Number expansions over imaginary quadratic Euclidean domains

Synopsis of PhD thesis

Péter Varga

Supervisor: Dr. Attila Pethő

University of Debrecen

Science and Informatics Doctoral Council

Doctoral School of Informatics

Debrecen, 2017.

Számbővítések imaginárius másodfokú Euklideszi gyűrűk felett

Egyetemi doktori (PhD) értekezés tézisei

Varga Péter

Témavezető: Dr. Pethő Attila

Debreceni Egyetem

Természettudományi és Informatikai Doktori Tanács

Informatikai Tudományok Doktori Iskola

Debrecen, 2017.

Contents / Tartalomjegyzék

Chapter 1

Introduction, background and motivation

V. Grünwald [14] introduced the radix representation with respect to negative bases in 1885 on the following way. Let $g \leq -2$ be an integer. Then every $n \in \mathbb{Z}$ can be represented in the form

$$\sum_{i=0}^{l} n_i g^i, 0 \leq n_i < |g|. \tag{1.1}$$

He investigated how to perform the four basic operations in such number systems. In this concept there is no distinguish between positive and negative elements, thus it allows far reaching generalizations. It's started by D. E. Knuth [20] in 1960. His number system is known as quarter-imaginary numeral system which uses $2i$ as its base and $0, 1, 2, 3$ as its digits. All of the Gaussian integers $a + bi$ $(a, b \in \mathbb{Z})$ can be represented in this number system. Another similar number system was analyzed by W. Penney [22] in 1965. He used the number $-1+i$ as basis and $0, 1$ as digits. I. Kátai and J. Szabó [18] in 1975 generalized W. Penney's result. They proved that the only numbers which are suitable bases for all Gaussian integers, using $0, 1, \ldots, N-1$ as digits, are $-n \pm i$, where n is a positive integer and $N = n^2 + 1$, the norm of $-n \pm i$. W. J. Gilbert [13] in 1981 generalized I. Kátai and J. Szabó's result to find all the bases for quadratic number fields using $0, 1, \ldots, N-1$ as digits.

Canonical number systems

CNS has been defined by Attila Pethő [25] in 1991 as follows. Let $P(x) = x^{n+1} + p_n x^n + p_{n-1}x^{n-1} + \cdots + p_0 \in \mathbb{Z}[x]$ and $D = \{0, 1, \ldots, |p_0| - 1\}$. The polynomial $P(x)$ is called CNS polynomial if for every $0 \neq A(x) \in \mathbb{Z}[x]$ there exist $h \geq 0$ and $a_0, \ldots, a_h \in D$ such that

$$A(x) \equiv a_h x^h + a_{h-1}x^{h-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \pmod{P(x)}. \tag{1.2}$$

If $P(x)$ is irreducible one gets the concept of canonical number systems in algebraic number fields, which was introduced and studied by I. Kátai and J. Szabó (see [18]). This result was generalized to quadratic integers by I. Kátai and B. Kovács [16], [17], [21] and independently in W. J. Gilbert [13]. The characterization of CNS polynomials is complicated already for degree three, as indicated in [2]. It is still unsolved.

Brunotte's algorithm for CNS

By changing appropriately the bases $1, x, \ldots, x^{n-1}$ of the $\mathbb{Q}$-vector space of polynomials of degree at most $n-1$, H. Brunotte [4] found a very efficient algorithm for the decision of the CNS property. He used it in [7] for the characterization all CNS whose bases are roots of trinomials.

Semi-CNS

P. Burcsi and A. Kovács [9] called $P(x)$ a *semi-CNS polynomial* if the finite expansions (1.2) form an additive semigroup. This is a generalization of the usual radix representations of natural numbers. They were able to prove some sufficient properties for $P(x)$ being a semi-CNS polynomial. Moreover they generalized Brunotte's algorithm for semi-CNS polynomials. I have conducted an enquiry into cubic semi-CNS polynomials (see [31]), I was able to fully characterize them. H. Brunotte generalized this result for semi-CNS polynomials with any degree in [7].

Symmetric-CNS

An interesting alternative concept of CNS polynomials are symmetric-CNS polynomials, where the digit set is balanced on the way that it contains negative and positive elements as well. Let $P(x) \in \mathbb{Z}[x]$ with $P(0) = p_0$ and $I = \left[-\left\lfloor \frac{|p_0|-1}{2} \right\rfloor, |p_0| - 1 - \left\lfloor \frac{|p_0|-1}{2} \right\rfloor\right] \cap \mathbb{Z}$. S. Akiyama and K. Scheicher [3] called $P(x)$ symmetric-CNS if for any $A(x) \in \mathbb{Z}[x]$ there exists $a(x) \in I[x]$ such that $A(x) \equiv a(x) \pmod{P}$. This concept can also generalized to symmetric SRSes. This topic has been studied by H. Brunotte [5], [6], and by A. Huszti, K. Scheicher, P. Surer and J. M. Thuswaldner [15].

Norm-Euclidean domains

Let $\mathbb{E}$ be an integral domain. The function $N : \mathbb{E} \mapsto \mathbb{N}$ with the following properties:

1. $N(a) = 0$ for an $a \in \mathbb{E}$, if and only if $a = 0$,
2. if $a \in \mathbb{E}$ and $b \in \mathbb{E} \setminus \{0\}$, then there are $q, r \in \mathbb{E}$ such that $a = bq + r$ and $N(r) < N(b)$

is called *Euclidean function.* The integral domain $\mathbb{E}$ is called *Euclidean domain* if it is endowed with a Euclidean function. The Euclidean domain $\mathbb{E}$ is called *norm-Euclidean* if its Euclidean function is derived from the corresponding field's absolute value function. It was proved by L. E. Dickson [11] and O. Perron [23], see also H. Davenport [10] and H. L. Keng [19] (Theorem 15.3), that the ring of integers of an imaginary quadratic number field $\mathbb{Q}[\sqrt{-d}]$ is Euclidean (norm-Euclidean) if and only if $d \in \{1, 2, 3, 7, 11\}$. These will be called *imaginary quadratic Euclidean domains* and will be denoted by $\mathbb{E}_d$.

Shift radix systems

The concept *shift radix system* (SRS) was introduced by S. Akiyama, T. Borbély, H. Brunotte, A. Pethő and J. M. Thuswaldner [1] in 2005 for real numbers as follows. For $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^n$ the mapping $\tau_{\mathbf{r}} : \mathbb{Z}^n \mapsto \mathbb{Z}^n$, defined as

$$\tau_{\mathbf{r}}((a_1, \dots, a_n)) = (a_2, \dots, a_n, -\lfloor \mathbf{ra} \rfloor),$$

where $\mathbf{ra}$ denotes the inner product, is called SRS. In [1] it is also proved that SRS is a common generalization of canonical number systems (CNS) and the β-expansions, defined by A. Rényi [28].

Generalizing SRS, H. Brunotte, P. Kirschenhofer and J. Thuswaldner [8] defined Gaussian shift radix systems (GSRS) for Hermitian vector spaces as follows. Let $r \in \mathbb{C}^n$ be given ($n \in \mathcal{N}$). Let the mapping $\gamma_r : \mathbb{Z}[i]^d \to \mathbb{Z}[i]^d$ be defined by

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto (x_2, x_3, \dots, x_n, -\lfloor rx \rfloor), \tag{1.3}$$

where rx is the inner product of r and x, and $\lfloor z \rfloor := \lfloor Re(z) \rfloor + i \lfloor Im(z) \rfloor, z \in \mathbb{C}$.

The SRS $\tau_{\mathbf{r}}$ is said to have the finiteness property if and only if for all $\mathbf{a} \in \mathbb{Z}^{\mathbf{n}}$ there exists a $k \geq 1$ such that $\tau_{\mathbf{r}}^{k}(\mathbf{a}) = \mathbf{0}$. Denote by $\mathcal{D}_n^{(0)}$ the set of $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^n$ such that $\tau_{\mathbf{r}}$ has the finiteness property. From numeration point of view these real vectors are most important. It turned out that the structure of $\mathcal{D}_n^{(0)}$ is very complicated already for $n = 2$, see [2], [30] and [34].

The analogue of the two dimensional SRS is the one dimensional GSRS. H. Brunotte, P. Kirschenhofer and J. M. Thuswaldner [8] studied first the set of one dimensional GSRS with finiteness property, which I denote by $\mathrm{GSRS}^{(0)}$. It turned out that its structure is quite complicated as well. Recently a more precise investigation of M. Weitzer [33] showed that the structure of $GSRS^{(0)}$ is much simpler as that of $\mathcal{D}_2^{(0)}$. Based on extensive computer investigations he conjectures a finite description of $\mathrm{GSRS}^{(0)}$.

Another generalization of SRS for Hermitian vector spaces, namely for vectors over imaginary quadratic Euclidean domains was studied by A. Pethő, P. Varga and M. Weitzer in [27]. This is called ESRS, where, the one dimensional case is also the analogue of the two dimensional SRS. One of the main features of this construction is that the remainder set is the subset of the opened unit disc, which gives us the property that $|r| < 1$ for every reminder r.

Chapter 2

New scientific results and theses - Euclidean number systems (ENS)

I have defined number system over Euclidean domains (ENS) as follows. Let $\mathbb{E}$ be an Euclidean domain with a Euclidean function N. Let $P(x) = x^{n+1}+p_n x^n+p_{n-1}x^{n-1}+\cdots+p_1x+p_0 \in \mathbb{E}[x] (n \in \mathbb{N})$ be a monic irreducible polynomial over $\mathbb{E}$ such that $N(p_0) \geq 2$, and let $\mathbb{D}_{p_0} \subset \mathbb{E}$ be a so called digit set with $|\mathbb{D}_{p_0}| = N(p_0)$. The elements of the factor ring $\mathbb{E}[x]/P(x)\mathbb{E}[x]$ can be represented by polynomials over $\mathbb{E}$ of degree at most n. This set is denoted by $\mathbb{E}^n[x]$.
If for an $A(x) \in \mathbb{E}^n[x]$ there exists $a(x) \in \mathbb{D}_{p_0}[x]$ such that

$$A(x) \equiv a(x) \pmod{P(x)},$$

then $A(x)$ has an *expansion*. If all $A(x) \in \mathbb{E}^n[x]$ have an expansion, then the pair $(P, \mathbb{D}_{p_0})$ is called *ENS* and the polynomial $P(x) \in \mathbb{E}[x]$ is called an *ENS polynomial*.

Let $P(x) = x^{n+1} + p_n x^n + p_{n-1}x^{n-1} + \cdots + p_1 x + p_0 \in \mathbb{E}^{n+1}[x]$ be such that $N(p_0) \geq 2$. Let the mapping $T_P : \mathbb{E}^n[x] \mapsto \mathbb{E}^n[x]$ be defined as follows: for $A(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0 \in \mathbb{E}^n[x]$ let

$$T_P(A) = \frac{A - qP - r}{x},$$

where $q = \left\lfloor \frac{a_0}{p_0} \right\rfloor$ and $r = a_0 - qp_0 \in \mathbb{D}_{p_0}$. The mapping T_P is called *Backward division.*

The mapping backward division can be iterated, which means

$$T_P^k(A) = \begin{cases} A, & \text{if} \quad k = 0; \\ T_P(T_P^{k-1}(A)), & \text{if} \quad k > 0. \end{cases}$$

Let $q_k \in \mathbb{E}$ and $r_k \in \mathbb{D}_{p_0}$ be defined by the equation

$$T_P^{k+1}(A) = \frac{T_P^k(A) - q_k P - r_k}{x},$$

where $a_0^{(k)} = T_P^k(A)|_{x=0}, q_k = \left\lfloor \frac{a_0^{(k)}}{p_0} \right\rfloor$ and $r_k = a_0^{(k)} - q_k p_0, k \in \mathbb{N}$. Let $A_k := T_P^k(A)$.

The orbit of T_P starting from A will be denoted as follows:

$$A \xRightarrow[P]{(q_1,r_1)} A_1 \xRightarrow[P]{(q_2,r_2)} A_2 \xRightarrow[P]{(q_3,r_3)} A_3 \ldots,$$

if it is not necessary to know the multipliers, it will simply be denoted by:

$$A \overset{r_1}{\underset{P}{\Rightarrow}} A_1 \overset{r_2}{\underset{P}{\Rightarrow}} A_2 \overset{r_3}{\underset{P}{\Rightarrow}} A_3 \ldots,$$

or if it is not necessary to know even the remainders, it will simply be denoted by:

$$A \underset{P}{\Rightarrow} A_1 \underset{P}{\Rightarrow} A_2 \underset{P}{\Rightarrow} A_3 \ldots.$$

If for $A, B \in \mathbb{E}^n[x]$ there exists $k \in \mathbb{N}$ such that $T_P^k(A) = B$ then I write:

$$A \overset{*}{\underset{P}{\Rightarrow}} B.$$

Plainly the orbits of T_P are either ultimately periodic or consist of infinitely many pairwise different elements and both cases may occur. Moreover in the first case the orbit is ultimately 0 or not. One of the most important aim of the investigations on ENS polynomials is the distinction between these possibilities.

Results:

1. $P(x) \in \mathbb{E}^{n+1}[x]$ is an ENS polynomial if and only if for all $A(x) \in \mathbb{E}^n[x]$ $A \overset{*}{\underset{P}{\Rightarrow}} 0.$,

2. Let $P(x) := x^{n+1} + p_n x^n + p_{n-1}x^{n-1} + \cdots + p_1 x + p_0 \in \mathbb{E}^{n+1}[x]$ be such that $N(p_0) \geq 2$. Assume that the orbit of T_P starting from $A(x) := a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{E}^n[x]$ is periodic and let $l > n$ be a multiple of the period length, as follows:

$$A = A_0 \xrightarrow[P]{(q_0,r_0)} A_1 \xrightarrow[P]{(q_1,r_1)} A_2 \xrightarrow[P]{(q_2,r_2)} A_3 \ldots \xrightarrow[P]{(q_{l-2},r_{l-2})} A_{l-1} \xrightarrow[P]{(q_{l-1},r_{l-1})} A.$$

Then

$$-\sum_{m=0}^{n+1} q_{l+h-m} p_m \in \mathbb{D}_{p_0}$$

holds for $h = 0, 1, \ldots, l-1$.

3. Let $P(x) \in \mathbb{E}^{n+1}[x]$ be an expanding polynomial, i.e. all of its roots lie outside the closed unit circle. There exists a constant c depending only on $P(X)$ such that this is an ENS polynomial if and only if for every $A(x) = A_n x^n + A_{n-1}x^{n-1} + \cdots + A_0 \in \mathbb{E}^n[x]$ with $|A_j| < c, j = 0, \ldots, n$ there exists $a(x) \in \mathbb{D}_{p_0}[x]$ such that

$$A(x) \equiv a(x) \pmod{P(x)}.$$

2.1 ENS over imaginary quadratic Euclidean domains

Let $\mathbb{E}_d$ be an imaginary quadratic Euclidean domain and $0 \neq b \in \mathbb{E}_d$. These are norm-Euclidean domains, so here the Euclidean function can be derived from the absolute value function:

$$N(z_1 + z_2 i) := |z_1 + z_2 i|^2 = z_1^2 + z_2^2, \text{ where } z_1, z_2 \in \mathbb{R}.$$

The norm of the elements $z \in \mathbb{E}_d$ is calculated as follows:
If $d \in \{1, 2\}$, $N(z) = N(e_1 + e_2\sqrt{-d}) = e_1^2 + de_2^2$, in the other cases $N(z) = N(e_1 + e_2\frac{1+\sqrt{-d}}{2}) = e_1^2 + e_1e_2 + \frac{d+1}{4}e_2^2$. Thus one can get

$$N(z) = \begin{cases} e_1^2 + e_2^2 & \text{, if } d = 1, \\ e_1^2 + 2e_2^2 & \text{, if } d = 2, \\ e_1^2 + e_1e_2 + e_2^2 & \text{, if } d = 3, \\ e_1^2 + e_1e_2 + 2e_2^2 & \text{, if } d = 7, \\ e_1^2 + e_1e_2 + 3e_2^2 & \text{, if } d = 11. \end{cases}$$

Assume that $a, b \in \mathbb{E}_d, b \neq 0$. Let $\mathbb{E}_d^*$ be the set of units in $\mathbb{E}_d$ ($\varepsilon \in \mathbb{E}_d^*$, if and only if $N(\varepsilon) = 1$). Let $q, r \in \mathbb{E}_d$ be such that $a = bq + r$ and $N(r) < N(b)$. Then $a = b(q + \varepsilon) + (r - b\varepsilon)$ and $a = b(q + \varepsilon\omega) + (r - b\varepsilon\omega)$ hold for any $\varepsilon \in \mathbb{E}_d^*$. It means, in some cases the remainder r is not uniquely defined, i.e., not only $N(r) < N(b)$, but also $N(r - b\varepsilon) < N(b)$ or $N(r - b\varepsilon\omega) < N(b)$ holds for some $\varepsilon \in \mathbb{E}_d^*$. This problem has already arisen in the case of rational integers, where the uniqueness of the remainder is ensured by the assumption that the remainder is non-negative. In order to make the floor function uniquely defined, the solution is to define a special set of reminders which is a complete residue system modulo b.

The set

$$\mathbb{D}_{d,b} := \left\{ z \in \mathbb{E}_d \;\middle|\; |z| < |b| \; and \; |z + b| \geq |b| \; and \; -\frac{1}{2} \leq Im_d\left(\frac{z}{b}\right) < \frac{1}{2} \right\}$$

be called the *(Sail) digit set* for b and $b \in \mathbb{E}_d$ the *base number.*

Results:

1. Let $0 \neq b \in \mathbb{E}_d$. Then the set $\mathbb{D}_{d,b}$ is a complete residue system modulo b containing 0. Moreover for any $a \in \mathbb{E}_d$ there exist $q, r \in \mathbb{E}_d$ such that $a = bq + r$ and $r \in \mathbb{D}_{d,b}$, in particular $N(r) < N(b)$. Let $a \in \mathbb{E}_d$. There exist uniquely defined $q \in \mathbb{E}_d$ and $r \in \mathbb{D}_{d,b}$ such that $a = bq + r$, so the sail digit set can be used as a complete residue system for the floor function.

2. Let $a, b \in \mathbb{E}_d, b \neq 0$. If $|a| < \frac{Im(\omega)|b|}{2}$, then $a \in \mathbb{V}_{d,b}$.

3. Let $a, b \in \mathbb{E}_d$ with $N(b) \geq 2$. If $|a| < \frac{l}{2}$ and $q = \left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor$ then $q \in \{0; -1\}$.

4. If $z \in \mathbb{V}_{d,b}$ and $a \in \mathbb{Z}$, then $z + a \cdot b \in \mathbb{V}_{d,b}$.

2.2 Linear ENS over imaginary quadratic Euclidean domains

Investigating the linear case, the result below shows that the ENS property of linear polynomials is easily decidable over imaginary quadratic Euclidean domains. Let $P(x) := x + p$ be a linear polynomial over $\mathbb{E}_d$ with $N(p) \geq 2$ and let $\mathbb{D}_{d,p}$ be the sail digit set.

Result:

1. $P(x)$ is an ENS polynomial with $\mathbb{D}_{d,p}$ if and only if $1 \in \mathbb{D}_{d,p}$ or

$$p \in \left\{ 1-i, -2i, -\sqrt{-2}, \sqrt{-3}, -\sqrt{-3}, 1-\sqrt{-3}, \frac{1-\sqrt{-7}}{2}, \frac{-1-\sqrt{-7}}{2} \right\}.$$

2.3 Quadratic ENS over imaginary quadratic Euclidean domains

The characterization of quadratic ENS polynomials with the sail digit set seems to be much more difficult than the characterization of the linear ones. The results described below covers only a part of this set.

Results:

1. Let $P(x) := x^2 + p_1 x + p_0$ be a quadratic polynomial over $\mathbb{E}_d$, $N(p_0) \geq 2$. It is expanding, if
$$\frac{|\bar{p_1} - \bar{p_0} p_1|}{|p_0|^2 - 1} < 1,$$
where $\bar{x}$ is the complex conjugate of x. (if $P(x) \in \mathbb{E}[x]$ is an ENS polynomial then it is expanding, this is a consequence of A. Vince's result [32].)

2. For a fixed p_0 the inequality of the previous result determines a finite set of p_1. We have
$$\frac{|\bar{p_1} - \bar{p_0} p_1|}{|p_0|^2 - 1} \geq \frac{|p_0|\,|p_1| - |p_1|}{|p_0|^2 - 1} = \frac{|p_1|}{|p_0| + 1}.$$
Hence if $|p_1| \leq |p_0| + 1$, then the previous result follows.

3. Let $P(x) := x^2 + p_1 x + p_0$ be a quadratic polynomial over $\mathbb{E}_d$, $N(p_0) \geq 2$ and let $\mathbb{D}_{d,p_0}$ be the sail digit set. If
$$|p_1| \leq \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) |p_0| - 1,$$
then the orbits of T_P are periodic for all $A \in \mathbb{E}_d[x]$. Moreover there are only four possible periods, the trivial $\{0\}$ cycle and the following ones:
$$x + (p_1 + 1) \xrightarrow[P]{(-1, r_0)} x + (p_1 + 1), \quad r_0 \in \mathbb{D}_{d,p_0},$$

$$1 \xrightarrow[P]{(-1,r_0)} x+p_1 \xrightarrow[P]{(0,r_1)} 1, \quad r_0, r_1 \in \mathbb{D}_{d,p_0},$$

$$1 \xrightarrow[P]{(-1,r_0)} x+p_1 \xrightarrow[P]{(-1,r_1)} x+(p_1+1) \xrightarrow[P]{(0,r_2)} 1, \quad r_0, r_1, r_2 \in \mathbb{D}_{d,p_0}.$$

2.4 Infinite sequences of ENS over imaginary quadratic Euclidean domains

Polynomials with rational integer coefficients can be considered also elements of $\mathbb{E}_d[x]$. I prove a necessary and sufficient condition under which such a polynomial is ENS with its sail digit set.

To characterize the CNS polynomials in $\mathbb{Z}[x]$ is a hard problem, see [1]. However there is a simple sufficient criterion proved by B. Kovács [21], which I cite now.

Theorem 2.4.1. *Let $P(x) = p_0 + p_1x + \cdots + p_{n-1}x^{n-1} + x^n \in \mathbb{Z}[x]$ be a polynomial. If $p_0 \geq 2$ and $p_i > p_{i+1}, i = 0, \ldots, n-1$, then $P(x)$ is a CNS polynomial.*

L. Germán and A. Kovács in [12] investigated the case of symmetric-CNS. Let $P(x) = p_0 + p_1x + \cdots + p_{n-1}x^{n-1} + x^n \in \mathbb{Z}[x]$ be a polynomial. If $|p_0| > 2\sum_{i=1}^{n}|p_i|$, then $P(x)$ is a symmetric-CNS. Indeed, the polynomials $x^2 + ax + a, 3 \leq a \in \mathbb{Z}$ are CNS, but they are not symmetric-CNS, however the polynomials $x^2 + ax + 3a, 3 \leq a \in \mathbb{Z}$ are CNS, symmetric-CNS and ENS polynomials as well with the sail digit set. In the next result I prove a condition, which depends only on the coefficients of $P(x)$.

Result:

1. Let $P(x) := \displaystyle\sum_{i=0}^{n} p_ix^i \in \mathbb{Z}[x]$ be a monic polynomial of degree n. Put $M = \left\lfloor \frac{p_0-1}{2} \right\rfloor$ and assume $p_0 \geq M \geq p_1 \geq p_2 \geq \cdots \geq p_n = 1$ and

$$\sum_{j=2}^{n} p_j \leq M.$$

Then $P(x)$ is an ENS polynomial with the sail digit set $\mathbb{D}_{d,p_0}$.

Chapter 3

New scientific results and theses - Euclidean shift radix systems (ESRS)

A generalization of SRS for Hermitian vector spaces, namely for vectors over imaginary quadratic Euclidean domains was studied in [27]. This generalization, which I call ESRS, is uniform for the five imaginary quadratic Euclidean domains. This has the consequence that in case of the Gaussian integers the floor function differs from that used in [8]. One of the main features of this construction is that the remainder set is the subset of the opened unit disc, which gives us the property that $|r| < 1$ for every reminder r.

In order to establish a shift radix system over the complex numbers, an imaginary quadratic Euclidean domain will be used as the set of integers, and a floor function is needed which can be determined by making its Euclidean function unique, so choosing the set of fractional numbers from the possible values.

In order to define a floor function, a set of fractional numbers has to be defined. Regarding generalization purposes the absolute value of a fractional number should be less than 1, a fractional number should not be negative in a sense, it is a superset of the fractional numbers for the reals, and the floor function should be unambiguous. From these considerations the following definition will be used to specify the floor function with the set of fractional numbers which will be called fundamental sail tile.

Let $d \in \{1, 2, 3, 7, 11\}$. Let the set

$$\mathbb{D}_d := \left\{ c \in \mathbb{C} \;\middle|\; |c| < 1 \textit{ and } |c+1| \geq 1 \textit{ and } -\frac{1}{2} \leq Im_d(c) < \frac{1}{2} \right\}$$

be defined as the *fundamental sail tile* (the set of fractional numbers).
Let $p \in \mathbb{E}_d$. The set

$$\mathbb{D}_d(p) := \left\{ p + c \;\middle|\; c \in \mathbb{C} \textit{ and } |c| < 1 \textit{ and } |c+1| \geq 1 \textit{ and } -\frac{1}{2} \leq Im_d(c) < \frac{1}{2} \right\}$$

is called *p-sail tile* and p is called its *representative integer*.

Let the function $\lfloor \ \rfloor_d : \mathbb{C} \to \mathbb{E}_d$ be defined as the *floor function*. The floor of e is the representative integer p of the unique p-sail tile that contains e.

Let $C := (c_1, \ldots, c_n) \in \mathbb{C}^n$ be a complex vector. Let $d \in \{1, 2, 3, 7, 11\}$ and let $\lfloor x \rfloor_d$ denote the floor function defined above.
For all vectors $A := (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbb{E}_d^n$ let

$$\mathcal{T}_{d,C}(A) := (a_2, \ldots, a_n, -q),$$

where $q = \lfloor c_1 a_1 + c_2 a_2 + \cdots + c_n a_n \rfloor_d$. The mapping $\mathcal{T}_{d,C} : \mathbb{E}_d^n \mapsto \mathbb{E}_d^n$ is called *Euclidean shift radix system with parameter d* or ESRS$_d$ respectively, ESRS for short. If $B := \mathcal{T}_{d,C}(A)$, this mapping will be denoted by

$$A \underset{d,C}{\Rightarrow} B.$$

If for $A, B \in \mathbb{E}_d^n$ there exists $k \in \mathbb{N}$, such that $\mathcal{T}_{d,C}^k(A) = B$ then this will be indicated by:

$$A \overset{*}{\underset{d,C}{\Longrightarrow}} B.$$

$\mathcal{T}_{d,C}$ is called *ESRS with finiteness property* if and only if for all vectors $A \in \mathbb{E}_d^n$

$$A \overset{*}{\underset{d,C}{\Longrightarrow}} 0,$$

where 0 denotes the zero vector.

The following sets form a generalization of the corresponding sets defined in

[1]:

$$\mathcal{D}^{(0)}_{n,d} := \left\{ C \in \mathbb{C}^n \;\middle|\; \forall A \in \mathbb{E}^n_d : A \xRightarrow[d,C]{*} 0 \right\},$$

$$\mathcal{D}_{n,d} := \left\{ C \in \mathbb{C}^n \;\middle|\; \forall A \in \mathbb{E}^n_d \text{ the sequence } \left\{ \mathcal{T}^k_{d,C}(A) \right\}_{k\geq 0} \right.$$
$$\left. \text{is ultimately periodic} \right\}.$$

$\mathcal{T}_{d,C}$ is ESRS with finiteness property if and only if $C \in \mathcal{D}^{(0)}_{n,d}$.

The construction defined in this section can be generalized by using a complex number for d.

The first result can be considered as the generalization of the *cutout polyhedra* defined in [1]. These are areas defined by a closed curve (arcs and lines). Let's consider this as *cutout area*.

Since there can be infinitely many cutout areas, they can be disjoint, overlapped by each other or superset and subset of each other, finding the union area of all is a hard problem. The following definition helps to estimate how many cutout areas are around some point in $\mathcal{D}_{n,d}$. Let $c \in \mathcal{D}_{n,d}$.

- If there exists an open neighborhood of c which contains only finitely many cutout areas then I call c a *regular point*.
- If each open neighborhood of c has nonempty intersection with infinitely many cutout areas then I call c a *weak critical point* for $\mathcal{D}_{n,d}$.
- If for each open neighborhood U of c the set $U \setminus \mathcal{D}^0_{n,d}$ cannot be covered by finitely many cutout areas then c is called a *critical point*.

Results:

1. Let $c \in \mathbb{C}$ and let's say that applying the one dimensional mapping $\mathcal{T}_{d,c}$ by l times on the number $a_0 \in \mathbb{E}_d$, it admits a period as follows:

$$a_0 \underset{d,c}{\Rightarrow} a_1 \underset{d,c}{\Rightarrow} a_2 \underset{d,c}{\Rightarrow} a_3 \ldots \underset{d,c}{\Rightarrow} a_{l-1} \underset{d,c}{\Rightarrow} a_0, \text{ if and only if}$$

$$c \in \left(\frac{\mathbb{D}_d - a_1}{a_0} \right) \cap \left(\frac{\mathbb{D}_d - a_2}{a_1} \right) \cap \cdots \cap \left(\frac{\mathbb{D}_d - a_{l-1}}{a_{l-2}} \right) \cap \left(\frac{\mathbb{D}_d - a_0}{a_{l-1}} \right).$$

The number l will be called the length of the period.

2.

$$\lfloor e \rfloor_d = \begin{cases} \left\lfloor Re(e) - \left\lfloor Im_d(e) + \frac{1}{2} \right\rfloor Re(\omega) \right\rfloor + \omega \left\lfloor Im_d(e) + \frac{1}{2} \right\rfloor, \text{ if} \\ \qquad \Big(Re(e) - \left\lfloor Re(e) - \left\lfloor Im_d(e) + \frac{1}{2} \right\rfloor Re(\omega) \right\rfloor - \\ \qquad - \left\lfloor Im_d(e) + \frac{1}{2} \right\rfloor Re(\omega) \Big)^2 + \\ \qquad + \left(Im(e) - \left\lfloor Im_d(e) + \frac{1}{2} \right\rfloor Im(\omega) \right)^2 < 1, \\ \left\lfloor Re(e) - \left\lfloor Im_d(e) + \frac{1}{2} \right\rfloor Re(\omega) \right\rfloor + \omega \left\lfloor Im_d(e) + \frac{1}{2} + 1 \right\rfloor, \text{ otherwise.} \end{cases}$$

3. Let $|c| > 1$, $d \in \{1, 2, 3, 7, 11\}$ then $\mathcal{T}_{d,c}$ doesn't have the finiteness property.

4. Let $c \in \mathbb{C}$ be with $|c| < 1$. $\mathcal{T}_{d,c}$ is an ESRS with finiteness property, if and only if for all $a \in \mathbb{E}_d$ where $|a| < \frac{1}{1-|c|}$

$$a \overset{*}{\underset{d,c}{\Longrightarrow}} 0.$$

5. Let $c \in \mathbb{C}$ be with $|c| < 1 - \frac{1}{\sqrt{4}} = \frac{1}{2}$. The function $\mathcal{T}_{d,c}$ is an ESRS with finiteness property, if $c \in \mathbb{D}_d$. Additionally, if $d = 11$ then

$$c \notin \left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; |(-\omega)z + \omega - 1| \geq 1 \textit{ and } -\frac{\sqrt{11}}{4} < Im((-\omega)z + \omega) \right\}, \text{ and}$$

$$c \notin \left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; |(-1+\omega)z - \omega| \geq 1 \textit{ and } Im((-1+\omega)z + 1 - \omega) \leq \frac{\sqrt{11}}{4} \right\}.$$

6. The sets $\mathcal{D}^{(0)}_{1,2}$ and $\mathcal{D}^{(0)}_{1,11}$ do not contain any weakly critical points (and thus no critical points) r satisfying $r \in \overline{\mathcal{D}^{(0)}_{1,2}}$ and $r \in \overline{\mathcal{D}^{(0)}_{1,11}}$ respectively. More precisely the circle of radius 0.99 around the origin contains the sets $\mathcal{D}^{(0)}_{1,2}$ and $\mathcal{D}^{(0)}_{1,11}$.

7. (Generalization of Brunotte's algorithm) Let $d \in \{1, 2, 3, 7, 11\}$, $c \in \mathbb{C}$ be a complex number, $|c| < 1$, let $c_E \in \mathbb{E}_d$ be a number from the Euclidean domain, $arg(c_E) = arg(c)$. $\mathcal{T}_{d,c}$ is an ESRS with finiteness property, if the set $\mathcal{E}$ exists for c and has finitely many elements:

(a) $\overline{-c_E}, \overline{c_E} \in \mathcal{E}$,

(b) $a + b\omega \in \mathcal{E}$, where $a + b\omega \in \mathbb{D}_{d,\overline{c_E}}$, (the sail digit set of the corresponding ENS),

(c) if $z \in \mathcal{E}$ then $\mathcal{T}_{d,c}(z), -\mathcal{T}_{d,c}(-z) \in \mathcal{E}$,

(d) for any $z \in \mathcal{E}$ there exists $n \in \mathbb{Z}^+$ such that $\mathcal{T}_{d,c}^n(z) = 0$.

Chapter 4

Bevezetés, előzmények, motiváció

1885-ben V. Grünwald [14] bevezette a negatív számjegyeket is tartalmazó számrendszer fogalmát a következőképpen: Legyen $g \leq -2$ egész szám. Ekkor minden $n \in \mathbb{Z}$ felírható a

$$\sum_{i=0}^{l} n_i g^i, 0 \leq n_i < |g|. \tag{4.1}$$

formában. Ezen kívül megvizsgálta, hogyan lehet elvégezni a négy alapműveletet egy ilyen számrendszerben. Ebben a struktúrában nincs megkülönböztetve a pozitív és negatív szám, ezért ez a koncepció könnyen általánosítható. Ezt D. E. Knuth [20] kezdte el 1960-ban. Számrendszerét „quarter-imaginary“ számrendszernek nevezzük, amely a $2i$ elemet használja alapként, valamint a $0, 1, 2, 3$ számjegyeket. Minden $a + bi$ $(a, b \in \mathbb{Z})$ Gauss egész felírható ebben a számrendszerben. Egy másik ehhez hasonló számrendszer W. Penney [22] eredménye, amleyet 1965-ben publikált. Itt a $-1 + i$ elem az alapszám, és $0, 1$ a számjegyek. 1975-ben I. Kátai és J. Szabó [18] általánosították W. Penney eredményét, és bebizonyították, hogy $0, 1, \ldots, N-1$ számjegyeket használva csak a $-n \pm i$ lehetségesek, mint alapszámok, ahol n pozitív szám, és $N = n^2 + 1$, azaz az N szám $-n \pm i$ normája. W. J. Gilbert [13] 1981-ben tovább általánosította ezt az eredményt, és megkereste az összes lehetséges alapszámot kvadratikus számtestekre $0, 1, \ldots, N-1$ számjegyek mellett.

Kanonikus számrendszerek

A CNS (Kanonikus számrendszerek) fogalmat A. Pethő [25] 1991-ben a következőképpen definiálta. Legyen adott a $P(x) = x^{n+1} + p_n x^n + p_{n-1} x^{n-1} + \cdots + p_0 \in \mathbb{Z}[x]$ polinom és a $D = \{0, 1, \ldots, |p_0| - 1\}$ számjegyhalmaz. A $P(x)$ polinomot CNS polinomnak nevezzük, ha bármely $0 \neq A(x) \in \mathbb{Z}[x]$ polinomhoz létezik $h \geq 0$ egész szám és $a_0, \ldots, a_h \in D$ számjegyek, úgy, hogy

$$A(x) \equiv a_h x^h + a_{h-1} x^{h-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \pmod{P(x)}. \tag{4.2}$$

Ha $P(x)$ irreducibilis polinom, akkor az algebrai számtesteken definiált CNS fogalomhoz jutunk, amelyet I. Kátai és J. Szabó [18] definiált és tanulmányozott. Ezt az eredményt kvadratikus egészekre I. Kátai és B. Kovács [16], [17], [21] általánosították, valamint tőlük függetlenül W. J. Gilbert [13]. A CNS polinomok karakterizálása bonyolult probléma már harmadfokú polinomok esetén is [2], még mindig megoldatlan probléma.

Brunotte algoritmus

H. Brunotte [4] eredménye, hogy ha megfelelően megválasztjuk a $\mathbb{Q}$ feletti maximum $n-1$-edfokú polinomok terének $1, x, \ldots, x^{n-1}$ bázisát, akkor a CNS tulajdonság eldöntésére egy nagyon hatékony algoritmust kapunk. H. Brunotte cikkében [7]ezt az algoritmust fel is használja harmadfokú polinomok egy családjának karakterizációjára.

Semi-CNS

A *semi-CNS polinom* fogalmat P. Burcsi és A. Kovács [9] vezette be olyan $P(x)$ polinomokra, melyek véges kifejtései (4.2) additív félcsoportot alkotnak. Ez a fogalom egy általánosítása a természetes számokra értelmezett szokásos számrendszereknek. Cikkükben sikerült elégséges feltételt adniuk polinomok semi-CNS tulajdonságára, ezen kívül definiálták a Brunotte algoritmust semi-CNS polinomokra. A [31] cikkemben harmadfokú semi-CNS polinomokat vizsgáltam, melyeket sikerült teljesen karakterizálnom. H. Brunotte később általánosította ezt az eredményt, és karakterizálta a semi-CNS polinomokat bármilyen fokszámra [7].

Szimmetrikus CNS

Egy másik érdekes alternatív CNS fogalom a szimmetrikus CNS, ahol a számjegyhalmaz negatív és pozitív számjegyeket egyaránt tartalmaz. Legyen $P(x) \in$

$\mathbb{Z}[x]$, úgy, hogy $P(0) = p_0$ és $I = \left[-\left\lfloor \frac{|p_0|-1}{2} \right\rfloor, |p_0| - 1 - \left\lfloor \frac{|p_0|-1}{2} \right\rfloor\right] \cap \mathbb{Z}$. S. Akiyama és K. Scheicher [3] szimmetrikus CNS polinomnak nevezte el azon $P(x)$ polinomokat, amelyekre bármely $A(x) \in \mathbb{Z}[x]$ polinomhoz létezik $a(x) \in I[x]$ polinom, úgy, hogy $A(x) \equiv a(x) \pmod{P}$. Ez a fogalom szimmetrikus SRS-ekre szintén általánosítható, amelyet H. Brunotte [5], [6], és A. Huszti, K. Scheicher, P. Surer és J. M. Thuswaldner [15] vizsgált.

Norm-Euclidean domains

Legyen $\mathbb{E}$ egy integritás tartomány. A $N : \mathbb{E} \mapsto \mathbb{N}$ függvényt *Euklideszi függvény*nek nevezzük, ha

1. $a \in \mathbb{E}$ esetén $N(a) = 0$, akkor és csak akkor, ha $a = 0$,

2. ha $a \in \mathbb{E}$ és $b \in \mathbb{E}\backslash\{0\}$, akkor léteznek $q, r \in \mathbb{E}$ elemek, úgy, hogy $a = bq+r$ és $N(r) < N(b)$.

Az $\mathbb{E}$ integritás tartományt *Euklideszi gyűrű*nek nevezzük, ha értelmezve van rajta egy Euklideszi függvény. Az $\mathbb{E}$ Euklideszi gyűrűt *norma-Euklideszi gyűrű*nek nevezzük, ha a rajta értemezett Euklideszi függvény a gyűrűhöz tartozó testen értelmezett abszolútérték függvényből származtatható. L. E. Dickson [11] és O. Perron [23] bizonyította, (lásd még H. Davenport [10] és H. L. Keng [19], Theorem 15.3), hogy a $\mathbb{Q}[\sqrt{-d}]$ képzetes kvadratikus számtestek egészeinek gyűrűje akkor és csak akkor Euklideszi (norma-Euklideszi), ha $d \in \{1, 2, 3, 7, 11\}$. Ezeket *képzetes kvadratikus Euklideszi gyűrű*knek nevezzük. Jele: $\mathbb{E}_d$.

Shift radix systems

A*shift radix system* (SRS) fogalmat S. Akiyama, T. Borbély, H. Brunotte, A. Pethő és J. M. Thuswaldner [1] vezette be 2005-ben valós számokra a következőképpen: Legyen adott az $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^n$ vektor. A $\tau_\mathbf{r} : \mathbb{Z}^n \mapsto \mathbb{Z}^n$ leképezést SRS-nek nevezzük, amennyiben

$$\tau_\mathbf{r}((a_1, \ldots, a_n)) = (a_2, \ldots, a_n, -\lfloor \mathbf{ra} \rfloor),$$

ahol **ra** a vektorok közti belső szorzatot jelöli. A [1] cikk rámutat arra is, hogy ez az SRS fogalom a kanonikus számrendszerek, valamint a A. Rényi [28] által bevezetett β-bővítés általánosítása. Ezt a fogalmat H. Brunotte, P. Kirschenhofer és J. Thuswaldner [8] általánosították komplex számok feletti vektorterekre is, melynek a Gauss helyiérték váltó rendszer (Gaussian shift radix system) (GSRS) nevet adták. Legyen adott a $r \in \mathbb{C}^n$ komplex vektor ($n \in \mathcal{N}$). A $\gamma_r : \mathbb{Z}[i]^d \to \mathbb{Z}[i]^d$ leképezést GSRS-nek nevezzük, ha

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \mapsto (x_2, x_3, \ldots, x_n, -\lfloor rx \rfloor), \tag{4.3}$$

ahol az rx szám r és x vektorok belső szorzata, és $\lfloor z \rfloor := \lfloor Re(z) \rfloor + i \lfloor Im(z) \rfloor$, $z \in \mathbb{C}$.

Azt mondjuk, hogy a $\tau_{\mathbf{r}}$ SRS akkor és csak akkor rendelkezik finiteness tulajdonsággal, ha minden $\mathbf{a} \in \mathbb{Z}^{\mathbf{n}}$ vektor esetén létezik $k \geq 1$, úgy, hogy $\tau_{\mathbf{r}}^k(\mathbf{a}) = \mathbf{0}$. Jelölje $\mathcal{D}_n^{(0)}$ azon $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^n$ vektorok halmazát, amelyekre $\tau_{\mathbf{r}}$ rendelkezik finiteness tulajdonsággal. Kiderült, hogy a $\mathcal{D}_n^{(0)}$ szerkezete bonyolult már $n = 2$ esetben is, lásd [2], [30] és [34].

A kétdimenziós SRS szerkezetileg hasonló az egydimenziós GSRS-hez. H. Brunotte, P. Kirschenhofer és J. M. Thuswaldner [8] elsőként tanulmányozta az egydimenziós finiteness tulajdonsággal rendelkező GSRS-t, amit $\text{GSRS}^{(0)}$-val jelölök. Kiderült, hogy szerkezete meglehetősen bonyolult. M. Weitzer [33] pontosabb vizsgálata azt mutatta, hogy a $\text{GSRS}^{(0)}$ struktúra sokkal egyszerűbb, mint a $\mathcal{D}_2^{(0)}$. Számos számítógépes vizsgálattal támasztja ezt alá.

Az SRS egy másik általánosítása komplex számok feletti vektorterekre, pontosabban a képzetes kvadratikus Euklideszi gyűrűk feletti vektorterekre az úgynevezett ESRS (Euklideszi SRS), melyet A. Pethő, P. Varga és M. Weitzer tanulmányozott [27]-ben. Itt is elmondható, hogy az egydimenziós eset szerkezetileg hasonló a kétdimenziós SRS-hez. Ezen fogalom egyik fő jellemzője, hogy a törtrész függvény értékkészlete a nyílt egységkör részhalmaza, azaz $|r| < 1$.

Chapter 5

Új tudományos eredmények és tézisek - Euklideszi számrendszerek (ENS)

Az Euklideszi gyűrűk (ENS) feletti számrendszereket a következőképpen definiáltam. Legyen $\mathbb{E}$ egy Euklideszi gyűrű, amelynek Euklideszi függvénye N. Legyen $P(x) = x^{n+1} + p_n x^n + p_{n-1}x^{n-1} + \cdots + p_1 x + p_0 \in \mathbb{E}[x] (n \in \mathbb{N})$ egy 1 főegyütthatós irreducibilis polinom $\mathbb{E}$ felett, úgy, hogy $N(p_0) \geq 2$, és legyen $\mathbb{D}_{p_0} \subset \mathbb{E}$ egy úgynevezett számjegyhalmaz, melyre $|\mathbb{D}_{p_0}| = N(p_0)$. A $\mathbb{E}[x]/P(x)\mathbb{E}[x]$ faktorgyűrű elemei felírhatók $\mathbb{E}$ feletti maximum n-edfokú polinomokkal. Legyen ez a halmaz $\mathbb{E}^n[x]$.
Ha egy $A(x) \in \mathbb{E}^n[x]$-hez létezik $a(x) \in \mathbb{D}_{p_0}[x]$, úgy, hogy

$$A(x) \equiv a(x) \pmod{P(x)},$$

akkor azt mondjuk, hogy $A(x)$-nek van *kiterjesztése*. Ha minden $A(x) \in \mathbb{E}^n[x]$ polinomnak van kiterjesztése, akkor a $(P, \mathbb{D}_{p_0})$ párt *ENS*-nek nevezzük és a $P(x) \in \mathbb{E}[x]$ polinomot *ENS polinomnak.*

Legyen $P(x) = x^{n+1} + p_n x^n + p_{n-1}x^{n-1} + \cdots + p_1 x + p_0 \in \mathbb{E}^{n+1}[x]$, úgy, hogy $N(p_0) \geq 2$. Legyen a $T_P : \mathbb{E}^n[x] \mapsto \mathbb{E}^n[x]$ leképezés a következőképpen definiálva: $A(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0 \in \mathbb{E}^n[x]$ polinomhoz legyen

$$T_P(A) = \frac{A - qP - r}{x},$$

ahol $q = \left\lfloor \frac{a_0}{p_0} \right\rfloor$ és $r = a_0 - qp_0 \in \mathbb{D}_{p_0}$. A T_P leképezést *Backward division*nek nevezzük.

A backward division leképezés iterálható, vagyis

$$T_P^k(A) = \begin{cases} A, & \text{if} \quad k = 0; \\ T_P(T_P^{k-1}(A)), & \text{if} \quad k > 0. \end{cases}$$

Legyen $q_k \in \mathbb{E}$ és $r_k \in \mathbb{D}_{p_0}$ adott, úgy, hogy

$$T_P^{k+1}(A) = \frac{T_P^k(A) - q_k P - r_k}{x},$$

ahol $a_0^{(k)} = T_P^k(A)|_{x=0}, q_k = \left\lfloor \frac{a_0^{(k)}}{p_0} \right\rfloor$ és $r_k = a_0^{(k)} - q_k p_0, k \in \mathbb{N}$. Legyen $A_k := T_P^k(A)$.

A T_P leképezés A polinomból kezdődő pályája,

$$A \xRightarrow[P]{(q_1,r_1)} A_1 \xRightarrow[P]{(q_2,r_2)} A_2 \xRightarrow[P]{(q_3,r_3)} A_3 \ldots,$$

a szorzók és a maradékok opcionálisan elhagyhatók

$$A \xRightarrow[P]{r_1} A_1 \xRightarrow[P]{r_2} A_2 \xRightarrow[P]{r_3} A_3 \ldots,$$

$$A \xRightarrow[P]{} A_1 \xRightarrow[P]{} A_2 \xRightarrow[P]{} A_3 \ldots.$$

Ha valamely $A, B \in \mathbb{E}^n[x]$ esetén létezik $k \in \mathbb{N}$, úgy, hogy $T_P^k(A) = B$, akkor

$$A \xRightarrow[P]{*} B.$$

A T_P pályák ciklusban végződhetnek vagy végtelen sok páronként különböző elemekből állhatnak, mindkét eset előfordulhat. Ráadásul az első esetben a pálya végződhet olyan ciklusban, ami csak a 0 elemet tartalmazza, vagy sem. Az ENS-polinomok vizsgálatainak egyik legfontosabb célja e lehetőségek közötti megkülönböztetés.

Eredmények:

1. $P(x) \in \mathbb{E}^{n+1}[x]$ akkor és csak akkor ENS polinom, ha bármely $A(x) \in \mathbb{E}^n[x]$ $A \xRightarrow[P]{*} 0.$,

2. Legyen $P(x) := x^{n+1}+p_nx^n+p_{n-1}x^{n-1}+\cdots+p_1x+p_0 \in \mathbb{E}^{n+1}[x]$ polinom adott, $N(p_0) \geq 2$. Tegyük fel, hogy a T_P leképezés pályája $A(x) := a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0 \in \mathbb{E}^n[x]$ polnomból kiindulva ciklusban végződik és legyen $l > n$ a periódushossz egy egész többszöröse a következőképpen:

$$A = A_0 \xRightarrow[P]{(q_0,r_0)} A_1 \xRightarrow[P]{(q_1,r_1)} A_2 \xRightarrow[P]{(q_2,r_2)} A_3 \ldots \xRightarrow[P]{(q_{l-2},r_{l-2})} A_{l-1} \xRightarrow[P]{(q_{l-1},r_{l-1})} A.$$

Ekkor

$$-\sum_{m=0}^{n+1} q_{l+h-m}p_m \in \mathbb{D}_{p_0}$$

bármely $h = 0, 1, \ldots, l-1$ esetén.

3. Legyen $P(x) \in \mathbb{E}^{n+1}[x]$ polinom expanzív polinom, azaz minden gyöke a zárt egységkörön kívül helyezkedik el. Ekkor létezik egy csak a $P(x)$ együtthatóitól függő c konstans, amelyre $P(x)$ akkor és csak akkor ENS polinom, ha bármely $A(x) = A_nx^n + A_{n-1}x^{n-1} + \cdots + A_0 \in \mathbb{E}^n[x]$, $|A_j| < c, j = 0, \ldots, n$ esetén létezik $a(x) \in \mathbb{D}_{p_0}[x]$, úgy, hogy

$$A(x) \equiv a(x) \pmod{P(x)}.$$

5.1 ENS képzetes kvadratikus Euklideszi gyűrűk felett

Legyen $\mathbb{E}_d$ egy képzetes kvadratikus Euklideszi gyűrű $0 \neq b \in \mathbb{E}_d$.Mivel ezek norma-Euklideszi gyűrűk, ezért az Euklideszi függvény az abszolútérték függvényből származik:

$$N(z_1 + z_2i) := |z_1 + z_2i|^2 = z_1^2 + z_2^2, \text{ where } z_1, z_2 \in \mathbb{R}.$$

Az elemek normája $z \in \mathbb{E}_d$ a következőképpen számolható:
Ha $d \in \{1, 2\}$, $N(z) = N(e_1 + e_2\sqrt{-d}) = e_1^2 + de_2^2$, a másik három esetben $N(z) = N(e_1 + e_2\frac{1+\sqrt{-d}}{2}) = e_1^2 + e_1e_2 + \frac{d+1}{4}e_2^2$, azaz

$$N(z) = \begin{cases} e_1^2 + e_2^2 & , \text{if } d = 1, \\ e_1^2 + 2e_2^2 & , \text{if } d = 2, \\ e_1^2 + e_1e_2 + e_2^2 & , \text{if } d = 3, \\ e_1^2 + e_1e_2 + 2e_2^2 & , \text{if } d = 7, \\ e_1^2 + e_1e_2 + 3e_2^2 & , \text{if } d = 11. \end{cases}$$

Tegyük fel, hogy $a, b \in \mathbb{E}_d, b \neq 0$. Legyen $\mathbb{E}_d^*$ az egységek halmaza $\mathbb{E}_d$-ben ($\varepsilon \in \mathbb{E}_d^*$, akkor és csak akkor, ha $N(\varepsilon) = 1$). Legyen adott $q, r \in \mathbb{E}_d$, úgy, hogy $a = bq+r$ és $N(r) < N(b)$. Ekkor $a = b(q+\varepsilon)+(r-b\varepsilon)$ és $a = b(q+\varepsilon\omega)+(r-b\varepsilon\omega)$ is fennáll minden $\varepsilon \in \mathbb{E}_d^*$-re. Ez azt jelenti, hogy néhány esetben a maradék r nem egyértelműen meghatározott, azaz nemcsak $N(r) < N(b)$, hanem $N(r - b\varepsilon) < N(b)$ vagy $N(r-b\varepsilon\omega) < N(b)$ is fennáll valamely $\varepsilon \in \mathbb{E}_d^*$-ra. Ez a probléma már a racionális egészek esetén is felmerült, ahol a maradék egyértelműsítése azzal lett biztosítva, hogy nemnegatív maradékokat választunk. Annak érdekénben, hogy az alsó egészrész függvény egyértelmű legyen, definiálnunk kell egy kitüntetett maradékhalmazt amely teljes maradékrendszert kell, hogy alkosson modulo b.

A halmazt

$$\mathbb{D}_{d,b} := \left\{ z \in \mathbb{E}_d \;\middle|\; |z| < |b| \; and \; |z + b| \geq |b| \; and \; -\frac{1}{2} \leq Im_d\left(\frac{z}{b}\right) < \frac{1}{2} \right\}$$

*(Vitorla) számjegyhalmaz*nak nevezzük egy adott b *bázisszám*hoz, $b \in \mathbb{E}_d$.

Eredmények:

1. Legyen $0 \neq b \in \mathbb{E}_d$. Ekkor a $\mathbb{D}_{d,b}$ halmaz teljes maradékrendszert alkot modulo b, és $0 \in \mathbb{D}_{d,b}$. Továbbá minden $a \in \mathbb{E}_d$-hez létezik $q, r \in \mathbb{E}_d$, úgy, hogy $a = bq + r$ és $r \in \mathbb{D}_{d,b}$, $N(r) < N(b)$. Legyen $a \in \mathbb{E}_d$. Ekkor $q \in \mathbb{E}_d$ és $r \in \mathbb{D}_{d,b}$ létezik, és egyértelmű, úgy, hogy $a = bq + r$, tehát a vitorla számjegyhalmaz használható, mint teljes maradékrendszer az alsó egészrész függvényhez.

2. Legyen $a, b \in \mathbb{E}_d, b \neq 0$. Ha $|a| < \frac{Im(\omega)|b|}{2}$, akkor $a \in \mathbb{V}_{d,b}$.

3. Legyen $a, b \in \mathbb{E}_d$, $N(b) \geq 2$. Ha $|a| < \frac{l}{2}$ és $q = \left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor$ akkor $q \in \{0; -1\}$.

4. Ha $z \in \mathbb{V}_{d,b}$ és $a \in \mathbb{Z}$, akkor $z + a \cdot b \in \mathbb{V}_{d,b}$.

5.2 Elsőfokú ENS képzetes kvadratikus Euklideszi gyűrűk felett

A lineáris esetet megvizsgálva, az alábbi eredmény azt állítja, hogy az elsőfokú polinomok ENS tulajdonsága könnyen meghatározható képzetes kvadratikus Euklideszi gyűrűk esetén. Legyen $P(x) := x + p$ egy elsőfokú polinom $\mathbb{E}_d$ felett, legyen $N(p) \geq 2$ és legyen $\mathbb{D}_{d,p}$ a vitorla számjegyhalmaz. **Eredmény:**

1. $P(x)$ akkor és csak akkor ENS polinom $\mathbb{D}_{d,p}$ számjegyhalmazzal, ha $1 \in \mathbb{D}_{d,p}$ vagy

$$p \in \left\{1 - i, -2i, -\sqrt{-2}, \sqrt{-3}, -\sqrt{-3}, 1 - \sqrt{-3}, \frac{1-\sqrt{-7}}{2}, \frac{-1-\sqrt{-7}}{2}\right\}.$$

5.3 Másodfokú ENS képzetes kvadratikus Euklideszi gyűrűk felett

A másodfokú ENS polinomok karakterizálása sokkal nehezebb feladatnak tűnik, mint az elsőfokúé. A talált eredmények csak részben fedik le ezt az esetet.

Eredmények:

1. Legyen $P(x) := x^2 + p_1x + p_0$ egy $\mathbb{E}_d$-n értelmezett másodfokú polinom, $N(p_0) \geq 2$. $P(x)$ expanzív, ha

$$\frac{|\bar{p_1} - \bar{p_0}p_1|}{|p_0|^2 - 1} < 1,$$

ahol $\bar{x}$ az x komplex konjugáltja. (ha $P(x) \in \mathbb{E}[x]$ ENS polinom, akkor expanzív, ez A. Vince [32] tételének következménye.)

2. Egy adott p_0-hoz az egyenlőtlenség az előző eredményben p_1 egy véges halmazát határozza meg.

$$\frac{|\bar{p_1} - \bar{p_0}p_1|}{|p_0|^2 - 1} \geq \frac{|p_0|\,|p_1| - |p_1|}{|p_0|^2 - 1} = \frac{|p_1|}{|p_0| + 1}.$$

Tehát, ha $|p_1| \leq |p_0| + 1$, akkor az előző eredmény fennáll.

3. Legyen $P(x) := x^2 + p_1x + p_0$ egy $\mathbb{E}_d$-n értelmezett másodfokú polinom, $N(p_0) \geq 2$, és legyen $\mathbb{D}_{d,p_0}$ egy hozzá tartozó vitorla számjegyhalmaz. Ha

$$|p_1| \leq \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)|p_0| - 1,$$

akkor ciklikusak T_P pályái minden $A \in \mathbb{E}_d[x]$-re. Továbbá, ebben az esetben csak 4 fajta lehetséges ciklus van, a triviális $\{0\}$ ciklus, és a következő három:

$$x + (p_1 + 1) \xrightarrow[P]{(-1,r_0)} x + (p_1 + 1), \quad r_0 \in \mathbb{D}_{d,p_0},$$

$$1 \xrightarrow[P]{(-1,r_0)} x+p_1 \xrightarrow[P]{(0,r_1)} 1, \quad r_0, r_1 \in \mathbb{D}_{d,p_0},$$

$$1 \xrightarrow[P]{(-1,r_0)} x+p_1 \xrightarrow[P]{(-1,r_1)} x+(p_1+1) \xrightarrow[P]{(0,r_2)} 1, \quad r_0, r_1, r_2 \in \mathbb{D}_{d,p_0}.$$

5.4 Képzetes kvadratikus Euklideszi gyűrűk felett értelmezett ENS-ek egy végtelen sorozata

Racionális egész együtthatós polinomok tekinthetők $\mathbb{E}_d$ felett értelmezett polinomoknak is. Bebizonyítom, hogy egy szükséges és elégséges

Polynomials with rational integer coefficients can be considered also elements of $\mathbb{E}_d[x]$. I prove a necessary and sufficient condition, amellyel egy ilyen polinom ENS polinom a hozzá tartozó vitorla számjegyhalmazzal.

A CNS polinomok karakterizációja $\mathbb{Z}[x]$-ben nehéz probléma, lásd [1]. Azonban van egy egyszerű elégséges feltétel, amelyet B. Kovács [21] bizonyított. Ezt most idézem:

Theorem 5.4.1. *Legyen $P(x) = p_0 + p_1 x + \cdots + p_{n-1}x^{n-1} + x^n \in \mathbb{Z}[x]$ egy polinom. Ha $p_0 \geq 2$ és $p_i > p_{i+1}, i = 0, \ldots, n-1$, akkor $P(x)$ CNS polinom.*

L. Germán és A. Kovács in [12] megvizsgálták ezt az esetet szimmetrikus CNS polinomokra. Legyen $P(x) = p_0 + p_1 x + \cdots + p_{n-1}x^{n-1} + x^n \in \mathbb{Z}[x]$ egy polinom. Ha $|p_0| > 2\sum_{i=1}^{n} |p_i|$, akkor $P(x)$ szimmetrikus CNS polinom. Valóban, a $x^2 + ax + a, 3 \leq a \in \mathbb{Z}$ polinomcsalád CNS polinomokat tartalmaz, de nem szimmetrikus CNS polinomokat. Azonban a $x^2 + ax + 3a, 3 \leq a \in \mathbb{Z}$ polinomcsalád olyan polinomokat tartalmaz, amelyek egyszerre CNS, szimmetrikus CNS, és ENS polinomok a hozzá tartozó vitorla számjegyhalmazzal. A következő eredményben bemutatok egy feltételt, amely csak $P(x)$ együtthatóitól függ.

Eredmény:

1. Legyen $P(x) := \sum_{i=0}^{n} p_i x^i \in \mathbb{Z}[x]$ egy 1 főegyütthatós n-edfokó polinom. Legyen $M = \left\lfloor \frac{p_0-1}{2} \right\rfloor$ és tegyük fel, hogy $p_0 \geq M \geq p_1 \geq p_2 \geq \cdots \geq p_n = 1$ és
$$\sum_{j=2}^{n} p_j \leq M.$$
Ekkor $P(x)$ ENS polinom a hozzá tartozó $\mathbb{D}_{d,p_0}$ vitorla számjegyhalmazzal.

Chapter 6

Új tudományos eredmények és tézisek - Euklideszi helyiérték váltó rendszerek (ESRS)

A [27] cikkünkben az SRS fogalom komplex számok feletti vektorterekre való általánosítását, pontosabban a képzetes kvadratikus Euklideszi gyűrűk feletti vektortereken értelmezett SRS-eket tanulmányoztuk A. Pethővel és M. Weitzerrel. Ez az általánosítás, amelyet ESRS-nek neveztünk, egységes mind az öt képzetes kvadratikus Euklideszi gyűrűre. Ennek az a következménye, hogy a Gauss egészeknél használt alsó egészrész függvény eltér a [8]-ben használttól. Ennek az új fogalomnak az egyik fő jellemzője, hogy a törtrész függvény értékkészlete a nyílt egységkör részhalmaza, azaz $|r| < 1$.

Annak érdekében, hogy a komplex számok fölött helyiérték váltó rendszert értelmezzünk, az egész számoknak egy képzetes kvadratikus Euklideszi gyűrűt használunk. Ezen kívül szükség van egy alsó egészrész függvényre, amelyet az Euklideszi függvény egyértelműsítésével lehet elérni, vagyis meg kell határozni egy alkalmas törtszámokat tartalmazó halmazt.

Tehát az alsó egészrész függvény meghatározásához szükség van egy, a törtszámokat tartalmazó halmazra. Általánosítási megfontolásokból szeretnénk a következő tulajdonságokat elérni. Törtszám abszolútértéke kevesebb, mint 1. Amennyire lehetséges, a negatív számokat nem tesszük a törtszámok közé. A racionális egészek törtfüggvényének értékkészlete legyen részhalmaza az új halmaznak. Az alsó egészész függvénynek egyértelműnek kell lennie. Ezekből a megfontolásokból a következő definíciót alkalmazzuk, hogy meghatározzuk az alsó egészrészt függvényt. A törtszámok új halmazát fundamentális vitorlahalmaznak nevezzünk.

Legyen $d \in \{1, 2, 3, 7, 11\}$, és

$$\mathbb{D}_d := \left\{ c \in \mathbb{C} \;\middle|\; |c| < 1 \; and \; |c+1| \geq 1 \; and \; -\frac{1}{2} \leq Im_d(c) < \frac{1}{2} \right\}$$

halmaz a *fundamentális vitorlahalmaz* (törtszámok halmaza).
Legyen $p \in \mathbb{E}_d$.

$$\mathbb{D}_d(p) := \left\{ p + c \;\middle|\; c \in \mathbb{C} \; and \; |c| < 1 \; and \; |c+1| \geq 1 \; and \; -\frac{1}{2} \leq Im_d(c) < \frac{1}{2} \right\}$$

halmazt *p-vitorlahalmaz*nak és p-t a halmaz*reprezentáns egész*ének nevezzük.

Legyen a $\lfloor \; \rfloor_d \; : \; \mathbb{C} \to \mathbb{E}_d$ függvény az *alsó egészrész függvénye.* Az e szám alsó egészrésze az a p-szám, amely reprezentáns egésze annak a p-vitorlahalmaznak, amely tartalmazza e-t.

Legyen $C := (c_1, \ldots, c_n) \in \mathbb{C}^n$ egy komplex vektor. Legyen $d \in \{1, 2, 3, 7, 11\}$ és jelölje $\lfloor x \rfloor_d$ a fent definiált alsó egészrész függvényt.
Minden $A := (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbb{E}_d^n$ vektorhoz legyen a $\mathcal{T}_{d,C}$ leképezés a következőképpen definiálva:

$$\mathcal{T}_{d,C}(A) := (a_2, \ldots, a_n, -q) \,,$$

ahol $q = \lfloor c_1 a_1 + c_2 a_2 + \cdots + c_n a_n \rfloor_d$. A $\mathcal{T}_{d,C} \; : \mathbb{E}_d^n \mapsto \mathbb{E}_d^n$ leképezést, úgy nevezzük, hogy *Euklideszi helyiérték váltó rendszer d paraméterrel*, vagy ESRS_d, vagy csak ESRS. Ha $B := \mathcal{T}_{d,C}(A)$, akkor ezt a leképezést a következőképpen jelöljük

$$A \underset{d,C}{\Rightarrow} B.$$

Ha $A, B \in \mathbb{E}_d^n$ vektorokhoz létezik egy $k \in \mathbb{N}$, úgy, hogy $\mathcal{T}_{d,C}^k(A) = B$, akkor ezt úgy jelöljük, hogy

$$A \overset{*}{\underset{d,C}{\Longrightarrow}} B.$$

$\mathcal{T}_{d,C}$ leképezést akkor és csak akkor nevezzük *véges tulajdonságú ESRS*nek, ha minden $A \in \mathbb{E}_d^n$ vektorra

$$A \overset{*}{\underset{d,C}{\Longrightarrow}} 0,$$

ahol 0 a nullvektort jelöli.

A következő halmazok a [1]-ban definiált halmazok mintájára lettek definiálva:

$$\mathcal{D}_{n,d}^{(0)} := \left\{ C \in \mathbb{C}^n \;\middle|\; \forall A \in \mathbb{E}_d^n : A \xRightarrow[d,C]{*} 0 \right\},$$

$$\mathcal{D}_{n,d} := \left\{ C \in \mathbb{C}^n \;\middle|\; \forall A \in \mathbb{E}_d^n \text{ a sorozat } \left\{ \mathcal{T}_{d,C}^{k}(A) \right\}_{k \geq 0} \right.$$
$$\left. \text{ciklikus végű} \right\}.$$

$\mathcal{T}_{d,C}$ ESRS akkor és csak akkor véges tulajdonságú ESRS, ha $C \in \mathcal{D}_{n,d}^{(0)}$.

Ez a fogalom tovább általánosítható oly módon, hogy d-t komplex számnak tekintjük.

Az első eredményt tekinthetjük az [1]-ban definiált *cutout polyhedra* általánosításának. Az itt tárgyalt területek egy zárt görbével határoltak (körívek és egyenesek), melyeket *vágó halmaz*oknak fogunk nevezni.

Mivel végtelen sok vágó halmaz lehetséges, akár különállóak is lehetnek, vagy egymással átfedésben is lehetnek, vagy akár részhalmazai, tartalmazó halmazai is lehetnek egymásnak, ezért megtalálni azt a halmazt, ami leírja őket, nehéz feladat. A következő definíciók segítenek megbecsülni, hogy mennyi vágó halmaz található egy $\mathcal{D}_{n,d}$-ben található pont környezetében. Legyen $c \in \mathcal{D}_{n,d}$.

- Ha létezik c-nek nyílt szomszédsága, amely csak véges sok vágó halmazt tartalmaz, akkor c *reguláris pont.*
- Ha c minden nyílt szomszédsága végtelen sok vágó halmazt tartalmaz, akkor c-t *gyenge kritikus pont*nak nevezzük $\mathcal{D}_{n,d}$-ben.
- Ha c minden U nyílt szomszédsága esetén, a $U \setminus \mathcal{D}_{n,d}^{0}$ halmazt nem lehet véges sok vágó halmazzal lefedni, akkor c *kritikus pont.*

Eredmények:

1. Legyen $c \in \mathbb{C}$ komplex. A $\mathcal{T}_{d,c}$ egy dimenziós leképezést l-szer alkalmazva az $a_0 \in \mathbb{E}_d$ számra:

   $$a_0 \underset{d,c}{\Rightarrow} a_1 \underset{d,c}{\Rightarrow} a_2 \underset{d,c}{\Rightarrow} a_3 \ldots \underset{d,c}{\Rightarrow} a_{l-1} \underset{d,c}{\Rightarrow} a_0,$$

   akkor és csak akkor jutunk ciklushoz, ha

   $$c \in \left(\frac{\mathbb{D}_d - a_1}{a_0} \right) \cap \left(\frac{\mathbb{D}_d - a_2}{a_1} \right) \cap \cdots \cap \left(\frac{\mathbb{D}_d - a_{l-1}}{a_{l-2}} \right) \cap \left(\frac{\mathbb{D}_d - a_0}{a_{l-1}} \right).$$

   Az l számot a ciklus hosszának nevezzük.

2.

$$\lfloor e \rfloor_d = \begin{cases} \left\lfloor Re(e) - \left\lfloor Im_d(e) + \frac{1}{2} \right\rfloor Re(\omega) \right\rfloor + \omega \left\lfloor Im_d(e) + \frac{1}{2} \right\rfloor, \text{ if} \\ \qquad \Big(Re(e) - \left\lfloor Re(e) - \left\lfloor Im_d(e) + \frac{1}{2} \right\rfloor Re(\omega) \right\rfloor - \\ \qquad - \left\lfloor Im_d(e) + \frac{1}{2} \right\rfloor Re(\omega) \Big)^2 + \\ \qquad + \left(Im(e) - \left\lfloor Im_d(e) + \frac{1}{2} \right\rfloor Im(\omega) \right)^2 < 1, \\ \left\lfloor Re(e) - \left\lfloor Im_d(e) + \frac{1}{2} \right\rfloor Re(\omega) \right\rfloor + \omega \left\lfloor Im_d(e) + \frac{1}{2} + 1 \right\rfloor, \text{ otherwise.} \end{cases}$$

3. Legyen $|c| > 1$, $d \in \{1, 2, 3, 7, 11\}$. Ekkor $\mathcal{T}_{d,c}$ ESRS nem rendelkezik véges tulajdonsággal.

4. Legyen $c \in \mathbb{C}$, $|c| < 1$. $\mathcal{T}_{d,c}$ akkor és csak akkor véges tulajdonságú ESRS, ha minden $a \in \mathbb{E}_d$-re, ahol $|a| < \frac{1}{1-|c|}$

$$a \underset{d,c}{\overset{*}{\Longrightarrow}} 0.$$

5. Legyen $c \in \mathbb{C}$, $|c| < 1 - \frac{1}{\sqrt{4}} = \frac{1}{2}$. $\mathcal{T}_{d,c}$ egy véges tulajdonságú ESRS, ha $c \in \mathbb{D}_d$. Ezen kívül, ha $d = 11$, akkor

$$c \notin \left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; |(-\omega)z + \omega - 1| \geq 1 \text{ } and \text{ } -\frac{\sqrt{11}}{4} < Im((-\omega)z + \omega) \right\}, \text{ és}$$

$$c \notin \left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; |(-1+\omega)z - \omega| \geq 1 \text{ } and \text{ } Im((-1+\omega)z + 1 - \omega) \leq \frac{\sqrt{11}}{4} \right\}.$$

6. A $\mathcal{D}_{1,2}^{(0)}$ és a $\mathcal{D}_{1,11}^{(0)}$ halmazok nem tartalmaznak gyengén kritikus pontokat (és így semmilyen kritikus pontot), $r \in \overline{\mathcal{D}_{1,2}^{(0)}}$ és $r \in \overline{\mathcal{D}_{1,11}^{(0)}}$. Pontosabban, a $\mathcal{D}_{1,2}^{(0)}$ és a $\mathcal{D}_{1,11}^{(0)}$ halmazokat az origó körüli 0.99 sugarú kör tartalmazza.

7. (Brunotte algoritmus általánosítása) Legyen $d \in \{1, 2, 3, 7, 11\}$, $c \in \mathbb{C}$ komplex szám, $|c| < 1$, legyen $c_E \in \mathbb{E}_d$ Euklideszi gyűrűbeli elem, $arg(c_E) = arg(c)$. $\mathcal{T}_{d,c}$ véges tulajdonságú ESRS, ha létezik c-hez egy $\mathcal{E}$ halmaz és véges sok elemet tartalmaz:

(a) $\overline{-c_E}, \overline{c_E} \in \mathcal{E}$,

(b) $a + b\omega \in \mathcal{E}$, ahol $a + b\omega \in \mathbb{D}_{d,\overline{c_E}}$, (a megfelelő ENS-hez tartozó vitorla számjegyhalmaz),

(c) ha $z \in \mathcal{E}$ akkor $\mathcal{T}_{d,c}(z), -\mathcal{T}_{d,c}(-z) \in \mathcal{E}$,

(d) bármely $z \in \mathcal{E}$ számhoz létezik $n \in \mathbb{Z}^+$, úgy, hogy $\mathcal{T}^n_{d,c}(z) = 0$.

Bibliography / Irodalom

[1] S. Akiyama, T. Borbély, H. Brunotte, A. Pethő and J. M. Thuswaldner, *Generalized radix representations and dynamical systems I.*, Acta Math. Hungar., Vol. 108, (2005), 207–238.

[2] S. Akiyama, H. Brunotte, A. Pethő and J. M. Thuswaldner, *Generalized radix representations and dynamical systems. II*, Acta Arith., Vol. 121, (2006), 21–61.

[3] S. Akiyama and K. Scheicher, *Symmetric shift radix systems and finite expansions*, Mathematica Pannonica, Vol. 18, Num. 1, (2007), 101–124.

[4] H. Brunotte, *On trinomial bases of radix representations of algebraic integers*, Acta Sci. Math. (Szeged), Vol. 67, (2001), 407–413.

[5] H. Brunotte, *Characterization of CNS trinomials*, Acta Scientiarum Mathematicarum (Szeged), Vol. 68, Num. 3,, (2002), 673–679.

[6] H. Brunotte, *Symmetric CNS Trinomials*, Integers, Vol. 9, Num. 3, (2009), 201–214.

[7] H. Brunotte, *Characterization of semi-CNS polynomials*, Acta Mathematica Academiae Paedagogicae Nyíregyháziensis, Vol. 28, Num. 2, (2012), 91–94.

[8] H. Brunotte, P. Kirschenhofer and J. M. Thuswaldner, *Shift radix systems for Gaussian integers and Pethő's loudspeaker*, Publ. Math. Debrecen, Vol. 79, (2011), 341–356.

[9] P. Burcsi and A. Kovács, *Exhaustive search methods for CNS polynomials*, Monatshefte für Mathematik,, Vol. 155, (2008), no. 3-4, 421–430.

[10] H. Davenport, *Indefinite binary quadratic forms and Euclid's algorithm in real quadratic fields*, Proc. London Math. Soc., Vol. 53, (1951), 75–82.

[11] L. E. Dickson, *Algebren und ihre Zahlentheorie*, Zürich und Leipzig, (1927), S. 150f.

[12] L. Germán and A. Kovács, *On number system constructions*, Acta Mathematica Hungarica, Vol. 115, Num. 1-2, (2007), 155–167.

[13] W. J. Gilbert, *Radix representation of Quadratic Fields*, Journal of mathematical analysis and applications 83, (1981), 264–274.

[14] V. Grünwald, *Intorno all'aritmetica dei sistemi numerici a base negativa con particolare riguardo al sistema numerico a base negativo-decimale per lo studio delle sue analogie coll'aritmetica ordinaria (decimale)*, Giornale di matematiche di Battaglini, Vol. 23, (1885), 203–221, 367.

[15] A. Huszti, K. Scheicher, P. Surer and J. M. Thuswaldner, *Three-Dimensional Symmetric Shift Radix Systems*, Acta Arith., Vol. 129, (2007), 147–166.

[16] I. Kátai and B. Kovács, *Kanonische Zahlensysteme in der Theorie der quadratischen Zahlen*, Acta Sci. Math. (Szeged), Vol. 42, (1980), 99–107.

[17] I. Kátai and B. Kovács, *Canonical number systems in imaginary quadratic fields*, Acta Math. Hungar., Vol. 37, (1981), 159–164.

[18] I. Kátai and J. Szabó, *Canonical number systems for complex integers*, Acta Sci. Math. (Szeged), Vol. 37, (1975), 255–260.

[19] H. L. Keng, *Introduction to number theory*, Springer Verlag Berlin Heidelberg New York, (1982).

[20] D. E. Knuth, *An imaginary number system*, ACM, Vol. 3, (1960), 245–247.

[21] B. Kovács, *Canonical number systems in algebraic number fields*, Acta Math. Acad. Sci. Hungar., Vol. 37, (1981), 405–407.

[22] W. Penney, *A "binary" system for complex numbers*, J. Assoc. Comput. Math., Vol. 12, (1965), 247–248.

[23] O. Perron, *Quadratische Zahlkörper mit Euklidischem Algorithmus*, Math. Annalen, Vol. 107, (1933), 489–495.

[24] A. Pethő, *Connections between power integral bases and radix representations in algebraic number fields*, Proc. 2003 Nagoya Conf. "Yokoi-Chowla Conjecture and Related Problems", Eds.: S-i. Katayama, C. Levesque and T. Nakahara, Furukawa Total Pr. (2004), 115–125.

[25] A. Pethő, *On a polynomial transformation and its application to the construction of a public key cryptosystem*, Computational Number Theory (Debrecen 1989), de Gruyter, Berlin, (1991), 31–43.

[26] A. Pethő and P. Varga, *Canonical number systems over imaginary quadratic Euclidean domains*, Colloquium Mathematicum, Vol. 146, Num. 2, (2017), 165–186.

[27] A. Pethő, P. Varga and M. Weitzer, *On Shift Radix Systems over Imaginary Quadratic Euclidean Domains*, Acta Cybernetica, (2015), 485–498.

[28] A. Rényi, *Representations for real numbers and their ergodic properties*, Acta Math. Acad. Sci. Hungar., Vol. 8, (1957), 477–493.

[29] K. Scheicher and J. M. Thuswaldner, *On the characterization of canonical number systems*, Osaka J. Math., Vol. 41, (2004), 327–351.

[30] P. Surer, *Characterization results for shift radix systems*, Mat. Pannon., Vol. 18, (2007), 265–297.

[31] P. Varga, *Characterization of semi-CNS polynomials*, 8th Joint Conf. on Math. and Comp. Sci., Komárno, Slovakia, (2010).

[32] A. Vince, *Replicating tesselations*, SIAM J. Discrete Math., Vol. 6, (1993), 501–521.

[33] M. Weitzer, *On the characterization of Pethő's Loudspeaker*, Publ. Math. Debrecen., to appear.

[34] M. Weitzer, *Characterization algorithms for shift radix systems with finiteness property*, Int. J. Number Theory, Vol. 11, (2015), 211–232.

Publications used in the dissertation / A disszertáció alapjául szolgáló cikkek

A. Pethő *and* P. Varga, Canonical number systems over imaginary quadratic Euclidean domains, *Colloquium Mathematicum, Vol. 146, Num. 2, (2017), 165–186.*
A. Pethő, P. Varga *and* M. Weitzer, On Shift Radix Systems over Imaginary Quadratic Euclidean Domains, *Acta Cybernetica, (2015), 485–498.*

Registry number: DEENK/37/2017.PL
Subject: PhD Publikációs Lista

Candidate: Péter Varga
Neptun ID: I5ZM8F
Doctoral School: Doctoral School of Literature

List of publications related to the dissertation

Foreign language scientific articles in Hungarian journals (1)

1. Pethő, A., **Varga, P.**, Weitzer, M.: On shift radix systems over imaginary quadratic Euclidean domains.
   Acta Cybern. 22 (2), 485-498, 2015. ISSN: 0324-721X.
   DOI: http://dx.doi.org/10.14232/actacyb.22.2.2015.14

Foreign language scientific articles in international journals (1)

2. Pethő, A., **Varga, P.**: Canonical number systems over imaginary quadratic Euclidean domains.
   Colloq. Math. 146 (2), 165-186, 2017. ISSN: 0010-1354.
   DOI: http://dx.doi.org/10.4064/cm6728-12-2015
   IF: 0.333 (2015)

List of other publications

Foreign language Hungarian books (1)

3. Nagy, B., **Varga, P.**: Iteration-free normal form for context-sensitive grammars. Faculty of Informatics, University of Debrecen, Debrecen, Hungary, (Technical Report 2007/8.), [18] p., 2007.

Foreign language Hungarian book chapters (2)

4. **Varga, P.**: Characterization of semi-CNS polynomials.
In: The 8th Joint Conference on Mathematics and Computer Science : Selected Papers. Ed.: Pop, Horia F. et al, Novadat, Győr, 67-85, 2011. ISBN: 9789639056381
5. Aszalós, L., Bátfai, N., Csirmaz, L., Folláth, J., Hajduné Pocsai, E., Herendi, T., Kovács, T., Matolcsy, Z., Pethő, A., **Varga, P.**: Secure utilization of local and regional data assets through mobile environments.
In: Proceedings of The 8th International Conference on Applied Informatics : Eger, Hungary, January 27 - 30, 2010. Ed.: Attila Egri-Nagy [et al.], [Eszterházy Károly Főiskola], [Eger], 265-272, [2011]. ISBN: 9789639894723

Foreign language international book chapters (1)

6. Nagy, B., **Varga, P.**: A new normal form for context-sensitive grammars.
In: SOFSEM 2009 : 35th Conference on Current Trends in Theory and Practice of Computer Science, Spindleruv Mlyn, Czech Republic. Vol. II.. Ed.: Nielsen, Mogens, Antonin Kucera, Peter Bro Miltersen, Catuscia Palamidessi, Petr Tuma Frank, Mary Valencia Bieliková, Matfyzpress, Prague, 60-71, 2009. ISBN: 9788073780593

Total IF of journals (all publications): 0,333
Total IF of journals (publications related to the dissertation): 0,333

The Candidate's publication data submitted to the iDEa Tudóstér have been validated by DEENK on the basis of Web of Science, Scopus and Journal Citation Report (Impact Factor) databases.

28 February, 2017

Nyilvántartási szám: DEENK/37/2017.PL
Tárgy: PhD Publikációs Lista

Jelölt: Varga Péter
Neptun kód: I5ZM8F
Doktori Iskola: Informatikai Tudományok Doktori Iskola

A PhD értekezés alapjául szolgáló közlemények

Idegen nyelvű tudományos közlemények hazai folyóiratban (1)

1. Pethő, A., **Varga, P.**, Weitzer, M.: On shift radix systems over imaginary quadratic Euclidean domains.
   Acta Cybern. 22 (2), 485-498, 2015. ISSN: 0324-721X.
   DOI: http://dx.doi.org/10.14232/actacyb.22.2.2015.14

Idegen nyelvű tudományos közlemények külföldi folyóiratban (1)

2. Pethő, A., **Varga, P.**: Canonical number systems over imaginary quadratic Euclidean domains.
   Colloq. Math. 146 (2), 165-186, 2017. ISSN: 0010-1354.
   DOI: http://dx.doi.org/10.4064/cm6728-12-2015
   IF: 0.333 (2015)

További közlemények

Idegen nyelvű, hazai könyvek (1)

3. Nagy, B., **Varga, P.**: Iteration-free normal form for context-sensitive grammars. Faculty of Informatics, University of Debrecen, Debrecen, Hungary, (Technical Report 2007/8.) , [18] p., 2007.

Idegen nyelvű, hazai könyvrészletek (2)

4. **Varga, P.**: Characterization of semi-CNS polynomials.
   In: The 8th Joint Conference on Mathematics and Computer Science : Selected Papers. Ed.: Pop, Horia F. et al, Novadat, Győr, 67-85, 2011. ISBN: 9789639056381

5. Aszalós, L., Bátfai, N., Csirmaz, L., Folláth, J., Hajduné Pocsai, E., Herendi, T., Kovács, T., Matolcsy, Z., Pethő, A., **Varga, P.**: Secure utilization of local and regional data assets through mobile environments.
   In: Proceedings of The 8th International Conference on Applied Informatics : Eger, Hungary, January 27 - 30, 2010. Ed.: Attila Egri-Nagy [et al.], [Eszterházy Károly Főiskola], [Eger], 265-272, [2011]. ISBN: 9789639894723

Idegen nyelvű, külföldi könyvrészletek (1)

6. Nagy, B., **Varga, P.**: A new normal form for context-sensitive grammars.
   In: SOFSEM 2009 : 35th Conference on Current Trends in Theory and Practice of Computer Science, Spindleruv Mlyn, Czech Republic. Vol. II.. Ed.: Nielsen, Mogens, Antonin Kucera, Peter Bro Miltersen, Catuscia Palamidessi, Petr Tuma Frank, Mary Valencia Bieliková, Matfyzpress, Prague, 60-71, 2009. ISBN: 9788073780593

A közlő folyóiratok összesített impakt faktora: 0,333
A közlő folyóiratok összesített impakt faktora (az értekezés alapjául szolgáló közleményekre): 0,333

A DEENK a Jelölt által az iDEa Tudóstérbe feltöltött adatok bibliográfiai és tudománymetriai ellenőrzését a tudományos adatbázisok és a Journal Citation Reports Impact Factor lista alapján elvégezte.

Debrecen, 2017.02.28.