

Doktori (PhD) értekezés tézisei

Abstract of PhD Thesis

**Fázisátalakulások vizsgálata Renormálási
Csoport módszerrel**

**Study of Phase Transitions by the
Functional Renormalization Group Method**

Borbélyné Bacsó Viktória

Témavezető/Supervisor
Dr. Nándori István



Debreceni Egyetem
Fizikai Tudományok Doktori Iskolája
University of Debrecen
PhD School in Physics
Debrecen, 2018

1. Bevezetés

Ha a modern fizika alappilléireiről van szó, még a nem szakmabeliek között is viszonylag magától értetődő a kvantumelmélet és a relativitáselmélet említése. Azonban van egy olyan terület, a fázisátalakulások elmélete, amely kevésbé tűnik meghatározó jelentőségűnek, pedig szintén alapvető fontosságú. Gondoljunk csak arra, hogy a Világegyetem is fázisátalakulások során nyerte el a ma ismert alakját. Vagy említhetjük a CERN-ben nemrég felfedezett Higgs részecskét, ami szintén egy fázisátmenet, az elektrogyenge fázisátalakulás során ad tömeget elemi részecskéknak.

Fázisátalakulásokkal már elemi tanulmányaink során is találkozunk, és jellemzésükre bevezetünk termodinamikai fogalmakat, mint például fázisátalakulási hőmérséklet, látens hő, stb. Ha azonban a termodinamika alapjául szolgáló statisztikus fizikából indulunk ki és egészen precíz leírást akarunk, akkor be kell vezetnünk a renormálási csoport módszert. Jelen értekezésben fázisátalakulások vizsgálatával foglalkozom az úgynevezett funkcionális renormálási csoport használatával.

2. Célkitűzés

Az általam alkalmazott eljárás fontos eleme, hogy klasszikus statisztikus fizikai rendszerek leképezhetők kvantumtérelméleti modellekre, amelyek viszonylag könnyen tanulmányozhatók renormálási csoport módszer funkcionális (vagy egzakt) alakjával, azaz a Wetterich egyenlettel. Speciális, úgynevezett sine-Gordon típusú kvantumtérelméleti modelleket vizsgálók, amelyek közös jellemzője, hogy tartalmaznak egy periodikus önkölcsönhatást és számos fontos fizikai alkalmazással bírnak. Ilyenek például bizonyos két-dimenziós rendszerekben (szupravezető, szuperfolyékony filmek) tapasztalható topológikus fázisátalakulások, melyek elméleti leírásáért (illetve a topológikus fázisok vizsgálatáért) ítéltek oda a 2016-os fizikai Nobel díjat David J. Thouless, F. Duncan M. Haldane, és J. Michael Kosterlitz kutatóknak.

A szakirodalomban ismert a sine-Gordon modell $d = 2$ dimenzióban vett funkcionális renormálási csoport vizsgálata, ami az értekezésem alapjául szolgál.

A következő kérdésekre kerestem a választ. Milyen a sine-Gordon modell fázisszerkezete $d < 2$ dimenzióban? Lehet-e reprodukálni a kétdimenziós sine-Gordon modell (konformtérelméletből ismert) c-

függvényét az általam használt funkcionális renormálási módszer keretében? Milyen a fáziszerkezete a sine-Gordon elmélet módosításával kapott sinh-Gordon modellnek, illetve a köztük interpoláló modelleknek?

3. Módszer

A fáziszerkezet vizsgálatához a funkcionális renormálási csoport (FRG) módszert használtam, amelynek modern megfogalmazása a Wetterich RG egyenlet (1), amely egy egykomponensű skalártér esetén a következő alakot ölti

$$k\partial_k\Gamma_k[\varphi] = \frac{1}{2}\text{Tr} \left(\frac{k\partial_k R_k}{R_k + \Gamma_k^{(2)}[\varphi]} \right), \quad (1)$$

ahol $\Gamma_k[\varphi]$ a blokkosított hatás $\Gamma_k^{(2)}[\varphi] \equiv \partial_\varphi^2 \Gamma_k[\varphi]$.

A Wetterich RG egyenlet közelítésekkel oldható meg, hiszen egy parciális integro-differenciál egyenletről van szó. A gradiens sorfejtés vezető rendjében (LPA), a Wetterich egyenlet (1) egy közönséges differenciálegyenletté redukálódik, ami egy skálafüggő potenciálra $V_k(\varphi)$ vonatkozik (konstans térkonfigurációval $\varphi(x) = \varphi$)

$$k\partial_k V_k(\varphi) = \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{d^d p}{(2\pi)^2} \frac{k\partial_k R_k}{R_k + p^2 + V_k''}, \quad (2)$$

ahol $V_k'' = \partial_\varphi^2 V_k$ és használva a dimenziótlan regulátort ($r(y) = R_k/p^2$), tovább egyszerűsödik az alábbiak szerint

$$k\partial_k V_k(\varphi) = -\alpha_d k^d \int_0^\infty dy \frac{r' y^{\frac{d}{2}+1}}{[1+r]y + \frac{V_k''}{k^2}}, \quad (3)$$

ahol $\alpha_d = \Omega_d/(2(2\pi)^d)$, $\Omega_d = 2\pi^{d/2}/\Gamma(d/2)$ és $y = p^2/k^2$ és $r' = dr/dy$. A megfelelő dimenziótlan formát így írhatjuk

$$\left(d - \frac{d-2}{2} \tilde{\varphi} \partial_{\tilde{\varphi}} + k\partial_k \right) \tilde{V}_k(\tilde{\varphi}) = -\alpha_d \int_0^\infty dy \frac{r' y^{\frac{d}{2}+1}}{[1+r]y + \tilde{V}_k''} \quad (4)$$

ami érvényes a skálafüggő, dimenziótlan potenciálra $\tilde{V}_k(\tilde{\varphi})$. Az integrál a (4) egyenletben általában numerikusan végrehajtható, bár az analitikus forma elérhető néhány típusú regulátorra.

Gyengébb megszorítást, azaz pontosabb közelítést jelent az LPA', ahol a gradiens sorfejtést LPA-hoz képest eggyel magasabb renddel bezárólag végezzük. Azaz ebben az esetben a hullámfüggvény renormálási együttható is egy futó csatolás szerepét tölti be, azonban térfüggetlen, $Z_k = Z_k(\Lambda)$,

$$\Gamma_k[\varphi] = \int d^d x \left[\frac{1}{2} Z_k (\partial_\mu \varphi) (\partial^\mu \varphi) + V_k(\varphi) \right]. \quad (5)$$

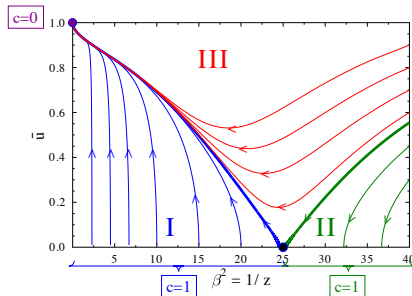
Ebben a közelítésben a Wetterich egyenlet két differenciálegyenletre redukálódik a skálafüggő potenciál és a térfüggetlen hullámfüggvény renormálással.

4. Új tudományos eredmények

A bemutatott kutatómunkám kiinduló pontjául szolgált a két-dimenziós sine-Gordon modell szakirodalomban ismert FRG vizsgálata. A sine-Gordon (SG) modell blokkosított (euklideszi) hatása a következő alakú

$$\Gamma_k[\varphi] = \int d^d x \left[\frac{1}{2} (\partial_\mu \varphi)^2 + u_k \cos(\beta \varphi) \right]. \quad (6)$$

ahol a frekvencia β skálafüggetlen LPA-ban és skálafüggő LPA'-ban. Az SG modell ismert fázisdiagramját a 1. ábrán mutatom be, feltüntetve a c -függvény értékét a fixpontokban.



1. ábra. Az SG modell RG diagramja skálafüggő frekvencia közelítésnél.

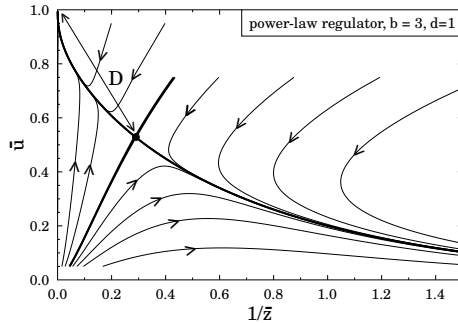
Az értekezésben ismertetett saját eredményeimet a 4-6 fejezetekben tárgyaltam, és négy tézispontba rendeztem a következő sorrendben.

Milyen a sine-Gordon modell fázisszerkezete $d < 2$ dimenzióban?

Az FRG egyenlet megoldása közelítések segítségével adható meg. Az így kapott megoldás egyrészt függ az FRG módszer regulátorától, másrészt a fázisszerkezetről kapott információ sem teljes. Megmutattam például, hogy az LPA' közelítésben vett FRG módszer spontán szimmetriasértő fázis jelenlétét jósolja $d = 1$ esetben, ami bizonyosan helytelen, hiszen a $d = 1$ dimenzió esetén a sine-Gordon kvantumtérelmélet nem más, mint egy kvantummechanikai rendszer, ahol az alagút effektus miatt spontán szimmetriasérítés nem létezhet. Ezt felhasználva bevezettem egy új optimalizálási eljárást, amely azon alapult, hogy a regulátor megválasztásától függ a helytelenül megjelenő szimmetriasértett fázis „nagysága”, lásd 2. ábra.

T1: Azaz új optimalizálási eljárást javasoltam, amely arra épül, hogy a közelítő hatás funkcionál az egzakt tulajdonságoknak ellentmondó eredményre vezet és az ellentmondás „mértéke” az optimális regulátornál a legkisebb. Azonban megfelelően feljavított hatásfunkcionál esetén visszakapnánk az elvárt fázisszerkezetet.

A tézispontozhoz kapcsolódó publikáció: [1].



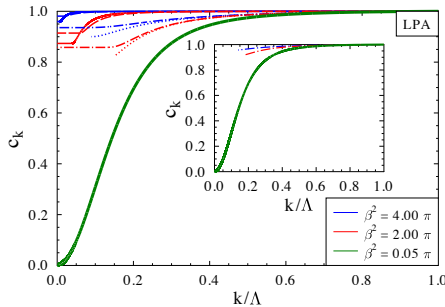
2. ábra. Az SG modell fázisdiagramja $d = 1$ dimenzióban.

Lehet-e reprodukálni a kétdimenziós sine-Gordon modell (konformtérelméletből ismert) c -függvényét az általam használt funkcionális renormálási módszer keretében?

Megvizsgáltam, hogy az SG modell ismert c -függvénye és c centrális töltése reprodukálható-e az FRG módszer segítségével LPA közelítésben. Csak a $\beta_{k \equiv \Lambda} \rightarrow 0$ kezdőérték mellett kapjuk vissza a $\Delta c = 1$ értéket, lásd 3. ábra.

T2: Megállapítottam, hogy LPA közelítésben az ismert c -függvény értékek csak a $\beta_{k \equiv \Lambda} \rightarrow 0$ limeszben reprodukálhatók.

A tézispontozhoz kapcsolódó publikáció: [2].



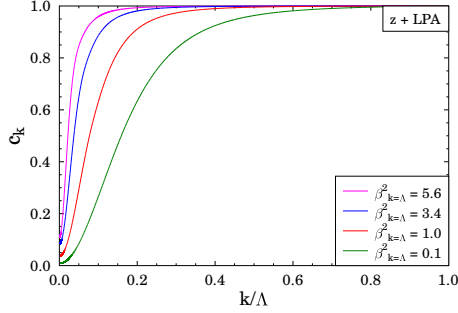
3. ábra. c -függvény RG futása LPA esetén az egyetlen frekvenciát tartalmazó SG modellre különböző frekvencia-kezdőértékekre, különböző regulátorokkal.

Megvizsgáltam, hogy hullámfüggvény renormálás figyelembevételével reprodukálható-e az SG modell c -függvénye és a fixpontokban felvett centrális töltés értékei az FRG módszer keretében.

T3: Megállapítottam, hogy LPA' közelítésben a modell tömeges fázisban (lásd I. tartomány a 1 ábrán) tetszőleges ($\beta^2 < 8\pi$) frekvencia esetén jó egyezést kaphatunk a szakirodalommal.

A tézispontozhoz kapcsolódó publikáció: [2].

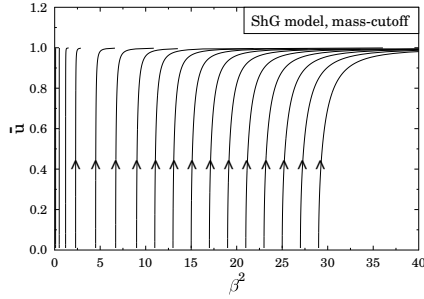
Ez tekinthető a szakirodalomban közölt c -függvényre vonatkozó FRG formula első nem triviális alkalmazásának, mert tetszőleges $\beta_{k\equiv\Lambda} < 8\pi$ UV kezdőértékre sikerült jó pontossággal visszakapni az egzakt $\Delta c = 1$ értéket, lásd 4. ábra.



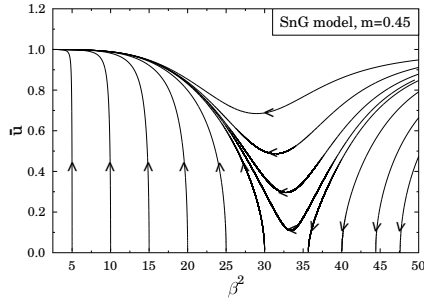
4. ábra. c -függvény RG futása LPA' esetén az egyetlen frekvenciát tartalmazó SG modellekre különböző frekvencia-kezdőértékekre.

Milyen a fázisszerkezete a sine-Gordon elmélet módosításával kapott sinh-Gordon modellnek, illetve a közöttük interpoláló modelleknek?

A Sinh-Gordon (ShG) modell olyan skalártérelmélet, ahol az önkölcsönhatást leíró potenciál egy hiperbolikus függvény ($\cosh(\beta\varphi)$), amit úgy kapunk, hogy a periodikus SG modellben a (valós) frekvenciát képzetesre cseréljük ($\beta \rightarrow i\beta$). A szakirodalomban ismert egy, az SG és ShG között polinomiális függvényeken keresztül interpoláló modell, a Shine-Gordon elmélet. RG futások eredménye az ShG modell esetén a 5. ábrán, az SnG elmélet esetén az 6. ábrán látható.



5. ábra. A ShG modell fázisszerkezete.



6. ábra. A SnG modell fázisszerkezete.

T4: Az FRG módszer alkalmazásával megmutattam, hogy az ShG modellnek egyetlen fázisa van, amelyet kritikus vonal határol. Megadtam egy periodikus interpoláló modellt, az Sn-Gordon (SnG) skalárelméletet, és meghatároztam az SnG modell fázisszerkezetét, amelyet BKT típusú fázisátmenet jellemez, kivéve az interpoláció egyik végpontját, azaz az ShG elméletet. Származtattam a fázisokat szeparáló kritikus frekvencia változását az interpoláció során és megmutattam, hogy az Sn-Gordon modell $m \rightarrow 1$ határátmenete nem analitikus.

A tézispontozhoz kapcsolódó publikáció: [3].

1. Introduction

If one has to identify the "pillars" of modern physics it is almost obvious (even for non-experts) to mention quantum theory and special relativity. Let me note that statistical physics should also be mentioned nevertheless it seems less important but it is easy to show that it plays a fundamental role in various fields of contemporary physics. Indeed, the Universe has gone through several phase transitions in order to reach its present form. Another example is the Higgs particle recently discovered at CERN which gives mass to gauge particles through the electroweak phase transition.

Phase transitions are known from our elementary studies where we introduce thermodynamical quantities (such as transition temperature, latent heat etc) to describe the physics behind them. However, if one would like to consider phase transitions in the framework of statistical physics in details, then, the method of renormalization group is unavoidable. In this Thesis I investigate phase transitions by the functional (or exact) renormalisation group (FRG) method.

2. Goals

One of the important step of the applied procedure is the mapping between statistical models and quantum field theories (QFT) where the latter can be studied easily by the FRG method, i.e. by the Wetterich equation. Therefore, in order to consider statistical systems close to phase transitions it is sufficient to determine the corresponding QFT-s and then derive their critical behaviour. I studied Sine-Gordon-type QFT models which consist of periodic self-interactions and they have relevance in solid state and particle physics, too. For example, these models are used to describe the topological phase transitions of two-dimensional superconducting and superfluid systems. In the year 2016, the Nobel prize has been awarded to David J. Thouless, F. Duncan M. Haldane and J. Michael Kosterlitz for the study of topological phases and phase transitions.

The FRG study of the SG model in $d = 2$ dimensions is known from the literature and serves as the basis of the results presented in this Thesis.

I was looking for answers to the following questions. What is the phase structure of the SG model for dimensions $d < 2$? Can the c-function of the two-dimensional SG model known from CFT be re-

produced in the framework of the FRG method? What is the phase structure of the Sinh-Gordon (ShG) model which is the analytical continuation of the SG theory and in addition what are the phase structures of interpolating models between the SG and ShG theories?

3. Method

To map out the phase structure of various QFT models I used the functional renormalization group (FRG) method which has been developed over the last few decades and its modern form is known as the Wetterich FRG equation (7) which has the following form for the one-component scalar field

$$k\partial_k\Gamma_k[\varphi] = \frac{1}{2}\text{Tr} \left(\frac{k\partial_k R_k}{R_k + \Gamma_k^{(2)}[\varphi]} \right). \quad (7)$$

where $\Gamma_k[\varphi]$ is the blocked action with $\Gamma_k^{(2)}[\varphi] \equiv \partial_\varphi^2 \Gamma_k[\varphi]$.

The Wetterich equation is a partial integro-differential equation, thus, approximations are needed if one would like to look for its solution. In the leading order of the gradient (derivative) expansion (LPA) the Wetterich equation (7) reduces to an ordinary differential equation standing for the scale-dependent local potential $V_k(\varphi)$ (with constant field configuration $\varphi(x) = \varphi$),

$$k\partial_k V_k(\varphi) = \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{d^d p}{(2\pi)^2} \frac{k\partial_k R_k}{R_k + p^2 + V_k''}, \quad (8)$$

where $V_k'' = \partial_\varphi^2 V_k$ and by using a dimensionless regulator function ($r(y) = R_k/p^2$), it can be further simplified

$$k\partial_k V_k(\varphi) = -\alpha_d k^d \int_0^\infty dy \frac{r' y^{\frac{d}{2}+1}}{[1+r] y + \frac{V_k''}{k^2}}, \quad (9)$$

where $\alpha_d = \Omega_d/(2(2\pi)^d)$, $\Omega_d = 2\pi^{d/2}/\Gamma(d/2)$ and $y = p^2/k^2$ and $r' = dr/dy$. Its dimensionless form reads as

$$\left(d - \frac{d-2}{2} \tilde{\varphi} \partial_{\tilde{\varphi}} + k \partial_k \right) \tilde{V}_k(\tilde{\varphi}) = -\alpha_d \int_0^\infty dy \frac{r' y^{\frac{d}{2}+1}}{[1+r] y + \tilde{V}_k''} \quad (10)$$

which stands for the scale-dependent dimensionless potential $\tilde{V}_k(\tilde{\varphi})$. The momentum integral in (10) can be calculated either numerically (this is the typical case) or analytically for some special regulators.

Weaker constraint, i.e., more accurate description can be achieved by the next-to-leading order of the gradient expansion, i.e., the LPA'. In this case the wavefunction renormalization is considered to be a running parameter but independent of the field variable, $Z_k = Z_k(\Lambda)$,

$$\Gamma_k[\varphi] = \int d^d x \left[\frac{1}{2} Z_k (\partial_\mu \varphi) (\partial^\mu \varphi) + V_k(\varphi) \right]. \quad (11)$$

At this level of approximation, the Wetterich equation splits into two coupled differential equations, one for the potential and another one for the (field-independent) wavefunction renormalization.

4. Scientific results

The applied method and consequently the findings of this Thesis are based on the FRG study at the two-dimensional Sine-Gordon model (SG) known from the literature. The blocked (Euclidean) action of the SG model is the following

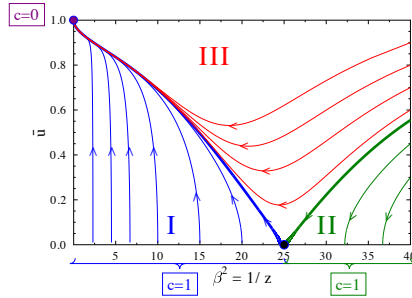
$$\Gamma_k[\varphi] = \int d^d x \left[\frac{1}{2} (\partial_\mu \varphi)^2 + u_k \cos(\beta \varphi) \right], \quad (12)$$

where the frequency β is scale-independent in LPA, and considered to be scale-dependent in LPA' (after rescaling the field variable). The known phase diagram of the SG model is shown in Fig. 7 including the value of the central charge at the fixed points.

My own results presented in section 4-6 of the Thesis are the following.

What is the phase structure of the SG model for dimensions $d < 2$?

Solution of the FRG equation requires approximations which on the one hand depend on choice of the regulator of the RG method and on the other hand the resulting phase structure is not complete. I showed, for example, that FRG method at LPA' signals the existence of spontaneous symmetry breaking (SSB) in $d = 1$ dimensions although it

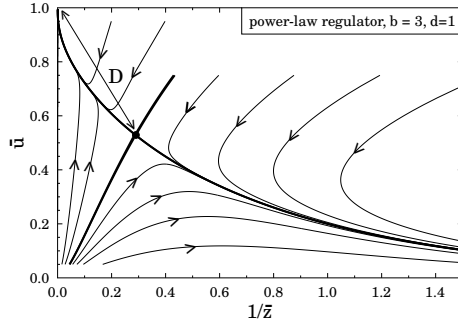


7. ábra. RG flow diagram of the SG model in LPA'.

is for sure incorrect since the one-dimensional SG model is equivalent to a quantum rotor, where due to tunneling, SSB is not allowed. By using this fact I selected between the regulators since the „area” of the SSB phase depends on the particular choice of the regulator function, see Fig. 8.

T1: Thus, I proposed a new optimization method based on the fact that approximations of the functional form of the action lead to contradictions to the (exact) known results and the optimised regulator provides us the „smallest disagreement” which otherwise should disappear if the functional form of the action is improved appropriately.

Publications connected to this thesis point are: [1].



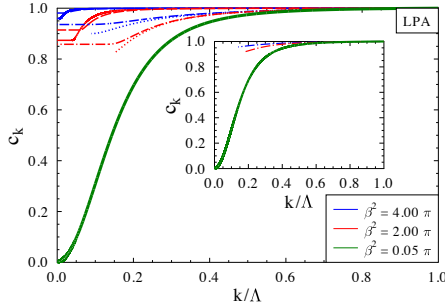
8. ábra. Phase diagram of the SG model in $d = 1$ dimensions.

Can the c-function of the two-dimensional SG model known from CFT be reproduced in the framework of the FRG method?

I investigated whether the known c-function and central charge of the SG model can be reproduced by the FRG method in LPA. The exact (known) result for the difference of the central charge $\Delta c = 1$ can only be recovered by FRG if the UV initial value for the frequency is set to be zero, i.e., $\beta_{k \equiv \Lambda} \rightarrow 0$, see Fig. 9.

T2: I showed that in local potential approximation (LPA) known results are recovered in the limit $\beta \rightarrow 0$ only.

Publications connected to this thesis point are: [2].



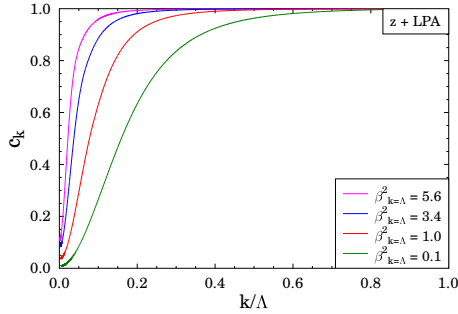
9. ábra. RG running of the c -function of the single-frequency SG model obtained at LPA for various initial values for the frequency and for various choices for the regulator functions.

I investigated whether the inclusion of wave function renormalization is sufficient to recover the known c -function and central charge of the SG model in the framework of the FRG method.

T3: I demonstrated that at the LPA' a good agreement with the known results can be achieved for arbitrary frequency ($\beta^2 < 8\pi$) in the so-called massive phase of the model, (see region I. of Fig. 7).

Publications connected to this thesis point are: [2].

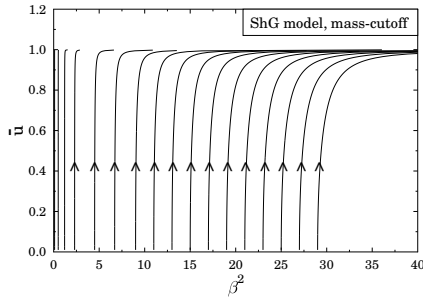
Indeed, the difference of central charges associated to fixed points of the SG model can be reproduced in the FRG method which is considered as the first non-trivial application of the c -function formula taken from literature. The known result $\Delta c = 1$ is reproduced for arbitrary initial value for the frequency in the range $\beta_{k\equiv\Lambda} < 8\pi$, see Fig. 10.



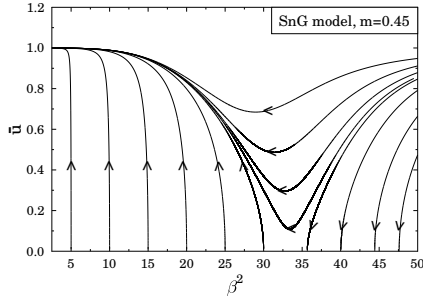
10. ábra. RG running of the c -function of the single-frequency SG model obtained at LPA' for various initial values for the frequency.

What is the phase structure of the Sinh-Gordon (ShG) model which is the analytical continuation of the SG theory and in addition what are the phase structures of interpolating models between the SG and ShG theories?

The Sinh-Gordon (ShG) model is a scalar field theory, where the self-interaction is given by a hyperbolic function ($\cosh(\beta\varphi)$), which can be obtained by replacing the real value frequency with an imaginary one ($\beta \rightarrow i\beta$) in the SG model. The Shine-Gordon model is known to interpolate between the SG and ShG models through non-periodic (polynomial) functions. The RG running of the ShG and SG models are shown in Fig. 11 and Fig. 12 respectively.



11. ábra. Phase structure of the ShG model.



12. ábra. Phase structure of the SnG model.

T4: I showed by FRG method that the ShG model has a single phase bounded by a critical line. I constructed a periodic scalar field theory, the Sn-Gordon (SnG) model, which interpolates between the SG and ShG theories and I showed that it undergoes a BKT-type phase transition, except the end-point of the interpolation, i.e., the case of the ShG theory. I determined the change in the critical frequency over interpolation and showed that the limit $m \rightarrow 1$ of the SnG model is non-analytic.

Publications connected to this thesis point are: [3].

5. Közlemények a disszertáció tárgyköréből /Publications related to the dissertation

Referált folyóiratcikkek/Scientific papers in refereed journals

1. I. Nándori, I. G. Márián, **V. Bacsó**, *Spontaneous symmetry breaking and optimization of functional renormalization group*, Phys. Rev. D **89** (2014) 047701.
Impact: **4.864**, Citations: **11**
2. **V. Bacsó**, N. Defenu, A. Trombettoni, I. Nandori, *C-function and central charge of the sine-Gordon model from the non-perturbative renormalization group flow*, Nucl. Phys. B **901** (2015) 444.
Impact: **3.929**, Citations: **4**

Nem referált közlemények

3. N. Defenu, **V. Bacsó**, I. G. Marian, I. Nandori, A. Trombettoni, *Criticality of models interpolating between the sine- and the sinh-Gordon Lagrangians*, arXiv:1706.01444 [hep-th]
Impact: **0.000**, Citations: **1**

Poszterek/Posters

- **Bacsó V.**, Márián I. G., Nándori I., *Spontán szimmetriasértés és a Funkcionális Renormálási Csoport*
Poszter, Magyar Fizikus Vándorgyűlés - Debrecen (2013).
- **Bacsó V.**, Márián I. G., Nándori I., *A sinh-Gordon rejtély*
Poszter, Magyar Fizikus Vándorgyűlés - Szeged (2016).
- **V. Bacsó**, N. Defenu, I. G. Márián, I. Nándori, A. Trombettoni
The Sinh-Gordon Puzzle
Poszter, 8th International Conference on the Exact Renormalization Group - ERG2016 Trieste - Sissa (2016).

6. Nem a disszertáció alapjául szolgáló közlemények/Publications not related to the dissertation

1. **Bacsó V.**, Rácz J., *Mágneses nanorészecske hipertermia kísérleti bemutatójának lehetőségei a középiskolában.*
Poszter, Science on Stage fesztivál - Debrecen (2016).