q_q}{\log_2 Q_q},$$

ahol  $\log_i$  az  $i$ -alapú logaritmust jelöli. (lásd még [39]). Az  $s > 0$  esetben elegendő a  $Q_q \geq Q$  míg, ha  $s = 0$  a  $Q_q \geq c_{22}^{200}$  esettel foglalkozni. Ezért azt kapjuk, hogy

$$(2.43) \quad t \leq \begin{cases} 6.12h(\log Q/\log_2 Q) & , \text{ ha } s > 0, \\ 1200(\log c_{22}/\log(200 \log c_{22})) & , \text{ ha } s = 0. \end{cases}$$

Az előzőekhez hasonlóan adódik, hogy  $s \leq 3 \frac{\log Q}{\log_2 Q}$ . Jelölje  $S'$  a  $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_s, \mathfrak{q}_1, \dots, \mathfrak{q}_t$  prímeállok halmazát. Ekkor (2.9)-et egy  $S'$ -egységegyenletnek tekinthetjük, ahol  $ax^n, by^n, c \in O_{S'}^* \cap O_{\mathbf{K}}$ . Ezért alkalmazva a 2.7. Lemmát, azt kapjuk, hogy

$$(2.44) \quad ax^n = \sigma \varrho_1, \quad by^n = \sigma \varrho_2, \quad c = \sigma \varrho_3,$$

ahol

$$\sigma \in O_{S'}^* \cap O_{\mathbf{K}} \quad \text{and} \quad \varrho_k \in O_{S'}^* \cap O_{\mathbf{K}}$$

úgy, hogy

$$(2.45) \quad \max_{1 \leq k \leq 3} h(\varrho_k) \leq c_{31} h R^2 (\log^* R) H P' T' (\log T').$$

Itt  $c_{31} = (13d)^{3(2r+s+t+7)}$ ,  $P' = \max\{P, P_q\}$ ,  $H = \max\{h, c_{12}R\}$  és

$$(2.46) \quad T' = \prod_{i=1}^s \max\{h_i \log p_i, c_{12}R\} \prod_{j=1}^t \max\{h \log q_j, c_{12}R\},$$

ahol  $q_1, \dots, q_t$  a  $\mathfrak{q}_1, \dots, \mathfrak{q}_t$  prímeállok által osztható racionális prímeállok jelölnek. Azonban

$$(2.47) \quad \begin{aligned} \prod_{i=1}^s \max\{h_i \log p_i, c_{12}R\} &\leq ((c_{12} + 5)hR)^s \prod_{i=1}^s (\log^* p_i) \\ \prod_{j=1}^t \max\{h \log q_j, c_{12}R\} &\leq ((c_{12} + 5)hR)^t \prod_{j=1}^t (\log^* q_j). \end{aligned}$$

Továbbá  $s > 0$  esetén [64] explicit becsléseit felhasználva (lásd még [39]) azt kapjuk, hogy

$$(2.48) \quad \prod_{i=1}^s \log^* p_i \leq Q^{3(\log d + 2 \log_3 Q) / \log_2 Q}$$

és

$$(2.49) \quad \prod_{j=1}^t \log^* q_j \leq Q_q^{3(\log d + 2 \log_3 Q_q) / \log_2 Q_q} \leq \begin{cases} Q^{6.12h(\log d + 2 \log_2(3h \log Q)) / \log_2 Q}, & \text{ha } s > 0, \\ c_{22}^{1200(\log d + 2 \log_2(400 \log c_{22})) / \log_2 c_{22}}, & \text{ha } s = 0. \end{cases}$$

Mivel  $c \in S$  és  $c = \sigma \varrho_3$ , ezért  $\sigma \in S$ . Így  $\mathfrak{q}_1 \cdots \mathfrak{q}_t \mid xy$  és (2.44) miatt  $(\mathfrak{q}_1 \cdots \mathfrak{q}_t)^n \mid \varrho_1 \varrho_2$  következik, amiből

$$(2.50) \quad n \log N_{\mathbf{K}/\mathbf{Q}}(\mathfrak{q}_1 \cdots \mathfrak{q}_t) \leq \log |N_{\mathbf{K}/\mathbf{Q}}(\varrho_1 \varrho_2)| \leq d(h(\varrho_1) + h(\varrho_2)).$$

Ha  $s > 0$ , akkor feltehetjük, hogy

$$\log Q / (\log_2 Q)^{50} > 13d^2 h R \log^{25}(3h)(c_{12} + 5),$$

hiszen különben  $n$ -re jobb korlát adódik. Így (2.42) – (2.50) felhasználásával

$$(2.51) \quad n \leq c_{32} Q^{3h}$$

következik, ahol  $c_{32}$  csak  $d, h$  és  $R$ -től függ. A (2.42) – (2.50) felhasználásával  $c_{32}$  egyszerűen explicitte tehető. Továbbá a  $c_{32}$  konstans megválasztható úgy, hogy  $s > 0$  esetén, a (2.51) -ben szereplő korlát nagyobb, mint a (2.40) -beli. Ezért látható, hogy ha  $x \notin S$  vagy  $y \notin S$ , a (2.10) becslés fenáll a  $\nu = 0$  választással.

Tekintsük most azt az esetet, amikor (2.9)-ben  $x, y \in S, s > 0$  valamint (2.11) fenáll, továbbá  $x \notin O_{\mathbf{K}}^*$ . Ekkor a 2.7 Lemma miatt ismét következik (2.44), ahol most  $\sigma \in S, \varrho_k \in S$  és a (2.45) becslés fenáll a  $c_{31} = (13d)^{3(2r+s+7)}$ ,  $P' = P$  és

$$T' = \prod_{i=1}^s \max\{h \log p_i, c_{12} R\}$$

választással. A (2.11) és (2.44) összefüggések alkalmazásával kapjuk, hogy

$$\text{ord}_{\mathfrak{p}_i} \sigma \leq \nu \quad (i = 1, \dots, s),$$

amiből  $x \in S \setminus O_{\mathbf{K}}^*$  felhasználásával adódik, hogy

$$(2.52) \quad n \log |N_{\mathbf{K}/\mathbf{Q}}(x)| \leq \log |N_{\mathbf{K}/\mathbf{Q}}(\sigma \varrho_1)| = \\ = \log |N_{\mathbf{K}/\mathbf{Q}}(\sigma)| + \log |N_{\mathbf{K}/\mathbf{Q}}(\varrho_1)| \\ \leq \nu \log Q + dh(\varrho_1).$$

Végül (2.45) és (2.52)-t kombinálva (2.10)-et kapjuk egy csak  $d, h$  és  $R$ -től függő effektív  $c_8$  konstanssal. Ezzel a 2.3 Tétel bizonyítását befejeztük.

**2.4. Megjegyzés** Megjegyezzük, hogy ha speciálisan  $c \in O_{\mathbf{K}}^*$  (azaz  $s = 0$ ), akkor a bizonyításunkban  $w, S_n \in O_{\mathbf{K}}^*$ , ezért (2.33) nem állhat fenn. Így ebben az esetben lényegesen jobb korlát adódik  $n$ -re.

A 2.2 Tételt a 2.3 Tétel és a 2.8 Lemma felhasználásával bizonyítjuk.

**A 2.2 Tétel bizonyítása.** Legyen

$$F(X, Z) = (X - \alpha_1 Z)^{a_1} \cdots (X - \alpha_k Z)^{a_k},$$

ahol  $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in O_{\mathbf{L}}$  különböző elemei. Ekkor

$$D_F = \prod_{1 \leq i < j \leq k} (\alpha_i - \alpha_j)^2.$$

Legyen  $x \in O_{\mathbf{K}}, y \in O_{\mathbf{K}} \setminus \{0\}, z, w \in S$  és  $n \geq 3$  a (2.5) egyenlet olyan megoldása, amelyre  $y \notin O_{\mathbf{K}}^*$ . Ekkor (2.5) -ből ismert módon következik, hogy

$$(2.53) \quad (x - \alpha_i z) = \mathfrak{B}_i \mathfrak{d}_i^{n'}, \quad i = 1, \dots, k,$$

ahol

$$n' = \frac{n}{\text{lko}(n, \text{lkkt}(a_1, \dots, a_k))}$$

valamint  $\mathfrak{B}_i, \mathfrak{d}_i$  olyan nem nulla ideáljai  $O_{\mathbf{L}}$ -nek, hogy  $\mathfrak{B}_i$  csak a  $\mathfrak{p}_1 \cdots \mathfrak{p}_s$  ideált osztó  $O_{\mathbf{L}}$ -beli prímeideálokkal osztható. Legyen  $\mathbf{M}$  az  $\mathbf{L}$  Hilbert-féle osztályteste, és jelölje  $R_{\mathbf{M}}, h_{\mathbf{M}}$  és  $D_{\mathbf{M}}$  az  $\mathbf{M}$  test regulátorát, ideálosztályszámát és diszkriminánsát. Legyen  $S_{\mathbf{M}}$  azon  $O_{\mathbf{M}}$ -beli elemek halmaza, amelyek prímeideál osztói osztják a  $\mathfrak{p}_1 \cdots \mathfrak{p}_s$  szorzatot. Ekkor (2.53) -ből adódik, hogy

$$(2.54) \quad x - \alpha_i z = \beta_i \gamma_i^{n'}, \quad i = 1, 2,$$

ahol  $\beta_i \in S_{\mathbf{M}}, \gamma_i \in O_{\mathbf{M}} \setminus \{0\}$ . Legyen  $l = [\mathbf{L} : \mathbf{K}]$  és jelölje  $h_{\mathbf{L}}$  az  $\mathbf{L}$  ideálosztályszámát. Mivel  $[\mathbf{M} : \mathbf{L}] = h_{\mathbf{L}}$ , ezért a  $\mathfrak{p}_1 \cdots \mathfrak{p}_s$  szorzatot osztó  $O_{\mathbf{M}}$ -beli prímeálók száma legfeljebb  $slh_{\mathbf{L}}$ . Azonban (2.54) -ből

$$(2.55) \quad \beta_1 \gamma_1^{n'} - \beta_2 \gamma_2^{n'} = (\alpha_2 - \alpha_1)z,$$

adódik. Így  $D_F \in S$  miatt kapjuk, hogy  $(\alpha_2 - \alpha_1)z \in S_{\mathbf{M}}$ .

Tekintsük először azt az esetet, amikor  $y \notin S$ . Ekkor legalább egy  $i$  index esetén, például  $i = 1$ -re  $\mathfrak{d}_i$ -nek van egy olyan  $O_{\mathbf{M}}$ -beli prímeál osztója, amelyik relatív prím a  $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_s$  ideálokhhoz. Ezért látható, hogy  $\gamma_1 \notin S_{\mathbf{M}}$ . Alkalmazva a 2.3 Tételt a (2.55) egyenletre, adódik, hogy

$$n' \leq c_{33} Q^{h_{\mathbf{M}} l h_{\mathbf{L}}}.$$

Így

$$(2.56) \quad n \leq c_{33} \text{lkkt}(a_1, \dots, a_k) Q^{c_{34}},$$

ahol  $c_{33}, c_{34}$  csak  $l, h_{\mathbf{L}}, [\mathbf{M} : \mathbf{Q}] = m', R_{\mathbf{M}}$  és  $h_{\mathbf{M}}$  paramétereiktől függő effektív pozitív konstansok. A 2.3 Lemma felhasználásával  $R_{\mathbf{M}}$  és  $h_{\mathbf{M}}$  felül becsülhető egy csak  $m'$  és  $D_{\mathbf{M}}$ -től függő explicit kifejezéssel. Továbbá ismert, hogy  $m' = dlh_{\mathbf{L}}$  és  $D_{\mathbf{M}} = D_{\mathbf{L}}^{h_{\mathbf{L}}}$ . Ezért  $m', R_{\mathbf{M}}$  és  $h_{\mathbf{M}}$  explicite felül becsülhető  $d, l, D_{\mathbf{L}}$  és  $h_{\mathbf{L}}$  függvényében. Végül újra felhasználva a 2.3 Lemmát  $h_{\mathbf{L}}$  is felül becsülhető  $d, l$  és  $D_{\mathbf{L}}$  függvényében. Mivel  $l \leq k!$  ezért (2.56) -ből adódik (2.7) a  $\mu = 0$  választással.

Tekintsük most azt az esetet, amikor  $y \in S \setminus O_{\mathbf{K}}^*$ . Ekkor  $F$  redukált. Jelöljük  $F_0[X, Y]$  -nal az  $F[X, Y]$  maximális fokszámú, egy főegyütthatós, binér forma osztóját  $O_{\mathbf{K}}[X, Y]$  -ban. Ekkor  $F_0$  is redukált. Felhasználva a 2.8 Lemmát kapjuk, hogy léteznek egy főegyütthatós  $F'_0, F'$  binér formák  $O_{\mathbf{K}}$  -beli együtthatókkal valamint  $a \in O_{\mathbf{K}}, u \in O_{\mathbf{K}}^*$  úgy, hogy

$$(2.57) \quad F_0(x, z) = F'_0(x', z') \text{ és } F(x, z) = F'(x', z'),$$

ahol

$$(2.58) \quad x' = x + az, z' = uz$$

és

$$h(F'_0) \leq c_{35} c_{36}^s (PW)^l := C_4,$$

ahol  $c_{35}, c_{36}$  csak  $d, k$  és  $D_{\mathbf{L}}$  -től függő effektív pozitív konstansok. Ha  $\alpha'_1, \dots, \alpha'_k$  jelölik az  $F'_0(X', 1)$  polinom gyökeit akkor

$$(2.59) \quad h(\alpha'_i - \alpha'_j) \leq dC_4 + \log k \quad \text{minden } i \text{ és } j \text{ esetén.}$$

Továbbá, (2.58) és (2.8) felhasználásával kapjuk, hogy

$$\text{ord}_{\mathfrak{p}_i}((x', z')) \leq \mu \quad \text{minden } i \text{ esetén.}$$

A (2.5) helyett most tekinthetjük az  $F'(x', z') = wy^n$  egyenletet. Az egyszerűség kedvéért  $F', x', z'$  és  $\alpha'_i$  helyére  $F, x, z$  és  $\alpha_i$ -t írunk. Így ismét (2.54) és (2.55) egyenleteket kapjuk. Továbbá, mivel  $\gamma_i \in S_{\mathbf{M}}$  minden  $i$  esetén és  $y \in S \setminus O_{\mathbf{K}}^*$  azt kapjuk, hogy van egy olyan  $\gamma_i$ , például  $\gamma_1$ , amelyik nincs benne  $O_{\mathbf{M}}^*$ -ban, ahol  $O_{\mathbf{M}}^*$  az  $O_{\mathbf{M}}$  egységcsoportját jelöli. Legyen  $\mathfrak{P}$  a  $\mathfrak{p}_1 \cdots \mathfrak{p}_s$  szorzat egy tetszőleges  $O_{\mathbf{M}}$ -beli prímeál osztója. Ekkor (2.59) miatt

$$\begin{aligned} \text{ord}_{\mathfrak{P}}(\alpha_1 - \alpha_2) \log N_{\mathbf{M}/\mathbf{Q}}(\mathfrak{P}) &\leq \log |N_{\mathbf{M}/\mathbf{Q}}(\alpha_1 - \alpha_2)| \leq \\ &\leq dlh_{\mathbf{L}}h(\alpha_1 - \alpha_2) \leq dlh_{\mathbf{L}}(dC_4 + \log k). \end{aligned}$$

Továbbá adódik, hogy

$$\begin{aligned} \text{ord}_{\mathfrak{P}}(\beta_1 \gamma_1^{n'}, \beta_2 \gamma_2^{n'}, (\alpha_2 - \alpha_1)z) &= \text{ord}_{\mathfrak{P}}(x - \alpha_1 z, x - \alpha_2 z, (\alpha_2 - \alpha_1)z) \leq \\ &\leq \text{ord}_{\mathfrak{P}}((\alpha_2 - \alpha_1)(x, z)) \leq dlh_{\mathbf{L}}(2dC_4 + 2 \log k + \mu). \end{aligned}$$

Ismét alkalmazva a 2.3 Tételt a (2.55) egyenletre a fentiekhez hasonlóan adódik, hogy léteznek  $c_{37}, c_{38}$  and  $c_{39}$  csak  $d, k$  és  $D_{\mathbf{L}}$ -től függő pozitív konstansok úgy, hogy

$$n' \leq c_{37} Q^{c_{38}} + \mu c_{39} \log Q,$$

amiből adódik (2.7). Ezzel a Tétel bizonyítását befejeztük. □

**2.5 Megjegyzés.** Kombinálva a [34]-beli (21) összefüggést a [35]-beli 5. Következésménnyel kapjuk, hogy

$$(2.60) \quad |D_{\mathbf{L}}| \leq (|D_{\mathbf{K}}|^k Q^{dk-1} e^{s(dk)^2})^{dl},$$

ahol  $l = [\mathbf{L} : \mathbf{K}] \leq k!$ . Továbbá, ahogy korábban már láttuk,  $s \leq 3 \frac{\log Q}{\log 2}$ . Így (2.60)-ból adódik (2.4). □

### 3 POLINOMOK ÉRTÉKEI ÉS TELJES HATVÁNYOK KÖZÖTTI KÜLÖNBSÉGEK

#### 3.1 EREDMÉNYEK

Legyenek  $a, w, x, y, n, m$  olyan nemnulla racionális egészek, amelyekre  $n, m \geq 2$ ,  $|y| \geq 2$  és  $ax^m \neq wy^n$ . Tekintsük az  $|ax^m - wy^n|$  különbséget. Turk [72] volt az első, aki a fenti különbségre  $x$  és  $y$ -től független explicit alsó korlátot adott az  $a = w = 1$  esetben. Ha  $a$  és  $w$  tetszőlegesen rögzített nemnulla egészek, Shorey [66] eredményéből levezethető egy - csak  $a, w, m, n$ -től függő - effektív alsó korlát. Ez a korlát nem teljesen explicit. Később Bugeaud [16] lényegesen megjavította Turk  $|x^m - y^n|$ -re adott alsó becslését. Nem régen Bugeaud és Hajdu [23] megjavította és kiterjesztette Bugeaud fenti eredményét tetszőlegesen rögzített  $a$  és  $w$  esetére.

Ebben a fejezetben általánosítjuk Bugeaud és Hajdu [23] eredményét  $|F(x) - wy^n|$  alakú különbségekre, ahol  $F \in \mathbf{Z}[X]$  egy  $m \geq 2$  fokú polinom. Az  $F$  polinomra tett bizonyos természetes feltételek mellett explicit alsó korlátot adunk az  $|F(x) - wy^n|$  különbségre (lásd a 3.2 Tételt). Eredményünket a 3.1 Tételünkből vezetjük le, amely az

$$(3.1) \quad f(x) = wy^n$$

szuperelliptikus egyenlettel foglalkozik, ahol  $x, y$  és  $n$  ismeretlen egészek, az  $|y| \geq 2, n \geq 2$  tulajdonsággal. A 3.1 Tételben az  $n$  kitevőre nyerünk teljesen explicit, csak  $w$ -től és  $f$  magasságától függő felső korlátot.

Mint már említettük, Tijdeman [71] illetve Schinzel és Tijdeman [65] bizonyították be először, hogy a (3.1) egyenletben  $n$ -re egy csak  $w$ -től és  $f$ -től függő effektív felső korlát adható. Később sokan nyertek effektív, de nem teljesen explicit korlátokat  $n$ -re; lásd [13], [14], [11] és az itt előforduló hivatkozásokat. A 3.1 Tételünk némileg megjavítja és minden paraméterében explicitté teszi az  $n$ -re korábban ismert legjobb felső korlátot (lásd [11]). A 3.1 Tétel bizonyításában

Brindza, Evertse és Győry [14] módszerét követjük, akik az  $n$ -re csupán az  $f$  fokszámától és diszkriminánsától függő felső korlátot adták.

A továbbiakban bevezetjük a szükséges jelöléseket. Minden  $s$  pozitív valós számra legyen  $\log_* s = \max\{1, \log s\}$ . Ha

$$f(x) = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \dots + a_m = a_0 \prod_{i=1}^m (x - \alpha_i), \quad a_0 \neq 0,$$

egy egész együtthatós polinom, úgy jelölje

$$H(f) = \max_{0 \leq i \leq m} |a_i| \quad \text{és} \quad M(f) = |a_0| \prod_{i=1}^m \max(1, |\alpha_i|)$$

az  $f$  polinom "klasszikus" illetve Mahler-magasságát.

**3.1. Tétel** *Legyen  $f(X) \in \mathbf{Z}[X]$  egy  $m \geq 2$  fokú polinom és legyen  $w$  egy adott nemnulla egész szám. Tekintsük a (3.1) egyenletet, ahol az ismeretlenek  $x, y, n \in \mathbf{Z}$ , amelyekre  $|y| \geq 2, n \geq 2$ . Ha  $f$ -nek van legalább két különböző gyöke, akkor*

$$n \leq 2^{24m+56} m^{7m+17} M(f)^{3m-3} (\log_* M(f))^{3m} (\log_* |w|)^{\frac{5}{2}}.$$

Ahogy már emítettük, a 3.1 Tételünk némileg megjavítja és minden paraméterében explicitté teszi az  $n$ -re [11]-ben adott felső korlátot. Abban a speciális esetben, amikor  $f(x) = ax^m + c$  alakú Bugeaud és Hajdu [23] a 3.1 Tételhez hasonló felső korlátot nyertek  $n$ -re.

Az alábbi tétel a 3.1 Tételünk következménye.

**3.2. Tétel** *Legyen  $F(X) \in \mathbf{Z}[X]$  egy  $m \geq 2$  fokú polinom és legyenek  $w, x, y, n$  olyan racionális egészek, amelyekre  $w \neq 0, n \geq 2, |y| \geq 2$ . Tegyük fel, hogy  $F(x) \neq wy^n$ , és ha  $F(X) = t_1(X - t_2)^m + t_3$  alakú valamilyen  $t_1, t_2, t_3 \in \mathbf{Z}$  esetén, akkor tételezzük még fel, hogy  $F(x) \neq wy^n + t_3$  is fennáll. Ekkor*

$$(3.2) \quad |F(x) - wy^n| \geq n^{\frac{1}{3m}} 2^{-8 - \frac{56}{3m}} m^{-\frac{23}{6} - \frac{17}{3m}} \left( H(F) \log_*^{\frac{5}{6m}} |w| \right)^{-1}.$$

Megjegyezzük, hogy a 3.2 Tételben az  $|F(x) - wy^n|$ -re adott alsó becslésben az  $F$  polinom  $H(F)$  klasszikus magassága szerepel az  $M(F)$  Mahler-magasság helyett. Az ok nyilvánvaló (lásd a 3.2 Tétel bizonyítását), hiszen  $H(F - k) \leq H(F) + k$  teljesül tetszőleges  $k \in \mathbf{Z}$  esetén míg  $M(F)$  nem rendelkezik hasonló jó tulajdonsággal.

Bugeaud és Hajdu [23] dolgozatához hasonlóan, a 3.2 Tételt egy a szuper-elliptikus egyenlet megoldásaira adott felső becsléssel kombinálva alsó korlátot nyerünk az  $|F(x) - wy^n|$  különbségre  $|F(x)|$  függvényében.

**3.3. Tétel** *Legyen  $F(X) \in \mathbf{Z}[X]$  egy  $m \geq 2$  fokú polinom és legyenek  $w, x, y, n$  olyan racionális egészek, amelyekre  $w \neq 0, n \geq 3, |y| \geq 2$ . Tegyük fel, hogy  $F(x) \neq wy^n$ , és ha  $F(X) = t_1(X - t_2)^m + t_3$  alakú valamilyen  $t_1, t_2, t_3 \in \mathbf{Z}$  esetén, akkor tételezzük még fel, hogy  $F(x) \neq wy^n + t_3$  is fennáll. Ekkor*

$$(3.3) \quad |F(x) - wy^n| \geq c_1 m^{-\frac{23}{6}} H(F)^{-1} (\log_* |w|)^{-\frac{4}{3m+1}} (\log_* \log_* |F(x)|)^{\frac{1}{3m+1}},$$

ahol  $c_1$  egy effektív abszolút konstans.

A 3.2 Tételünk általánosítása a Bugeaud és Hajdu [23] által nyert

$$|ax^m - wy^n| \geq n^{2/5m} (20m)^{-2-11/m} \left( |a| \log_*^{\frac{1}{m}} |b| \right)^{-1}$$

becslésnek. Hasonlóan a 3.3 Tétel kiterjesztése Bugeaud és Hajdu [23] 2. Tételének. A (3.2) -ben szereplő alsó korlát az  $F(x) = ax^m$  speciális esetben hasonló erősségű mint [23] -ban, eltekintve az  $n$  kitevőjétől. Ennek az oka, hogy  $D(ax^m + k) \leq c_2 |k|^m$ , míg általános esetben csak  $D(F(x) + k) \leq c_3 |k|^{2m}$  érvényes. Itt  $D(g(x))$  egy  $g \in \mathbf{Z}[X]$  polinom diszkriminánsát, míg  $c_2$  és  $c_3$  csak  $a, m$  és  $F$  -től függő effektív konstansokat jelölnek.

## 3.2 SEGÉDEREDMÉNYEK

A 2. Fejezet jelöléseit megtartva legyen  $\mathbf{K}$  egy  $d$  -ed fokú algebrai számtest, és jelölje  $r$  illetve  $R$  a  $\mathbf{K}$  test egységirangját illetve regulátorát. A 3.1 Tétel bizonyításában a 2.1 és 2.2 Lemma alábbi változatát fogjuk használni.

**3.1. Lemma** *Létezik  $\mathbf{K}$  -ban egy olyan  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r$  független egységrendszer, amelyre*

$$(3.4) \quad \prod_{i=1}^r h(\varepsilon_i) \leq d^{-r} r! R$$

és

$$(3.5) \quad h(\varepsilon_i) \leq r!d^{-1}(9(\log 3d)^3/8)^{r-1}R, \quad i = 1, \dots, r.$$

Továbbá, minden nemnulla  $\alpha \in \mathbf{K}$  algebrai egész esetén létezik egy  $\varepsilon$  egység az  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r$  által generált multiplikatív részcsoportban, amelyre

$$(3.6) \quad h(\varepsilon\alpha) \leq (\log N_{\mathbf{K}/\mathbf{Q}}(\alpha))/(2d) + (r+1)^{r+1} \log^{3r+3}(3d)R.$$

**Bizonyítás.** Ez Bugeaud [18] 1 és 2 Lemmájának az átfogalmazása.  $\square$

A 3.1 Tételünk bizonyításában végül felhasználjuk Matveev [51] lineáris formák logaritmusaira vonatkozó becslését. Megjegyezzük, hogy Matveev [51] alábbi eredménye Baker és Wüstholz [8] eredményének a javítása.

**3.2. Lemma** *Legyenek  $\alpha_1 \dots \alpha_k$  a  $\mathbf{K}$  test nem nulla elemei, amelyek abszolút logaritmikus magassága  $h(\alpha_j)$  ( $1 \leq j \leq k$ ). Legyenek továbbá  $\log \alpha_1, \dots, \log \alpha_k$  a logaritmus tetszőlegesen rögzített nemnulla értékei. Tegyük fel, hogy*

$$A_j \geq \max\{dh(\alpha_j), |\log \alpha_j|, 0.16\} \quad (1 \leq j \leq k).$$

Tekintsük az alábbi lineáris formát

$$\Lambda = b_1 \log \alpha_1 + \dots + b_k \log \alpha_k,$$

ahol  $b_1, \dots, b_k \in \mathbf{Z}$  és legyen  $B = \max\{|b_1|, \dots, |b_k|\}$ . Ha  $\Lambda \neq 0$ , akkor

$$\log |\Lambda| > -C(k) \log(ed) \log(eB)d^2\Omega,$$

ahol  $\Omega = A_1 \dots A_k$  és  $C(k) = 2^{6k+20}$ .

**Bizonyítás.** Ez Matveev [51] 2.3 Következményének átfogalmazása. Emlékeztetünk, hogy a második fejezetben felhasznált 2.4 Lemma Matveev ezen eredményének következménye.  $\square$

Az alábbi lemma a szuperelliptikus egyenlet megoldásai abszolút értékére ad effektív felső korlátot abban az esetben, amikor az  $y$   $n$  kitevője rögzített.

**3.3. Lemma** *Legyenek  $a$  és  $n$  olyan racionális egészek, amelyekre  $a \neq 0$  és  $n \geq 3$ . Jelöljön  $Q(X) = \prod_{i=1}^l (X - \alpha_i)^{e_i} \in \mathbf{Z}[X]$  egy  $m \geq 2$  fokú, különböző  $\alpha_1, \dots, \alpha_l$  gyökökkel rendelkező főpolinomot. Legyen  $D(Q) = \prod_{i \neq j} (\alpha_i - \alpha_j)$  és*

legyen  $n_i = n/\text{luko}(n, e_i)$  ( $i = 1, \dots, l$ ). Tegyük fel, hogy valamilyen  $i, j$  pár esetén ( $1 \leq i \neq j \leq l$ ) teljesül, hogy  $\text{luko}(n_i, n_j) \geq 3$ . Ekkor a

$$(3.7) \quad Q(x) = ay^n$$

egyenlet minden  $(x, y) \in \mathbf{Z}^2$  megoldására fennáll, hogy

$$\begin{aligned} \max\{|x|, |y|\} &\leq \\ &\leq H(Q)^{n+1} \exp \left\{ (c_4 nm)^{c_5 m^2 n} |D(Q)|^{5nm} |a|^{m^2 n} (\log_* |aD(Q)|)^{2m^2 n} \right\}, \end{aligned}$$

ahol  $c_4$  és  $c_5$  effektív abszolút konstansok.

**Bizonyítás.** Ez Bugeaud [19] Állításának a következménye . □

### 3.3 BIZONYÍTÁSOK

**A 3.1. Tétel bizonyítása.** A bizonyításban a [14] és [11] dolgozatokban felhasznált okoskodásokat követjük, azonban a fenti cikkekkel ellentétben most explicit konstansokkal dolgozunk. A bizonyítás során két esetet különböztetünk meg. Először tegyük fel, hogy  $f$ -nek  $\mathbf{Z}[X]$  felett van egy legalább másodfokú irreducibilis faktora. Legyen ez  $P \in \mathbf{Z}[X]$ . Legyen  $\delta$  a  $P$  polinom egyik gyöke és legyenek  $R, h, D$  és  $r$  a  $\mathbf{K} = \mathbf{Q}(\delta)$  algebrai számtest regulátora, ideálosztályszáma, diszkriminánsa valamint egységgrangja. Kombinálva a

$$d \leq \frac{2}{\log 3} \log |D|,$$

egyenlőtlenséget (lásd Györy [33]) Lenstra [42] egy eredményével azt kapjuk, hogy

$$(3.8) \quad hR \leq \frac{1}{(d-1)!} |D|^{\frac{1}{2}} \log^{d-1} |D|.$$

Felhasználva Mahler [50] egy, a polinomok diszkriminánsára vonatkozó, becslését azt nyerjük, hogy

$$|D| \leq d^d M(P)^{2d-2}.$$

Mivel  $P|f$ , így  $M(P) \leq M(f)$  is teljesül, és ezért

$$|D| \leq d^d M(f)^{2d-2}.$$

is fennáll. Kombinálva a fenti egyenlőtlenséget a (3.8) becsléssel azt kapjuk, hogy

$$(3.9) \quad hR \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} d^{d-1} e^{2d-1} M(f)^{d-1} (\log_* M(f))^{d-1}.$$

Jelölje  $a_0$  az  $f$  polinom főegyütthatóját, és legyenek  $\beta_1, \dots, \beta_m$  a  $g(x) = a_0^{m-1} f\left(\frac{x}{a_0}\right)$  polinom gyökei. Legyen

$$D(g) = \prod_{\beta_i \neq \beta_j} (\beta_i - \beta_j),$$

és írjuk át a  $g$  polinomot  $g(x) = P_1^{k_1}(x)P_2(x)$  alakba, ahol  $P_1(x) = a_0^d P\left(\frac{x}{a_0}\right)$ , valamint  $P_1$  és  $P_2$  egymáshoz relatív prím polinomok  $\mathbf{Z}[X]$ -ben. Legyenek  $\beta_1, \dots, \beta_d$  a  $P_1$  polinom gyökei úgy, hogy  $\beta_1 = \delta$ , és legyen  $(x, y)$  a (3.1) egyenlet egy tetszőlegesen rögzített megoldása. Mivel az  $\langle a_0x - \beta_1 \rangle$  és  $\langle g(a_0x)(a_0x - \beta_1)^{-k_1} \rangle$  főideálok legnagyobb közös osztója osztja  $D^m(g)$ -t, így léteznek olyan  $A, B, C$  egész ideálok  $\mathbf{K}$ -ban, amelyekre

$$(3.10) \quad A\langle a_0x - \beta_1 \rangle = BC^t,$$

ahol

$$t = \frac{n}{\text{lko}(n, k_1)}.$$

Továbbá nyilván

$$\max\{N_{\mathbf{K}/\mathbf{Q}}(A), N_{\mathbf{K}/\mathbf{Q}}(B)\} \leq |a_0 \cdot w \cdot D(g)|^{m^2}$$

is fennáll. Ezért felhasználva a 3.1 Lemmát valamint a (3.6) és (3.9) összefüggéseket, egyszerű számolás után azt kapjuk, hogy az  $A^h$  és  $B^h$  főideálok olyan  $\alpha$  illetve  $\beta$  generátorokkal rendelkeznek, amelyekre

$$(3.11) \quad \max\{h(\alpha), h(\beta)\} \leq c_6,$$

ahol

$$c_6 = 0.12m^3(m-1)d^{d-1}e^{2d-1}(r+1)^{r+1} \\ \times (\log 3d)^{3r+3}M(f)^{d-1}(\log_* M(f))^d \log_* |w|.$$

A (3.10) egyenlet átírható az

$$(3.12) \quad \alpha(a_0x - \beta_1)^h = \varepsilon\beta\gamma^t$$

alakba, ahol  $\gamma$  a  $C^h$  főideál generátora és  $\varepsilon$  egy  $\mathbf{K}$ -beli egység. Legyen  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r$  a 3.1 Lemma feltételeinek megfelelő független egységrendszer. Ekkor  $\varepsilon$  kifejezhető ezen egységekkel  $\varepsilon = \varepsilon'_1 \varepsilon_1^{l_1} \dots \varepsilon_r^{l_r}$  módon, ahol  $\varepsilon'$  egy olyan egység  $\mathbf{K}$ -ban, amelyre

$$h(\varepsilon') \leq (r+1)^{r+1}(\log(3d))^{3r+3}R.$$

Amennyiben szükséges a  $\gamma$  megváltoztatásával elérhető, hogy  $\max_{1 \leq i \leq r} |l_i| < t$  teljesüljön.

Ha  $|a_0x| \leq M(g) + 1$ , akkor

$$2^n \leq |y|^n \leq (2M(g) + 1)^m$$

következik, és így a 3.1 Tétel bizonyítását befejeztük.

Egyébként az  $|a_0x| > M(g) + 1$  egyenlőtlenségből azt kapjuk, hogy  $|a_0x - \beta_i| > 1$  teljesül minden  $i = 1, \dots, d$  esetén. Így

$$|a_0^{m-1}wy^n|^h \geq \max_{1 \leq i \leq d} |a_0x - \beta_i|^h \geq \\ \geq |a_0x - \beta_j|^h \geq |\varepsilon'^{(j)}| \prod_{i=1}^r |\varepsilon_i^{(j)}| |\alpha^{(j)}|^{-1} |\beta^{(j)}| |\gamma^{(j)}| \geq \\ \geq \overline{|\varepsilon'|}^{-d+1} \overline{|\varepsilon_1|}^{-t} \dots \overline{|\varepsilon_r|}^{-t} \overline{|\alpha|}^{-1} \overline{|\beta|}^{-d+1} \overline{|\gamma|}^t.$$

A fenti egyenlőtlenségekben  $\overline{|\nu|}$  a  $\nu$  algebrai szám konjugáltjai abszolútértékének a maximumát jelenti, és  $j$  az a megfelelő index, amelyre  $|\gamma^{(j)}| = \overline{|\gamma|}$ . A továbbiakban nyilván feltehető, hogy  $n \geq m + 1$ , hiszen különben adódik a 3.1 Tétel állítása. Ekkor viszont a fenti egyenlőtlenségből

$$h(\gamma) \leq 2.182c_6d^2 \log_* |y|$$

adódik, ahol  $c_6$  a korábbiakban már definiált explicit konstans. Feltehető, hogy  $|a_0x| \geq \frac{1}{2}|y|^{\frac{n}{m}}$  hiszen egyébként

$$|a_0x| + M(g) \geq |y|^{\frac{n}{m}}$$

következik, amiből azonnal adódik a 3.1 Tétel állítása. Így azt kapjuk, hogy

$$(3.13) \quad |a_0x - \beta_i| \geq \frac{1}{4}|y|^{\frac{n}{m}} \quad (1 \leq i \leq d).$$

Az általánosság megszorítása nélkül feltételezhetjük, hogy

$$\frac{|\beta_i - \beta_j|}{|a_0x - \beta_i|} \geq \frac{|\beta_2 - \beta_1|}{|a_0x - \beta_2|}, \quad 1 \leq i, j \leq d, \quad i \neq j.$$

Ekkor viszont fennáll a

$$(3.14) \quad \prod_{\substack{1 \leq i, j \leq d \\ \beta_i \neq \beta_j}} \frac{|\beta_i - \beta_j|}{|a_0x - \beta_i|} \leq \frac{4^d(d-1)|D(g)|}{|y|^{\frac{nd(d-1)}{m}}}.$$

becslés.

Ha  $\left(\frac{a_0x - \beta_1}{a_0x - \beta_2}\right)^h = 1$ , akkor  $\frac{\beta_1 - \beta_2}{a_0x - \beta_1}$  algebrai egész. Így

$$\left|N_{\mathbf{L}/\mathbf{Q}}\left(\frac{\beta_1 - \beta_2}{a_0x - \beta_1}\right)\right| = \left|\frac{N_{\mathbf{L}/\mathbf{Q}}(\beta_1 - \beta_2)}{(N_{\mathbf{K}/\mathbf{Q}}(a_0x - \beta_1))^s}\right| \geq 1,$$

ahol  $\mathbf{L} = \mathbf{Q}(\beta_1, \beta_2)$  és  $[\mathbf{L} : \mathbf{K}] = s$ . Kombinálva a fenti becslést (3.13)-mal valamint felhasználva, hogy  $s \leq d$  azt nyerjük, hogy

$$\begin{aligned} |D(g)|^{m^2} &\geq |N_{\mathbf{L}/\mathbf{Q}}(\beta_1 - \beta_2)| \geq |N_{\mathbf{K}/\mathbf{Q}}(a_0x - \beta_1)|^s \geq \\ &\geq \left|\left(\frac{1}{4}|y|^{n/m}\right)^d\right|^s \geq 2^{ds(n/m-2)} \geq 2^{(2n/m)-2m^2}, \end{aligned}$$

amiből adódik a 3.1 Tétel állítása.

Az  $\left(\frac{a_0x - \beta_1}{a_0x - \beta_2}\right)^h \neq 1$  esetben feltehető, hogy  $|y|^{\frac{n}{2m}} \geq 2|D(g)|h$  (hiszen különben  $n$ -re lényegesen jobb korlát adódik). Így (3.14) miatt azt kapjuk, hogy

$$(3.15) \quad \log \left| \left(\frac{a_0x - \beta_1}{a_0x - \beta_2}\right)^h - 1 \right| \leq \log \left( h \left| \frac{a_0x - \beta_1}{a_0x - \beta_2} - 1 \right| \right) \leq -\frac{n}{2m} \log_* |y|.$$

Ha most  $\left| \left( \frac{a_0x - \beta_1}{a_0x - \beta_2} \right)^h - 1 \right| > \frac{1}{3}$ , akkor (3.15) felhasználásával nagyon jó korlát adódik  $n$ -re. Egyébként pedig kombinálva a 3.2 Lemmát a (3.4) és (3.9) összefüggésekkel, azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \left| \left( \frac{a_0x - \beta_1}{a_0x - \beta_2} \right)^h - 1 \right| &= \left| \left( \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2^{(2)}} \right)^{l_1} \cdots \left( \frac{\varepsilon_r}{\varepsilon_r^{(2)}} \right)^{l_r} \frac{\varepsilon' \beta / \alpha}{\varepsilon'^{(2)} \beta^{(2)} / \alpha^{(2)}} \left( \frac{\gamma}{\gamma^{(2)}} \right)^t - 1 \right| \geq \\ &\geq \frac{1}{2} \left| b_0 \log(-1) + \sum_{i=1}^r l_i \log \frac{\varepsilon_i}{\varepsilon_i^{(2)}} + \log \frac{\varepsilon' \beta / \alpha}{\varepsilon'^{(2)} \beta^{(2)} / \alpha^{(2)}} + t \log \frac{\gamma}{\gamma^{(2)}} \right| \geq \\ &\geq \exp \{ -c_7(m) M(f)^{3m-3} (\log_* M(f))^{3m-1} \log_*^2 |w| \log_* |y| \log_* n \}, \end{aligned}$$

ahol  $b_0$  egy olyan racionális egész, amelyre  $|b_0| \leq t(r+1)$  és

$$c_7(m) = 2^{23.1m+48.418} m^{7m+14} \log m.$$

A fenti becslésben a  $(2)$  felső index a  $\mathbb{Q}(\beta_1) \rightarrow \mathbb{Q}(\beta_2)$  izomorfizmus általi képet jelöli. Összehasonlítva az előbb nyert alsó becslést a (3.15)-ben szereplő felső becsléssel, kapjuk a 3.1 Tétel állítását abban az esetben, amikor  $f$ -nek  $\mathbf{Z}[X]$  felett van egy legalább másodfokú irreducibilis faktora.

A második esetben az  $f$  polinomnak nyilván csak racionális gyökei vannak. Ezért  $g$  összes gyöke racionális egész. Legyenek  $\beta_1$  és  $\beta_2$  a  $g$  polinom  $k_1$  és  $k_2$  multiplicitású különböző gyökei. Az első esetben alkalmazott gondolatmenetet megismételve, azt nyerjük, hogy

$$(3.16) \quad u_i(a_0x - \beta_i) = v_i y_i^t, \quad i = 1, 2$$

ahol  $t = \frac{n}{(n, k_1 k_2)}$ ,  $u_i, v_i, y_i \in \mathbf{Z}$ ,  $|y_i| \geq 2$  valamint  $|u_i| \leq |D(g)^m|$ ,  $|v_i| \leq |a_0^{m-1} w|$  ( $i = 1, 2$ ). Feltehető, hogy  $|y_2| \geq |y_1|$ . Legyen  $\Lambda_1 = \log \frac{v_1 u_2}{v_2 u_1} + t \log \left( \frac{y_1}{y_2} \right)$ . A (3.16) egyenletek felhasználásával azt nyerjük, hogy

$$\left| \frac{u_2(\beta_2 - \beta_1)}{v_2 y_2^t} \right| = \left| \frac{v_1 u_2}{v_2 u_1} \left( \frac{y_1}{y_2} \right)^t - 1 \right| \geq \frac{1}{2} |\Lambda_1|.$$

Felhasználva ismét a 3.2 Lemmát az

$$\frac{n}{\log n} < 2^{41} m^4 \log_* M(f) \log_* |w|,$$

egyenlőtlenséget kapjuk, amiből adódik 3.1 Tétel állítása. □

**A 3.2. Tétel bizonyítása.** Legyen  $k = F(x) - wy^n$ . Alkalmazzuk a 3.1 Tételt az  $f(x) = F(x) - k$ . választással. Felhasználva az

$$M(f) \leq \sqrt{(m+1)}H(f)$$

és

$$H(f) \leq H(F) + |k| \leq 2H(F)|k|$$

becsléseket és kifejezve  $|k|$ -t, megkapjuk a 3.2 Tételben szereplő  $|F(x) - wy^n|$  különbségre vonatkozó alsó becslést. □

**A 3.3. Tétel bizonyítása.** Legyen  $k = F(x) - wy^n$  és jelölje  $a_0$  az  $F$  polinom főegyütthatóját. Alkalmazzuk most a 3.3 Lemmát a

$$Q(a_0x) = a_0^{m-1}wy^n$$

egyenletre, ahol  $Q(x) = a_0^{m-1}(F(\frac{x}{a_0}) - k)$  és  $a = a_0^{m-1}w$ . Felhasználva az

$$|a_0| \leq H(F - k) \leq 2H(F)|k|,$$

egyenlőtlenségeket felső korlátot nyerünk  $|x|$ -re és így  $|F(x)|$ -re is  $H(F)$ ,  $b$ ,  $n$ ,  $k$  és  $m$  függvényében. Nevezetesen azt kapjuk, hogy

$$\log_* \log_* |F(x)| \leq c_8 m^3 n \log_* n \log_* H(F) \log_* |w| \log_* |k|,$$

ahol  $c_8$  egy effektív abszolút konstans. Továbbá a 3.2 Tétel miatt

$$n^{\frac{1}{3m}} \leq 2^{8+\frac{56}{3m}} m^{\frac{23}{6}+\frac{17}{3m}} H(F) \log_*^{\frac{5}{6m}} |w||k|$$

is teljesül. Kombinálva a fenti két utolsó egyenlőtlenséget, a 3.3 Tétel bizonyítását befejeztük. □

## 4 MÁSODFOKÚ POLINOMOK HATVÁNYÉRTÉKEI

### 4.1 EREDMÉNYEK

Legyen  $S = \{p_1, \dots, p_s\}$  különböző racionális prímelek egy halmaza és legyen

$$\mathcal{S} = \{m \in \mathbf{Z} \mid m = \pm p_1^{z_1} \cdots p_s^{z_s}, z_i \in \mathbf{Z}_{\geq 0}, (1 \leq i \leq s)\}.$$

Jelölje továbbá  $P$  illetve  $Q$  az  $S$ -beli prímelek maximumát illetve szorzatát.

Ebben a fejezetben az

$$(4.1) \quad x^2 + D = wy^n$$

egyenlettel foglalkozunk, ahol  $w$  adott pozitív egész, az  $x, y, n, D$  ismeretlenek pedig olyan pozitív egészek, amelyekre  $n \geq 3$ ,  $y > 1$ ,  $D \in \mathcal{S}$  és  $\text{Inko}(x, y) = 1$ . Célunk, hogy  $w$ -re és  $D$ -re tett bizonyos feltételek mellett jó korlátot nyerjünk (4.1)-ben az  $n$  kitevőre, amely korlát csak  $P$ -től és  $s$ -től vagy  $P$ -től és  $Q$ -től függ.

Tekintsük először azt az esetet, amikor a (4.1) egyenletben a  $w = 1$  és  $D$  adott pozitív egész. Ekkor az első eredmény Lebesque [41] nevéhez fűződik, aki bebizonyította, hogy (4.1)-nek  $D = 1$  esetén nincs megoldása. Később Ljunggren [44]  $D = 2$  esetén, míg Nagell [57], [59]  $D \in \{3, 4, 5\}$  esetekben teljesen megoldotta a (4.1) egyenletet. Cohn [29] áttekintő munkájában összefoglalta a (4.1) egyenlettel kapcsolatos addigi eredményeket, sőt egy módszert dolgozott ki, amelynek segítségével  $D \leq 100$  esetén a (4.1) összes megoldását meghatározta  $D$  77 különböző értéke esetén. A  $D = 74$  és  $D = 86$  esetekben Mignotte és de Weger [53] adta meg a (4.1) egyenlet összes megoldását. Később Bennett és Skinner [10] felhasználva a moduláris formák és Galois reprezentációk elméletét teljesen megoldották (4.1)-et a  $D = 55$  illetve  $D = 95$  esetben. Nem régen Bugeaud, Mignotte és Siksek [26] új ötleteket felhasználva valamint a Baker-módszert az előbb említett Bennett és Skinner által alkalmazott módszerrel kombinálva a (4.1) egyenlet összes megoldását meghatározták  $D \leq 100$  fennmaradó

19 értéke esetén. Abban az esetben, amikor a (4.1) egyenletben  $w \in \{1, 4\}$  és  $D$  páratlan pozitív négyzetmentes egész Bugeaud és Shorey [24] felhasználva Bilu, Hanrot és Voutier [12] módszerét teljesen megoldották (4.1)-et abban az esetben, amikor  $n \geq 3$  olyan páratlan prím, amely nem osztja a  $\mathbf{Q}(\sqrt{-D})$  ideálosztályszámát és  $D \not\equiv 7 \pmod{8}$ , ha  $w = 1$  (lásd a [24]-ben szereplő 3., 5. és 7. Következmenyt).

Tekintsük most azt az esetet, amikor a (4.1) egyenletben  $D$  is ismeretlen, pontosabban  $D$  olyan pozitív egész, amelyre  $D \in \mathcal{S}$ . Ebben az esetben is nagyon sok eredmény található a (4.1) egyenlettel kapcsolatban (lásd pl. az [1] - [7], [17], [22], [28], [30], [48], [49], [52], [55], [56] munkákat, valamint az ott előforduló hivatkozásokat). Shorey, van der Poorten, Tijdeman és Schinzel [67] illetve Györy, Pink és Pintér [37] - a 2. Fejezetben ismertetett - eredményeiből adódik, hogy (4.1)-ben  $n$ -re egy csak  $P$ -tól és  $s$ -tól illetve csak  $Q$ -tól függő effektív felső korlát adható. Ezek a korlátok azonban nagyok és nincsenek teljesen explicit módon megadva. A fent felsorolt dolgozatokban egyrészt a Baker-módszer komplex és  $p$ -adikus változatát, másrészt Bilu, Hanrot és Voutier [12] rekurzív sorozatokra vonatkozó eredményét használták. Nevezetesen, a [17] illetve [22] cikkekben a szerzők a kétváltozós Baker-módszer komplex és  $p$ -adikus változatát kombinálva teljesen explicit, csak  $P$ -tól és  $s$ -tól függő korlátokat nyertek (4.1) típusú egyenletekben az  $n$  kitevőre. Felhasználva Bilu, Hanrot és Voutier [12] már említett eredményét, lehetőség nyílt (4.1) típusú egyenletek teljes megoldására, amikor  $w = 1$  valamint az  $\mathcal{S}$  konkrét adott prímelek halmaza. Cohn [28] illetve Arif és Muriefah [1], [6] az  $S = \{2\}$ , míg Arif és Muriefah [3] valamint Luca [48] az  $S = \{3\}$  esetekben adták meg (4.1) összes megoldását. Ha  $q \geq 5$  egy olyan páratlan prím, amelyre  $\text{lko}(n, 3h_0) = 1$ , ahol  $h_0$  jelöli a  $\mathbf{Q}(\sqrt{-q})$  ideálosztályszámát, Arif és Muriefah [7] teljesen megoldották az  $x^2 + q^{2k+1} = y^n$  egyenletet. Az  $S = \{2, 3\}$  esetben Luca [49] adta meg a (4.1) egyenlet összes megoldását.

Abban az esetben, amikor a (4.1) egyenletben  $(w, D) = (2, a^2)$ , ahol  $a$  adott pozitív egész, Pink és Tengely [63] vizsgálták az

$$(4.2) \quad x^2 + a^2 = 2y^n$$

egyenletet, ahol az  $x, y, n$  ismeretlenek olyan pozitív egészek, amelyekre  $n \geq 3$ ,  $\text{lko}(x, y) = 1$ , és egy, csak  $a$ -tól függő, explicit felső korlátot adtak  $n$ -re. Ha  $n$  páratlan prím a fenti eredményt Tengely [70] -ben megjavította.

Ebben a fejezetben általánosítjuk a [63] és [70]-beli eredményeket arra az esetre, amikor  $(w, D) = (2, a^2)$ , ahol  $a$  olyan pozitív egész, amelyre  $a \in \mathcal{S}$ .

Ekkor  $a$  nem fix, hanem  $a = p_1^{z_1} \cdots p_s^{z_s}$  alakú, ahol  $p_1, \dots, p_s$  különböző racionális prímekek,  $z_1, \dots, z_s$  pedig ismeretlen nemnegatív egészek. A (4.2) egyenlet általánosításaként tekintsük az

$$(4.3) \quad x^2 + (p_1^{z_1} \cdots p_s^{z_s})^2 = 2y^n$$

egyenletet, ahol az ismeretlenek  $x, y, n, z_i$  ( $1 \leq i \leq s$ ), amelyekre  $n \geq 3$ ,  $\text{Inko}(x, y) = 1$  valamint  $z_1, \dots, z_s \in \mathbf{Z}_{\geq 0}$  teljesül. Nyilvánvaló, hogy  $x = y = 1, z_1 = \dots = z_s = 0$  mindig megoldása (4.3)-nak, amit *triviális* megoldásnak fogunk nevezni. Györy, Pink és Pintér [37] a 2. fejezetben ismertett eredményeiből adódik, hogy (4.3)-ban az  $n$  kitevőre egy csak  $P, s$  illetve  $Q$ -tól függő korlát adható. Ezek a korlátok azonban nagyok és nincsenek teljesen explicit módon megadva. A jelenleg ismert legjobb kétváltozós Baker-típusú becslés komplex és  $p$ -adikus változatát kombinálva, általánosítjuk a [63] -ben és [70] -ben a (4.2) és (4.3) egyenletekkel kapcsolatos eredményeket és teljesen explicit korlátot adunk a (4.3)-ban szereplő  $n$ -re.

**4.1. Tétel** *Tekintsük a (4.3) egyenletet és tegyük fel, hogy  $n$  páratlan. Ekkor (4.3) minden nem triviális megoldása esetén*

$$n \leq 90813, \text{ ha } (P, s) = (3, 1),$$

és

$$n < 5371sP(P+1) \log P$$

különben.

A fejezet további eredményeinek ismertetéséhez szükségünk lesz néhány jelölésre és elnevezésre. Legyen  $f(x) = x^2 + Ax + B$  egy másodfokú egész együtthatós polinom, és jelölje  $D_f$  az  $f$  diszkriminánsát. Legyen

$$D = \begin{cases} -\frac{D_f}{4}, & \text{ha } D_f \text{ is páros,} \\ -D_f, & \text{ha } D_f \text{ is páratlan.} \end{cases}$$

Tegyük fel, hogy  $D \in \mathcal{S}$  és  $D > 0$ . Legyenek  $c$  és  $d$  olyan pozitív egészek, amelyekre  $D = dc^2$ , ahol  $d$  jelöli a  $D$  négyzetmentes részét. Továbbá,  $k \in \mathbf{Z}$  és  $p$  prím esetén jelölje  $\text{ord}_p(k)$   $p$ -nek azt a legmagasabb hatványát, amellyel  $k$  osztható.

Tekintsük az

$$(4.4) \quad f(x) = y^n$$

egyenletet, ahol az  $x, y, n$  ismeretlenek olyan egészek, amelyekre  $y > 1$  és  $n \geq 3$  prím. Azt mondjuk, hogy a (4.4) egyenlet egy  $(x, y, n)$  megoldása *kivételes*, ha

$$\text{ord}_2(D_f) = 2, \quad y \text{ páros és } d \equiv 7 \pmod{8}.$$

Legyen  $h$  a  $\mathbf{Q}(\sqrt{-d})$  test ideálosztályszáma és jelölje  $h(-4D)$  a  $-4D$  diszkriminánsú pozitív binér kvadratikus formák ekvivalencia osztályainak a számát (a  $h(-4D)$  definícióját lásd a 4.3 alfejezetben).

**4.2. Tétel** *Ha  $(x, y, n)$  a (4.4) egyenlet egy olyan nem kivételes megoldása, amelyre  $x \neq -\frac{A}{2}$  és  $\text{lnko}(y, D) = 1$ , akkor eltekintve az*

$$x^2 + Ax + B = y^n$$

*végtelen egyenlet családtól, ahol*

$$(A, B, x, y, D, n) \in \left\{ \begin{array}{l} (A, (A^2 + 7)/4, (11 - A)/2, 2, 7, 5), \\ (A, (A^2 + 7)/4, (181 - A)/2, 2, 7, 13), \\ (A, (A^2 + 11)/4, (31 - A)/2, 3, 11, 5), \\ (A, (A^2 + 19)/4, (559 - A)/2, 5, 19, 7) \end{array} \right\}$$

*ha  $A$  páratlan, és*

$$(A, B, x, y, D, n) \in \left\{ \begin{array}{l} (A, (A^2 + 76)/4, (44868 - A)/2, 55, 19, 5), \\ (A, (A^2 + 1364)/4, (5519292 - A)/2, 377, 341, 5) \end{array} \right\}$$

*ha  $A$  páros, akkor*

$$n = 3 \quad \text{vagy} \quad n \mid h(-4D).$$

*Továbbá, az utóbbi esetben*

$$n \leq \max\{3, P\}, \quad \text{ha} \quad n \nmid h$$

*és*

$$n < \frac{4}{\pi} \sqrt{Q} \log(2e\sqrt{Q}), \quad \text{ha} \quad n \mid h.$$

Megjegyezzük, hogy a fenti Tételben az  $x \neq -\frac{A}{2}$  feltétel szükséges. Ha ugyanis  $x = -\frac{A}{2}$  teljesülne a (4.4) egyenletben, akkor páros  $D_f$  esetén az

$$y^n = D$$

egyenletet kapnánk. Ekkor viszont  $D \in \mathcal{S}$  miatt  $n$ -re nem nyerhető felső korlát (4.4)-ben.

Látható, hogy megfelelő helyettesítéssel a (4.4) egyenlet visszavezethető egy (4.1) típusú egyenletre, nevezetesen az

$$(4.5) \quad X^2 + D = wY^n$$

egyenletet nyerjük, ahol  $w \in \{1, 4\}$  és

$$(4.6) \quad \text{lko}(X, Y) = \text{lko}(Y, D) = 1,$$

valamint

$$(4.7) \quad \begin{cases} w = 1, \text{ ha } D_f \text{ páros, } w = 4, \text{ ha } D_f \text{ páratlan,} \\ D \in \mathcal{S}, D > 0, X \geq 1, Y > 1, n \geq 3 \text{ prím.} \end{cases}$$

A 4.2 Tételünk az alábbi 4.3 Tétel következménye. Azt mondjuk, hogy a (4.5) egyenlet egy  $(X, Y, n)$  megoldása *kivételes*, ha

$$w = 1, \text{ ord}_2(D_f) = 2, Y \text{ páros és } d \equiv 7 \pmod{8}.$$

**4.3. Tétel** *Tekintsük a (4.5) egyenletet, amelyre teljesülnek a (4.6) és (4.7) feltételek. Ha  $(X, Y, n)$  a (4.5) egy nem kivételes megoldása, akkor eltekintve a*

$$(w, Y, D, n) \in \left\{ \begin{array}{l} (4, 2, 7, 5), (4, 2, 7, 13), \\ (4, 3, 11, 5), (4, 5, 19, 7), \\ (1, 55, 19, 5), (1, 377, 341, 5) \end{array} \right\}$$

*esetektől (4.5)-ben fennáll, hogy*

$$n = 3 \quad \text{vagy} \quad n \mid h(-4D).$$

*Továbbá az utóbbi esetben*

$$n \leq \max\{3, P\} \quad \text{ha} \quad n \nmid h$$

*és*

$$n < \frac{4}{\pi} \sqrt{Q} \log(2e\sqrt{Q}) \quad \text{ha} \quad n \mid h.$$

A 4.3 Tétel összevethető Bugeaud és Shorey [24] 5. és 7. Következményével, ahol a szerzők (4.5) típusú egyenleteket vizsgáltak, azonban ezekben az eredményekben  $D > 0$  négyzetmentes volt. Az 5. Következményben megmutatták, hogy az  $x^2 + 4D = y^n$  egyenletnek nincs megoldása  $n \geq 5$  esetén. Itt  $D$  négyzetmentes, és  $n$  olyan páratlan prím, amely nem osztja a  $\mathbf{Q}(\sqrt{-D})$

ideálosztályszámát. Továbbá a 7. Következményben hasonló feltételek mellett megadták a (4.5) egyenlet összes megoldását, amikor

$$w = 1, D \equiv 1 \pmod{4}, n \geq 3 \quad \text{vagy} \quad w = 4, D \equiv 7 \pmod{8}, n \geq 3 \quad \text{vagy} \\ w = 4, D \equiv 3 \pmod{8}, n \geq 5.$$

Megjegyezzük, hogy Bugeaud és Shorey [24] dolgozatával ellentétben a 4.3 Tételünkben  $D$  nem szükségképpen négyzetmentes.

## 4.2 SEGÉDEREDMÉNYEK

A 4.1 Tétel bizonyításához szükségünk lesz az alábbi két lemmára. A [17] és [22] dolgozat okoskodásaihoz hasonlóan kombináljuk a jelenleg ismert legjobb kétváltozós Baker-típusú becslés komplex és  $p$ -adikus változatát. Az alábbi Lemma Mignotte eredménye; l. az Appendixet [12]-ben.

**4.1. Lemma** *Legyen  $\alpha$  egy olyan komplex algebrai szám, amely nem egységgyök és amelyre  $|\alpha| = 1$ . Jelölje  $\log \alpha$  a logaritmus főértékét (azaz  $-\pi < \text{Im} \log \alpha \leq \pi$ ). Tekintsük az alábbi lineáris formát*

$$\Lambda = b_1 i \pi - b_2 \log \alpha,$$

ahol  $b_1$  and  $b_2$  pozitív egészek. Legyen  $\lambda$  egy olyan valós szám, amelyre  $1.8 \leq \lambda < 4$ , és legyenek

$$d = [\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}]/2, \\ \varrho = e^\lambda, \quad K = 0.5\varrho\pi + dh(\alpha), \quad B = \max(13, b_1, b_2), \\ t = \frac{1}{6\pi\varrho} - \frac{1}{48\pi\varrho(1 + 2\pi\varrho/3\lambda)}, \quad k = \left( \frac{1/3 + \sqrt{1/9 + 2\lambda t}}{\lambda} \right)^2,$$

$$H = \max \left\{ 3\lambda, d \left( \log B + \log \left( \frac{1}{\pi\varrho} + \frac{1}{2K} \right) - \log \sqrt{k} + 0.886 \right) + \right. \\ \left. + \frac{3\lambda}{2} + \frac{1}{k} \left( \frac{1}{6\pi\varrho} + \frac{1}{3K} \right) + 0.023 \right\}.$$

Ekkor

$$\log |\Lambda| > -(8\pi k \varrho \lambda^{-1} H^2 + 0.23)K - 2H - 2 \log H + 0.5\lambda + 2 \log \lambda - (d+2) \log 2.$$

**Bizonyítás.** Ez a [12] dolgozatban szereplő A.1.3 Tétel.  $\square$

Tetszőleges  $p$  prím esetén jelölje  $\mathbf{Q}_p$  a  $p$ -adikus számok testét és legyen  $\overline{\mathbf{Q}}_p$  a  $\mathbf{Q}_p$  algebrai lezártja. Továbbá jelölje  $v_p$  a  $\mathbf{Q}_p$  fölötti standard  $p$ -adikus értékelés  $\overline{\mathbf{Q}}_p$ -re való egyértelmű kiterjesztését, amelyre  $v_p(p) = 1$ .

**4.2. Lemma** *Legyen  $p$  egy racionális prím, és legyenek  $\alpha_1$  és  $\alpha_2$  olyan algebrai számok, amelyek  $p$ -adikus egységek. Jelölje  $f$  a  $\mathbf{Q}_p \hookrightarrow \mathbf{Q}_p(\alpha_1, \alpha_2)$  bővítés reziduális fokát és legyen  $d = [\mathbf{Q}(\alpha_1, \alpha_2) : \mathbf{Q}]/f$ . Legyenek továbbá  $b_1$  and  $b_2$  pozitív egészek és legyen*

$$\Lambda = \alpha_1^{b_1} - \alpha_2^{b_2}.$$

*Legyenek  $A_1 > 1$  és  $A_2 > 1$  olyan valós számok, amelyekre*

$$\log A_i \geq \max\{h(\alpha_i), \log p/d\}, \quad i = 1, 2$$

*és legyen*

$$b' = \frac{b_1}{d \log A_2} + \frac{b_2}{d \log A_1}.$$

*Ha  $\alpha_1$  és  $\alpha_2$  multiplikatíve függetlenek, akkor*

$$v_p(\Lambda) \leq \frac{24p(p^f - 1)}{(p - 1)(\log p)^4} d^4 \left( \max \left\{ \log b' + \log \log p + 0.4, \frac{10 \log p}{d}, 5 \right\} \right)^2 \cdot \log A_1 \log A_2.$$

**Bizonyítás.** Ez Bugeaud és Laurent [25] 4. Tétele a  $(\mu, \nu) = (10, 5)$  választással.  $\square$

A 4.3 Tétel bizonyításához további elnevezésekre és jelölésekre lesz szükségünk. Megtartva a 4.2 fejezet jelöléseit egy  $m$  nemnulla egész esetén legyen  $\omega(m)$  az  $m$  különböző prímosztóinak a száma. Definíció szerint,  $a, b, c \in \mathbf{Z}$  esetén az  $aX^2 + 2bXY + cY^2$  kvadratikus binér forma diszkriminánsa  $4b^2 - 4ac$ . Ezért az  $X^2 + DY^2$  binér forma diszkriminánsa éppen  $-4D$ . Azt mondjuk, hogy egy  $aX^2 + 2bXY + cY^2$  kvadratikus binér forma pozitív, ha  $a > 0$ . Mint ismeretes, a  $-4D$  diszkriminánsú pozitív kvadratikus binér formák halmaza véges sok ekvivalenciaosztályba sorolható. Ekkor ezen osztályok számát  $h(-4D)$ -vel jelöljük.

Az alábbi lemma a [24] dolgozatban szereplő 1. Lemma speciális esete.

**4.3. Lemma** *Tekintsük az*

$$(4.8) \quad X_1^2 + DY_1^2 = wY^{Z_1}$$

*egyenletet, ahol az  $X_1, Y_1, Z_1$  ismeretlenek olyan egészek, amelyekre  $Z_1 > 0$  és  $\text{lnko}(X_1, Y_1) = 1$ . Ekkor a (4.8) egyenlet megoldásai legfeljebb  $2^{\omega(Y)-1}$  osztályba sorolhatók. Továbbá minden osztályban egyértelműen létezik egy olyan  $(X_1, Y_1, Z_1)$  megoldás, amelyre fennáll, hogy  $X_1 > 0, Y_1 > 0$  és  $Z_1$  minimális az osztályban lévő megoldások között. Ekkor  $Z_1 \mid h(-4D)$ , ahol  $h(-4D)$  jelöli a  $-4D$  diszkriminánsú pozitív kvadratikus binér formák osztályainak a számát.*

**Bizonyítás.** Lásd [24]. □

Az alábbi lemma egy kvadratikus imaginárius algebrai számtest ideálosztályszámára ad jó felső korlátot.

**4.4. Lemma** *Legyen  $\mathcal{D} > 0$  egy négyzetmentes egész és jelölje  $h$  a  $\mathbf{K} = \mathbf{Q}(\sqrt{-\mathcal{D}})$  algebrai számtest ideálosztályszámát. Ekkor*

$$h < \frac{4}{\pi} \sqrt{\mathcal{D}} (\log 2e\sqrt{\mathcal{D}}).$$

**Bizonyítás.** Legyen  $h(-4\mathcal{D})$  a  $-4\mathcal{D}$  diszkriminánsú  $\mathbf{K}$ -beli kvadratikus rend osztályszáma. Ekkor  $h(-4\mathcal{D})$  nem más mint a  $-4\mathcal{D}$  diszkriminánsú pozitív binér kvadratikus formák osztályainak a száma (l. Cohen [27], 5.2.7 Definíció). Továbbá,

$$h(-4\mathcal{D}) < \frac{4}{\pi} \sqrt{\mathcal{D}} (\log 2e\sqrt{\mathcal{D}})$$

is fennáll (l. [24]-ban szereplő 1. Állítást). Mivel  $h \mid h(-4\mathcal{D})$  (l. [54]), így adódik a Lemma állítása. □

**4.5. Lemma** *Legyen  $h(-4D)$  a  $-4D$  diszkriminánsú pozitív kvadratikus binér formák osztályainak a száma. Ekkor, ha  $d \equiv 3 \pmod{4}$ ,*

$$h(-4D) = h(-4c^2d) = h2c \prod_{p|2c} \left(1 - \frac{(-d/p)}{p}\right) \frac{1}{u},$$

*ahol  $u = 3$ , if  $d = 3$  és  $u = 1$  különben; ha  $d \equiv 1, 2 \pmod{4}$ ,*

$$h(-4D) = h(-4c^2d) = hc \prod_{p|c} \left(1 - \frac{(-4d/p)}{p}\right) \frac{1}{u},$$

*ahol  $u = 2$ , ha  $d = 1$  és  $u = 1$  különben. Itt  $\left(\frac{\cdot}{p}\right)$  jelöli a Legendre szimbólumot.*

**Bizonyítás.** Lásd Mollin [54]. □

### 4.3 BIZONYÍTÁSOK

**A 4.1. Tétel bizonyítása.** Tekintsük a (4.3) egyenletet, ahol  $x, y, n$  olyan pozitív egészek, amelyekre  $n \geq 3$ ,  $\text{lko}(x, y) = 1$  és legyen

$$a = p_1^{z_1} \cdots p_s^{z_s},$$

ahol  $p_1, \dots, p_s$  különböző racionális prímekek és  $z_1, \dots, z_s$  ismeretlen nemnegatív egészek. Könnyen látható, hogy (4.3)-ban  $x \equiv a \pmod{2}$ . Ha most  $x \equiv a \equiv 0 \pmod{2}$ , akkor (4.3)-ban  $y$  csak páratlan lehet  $\text{lko}(x, y) = 1$  miatt. Ekkor viszont (4.3) bal oldala osztható 4-gyel a jobb oldala pedig csak 2-vel, ami ellentmondás. Így (4.3)-ban  $a$  páratlan és ezért nyilván  $\min\{p_1, \dots, p_s\} \geq 3$  is fennáll.

Faktorizálva a (4.3) egyenletet  $\mathbf{Q}(\sqrt{-1}) = \mathbf{Q}(i)$  egészei - a Gauss-egészek - fölött,

$$(4.9) \quad x + ai = i^r(1+i)(u+iv)^n, \quad x - ai = (-i)^r(1-i)(u-iv)^n, \quad y = u^2 + v^2,$$

adódik, ahol  $r \in \{0, 1, 2, 3\}$  és  $u, v \in \mathbb{Z}$ . Látható, hogy (4.9) miatt az  $uv = 0$  és  $u = \pm v$  esetek kizárhatók, hiszen különben  $y = u^2, v^2$  vagy  $2u^2$  adódna, amiből  $u^n \mid 2ai$  or  $v^n \mid 2ai$  következne a Gauss-egészek körében. Ez pedig csak  $x = y = 1$  esetén állhat fenn, ami éppen a triviális megoldásra vezet. Továbbá az is nyilvánvaló, hogy  $y = u^2 + v^2$  miatt feltehető, hogy  $y \geq 5$ .

A bizonyítás során két esetet különböztetünk meg. Tegyük fel először, hogy

$$(4.10) \quad a \leq y^{\frac{n}{3.128}}.$$

Felhasználva (4.10)-et

$$(4.11) \quad \left| \frac{x+ai}{x-ai} - 1 \right| = \frac{2a}{\sqrt{2}y^{n/2}} < \sqrt{2}y^{-\frac{n}{5.547}}.$$

adódik. Mivel páratlan  $n$  esetén  $i$  vagy  $-i$   $n$ -edik hatvány (4.9) miatt

$$(4.12) \quad \left| \frac{x+ai}{x-ai} - 1 \right| = \left| (-1)^r i \left( \frac{u+iv}{u-iv} \right)^n - 1 \right| = \left| \left( \frac{\pm(v-iu)}{u-iv} \right)^n - 1 \right|$$

következik. Könnyen ellenőrizhető, hogy  $\frac{x+ai}{x-ai}$  csak  $x = y = 1$  esetén lehet egységgyök. Ezért feltehető, hogy  $\frac{\pm(v-iu)}{u-iv}$  sem egységgyök. Felhasználva, hogy  $y \geq 5$ , (4.11) -ből egyszerű számolással adódik, hogy  $n \geq 6$  esetén  $\left| \frac{x+ai}{x-ai} - 1 \right| \leq \frac{1}{3}$ . Mivel minden olyan  $z \in \mathbb{C}$  esetén, amelyre  $|z - 1| \leq \frac{1}{3}$ , fennáll az  $|z - 1| \geq \frac{1}{2} |\log z|$  egyenlőtlenség, ezért (4.11) és (4.12) felhasználásával kapjuk, hogy

$$(4.13) \quad \sqrt{2}y^{-\frac{n}{5.547}} > \frac{1}{2} \left| 2m\pi i + n \log \left( \frac{\pm(v-iu)}{u-iv} \right) \right|,$$

ahol  $m$  egy olyan egész, amelyre  $|2m| \leq n$  és  $\log$  a logaritmus főértékét jelöli. Alkalmazzuk most a 4.1. Lemmát. Legyen  $\alpha = \left( \frac{\pm(v-iu)}{u-iv} \right)^{-1}$ ,  $b_1 = 2m$ ,  $b_2 = n$ , ha  $m \geq 0$ , és  $\alpha = \frac{\pm(v-iu)}{u-iv}$ ,  $b_1 = 2m$ ,  $b_2 = n$ , ha  $m < 0$ . Világos, hogy  $|\alpha| = 1$ . Továbbá, egyszerűen látható hogy  $h(\alpha) = \frac{1}{2} \log y$ . Legyen  $\lambda = 1.8$ . Mivel  $d = 1$ , felhasználva a 4.1. Lemma jelöléseit,  $n \geq 230$  esetén adódik, hogy  $K < 9.503 + \frac{1}{2} \log y$  és

$$(4.14) \quad H < \log n + 2.512.$$

Alkalmazva a 4.1. Lemmát a  $\Lambda = 2mi\pi - n \log \alpha$  lineáris formára, kapjuk hogy

$$(4.15) \quad \log |\Lambda| > -(13.1576H^2 + 0.23) \cdot \left( 9.503 + \frac{1}{2} \log y \right) - 2(H + \log H) - 0.003.$$

Összehasonlítva a (4.13) és (4.15) egyenlőtlenségeket,  $y \geq 5$  felhasználásával adódik, hogy

$$n < 5.547(84.27H^2 + 1.243(H + \log H) + 2.121),$$

és ezért (4.14) miatt

$$(4.16) \quad n \leq 90813.$$

Vegyük most azt az esetet, amikor

$$(4.17) \quad a > y^{\frac{n}{3.128}}.$$

Egyszerűen látható, hogy (4.9) miatt

$$(4.18) \quad 2ai = i^r(1+i)(u+iv)^n - (-i)^r(1-i)(u-iv)^n,$$

és így

$$(4.19) \quad \frac{2ai}{(-i)^r(u-iv)^n} = \left( \frac{\pm(u+iv)}{(u-iv)} \right)^n (1+i) - (1-i).$$

Mivel

$$(1+i)^n = \begin{cases} \pm 2^{\frac{n-1}{2}}(1+i), & \text{ha } n \equiv 1 \pmod{4} \\ \pm 2^{\frac{n-1}{2}}(1-i), & \text{ha } n \equiv -1 \pmod{4}, \end{cases}$$

ezért (4.19) miatt

$$(4.20) \quad \pm 2^{\frac{n+1}{2}} (-1)^r i^{1-r} (u+iv)^n \frac{a}{y^n} = \left( \frac{\pm(u+iv)}{(u-iv)} (1 \pm i) \right)^n - (1 \mp i)^n.$$

Legyen  $\Lambda = \left( \frac{\pm(u+iv)}{(u-iv)} (1 \pm i) \right)^n - (1 \mp i)^n$ . Ha  $p \mid a$ , akkor  $\text{lnko}(x, y) = 1$  miatt kapjuk, hogy  $p \nmid xy$ . Így, mivel  $p$  relatív prím  $2i$  és  $u+iv$ -hez is a Gauss-egészek körében (4.19)-ből következik, hogy

$$(4.21) \quad v_p(a) = v_p \left( \pm 2^{\frac{n+1}{2}} (-1)^r i^{1-r} (u+iv)^n \frac{a}{y^n} \right) = v_p(\Lambda),$$

Tegyük fel először, hogy  $\left( \frac{\pm(u+iv)}{(u-iv)} (1 \pm i) \right)$  és  $(1 \mp i)$  multiplicatív függők. Ekkor létezik olyan  $(r, s) \in \mathbb{Z}^2$ ,  $(r, s) \neq (0, 0)$  pár, hogy

$$(4.22) \quad \left( \frac{\pm(u+iv)}{(u-iv)} (1 \pm i) \right)^r (1 \mp i)^s = 1.$$

Bevezetve az  $\alpha = u+iv$  jelölést (4.22) miatt

$$(4.23) \quad \left( \frac{\alpha}{\bar{\alpha}} (1 \pm i) \right)^{4r} (1 \mp i)^{4s} = 1.$$

következik. (4.23)-ban mindkét oldal normáját véve adódik, hogy

$$2^{4(r+s)} = 1,$$

amiből látható, hogy  $r+s=0$ . Így, (4.23) miatt

$$(\alpha/\bar{\alpha})^{4r} = 1,$$

amiből

$$(4.24) \quad \bar{\alpha}/\alpha = \pm 1 \quad \text{vagy} \quad \bar{\alpha}/\alpha = \pm i.$$

Viszont (4.24) következik, hogy  $uv = 0$  vagy  $u = \pm v$ . Azonban, ahogy ezt már korábban beláttuk, e két eset a triviális megoldásra vezet.

Vegyük most azt az esetet, amikor  $\left(\frac{\pm(u+iv)}{(u-iv)}(1 \pm i)\right)$  és  $(1 \mp i)$  multiplicatív függetlenek. Alkalmazzuk a  $\Lambda$  formára a 4.2. Lemmát az alábbi paraméterekkel:

$$\alpha_1 = \left(\frac{\pm(u+iv)}{(u-iv)}(1 \pm i)\right), \quad \alpha_2 = 1 \mp i, \\ b_1 = b_2 = n, \quad f = 2, \quad d = 1.$$

Mivel  $p \geq 3$  és  $y \geq 5$ , ezért legyen  $\log A_1 = \frac{\log 10}{2 \log 5} \log y \log p$ , és  $\log A_2 = \log p$ ,  $b' = \frac{2 + \log 10}{\log 10} \frac{n}{\log p}$ . Ekkor azt kapjuk, hogy

$$(4.25) \quad v_p(a) = v_p(\Lambda) < 17.17 \frac{p(p+1)}{\log^2 p} (\max\{\log(1.869n) + 0.4, 10 \log p\})^2 \log y.$$

Tehát adódik, hogy

$$\log a = \sum_{p|a} v_p(a) \log p \leq \\ < 17.17 \sum_{p|a} \frac{p(p+1)}{\log p} (\max\{\log(1.869n) + 0.4, 10 \log p\})^2 \log y.$$

Ezt összehasonlítva (4.17)-tel egyszerű számolás után a

$$(4.26) \quad n < 17.17 \cdot 3.128 \sum_{p|a} \frac{p(p+1)}{\log p} (\max\{\log(1.869n) + 0.4, 10 \log p\})^2$$

egyenlőtlenséget nyerjük. Ha most

$$\max\{\log(1.869n) + 0.4, 10 \log p\} = \log(1.869n) + 0.4,$$

akkor

$$(4.27) \quad \frac{n}{(\log(1.869n) + 0.4)^2} < 3.128 \cdot 17.17s \frac{P(P+1)}{\log P},$$

ha pedig

$$\max \{ \log(1.869n) + 0.4, 10 \log p \} = 10 \log p,$$

akkor (4.26) miatt

$$(4.28) \quad n < 5371sP(P+1) \log P.$$

következik. Végül, a  $P = 3$ ,  $s = 1$  esetet kivéve, (4.16), (4.27) és (4.28) felhasználásával adódik, hogy

$$n < 5371sP(P+1) \log P$$

míg, ha  $P = 3$  és  $s = 1$ , akkor látható, hogy (4.16) áll fenn.  $\square$

**A 4.3. Tétel bizonyítása.** Tekintsük a (4.5) egyenletet, amelyre teljesülnek a (4.6) és (4.7) feltételek. A [24]-beli okoskodásokat követve bevezetünk két végtelen halmazt. Jelölje  $F_k$  a Fibonacci sorozatot, azaz legyen  $F_0 = 0$ ,  $F_1 = 1$  és  $F_k = F_{k-1} + F_{k-2}$  minden  $k \geq 2$  esetén, valamint legyen  $L_k$  a Lucas sorozat, azaz  $L_0 = 2$ ,  $L_1 := 1$  és  $L_k := L_{k-1} + L_{k-2}$  minden  $k \geq 2$  esetén. Ekkor legyen

$$F := \{(F_{k+\varepsilon}, L_{k-\varepsilon}, F_k) \mid k \geq 2, \varepsilon \in \{\pm 1\}\},$$

és

$$H := \{(1, \Delta, Y) \mid \text{létezik } r, s \in \mathbf{Z}_{>0} \text{ úgy, hogy } s^2 + \Delta = wY^r \text{ és } 3s^2 - \Delta = \mp w\}.$$

Ha  $(X, Y, n)$  a (4.5) egy nem kivételes megoldása, akkor ez a megoldás megfelel a (4.9) egyenlet  $(X_1, Y_1, Z_1) = (X, 1, n)$  megoldásának. Mivel a (4.9) megoldásai legfeljebb  $2^{\omega(Y)-1}$  osztályba sorolhatók, ezért két esetet különböztetünk meg. Először, ha  $(X, 1, n)$  minimális megoldás az osztályban, akkor a 4.3 Lemma miatt  $n \mid h(-4D)$  és a Tétel bizonyítását befejeztük. Ha  $(X, 1, n)$  nem a minimális megoldás, akkor az  $(X, 1, n)$ -et tartalmazó osztályban legalább két megoldás van. Felhasználva a [24]-beli 2.Tételt,  $n$  páratlan prím volta miatt kapjuk, hogy

$$(w, Y, D, n) \in \left\{ \begin{array}{l} (4, 2, 7, 3), (4, 7, 3, 3), (4, 2, 7, 5), (4, 2, 7, 13), \\ (4, 3, 11, 5), (4, 5, 19, 7), (1, 55, 19, 5), (1, 377, 341, 5) \end{array} \right\}$$

vagy

$$n \in \{1, 5\} \quad \text{és} \quad (1, D, Y) \in F$$

vagy

$$n \in \{r, 3r\} \quad \text{és} \quad (1, D, Y) \in H, \quad \text{úgy hogy} \quad r \in \mathbb{Z}_{>0}.$$

Mivel  $n$  páratlan prím, adódik, hogy

$$n = 5 \quad \text{és} \quad (1, D, Y) \in F$$

vagy

$$n = 3 \quad \text{és} \quad (1, D, Y) \in H.$$

Ha  $n = 5$  és  $(1, D, Y) \in F$ , ekkor az  $F$  halmaz definíciója miatt azt kapjuk, hpgy

$$F_{k-2} = 1, L_{k+1} = D, F_k = Y$$

vagy

$$F_{k+2} = 1, L_{k-1} = D, F_k = Y.$$

Látható, hogy  $F_{k+2} = 1$  nem állhat fenn, hiszen ekkor  $k+2 \in \{1, 2\}$  adódik, és így  $k = 0$ . Ezért  $F_0 = Y = 0$  következik, ami ellentmond az  $Y > 1$  feltételnek. Ha  $F_{k-2} = 1$ , akkor nyilván  $k-2 \in \{1, 2\}$  adódik, és így  $k \in \{3, 4\}$  következik, amiből  $F_k = Y$  miatt

$$(Y, D) \in \{(2, 7), (3, 11)\}.$$

adódik. Felhasználva (4.5) -öt azt kapjuk, hogy

$$X^2 + 7 = w \cdot 2^5 \quad \text{és} \quad X^2 + 11 = w \cdot 3^5.$$

Látható, hogy ha  $w = 4$ , akkor a fenti egyenleteknek csak olyan megoldásai vannak, amelyeket már felsoroltunk, azaz  $(w, Y, D, n) \in \{(4, 2, 7, 5), (4, 3, 11, 5)\}$ . Ha most  $w = 1$ , akkor az  $X^2 + 11 = 3^5$  lehetetlen, míg az  $X^2 + 7 = 2^5$  egyenlet a (4.5) egy kivételes megoldására vezet, ami ellentmond annak a feltételnek, hogy  $(X, Y, n)$  nem kivételes megoldás. Ezért azt kapjuk, hogy

$$n \mid h(-4D) \quad \text{vagy} \quad n = 3,$$

teljesül, attól függően, hogy  $(X, 1, n)$  az öt tartalmazó osztályban minimális vagy nem. Emlékeztetünk rá, hogy  $n$  egy páratlan prím és  $D = dc^2 \in \mathcal{S}$ . Ezért, ha  $n \mid h(-4D)$  de  $n \nmid h$ , akkor a 4.5 Lemma miatt azt kapjuk, hogy  $n$  nem lehet nagyobb, mint az  $S = \{p_1, \dots, p_s\}$  halmazban szereplő legnagyobb prím. Így

$$n \leq \max\{3, P\}.$$

Ha  $n \mid h$ , akkor mivel  $d$  a  $D$  négyzetmentes része, fennáll, hogy

$$d \leq Q = p_1 \cdots p_s.$$

Végül felhasználva a 4.4 Lemmát megkapjuk a 4.3 Tétel állítását.  $\square$

**A 4.2. Tétel bizonyítása.** Legyen  $f(x) = x^2 + Ax + B$ , ahol  $A, B \in \mathbf{Z}$ . Lártható, hogy a (4.4) egyenlet visszavezethető (4.5) típusú egyenletre, nevezetesen azt kapjuk, hogy

$$(4.29) \quad X^2 + D = wY^n,$$

ahol

$$(X, D, w, Y) = \begin{cases} (x + \frac{A}{2}, -\frac{D_f}{4}, 1, y) & \text{ha } D_f \text{ páros,} \\ (2x + A, -D_f, 4, y) & \text{ha } D_f \text{ páratlan.} \end{cases}$$

Felhasználva  $D$  definícióját valamint az  $x \neq -\frac{A}{2}$  feltételt, feltehető, hogy (4.29)-ben

$$D \in \mathcal{S}, \quad D > 0, \quad X \geq 1, \quad n \geq 3 \text{ prím.}$$

Mivel  $\text{lko}(Y, D) = 1$  alkalmazhatjuk a 4.3 Tételt a (4.29) egyenletre és megkapjuk a 4.2 Tétel állítását.  $\square$

## 5 AZ $x^2 + 2^\alpha 3^\beta 5^\gamma 7^\delta = y^n$ EGYENLET MEGOLDÁSA

### 5.1 EREDMÉNYEK

Megtartva a 4. fejezet jelöléseit, ebben a fejezetben megadjuk a (4.1) típusú egyenlet teljes megoldását abban az esetben, amikor  $D \in \mathcal{S}$ , ahol  $\mathcal{S} = \{2, 3, 5, 7\}$  és  $w = 1$ . Nevezetesen, tekintsük az

$$(5.1) \quad x^2 + 2^\alpha 3^\beta 5^\gamma 7^\delta = y^n$$

egyenletet, ahol az  $x, y, n, \alpha, \beta, \gamma, \delta$  ismeretlenek olyan nemnegatív egészek, amelyekre  $x \geq 1, y \geq 2, n \geq 3$  valamint  $\text{luko}(x, y) = 1$ . Kombinálva a 4.3 Tételt Cohn [31] és de Weger [74] eredményeivel, megadjuk az (5.1) egyenlet összes nem kivételes megoldását. Emlékeztetünk, hogy ebben a speciális esetben az (5.1) egy  $(x, y, n)$  megoldása *kivételes*, ha  $\alpha = 0, y$  páros és a  $3^\beta 5^\gamma 7^\delta$  szorzat  $7c^2$  vagy  $15c^2$  alakú. Megjegyezzük, hogy ha az (5.1) egyenletünk  $x^2 + 7c^2 = y^n$  vagy  $x^2 + 15c^2 = y^n$  alakú és  $(x, y, n)$  az (5.1) egy kivételes megoldása, akkor ebben az esetekben nem használhatjuk az 5.1 Lemma által biztosított paraméterezést (l. pl. [29]). Ezért az (5.1) egyenletben csak a nem kivételes megoldásokkal foglalkozunk. Megjegyezzük még, hogy egy másik módszert használva Bugeaud, Mignote és Siksek [26] teljesen megoldották az  $x^2 + 7c^2 = y^n$  és  $x^2 + 15c^2 = y^n$  egyenleteket abban az esetben, amikor  $1 \leq 7c^2 < 15c^2 \leq 100$ .

**5.1. Tétel** Az (5.1) egyenlet összes nem kivételes megoldását az 5.1 Táblázat tartalmazza.

Megjegyezzük, hogy ha az (5.1) egyenletben  $\alpha \geq 1$ , akkor  $\text{luko}(x, y) = 1$  miatt  $y$  páratlan. Ekkor az (5.1) egyenlet  $(x, y, n)$  megoldásai mindig nem kivételesek. Így ebben az esetben az (5.1) egyenlet összes megoldása megadható.

**5.1. Következmény** Tegyük fel, hogy (5.1)-ben  $\alpha \geq 1$ . Ekkor az (5.1) egyenlet összes megoldását az 5.1 Táblázat tartalmazza.

Megjegyezzük, hogy az (5.1) egyenlet  $\alpha \geq 1$  feltételnek eleget tevő megoldásai éppen azok a megoldások, amelyek az 5.1 Táblázatban nincsenek \* jellel megjelölve. Továbbá ebben az esetben az 5.1 Tétel Luca [49] eredményének az általánosítása, aki  $\gamma = \delta = 0$  esetén (5.1) összes megoldását meghatározta.

## 5.2 SEGÉDEREDMÉNYEK

Az 5.1 Tétel bizonyításához szükségünk lesz az alábbi Lemmákra. A következő Lemma az (5.1) egyenlet megoldásaira ad paraméterezést, ami lényegében Cohn [31] eredménye.

**5.1. Lemma** *Tekintsük az (5.1) egyenletet és tegyük fel, hogy  $n \geq 3$  prím. Legyen  $d > 0$  a  $D = dc^2 = 2^\alpha 3^\beta 5^\gamma 7^\delta$  négyzetmentes része. Ekkor, ha  $d \not\equiv 7 \pmod{8}$  vagy  $d \equiv 7 \pmod{8}$  és  $y$  páratlan, akkor az alábbi esetek valamelyike áll fenn:*

- (a) léteznek  $a_1, b_1 \in \mathbf{Z}$ , amelyekre  $b_1 \mid c$ ,  $b_1 \neq \pm c$  úgy, hogy  $y = a_1^2 + b_1^2 d$  és  $\pm x + c\sqrt{-d} = (a_1 + b_1\sqrt{-d})^n$ ;
- (b)  $n \mid h$ , ahol  $h$  jelöli a  $\mathbf{Q}(\sqrt{-d})$  test ideálosztályszámát;
- (c)  $d \equiv 3 \pmod{8}$ ,  $n = 3$  és léteznek olyan  $A_1, B_1$  páratlan egészek, amelyekre  $B_1 \mid c$  úgy, hogy  $y = \frac{1}{4}(A_1^2 + B_1^2 d)$ ,  $\pm x + c\sqrt{-d} = \frac{1}{8}(A_1 + B_1\sqrt{-d})^3$ ;
- (d)  $(n, D, x) = (3, 3u^2 \pm 8, u^3 \pm 3u)$  vagy  $(n, D, x) = (3, 3u^2 \pm 1, 8u^3 \pm 3u)$ , ahol  $u \in \mathbf{Z}$ ;
- (e)  $(n, D, x) = (5, 19, 22434)$  vagy  $(n, D, x) = (5, 341, 2759646)$ .

**Bizonyítás.** Ha  $d \not\equiv 7 \pmod{8}$ , akkor a Lemma Cohn [31] Tételének az átfogalmazása. Tehát maradt az az eset, amikor (5.1)-ben  $d \equiv 7 \pmod{8}$  és  $y$  páratlan. Ebben az esetben alkalmazhatjuk Ljunggren [46] (593-594 old.) eredményét az (5.1) egyenletre és azt kapjuk, hogy  $n \nmid h$  esetén léteznek  $a_1, b_1 \in \mathbf{Z}$  úgy, hogy

$$(5.2) \quad \pm x + c\sqrt{-d} = \left( \frac{a_1 + b_1\sqrt{-d}}{2} \right)^n, \quad a_1 \equiv b_1 \pmod{2}.$$

Ha (5.2)-ben  $a_1$  és  $b_1$  is páratlan, akkor  $d \equiv 7 \pmod{8}$  miatt adódik, hogy

$$a_1^2 + db_1^2 \equiv 0 \pmod{8},$$

és így

$$y = \frac{a_1^2 + db_1^2}{4}$$

miatt azt kapjuk, hogy  $y$  páros, ami ellentmondás. Így  $a_1$  és  $b_1$  is páros, és ezért a Lemma bizonyítását befejeztük.  $\square$

Az alábbi Lemma de Weger [74] eredménye.

**5.2. Lemma** *Legyen  $S = \{2, 3, 5, 7\}$ . Tekintsük az*

$$(5.3) \quad U + V = W^2$$

*egyenletet, ahol az  $U, V, W$  ismeretlenek olyan egészek, amelyekre  $U, V$  vagy  $-V \in S \cap \mathbf{Z}_{>0}, W \in \mathbf{Z}_{>0}$ . Tegyük fel, hogy  $U \geq V$  valamint azt, hogy  $\text{lko}(U, V)$  négyzetmentes. Ekkor az (5.3) egyenletnek 388 megoldása van, amelyek explicit meg vannak határozva [74]-ben.*

**Bizonyítás.** Lásd a 7.2 Tételt [74]-ben.  $\square$

### 5.3 BIZONYÍTÁSOK

**Az 5.1. Tétel bizonyítása.** Az általánosság megsértése nélkül feltehető, hogy az (5.1) egyenletben  $n = 4$  vagy  $n \geq 3$  páratlan prím. Továbbá, felhasználva a  $dc^2 = D = 2^\alpha 3^\beta 5^\gamma 7^\delta$  jelölést feltehető, hogy  $d \in \mathcal{H}$ , ahol  $\mathcal{H} = \{1, 2, 3, 5, 6, 7, 10, 14, 15, 21, 30, 35, 42, 70, 105, 210\}$ . Ha most  $n$  páratlan prím, és  $(x, y, n)$  az (5.1) egy nem kivételes megoldása, akkor mivel minden  $d \in \mathcal{H}$  esetén a  $\mathbf{Q}(\sqrt{-d})$  test ideálosztályszáma 1 vagy 2-hatvány, a 4.3 Tétel felhasználásával azt kapjuk, hogy

$$n \leq 7.$$

Így az (5.1) egyenletnek csak az  $n \in \{3, 4, 5, 7\}$  értékek esetén lehet megoldása.

Az  $n \in \{5, 7\}$  eset.

Emlékeztetünk, hogy

$$dc^2 = D = 2^\alpha 3^\beta 5^\gamma 7^\delta,$$

ahol  $d \in \mathcal{H}$  és  $\mathcal{H} = \{1, 2, 3, 5, 6, 7, 10, 14, 15, 21, 30, 35, 42, 70, 105, 210\}$ . Tekintsük először azt az esetet, amikor az (5.1) egyenletben  $n = 5$ . Tegyük fel továbbá, hogy  $\alpha \geq 0, \beta \geq 0, \gamma \geq 6, \delta \geq 0$ . Az 5.1 Lemma felhasználásával azt kapjuk, hogy

$$(5.4) \quad \pm x + c\sqrt{-d} = (a + b\sqrt{-d})^5,$$

ahol  $a, b \in \mathbf{Z}, b \mid c, y = a^2 + db^2$ . Így (5.4)-ben összehasonlítva a képzetes részeket azt nyerjük, hogy

$$(5.5) \quad 5a^4b - 10a^2b^3d + b^5d^2 = c$$

Mivel  $\gamma \geq 6$  így  $\text{ord}_5(c) \geq 3$  is teljesül.

1. *Eset:*  $1 \leq \text{ord}_5(b) \leq \text{ord}_5(c) - 2$ .

Mivel  $b \mid c$  és  $\text{ord}_5(b) \leq \text{ord}_5(c) - 2$ , látható, hogy  $\frac{c}{5b} \in \mathbf{Z}$  valamint  $\text{ord}_5\left(\frac{c}{5b}\right) \geq 1$ . Felhasználva (5.5) -öt azt kapjuk, hogy

$$(5.6) \quad a^4 - 2a^2b^2d + \frac{b^4}{5}d^2 = \frac{c}{5b}.$$

Mivel  $\text{ord}_5\left(\frac{c}{5b}\right) \geq 1$  és  $\text{ord}_5(b) \geq 1$  ezért (5.6) miatt látható, hogy  $5 \mid a^4$  is fennáll. Ekkor viszont  $a \mid x$  felhasználásával  $5 \mid x$  is adódik. Így felhasználva (5.1)-et valamint a  $\gamma \geq 6$  feltételt, azt kapjuk, hogy  $5 \mid y$ , ami lehetetlen, hiszen  $x$  és  $y$  relatív prím egészek.

2. *Eset:*  $\text{ord}_5(b) = \text{ord}_5(c)$ .

Ebben az esetben nyilván feltehető, hogy  $\text{ord}_5(b) \geq 3$ , mivel  $\text{ord}_5(c) \geq 3$ . Ekkor (5.5) miatt

$$(5.7) \quad 5a^4 - 10a^2b^2d + b^4d^2 = \frac{c}{b}.$$

is teljesül. Így viszont az (5.7) egyenlet bal oldala osztható 5-tel, míg a jobb oldala nem. Tehát ebben az esetben is ellentmondásra jutottunk.

3. *Eset:*  $\text{ord}_5(b) = 0$ .

Mivel  $\text{ord}_5(b) = 0$ , így nyilván  $\text{ord}_5(c) = \text{ord}_5\left(\frac{c}{b}\right) \geq 3$ . Felhasználva az (5.7) egyenletet látható, hogy  $5 \mid b^4 d^2$  szükségképpen teljesül, továbbá  $\text{ord}_5(b) = 0$  miatt világos, hogy ekkor  $5 \mid d$  is fennáll. Így (5.7) miatt kapjuk az alábbi

$$(5.8) \quad a^4 - 2a^2 b^2 d + \frac{b^4 d^2}{5} = \frac{c}{5b}.$$

egyenletet. Egyszerűen ellenőrizhető, hogy (5.6)-ban  $\frac{b^4 d^2}{5}$  és  $\frac{c}{5b}$  racionális egészek, valamint az is könnyen látható, hogy  $\text{ord}_5\left(\frac{c}{5b}\right) \geq 2$ . Ezért (5.8) miatt adódik, hogy  $5 \mid a^4$ , ami  $a \mid x$  miatt az  $5 \mid x$  összefüggésre vezet. Végül felhasználva (5.1)-et valamint a  $\gamma \geq 6$  feltételt azt kapjuk, hogy  $5 \mid y$ , ami ellentmondás  $\text{lko}(x, y) = 1$  miatt.

4. Eset:  $\text{ord}_5(b) = \text{ord}_5(c) - 1$ .

A fenti feltétel miatt látható, hogy (5.8)-ban  $\frac{b^4 d^2}{5}$  és  $\frac{c}{5b}$  racionális egészek, valamint az  $\text{ord}_5\left(\frac{c}{5b}\right) = 0$  összefüggés is teljesül. Ha most  $\text{ord}_2\left(\frac{c}{5b}\right) \geq 1$ , akkor nyilván az  $\alpha \geq 1$  feltétel is fennáll. Továbbá (5.8) miatt azt kapjuk, hogy

$$(5.9) \quad a^4 \equiv \frac{b^4 d^2}{5} \pmod{2}.$$

A továbbiakban feltehető, hogy  $a$  páratlan, hiszen különben az (5.1),  $a \mid x$  és  $\alpha \geq 1$  összefüggések felhasználásával  $2 \mid \text{lko}(x, y)$  is teljesülne, ami ellentmondás az  $\text{lko}(x, y) = 1$  miatt. Ekkor azonban (5.9) -ből adódik, hogy  $b$  és  $d$  is páratlan egészek, amiből pedig  $2 \mid y = a^2 + db^2$  következik. Felhasználva az (5.1) egyenletet valamint az  $\alpha \geq 1$  feltételt, azt kapjuk, hogy  $2 \mid x$ , ami szintén ellentmondás, hiszen  $x$  és  $y$  relatív prím egészek.

Tegyük fel most, hogy (5.8)-ban  $\text{ord}_2\left(\frac{c}{5b}\right) = 0$  és  $\text{ord}_3\left(\frac{c}{5b}\right) \geq 1$ . Ekkor nyilván  $\beta \geq 1$  is fennáll. A továbbiakban feltehető, hogy (5.8)-ban  $3 \nmid d$  és  $3 \nmid b$ , hiszen különben (5.8) miatt  $3 \mid a^4$  adódik, amiből  $3 \mid x$  következik. Így (5.1) valamint  $\beta \geq 1$  miatt látható, hogy  $3 \mid y$  is fennáll, ami most is ellentmondásra vezet  $\text{lko}(x, y) = 1$  miatt.

Mivel  $D = 2^\alpha 3^\beta 5^\gamma 7^\delta = dc^2$ ,  $y = a^2 + db^2$  így (5.1) felhasználásával az

$$(5.10) \quad x^2 + dc^2 = (a^2 + db^2)^5$$

adódik. Feltehető, hogy  $3 \nmid x$ , hiszen különben ellentmondásra jutunk (5.1) és  $\text{lko}(x, y) = 1$  miatt. Ekkor azonban  $3 \nmid x$  és  $\beta \geq 1$  következtében azt kapjuk, hogy

$$(5.11) \quad x^2 + dc^2 \equiv 1 \pmod{3}.$$

Ha most  $3 \mid a$ , akkor  $a \mid x$ ,  $\beta \geq 1$  és (5.1) felhasználásával újra ellentmondásra jutunk. Ezért  $3 \nmid x$ ,  $3 \nmid b$  és  $\beta \geq 1$  miatt nyilván következik, hogy

$$(5.12) \quad (a^2 + db^2)^5 \equiv (1 + d)^5 \pmod{3}.$$

Mivel minden olyan  $d \in \mathcal{H}$  esetén, amelyre  $3 \nmid d$ , fennáll, hogy  $1 + d \equiv -1, 0 \pmod{3}$ , így (5.12) figyelembe vételével azt kapjuk, hogy

$$(5.13) \quad (a^2 + db^2)^5 \equiv -1, 0 \pmod{3}.$$

Kombinálva az (5.10), (5.11) és (5.13) összefüggéseket, újra ellentmondáshoz jutunk.

Ha  $\text{ord}_2\left(\frac{c}{5b}\right) = 0$  és  $\text{ord}_3\left(\frac{c}{5b}\right) = 0$  ezért (5.8) miatt következik, hogy

$$(5.14) \quad a^4 - 2a^2b^2d + \frac{b^4d^2}{5} = \pm 7^{\delta'},$$

ahol  $\delta'$  egy nem negatív egész. Ha  $\delta' \geq 1$  és  $7 \mid d$ , akkor felhasználva (5.14)-et azt nyerjük, hogy  $7 \mid a^4$ , amiből  $a \mid x$  következtében  $7 \mid x$  is adódik. Másrészt azonban  $7 \mid y = a^2 + db^2$  is teljesül. Ez pedig ellentmondás  $\text{lko}(x, y) = 1$  miatt. Ha  $\delta' \geq 1$  és  $7 \nmid d$ , akkor az (5.14) egyenlet lehetetlen mod 7 minden  $d \in \mathcal{H}$  esetén.

Ha pedig  $\delta' = 0$ , akkor (5.14) rendre egy-egy Thue egyenletet eredményez minden  $d \in \mathcal{H}$  esetén. Megoldva az (5.14) egyenletet minden  $d \in \mathcal{H}$  esetén, kiderült, hogy ezen Thue egyenleteknek nincs megoldása semmilyen  $d \in \mathcal{H}$  esetén.

Maradt az az eset, amikor az (5.1) egyenletben  $n = 5$  és  $\gamma \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ . Ha  $\gamma \in \{0, 3, 4, 5\}$ , akkor alkalmazhatjuk a 4. Eset-ben felhasznált okoskodásokat az

$$5a^4 - 10a^2b^2d + b^4d^2 = \frac{c}{b}$$

valamint az

$$a^4 - 2a^2b^2d + \frac{b^4d^2}{5} = \frac{c}{5b},$$

egyenletekre. Ezek az esetek sem eredményeznek megoldást.

Ha pedig  $\gamma \in \{1, 2\}$ , akkor látható, hogy  $\text{ord}_5(c) = 0$  és  $\text{ord}_5(d) = 1$  vagy  $\text{ord}_5(c) = 1$  és  $\text{ord}_5(d) = 0$  esetek valamelyike állhat fenn. Ekkor viszont felhasználva az (5.5) egyenletet újra ellentmondáshoz jutunk.

Abban az esetben, ha az (5.1) egyenletben  $n = 7$ , akkor a fentiekben alkalmazott gondolatmenethez hasonlóan kiderül, hogy ebben az esetben sem kapunk megoldásokat.

Az  $n \in \{3, 4\}$  eset.

Tekintsük először azt az esetet, amikor az (5.1) egyenletben  $n = 4$ . Ekkor (5.1)-ben faktorizálva azt kapjuk, hogy

$$(5.15) \quad (y^2 + x)(y^2 - x) = D = 2^\alpha 3^\beta 5^\gamma 7^\delta.$$

Így  $y^2 + x \in \mathcal{S}$  és  $y^2 - x \in \mathcal{S}$ , ahol  $\mathcal{S} = \{2, 3, 5, 7\}$ . Ezért az alábbi egyenleteket kapjuk:

$$(5.16) \quad \begin{cases} \frac{y^2+x}{2} + \frac{y^2-x}{2} = y^2 & , \text{ ha } x \equiv y \pmod{2}, \\ 2(y^2+x) + 2(y^2-x) = (2y)^2 & , \text{ ha } x \not\equiv y \pmod{2}. \end{cases}$$

Mivel  $x$  és  $y$  relatív prím egészek, ezért látható, hogy  $\text{lko}\left(\frac{y^2+x}{2}, \frac{y^2-x}{2}\right) = 1$  és  $\text{lko}(2(y^2+x), 2(y^2-x)) = 2$ . Továbbá, mivel  $x > 0$  azt kapjuk, hogy  $\frac{y^2+x}{2} \geq \frac{y^2-x}{2}$  és  $2(y^2+x) \geq 2(y^2-x)$  mindig teljesül. Ezért azt nyerjük, hogy az (5.16) egyenletek eleget tesznek az 5.2 Lemma feltételeinek az

$$(U, V, W) = \left(\frac{y^2+x}{2}, \frac{y^2-x}{2}, y\right) \text{ és } (U, V, W) = (2(y^2+x), 2(y^2-x), 2y).$$

választással. Alkalmazva az 5.2 Lemmát az (5.16) egyenletekre, az  $n = 4$  esetben megkapjuk az (5.1) egyenlet összes nem kivételes megoldását (lásd az 5.1 Táblázatot).

Végül tegyük fel, hogy (5.1)-ben  $n = 3$ . Felhasználva az 5.1 Lemmát azt nyerjük, hogy az (5.1) egyenletnek  $n = 3$  mellett az alábbi esetek valamelyikében lehet csak megoldása:

$$(I) \quad 3a_1^2b_1 - b_1^3d = c, \text{ ahol } a_1, b_1 \in \mathbf{Z} \text{ és } b_1 \mid c,$$

$$(II) \quad 3A_1^2B_1 - B_1^3d = 8c, \text{ ahol } A_1, B_1 \text{ páratlan egészek és } B_1 \mid c,$$

$$(III) \quad D = 3u^2 \pm 8 \text{ és } x = u^3 \pm 3u, \text{ ahol } u \in \mathbf{Z},$$

$$(IV) \quad D = 3u^2 \pm 1 \text{ és } x = 8u^2 \pm 3u, \text{ ahol } u \in \mathbf{Z}.$$

A fenti esetek mindegyike visszavezethető

$$U + V = W^2, \quad U, V \in \mathcal{S}$$

típusú egyenletre az  $(U, V, W)$  hármas alábbi választásai mellett:

(I.) Eset. Ebben az esetben az alábbi egyenlettel van dolgunk:

$$3a_1^2b_1 - b_1^3d = c,$$

ahol  $a_1, b_1 \in \mathbf{Z}$  és  $b_1 \mid c$ . Megkülönböztetünk három alesetet, attól függően, hogy  $3 \mid d$  vagy  $3 \nmid db_1$  vagy  $3 \nmid d$  és  $3 \mid b_1$ .

Ha  $3 \mid d$ , akkor nyilván  $3 \mid c$  is teljesül és így a fenti egyenletből

$$a_1^2 = \frac{c}{3b_1} + \frac{d}{3}b_1^2$$

következik. Látható, hogy  $\text{lncok}\left(\frac{c}{3b_1}, \frac{d}{3}b_1^2\right)$  négyzetmentes, hiszen  $\frac{c}{3b_1}$  és  $b_1^2$  relatív prímelek és  $\frac{d}{3}$  négyzetmentes. A másik két eset hasonlóan vezethető vissza olyan alakúra, ahol már alkalmazható az 5.2 Lemma. Ezért minden  $d \in \mathcal{H}$  esetén az alábbi egyenletek a megoldandók:

$$(5.17) \quad (U, V, W) = \begin{cases} \left(\frac{d}{3}b_1^2, \frac{c}{3b_1}, a_1\right) & , \text{ ha } 3 \mid d \text{ és } \frac{d}{3}b_1^2 \geq \frac{c}{3b_1}, \\ \left(\frac{c}{3b_1}, \frac{d}{3}b_1^2, a_1\right) & , \text{ ha } 3 \mid d \text{ és } \frac{c}{3b_1} > \frac{d}{3}b_1^2, \\ \left(3db_1^2, \frac{3c}{b_1}, 3a_1\right) & , \text{ ha } 3 \nmid d, 3 \nmid b_1 \text{ és } 3db_1^2 \geq \frac{3c}{b_1}, \\ \left(\frac{3c}{b_1}, 3db_1^2, 3a_1\right) & , \text{ ha } 3 \nmid d, 3 \nmid b_1 \text{ és } \frac{3c}{b_1} > 3db_1^2, \\ \left(3db_1^2, \frac{c}{9b_1}, a_1\right), \quad b_1 = 3b'_1 & , \text{ ha } 3 \nmid d, 3 \mid b_1, \text{ és } 3db_1^2 \geq \frac{c}{9b_1}, \\ \left(\frac{c}{9b_1}, 3db_1^2, a_1\right), \quad b_1 = 3b'_1 & , \text{ ha } 3 \nmid d, 3 \mid b_1, \text{ és } \frac{c}{9b_1} > 3db_1^2. \end{cases}$$

(II.) Eset. Ebben az esetben csak azon  $d \in \mathcal{H}$  értékekkel foglalkozunk, amelyre  $d \equiv 3 \pmod{8}$ . Így tehát  $d \in \{3, 35\}$  és az alábbi egyenletek a megoldandók:

$$(5.18) \quad (U, V, W) = \begin{cases} \left(B_1^2, \frac{8c}{3B_1}, A_1\right), \text{ ha } d = 3 \text{ és } B_1^2 \geq \frac{8c}{3B_1}, \\ \left(\frac{8c}{3B_1}, B_1^2, A_1\right), \text{ ha } d = 3 \text{ és } \frac{8c}{3B_1} > B_1^2, \\ \left(105B_1^2, \frac{24c}{B_1}, 3A_1\right), \text{ ha } d = 35, 3 \nmid B_1 \text{ és } 105B_1^2 \geq \frac{24c}{B_1}, \\ \left(\frac{24c}{B_1}, 105B_1^2, 3A_1\right), \text{ ha } d = 35, 3 \nmid B_1 \text{ és } \frac{24c}{B_1} > 105B_1^2, \\ \left(105B_1'^2, \frac{8c}{9B_1'}, A_1\right), B_1 = 3B_1', \text{ ha } d = 35, 3 \mid b_1, \text{ és } 105B_1'^2 \geq \frac{8c}{9B_1'}, \\ \left(\frac{8c}{9B_1'}, 105B_1'^2, A_1\right), B_1 = 3B_1', \text{ ha } d = 35, 3 \mid b_1, \text{ és } \frac{8c}{9B_1'} > 105B_1'^2. \end{cases}$$

(III.) *Eset* Ebben az esetben az alábbi egyenletek a megoldandók:

$$(5.19) \quad (U, V, W) = \begin{cases} (3D, \pm 24, 3u) & , \text{ ha } \alpha \in \{0, 1\}, \\ \left(\frac{3D}{4}, \pm 6, \frac{3u}{2}\right) & , \text{ ha } \alpha \geq 2. \end{cases}$$

(IV.) *Eset* Ekkor pedig csupán két egyenlet a megoldandó:

$$(5.20) \quad (U, V, W) = (3D, \pm 3, 3u).$$

Látható, hogy a fenti egyenletek mindegyike eleget tesz az 5.2 Lemma feltételeinek. Alkalmazva tehát az 5.2 Lemmát az (5.17)-(5.20) egyenletekre megkapjuk az (5.1) egyenlet  $n = 3$  feltétel melletti összes nem kivételes megoldását (lásd az 5.1 Táblázatot).

□

Az (5.1) egyenlet  $\alpha = 0$  feltételnek megfelelő megoldásait \* jelöli.

5.1 Táblázat

$D$	$y$	$n$	$D$	$y$	$n$	$D$	$y$	$n$
$2^2$	5	3	$3^5 *$	7	3	$2^4 3^5 5^4$	601	3
$3^4 *$	13	3	$3^5 5^2 *$	19	3	$3^9 5^4 *$	679	3
$7^2 *$	65	3	$2^2 3^5$	13	3	$2^2 3^5 5^4 7^2$	709	3
$2^4 3^4$	193	3	$2^2 3^5 7^2$	37	3	$2^8 3^3 5^4 7^2$	849	3
$3^6 7^2 *$	585	3	$2^2 3^7 5^2$	61	3	$2^2 3^9 7^2$	757	3
$3^6 5^2 *$	2701	3	$2^4 3^5 5^2$	49	3	$2^2 3^7 5^2 7^4$	2221	3
$2^6 3^4 7^2$	37633	3	$3^5 5^2 *$	31	3	$2^6 3^5 7^4$	2353	3
2	3	3	$2^4 3^5 5^2 7^2$	169	3	$3^3 5^4 7^4 *$	2451	3
$2 \cdot 5^4$	11	3	$3^5 7^2 *$	43	3	$2^8 3^{11} 7^4$	4993	3
$2^3 5^2$	9	3	$2^2 3^5 5^2 7^2$	109	3	$3^9 5^2 7^4 *$	2671	3
$2 \cdot 3^4 5^2$	19	3	$3^7 7^2 *$	67	3	$2^{10} 3^5 5^2 7^4$	3361	3
$2^5 5^2$	41	3	$3^5 5^2 7^2 *$	79	3	$2^4 3^{11} 5^4 7^2$	5161	3
$2^7 5^6$	129	3	$2^6 3^7 7^2$	193	3	$2^{10} 3^7 7^2$	4033	3
$2^3 3^4$	97	3	$2^4 3^7$	73	3	$2^6 3^{11} 5^2$	6481	3
$2^3 3^4 5^4$	121	3	$3^7 5^2 *$	91	3	$3^9 5^6 7^4 *$	12979	3
$2 \cdot 3^6 5^2$	211	3	$2^8 3^9 5^2$	889	3	$3^7 5^6 7^2 *$	15751	3
$2^5 3^4 5^4$	409	3	$2^4 3^9 5^2 7^2$	1009	3	$2^{12} 3^5 5^6$	16009	3
$2^9 5^2$	681	3	$2^8 3^5 5^2 7^2$	1129	3	$2^{12} 3^9 5^2 7^2$	17329	3
$2^3 3^6 5^8$	1489	3	$2^2 3^7 5^2 7^2$	1261	3	$2^{10} 3^9 5^6 7^2$	27721	3
$2 \cdot 3^4 5^6 7^2$	1051	3	$2^4 3^7 5^2 7^4$	2041	3	$2^{14} 3^{11} 5^4 7^2$	51361	3
$2 \cdot 3^4 5^2 7^2$	1171	3	$3^7 5^2 7^2 *$	151	3	$2^8 3^7 5^4 7^2$	50401	3
$2 \cdot 3^8 5^6$	1819	3	$2^4 3^5 5^4 7^4$	1801	3	$3^{13} 5^2 7^4 *$	59539	3
$2^9 3^4 5^{12}$	21769	3	$3^5 5^2 7^2 *$	211	3	$3^{13} 5^6 7^2 *$	60799	3
$2^9 3^6 5^2$	6129	3	$2^6 3^5 5^2$	241	3	$2^2 3^{13} 5^4 7^6$	93349	3
$2^5 3^4 5^2$	9601	3	$2^6 3^7 5^4$	481	3	$2^8 3^5 5^6 7^6$	129649	3
$2^7 3^6 5^4$	13849	3	$2^6 3^5 5^2 7^2$	361	3	$2^{10} 3^7 5^8 7^4$	362401	3
$2^5 3^4 5^8 7^2$	19441	3	$3^7 5^4 7^2 *$	499	3	$2^{18} 3^5 5^2 7^6$	1053721	3
$2^3 3^6 5^4 7^2$	42361	3	$2^2 3^5 5^2 7^2$	421	3	$2^8 3^5 5^4 7^8$	5762401	3
$2 \cdot 3^6 5^{14} 7^4$	440491	3	$2^2 3^9 5^2 7^2$	589	3	$3^{17} 5^8 7^2 *$	19136251	3
$2^7 3^4 5^2 7^4$	92198401	3	$2^2 3^5 5^4 7^2$	541	3	$5 \cdot 7^2 *$	9	3

$D$	$y$	$n$	$D$	$y$	$n$	$D$	$y$	$n$
$2^{25} \cdot 7^2$	29	3	$2^4 3^6 7$	12097	3	$2^3 3^7 5$	169	3
$3^4 \cdot 5 *$	61	3	$2^2 3^8 5^6 7^3$	26341	3	$2^3 3^{11} 5$	241	3
$3^{45} \cdot 7^4 *$	109	3	$2^{25} 5^8 7^5$	89429	3	$2^5 3^7 5$	649	3
$2^{25} \cdot 7^6$	141	3	$2^4 5^{14} 7^3$	182441	3	$2 \cdot 3^{11} 5^3$	919	3
$2^{25} 3^7 7^2$	669	3	$2^8 3^6 5^{12} 7$	209161	3	$2^3 3^5 5$	1441	3
$2^4 3^4 5 \cdot 7^4$	1009	3	$2^{12} 3^4 5^4 7^3$	16859161	3	$2^7 3^{15} 5$	3289	3
$2^6 3^4 \cdot 5$	3841	3	$2 \cdot 5 \cdot 7^2$	11	3	$2 \cdot 3^7 5^5$	24991	3
$5^5 7^6 *$	4281	3	$2 \cdot 5^3 7^2$	331	3	$2^5 3^{11} 5 \cdot 7^2$	31441	3
$2^4 3^6 5 \cdot 7^4$	8689	3	$2^3 3^4 5$	481	3	$2^3 3^{23} 5 \cdot 7^2$	66889	3
$3^6 5^3 7^8 *$	15901	3	$2^3 3^4 5 \cdot 7^4$	529	3	$2^3 3^{15} 5^3 7^2$	196729	3
$2^8 3^4 5 \cdot 7^8$	17761	3	$2^5 3^4 5 \cdot 7^4$	1969	3	$2^9 3^7 5^3$	256009	3
$3^{85} \cdot 7^2 *$	238141	3	$2^3 3^6 5 \cdot 7^8$	6721	3	$2^4 3^4 5 \cdot 7$	6721	3
$2 \cdot 3^3$	7	3	$2^7 3^4 5^3 7^{12}$	309649	3	$2 \cdot 3^5 5^6 7$	379	3
$2^3 3^3 7^2$	25	3	$2^9 3^6 5 \cdot 7^4$	276529	3	$2 \cdot 3^5 5^2 7$	499	3
$2 \cdot 3^3 5^2 7^4$	151	3	$2^3 3^8 5^3 7^4$	972049	3	$2^5 3^3 5^4 7^3$	721	3
$2 \cdot 3^5 7^2$	79	3	$2^3 3^4 7$	673	3	$2^3 3^5 5^4 7$	2041	3
$2^5 3^3 7^2$	121	3	$2 \cdot 3^{10} 7^3$	122479	3	$2^7 3^3 5^8 7$	4209	3
$2 \cdot 3^3 5^2$	199	3	$2^3 3^{10} 5^4 7$	306180001	3	$2^3 3^5 5^{12} 7$	17641	3
$2 \cdot 3^5 7^6$	415	3	$3^3 5 *$	19	3	$2 \cdot 3^9 5^2 7$	40819	3
$2^3 3^5 7^4$	337	3	$2^6 3^7 5$	103681	3	$2^{11} 3^3 5^4 7^3$	57169	3
$2^7 3^3 7^2$	505	3	$3^5 7 *$	25	3	$2 \cdot 3^3 5^6 7^5$	134331	3
$2 \cdot 3^7 7^2$	655	3	$3^7 7 *$	37	3	$2 \cdot 3^7 5^{10} 7^3$	219139	3
$2^5 3^5$	1153	3	$2^2 3^9 7$	85	3	$2^7 3^5 5^2 7$	806401	3
$2^9 3^3 7^6$	1705	3	$2^2 3^5 7$	109	3	$2^3 3^4 5 \cdot 7$	3361	3
$2^3 3^5 5^2 7^4$	7249	3	$3^5 7 *$	253	3	$2^4 3^5 5 \cdot 7$	20161	3
$2^3 3^3 5^2 7^2$	39201	3	$2^4 3^{15} 7$	1177	3	$2^3 3^7 5 \cdot 7$	1129	3
$2^7 3^7 7^8$	43873	3	$2^4 3^7 7^3$	385	3	$2^3 3^{11} 5 \cdot 7$	1201	3
$2 \cdot 3^{11} 7^{10}$	69295	3	$2^4 3^7 7$	457	3	$2^5 3^{15} 5 \cdot 7$	5209	3
$2^{15} 3^3 7^2$	131065	3	$3^5 5^2 7^3 *$	721	3	$2^3 3^{23} 5^3 7$	87049	3
$5^2 7 *$	11	3	$3^{11} 5^2 7 *$	781	3	$2^7 3^7 5 \cdot 7$	17929	3
$2^2 5^4 7$	29	3	$2^6 3^{11} 7$	1873	3	$2^3 3^5 5^3 7$	252001	3
$2^2 7$	37	3	$2^2 3^5 7^3$	5485	3	$2^6 3^2$	5	4
$3^4 5^2 7 *$	79	3	$2^8 3^{11} 7^3$	6601	3	$7^2 *$	5	4
$5^{10} 7^3 *$	1499	3	$2^4 3^7 5^2 7$	11209	3	$2^6 3^2 5^2 7^2$	29	4
$3^6 5^6 7 *$	631	3	$2^8 3^5 7$	64513	3	$2^6 3^2 5^2$	13	4
$2^4 3^4 5^4 7$	1369	3	$2^2 3^9 5^4 7^3$	70189	3	$2^8 3^2 5^2$	17	4
$2^4 3^4 5^8 7$	1969	3	$2^4 3^{23} 5^2 7^3$	607849	3	$2^8 3^2 7^2$	25	4
$3^4 5^2 7^3 *$	4111	3	$2^{10} 3^{19} 5^2 7$	723361	3	$2^6 3^2 5^2 7^2$	37	4
$2^6 3^4 5^4 7$	5401	3	$3^3 5^4 7$	4800469	3	$2^6 3^4 5^2 7^2$	53	4
$2^{10} 5^2 7^3$	9569	3	$2 \cdot 3^7 5$	31	3	$2^8 3^4 5^2$	41	4

$D$	$y$	$n$
$2^{10}3^47^2$	65	4
$2^{10}3^25^27^2$	113	4
$2^{12}3^45^47^2$	337	4
$2^{10}3^25^47^4$	1201	4
$2^5$	3	4
$2^77^2$	9	4
$2^53^27^2$	11	4
$2^73^2$	17	4
$2^53^25^27^2$	43	4
$2^55^27^4$	51	4
$2^95^27^2$	57	4
$2^93^47^4$	113	4
$2^55^27^2$	99	4
$2^53$	5	4
$2^63$	7	4
$2^43^55^27^2$	49	4
$2^83 \cdot 7^2$	97	4
$2^43^35^47^2$	133	4
$2^45$	3	4
$2^43^25$	7	4
$2^65$	9	4
$5^37^2 *$	21	4
$2^43^25 \cdot 7^2$	47	4
$2^83^45$	161	4
$2^53 \cdot 5^2$	7	4
$2^73 \cdot 5^2$	11	4
$2^53^35^4$	29	4
$2^73 \cdot 5^2$	49	4
$2^93^35^2$	59	4
$2^73 \cdot 5^47^2$	73	4
$2^53^35^27^2$	103	4
$2^{11}3 \cdot 5^6$	131	4
$2^33^77^2$	175	4
$2^93 \cdot 5^27^4$	4801	4
$7 *$	2	4
$2^37$	3	4
$5^27 *$	4	4
$2^63^27$	11	4
$5^47^3 *$	22	4
$2^83^47$	23	4

$D$	$y$	$n$
$2^63^67$	29	4
$2^63^25^27$	53	4
$2^{10}3^27$	127	4
$2^63^{10}5^27^3$	443	4
$2^{12}3^85^27$	431	4
$2^53^25$	7	4
$2^53^45$	11	4
$2^93^65$	37	4
$2^73^25$	13	4
$2^53^25$	19	4
$2^73^45 \cdot 7^2$	89	4
$2^53^65^37^2$	223	4
$2^53^{10}5 \cdot 7^2$	247	4
$2^{11}3^25^3$	253	4
$2^33^27$	5	4
$2^55^27$	9	4
$2^33^47$	13	4
$2^77$	15	4
$2^95^47$	39	4
$2^33^27^3$	19	4
$2^53^25^27$	23	4
$2^33^87^5$	173	4
$2^53^25^67$	127	4
$2^73^45^47$	137	4
$2^93^25^27$	449	4
$3 \cdot 5 *$	2	4
$3^35 *$	4	4
$3 \cdot 5^3 *$	8	4
$2^63 \cdot 5 \cdot 7^2$	17	4
$2^83 \cdot 5$	31	4
$2^63^35 \cdot 7^2$	47	4
$3^75^3 *$	34	4
$2^43 \cdot 7$	5	4
$2^43 \cdot 5^27$	11	4
$2^43^35^27$	17	4
$2^63 \cdot 5^47$	31	4
$2^63 \cdot 5^27$	19	4
$2^43 \cdot 5^27$	23	4
$2^83 \cdot 5^27$	37	4
$2^63^37$	55	4

$D$	$y$	$n$
$2^{10}3^35^67$	721	4
$2^43^55^47^7$	293	4
$2^{14}3^52^73$	2053	4
$2^53 \cdot 5 \cdot 7^2$	13	4
$2^53 \cdot 5$	11	4
$2^73 \cdot 5 \cdot 7^2$	23	4
$2^53^35 \cdot 7^4$	59	4
$2^{11}3^35 \cdot 7^2$	263	4
$2^93 \cdot 5^37^6$	407	4
$2^53^55^37^2$	493	4
$2^63^25 \cdot 7$	71	4
$2^53 \cdot 7$	13	4
$2^53^75^47$	8749	4
$2^53^25 \cdot 7$	17	4
$2^53^45 \cdot 7$	19	4
$2^73^65 \cdot 7$	43	4
$2^93^25 \cdot 7$	67	4
$2^53^{10}5^37$	257	4
$2^53^25^37$	251	4
$2^63 \cdot 5 \cdot 7$	11	4
$2^83 \cdot 5 \cdot 7$	13	4
$2^{10}3 \cdot 5 \cdot 7$	19	4
$2^63^35 \cdot 7$	31	4
$2^63 \cdot 5 \cdot 7$	41	4
$2^{14}3^35 \cdot 7$	71	4
$2^{12}3^35^3 \cdot 7$	157	4
$2^{10}3 \cdot 5^37^3$	359	4
$2^{20}3 \cdot 5 \cdot 7^3$	517	4
$2^53 \cdot 5 \cdot 7$	29	4

## 6 ÖSSZEFOGLALÓ

Disszertációnk számos új effektív és numerikus eredményt tartalmaz szuperelliptikus egyenletekre vonatkozóan. Amint azt az egyes fejezetekben részletesen kifejtettük, eredményeink a korábbi idevágó eredmények általánosításai és egyben lényeges pontosításai, finomításai.

Értekezésünkben először egy általános effektív végességi állítást bizonyítunk a

$$(6.1) \quad f(x) = wy^n$$

alakú egyenletekre vonatkozóan, ahol  $w \neq 0$  adott egész,  $f \in \mathbf{Z}[X]$  adott  $m$ -ed fokú főpolinom legalább két különböző gyökkel és  $H(f)$  magassággal. Legyenek  $p_1, \dots, p_s$  különböző prímekek, legyen  $Q = p_1 \cdots p_s$ , és jelöljük  $S$ -sel azon egészek halmazát, melyek nem oszthatók  $p_1, \dots, p_s$ -től különböző prímszámmal. Tekintsük a (6.1) egyenletet abban az általánosabb esetben, amikor  $x, y, w, n$  valamennyien ismeretlen egészek az  $|y| > 1$ ,  $w \in S$ ,  $n \geq 2$  és  $D_f \in S$  tulajdonsággal. A 2.1 Tételünk - bizonyos (explicit módon leírt) kivételes esetektől eltekintve -  $n$ -re egy csupán  $m$ -től és  $Q$ -tól függő effektív felső korlátot szolgáltat. Tehát a korábbi eredményekkel ellentétben az általunk nyert korlát már  $D(f)$ -től sem függ, csupán  $Q(D_f)$ -től (és persze  $m$ -től és  $Q(w)$ -től). Itt az  $f$  paramétereitől való függés tovább már nem gyengíthető.

A 2.2 Tételünkben eredményünket kiterjesztjük az általánosabb,

$$(6.2) \quad F(x, z) = wy^n$$

alakú egyenletek esetére is, ahol  $F \in \mathbf{Z}[X, Z]$  binér forma,  $F(1, 0) = 1$ ,  $F(X, 1)$ -nek van legalább két különböző gyöke,  $D_F \in S$ ,  $x, z, w, y, n$  ismeretlenek az  $|y| > 1$ ,  $z \in S$ ,  $w \in S$ ,  $\text{luko}(x, z) = 1$ ,  $n \geq 2$  tulajdonsággal. Tételünk lényegesen finomítja, pontosítja Shorey, van der Poorten, Tijdeman és Schinzel [67] egy (6.2) -re vonatkozó klasszikus tételét, melyben az  $n$ -re nyert korlát  $Q(D_F)$  helyett az  $F$  magasságától függ.

A 2.1 és 2.2 Tételünk bizonyításában fontos szerepet játszik a binom Thue-Mahler egyenletekre vonatkozó, algebrai számtestek felett nyert 2.3 Tételünk. Az egyszerűség kedvéért itt csupán egy speciális esetben,  $\mathbf{Z}$  felett fogalmazzuk meg. Tekintsük a

$$(6.3) \quad ax^n - by^n = c$$

egyenletet, ahol  $a, b, c, x, y, n$  egész ismeretlenek,  $a, b, c \in S$ ,  $|xy| > 1$  és  $n \geq 3$ . Továbbá feltehető, hogy  $\text{lko}(ax^n, by^n, c) = 1$ . Megjegyezzük, hogy  $x = y = 1$  esetén (6.3) éppen egy  $S$ -egységegyenlet, míg rögzített  $a, b$  mellett (6.3) egy ismeretlen fokszámú binom Thue-Mahler egyenlet. Számos korábbi,  $S$ -egységegyenletekre illetve binom Thue-Mahler egyenletekre vonatkozó effektív végességi tétel közös általánosításaként egy csupán  $Q$ -tól függő effektív felső korlátot adunk  $n$ -re, amiből következik, hogy (6.3)-nak csak véges sok és effektíve meghatározható megoldása van.

A 3.fejezet 3.1 Tételében olyan explicit felső korlátot adunk a (6.1)-ben szereplő  $n$  kitevőre, mely  $w$ -tól, valamint  $m = \deg f$ -tól és  $H(f)$ -től függ. Eredményünk javítja és minden paraméter függvényében explicitté teszi a Bérczes, Brindza és Hajdutól [11] származó, eddig ismert legjobb felső korlátot. Ennek felhasználásával  $f(x) \neq wy^n$  esetén explicit alsó korlátot nyerünk  $|f(x) - wy^n|$ -re, ahol  $x, y, w, n$  egészek,  $w \neq 0$ ,  $|y| > 1$  és  $n \geq 3$ . Bizonyos természetes kivételektől eltekintve a 3.2 és 3.3 Tételünkben  $w, m$  és  $H(f)$ -től, valamint  $n$ -től illetve  $|f(x)|$ -től függő alsó korlátot vezetünk le a tekintett különbségre. Eredményeink általánosítják Bugeaud és Hajdunak [23] az  $f(x) = ax^m$  speciális esetben nyert becsléseit.

A 4.fejezetben a másodfokú  $f(X)$  főpolinomok eseteivel foglalkozunk. Ebben az esetben a (6.1) egyenletnek rendkívül kiterjedt irodalma van; a 4. fejezetben áttekintést adunk a korábbi eredményekről. A 4.1 Tételben,  $w = 2$  mellett az általános 2.1 Tételünk egy éles, explicit változatát adjuk  $w = 2$ -re és az

$$f(X) = X^2 + (p_1^{z_1} \dots p_s^{z_s})^2$$

alakú polinomok esetére, ahol  $p_1, \dots, p_s$  adott prímelek,  $z_1, \dots, z_s$  pedig ismeretlen nemnegatív egészek. Egyben általánosítjuk a szerző és Tengely [63], [70] korábbi idevágó eredményeit. Bizonyos kivételes egyenlet családtól eltekintve a 4.2 Tételünkben az  $f(X) = X^2 + AX + B$ ,  $w = 1$ , a 4.3 Tételünkben az  $f(X) = X^2 + D$ ,  $w \in \{1, 4\}$  esetben nyerünk éles korlátokat a (6.1)-ben szereplő  $n$  kitevőre.

Az 5.fejezetben a (6.1) egyenletet abban az esetben vizsgáljuk, amikor  $w = 1$  és

$$f(X) = X^2 + 2^{z_1} 3^{z_2} 5^{z_3} 7^{z_4},$$

ahol  $z_1, z_2, z_3, z_4$  nemnegatív egész ismeretlenek. A 4.3 Tételünket Cohn és de Weger bizonyos eredményeivel kombinálva, az 5.1 Tételben a tekintett  $f$  és  $w$  mellett a (6.1) egyenlet összes olyan  $x, y, n, z_1, z_2, z_3, z_4$  megoldását meghatározzuk, melyekben  $z_1 \geq 1$ . Ezzel általánosítjuk Luca [49] egy újabb eredményét, mely a  $z_3 = z_4 = 0$  esetre vonatkozik.

Végül megjegyezzük, hogy a disszertáció eredményei a [37], [60], [61], [62] dolgozatokban lettek publikálva.

## 7 SUMMARY

The polynomial equations in two unknowns and exponential equations play a central role in the theory of diophantine equations. The so-called superelliptic equations constitute a very important class of equations from the point of view of applications. These equations are of the form

$$(7.1) \quad f(x) = wy^n,$$

where  $f(X)$  is a polynomial with integral coefficients,  $w \neq 0$  and  $n \geq 2$  are given integers and  $x, y$  are unknown integers. After the results of Mordell, Siegel and others, in 1964 LeVeque gave a finiteness criteria for the number of solutions of equation (7.1). This result is ineffective in the sense that the proof does not provide any algorithm to compute the solutions. In 1969 A. Baker was the first to give an effective upper bound for the size of the solutions of (7.1) in the case when the polynomial  $f$  has at least three simple roots. Later, this result was generalized by Brindza, who also gave an effective version of LeVeque's result. The proofs of the above effective results involve the deep method of Baker, which provides effective estimates for the linear combination of the logarithms of algebraic numbers.

In 1976 Schinzel and Tijdeman [65] considered equation (7.1) in a more general situation, namely in the case, when in (7.1) the exponent  $n$  is also unknown. Then equation (7.1) is an exponential-polynomial equation in three unknowns. If  $f$  does not have two distinct roots then equation (7.1) can have a solution with  $n$  arbitrary large. If  $f(X)$  has at least two distinct roots, Schinzel and Tijdeman gave an upper bound for  $n$ , which depends only on  $f$  and  $w$ . Their proof is based on Baker's method. Later, equation (7.1) was also studied by Shorey, van der Poorten, Brindza, Evertse, Győry, Turk, Bugeaud, Bérczes, Hajdu, Pintér and Haristoy. For the exponent  $n$  several upper bounds were obtained. These bounds depend only on  $w$ , the degree of  $f$ , and either on the height or on the discriminant of  $f$ . The results were extended to the case when in equation (7.1) a binary form  $f(x, z)$  was considered instead of  $f$  and where  $z$  is also an unknown integer. Another extension of the above results is the case, when in (7.1) the coefficients of  $f$ ,  $w$  and the unknowns  $x, y$  belong to an integral domain which is finitely generated over  $\mathbf{Z}$ .

One of the main purposes of the present dissertation is to clarify that, in the bounds obtained for  $n$  to which extent can we weaken the dependence on

the parameters of the polynomial  $f$ . In Chapter 2 we show that if  $f$  is monic, then apart from some natural exceptions, one can give an effective upper bound for  $n$  which depends only on the degree of  $f$ , on  $Q(w)$  and on  $Q(D_f)$ . Here  $D_f$  denotes the discriminant of the maximal square free divisor in  $\mathbf{Z}[X]$  of  $f$ , and for an integer  $a \neq 0$ ,  $Q(a)$  denotes the product of the distinct prime factors of  $a$  (called sometimes the radical of  $a$ ). Our result is definitive in the sense that the dependence of each parameter is separately necessary, we cannot get rid of any of these parameters. The proof is based among others on an effective finiteness theorem concerning binomial Thue-Mahler equations. In Chapters 3 and 4 we obtain in (7.1) upper bounds for  $n$ , depending only on the degree of  $f$ , the height of  $f$  and on  $w$ , respectively. These results are much sharper than the bounds in the earlier results. By using the above results, we obtain explicit lower bound for the difference  $|f(x) - wy^n|$ , which depends only on  $w, n, \deg f$  and  $H(f)$ , provided that  $f(x) \neq wy^n$ . Finally, in Chapter 5 we give all solutions of equation (7.1) in the case when  $f$  is a quadratic polynomial of special form. In our proofs we use among others the newest and sharpest versions of Baker's method.

In what follows, we give a brief outline of our main results chapter by chapter. For simplicity, here we present our results only in some important special cases.

## II

Consider equation (7.1), where  $f(x) \in \mathbf{Z}[X]$  is a polynomial with  $\deg f = m$  and with at least two distinct zeros. Further, denote by  $H(f)$  the height of  $f$ , that is the maximum of the absolute values of the coefficients of  $f$ . If all zeros of  $f$  are distinct then  $D_f$  is exactly the discriminant  $D(f)$  of the polynomial  $f$ . We note that  $H(f)$  can be arbitrary large compared to  $|D_f|$  and  $|D(f)|$ .

As we mentioned, Schinzel and Tijdeman, and later several others gave effective upper bounds in (7.1) for the exponent  $n$  which depend only on  $w, m$  and  $H(f)$ . In the case when in (7.1)  $f$  is irreducible and  $w = 1$ , Brindza, Evertse and Györy [14] derived an upper bound for the exponent  $n$  depending only on  $m$  and  $D(f)$ , but not on  $H(f)$ . This result has been recently extended by Haristoy [39] to the case when  $f$  is reducible.

In Chapter 2 we improve and refine considerably the results of [14] and [39]. Let  $p_1, \dots, p_s$  be distinct primes, and let  $Q = p_1 \cdots p_s$ . Denote by  $S$  the set of those rational integers which are not divisible by primes different from  $p_1, \dots, p_s$ . We consider equation (7.1) in the case when  $x, y, w, n$  are integer unknowns with  $|y| > 1, w \in S, n \geq 2$  and  $D_f \in S$ . Apart from certain exceptional cases, which are explicitly described, our Theorem 2.1 provides an effective upper bound for

$n$  which depends only on  $m$  and  $Q$ . Thus, in contrast with the earlier results, our bound does not depend on  $D(f)$ , but only on  $Q(D_f)$ ,  $m$  and  $Q(w)$ . Here the dependence of the bound on the parameters of  $f$  cannot be weakened anymore.

In Theorem 2.2 we extend our result to the more general equation

$$(7.2) \quad F(x, z) = wy^n,$$

where  $F \in \mathbf{Z}[X, Z]$  is a binary form such that  $F(1, 0) = 1$ ,  $F(X, 1)$  has at least two distinct zeros and  $D_F \in S$ . Further,  $x, z, w, y, n$  are unknowns with  $|y| > 1, z \in S, w \in S, \gcd(x, z) = 1$  and  $n \geq 2$ . This theorem is a refinement of the classical result of Shorey, van der Poorten, Tijdeman and Schinzel [67] concerning equation (7.2), where the upper bound for  $n$  depends on the height of  $F$  instead of  $Q(D_F)$ .

Our Theorem 2.3 is concerned with binomial Thue-Mahler equations considered over number fields. It plays an important role in the proofs of Theorems 2.1 and 2.2. For simplicity, we present here this theorem only in a special case, namely over  $\mathbf{Z}$ . Consider the equation

$$(7.3) \quad ax^n - by^n = c,$$

where  $a, b, c, x, y, n$  are integer unknowns such that  $a, b, c \in S, |xy| > 1$  and  $n \geq 3$ . Further, we may assume that  $\gcd(ax^n, by^n, c) = 1$ . We note that if  $x = y = 1$  then equation (7.3) is just an  $S$ -unit equation, while if  $a, b$  are fixed then (7.3) is a Thue-Mahler equation with unknown exponent  $n$ . As a common generalization of several earlier effective finiteness results concerning  $S$ -unit equations and Thue-Mahler equations, we give an upper bound for  $n$  in (7.3) which depends only on  $Q$ . This implies that equation (7.3) has only finitely many, effectively computable solutions.

The results of this chapter were published in [37].

### III

In Theorem 3.1 of Chapter 3, we give an explicit upper bound for  $n$  in equation (7.1), which depends only on  $w, m = \deg f$  and  $H(f)$ . This result improves and makes explicit in each parameter the previously best known bound due to Bérczes, Brindza and Hajdu [11]. By using the above result, we establish an explicit lower bound for the difference  $|f(x) - wy^n|$  in the case when  $f(x) \neq wy^n$ . Here  $w \neq 0$  is a given integer, and  $x, y, n$  are unknown integers with  $|y| > 1$  and  $n \geq 3$ . Apart from some natural exceptions, in our Theorems 3.2 and 3.3 we provide lower bounds for the differences under consideration, depending only

on  $w, m, H(f)$ , and  $n, |f(x)|$ , respectively. Our theorems generalize the results of Bugeaud and Hajdu [23] concerning the special case  $f(x) = ax^m$ .

The results of Chapter 3 have appeared in [60].

#### IV

Chapter 4 is concerned with equation (7.1) in the special case when  $f(X)$  is a quadratic monic polynomial. There is a very extensive literature in this special situation; the previous results will be presented in Chapter 4.

In Theorem 4.1 we obtain a sharp, explicit version of our more general Theorem 2.1 in the case when  $w = 2$  and

$$f(X) = X^2 + (p_1^{z_1} \cdots p_s^{z_s})^2,$$

where  $p_1, \dots, p_s$  are given primes and  $z_1, \dots, z_s$  are unknown non-negative integers. This theorem generalizes the previous results of the author and Tengely [63] and the results of [70]. In Theorem 4.2 and 4.3 we obtain sharp explicit upper bounds for the exponent  $n$  in (7.1) when  $f(X) = X^2 + AX + B, w = 1$  and  $f(X) = X^2 + D, w \in \{1, 4\}$ , respectively.

The results of Chapter 4 have been published in [61] and [62].

#### V

In Chapter 5 we deal with equation (7.1) in the case when  $w = 1$  and

$$f(X) = X^2 + 2^{z_1} 3^{z_2} 5^{z_3} 7^{z_4},$$

where  $z_1, z_2, z_3, z_4$  are unknown non-negative integers. By combining Theorem 4.3 with some results of Cohn [31] and de Weger [74], in our Theorem 5.1 we solve completely equation (7.1) in the case when  $x, y, n, z_1, z_2, z_3, z_4$  are integer unknowns satisfying  $z_1 \geq 1, |y| \geq 2, n \geq 3$  and  $\gcd(x, y) = 1$ . Our Theorem 5.1 generalizes the result of Luca [49] concerning the case  $z_3 = z_4 = 0$ .

The results of this chapter were published in [62].

We note that the results of the chapters were published in separate papers. In the present dissertation we adapt the organization of the original papers, hence sometimes it happens that in different chapters different versions of our lemmas are utilized.

## IRODALOMJEGYZÉK

- [1] S.A. Arif and F.S.A. Muriefah, *On the Diophantine equation  $x^2 + 2^k = y^n$* , Internat. J. Math. Math. Sci. **20** (1997), 299–304.
- [2] S.A. Arif and F.S.A. Muriefah, *On a Diophantine equation*, Bull. Austral. Math. Soc. **57** (1998), 189–198.
- [3] S.A. Arif and F.S.A. Muriefah, *The Diophantine equation  $x^2 + 3^m = y^n$* , Internat. J. Math. Math. Sci. **21** (1998), 619–620.
- [4] S.A. Arif and F.S.A. Muriefah, *The Diophantine equation  $x^2 + 5^{2k+1} = y^n$* , Indian J. Pure Appl. Math. **30** (1999), 229–231.
- [5] S.A. Arif and F.S.A. Muriefah, *The Diophantine equation  $x^2 + q^{2k} = y^n$* , Arab. J. Sci. Eng. Sect. A Sci. **26** (2001), 53–62.
- [6] S.A. Arif and F.S.A. Muriefah, *On the Diophantine equation  $x^2 + 2^k = y^n$  II*, Arab J. Math. Sci. **7** (2001), 67–71.
- [7] S.A. Arif and F.S.A. Muriefah, *On the Diophantine equation  $x^2 + q^{2k+1} = y^n$* , J. Number Theory **95** (2002), 95–100.
- [8] A. Baker and G. Wüstholz, *Logarithmic forms and group varieties*, J. Reine Angew. Math. **442** (1993), 19–62.
- [9] M. Bauer and M.A. Bennett, *Applications of the hypergeometric method to the generalized Ramanujan-Nagell equation*, Ramanujan J. **6** (2002), 209–270.
- [10] M.A. Bennett and C.M. Skinner, *Ternary diophantine equations via Galois representations and modular forms*, Canad. J. Math. **56**/1 (2004) 23–54.
- [11] A. Bérczes, B. Brindza and L. Hajdu, *On power values of polynomials*, Publ. Math. Debrecen **53** (1998), 375–381.
- [12] Y. Bilu, G. Hanrot and P.M. Voutier, *Existence of primitive divisors of Lucas and Lehmer numbers. With an appendix by M. Mignotte.*, J. Reine Angew. Math. **539** (2001), 75–122.
- [13] B. Brindza, *Zeros of polynomials and exponential Diophantine equations*, Compositio Math. **61** (1987), 135–157.
- [14] B. Brindza, J.-H. Evertse and K. Győry, *Bounds for the solutions of some diophantine equations in terms of discriminants*, J. Austral Math. Soc. **51** (1991), 8–26.
- [15] B. Brindza, K. Győry and R. Tijdeman, *The Fermat equation with polynomial values as base variables*, Invent. Math. **80** (1985), 139–151.
- [16] Y. Bugeaud, *Sur la distance entre deux puissances pures*, C. R. Acad. Sci. Paris, **322** (1996), 1119–1121.

- [17] Y. Bugeaud, *On the diophantine equation  $x^2 - p^m = \pm y^n$* , Acta Arith. **80** (1997), 213–223.
- [18] Y. Bugeaud, *Bornes effectives pour les solutions des equations en  $S$ -unités et des equations de Thue-Mahler*, J. Number Theory **71**(1998), 227–244.
- [19] Y. Bugeaud, *On the greatest prime factor of  $ax^m + by^n$* , Number Theory: Diophantine, Computational and Algebraic Aspects (K. Győry, A. Pethő and V. T. Sós eds.), Walter de Gruyter (Berlin-New York) (1998), 115–122.
- [20] Y. Bugeaud and K. Győry, *Bounds for the solutions of unit equations*, Acta Arith. **74** (1996), 67–80.
- [21] Y. Bugeaud and K. Győry, *Bounds for the solutions of Thue-Mahler equations and norm form equations*, Acta Arith. **74** (1996), 273–292.
- [22] Y. Bugeaud and K. Győry, *On binomial Thue-Mahler equations*, Periodica Math. Hungar. **49** (2004), 25–34.
- [23] Y. Bugeaud and L. Hajdu, *Lower bounds for the difference  $|ax^n - by^m|$* , Acta Math. Hungar. **87** (2000), 279–286.
- [24] Y. Bugeaud and T.N. Shorey, *On the number of solutions of the generalized Ramanujan-Nagell equation*, J. reine angew. Math. **539** (2001), 55–74.
- [25] Y. Bugeaud and M. Laurent, *Minoration effective de la distance  $p$ -adique entre puissances de nombres algébriques*, J. Number Theory **61** (1996), 311–342.
- [26] Y. Bugeaud, M. Mignotte and S. Siksek, *Classical and modular approaches to exponential and diophantine equations II. The Lebesgue-Nagell equation*, Preprint.
- [27] H. Cohen, *A Course in Computational Number Theory*, Graduate Text in Mathematics **138**, Springer Verlag, Berlin-Heidelberg 1993.
- [28] J.H.E. Cohn, *The diophantine equation  $x^2 + 2^k = y^n$* , Arch. Math (Basel) **59** (1992), 341–344.
- [29] J.H.E. Cohn, *The diophantine equation  $x^2 + C = y^n$* , Acta Arith. **65** (1993), 367–381.
- [30] J.H.E. Cohn, *The Diophantine equation  $x^2 + 2^k = y^n$  II.*, Int. J. Math. Math. Sci. **22** (1999), 459–462.
- [31] J.H.E. Cohn, *The diophantine equation  $x^2 + C = y^n$* , Acta Arith. **109** (2003), 205–206.
- [32] E. Friedman, *Analytic formulas for regulators of number fields*, Invent. Math. **98** (1989), 599–622.
- [33] K. Győry, *Sur les polynômes à coefficients entiers et de discriminant donné II*, Publ. Math. Debrecen **21** (1974), 125–144.

- [34] K. Györy, *On discriminants and indices of integers of an algebraic number field*, J. Reine Angew. Math. **324** (1981), 114-126.
- [35] K. Györy, *Bounds for the solution of decomposable form equations*, Publ. Math. Debrecen **52** (1998), 1-31.
- [36] K. Györy, *Polynomials and binary forms with given discriminant*, (to appear).
- [37] K. Györy, I. Pink and Á. Pintér, *Power values of polynomials and binomial Thue-Mahler equations*, Publ. Math. Debrecen **65** (2004), 341-362.
- [38] K. Györy and Kunrui Yu, *Bounds for the solutions of  $S$ -unit equations and decomposable form equations*, Acta. Arith. (to appear).
- [39] J. Haristoy, *Équations diophantiennes exponentielles*, Thèse de docteur, Strasbourg, (2003).
- [40] Chao Ko, *On the diophantine equation  $x^2 = y^n + 1, xy \neq 0$* , Sci. Sinica **14** (1965), 457-460.
- [41] V.A. Lebesgue, *Sur l'impossibilité en nombres entiers de l'équation  $x^m = y^2 + 1$* , Nouvelle Annales des Mathématiques (1) **9** (1850), 178-181.
- [42] H.W. Lenstra, Jr., *Algorithms in algebraic number theory*, Bull. Amer. Math. Soc. **26** (1992), 211-244.
- [43] W. Ljunggren, *Über die Gleichungen  $1 + Dx^2 = 2y^n$  und  $1 + Dx^2 = 4y^n$* , Norske Vid. Selsk. Forh., Trondhjem **15** (1942), 115-118.
- [44] W. Ljunggren *On a diophantine equation*, Kong. Norske Videnskabers Selskab Forhandl. v. 18, Nr. 32 Trondheim (1945), 125-128.
- [45] W. Ljunggren *New theorems concerning the diophantine equation  $Cx^2 + D = y^n$* , Kong. Norske Videnskabers Selskab Forhandl. v. 29, Nr. 1 Trondheim (1956), 1-4.
- [46] W. Ljunggren, *On the diophantine equation  $Cx^2 + D = y^n$* , Pacific J. Math. **14** (1964), 585-596.
- [47] W. Ljunggren, *On the diophantine equation  $Cx^2 + D = y^n$* , Math. Scand. **18** (1966), 69-86.
- [48] F. Luca, *On a diophantine equation*, Bull. Austral. Math. Soc. **61** (2000), 241-246.
- [49] F. Luca, *On the equation  $x^2 + 2^a 3^b = y^n$* , Int. J. Math. Sci. **29** (2002), 239-244.
- [50] K. Mahler, *An inequality for the discriminant of a polynomial* Michigan Math. J. **11** (1964), 257-262.
- [51] E. M. Matveev, *An explicit lower bound for a homogeneous rational linear form in the logarithms of algebraic numbers II.*, Izvestiya: Mathematics **64** (2000), 1217-1269.

- [52] M. Mignotte, *On the Diophantine equation  $D_1x^2 + D_2^m = 4y^n$* , Portugal. Math. **54** (1997), 457–460.
- [53] M. Mignotte and B.M.M de Weger, *On the equations  $x^2 + 74 = y^5$  and  $x^2 + 86 = y^5$* , Glasgow Math. J. **38**/1 (1996), 77–85.
- [54] R.A. Mollin, *Quadratics*, CRC Press, New York (1996).
- [55] F.S.A. Muriefah, *On the Diophantine equation  $px^2 + 3^n = y^p$* , Tamkang J. Math. **31** (2000), 79–84.
- [56] F.S.A. Muriefah, *On the Diophantine equation  $Ax^2 + 2^{2m} = y^n$* , Int. J. Math. Math. Sci. **25** (2001), 373–381.
- [57] T. Nagell, *Verallgemeinerung eines Fermatschen Satzes*, Arch. Math. **5** (1954), 153–159.
- [58] T. Nagell *On the diophantine equation  $x^2 + 8D = y^n$* , Arkiv för Mat., v. 3, nr. 6, Stockholm (1955), 103–112.
- [59] T. Nagell *Contributions to the theory of a category of diophantine equations of the second degree with two unknowns*, Nova Acta Reg. Soc. Upsal. IV Ser. 16, Uppsala 1955, pp. 1–38.
- [60] I. Pink, *On the differences between polynomial values and perfect powers*, Publ. Math. Debrecen **63** (2003), 461–472.
- [61] I. Pink, *On the diophantine equation  $x^2 + (p_1^{z_1} \dots p_s^{z_s})^2 = 2y^n$* , Publ. Math. Debrecen **65** (2004), 205–213.
- [62] I. Pink, *On the diophantine equation  $x^2 + 2^\alpha 3^\beta 5^\gamma 7^\delta = y^n$* , Publ. Math. Debrecen, (to appear).
- [63] I. Pink and Sz. Tengely, *Full powers in arithmetic progressions*, Publ. Math. Debrecen **57** (2000), 535–545.
- [64] J.B. Rosser and L. Schoenfeld, *Approximate formulas for some functions of prime numbers*, Illinois J. Math. **6** (1962), 64–94.
- [65] A. Schinzel and R. Tijdeman, *On the equation  $y^m = P(x)$* , Acta Arith. **31** (1976), 199–204.
- [66] T. N. Shorey, *On the greatest prime factor of  $ax^n + by^m$*  Acta Arith. **36** (1980), 21–25.
- [67] T.N. Shorey, A.J. van der Poorten, R. Tijdeman and A. Schinzel, *Applications of the Gel'fond-Baker method to Diophantine equations*, in: Transcendence Theory: Advances and Applications, Academic Press, London-New York, San Francisco, (1977), 59–77.
- [68] T.N. Shorey and R. Tijdeman, *Exponential Diophantine Equations*, Cambridge University Press, Cambridge (1986).

- 
- [69] B.Sury, *On the Diophantine equation  $x^2 + 2 = y^n$* , Arch.Math.(Basel) **74** (2000), 350-355.
- [70] Sz. Tengely, *On the Diophantine equation  $x^2 + a^2 = 2y^p$* , Indag. Math. (N.S.) **15** (2004), 291-304.
- [71] R. Tijdeman, *Applications of the Gelfond-Baker method to rational number theory*, Colloq. Math. Soc. János Bolyai **13** (1974), 399-416.
- [72] J. Turk, *On the difference between perfect powers*, Acta Arith. **45** (1986), 289-307.
- [73] M. Waldschmidt, *Diophantine approximation on linear algebraic groups*, Springer, (2000).
- [74] B.M.M de Weger, *Algorithms for diophantine equations*, **65** of *CWI Tract*, Stichting Mathematisch Centrum voor Wiskunde en Informatica, Amsterdam, 1989.
- [75] Kunrui Yu, *Linear forms in  $p$ -adic logarithms*, Acta Arith. **53** (1989), 107-186.
- [76] Kunrui Yu,  *$p$ -adic logarithmic forms and group varieties III*, (to appear).
- [77] Kunrui Yu and Ling-kei Hung, *On binary recurrence sequences*, Indag. Math. **6** (1995), 341-354.
- [78] K. Zsigmondy, *Zur Theorie der Potenzreste*, Monatsh. Math. **3** (1892), 265-284.

## A Függelék - A szerző publikációs listája

1. I. Pink and Sz. Tengely, *Full powers in arithmetic progressions*, Publ. Math. Debrecen **57** / 3-4, (2000), 535-545.
2. I. Pink, *On the differences between polynomial values and perfect powers*, Publ. Math. Debrecen **63** /3, (2003), 461-472.
3. I. Pink *On the diophantine equation  $x^2 + (p_1^{z_1} \cdots p_s^{z_s})^2 = 2y^n$* , Publ. Math. Debrecen **65** /1-2, (2004), 205-213.
4. K. Győry, I. Pink and Á. Pintér *Power values of polynomials and binomial Thue-Mahler equations*, Publ. Math. Debrecen **65** / 3-4, (2004), 341-362.
5. I. Pink *On the diophantine equation  $x^2 + 2^\alpha 3^\beta 5^\gamma 7^\delta = y^n$* , Publ. Math. Debrecen, közlésre elfogadva.



## B Függelék - A szerző tudományos előadásainak listája

1. On the difference  $|F(x) - by^m|$ , 15th Czech and Slovak International Conference on Number Theory, Ostravice, September 3-8, 2001.
2. On the differences between polynomial values and perfect powers, Explicit Algebraic Number Theory: NWO-OTKA workshop, Leiden, September 27-October 2, 2002.
3. Polinomok és teljes hatványok távolságáról, Kiss Péter, az egri és debreceni számelméletész. Számelméleti tudományos emlékülés, Eger 2002. november 22-23.
4. Teljes hatványok és binom Thue-Mahler egyenletek, Soproni Diofantikus Nap, Sopron 2004. október 9.
5. Az  $x^2 + 2^\alpha 3^\beta 5^\gamma 7^\delta = y^n$  diofantikus egyenletről, Nyíregyházi Diofantikus Napok, Nyíregyháza 2005. április 29 - május 1.
6. On the diophantine equation  $x^2 + 2^\alpha 3^\beta 5^\gamma 7^\delta = y^n$ , 17th Czech and Slovak International Conference on Number Theory, Malenovice, September 3-8, 2005.



**EFFEKTÍV EREDMÉNYEK A SZUPERELLIPTIKUS  
EGYENLETEK ELMÉLETÉBEN**

Értekezés a doktori (PhD) fokozat megszerzése érdekében  
a matematika tudományágban.

Írta: Pink István okleveles matematikus.

Készült a Debreceni Egyetem Matematika- és Számítástudományok Doktori Iskola  
Diofantikus és konstruktív számelmélet programja keretében.

Témavezető: Dr. Gyóry Kálmán

A doktori szigorlati bizottság:

elnök: Dr. ....  
tagok: Dr. ....  
Dr. ....

Az értekezés bírálói:

Dr. ....  
Dr. ....  
Dr. ....

A bírálóbizottság:

elnök: Dr. ....  
tagok: Dr. ....  
Dr. ....  
Dr. ....  
Dr. ....

Az értekezés védésének időpontja: 200... ..