

DOKTORI (PhD) ÉRTEKEZÉS

Miskolczi Panna

Debrecen

2017

DEBRECENI EGYETEM
GAZDÁLKODÁSTUDOMÁNYI KAR
SZÁMVITELI ÉS PÉNZÜGYI INTÉZET

IHRIG KÁROLY GAZDÁLKODÁS- ÉS SZERVEZÉSTUDOMÁNYOK
DOKTORI ISKOLA

Doktori iskola vezető: **Prof. Dr. Popp József** egyetemi tanár, DSc

RÉSZVÉNYPORTFÓLIÓK KOCKÁZATÁNAK
NÉHÁNY MÉRÉSI LEHETŐSÉGE

Készítette:

Miskolczi Panna

Témavezető:

Dr. Tarnóczy Tibor

egyetemi docens, PhD

DEBRECEN

2017.

A doktori értekezés betétlapja

Részvényportfóliók kockázatának néhány mérési lehetősége

Értekezés a doktori (PhD) fokozat megszerzése érdekében
a Gazdaság- és szervezéstudományok tudományágban

Írta: Miskolczi Panna, okleveles alkalmazott matematikus

Készült a Debreceni Egyetem Ihrig Károly Gazdálkodás- és Szervezéstudományok doktori
iskolája (Gazdálkodástudományi programja) keretében

Témavezető: Dr. Tarnóczy Tibor

A doktori szigorlati bizottság:

elnök: Dr.

tagok: Dr.

Dr.

A doktori szigorlat időpontja: 20... .

Az értekezés bírálói:

Dr.

Dr.

Dr.

A bírálóbizottság:

elnök: Dr.

tagok: Dr.

Dr.

Dr.

Dr.

Az értekezés védésének időpontja: 20... .

Tartalomjegyzék

Bevezetés	9
1. Témafelvetés és célkitűzés	11
2. Szakirodalmi áttekintés	15
2.1. Hogyan mérjük a kockázatot? A kockázati mértékek	15
2.1.1. Variancia és szórás	18
2.1.2. Szemivariancia	20
2.1.3. A kockáztatott érték (VaR)	21
2.1.4. Várható veszteség (ES)	32
2.2. A függőségi struktúra	37
2.2.1. Lineáris korreláció	37
2.2.2. Rangkorreláció	39
2.2.3. Szélekben való függőség	42
2.2.4. Kopula függvények	44
3. Anyag és módszer	65
3.1. Az adatok	65
3.1.1. Alapvető statisztikák és normalitásvizsgálat	67
3.1.2. A vizsgált részvények kockázata	72
3.2. A hozam	72
3.2.1. Részvény hozama	73
3.2.2. Portfólió hozama	76
4. Vizsgálati eredmények és azok értékelése	79
4.1. Kockázati mértékek	79
4.2. Egyszerű vs. logaritmikus hozam	79

4.2.1.	A részvények, valamint a belőlük képzett portfólió egyszerű és logaritmikus hozam-eloszlásainak összehasonlítása	80
4.2.2.	A kockázati sorrend összehasonlítása egyszerű és logaritmikus hozamok esetén	84
4.3.	Utótesztelés	89
4.3.1.	Utótesztelés történeti szimuláció segítségével	91
4.3.2.	VaR vs. ES	92
4.3.3.	Eredmények	96
4.4.	A hozam-variancia kritérium helyett a hozam-ES kritérium használata megváltoztatja a portfólióval kapcsolatos döntéseinket	97
4.4.1.	Hozam-variancia portfólió optimalizáció	98
4.4.2.	Hozam-ES portfólió optimalizáció	106
4.4.3.	Összehasonlítás	109
4.5.	A kopulafüggvény hatása a kockázatszámítás pontosságára	114
4.5.1.	Páronkénti korreláció	114
4.5.2.	Kopula	114
5.	Következtetések, javaslatok	127
6.	Az értekezés fontosabb megállapításai, új illetve újszerű eredményei	131
	Összefoglalás	133
	Summary	137
	Irodalomjegyzék	141
	Táblázatok jegyzéke	147
	Ábrák jegyzéke	149
A.	Kockázati mértékek tulajdonságainak vizsgálata	151
A.1.	Variancia tulajdonságai	151
A.2.	Szórás tulajdonságai	152
A.3.	Szemivariancia tulajdonságai	153
A.4.	Kockázatosított érték tulajdonságai	154
A.5.	Expected Shortfall tulajdonságai	157

B. Elliptikus eloszlások	161
C. R kódok	165
C.1. Egyszerű vs. logaritmikus hozam	165
C.2. Utótesztelés történeti szimuláció segítségével	174
C.3. Kopulán alapuló Monte Carlo szimuláció	178
Nyilatkozat	183

Bevezetés

Az élet folyamatosan döntések elé állít minket. Több száz kisebb döntést hozunk meg naponta, és több-kevesebb nagyobb döntéssel is meg kell birkóznunk az életünk során. Az élet tulajdonképpen ezeknek a kisebb-nagyobb döntéseknek a láncolata, folyamata. Ez azt jelenti, hogy a pillanatnyi döntéseink segítségével irányíthatjuk a közeli és a távolabbi jövőnket, azaz az életünket. Ez a fajta felfogás az életről, vagyis, hogy a jövő tudatos döntéseink sorozata, nem volt mindig jelen a társadalomban. Az emberiség történetében nagy áttörésnek számított az a felismerés, hogy a jövő nem feltétlen az istenek szeszélyének a játéka (BERNSTEIN, 1996). Egy-egy ilyen döntés pedig felelősséggel járó kockázatvállalás (RÓKUSFALVY, 2002).

De mi is tulajdonképpen ez a kockázat? A kockázat komolyabb tanulmányozásának kezdete a reneszánsz időszakára nyúlik vissza, amikor is egy Chevalier de Méré nevű francia kártyajátékos Blaise Pascal-hoz fordult segítségért, annak megértésére, hogy a taktikáját alkalmazva miért veszít folyamatosan a játékban. Pascal pedig Pierre de Fermat-ot hívta segítségül a „feladván” megfejtése érdekében. A két matematikus a megoldás érdekében tett együttes erőfeszítése fektette le a valószínűességszámítás alapjait, ami természetesen a kockázat matematikai megértésének is az alapköve. Ez a megoldás volt az első megnyilvánulása annak, hogy a jövő előrejelezhető és erre alapozva a döntés is meghozható számok segítségével (BERNSTEIN, 1996). Természetesen azóta egyre több tudós, kutató, gondolkodó foglalkozott és foglalkozik a kockázat pontosabb megismerésével, definiálásával, leírásával, modellezésével. Annak ellenére, hogy a kockázat egyre jobban előtérbe kerül minden kutatási területen, a mai napig sem sikerült megfelelően precíz, pontos képet alkotni róla. Pedig az előrejelezhetőség és a döntés meghozatala szempontjából igen nagy szükség lenne rá.

Úgy gondolom, hogy az előbbi gondolatmenetből is egyértelműen látszik, hogy a kockázat mindenhol jelen van, közvetve, illetve közvetlenül befolyásolva döntéseinket és ezáltal életünket. Kiemelkedő fontosságúnak tartom tehát, hogy foglalkozzunk a kockázat

témakörével, ezért is választottam dolgozatom központi kérdésének a kockázat pontosabb megismerését. Természetesen a kockázat önmagában nagyon tág fogalom. A mai modern, globalizált világunkban pedig kiemelkedő jelentőséggel bír a kockázat megismerése, mérése és előrejelezhetősége többek között a pénzügyi területen is. A dolgozatomban tehát a pénzügyi kockázatra helyezem a hangsúlyt.

Pénzügyi szempontból kiemelkedő szerepe van a kockázat számszerűsítésének, illetve modellezésének. Ez pedig nem választható el a matematikától. Viszont, mint minden határterület esetében, a pénzügyi matematikának sem egyszerű feladat az elmélet és a gyakorlat összehangolása. A szakirodalomban számos matematikailag kifogástalan elméletet, modellt találhatunk, amit a gyakorlatban nem vagy szinte alig lehet hasznosítani. Rengeteg példát láthatunk arra is, hogy a matematikai modellek a gyakorlatban pontatlanul, hiányosan vagy éppen hibásan vannak megfogalmazva, használva. Ez természetesen félreértésekhez, téves eredményekhez és következtetésekhez vezethet. Dolgozatom egyik kiemelkedő célja, az elmélet és a gyakorlat minél jobb, pontosabb összehangolása, a modellek és matematikai fogalmak precíz megfogalmazása és tisztázása, valamint megfelelő módon történő alkalmazása konkrét részvényárfolyam adatokon. Teszem mindezt a részvények, illetve a portfóliók kockázatának mérése, valamint az optimális portfólió kiválasztásának kérdése köré csoportosítva.

1. fejezet

Témafelvetés és célkitűzés

Egy lehetséges megfogalmazás szerint a kockázat annak a lehetőségnek a mérlegelése, hogy valami értékkel bírót elvesztünk vagy megnyerünk („Risk is the potential of losing something of value, weighed against the potential to gain something of value.” (KUNGWANI, 2014)). Ezt, a kockázatnak egy nagyon általános megfogalmazását természetesen sokféleképpen értelmezhetjük. Az is egyértelmű, hogy a kockázat jelentése és megfogalmazása tudományterületenként változhat.

Az egyik ilyen terület, ahol a kockázat megértése, mérése, elemzése és előrejelzése központi szerepet kap, a közgazdaságtan, azon belül is a pénzügyi terület. A közgazdaságtan szempontjából úttörőnek számít Knight 1921-es „Risk, Uncertainty, and Profit” (KNIGHT, 1921) című műve, amelyben részletesen tárgyalja a különbséget a kockázat és a bizonytalanság között, és amellyel megalapozta a valószínűségen alapuló közgazdaságtant (BÉLYÁCS, 2010). A pénzügyi kockázat és egyben a modern portfólió elmélet alapjainak letétele Harry Markowitz nevéhez fűződik, aki 1952-ben a „Portfolio Selection” (MARKOWITZ, 1952) című cikkében a kockázatot a portfólió szórásának segítségével definiálta. A pénzügyi kockázat kezelése, azaz a kockázati tényezők azonosítása, mérése és ellenőrzése, ma is elengedhetetlen eszköz bármely üzleti tevékenység fenntartásához (JORION, 1999).

Annak ellenére, hogy a pénzügyi kockázat menedzselése egyre nagyobb teret kap, a pénzpiacnak a régmúltban és a közelmúltban is több súlyosabb válsággal kellett szembenéznie. Ilyenek voltak például az 1772-es hitelválság, a Wall Street összeomlása 1929-ben, az 1973-as olajválság, az 1997-es ázsiai válság, vagy éppen a legutóbbi 2008-es gazdasági világválság. A 2007-2009-es pénzügyi válság például a másodlagos piacról indult el: a jelzáloghiteleket a

tulajdonosaik olyan bonyolult értékpapírokba foglalták, hogy a vevők nem tudták felmérni ezeknek a kockázatát (BÉLYÁ CZ, 2013). A válság az USA-ból indult el, de gyorsan áterjedt az egész világra. Jelentős mértékben sújtotta többek között Angliát, Németországot, Írországot, Spanyolországot, a Balti-államokat, Dubait, Szingapurt, Ausztráliát, és Új Zélandot is (HELLEINER, 2011). Ezt, és az ehhez hasonló jelenségeket, vagyis amikor egy bizonyos (általában negatív) eseménynek jelentős és gyors hatása van több országra is, pénzügyi fertőzésnek nevezzük (KAMINSKY et al., 2003).

Az előbbi példák is mutatják, hogy a mai modern, globalizált életünk minden területének egyik legfontosabb építőköve a kockázat menedzselése, amihez viszont elengedhetetlen a kockázat minél pontosabb megértése és mérése. A mérés azonban önmagában még nem elég, a döntés meghozatala szempontjából elengedhetetlen az összehasonlíthatóság is.

A dolgozatomban a pénzügyi kockázattal foglalkozok részletesebben. A szakirodalom a pénzügyi kockázaton belül három nagyobb csoportot különböztet meg, ezek a piaci kockázat (vagyis a részvények és a kötvények árváltozásának, az árfolyamok ingadozásának, valamint a nyersanyagok árváltozásának kockázata), a hitel kockázat (vagyis a vissza nem fizetési kockázat) és a működési kockázat (amit főleg belső folyamatok, emberi tényezők, a rendszer vagy éppen külső események nem megfelelő működése, hibája okoz) (BORODOVSKY – LORE, 2000; EMBRECHTS et al., 2005). Én a hangsúlyt a pénzügyi kockázaton belül a piaci kockázatra helyezem.

Az teljesen egyértelmű, hogy szükség van a pénzügyi kockázat mérésére, matematikai leírására, modellezésére. Az viszont a mai napig sem egyértelmű, hogy mi lehet az a matematikai fogalom, mérték, amellyel a kockázatot pontosan le lehet írni, ki lehet számolni. Céлом, mind elméleti, mind pedig gyakorlati szinten megvizsgálni, hogy a leggyakrabban használt kockázati mértékek közül melyik bizonyul jobbnak, melyikkel, illetve melyekkel mérhetjük pontosabban a kockázatot. Öt kockázati mértéket veszek górcső alá: a szórást, a varianciát, a szemivarianciát, a kockáztatott értéket (Value at Risk - VaR) és a várható veszteséget (Expected Shortfall - ES). Részletesebb elemzést végzek a kockáztatott érték és az várható veszteség¹ összehasonlítására az úgynevezett utótesztelés (backtesting) módszerét követve. Megvizsgálom továbbá, hogy milyen hatással van a portfólióval kapcsolatos

¹A szakirodalom egyik részében a CVaR-nak (feltételes kockáztatott értéknek) feleltetik meg, de vannak akik külön kockázati mértékként kezelik.

döntéseinkre, ha a hagyományos hozam-variancia kritérium helyett a hozam-várható veszteség kritériumot használjuk.

Nagy kihívást jelent a kockázatmenedzsment számára a kockázat többdimenziós volta, továbbá a nem várt extrém események megértése, előrejelzése (EMBRECHTS et al., 2005). A többdimenziós struktúrák modellezésére bemutatom az úgynevezett kopula függvényt és megvizsgálom, hogy ennek segítségével valóban pontosabb képet kaphatunk-e a kockázatról. Az elemzésekhez hét, a Budapesti Értéktőzsdén jegyzett részvény tízéves időtávra vonatkozó napi árfolyamadatait használom. Az összehasonlíthatóság és bizonyos modellek alkalmazhatósága érdekében, a legtöbb esetben, az ezekből az árfolyamokból képzett hozamadatokkal számolok. Ebből következően dolgozatom további célja annak megvizsgálása, hogy az egyszerű, vagy pedig a logaritmikus hozamot érdemesebb használni a számításokhoz, valamint, hogy az eredmények értékelése függ-e a hozam számításának módjától.

A témához kapcsolódó hipotéziseim:

- H1. Az egyszerű vagy a logaritmikus hozam használata nem befolyásolja a vizsgálati eredményeket.
- H2. A kockáztatott érték (VaR) helyett a várható veszteség (expected shortfall) a kockázat pontosabb mérését teszi lehetővé.
- H3. A hagyományos hozam-variancia kritérium helyett a hozam-várható veszteség kritérium használata megváltoztatja az optimális portfólió összetételét.
- H4. A kockázatszámítás pontosságát a kopula függvény javítja.

2. fejezet

Szakirodalmi áttekintés

Általában, ha kockázatról beszélünk, akkor a legtöbben negatív eseményekre, veszteségekre gondolnak és természetesen a pénzügyi kockázatra is lehet úgy tekinteni mint annak a valószínűsége, hogy tényleges hozam kisebb lesz, mint az elvárt hozam. Ezt a megközelítést nevezzük veszteség vagy alsóági (downside) kockázatnak. Ezzel szemben például Damodaran szerint a pénzügyi kockázat annak a valószínűsége, hogy a befektetés hozama különbözik az elvárt hozamtól. Tehát, a kockázat magában foglalja a veszteség kockázat mellett a nyereség vagy felsőági (upside) kockázatot is, vagyis amikor a tényleges hozam nagyobb, mint az elvárt (DAMODARAN, 2003).

2.1. Hogyan mérjük a kockázatot? A kockázati mértékek

Annak ellenére, hogy a kockázat megfogalmazása nem teljesen egységes és pontos, matematikai szempontból az a célunk, hogy minél egyszerűbb mutatókkal, lehetőleg egyetlen mérőszámmal jellemezzük, fejezzük ki azt. A pénzügyi eszközökhöz és portfóliókhoz rendelt, a kockázatot jellemző mutatószámokat kockázati mértékeknek nevezzük (GÁLL – PAP, 2010).

Matematikailag a következőképpen fogalmazhatjuk meg a kockázatot: Legyen $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ egy valószínűségi mező¹ és legyen $\mathcal{X}$ valószínűségi változóknak (portfóliók, pénzügyi eszközök profitjának) egy halmaza Ω -n. *Kockázati mértéknek (risk measure)* nevezzük minden $\mathcal{X}$ halmazon értelmezett valós értékeket felvevő funkcionált: $\rho : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$. Ez azt jelenti, hogy a kockázat mérése tulajdonképpen megfeleltethető egy kapcsolat létesítésével a véletlen változók

¹A dolgozatban használt alapvető valószínűségyszámítási és statisztikai fogalmak megtalálhatóak FAZEKAS, 2000 könyvében.

és a valós számok között. Ez nagyon tág fogalom, ezért ahhoz, hogy a kockázat „értelmes” definíciójához jussunk, bizonyos korlátozásokat, tulajdonságokat kell megfogalmazni a kockázati mértékekkel kapcsolatban. Természetes módon több ilyen elvárás is adódik. Az irodalomban (például ARTZNER et al., 1999; RÜSCHENDORF, 2013; EMMER et al., 2015) leggyakrabban előforduló, legtöbbet használt tulajdonságok a *monotonitás* (*monotonicity*), *szubadditivitás* (*subadditivity*), *pozitív homogenitás* (*positive homogeneity*) és az *eltolás invariancia* (*cash invariance/ translation invariance*).

Monotonitás

Ha egy befektetés hozama sosem kisebb mint egy másiké, akkor ez a befektetés nem lehet kockázatosabb mint a másik, azaz

$$X \leq Y \Rightarrow \rho(X) \geq \rho(Y), \quad \forall X, Y \in \mathcal{X}. \quad (2.1)$$

Szubadditivitás

A szubadditivitást más néven diverzifikációs hatásnak is nevezik. Ez azt jelenti, hogy két befektetés eredő kockázata nem lehet nagyobb, mint az egyedi kockázataik összege, azaz

$$\rho(X + Y) \leq \rho(X) + \rho(Y), \quad \forall X, Y, X + Y \in \mathcal{X}. \quad (2.2)$$

Természetesen több változó esetén is érvényes ez a tulajdonság:

$$\sum_{i=1}^n \rho(X_i) - \rho\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) \geq 0, \quad \forall X_1, \dots, X_n \in \mathcal{X}. \quad (2.3)$$

Pozitív homogenitás

Ha meg többszörözünk egy portfóliót, de megtartjuk annak összetételét, akkor a kockázat a nagysággal arányosan változzon, azaz

$$\rho(\lambda X) = \lambda \rho(X), \quad \forall X, \lambda X \in \mathcal{X}, \forall \lambda \geq 0. \quad (2.4)$$

Eltolás invariancia

Ha pozíciókhoz adott hozamú kockázatmentes eszközt adunk, akkor a kockázat ennek a pénzáramnak a nagyságával csökkenjen, azaz

$$\rho(X + a) = \rho(X) - a \quad \forall X, X + a \in \mathcal{X}, \forall a \in \mathbb{R}. \quad (2.5)$$

Egy kockázati mértéket *koherens kockázati mértéknek* (*coherent risk measure*) nevezünk, ha teljesíti a fent említett négy tulajdonságot, azaz monoton, szubadditív, pozitív homogén és eltolás invariáns. A koherens tulajdonság matematikai általánosítása megtalálható például

DELBAEN, 2002 cikkében.

Itt szeretnék rámutatni arra, hogy az előbb felsorolt négy tulajdonság közül a monotonitási tulajdonság a monoton csökkenő függvény fogalmát írja le. Valamint, hogy az eltolás invariancia a matematikában szokásos módon a következő alakot ölti: ha $a \in \mathbb{R}$, valamint $X, X + a \in \mathcal{X}$, akkor $\rho(X + a) = \rho(X)$. A továbbiakban a fentebb bemutatott definíciókat és elnevezéseket fogom használni (nem pedig a matematikában szokásosakat).

Megjegyzendő továbbá, hogy a pozitív homogén tulajdonság esetén, ha λ helyére nullát helyettesítünk, akkor $\rho(0) = 0$, azaz, ha nem birtokolunk semmilyen pénzügyi eszközt, portfóliót, akkor a kockázatunk nulla. Ezt a tulajdonságot és az eltolás invarianciát felhasználva láthatjuk, hogy ha $a \in \mathbb{R}$, akkor $\rho(a) = \rho(0 + a) = \rho(0) - a = -a$. Ez azt jelenti, hogy a biztos pénzáramlás kockázati mértéke (-1)-szerese önmagának. Vagyis a biztos veszteség kockázata pozitív, a biztos nyereség kockázata pedig negatív (GÁLL – PAP, 2010).

Az optimalizáció szempontjából fontos továbbá kiemelni a konvexitási tulajdonságot. Egy $\rho : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ kockázati mértéket konvexnek nevezünk, ha minden $\lambda \in [0, 1]$ és $X, Y, \lambda X + (1 - \lambda)Y \in \mathcal{X}$ esetén

$$\rho(\lambda X + (1 - \lambda)Y) \leq \lambda \rho(X) + (1 - \lambda)\rho(Y) \quad (2.6)$$

teljesül.

A pozitív homogenitásból és a szubadditivitásból következik a konvexitás:

$$\rho(\lambda X + (1 - \lambda)Y) \leq \rho(\lambda X) + \rho((1 - \lambda)Y) = \lambda \rho(X) + (1 - \lambda)\rho(Y). \quad (2.7)$$

Tehát ahhoz, hogy a kockázatot minél pontosabban és ésszerűbben mérni tudjuk, egy olyan kockázati mértékre van szükség, amely kielégíti a fent említett négy tulajdonságot, azaz monoton, szubadditív, pozitív homogén és eltolás invariáns.

A továbbiakban az irodalomban és a gyakorlatban legtöbbet használt kockázati mértékeket mutatom be, valamint megvizsgálom, hogy a négy tulajdonság közül melyeket teljesítik.

2.1.1. Variancia és szórás

A *variancia* (*variance*), illetve ennek a négyzetgyöke, a *szórás* (*standard deviation*) kockázati mértékként való bevezetése Markowitz (MARKOWITZ, 1952) nevéhez fűződik és így az egyik legrégebben használt kockázati mérték.

Az X valószínűségi változó varianciáját, valamint szórását a következőképpen definiálhatjuk:

$$\sigma^2(X) := \mathbb{E}(X - \mathbb{E}(X))^2, \quad (2.8)$$

illetve

$$\sigma(X) := \sqrt{\sigma^2(X)}, \quad (2.9)$$

ahol $\mathbb{E}(X)$ jelöli az X valószínűségi változó várható értékét.

Ez azt jelenti, hogy ha az X jelöli a véletlenszerű hozamot, akkor egy befektetés hozamának kockázatát a hozam átlagtól való eltérései négyzetének átlagával mérhetjük (SZEGÖ, 2002). A nagyobb szórás érték magasabb kockázatra utal (BACON, 2011).

A gyakorlatban a hozamnak, mint valószínűségi változónak a minta realizációjával dolgozunk, azaz egy folytonos valószínűségi változó adott, konkrét értékeivel. Jelölje ezt a minta realizációt r_i , $i = 1, \dots, n$ és legyen $r = (r_1, \dots, r_n)$. Ebben az esetben a varianciát a következő módon közelíthetjük:

$$\widehat{\sigma^2}(r) = \frac{\sum_{i=1}^n (r_i - \bar{r})^2}{n - 1}, \quad (2.10)$$

ahol r_i az i -edik ($i = 1, \dots, n$) hozam-érték, míg $\bar{r}$ ezen hozamoknak az átlaga. A négyzetre emelésre azért van szükség, hogy az átlagtól való pozitív és negatív eltérések ne oltás ki egymást, továbbá a nagyobb eltérések így nagyobb súllyal szerepelnek a számításokban (BACON, 2011).

A szórást pedig természetesen a variancia négyzetgyökével tudjuk közelíteni:

$$\widehat{\sigma}(r) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (r_i - \bar{r})^2}{n - 1}} \quad (2.11)$$

A varianciának, illetve a szórásnak az eszközök kombinációja, azaz a portfóliók kockázatának mérésekor is meghatározó szerepük van. Markowitz nevéhez fűződik annak bevezetése, hogy a

portfólió kockázatát a hozamok közti együttes eloszlásfüggvény segítségével mérhetjük. Az együttes eloszlásfüggvényt pedig a marginális eloszlásokkal és a függőségi szerkezettel jellemezhetjük. Markowitz ezt a függőségi szerkezetet a hozamok páronkénti lineáris korrelációs együtthatójával írja le: $\rho(X, Y) = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}$, ahol $\text{cov}(X, Y)$ az X és Y a hozamokat szimbolizáló valószínűségi változók kovarianciája (SZEGŐ, 2002). Természetesen, a gyakorlatban a minta realizációval tudunk számolni, ezért a tapasztalati kovarianciára bevezetem a $\widehat{\text{cov}}(x, y)$ jelölést, ahol $x = (x_1, \dots, x_n)$ az X valószínűségi változóhoz tartozó minta realizáció, $y = (y_1, \dots, y_n)$ pedig az Y valószínűségi változóhoz tartozó minta realizáció. Ekkor a portfólió (P) kockázata, illetve varianciája, a benne szereplő m eszköz páronkénti kovarianciájának súlyozott számtani átlaga:

$$\widehat{\sigma}_P^2 \left(\sum_{m=1}^k w_m r^m \right) = \sum_{m=1}^k \sum_{l=1}^k w_m w_l \widehat{\text{cov}}(r^m, r^l) = \sum_{m=1}^k \sum_{l=1}^k w_m w_l \widehat{\sigma}(r^m) \widehat{\sigma}(r^l) \widehat{\rho}(r^m, r^l) \quad (2.12)$$

vagy mátrixos formában kifejezve:

$$\sigma_P^2 = \mathbf{w}^T \Sigma \mathbf{w}, \quad (2.13)$$

ahol $\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_k)$ jelöli a portfólióban szereplő eszközök súlyát, $r^m = (r_1^m, \dots, r_n^m)$ a portfólióban szereplő m -edik eszköz hozamait ($m = 1, \dots, k$), $\widehat{\rho}(r^m, r^l)$ valamint $\widehat{\text{cov}}(r^m, r^l)$ az m -edik és a l -edik eszköz hozamainak lineáris korrelációját, illetve kovarianciáját, Σ a kovarianciákból képzett kovariancia mátrixot és $\widehat{\sigma}(r^m)$ az m -edik eszköz hozamainak szórását. A lineáris korrelációról részletesebb leírás található a 2.2.1 alfejezetben.

Mivel a kockázat mérésére koherens kockázati mértékre van szükség, érdemes megvizsgálni, hogy a variancia kielégíti-e a koherencia négy tulajdonságát. Ebben az esetben elmondható, hogy annak ellenére, hogy a variancia az egyik legrégebben használt kockázati mérték, a négy tulajdonság egyikét sem elégíti ki, azaz nem monoton, nem szubadditív, nem pozitív homogén és nem eltolás invariáns. Ennek bizonyítása az A.1 függelékben található. Egy másik probléma, hogy a variancia nem tesz különbséget a veszteségek és nyereségek között (BUGÁR – UZSOKI, 2006). Tekintsük például az X és Y nyereségeket jelentő valószínűségi változókat, amiket a következőképpen definiálunk: $P(X = 2000 \text{ eFt}) = 0,5$ és $P(X = 5000 \text{ eFt}) = 0,5$, valamint $P(Y = 1000 \text{ eFt}) = 0,5$ és $P(Y = 500 \text{ eFt}) = 0,5$. Ekkor a varianciák:

$$\sigma^2(X) = \mathbb{E}(X - \mathbb{E}(X))^2 = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2 = 2250 \text{ eFt}$$

$$\sigma^2(Y) = \mathbb{E}(Y - \mathbb{E}(Y))^2 = \mathbb{E}(Y^2) - (\mathbb{E}(Y))^2 = 62,5 \text{ eFt}.$$

Ha ugyanezt a példát végigszámoljuk a veszteségek esetében, azaz amikor $P(X = -2000 \text{ eFt}) = P(X = -5000 \text{ eFt}) = 0,5$ és $P(Y = -1000 \text{ eFt}) = P(X = -500 \text{ eFt}) = 0,5$, akkor ugyanazt a varianciaértéket, azaz ugyanazt a kockázatot kapjuk, hiszen $\sigma^2(-X) = (-1)^2 \sigma^2(X) = \sigma^2(X)$.

A variancia csak abban az esetben használható kockázat mérésére, ha a valószínűségi változó (profit, hozam, stb.) eloszlása elliptikus (EFTEKHARI et al., 2000). Az elliptikus eloszlásról bővebben a B függelékben írtam.

A szórás a varianciától eltérően kielégíti a szubadditivitási és a pozitív homogenitási tulajdonságokat, de a varianciához hasonlóan nem monoton, nem eltolás invariáns (bizonyítások: A.2 függelék) és az sem tesz különbséget a nyereségek és veszteségek között.

Vagyis elmondható, hogy sem a variancia, sem pedig a szórás nem alkalmas a kockázat mérésére, hiszen a variancia például (egyebek mellett) megsérti a szubadditivitási tulajdonságot, azaz azt a minimum követelményt, amely szerint a diverzifikáció nem növelheti a portfólió kockázatát. Továbbá a variancia és a szórás szimmetrikus, azaz ugyanúgy „bünteti” a magas hozamot, mint a nagy veszteséget.

2.1.2. Szemivariancia

A variancia és a szórás szimmetrikus tulajdonságát tudjuk kiküszöbölni a *szemivarianciával* (*semivariance*). Ez a kockázati mérték az úgynevezett veszteség kockázat mérésére szolgál, azaz csak a várható értéknél (várható hozamnál) kisebb értékeket veszi figyelembe (ALEXANDER, 2009).

Az X valószínűségi változó szemivarianciáját a következőképpen határozhatjuk meg:

$$SV(X) := \mathbb{E}((\min\{X - \mathbb{E}(X), 0\})^2). \quad (2.14)$$

Hasonlóan a varianciához, ez esetben is a hozamnak, mint valószínűségi változónak a minta realizációjával dolgozunk, azaz egy folytonos valószínűségi változó adott, konkrét értékeivel, és ebben az esetben a szemivarianciát a következő módon közelíthetjük:

$$\widehat{SV}(r) = \frac{\sum_{i=1}^n (\min\{r_i - \bar{r}, 0\})^2}{n}, \quad (2.15)$$

ahol $r = (r_1, \dots, r_n)$, r_i az i -edik ($i = 1, \dots, n$) hozam értéke, míg $\bar{r}$ ezeknek az átlaga.

Bebizonyítható (A.3 függelék), hogy a szemivariancia ugyan eltolás invariáns, de se nem monoton, se nem pozitív homogén és a szubadditivitási tulajdonságot sem teljesíti, és ezzel a Markowitz elmélet minimum követelményének, a diverzifikációs elvnek sem tesz eleget. Ugyan a szemivariancia nem szimmetrikus kockázati mérték, azaz ebből a szempontból pontosabb képet ad a kockázatról, mint a variancia, illetve a szórás, viszont a négy legfontosabb tulajdonságból csak egyet teljesít, tehát a szemivariancia sem koherens, így nem alkalmas a kockázat pontos mérésére.

2.1.3. A kockáztatott érték (VaR)

A kockáztatott érték az utóbbi évek leggyakrabban használt mértéke a kockázat mérésére. Használata az 1980-as évek végén, az 1987-es részvénytőzsi összeomlás után vált egyre elterjedtebbé (JORION, 2006). Definiálásához előbb szükség van a kvantilis fogalmára.

Legyen X egy valós értékű valószínűségi változó F_X eloszlásfüggvénnyel és $p \in (0, 1)$. Ekkor azt a q értéket amelyre:

$$P(X \leq q) \geq p$$

és

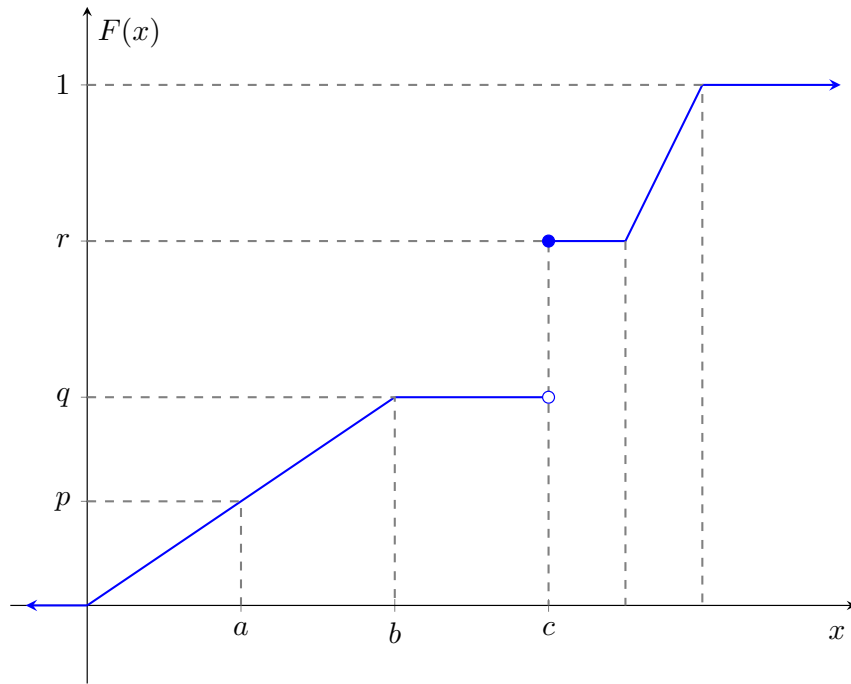
$$P(X < q) \leq p$$

teljesül, az eloszlás p -kvantilisének (p -quantile) nevezzük.

Másképpen fogalmazva, a p -ed rendű kvantilis azt a számot jelenti, amelynél az összes előforduló ismértékek p -ed része nem nagyobb és $(1 - p)$ -ed része nem kisebb. Egyszerűbben fogalmazva, a p -ed rendű kvantilis az az érték, ahol az eloszlásfüggvény keresztezi vagy átugorja a p értéket (NÁNDORI, 2009).

Előfordulhat, hogy a kvantilis nem egyértelmű, illetve egy x szám több értéknek is az x -kvantilise. A 2.1 ábrán is látható, hogy például q -kvantilisnek nevezzük az $[b, c]$ intervallum minden elemét, illetve, hogy c egy s -kvantilis, ahol $s \in [q, r]$.

Vegyük észre, hogy valamiféle inverz reláció áll fenn az eloszlásfüggvény és a kvantilis között, de ez nem a hagyományos értelemben vett inverz, mert az eloszlásfüggvény általában nem



2.1. ábra. Kvantilisok: Az 'a' érték p-quantilis, az [b,c] intervallum összes eleme q-quantilis és a 'c' érték s-quantilis, ahol s eleme az [q,r] intervallumnak.

Forrás: saját szerkesztés, (NÁNDORI, 2009) alapján

kölcsönösen egyértelmű. Ezért van szükség az *általánosított inverz (generalized inverse)* fogalmára, amely tulajdonképpen biztosítja, hogy minden értékhez egyértelműen választható legyen kvantilis (EMBRECHTS – HOFERT, 2013).

Legyen $G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ egy monoton növekvő függvény, $\bar{\mathbb{R}} := [-\infty, +\infty]$, valamint $G(-\infty) = \lim_{x \downarrow -\infty} G(x)$ és $G(\infty) = \lim_{x \uparrow \infty} G(x)$, valamint $\inf\{\} = \infty$. A G függvény $G^{\leftarrow} : \mathbb{R} \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ általánosított inverzén a következő függvényt értjük:

$$G^{\leftarrow}(p) = \inf\{x \in \mathbb{R} | G(x) \geq p\}, \quad p \in \mathbb{R}. \quad (2.16)$$

Ha $G = F : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ egy eloszlásfüggvény, akkor annak az $F^{\leftarrow} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ általánosított inverzét *kvantilis függvénynek (quantile function)* nevezzük:

$$F^{\leftarrow}(p) = \inf\{x \in \mathbb{R} | F(x) \geq p\}, \quad p \in (0, 1). \quad (2.17)$$

Ahol az F eloszlásfüggvény folytonos és szigorúan monoton növekvő ott $F^{\leftarrow}$ a hagyományos inverznek (F^{-1}) felel meg. Továbbá az F -beli ugrások $F^{\leftarrow}$ -ben konstans részt eredményeznek és fordítva, az F -beli konstans részek ugrások lesznek $F^{\leftarrow}$ -ben.

A határpontokban, azaz 0-ban és 1-ben, általában nem definiáljuk a kvantilis függvényt (a függvény határpontokban való definiálása megtalálható például EMBRECHTS – HOFERT, 2013 művében), hiszen a 0-kvantilisnek, illetve az 1-kvantilisnek nem sok gyakorlati értelme van (EMBRECHTS – HOFERT, 2013).

Az $F^{\leftarrow}$ jól definiált, hiszen, mivel F jobbról folytonos és monoton növekvő (az eloszlásfüggvény definíciója miatt) az $\{x \in \mathbb{R}, F(x) \geq p\}$ halmaz egy $[a, +\infty)$ típusú intervallum, így a halmaz infimuma a .

A kvantilis függvény néhány alaptulajdonsága megtalálható EMBRECHTS – HOFERT, 2013 művében.

Ahogy már fentebb említettem, több különböző érték is lehet p -kvantilis, ezért eltérő jelölést vezetnek be az úgynevezett alsó és a felső kvantilis jelölésére. Az X valószínűségi változó legkisebb p -kvantilise:

$$q_p(X) := \inf\{x \in \mathbb{R} | F_X(x) \geq p\} = F^{\leftarrow}(p). \quad (2.18)$$

Az X valószínűségi változó legnagyobb p -kvantilise:

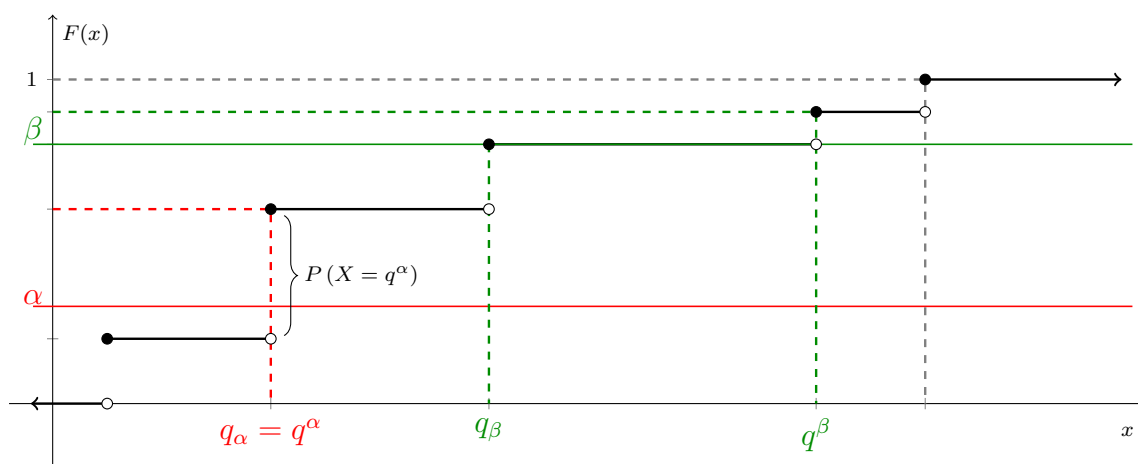
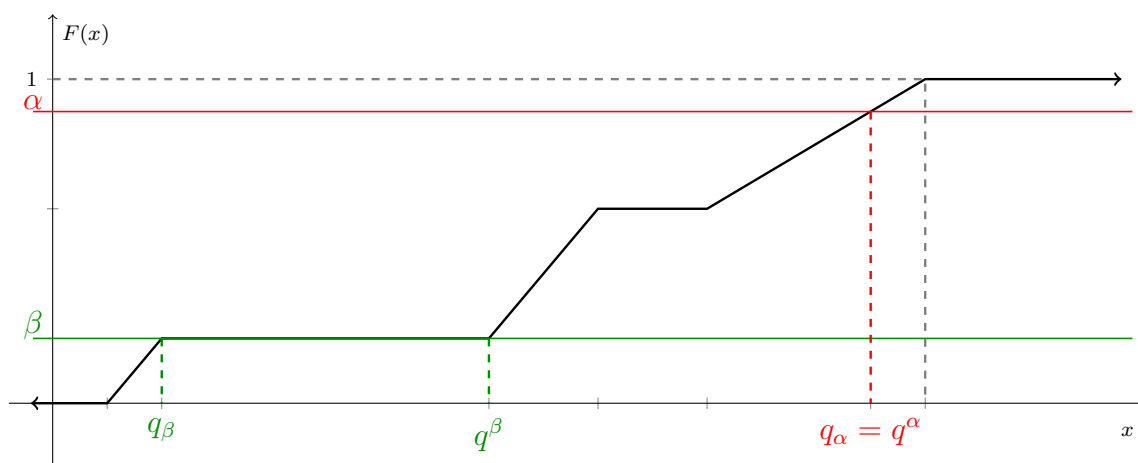
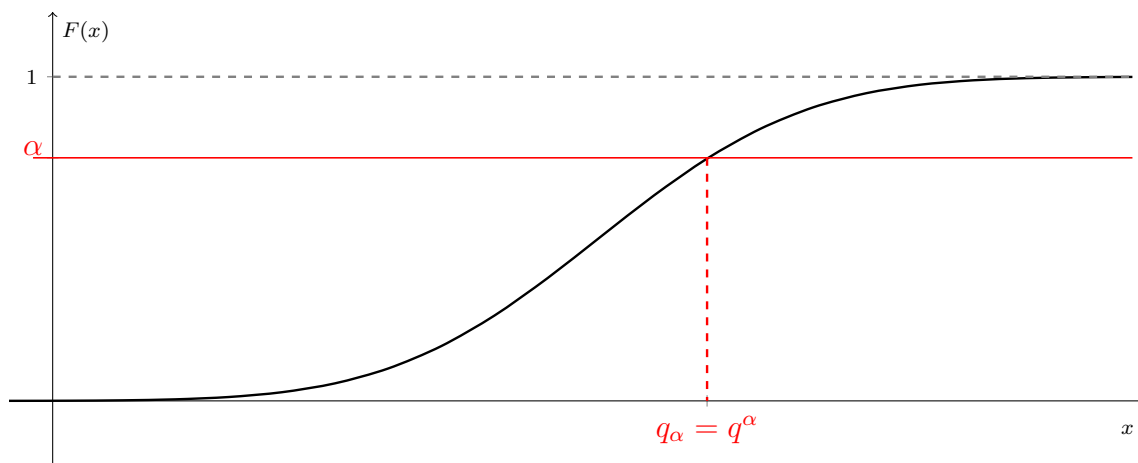
$$q^p(X) := \inf\{x \in \mathbb{R} | F_X(x) > p\}. \quad (2.19)$$

Mivel igaz, hogy $\{x \in \mathbb{R} | F_X(x) > p\} \subset \{x \in \mathbb{R} | F_X(x) \geq p\}$, így $\inf\{x \in \mathbb{R} | F_X(x) > p\} \geq \inf\{x \in \mathbb{R} | F_X(x) \geq p\}$, vagyis $q_p(X) \leq q^p(X)$. Azaz $p \in (0, 1)$ esetén a p -kvantilisek halmaza egy zárt, korlátos intervallum: $[q_p(X), q^p(X)]$.

Az alsó és felső kvantilisek akkor és csak akkor egyenlőek, ha az $\{x \in \mathbb{R} | F_X(x) = p\}$ halmaz legfeljebb egyelemű, ahol

$$\{x \in \mathbb{R} | F_X(x) = p\} = \begin{cases} [q_p(X), q^p(X)), & \text{ha } P(X = q^p(X)) > 0 \\ [q_p(X), q^p(X)], & \text{ha } P(X = q^p(X)) = 0. \end{cases} \quad (2.20)$$

Összefoglalva ez azt jelenti, hogy a p -hez tartozó alsó és felső kvantilisek abban az esetben nem azonosak, ha az eloszlásfüggvény egy szakaszon konstans és ezen a szakaszon az értéke éppen p .



2.2. ábra. Az $F_X(x) = P(X \leq x)$ eloszlásfüggvény és a kvantilis értékek lehetséges formái

Forrás: saját szerkesztés

A 2.2 ábrán az eloszlásfüggvény lehetséges formái láthatóak (POLANSKY, 2011). A legfelső függvény egy szigorúan monoton növekvő, folytonos eloszlásfüggvény. Ebben az esetben $q_\alpha = q^\alpha$, $F(q_\alpha) = F(q^\alpha) = \alpha$, valamint $P(X = q^\alpha) = 0$ bármely $\alpha \in (0, 1)$ szint esetén. A középső függvény egy monoton növekvő és folytonos eloszlásfüggvény. Ezen az ábrán már megfigyelhető, hogy az alsó és a felső kvantilisek nem minden esetben egyeznek meg ($q_\alpha = q^\alpha$, de $q_\beta \neq q^\beta$). Elmondható továbbá - hasonlóan az első eloszlásfüggvényhez -, hogy $F(q_\alpha) = F(q^\alpha) = \alpha$, $F(q_\beta) = F(q^\beta) = \beta$ és $P(X = q^\alpha) = 0$ bármely $\alpha, \beta \in (0, 1)$ szint esetén. A legalsó függvény egy monoton, jobbról folytonos lépcsős eloszlásfüggvény. Ebben az esetben is látható, hogy az alsó és a felső kvantilis értékek nem mindig azonosak. Eltérően az előzőektől pedig elmondható, hogy $P(X = q^\alpha) > 0$ valamint, hogy $F(q_\alpha) = F(q^\alpha) > \alpha$ és $\beta = F(q_\beta) < F(q^\beta)$.

Az alsó és a felső kvantilis ismeretében már definiálható az egyik legszélesebb körben használt kockázati mérték a *kockázatotott érték* (*Value at Risk*).

Legyen X egy valószínűségi változó az $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ valószínűségi mezőn, és $\alpha \in (0, 1)$. Ekkor X felső α -ad rendű kockázatotott értékét az X legnagyobb α -kvantilisének (-1) -szeresével definiáljuk:

$$\text{VaR}^\alpha(X) := -q^\alpha(X). \quad (2.21)$$

Hasonlóan, X alsó α -ad rendű kockázatotott értéke az X valószínűségi változó legkisebb α -kvantilisének (-1) -szeresével egyezik meg:

$$\text{VaR}_\alpha(X) := -q_\alpha(X). \quad (2.22)$$

A továbbiakban az angol elnevezés után az esetek legnagyobb részében a VaR rövidítést fogom használni a kockázatotott értékre.

A gyakorlatban a hozamoknak, mint folytonos valószínűségi változóknak a minta realizációjával tudunk számolni. Jelölje r_i az i -edik hozam ($i = 1, \dots, n$) minta realizációját, $r = (r_1, \dots, r_n)$ és r_i^* az r_i elemek növekvő sorrendbeli permutációjának az i -edik elemét: $r_1^* \leq r_2^* \leq \dots \leq r_n^*$. Ekkor az α -kvantilis a k -edik elem, ahol $k = \lceil n\alpha \rceil = \max \{m | m \leq n\alpha, m \in \mathbb{N}\}$. Az alsó VaR-et ennek az elemnek a (-1) -szeresével közelíthetjük. Máshogy megfogalmazva, a VaR értéke az empirikus eloszlásfüggvény

általánosított inverzének (-1) -szeresével becsülhető:

$$\widehat{\text{VaR}}_\alpha(r) = -r_k^* = -\widehat{F}_{\{r_1, \dots, r_n\}}^{\leftarrow}(\alpha), \quad (2.23)$$

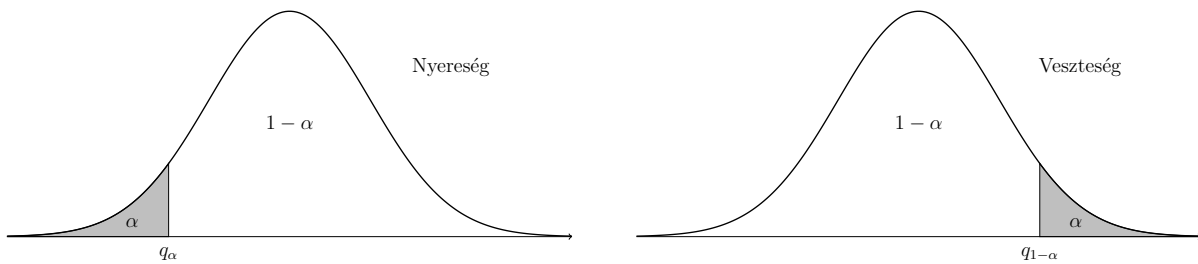
ahol $\widehat{F}_{\{r_1, \dots, r_n\}}^{\leftarrow}(x) := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{\{r_i \leq x\}}$.

A felső VaR mintabeli becslése pedig:

$$\widehat{\text{VaR}}^\alpha(r) = -r_l^*, \quad (2.24)$$

ahol $l = \min \{m | m > n\alpha, m \in \mathbb{N}\}$.

Tehát a kockázatosított érték az a szám, amelynél nagyobb veszteség α -nál kisebb vagy egyenlő valószínűséggel fordul elő. A negatív kockázatosított érték azt jelenti, hogy az adott cég nagyobb kockázatot is bevállalhat, ekkor X -et elfogadhatónak nevezzük (DELBAEN, 2000). A 2.3 ábrán is látható, hogy a hozamot ábrázoló eloszlásfüggvény esetén az eloszlás bal farkát, míg a veszteség esetén az eloszlás jobb farkát vizsgáljuk.

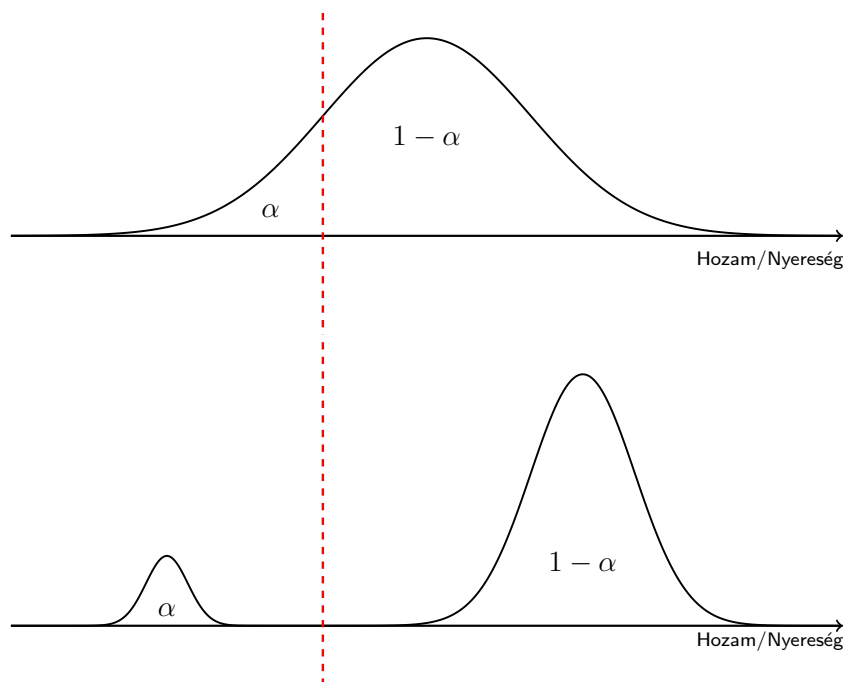


2.3. ábra. Az α -kvantilis a nyereséget, illetve a veszteséget ábrázoló sűrűségfüggvények esetén

Forrás: saját szerkesztés

A VaR megmutatja, hogy mi az az érték amelynél bizonyos valószínűséggel nem fogunk többet veszíteni, de az egyik nagy probléma a VaR-al, hogy az ennél az értéknél nagyobb veszteségekkel nem foglalkozik. A 2.4 ábrán egy példát mutatok arra, amikor két hozameloszlás közül az egyik esetében a veszteség értéke sokkal nagyobb lehet (alsó eloszlásfüggvény), mint a másik esetében, és ennek ellenére a két eloszlás VaR értéke megegyezik.

Belátható (A.4 függelék), hogy a VaR (mind az alsó, mind a felső) monoton, pozitív homogén és eltolás invariáns. Ugyanakkor további nagy probléma a VaR-el, - és talán e miatt érte a



2.4. ábra. Két különböző sűrűségfüggvény (eloszlás) megegyező VaR-kel

Forrás: saját szerkesztés

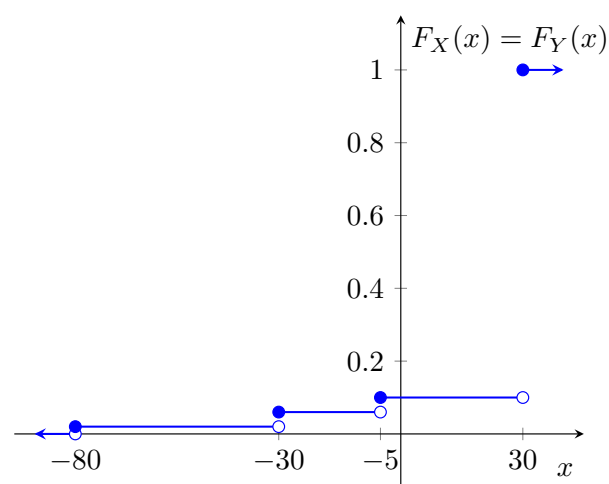
legtöbb kritika is - hogy nem támogatja a diverzifikációt, azaz nem szubadditív. A következő két példa ennek bemutatására szolgál. Az első példa ötlete Gáll Józseftől származik (GÁLL – PAP, 2010) és azt az esetet mutatja be, amelyben a valószínűségi változók nem függetlenek egymástól. A második példában már független valószínűségi változókat veszek figyelembe és az ötlet Paul Embrechtstől származik (EMBRECHTS – HOFERT, 2014).

1. Példa

Legyen $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ valószínűségi mező, $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$ és $P(\{\omega_1\}) = 0,02$, $P(\{\omega_2\}) = P(\{\omega_3\}) = 0,04$, $P(\{\omega_4\}) = 0,9$. Legyen X és Y egy-egy portfólióból származó profit, ahol $X(\omega_1) = -80$, $X(\omega_2) = -30$, $X(\omega_3) = -5$, és $X(\omega_4) = 30$, valamint $Y(\omega_1) = -80$, $Y(\omega_2) = -5$, $Y(\omega_3) = -30$ és $Y(\omega_4) = 30$.

Egyértelmű, hogy ebben az esetben a két valószínűségi változó eloszlásfüggvénye megegyezik: $F_X(x) = F_Y(x)$ (2.5 ábra). A 2.5 ábráról leolvashatók, valamint könnyen kiszámolhatóak a különböző α szintekhez tartozó alsó és felső VaR értékek, amiket a 2.1 táblázatban foglaltam össze. Az Y valószínűségi változóhoz tartozó alsó és felső VaR értékek egyenlőek az X valószínűségi változóéval, mert a két valószínűségi változó eloszlásfüggvénye megegyezik.

Következő lépésként veszem a két valószínűségi változó összegét: $(X + Y)(\omega_1) = -80 - 80$,



2.5. ábra. Az X és Y valószínűségi változók eloszlásfüggvényei.

Forrás: saját szerkesztés

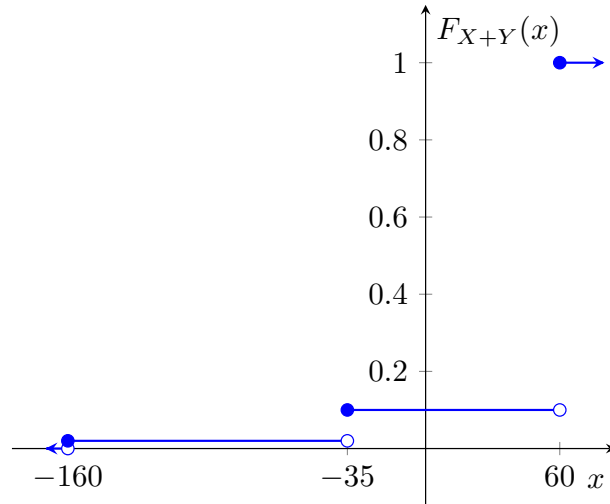
2.1. táblázat. VaR szubadditivitása: Az X (illetve Y) valószínűségi változóhoz tartozó alsó és felső VaR értékek különböző α szinteken.

α	$\text{VaR}_\alpha(X)$	$\text{VaR}^\alpha(X)$
$(0; 0, 02)$	80	80
0, 02	80	30
$(0, 02; 0, 06)$	30	30
0, 06	30	5
$(0, 06; 0, 1)$	5	5
0, 1	5	-30
$(0, 1; 1)$	-30	-30

Forrás: saját számítás

$(X + Y)(\omega_2) = -30 - 5$, $(X + Y)(\omega_3) = -5 - 30$ és $(X + Y)(\omega_4) = 30 + 30$. Ekkor $P(X + Y = -160) = 0,02$, $P(X + Y = -35) = 0,08$, $P(X + Y = 60) = 0,9$.

Az összeg eloszlásfüggvénye a 2.6 ábrán látható, a különböző α szintekhez tartozó alsó és felső VaR értékeket pedig a 2.2 táblázatban foglaltam össze.



2.6. ábra. Az $X + Y$ valószínűségi változó eloszlásfüggvénye.

Forrás: saját szerkesztés

2.2. táblázat. VaR szubadditivitása: Az $X + Y$ valószínűségi változóhoz tartozó alsó és felső VaR értékek különböző α szintek esetén.

α	$\text{VaR}_\alpha(X + Y)$	$\text{VaR}^\alpha(X + Y)$
$(0; 0,02)$	160	160
0,02	160	35
$(0,02; 0,1)$	35	35
0,1	35	-60
$(0,1; 1)$	-60	-60

Forrás: saját számítás

Ekkor például $\alpha = 0,1$ esetén $\text{VaR}_{0,1}(X) = \text{VaR}_{0,1}(Y) = 5$, valamint $\text{VaR}_{0,1}(X + Y) = 35$. Vagyis

$$\text{VaR}_{0,1}(X + Y) > \text{VaR}_{0,1}(X) + \text{VaR}_{0,1}(Y),$$

azaz a VaR nem szubadditív.

2. Példa

Ellentétben az előző példával (ahol a két valószínűségi változó nem volt független), a második példában az X_i ($i = 1, \dots, 100$) független, azonos eloszlású, szintén portfóliókra vonatkozó valószínűségi változókat vizsgálunk, amelyek eloszlása a következő: $P(X_i = 2) = 0,99$ és $P(X_i = -100) = 0,01$. Ez azt jelenti tehát, hogy 99% annak az esélye, hogy egy-egy portfólió 2 egység hasznot hoz, míg 1% annak az esélye, hogy 100 egységet veszítünk rajta.

Ekkor kiszámolható, hogy $\text{VaR}^{0,05}(X_i) = -2$, azaz

$$\sum_{i=1}^{100} \text{VaR}^{0,05}(X_i) = -200.$$

Ennek a 100 valószínűségi változó összegének a VaR értéke pedig:

$$\text{VaR}^{0,05}\left(\sum_{i=1}^{100}(X_i)\right) = 106.$$

Azaz ismét látható, hogy a VaR nem szubadditív, hiszen

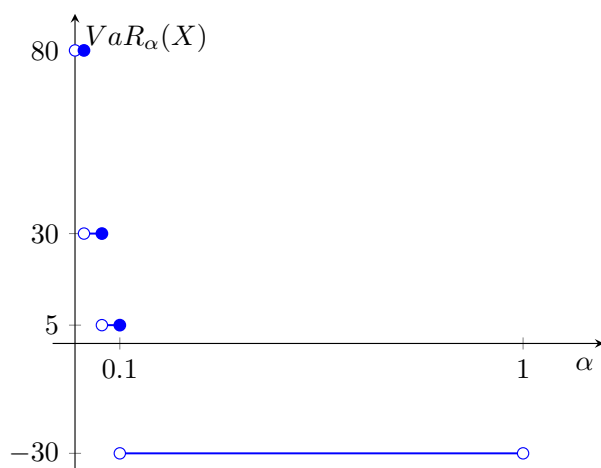
$$\text{VaR}^{0,05}\left(\sum_{i=1}^{100}(X_i)\right) > \sum_{i=1}^{100} \text{VaR}^{0,05}(X_i).$$

A szubadditivitás hiánya tulajdonképpen a diverzifikáció hatásáról alkotott képünket sérti, hiszen a diverzifikáció hatására a kockázatnak csökkennie kellene. De, ahogy azt két példában is bemutattam ennek pontosan az ellenkezője következett be.

További fontos tulajdonsága a VaR-nak, hogy az α csökkenő függvénye, azaz ha X egy valószínűségi változó és $\alpha \in (0, 1)$, akkor az $\alpha \mapsto \text{VaR}_\alpha(X)$ és $\alpha \mapsto \text{VaR}^\alpha(X)$ függvények monoton csökkenők. Az állítás bizonyítása megtalálható az A.4 függelékben, valamint az első példa esetében a $\alpha \mapsto \text{VaR}_\alpha(X)$ függvény az 2.7 ábrán látható.

Mindezekon felül belátható, hogy a VaR nem konvex kockázati mérték. Az előzőekben bemutattam, hogy a VaR homogén és nem szubadditív kockázati mérték. Ekkor például (a 2.7 képletben $\lambda = 0,5$ választással):

$$\begin{aligned} \text{VaR}(0,5X + 0,5Y) &= \text{VaR}(0,5(X + Y)) \\ &= 0,5 \text{VaR}(X + Y) > 0,5(\text{VaR}(X) + \text{VaR}(Y)), \end{aligned}$$



2.7. ábra. Az $\alpha \mapsto \text{VaR}_\alpha(X)$ függvény az első példa esetén.

Forrás: saját szerkesztés

azaz a VaR nem konvex, ami az optimalizálási feladatoknál problémát jelenthet.

Összefoglalóan elmondható tehát, hogy a VaR pozitív tulajdonsága, hogy a kockázatot egyetlen számban és pénznemben határozza meg, ellentétben a szórással, ahol intervallumot kapunk. Ebből következően a VaR könnyen értelmezhető és a különböző értékek könnyen összehasonlíthatóak (ACERBI et al., 2001). A VaR pozitív tulajdonságai közé tartozik az is, hogy a szemivariancához hasonlóan alsóági kockázati mérték. Ezen pozitív tulajdonságok mellett a VaR-nak súlyos hiányosságai is vannak. Egyik nagy hiányossága, hogy nem veszi figyelembe a VaR-on túli veszteségeket (2.4 ábra), pedig a súlyos, extrém veszteségek pontos ismerete fontos lenne. Annak ellenére, hogy a VaR a koherens kockázati mértékek négy tulajdonságából háromnak megfelel, a szubadditivitás hiánya sérti a diverzifikáció elvét, ami kockázati mértékekkel szemben támasztott egyik minimum-követelmény. Ezen kívül problémát jelent, hogy eltérő konfidencia szintek mellett eltérő kockázati rangsoroláshoz juthatunk (SZEGŐ, 2002). Mindezekon felül, a konvexitás hiánya nagyon nehézkessé teszi a VaR használatát optimalizációs problémák esetén (WOZABAL, 2008).

Tehát a VaR csak elliptikus eloszlások (B függelék) esetén alkalmas a kockázat mérésére. Nem elliptikus eloszlások esetén - ami a gyakorlatban nem ritka jelenség - a kockázat téves megítéléséhez vezethet, ami a 2007-2009 gazdasági világválságban is szerepet játszott (DAS et al., 2013).

2.1.4. Várható veszteség (ES)

Látható, hogy a VaR sem elégítette ki a koherens kockázati mértékek alapvető tulajdonságait. Felmerül tehát a kérdés, hogy létezik-e koherens kockázati mérték. A válasz igen, például a várható veszteség (expected shortfall - ES). Mivel a magyar szakirodalomban is az ES rövidítést használják, ezért én is azt használom a továbbiakban.

A VaR esetében arra kerestük a választ, hogy mi az a minimális veszteség, ami az esetek legrosszabb $\alpha * 100$ százalékában bekövetkezhet. Tegyük fel most a kérdést kicsit másképpen: Mi az a várható veszteség, ami az esetek legrosszabb $\alpha * 100$ százalékában bekövetkezhet (ACERBI et al., 2001)? A választ az ES adja meg, amely az esetek legrosszabb $\alpha * 100$ százalékában mutatja a veszteség (profit) várható értékét, amit matematikailag a következőkben bemutatottak szerint fogalmazhatunk meg.

Legyen X egy valószínűségi változó, valamint $\alpha \in (0, 1)$ és tegyük fel, hogy $\mathbb{E}((X)^-) < \infty$, ahol $(X)^-$ az X negatív része. Ekkor X ES értéke α szinten a következőképpen definiálható:

$$ES_{\alpha}(X) := -\frac{1}{\alpha} \int_0^{\alpha} q_u(X) du = -\frac{1}{\alpha} \int_0^{\alpha} F_X^{\leftarrow}(u) du = \frac{1}{\alpha} \int_0^{\alpha} \text{VaR}_u(X) du. \quad (2.25)$$

Mivel az alsó és a felső kvantilisek csak egy nulla valószínűségi halmazon különböznek egymástól, és így $\int_0^{\alpha} q_u(X) du = \int_0^{\alpha} q^u(X) du$, a definícióban az alsó és a felső kvantilisek kicserélhetőek, azaz

$$ES_{\alpha}(X) = -\frac{1}{\alpha} \int_0^{\alpha} q_u(X) du = -\frac{1}{\alpha} \int_0^{\alpha} q^u(X) du. \quad (2.26)$$

Azt mondhatjuk tehát, hogy ellentétben a VaR-ral, az ES esetében nincs különbség az alsó és a felső ES között (GÁLL – PAP, 2010).

A gyakorlatban a hozamoknak, mint folytonos valószínűségi változóknak a minta realizációjával dolgozunk. Legyen r_i az i -edik ($i = 1, \dots, n$) hozam értéke, $r = (r_1, \dots, r_n)$, ekkor az ES kiszámításához először növekvő sorrendbe kell rendezni az elemeket: $r_1^* \leq r_2^* \leq \dots \leq r_n^*$, ahol r_i^* jelöli az r_i minta realizáció növekvő sorrendbeli permutációjának i -edik elemét. Ezen sorrend alapján a legrosszabb α százaléknyi eset: $r_1^*, r_2^*, \dots, r_k^*$, ahol $k = \lceil n\alpha \rceil = \max \{m | m \leq n\alpha, m \in \mathbb{N}\}$. Ekkor az α -kvantilis a k -adik elem, és az ES ennek a k

elemnek az átlagával közelíthető (ACERBI et al., 2001):

$$\widehat{ES}_\alpha(r) = -\frac{\sum_{i=1}^k r_i^*}{k}. \quad (2.27)$$

A (2.27) kifejezést átalakítva adódik:

$$\begin{aligned} \widehat{ES}_\alpha(r) &= -\frac{\sum_{i=1}^k r_i^*}{k} = -\frac{\sum_{i=1}^n r_i^* \mathbf{1}_{\{i \leq k\}}}{k} \\ &= -\frac{1}{k} \left(\sum_{i=1}^n r_i^* \mathbf{1}_{\{r_i^* \leq r_k^*\}} - \sum_{i=1}^n r_i^* \mathbf{1}_{\{r_i^* \leq r_k^*\}} + \sum_{i=1}^n r_i^* \mathbf{1}_{\{i \leq k\}} \right) \\ &= -\frac{1}{k} \left(\sum_{i=1}^n r_i^* \mathbf{1}_{\{r_i^* \leq r_k^*\}} - \sum_{i=1}^n r_i^* \left(\mathbf{1}_{\{r_i^* \leq r_k^*\}} - \mathbf{1}_{\{i \leq k\}} \right) \right). \end{aligned} \quad (2.28)$$

Vegyük észre, hogy a (2.28) egyenletben a második sort úgy kaptam, hogy a kifejezéshez ugyanazt a tagot adtam hozzá, mint amit elvettem, így a kifejezés értéke nem változik. Majd kiemeltem a $\sum_{i=1}^n r_i^*$ tényezőt. Az $\mathbf{1}_{\{r_i^* \leq r_k^*\}} - \mathbf{1}_{\{i \leq k\}}$ különbség értéke az esetek legnagyobb részében nulla, hiszen az első és a második halmaz megegyezik. A halmazok akkor különböznek egymástól, ha $i > k$ esetén létezik r_k^* -al megegyező elem. Ezekben az esetekben $\mathbf{1}_{\{r_i^* \leq r_k^*\}} = 1$ és $\mathbf{1}_{\{i \leq k\}} = 0$, azaz a különbség értéke 1-gyel egyenlő. Így a (2.28) egyenlet átalakítása a következőképpen folytatható:

$$\begin{aligned} \widehat{ES}_\alpha(r) &= -\frac{1}{k} \left(\sum_{i=1}^n r_i \mathbf{1}_{\{r_i \leq r_k^*\}} - r_k^* \sum_{i=1}^n \left(\mathbf{1}_{\{r_i \leq r_k^*\}} - \mathbf{1}_{\{i \leq k\}} \right) \right) \\ &= -\frac{n}{k} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n r_i \mathbf{1}_{\{r_i \leq r_k^*\}} - r_k^* \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{\{r_i \leq r_k^*\}} - \frac{k}{n} \right) \right). \end{aligned} \quad (2.29)$$

Mivel $\alpha \frac{k}{n}$ -nel, a várható érték az átlaggal, míg a valószínűség a kedvező/összes kifejezésekkel közelíthető, illetve számolható ki, így látható a (2.29) képletből, hogy az ES a következőekben megfogalmazottak szerint is definiálható.

Legyen X valószínűségi változó, melyre $\mathbb{E}((X)^-) < \infty$ és legyen $\alpha \in (0, 1)$, ahol $(X)^-$ az X negatív része. Ekkor X ES értéke α -szinten:

$$ES_\alpha(X) = -\frac{1}{\alpha} \left(\mathbb{E}(X \mathbf{1}_{\{X \leq q_\alpha(X)\}}) + q_\alpha(X)(\alpha - P(X \leq q_\alpha(X))) \right). \quad (2.30)$$

Bebizonyítható, hogy a (2.25) és a (2.30) definíció megegyezik (GÁLL – PAP, 2010). Az egyszerűség kedvéért a továbbiakban $q_\alpha(X)$ helyett a q_α jelölést használom. Ekkor egy kis átalakítással a (2.30) egyenletből látható, hogy

$$\begin{aligned} ES_\alpha(X) &= -\frac{1}{\alpha} \left(\mathbb{E}(X \mathbf{1}_{\{X \leq q_\alpha\}}) + q_\alpha(\alpha - F_X(q_\alpha)) \right) \\ &= -\frac{1}{\alpha} \mathbb{E}(X \mathbf{1}_{\{X \leq q_\alpha\}}) + q_\alpha \left(1 - \frac{F_X(q_\alpha)}{\alpha} \right). \end{aligned} \quad (2.31)$$

Folytonos esetben $F_X(q_\alpha) = \alpha$ és így a (2.31) egyenletben a második tag nulla, és így:

$$ES_\alpha(X) = -\frac{1}{\alpha} \mathbb{E}(X \mathbf{1}_{\{X \leq q_\alpha\}}). \quad (2.32)$$

Elmondható, hogy - ellentétben az eddig vizsgált, és igen gyakran használt kockázati mértékekkel - az ES monoton, szubadditív, pozitív homogén és eltolás invariáns (bizonyítás A.5 függelékben), azaz koherens kockázati mérték. Az ES további fontos tulajdonsága, hogy az α folytonos és monoton növekvő függvénye (bizonyítás A.5 függelékben). Annak ellenére, hogy az ES nagyon sok pozitív tulajdonsággal rendelkezik, ez sem bizonyult tökéletesnek, hiszen például, míg a VaR mindig létezik, addig az ES létezéséhez az $\mathbb{E}((X)^-) < \infty$ feltételezéssel kell élnünk.

Az ES definíciójának és tulajdonságainak tárgyalása után két példát mutatok be annak kiszámítására.

1. Példa

Ez a példa megegyezik a VaR esetében bemutatottal, azaz legyen $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ valószínűségi mező, $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$ és $P(\{\omega_1\}) = 0,02$, $P(\{\omega_2\}) = P(\{\omega_3\}) = 0,04$, $P(\{\omega_4\}) = 0,9$. Legyen X és Y egy-egy portfólióból származó profit, ahol $X(\omega_1) = -80$, $X(\omega_2) = -30$, $X(\omega_3) = -5$, és $X(\omega_4) = 30$, valamint $Y(\omega_1) = -80$, $Y(\omega_2) = -5$, $Y(\omega_3) = -30$ és $Y(\omega_4) = 30$.

Tudjuk, hogy

$$ES_\alpha(X) = -\frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha q_x(X) dx = -\frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha -\text{VaR}_x(X) dx = \frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha \text{VaR}_x(X) dx.$$

Vagyis a VaR esetében az első példánál bemutatott $x \mapsto \text{VaR}_x(X)$ függvényt kell integrálni 0 és α között. Így például

$$\begin{aligned} ES_{0,01}(X) &= \frac{1}{0,01} \int_0^{0,01} \text{VaR}_x(X) dx \\ &= \frac{1}{0,01} \int_0^{0,01} 80 dx = 80 \\ ES_{0,08}(X) &= \frac{1}{0,08} \int_0^{0,08} \text{VaR}_x(X) dx \\ &= \frac{1}{0,01} \left(\int_0^{0,02} 80 dx + \int_{0,02}^{0,06} 30 dx + \int_{0,06}^{0,08} 5 dx \right) = 36,25 \\ ES_{0,2}(X) &= \frac{1}{0,2} \int_0^{0,2} \text{VaR}_x(X) dx \\ &= \frac{1}{0,2} \left(\int_0^{0,02} 80 dx + \int_{0,02}^{0,06} 30 dx + \int_{0,06}^{0,01} 5 dx + \int_{0,1}^{0,2} 30 dx \right) = 0 \end{aligned}$$

További ES értékek megtalálhatóak a 2.3 táblázatban.

2.3. táblázat. ES példa: az X valószínűségi változó ES értékei különböző α szinteken.

α	ES
0,01	80
0,03	63,3
0,08	36,25
0,2	0
0,9	-23,3

Forrás: saját számítás

Itt kell megjegyezni, hogy ha például az egyik értéket megváltoztatjuk, vagyis feltételezzük, hogy bizonyos esemény hatására extrém veszteség következhet be, azaz legyen $P(\{\omega_1\}) = -1000$, akkor a VaR értéke $\alpha \geq 0,02$ esetén nem változik, ezzel szemben az ES értéke minden alfa szinten méri ezt a változást.

2. Példa

A következő példa Acerbitől származik (ACERBI, 2002).

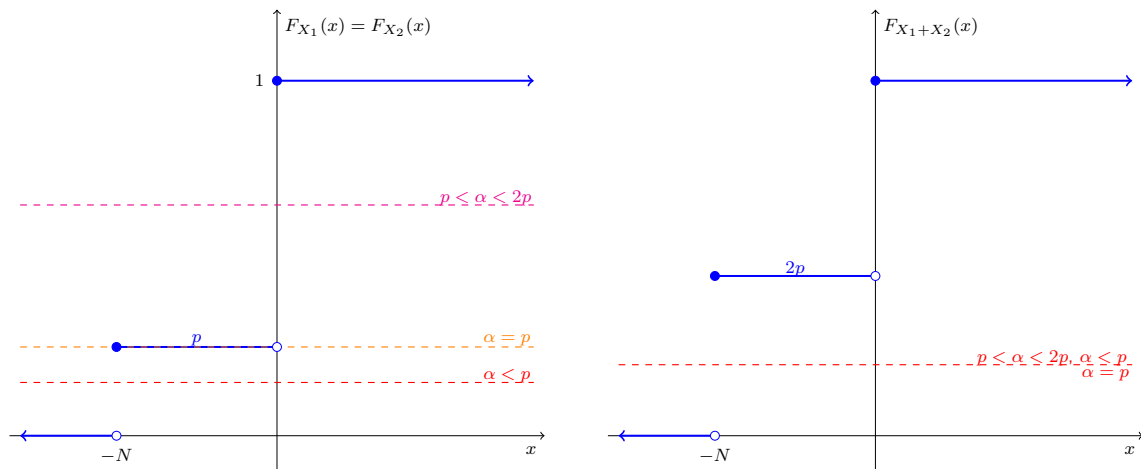
Legyen $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ valószínűségi mező, $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ és $P(\{\omega_1\}) = P(\{\omega_2\}) = p$, $P(\{\omega_3\}) = 1 - 2p$, ahol $0 < p < \frac{1}{3}$. Legyen $N \in \mathbb{R}$ pozitív és X_i , $i = 1, 2$ két valószínűségi változó, ahol

$$X_i(\omega_j) = \begin{cases} -N, & \text{ha } i = j, \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Azaz $X_1(\omega_1) = -N$, $X_1(\omega_2) = 0$, $X_1(\omega_3) = 0$, $X_2(\omega_1) = 0$, $X_2(\omega_2) = -N$, $X_2(\omega_3) = 0$, és így a két valószínűségi változó összege $(X_1 + X_2)(\omega_1) = -N + 0$, $(X_1 + X_2)(\omega_2) = 0 - N$, $(X_1 + X_2)(\omega_3) = 0 + 0$.

Ekkor $P(X_1 + X_2 = -N) = 2p$, $P(X_1 + X_2 = 0) = 1 - 2p$. A 2.8 ábrán láthatóak az X_i , $i = 1, 2$, valamint az $X_1 + X_2$ valószínűségi változók eloszlásfüggvényei. Ezek segítségével könnyen

leolvashatók, illetve kiszámíthatók a VaR és az ES értékek, amelyeket a 2.4 táblázatban foglaltam össze.



2.8. ábra. Az $X_i, i = 1, 2$, valamint az $X_1 + X_2$ valószínűségi változók eloszlásfüggvényei a 2. példa alapján

Forrás: saját szerkesztés

2.4. táblázat. A 2. példa alapján számolt VaR és ES értékek

	$p < \alpha < 2p$		$p = \alpha$		$p > \alpha$	
Kockázati mérték	$X_{1,2}$	$X_1 + X_2$	$X_{1,2}$	$X_1 + X_2$	$X_{1,2}$	$X_1 + X_2$
VaR_α	0	N	N	N	N	N
VaR^α	0	N	0	N	N	N
ES_α	Np/α	N	N	N	N	N

Forrás: saját számítás, (ACERBI, 2002) alapján

Az előzőekben olyan kockázati mértéket kerestem, amely kielégíti a monotonitást, a szubadditivitást, a pozitív homogenitást és az eltolás invariancia tulajdonságait, azaz koherens. A 2.5 táblázatban foglaltam össze a tapasztalatokat a variancia, a szórás, a szemivariancia, a VaR és az ES kockázati mértékekről. Látható, hogy a legtöbbet használt kockázati mértékek közül, csak az ES koherens.

2.5. táblázat. Néhány ismert kockázati mérték tulajdonságai

	Monotonitás	Szubadditivitás	Pozitív homogenitás	Eltolás invariancia
variancia	-	-	-	-
szórás	-	✓	✓	-
szemivariancia	-	-	-	✓
VaR	✓	-	✓	✓
ES	✓	✓	✓	✓

Forrás: saját szerkesztés

2.2. A függőségi struktúra

Mint, ahogy az az eddigiekben is látható volt, a diverzifikációnak nagy szerepe van a portfólió kockázatának csökkentésében. Az irodalomban és a gyakorlatban is ismert kockázati mérték, amely támogatja a diverzifikációt, a várható veszteség (ES). Ennek ellenére a történelem során több pénzügyi válsággal is szembe kellett nézni. Ezeknek a válságoknak az egyik oka az lehet, hogy egy esemény hatására a portfólióban nem csak egy kockázati faktor mutat extrém viselkedést, hanem együttesen több kockázati faktor is, és ez tulajdonképpen kioltja a diverzifikáció „védelmező hatását”. Az ilyen jellegű, együttesen bekövetkező veszteségek gyakorisága sokkal nagyobb, mint azt az elliptikus eloszlások esetén gondolnánk (BENEDEK et al., 2002).

A nagy veszteség elkerülése és pontosabb modellezhetősége érdekében szükség van a valószínűségi változók, azaz a portfólióban lévő eszközök közötti kapcsolatok megértésére és mérésére. A következőkben összefoglalom a legfontosabb és a kapcsolat szorosságának mérésére legtöbbet használt mutatókat.

2.2.1. Lineáris korreláció

A lineáris korrelációt az úgynevezett *korrelációs együtthatóval*, vagy más néven *Pearson-féle korrelációs együtthatóval* (*correlation coefficient/ Pearson correlation*) tudjuk mérni.

Legyenek X és Y valószínűségi változók nem nulla, véges varianciával ($\sigma^2(X), \sigma^2(Y) < \infty$).

Ekkor X és Y korrelációs együtthatóján a

$$\rho(X, Y) = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sqrt{\sigma^2(X)\sigma^2(Y)}} = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)} \quad (2.33)$$

mennyiséget értjük, ahol

$$\text{cov}(X, Y) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}(X))(Y - \mathbb{E}(Y))] = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$$

az X és Y valószínűségi változók *kovarianciája* (*covariance*).

Minta realizáció esetén a lineáris korreláció kiszámítása a következő képlettel történik:

$$\rho = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}}. \quad (2.34)$$

Ha $X, Y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$, akkor az $n \times n$ dimenziós Σ kovariancia mátrix (i, j) -edik eleme megegyezik $\text{cov}(X_i, Y_j)$ -vel, azaz $\Sigma_{ij} = \text{cov}(X, Y)_{ij} = \text{cov}(X_i, Y_j)$, ahol $1 \leq i, j \leq n$.

A kovariancia előjele mutatja meg, hogy a két valószínűségi változó között pozitív vagy negatív irányú kapcsolat van. Ha $\text{cov}(X, Y) = 0$, akkor a két valószínűségi változót korrelálatlannak nevezzük. Egy valószínűségi változó önmagával vett kovarianciája a valószínűségi változó varianciája, azaz $\text{cov}(X, X) = \sigma^2(X)$.

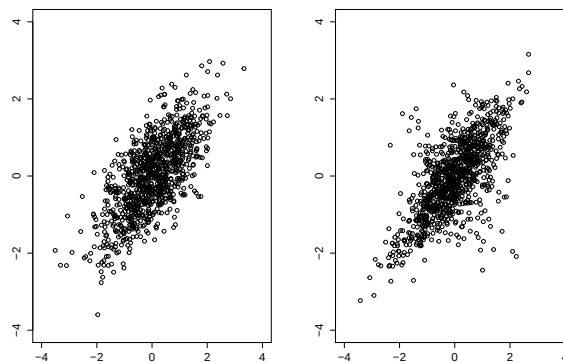
A korrelációs együtthatóval lineáris korrelációt tudunk mérni. Tökéletes lineáris függőség, azaz $P(Y = aX + b) = 1$, ($a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, b \in \mathbb{R}$) esetén $\rho(X, Y) = \pm 1$. Ha $\rho(X, Y) = -1$, akkor tökéletes negatív függőségről, míg $\rho(X, Y) = 1$ esetén tökéletes pozitív függőségről beszélünk. Ami talán még ennél is fontosabb, hogy az állítás megfordítása is igaz. Egyéb esetekben pedig, a korrelációs együttható értéke -1 és 1 közé esik (EMBRECHTS et al., 2001).

Ha X és Y függetlenek, akkor $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$ és így $\text{cov}(X, Y) = 0$, vagyis $\rho(X, Y) = 0$. Az állítás megfordítása viszont már nem igaz. Tegyük fel például, hogy X egyenletes eloszlású a $[-1, 1]$ intervallumon ($X \sim U(-1, 1)$) és $Y = X^2$, amikor X és Y természetesen nem függetlenek, de $\text{cov}(X, Y) = \text{cov}(X, X^2) = \mathbb{E}(XX^2) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(X^2) = \mathbb{E}(X^3) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(X^2) = 0$, mert X várható értéke és harmadik momentuma is nulla. A függetlenség és a korrelálatlanság fogalma tehát nem ugyanaz, és csak abban az esetben esik egybe, ha a két valószínűségi változó együttes eloszlása normális.

Annak ellenére, hogy a lineáris korreláció igen gyakran használt mérőszám a függőségi

struktúra kifejezésére, nagyon könnyen félrevezető is lehet. Nem elliptikus eloszlások esetén nem mérhetünk vele függőséget, és sokszor elliptikus eloszlások esetén sem vezet megfelelő eredményre (EMBRECHTS et al., 2001). A 2.9 ábrán például két szimuláció eredménye látható. A két esetben ugyanaz a peremeloszlás (standard normális) és a lineáris korreláció értéke ($\rho = 0,7$), de az ábráról is jól látható, hogy teljesen más függőségi struktúráról van szó (EMBRECHTS et al., 2001).

Problémát jelent továbbá, ha nem létezik az eloszlás első és/vagy második momentuma, vagy ha az végtelen (pl. vastagfarkú eloszlások esetén), mert akkor a kovariancia nem számolható ki. A kovariancia érzékeny a kiugró értékekre, vagyis ha nem normális az eloszlás, akkor igen instabil (EMBRECHTS et al., 2002).



2.9. ábra. Két példa standard normális peremeloszlásokkal és $\rho = 0,7$ lineáris korrelációs együtthatóval rendelkező eloszlásra.

Forrás: saját szerkesztés

2.2.2. Rangkorreláció

A rang korreláció előnye a lineáris korrelációval szemben, hogy nem csak lineáris, hanem monoton kapcsolatot is mérhetünk vele. Ez azt jelenti, hogy ha a két változó együtt mozog (egyik növekedése esetén a másik is növekszik, vagy fordítva, az egyik csökkenése esetén a másik is csökken), akkor a mérőszám tökéletes korrelációt mutat. A két legismertebb és legtöbbet használt rangkorrelációs mérőszám a *Kendall-féle τ* (*Kendall τ*) és a *Spearman-féle ρ* (*Spearman ρ*). Ezek definiálásához először a megfelelő és eltérő párok fogalmát mutatom be (SZEGŐ, 2002).

Legyenek X és Y folytonos valószínűségi változók és vegyünk ezekre vonatkozóan egy $n \in \mathbb{R}$ párból álló minta realizációt:

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n).$$

Ezen párok közül $\binom{n}{2} = \frac{1}{2}n(n-1)$ -féleképpen választhatunk ki két párt: $(x_i, y_i), (x_j, y_j)$, $1 \leq i, j \leq n$. Ezeket *megfelelő pároknak* (*concordant*) nevezzük, ha $x_i > x_j$ esetén $y_i > y_j$ teljesül, azaz $(x_i - x_j)(y_i - y_j) > 0$, és *eltérő párokról* (*discordant*) beszélünk, ha $x_i > x_j$ esetén $y_i < y_j$, azaz $(x_i - x_j)(y_i - y_j) < 0$.

Vegyük a következő példát:

$$(0, 1), (10, 100), (25, 400), (300, 500), (425, 501).$$

Ez egy ötelemű minta, azaz $n = 5$. Ebből az ötelemű mintából $\binom{5}{2} = 10$ -féleképpen választhatunk ki két párt: $\{(0, 1), (10, 100)\}$, $\{(0, 1), (25, 400)\}$, $\{(0, 1), (300, 500)\}$, $\{(0, 1), (425, 501)\}$, $\{(10, 100), (25, 400)\}$, $\{(10, 100), (300, 500)\}$, $\{(10, 100), (425, 501)\}$, $\{(25, 400), (300, 500)\}$, $\{(25, 400), (425, 501)\}$, $\{(300, 500), (425, 501)\}$.

Ezek vagy megfelelő, vagy eltérő párok lesznek. Ebben az esetben például az összes pár megfelelő pár. A továbbiakban c -vel jelölöm a megfelelő és d -vel az eltérő párok számát. (A példában tehát: $c = 10$ és $d = 0$.) Mivel a két változó együtt mozog – amikor az egyik növekszik, akkor a másik is –, tökéletes rangkorreláció van közöttük.

A következőkben bemutatom a Kendall-féle és a Spearman-féle rangkorrelációt. A két mérőszám leírásánál legnagyobb részt NELSEN, 2013 könyvére támaszkodom.

1. A Kendall-féle rangkorreláció

A minta realizáció alapján a Kendall-féle τ -t a megfelelő és eltérő párok valószínűségének a különbségeként számolhatjuk ki, azaz:

$$\tau = \frac{c - d}{\binom{n}{2}} = \frac{c - d}{\frac{1}{2}n(n-1)}. \quad (2.35)$$

A példa esetében tehát:

$$\tau = \frac{10}{\frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 4} = 1.$$

Általánosságban, nem csak a mintára, hanem az egész populációra hasonlóan számítható ki a Kendall-féle τ értéke. Vegyük az (X, Y) folytonos valószínűségi változókból álló vektort

és legyen H ezek együttes eloszlásfüggvénye. Legyenek továbbá (X_1, Y_1) és (X_2, Y_2) független azonos eloszlású valószínűségi vektorváltozók szintén a H együttes eloszlásfüggvénnyel. Ekkor a Kendall-féle τ a megfelelő és eltérő párok valószínűségének a különbsége, azaz

$$\tau(X, Y) = P[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) > 0] - P[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) < 0]. \quad (2.36)$$

A Kendall-féle rangkorreláció értéke -1 és 1 közé esik ($-1 \leq \tau(X, Y) \leq 1$). Függetlenség esetén $\tau(X, Y) = 0$, továbbá $\tau(X, Y) = \tau(Y, X)$ és $\tau(-X, Y) = \tau(X, -Y) = -\tau(X, Y)$.

2. Spearman-féle rangkorreláció

A Spearman-féle rangkorreláció kiszámítása minta realizáció esetén a következő formulával történik:

$$\rho_S = 1 - \frac{6 \sum d_i^2}{n(n^2 - 1)}, \quad (2.37)$$

ahol n az elemszám, d_i pedig az x_i és y_i növekvő sorrendbeli sorszámának a különbségét jelöli. Az előbbi példa esetében a számolás menetét a 2.6 táblázatban foglaltam össze.

2.6. táblázat. A Spearman-féle rang korreláció kiszámítása a számpélda alapján

x_i	y_i	sorszám(x_i)	sorszám(y_i)	d_i	d_i^2
0	1	1	1	0	0
10	100	2	2	0	0
25	400	3	3	0	0
300	500	4	4	0	0
425	501	5	5	0	0

Forrás: saját számítás

A 2.6 táblázatbeli értékeket behelyettesítve a formulába azt kapom, hogy

$$\rho_S = 1 - \frac{6 \cdot 0}{5 \cdot 24} = 1 - 0 = 1.$$

Hasonlóan a Kendall-féle korrelációhoz, ebben az esetben is megfogalmazható általánosabban a populációra vonatkozóan a Spearman-féle ρ . Legyenek X és Y valószínűségi változók F , illetve G eloszlásfüggvénnyel, valamint X_1, X_2 és X_3 az X -re, míg Y_1, Y_2 és Y_3 az Y -ra vonatkozó minták.

Legyenek továbbá (X_1, Y_1) , (X_2, Y_2) és (X_3, Y_3) azonos eloszlású valószínűségi vektorváltozók a H együttes eloszlásfüggvénnyel. A Spearman-féle rangkorreláció arányos a megfelelő és az eltérő (X_1, Y_1) és (X_2, Y_3) párok valószínűségének különbségével, tehát

$$\rho_S(X, Y) = 3 [P((X_1 - X_2)(Y_1 - Y_3) > 0) - P((X_1 - X_2)(Y_1 - Y_3) < 0)]. \quad (2.38)$$

Ugyanúgy választhatnánk az (X_2, Y_3) helyett az (X_3, Y_2) vektort is. Ami lényeges, hogy a két vektornak megegyező legyen a peremeloszlás függvénye, viszont míg az egyik a H együttes eloszlásfüggvénnyel rendelkezik, addig a másik vektor komponensei függetlenek egymástól (és így az együttes eloszlásfüggvénye: $F(x)G(y)$).

A Spearman-féle rangkorreláció értéke -1 és 1 közé esik ($-1 \leq \rho_S(X, Y) \leq 1$). Függetlenség esetén $\rho_S(X, Y) = 0$, továbbá $\rho_S(X, Y) = \rho_S(Y, X)$ és $\rho_S(-X, Y) = \rho_S(X, -Y) = -\rho_S(X, Y)$.

Az előző példából is látható, hogy $\rho_S = \tau = 1$, azaz tökéletes pozitív rangkorrelációról beszélhetünk. Viszont, ha kiszámítjuk ugyanennél a példánál a lineáris korreláció értékét ((2.33) definíció), akkor $\rho = 0,787$ -et kapunk. Tehát a tökéletes rangkorreláció nem feltétlen jelent tökéletes lineáris korrelációt is.

Annak ellenére, hogy a τ és a ρ_S is rangkorrelációt határoz meg - és tökéletes korreláció esetén megegyezők - teljesen különböző is lehet az értékük. Többek között a következő összefüggések ismertek a két korrelációs mérőszám között:

$$-1 \leq 3\tau - 2\rho_S \leq 1, \quad (2.39)$$

valamint

$$\frac{3\tau - 1}{2} \leq \rho_S \leq \frac{1 + 2\tau - \tau^2}{2}, \text{ ha } \tau \geq 0 \quad (2.40)$$

és

$$\frac{\tau^2 + 2\tau - 1}{2} \leq \rho_S \leq \frac{1 + 3\tau}{2}, \text{ ha } \tau \leq 0. \quad (2.41)$$

A Kendall-féle és a Spearman-féle rangkorrelációval kapcsolatos egyéb tételek, definíciók és bizonyítások megtalálhatók NELSEN, 2013 könyvében.

2.2.3. Szélekben való függőség

Amint már említettem, a portfólió diverzifikációjával a portfóliót több kockázati faktor között oszthatjuk meg, így egyes faktorok kedvezőtlen hatását más faktorok pozitív hatása

kompenzálhatja. Tehát nem az egyes faktorok extrém viselkedése okozza a problémát, hanem az, ha azok ezt a viselkedést együttesen mutatják. Pénzügyi területen azt szokták mondani, hogy rendkívüli esemény hatására a korreláció növekszik, azaz annak ellenére, hogy bizonyos változók között gyenge vagy közepes relációt mérünk-e, egy rendkívüli esemény hatására együtt kezdenek el mozogni (BENEDEK et al., 2002; AAS, 2004). Ezt a fajta viselkedést tudjuk mérni a *szélekben való függőségi együttthatóval (tail dependence)*.

Vegyük például az U_1 és U_2 egyenletes eloszlású valószínűségi változókat. A felső szélekben vagy más néven felső farokban való függőség azt jelenti, hogy az U_1 magas értékeihez, magas U_2 értékek tartoznak. Vagyis az együtttható azt méri, hogy ha U_1 elért egy adott q szintet, akkor mennyi annak a valószínűsége, hogy U_2 is elérje ezt a szintet, ha q -val 1-hez tartunk. Ha ez a valószínűség q -nál kisebb, akkor azt mondjuk, hogy a két valószínűségi változó nem függ a szélekben (SCHMIDT, 2007).

Legyenek X és Y valószínűségi változók F_X és F_Y eloszlásfüggvényekkel. Ekkor X és Y *felső szélekben*, vagy más néven *felső farokban való függősége (upper tail dependence)* alatt (JOE, 1997) a

$$\lambda_u(X, Y) = \lim_{q \nearrow 1} P(Y > F_Y^{\leftarrow}(q) | X > F_X^{\leftarrow}(q)), \quad (2.42)$$

együttthatót értjük, feltéve, hogy a limit létezik és $\lambda_u(X, Y) \in [0, 1]$. Ha $\lambda_u(X, Y) > 0$, akkor azt mondjuk, hogy X és Y felső farokban függőek, míg ha $\lambda_u(X, Y) = 0$, akkor a két valószínűségi változót a felső farokban vagy más néven aszimptotikusan függetlennek tekintjük.

Az *alsó szélekben* vagy más néven *alsó farokban való függőségi együtttható (lower tail dependence)* hasonlóan definiálható:

$$\lambda_l(X, Y) = \lim_{q \searrow 0} P(Y \leq F_Y^{\leftarrow}(q) | X \leq F_X^{\leftarrow}(q)). \quad (2.43)$$

feltéve, hogy a limit létezik és $\lambda_l(X, Y) \in [0, 1]$. Ha $\lambda_l(X, Y) > 0$, akkor azt mondjuk, hogy X és Y alsó farokban függőek, míg ha $\lambda_l(X, Y) = 0$, akkor a két valószínűségi változót az alsó farokban vagy más néven aszimptotikusan függetlennek tekintjük.

Elliptikus eloszlások esetén $\lambda_u(X, Y) = \lambda_l(X, Y)$, továbbá megjegyzendő, hogy ha X és Y függetlenek, akkor $\lambda_u(X, Y) = \lambda_l(X, Y) = 0$. Az állítás megfordítása viszont általánosságban nem igaz, vagyis az aszimptotikus függetlenség nem feltétlenül vonja maga után a statisztikai

értelemben vett függetlenséget (vagyis amikor az egyik esemény bekövetkezése nincs hatással a másik esemény bekövetkezésének valószínűségére) (AAS, 2004).

2.2.4. Kopula függvények

Pénzügyi és gazdasági területen az egyik legfontosabb probléma a többdimenziós eloszlások becslése és modellezése. A matematikai elméletek és modellek legtöbb esetben normális, de legalábbis elliptikus eloszlást feltételeznek, annak ellenére, hogy az empirikus adatokból látható, hogy ez a feltétel sok esetben nem teljesül (HÄRDLE et al., 2008). Ezen kívül létezhetnek olyan függőségi struktúrák is, ahol a korrelációs együtthatók megegyeznek, de maguk a struktúrák teljesen eltérőek (2.9 ábra). Az előző alfejezetekben bemutatott függőségi mérőszámok „csak” páronkénti függőséget mérnek. Ennél magasabb dimenziójú, általánosabb függőséget írhatunk le az ún. kopula függvényekkel.

A fejezet megírásában nagy segítséget jelentettek többek között DURANTE – SEMPI, 2010, EMBRECHTS et al., 2001, EMBRECHTS et al., 2002, NELSEN, 2013 és CHERUBINI et al., 2004 művei. A bevezető példa Schmidt-től (SCHMIDT, 2007) származik.

Vegyük azt a kísérletet, amikor egy dobókockával kétszer dobunk. Legyenek X_1 és X_2 ezen kockadobásokat leíró valószínűségi változók. A kérdés az az, hogy ha csak az X_1 valószínűségi változóhoz tartozó minta realizációt ismerjük, meg tudjuk-e mondani, hogy mi lesz az X_2 -höz tartozó minta realizáció. Abban az esetben, ha X_1 az első dobás, és X_2 a második dobás eredményét jelenti, akkor az X_1 -ről kapott információ semmilyen információt nem szolgáltat X_2 -re vonatkozóan. Abból, hogy például az első dobás ötös, nem tudunk következtetni a második dobásra, hiszen a két dobás teljesen független egymástól.

A két valószínűségi változó együttes eloszlása a 2.7 táblázatban, az úgynevezett kontingenciatáblázatban látható. A táblázat jobboldali és legalsó sora, a két valószínűségi változó külön-külön vett eloszlása, az úgynevezett marginális vagy más néven peremeloszlás. Az 2.10 ábrán láthatóak az X_1 -hez és az X_2 -höz tartozó peremeloszlások, azaz ezen valószínűségi változók eloszlásfüggvényei ($F_{X_i}(x) := P(X_i \leq x)$). Vegyük észre, hogy ebben a konkrét példában a két eloszlásfüggvény egyenlő: $F_{X_1}(x) = F_{X_2}(x) =: F$. A közös eloszlásfüggvény pedig a függetlenség miatt a peremeloszlások szorzatával egyenlő:

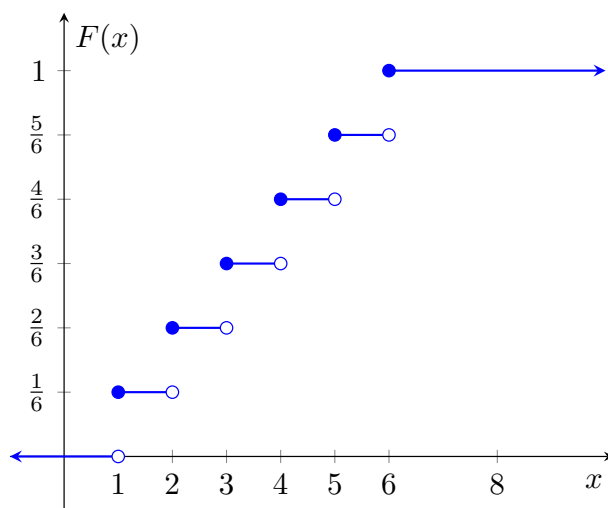
$$F_{X_1, X_2}(x_1, x_2) := P(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2) = F_{X_1}(x_1)F_{X_2}(x_2) = F(x_1)F(x_2).$$

Például, ha ki szeretnénk számolni a közös eloszlásfüggvényt az $x_1 = 4$, $x_2 = 3$ helyen, akkor a 2.7 táblázat szürkével jelölt részében lévő értékeket kell összeadnunk, azaz: $F_{X_1, X_2}(4, 3) = P(X_1 \leq 4, X_2 \leq 3) = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}$. Természetesen a függetlenséget, azaz a marginális eloszlásfüggvényekhez tartozó értékeket felhasználva (2.10 ábra) ugyanerre az eredményre jutunk: $F_{X_1, X_2}(4, 3) = F(4)F(3) = \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{6} = \frac{1}{3}$.

2.7. táblázat. Kontingencia táblázat: két független kockadobás együttes eloszlása

$X_2 \setminus X_1$	1	2	3	4	5	6	Σ
1	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/6
2	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/6
3	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/6
4	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/6
5	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/6
6	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/6
Σ	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1

Forrás: saját szerkesztés



2.10. ábra. Kockadobáshoz tartozó eloszlásfüggvény

Forrás: saját szerkesztés

A tökéletes függetlenségről szóló példa ellenkezője, ha egyszer dobunk a kockával és X_1 és X_2 is ennek a dobásnak az eredményét írja le. Természetesen ekkor minden esetben egyértelműen meg tudjuk mondani az X_2 -höz tartozó minta realizációt, ha tudjuk X_1 -et, hiszen a két valószínűségi változó egyenlő. Ekkor tökéletes függőségről beszélhetünk.

Végül pedig vegyük azt az esetet, amikor az X_1 valószínűségi változó a kisebb dobott értéket írja le, azaz tudjuk, hogy $X_1 \leq X_2$. Vagyis, például $X_1 = 6$ esetén egyértelműen meg tudjuk mondani az X_2 értékét. Viszont például $X_1 = 5$ akkor 50-50% az esélye, hogy az X_2 változó értéke 5 vagy 6 lesz, és így tovább. Tehát egyértelmű, hogy X_1 -ből valamilyen következtetést tudunk levonni X_2 -re vonatkozóan, de az is egyértelmű, hogy sem tökéletes függőségről, sem pedig tökéletes függetlenségről nem beszélhetünk. A közös eloszlásfüggvény a kísérlet 2.8 kontingenciatáblázatából leolvasható, illetve képlettel megfogalmazva, a következőképpen írható le:

$$F_{X_1, X_2}(x_1, x_2) = 2F(\min\{x_1, x_2\})F(x_2) - F(\min\{x_1, x_2\})^2,$$

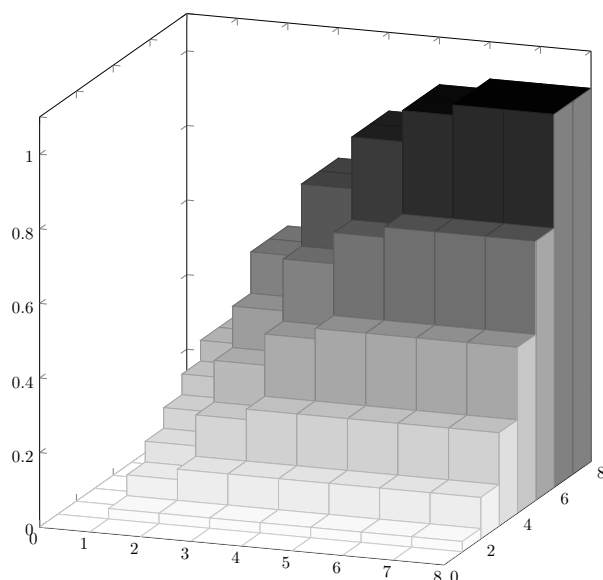
ahol F továbbra is egyetlen kockadobás eredményének eloszlásfüggvénye (2.10 ábra). Vegyük észre, hogy ebben az esetben már a marginális eloszlások nem egyeznek meg. Hasonlóan a független esethez, ha ki szeretnénk számolni az együttes eloszlásfüggvény értékét az $x_1 = 4$, $x_2 = 3$ helyen, akkor össze kell adnunk a kontingencia táblázat (2.8 táblázat) szürkével jelölt részein az értékeket, azaz $F_{X_1, X_2}(4, 3) = P(X_1 \leq 4, X_2 \leq 3) = \frac{9}{36}$. Természetesen a képletet felhasználva ugyanerre az eredményre jutunk: $F_{X_1, X_2}(4, 3) = 2F(\min\{4, 3\})F(3) - F(\min\{4, 3\})^2 = 2F(3)F(3) - F(3)^2 = F(3)^2 = (3/6)^2 = \frac{9}{36}$.

2.8. táblázat. Kontingencia táblázat: két kockadobás együttes eloszlása, ahol $X_1 \leq X_2$

$X_2 \setminus X_1$	1	2	3	4	5	6	Σ
1	1/36	0	0	0	0	0	1/36
2	2/36	1/36	0	0	0	0	3/36
3	2/36	2/36	1/36	0	0	0	5/36
4	2/36	2/36	2/36	1/36	0	0	7/36
5	2/36	2/36	2/36	2/36	1/36	0	9/36
6	2/36	2/36	2/36	2/36	2/36	1/36	11/36
Σ	11/36	9/36	7/36	5/36	3/36	1/36	1

Forrás: saját számítás

Látható tehát, hogy a valószínűségi változók pontos leírásához ismerni kell a két „összetevőt”: az egyik a marginális eloszlás, a másik pedig a közös eloszlásfüggvény, a függőségi struktúra. És tulajdonképpen ez a függőségi struktúra a kopula. Az előbbi példa közös eloszlásfüggvényét a 2.11 ábrán szemléltetem.



2.11. ábra. A 2.8 kontingencia táblázathoz tartozó közös eloszlásfüggvény: két kocka dobása esetén, ahol az egyik valószínűségi változó a kisebb dobás eredményét írja le

Forrás: saját szerkesztés

Nagyon fontos továbbá megjegyezni, hogy a valószínűségi változók együttes eloszlása meghatározza a peremeloszlásokat, de a peremeloszlások nem határozzák meg egyértelműen az együttes eloszlást. Ezt például a kockadobásos kísérletből is láthatjuk, a 2.8 kontingencia táblázat alapján. Ezen táblázat utolsó sorai jelentik a peremeloszlásokat. Ha csak ezek lennének a táblázatba beírva (csak ezeket ismernénk), nem rendelkeznénk elég információval ahhoz, hogy kitöltsük a táblázat többi részét, csak annyit tudnánk, hogy úgy kellene beírni a számokat, hogy ha összeadjuk azokat, akkor a sor, illetve oszlop végén található számot kapjuk. Ez végtelen lehetőséget jelent, azaz a peremeloszlásokból valóban nem tudjuk meghatározni az együttes eloszlást. Viszont, ha tudjuk az együttes eloszlást (a táblázat középső része), akkor abból egyértelműen kiszámolhatók a peremeloszlás függvények, mert csak össze kell adni a számokat a sorokban és az oszlopokban. Analóg módon, a gondolatmenet igaz folytonos esetben is. Az adatok elemzése során ez nehézségeket okozhat, mert a legtöbb esetben csak a peremeloszlásokat ismerjük, viszont az együttes eloszlásfüggvényekre lenne szükség a számításokhoz. A későbbiekben bemutatott adatelemzés esetében hasonló kihívással kell szembe néznem: az elemzéshez használt részvényáradatok a peremeloszlásokat határozzák meg, de nem „mondanak” semmit a közös viselkedésükre vonatkozóan. A kockázat kiszámításánál pedig fontos ismerni a közös eloszlásfüggvényt.

Vegyük észre továbbá, hogy ha ugyanezt a kísérletet úgy végeznénk el, hogy a dobókockán 1, 2, ..., 6 helyett például 11, 12, ..., 16 lenne írva, akkor a függőségi struktúra egyáltalán nem

változna, viszont az együttes eloszlásfüggvény nem lenne ugyanaz, el lenne tolva a térben. Annak érdekében, hogy ilyen esetekben ne tegyünk különbséget a két struktúra között, a valószínűségi változókat egyenletes eloszlásúvá transzformáljuk. Ezt az *inverz eloszlásfüggvény módszer* (*inverse transform method*) segítségével megtehetjük, ami azt mondja ki, hogy az X valószínűségi változó, az F eloszlásfüggvénnyel mindig felírható $X = F^{\leftarrow}(U)$ formában, ahol $F^{\leftarrow}$ az általánosított inverz, U pedig egyenletes eloszlású valószínűségi változó a $[0, 1]$ intervallumon.

A példa alapján szinte magától adódik, hogy matematikailag megfogalmazva a 2-dimenziós kopula egy 2-dimenziós eloszlásfüggvény a $[0, 1]^2$ intervallumon, sztenderd egyenletes eloszlású peremeloszlásokkal.

Tehát a $C : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ leképezést kopulának nevezzük, ha rendelkezik a következő tulajdonságokkal:

1. $C(u, 0) = C(0, v) = 0, \quad \forall u, v \in [0, 1]$
2. $C(u, 1) = u$ és $C(1, v) = v, \quad \forall u, v \in [0, 1]$
3. $C(u_2, v_2) - C(u_2, v_1) - C(u_1, v_2) + C(u_1, v_1) \geq 0, \quad \forall u_1, u_2, v_1, v_2 \in [0, 1] \text{ és } u_1 \leq u_2, v_1 \leq v_2.$

Tulajdonképpen ez a három tulajdonság fejezi ki, hogy egy olyan többdimenziós eloszlásfüggvényről van szó, aminek a peremeloszlásai egyenletes eloszlásúak a $[0, 1]$ intervallumon. A harmadik tulajdonság a 2-dimenziós megfelelője a nem csökkenő függvénynek (ami az eloszlásfüggvények tulajdonsága), az első tulajdonság szintén szükséges, hogy eloszlásfüggvényről beszélhessünk az egységkockán (azaz a kopula értelmezési tartományán), míg a második tulajdonság adja, hogy a peremeloszlás függvények egyenletes eloszlásúak.

Sokszor vagyunk kíváncsiak az extrém, speciális esetekre. A függőség leírásánál ez a tökéletes függetlenséget, valamint a tökéletes negatív és pozitív függőséget jelenti. Az előbbit az úgynevezett *szorzat kopulával* (*product/independent copula*), míg az utóbbiakat a *minimum* (*minimum copula*) és *maximum kopulákkal* (*maximum copula*) írhatjuk le:

1. Szorzat kopula

$$\Pi(u, v) = uv, \quad \forall u, v \in [0, 1]$$

2. Minimum kopula

$$M(u, v) = \min\{u, v\}, \quad \forall u, v \in [0, 1]$$

3. Maximum kopula

$$W(u, v) = \max\{u + v - 1, 0\}, \quad \forall u, v \in [0, 1]$$

Az előbb felsorolt kopulák eloszlásfüggvényei a 2.12 ábrán láthatóak.

Könnyen leellenőrizhető továbbá, hogy a kopula definíciójában felsorolt tulajdonságok mind a három példa esetén teljesülnek, azaz valóban kopula függvényekről van szó.

A kopula függvény definíciója kettőnél magasabb dimenzióra is kiterjeszthető: az n -dimenziós kopula n -dimenziós eloszlásfüggvény a $[0, 1]^n$ intervallumon, sztenderd egyenletes eloszlású peremeloszlásokkal. Tehát, az n -dimenziós kopula egy $C : [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]$ leképezés, a következő tulajdonságokkal:

$$1. C(u_1, \dots, u_n) \text{ minden komponensében növekvő} \quad \forall u_i \in [0, 1], \quad i = 1, \dots, n$$

$$2. C(1, \dots, 1, u_i, 1, \dots, 1) = u_i \quad \forall u_i \in [0, 1], \quad i = 1, \dots, n$$

$$3. \text{ Bármely } (a_1, \dots, a_n), \quad (b_1, \dots, b_n) \in [0, 1]^n \text{ és } a_i \leq b_i \text{ esetén}$$

$$\sum_{i_1=1}^2 \dots \sum_{i_n=1}^2 (-1)^{i_1+\dots+i_n} C(u_{1i_1}, \dots, u_{ni_n}) \geq 0,$$

$$\text{ahol} \quad u_{j1} = a_j, \quad u_{j2} = b_j, \quad i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, n.$$

A kétdimenziós példák is kiterjeszthetők n -dimenzióra:

1. n -dimenziós szorzat kopula

$$\Pi_n(\mathbf{u}) = u_1 \cdot \dots \cdot u_n, \quad \forall \mathbf{u} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n)$$

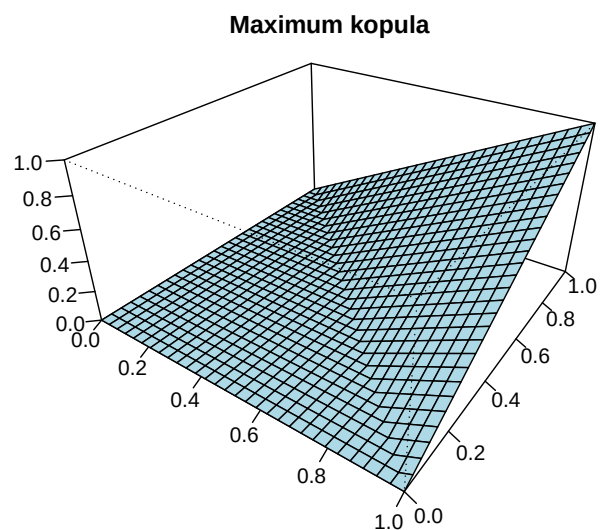
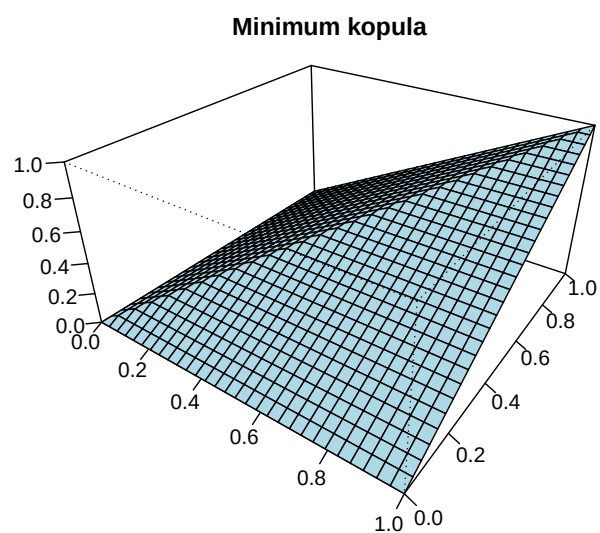
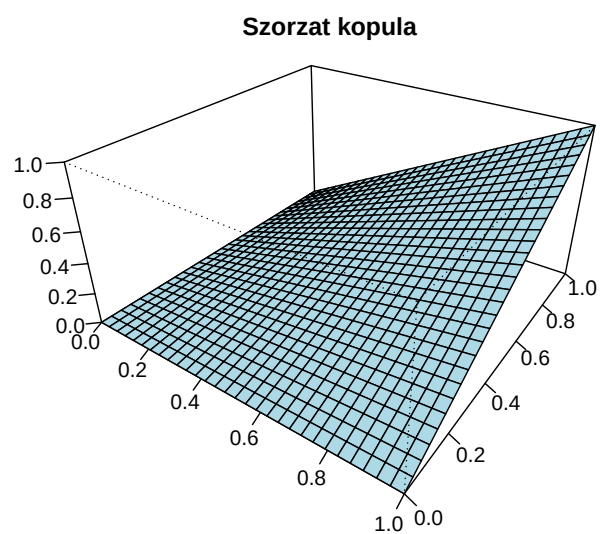
2. n -dimenziós minimum kopula

$$M_n(\mathbf{u}) = \min\{u_1, \dots, u_n\}, \quad \forall \mathbf{u} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n)$$

3. n -dimenziós maximum „kopula”

$$W_n(\mathbf{u}) = \max\{u_1 + \dots + u_n - n + 1, 0\}, \quad \forall \mathbf{u} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n)$$

Fontos megjegyezni viszont, hogy a maximum kopula $n \geq 3$ esetén már NEM kopula függvény.



2.12. ábra. A szorzat, minimum és maximum kopula eloszlásfüggvényei

Forrás: saját szerkesztés

Minden kopula függvény nagyobb vagy egyenlő, mint a maximum kopula és kisebb vagy egyenlő, mint a minimum kopula, azaz ha C egy n -dimenziós kopula, akkor bármely $\mathbf{u} \in [0, 1]^n$ esetén:

$$W_n(\mathbf{u}) \leq C(\mathbf{u}) \leq M_n(\mathbf{u}). \quad (2.44)$$

A (2.44) egyenletben bemutatott határokat *Fréchet-Höfding határok*nak (*Fréchet-Höfding bounds*) nevezzük. Látható, hogy annak ellenére, hogy a maximum kopula nem teljesíti a kopula függvény tulajdonságait kettőnél magasabb dimenzió esetén, fontos szerepet tölt be, mert az adja a kopula függvények alsó határát.

A kopula függvények témakörében az egyik legfontosabb tétel *Sklar tétele* (*Sklar's theorem*). Elsőként Sklar tételét 2 dimenzióban fogalmazom meg.

Legyen F egy 2 dimenziós eloszlásfüggvény, F_1 és F_2 peremeloszlásokkal. Ekkor létezik C kopula, amelyre

$$F(x_1, x_2) = C(F_1(x_1), F_2(x_2)), \quad \forall x_1, x_2 \in \bar{\mathbb{R}}. \quad (2.45)$$

Ha F_1 és F_2 folytonos, akkor C egyértelmű, egyébként pedig egyértelműen meghatározott az $F_1(\bar{\mathbb{R}}) \times F_2(\bar{\mathbb{R}})$ halmazon. Megfordítva, ha C egy kopula függvény és F_1 valamint F_2 egyváltozós eloszlásfüggvények, akkor az $F(x_1, x_2) = C(F_1(x_1), F_2(x_2))$ képlettel megadott F függvény kétváltozós eloszlásfüggvény az F_1 és F_2 peremeloszlásokkal.

Tulajdonképpen ez a tétel kimondja, hogy a közös eloszlásfüggvényt „szétszedhetjük” peremeloszlásokra és a köztük lévő függőségi struktúrára, és ez a függőségi struktúra a kopula.

Miért van minderre szükség? Tegyük fel például, hogy ki szeretnénk számolni egy két részvényből álló portfólió kockázatát (VaR vagy az ES értékét). Legyenek X_1 és X_2 a hozamokat tartalmazó valószínűségi változók és $L = X_1 + X_2$ a portfólió. Ahhoz, hogy kiszámítsuk a portfóliónk kockázatát, szükséges tudnunk $F_L(x)$ -et, azaz az együttes eloszlásfüggvényt:

$$\begin{aligned} F_L(x) &= P(L \leq x) = P(X_1 + X_2 \leq x) = \\ &= \begin{cases} \sum_u \sum_{u+v \leq x}^v P(X_1 = u, X_2 = v) = \sum_u \sum_{u+v \leq x}^v p_{X_1, X_2}(u, v) \\ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{v=-\infty}^{x-u} f_{X_1, X_2}(u, v) dv du \end{cases}. \end{aligned} \quad (2.46)$$

Az első egyenlet a diszkrét, míg a második a folytonos esetre vonatkozik. A (2.46) egyenletből látszik, hogy a portfólió eloszlásfüggvényének meghatározásához szükség van a együttes

sűrűségfüggvényre ($f_{X_1, X_2}(u, v)$) és ennek kiszámolásához használjuk a kopula függvényt.

Jelölje a kopula függvény sűrűségfüggvényét kétváltozós esetben $c(u, v)$ (HÄRDLE et al., 2008), ekkor:

$$c(u, v) = \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} C(u, v), \quad u, v \in [0, 1]. \quad (2.47)$$

A kopula sűrűségfüggvényét ((2.47) egyenlet), Sklar tételét ((2.45) egyenlet) és a parciális deriválás szabályát felhasználva az együttes sűrűségfüggvény következőképpen számolható ki:

$$\begin{aligned} f_{X_1, X_2}(x_1, x_2) &= \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} F_{X_1, X_2}(x_1, x_2) = \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} C(F_{X_1}(x_1), F_{X_2}(x_2)) \\ &= \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} C(u, v) \Big|_{u=F_{X_1}(x_1), v=F_{X_2}(x_2)} f_{X_1}(x_1) f_{X_2}(x_2) \\ &= c(F_{X_1}(x_1), F_{X_2}(x_2)) f_{X_1}(x_1) f_{X_2}(x_2), \end{aligned}$$

ahol $x_1, x_2 \in \overline{\mathbb{R}}$ és f a megfelelő valószínűségi változóhoz tartozó sűrűségfüggvény.

A kopula függvények segítségével a 2.2.2 részfejezetben említett függőségi mérőszámokat, azaz a Kendall féle tau-t és a Spearman féle rho-t is kifejezhetjük:

$$\tau(X, Y) = 4 \int_0^1 \int_0^1 C(u, v) dC(u, v) - 1 \quad (2.48)$$

$$\rho_S(X, Y) = 12 \int_0^1 \int_0^1 C(u, v) du dv - 3, \quad (2.49)$$

ahol $C(u, v)$ az X és Y valószínűségi változókhoz tartozó kopula.

A 2-dimenziós eset után Sklar tételét, valamint az együttes eloszlásfüggvényt magasabb dimenzióban is kimondhatjuk, megfogalmazhatjuk.

Legyen F n -dimenziós eloszlásfüggvény, $F_1, \dots, F_n$ peremeloszlásokkal. Ekkor létezik C kopula, amelyre

$$F(x_1, \dots, x_n) = C(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n)), \quad \forall x_i \in \overline{\mathbb{R}}. \quad (2.50)$$

Ha F_i minden $i = 1, \dots, n$ esetén folytonos, akkor C egyértelmű, egyébként pedig egyértelműen meghatározott az $F_1(\overline{\mathbb{R}}) \times \dots \times F_n(\overline{\mathbb{R}})$ halmazon. Megfordítva, ha C kopula függvény és $F_1, \dots, F_n$ egyváltozós eloszlásfüggvények, akkor a (2.50) képlettel megadott F függvény n -változós eloszlásfüggvény az $F_1, \dots, F_n$ peremeloszlásokkal.

A kopula definíciójából tudjuk, hogy maga a kopula egy eloszlásfüggvény. Általában az

eloszlásfüggvény helyett a sűrűségfüggvényt szoktuk ábrázolni (SCHMIDT, 2007). Ha a kopula függvény megfelelő sokszor differenciálható, akkor a sűrűségfüggvényt a következőképpen számíthatjuk ki:

$$c(\mathbf{u}) = \frac{\partial^n}{\partial u_1 \cdots \partial u_n} C(u_1, \dots, u_n). \quad (2.51)$$

A (2.51) egyenlet felhasználásával pedig kiszámítható az együttes sűrűségfüggvény:

$$f_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n) = c(F_{X_1}(x_1), \dots, F_{X_n}(x_n)) \prod_{i=1}^n f_{X_i}(x_i), \quad (2.52)$$

ahol $x_i \in \overline{\mathbb{R}}, i = 1, \dots, n$ és f a megfelelő valószínűségi változóhoz tartozó sűrűségfüggvény.

Megjegyzendő, hogy a minimum, illetve a maximum kopuláknak nem létezik sűrűségfüggvényük, a szorzat kopula sűrűségfüggvénye pedig a konstans egy függvény.

A legfontosabb definíciók és tételek után, a következőekben a legelterjedtebb kopula függvényekre mutatok be példákat.

Tökéletes függőség és függetlenség

Ahogy már fentebb említettem, az egyik legfontosabb kopula az úgynevezett *függetlenségi* vagy más néven *szorzat* kopula:

$$\Pi_n(\mathbf{u}) = u_1 \cdot \dots \cdot u_n, \quad \forall \mathbf{u} \in \mathbb{R}^n.$$

Sklar tételéből adódik, hogy valószínűségi változók akkor és csak akkor függetlennek, ha a hozzájuk tartozó kopula a szorzat kopula. Ennek a kopulának a sűrűségfüggvénye konstans.

Szintén említésre került már a Frechet-Höfding határok felső határa, az úgynevezett *minimum* kopula:

$$M_n(\mathbf{u}) = \min\{u_1, \dots, u_n\}, \quad \forall \mathbf{u} \in \mathbb{R}^n.$$

Angolul ezt a kopulát comonotonicity copula-nak is nevezik, amely a tökéletes pozitív függőségre utal. A tökéletes negatív függőséget (countermonotonicity copula) a Frechet-Höfding határok alsó határa, az úgynevezett *maximum* kopula testesíti meg. Ismételten megjegyzendő, hogy ez a függvény csak két dimenzióban kopula:

$$W(u, v) = \max\{u + v - 1, 0\}, \quad \forall u, v \in [0, 1].$$

A maximum és a minimum kopula egyike sem differenciálható minden pontjában, így ezeknek nem létezik sűrűségfüggvényük. Az eloszlásfüggvényeik 2-dimenzióban a 2.12 ábrán

láthatóak.

Implicit kopulák

Az implicit kopulákat valamilyen jól ismert eloszlásfüggvényből származtatjuk, és így nem feltétlenül létezik zárt formula amivel leírhatóak. Ha ez az eloszlásfüggvény elliptikus, akkor elliptikus kopuláról beszélünk. Ilyenek például a pénzügyi területen igen gyakran használt Gauss és Student t-kopula. Ahogy a nevükből is kiderül az előbbi a normális, míg az utóbbi a Student-féle t-eloszlásból származtatható.

A Gauss kopula eloszlásfüggvénye a következő alakot ölti:

$$C_{\Sigma}^{Ga}(\mathbf{u}) = \Phi_{\Sigma} \left(\Phi^{-1}(u_1), \dots, \Phi^{-1}(u_n) \right), \quad (2.53)$$

ahol Φ jelöli a standard normális eloszlás eloszlásfüggvényét, míg Φ_{Σ} az n-dimenziós normális eloszlás eloszlásfüggvénye nulla várható értékkel és Σ lineáris korrelációs mátrixszal. Ezeket felhasználva tehát a két dimenziós Gauss kopula:

$$C_{\rho}^{Ga}(u_1, u_2) = \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(u_1)} \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(u_2)} \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \exp \left(-\frac{x_1^2 - 2\rho x_1 x_2 + x_2^2}{2(1-\rho^2)} \right) dx_1 dx_2, \quad (2.54)$$

ahol ρ a kopula paraméter, a 2.53 egyenletben szereplő Σ pedig egy kétszer kettes mátrix, amelynek az átlójában egyesek szerepelnek, a többi elem pedig ρ . Ezt a mátrixot a két dimenziós normális eloszlás kovariancia mátrix elemeinek átskálázásával kapjuk 1 varianciájúvá. Vegyük észre, hogy ebben az esetben ρ a lineáris korrelációs együtthatónak felel meg. A Gauss kopula eloszlásfüggvényéből megkaphatjuk a kétváltozós sűrűségfüggvényt:

$$c_{\rho}^{Ga}(u_1, u_2) = \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}} \exp \left(-\frac{\Phi^{-2}(u_1)\rho^2 - 2\rho\Phi^{-1}(u_1)\Phi^{-1}(u_2) + \Phi^{-2}(u_2)\rho^2}{2(1-\rho^2)} \right). \quad (2.55)$$

A Kendall-féle tau és a Spearman-féle rho értéke a Gauss kopula esetén:

$$\tau^{Ga}(X, Y) = \frac{2}{\pi} \arcsin \rho, \quad (2.56)$$

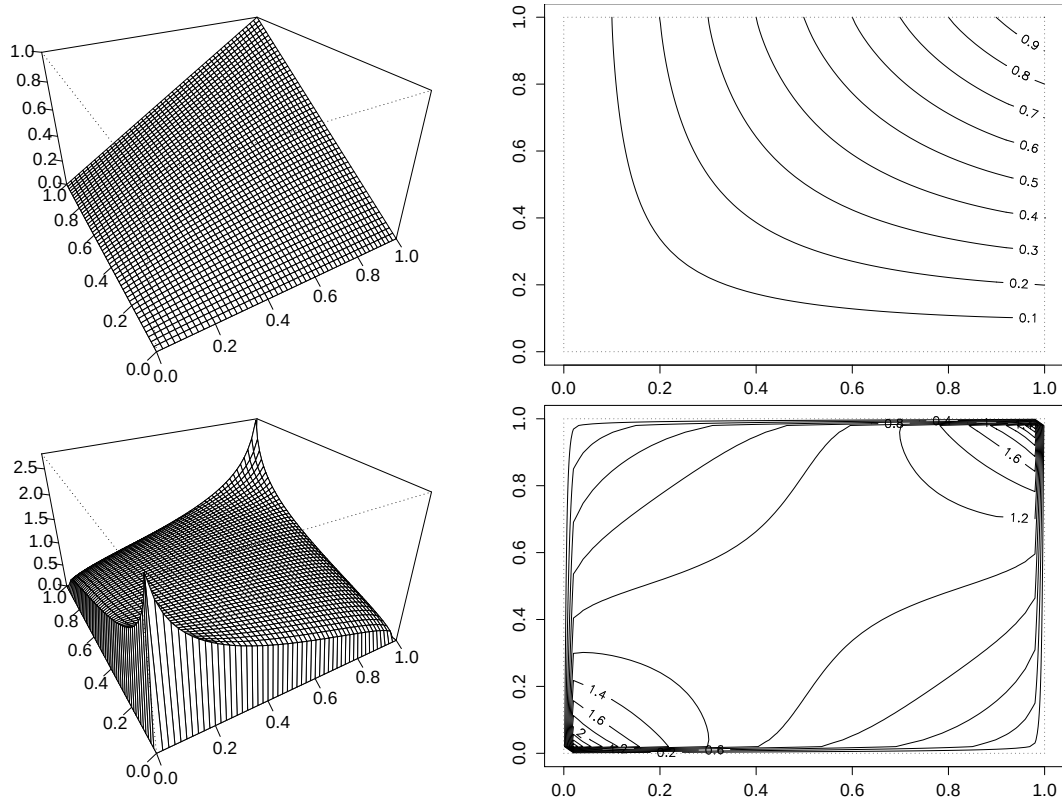
valamint

$$\rho_S^{Ga}(X, Y) = \frac{6}{\pi} \arcsin \frac{\rho}{2}. \quad (2.57)$$

Mivel elliptikus kopuláról van szó (vagyis szimmetrikus), így az alsó széleken való függőség megegyezik a felső széleken való függőséggel: $\lambda_u^{Ga}(X, Y) = \lambda_l^{Ga}(X, Y) = 0$, vagyis mindkét szélén a valószínűségi változókat függetlennek mondhatjuk. Ez azt jelenti, hogy akármilyen magas korrelációs (ρ) értéket választunk is, ha az eloszlásfüggvény szélén elég messzire

megyünk, akkor az extrém események egymástól függetlenül következnek be. Vagy máshogy megfogalmazva, ha az egyik változóban magas értéket mérünk, akkor nem valószínű, hogy a másik változó is magas értéket fog mutatni (RAKONCZAI, 2009).

A kétváltozós Gauss-kopula eloszlás-, valamint sűrűségfüggvénye, és annak kontúrjai $\rho = 0,3$ esetén a 2.13 ábrán láthatóak.



2.13. ábra. Gauss kopula. A baloldali oszlopban a kopula eloszlás és sűrűségfüggvénye. A jobboldali oszlopban ezek kontúrjai, $\rho = 0,3$ esetén.

Forrás: saját szerkesztés

A *Student* vagy más néven *t-kopula* a következőképpen írható le:

$$C_{v,\Sigma}^t(\mathbf{u}) = t_{v,\Sigma} \left(t_v^{-1}(u_1), \dots, t_v^{-1}(u_n) \right), \quad (2.58)$$

ahol t_v az 1-dimenziós, v szabadságfokú Student féle t-eloszlás eloszlásfüggvénye, $t_{v,\Sigma}$ pedig az n -dimenziós Student féle t-eloszlás eloszlásfüggvénye Σ korrelációs mátrixszal. Ezeket felhasználva, a két dimenziós t-kopula eloszlásfüggvénye a következő alakot ölti:

$$C_{v,\rho}^t(u_1, u_2) = \int_{-\infty}^{t_v^{-1}(u_1)} \int_{-\infty}^{t_v^{-1}(u_2)} \frac{\Gamma(\frac{v+2}{2})}{\Gamma(\frac{v}{2})\pi v \sqrt{1-\rho^2}} \left(1 + \frac{x_1^2 - 2\rho x_1 x_2 + x_2^2}{v(1-\rho^2)} \right)^{-\frac{v+2}{2}} dx_1 dx_2. \quad (2.59)$$

A t-kopulának két paramétere van: ν a szabadsági fokok száma, míg Σ (vagy két dimenzióban ρ) a korrelációs mátrix (lineáris korreláció). A kopula eloszlásfüggvényéből megkapható a sűrűségfüggvény, amely két változóban a

$$c_{\nu,\rho}^t(u_1, u_2) = \frac{\Gamma(\frac{\nu+2}{2})\Gamma(\frac{\nu}{2})}{\Gamma(\frac{\nu+1}{2})} \frac{\left[1 + \frac{t_{\nu}^{-2}(u_1) - 2\rho t_{\nu}^{-1}(u_1)t_{\nu}^{-1}(u_2) + t_{\nu}^{-2}(u_2)}{\nu(1-\rho^2)}\right]^{-\frac{\nu+2}{2}}}{\sqrt{(1-\rho^2)} \left[\left(1 + \frac{t_{\nu}^{-1}(u_1)}{\nu}\right)\left(1 + \frac{t_{\nu}^{-1}(u_2)}{\nu}\right)\right]^{-\frac{\nu+1}{2}}}. \quad (2.60)$$

alakban írható.

A Kendall-féle tau és a Spearman-féle rho értéke a t-kopula esetén megegyezik a Gauss kopuláéval:

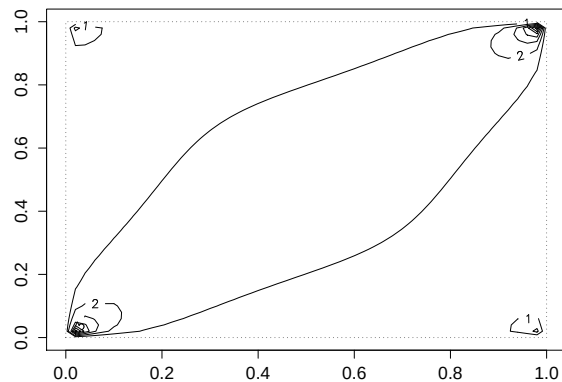
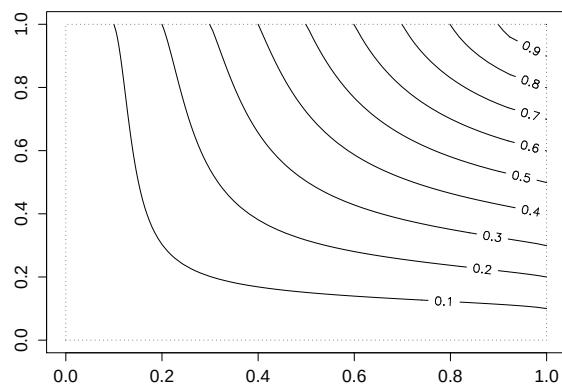
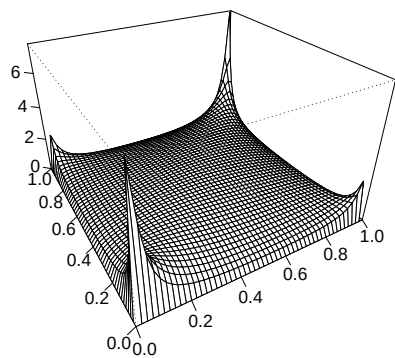
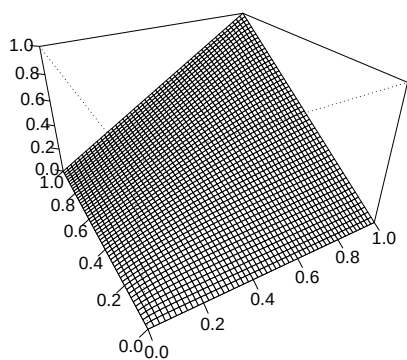
$$\tau^t(X, Y) = \frac{2}{\pi} \arcsin \rho, \quad (2.61)$$

valamint

$$\rho_S^t(X, Y) = \frac{6}{\pi} \arcsin \frac{\rho}{2}. \quad (2.62)$$

Mivel a t-kopula is elliptikus, vagyis szimmetrikus, így az alsó szélekben való függőség megegyezik a felső szélekben való függőséggel: $\lambda_u^t(X, Y) = \lambda_l^t(X, Y) = 2t_{\nu+1} \left(-\sqrt{\frac{(\nu+1)(1-\rho)}{1+\rho}} \right)$. Minél erősebb a lineáris korreláció, valamint minél kisebb a szabadsági fokok száma, annál erősebb a szélekben való függőség. Megjegyzendő, hogy a Student t-kopula akkor is függőséget mutat a szélekben, amikor a ρ értéke negatív (> -1), vagy éppen nulla. A Student t-kopula eloszlás- és sűrűségfüggvénye, valamint azok kontúrjai a 2.14 ábrán láthatóak $\rho = 0, 3$ és $\nu = 2$ paraméterek esetén.

Vegyük észre, hogy a Student t-kopula és a Gauss kopula hasonlóan viselkedik az eloszlás közepén, viszont teljesen eltérő viselkedést mutatnak a széleken. Annak ellenére, hogy a két esetben a korreláció értéke megegyezik ($\rho = 0, 3$) látható, hogy a Student t-kopula esetében mind a négy „sarokban” nagyobb csúcsosodást tapasztalhatunk, mint a Gauss kopula esetében, ami azt jelenti, hogy ez a kopula sokkal jobban kifejezi az extrém eseményeket. Például, ha a két valószínűségi változó a veszteséget fejezi ki, akkor a (0,0) pontban lévő kiugró érték azt jelenti, hogy a portfólióban lévő mindkét részvénnel nagyot veszítettünk. Hasonlóan, az (1,1) pont azt fejezi ki, hogy mindkettővel nagyot nyerhetünk. A Student kopula esetében továbbá, csúcsosodás figyelhető meg a (0,1) és (1,0) pontokban is, amely a kopula „kevert” természetét mutatja, mert ezek a pontok fejezik ki azon eseteket, amikor egy egyik valószínűségi változó negatív, míg a másik pozitív. Az, hogy a (0,0), illetve (1,1) pontokban sokkal nagyobb



2.14. ábra. Student-féle t kopula. A baloldali oszlopban a kopula eloszlás és sűrűségfüggvénye. A jobboldali oszlopban ezek kontúrjai, $\rho = 0,3$ és $\nu = 2$ esetén.

Forrás: saját szerkesztés

csúcsosodás figyelhető meg, mint a (0,1), illetve (1,0) pontokban azt fejezi ki, hogy nagyobb annak a valószínűsége, hogy a valószínűségi változóknak megegyezik az előjelük, mint annak, hogy azok eltérő előjelűek. (SCHMIDT, 2007).

Explicit kopulák

Ellentétben azokkal a kopulákkal, amelyek az eloszlásfüggvényükből fejezhetőek ki, az explicit kopulák viszonylag egyszerű zárt formula segítségével is leírhatóak. Ezen kopulák nagy része az úgynevezett Arkhimédeszi kopulacsaládba tartozik. Az Arkhimédeszi kopulacsalád a következőekben leírtak szerint definiálható.

Legyen $\varphi : [0, 1] \rightarrow [0, \infty]$ folytonos, szigorúan monoton csökkenő függvény, melyre $\varphi(1) = 0$. Ekkor a

$$C(u_1, u_2) = \begin{cases} \varphi^{-1}(\varphi(u_1) + \varphi(u_2)), & \text{ha } \varphi(u_1) + \varphi(u_2) \leq \varphi(0) \\ 0, & \text{egyébként} \end{cases} \quad (2.63)$$

függvény akkor és csak akkor kopula, ha φ konvex. Az ebben a formában megadott kopulát *Arkhimédeszi kopulának* (*Archimedean copula*) nevezzük, a φ függvényt pedig a kopula generátorának hívjuk. Ha $\varphi(0) = \infty$, akkor $C(u_1, u_2) = \varphi^{-1}(\varphi(u_1) + \varphi(u_2))$. Ennek a konstrukciónak a segítségével sokféle kopulát generálhatunk, melyek közül, a következőekben, a legfontosabbakat két változós esetben mutatom be.

Elsőként a $\varphi(u) = (-\ln u)^\Theta$ generátort veszem, ahol $\Theta \geq 1$. Ekkor $\varphi(u)$ folytonos, monoton csökkenő, konvex és $\varphi(1) = 0$, $\varphi(0) = \infty$. A generátor inverze: $\varphi^{-1}(u) = \exp(-u^{\frac{1}{\Theta}})$, amit a (2.63) egyenletbe helyettesítve megkapjuk az úgynevezett *Gumbel*, vagy más néven *Gumbel-Hougaard* kopulát:

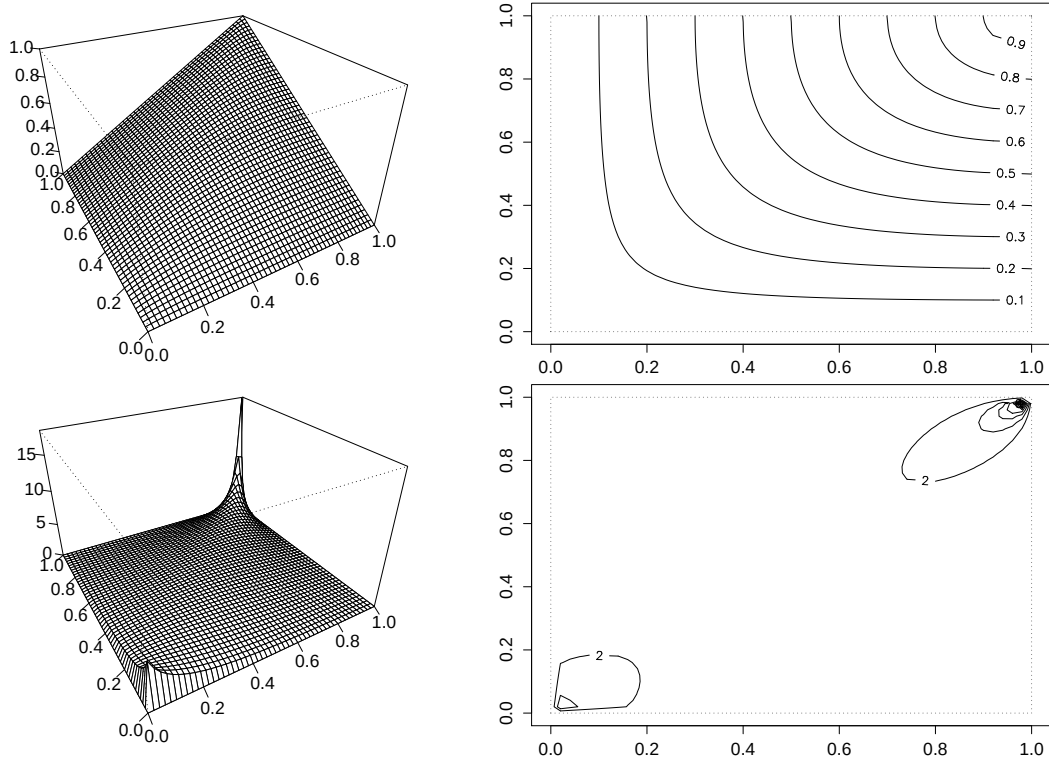
$$C_\Theta^{Gu}(u_1, u_2) = \exp \left[- \left((-\ln u_1)^\Theta + (-\ln u_2)^\Theta \right)^{\frac{1}{\Theta}} \right]. \quad (2.64)$$

Abban az esetben, ha $\Theta = 1$, akkor a Gumbel kopula megegyezik a független kopulával, azaz $C_1^{Gu}(u_1, u_2) = \prod(u_1, u_2)$, továbbá, ha $\Theta \rightarrow \infty$, akkor a Gumbel kopula a tökéletes pozitív függőséget közelíti, vagyis $\lim_{\Theta \rightarrow \infty} C_\Theta^{Gu}(u_1, u_2) = M(u_1, u_2)$. A Gumbel kopula olyan kopulára példa, amelynek csak egyik szélén mérhető függőség, méghozzá a felső széleken. Az alsó széleken a kopulát függetlennek mondjuk: $\lambda_l = 0$, $\lambda_u = 2 - 2^{\frac{1}{\Theta}}$.

A Spearman-féle rho nem fejezhető ki valamilyen zárt formában a Gumbel kopula paraméterének (Θ) a segítségével. A Kendall-féle tau ezzel szemben igen:

$$\tau^{Gu}(X, Y) = 1 - \frac{1}{\Theta}. \quad (2.65)$$

Az 2.15 ábrán láthatók a Gumbel kopula eloszlás- és sűrűségfüggvénye, valamint az ezekhez tartozó kontúrok $\Theta = 2$ esetén.



2.15. ábra. Gumbel kopula. A baloldali oszlopban a kopula eloszlás és sűrűségfüggvénye. A jobboldali oszlopban ezek kontúrjai, $\Theta = 2$ esetén.

Forrás: saját szerkesztés

Második példaként a $\varphi(u) = (u^{-\Theta} - 1)/\Theta$ generátort mutatom be, ahol $\Theta \in [-1, \infty) \setminus \{0\}$. Ekkor $\varphi(1) = 0$ és $\Theta > 0$ esetén $\varphi(u)$ folytonos, monoton csökkenő, konvex és $\varphi(0) = \infty$. A generátor inverze $\varphi^{-1}(u) = (u\Theta + 1)^{-\frac{1}{\Theta}}$, melyet a (2.63) egyenletbe helyettesítve megkapjuk az úgynevezett Clayton kopulát (vagy más néven Cook and Johnson's családot (RAKONCZAI, 2009)):

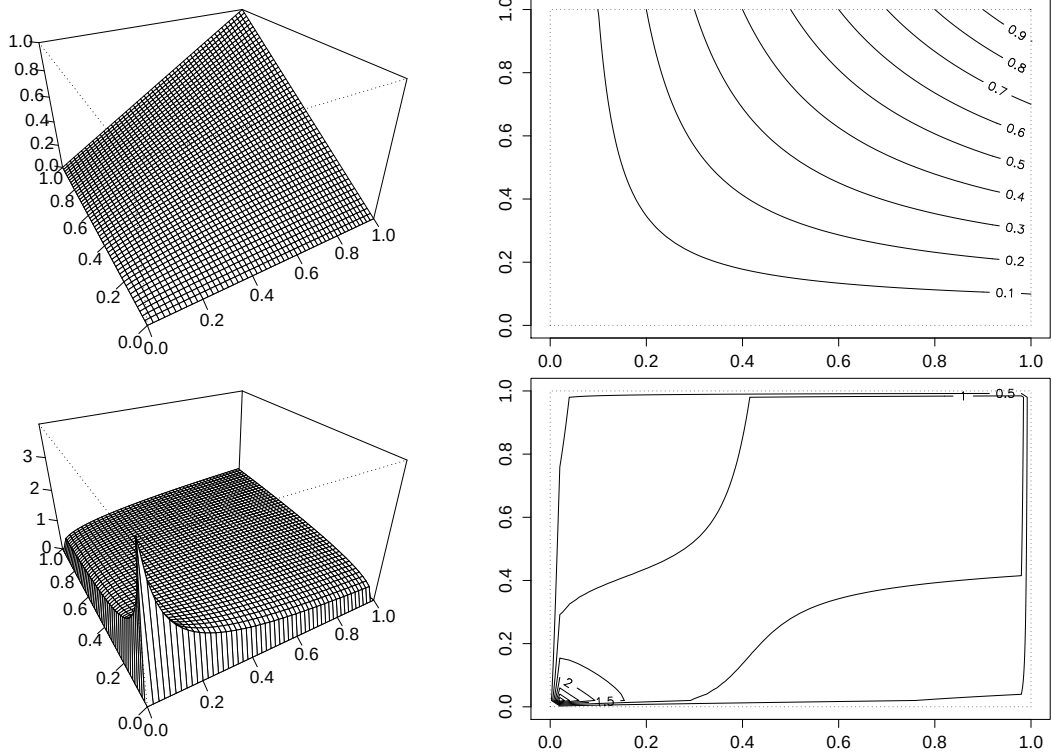
$$C_{\Theta}^{Cl}(u_1, u_2) = \max\{(u_1^{-\Theta} + u_2^{-\Theta} - 1)^{-\frac{1}{\Theta}}, 0\}. \quad (2.66)$$

A Clayton kopula $\Theta = -1$ esetén megegyezik a maximum kopulával, azaz $C_{-1}^{Cl}(u_1, u_2) = W(u_1, u_2)$. Továbbá, ha a paraméter a végtelenhez tart ($\Theta \rightarrow \infty$), akkor a Clayton kopula a minimum kopulát közelíti, vagyis $\lim_{\Theta \rightarrow \infty} C_{\Theta}^{Cl}(u_1, u_2) = M(u_1, u_2)$. Valamint, ha a paraméterrel nullához tartunk ($\Theta \rightarrow 0$), akkor a Clayton kopula a független kopulát közelíti: $\lim_{\Theta \rightarrow 0} C_{\Theta}^{Cl}(u_1, u_2) = \Pi(u_1, u_2)$. A Clayton kopula esetében szintén csak egyik farokban mérhető függőség, de ellentétben a Gumbel kopulával itt a felső szélek függetlenek: $\lambda_u = 0$, $\lambda_l = 2^{-\frac{1}{\Theta}}$.

A Kendall-féle tau ekkor a következő alakot ölti:

$$\tau^{Cl}(X, Y) = \frac{\Theta}{\Theta + 2}. \quad (2.67)$$

A 2.16 ábrán látható a Clayton kopula eloszlás- és sűrűségfüggvénye, valamint az ezekhez tartozó kontúrok, $\Theta = 0, 3$ esetén.



2.16. ábra. Clayton kopula. A baloldali oszlopban a kopula eloszlás és sűrűségfüggvénye. A jobboldali oszlopban ezek kontúrjai, $\Theta = 0, 3$ esetén.

Forrás: saját szerkesztés

Harmadik példaként a $\varphi(u) = -\ln \frac{e^{-\Theta u} - 1}{e^{-\Theta} - 1}$ generátort mutatom be, ahol $\Theta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Ekkor $\varphi(u)$ folytonos, monoton csökkenő, konvex és $\varphi(1) = 0$, $\varphi(0) = \infty$. A generátor függvény inverze: $\varphi^{-1}(u) = -\frac{1}{\Theta} \ln(e^{-u}(e^{-\Theta} - 1) + 1)$. A generátorfüggvényt és annak inverzét a (2.63) helyettesítve generálhatjuk az úgynevezett *Frank* kopulát:

$$C_{\Theta}^{Fr}(u_1, u_2) = -\frac{1}{\Theta} \ln \left(\frac{(e^{\Theta u_1} - 1)(e^{\Theta u_2} - 1)}{e^{-\Theta} - 1} + 1 \right). \quad (2.68)$$

A Frank kopula $\Theta \rightarrow 0$ esetén megegyezik a független kopulával, azaz $\lim_{\Theta \rightarrow 0} C_{\Theta}^{Fr}(u_1, u_2) = \Pi(u_1, u_2)$, $\Theta \rightarrow -\infty$ esetén a maximum kopulával, vagyis $\lim_{\Theta \rightarrow -\infty} C_{\Theta}^{Fr}(u_1, u_2) = W(u_1, u_2)$, illetve $\Theta \rightarrow \infty$ esetén pedig a minimum kopulával:

$$\lim_{\theta \rightarrow \infty} C_{\theta}^{Fr}(u_1, u_2) = M(u_1 u_2).$$

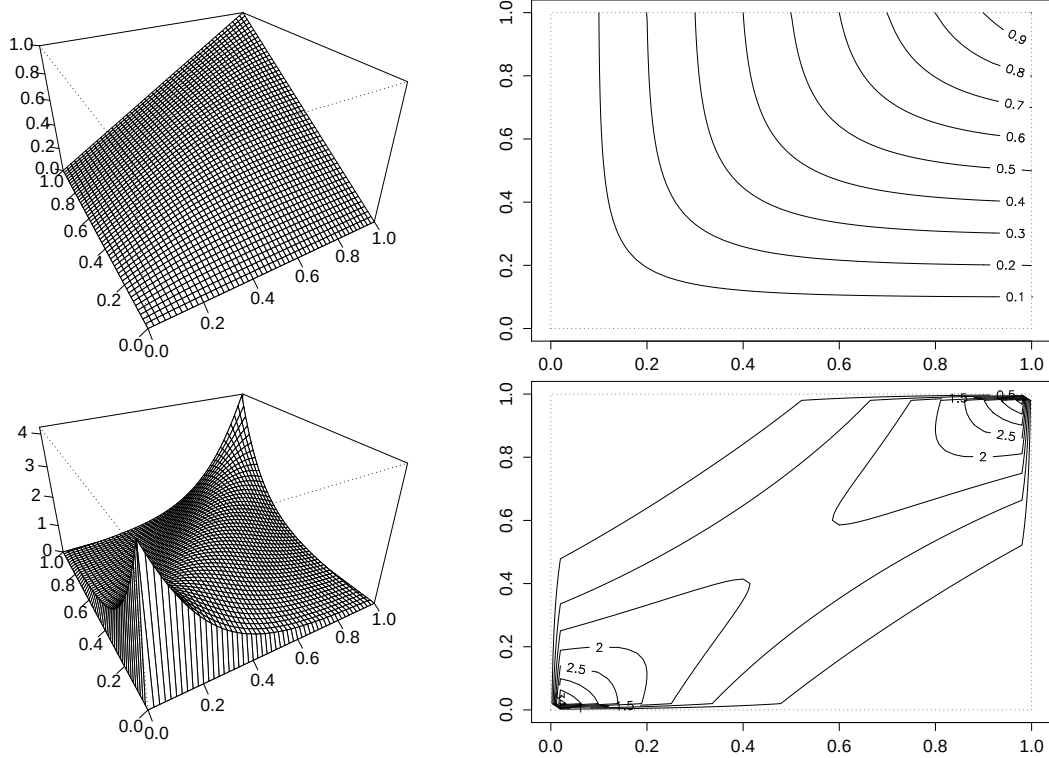
A Frank kopula mindkét szélén függetlenséget mutat: $\lambda_u(X, Y) = \lambda_l(X, Y) = 0$. A Frank kopulához tartozó Kendall-féle és Spearman-féle rang korreláció, pedig:

$$\tau^{Fr}(X, Y) = 1 - \frac{4}{\theta} \left(1 - \frac{1}{\theta} \int_0^{\theta} \frac{t}{e^t - 1} dt \right), \quad (2.69)$$

illetve

$$\rho_S(X, Y) = 1 - \frac{12}{\theta} \left(\frac{1}{\theta} \int_0^{\theta} \frac{t}{e^t - 1} dt - \frac{2}{\theta^2} \int_0^{\theta} \frac{t^2}{e^t - 1} dt \right). \quad (2.70)$$

A 2.17 ábrán láthatóak a 2-dimenziós Frank kopula eloszlás- és sűrűségfüggvényei, valamint az ezekhez tartozó kontúrok, $\theta = 5$ esetén.



2.17. ábra. Frank kopula. A baloldali oszlopban a kopula eloszlás és sűrűségfüggvénye. A jobboldali oszlopban ezek kontúrjai, $\theta = 5$ esetén.

Forrás: saját szerkesztés

Az Arkhimédeszi kopulák definíciója kiterjeszthető n -dimenzióra is. Az n -dimenziós ($n \geq 2$) Arkhimédeszi $C^n : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ kopula a következő formában írható:

$$C^n(\mathbf{u}) = \varphi^{-1}(\varphi(u_1) + \dots + \varphi(u_n)), \quad (2.71)$$

ahol $u_1, \dots, u_n \in [0, 1]$, $\varphi : [0, 1] \rightarrow [0, \infty]$ egy folytonos, szigorúan csökkenő függvény, melyre $\varphi(\mathbf{0}) = \infty$ és $\varphi(\mathbf{1}) = 0$, valamint φ^{-1} -re igaz, hogy $(-1)^k \frac{d^k}{dt^k} \varphi^{-1}(t) \geq 0$, $\forall t \in [0, \infty)$ és $k = 0, 1, 2, \dots$ esetén. A gyakorlatban ez a kiterjesztés nem használható jól, mert az egész bonyolult struktúra egyetlen paramétertől függ, továbbá a változók felcserélhetők, azaz $(u_1, \dots, u_n)$ eloszlása megegyezik $(u_{j_1}, \dots, u_{j_n})$ eloszlásával $\forall j_l \neq j_v$ esetén (HÄRDLE et al., 2008, EMBRECHTS et al., 2001). Ennél jobb kiterjesztést „kínál” az úgynevezett hierarchikus kopulák csoportja:

$$C(\mathbf{u}) = \left\{ \varphi_{n-1} \circ \varphi_{n-2}^{-1} \left[\dots \varphi_2^{-1} \left(\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} (\varphi_1(u_1) + \varphi_1(u_2)) + \varphi_2(u_3) \right) + \dots \right. \right. \\ \left. \left. \dots + \varphi_{n-2}(u_{n-1}) \right] + \varphi_{n-1}(u_n) \right\} \quad (2.72)$$

bármely $\varphi_{d-i} \circ \varphi_{d-j}^{-1} \in \mathbb{L}^*$, $i < j$ esetén, ahol:

$$\mathbb{L}^* = \left\{ \omega : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty) \mid \omega(0) = 0, \omega(\infty) = \infty, (-j)^{j-1} \omega^{(j)} \geq 0, j = 1, \dots, \infty \right\}.$$

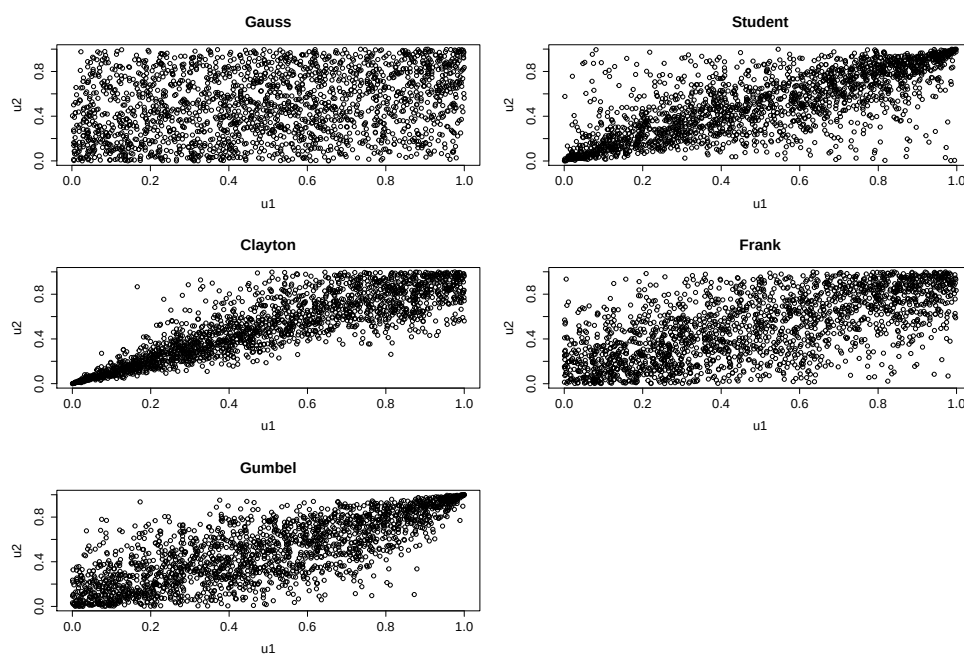
Kopula függvény és a szélekben való függőség

A szélekben való függőségi mutató segít megérteni az extrém események együttes bekövetkezésének lehetőségeit. A 2.2.3 alfejezetben bemutatott alsó és felső szélekben való függőségi mutatókat a következőképpen fejezhetjük ki a C kétdimenziós kopula segítségével (CIZEK et al., 2005):

$$\lambda_u = \lim_{v \nearrow 1} \frac{1 - 2v + C(v, v)}{1 - v} \quad (2.73)$$

$$\lambda_u = \lim_{v \searrow 0} \frac{C(v, v)}{v}. \quad (2.74)$$

A 2.18 ábrán láthatók az öt tekintett kopulafüggvény segítségével generált adatok két dimenzióban. Ezek segítségével viszonylag könnyen leolvasható, hogy a Gauss kopula mind az alsó, mind pedig a felső szélekben független, hiszen az adatok nem mutatnak sűrűsödést az (1,1), illetve (0,0) pontok felé haladva. Ugyanez mondható el a Frank kopulával kapcsolatban is, mert a szélek felé haladva nem tapasztalható jelentős sűrűsödés. Jól látható továbbá, hogy a Clayton kopula az alsó szélekben függő, míg a Gumbel kopula a felső szélekben. Ez tehát azt jelenti, hogy a Clayton kopulával jobban tudjuk modellezni a negatív események együttes bekövetkezését, míg a Gumbel kopulával a pozitív események együttes bekövetkezését. A Student kopula esetében pedig, mind az alsó, mind pedig a felső szélekben tapasztalható függőség.



2.18. ábra. Kétdimenziós minták a Gauss, a Student, a Clayton, a Frank és a Gumbel kopulákra

Forrás: saját szerkesztés

3. fejezet

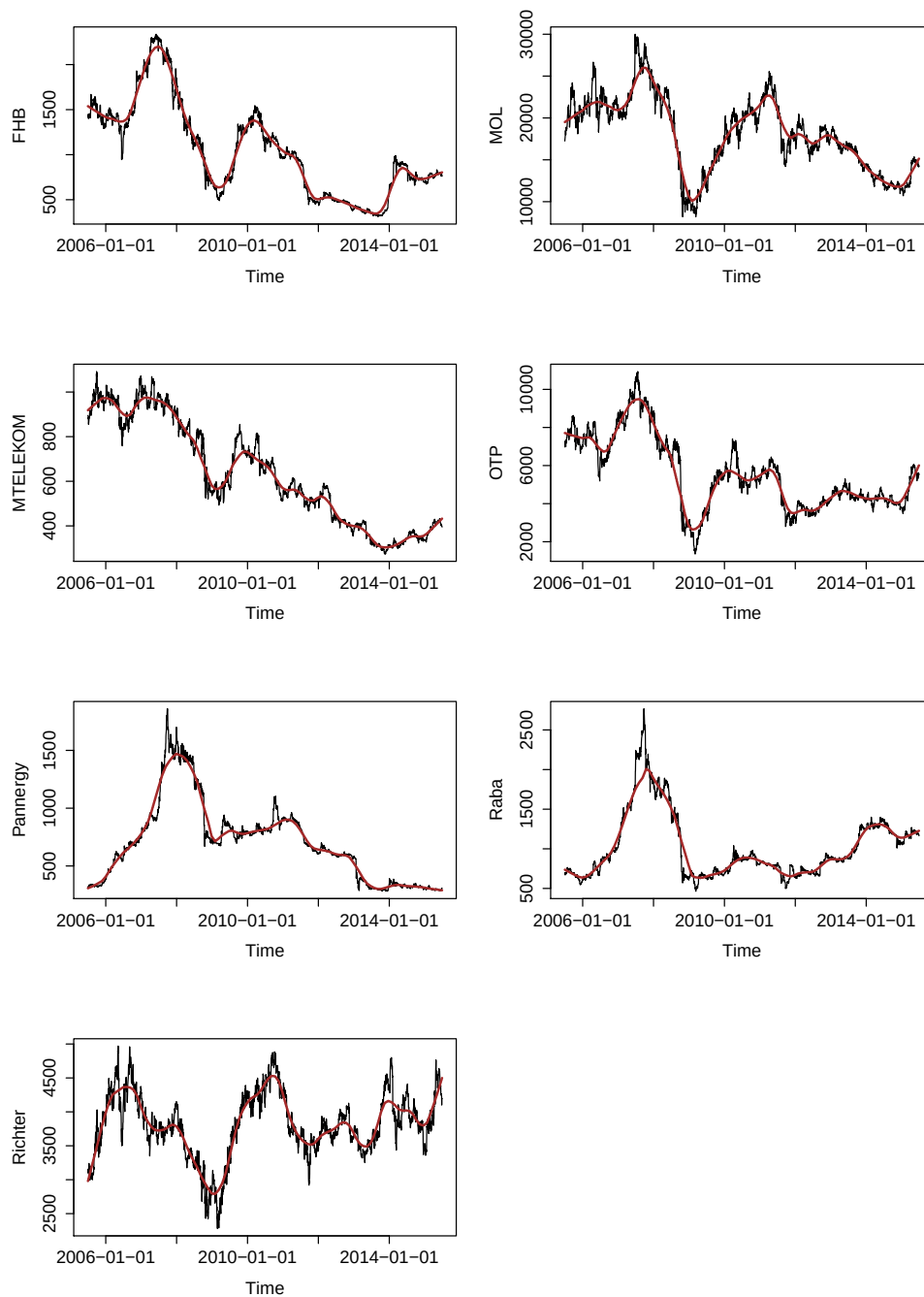
Anyag és módszer

A hipotézisek megerősítéséhez illetve megcáfolásához szükséges számításokhoz az adatokat a Budapesti Értéktőzsde honlapjáról (bet.hu) töltöttem le. Hét részvény, nevezetesen az FHB, MOL, MTELEKOM, OTP, Pannergy, Raba és Richter napi árfolyam adataival dolgoztam 2005.07.01-2015.06.29 között, azaz 10 évre vonatkozóan. A néhány hiányzó értéket az előző napi árfolyamértékkel töltöttem ki (kivéve a hétvégeket) és így egy 2607 értékből álló adatsort kaptam.

Ezen adatok megvizsgálásához, elemzéséhez és a számításokhoz az R programot használtam. Az R egy nyílt forráskódú, ingyenes statisztikai programnyelv, amit egyre többen és egyre szélesebb körben használnak szerte a világban (BURNS, 2007). Az R programnyelven belül több ezer programcsomag létezik, amelyek közül a pénzügyi terület szempontjából legfontosabbakat (egy kevés leírással) megtalálhatjuk a CRAN Task View: Empirical Finance (<https://CRAN.R-project.org/view=Finance>) oldalon (WÜRTZ et al., 2009). A dolgozatomban az elemzések legnagyobb részéhez az Rmetrics programcsomag eljárásait használtam.

3.1. Az adatok

A részvények árának időbeli változása a 3.1 ábrán látható. Megfigyelhető, hogy az árak elég változatos képet mutatnak, továbbá, hogy különböző skálán mozognak. Ezért - az összehasonlíthatóság végett - a továbbiakban természetesen nem a részvény árakkal, hanem a belőlük számolt hozamokkal, pontosabban a logaritmikus hozamokkal fogok számolni, hiszen a hozamok skálafüggetlenek abban az értelemben, hogy nem függnek a mértékegységtől (Forint, Euro, stb.) (RUPPERT, 2011). A hozamról részletes leírás található a 3.2 fejezetben.



3.1. ábra. Az FHB, MOL, MTELEKOM, OTP, Pannergy, Raba és Richter részvények napi árfolyamai 2005.07.01 és 2015.06.29 között.

Forrás: saját szerkesztés

3.1.1. Alapvető statisztikák és normalitásvizsgálat

Első lépésként megvizsgálom, hogy milyen alapvető statisztikai tulajdonságokkal rendelkeznek a hét részvény logaritmikus hozamai. Az egyszerűség kedvéért a továbbiakban, ha hozamot említek, akkor mindig a logaritmikus hozamra gondolok. A 3.2 és 3.3 ábrákon látható a hét részvény napi hozama és azok eloszlása. A hisztogramba rajzolt narancssárga vonal az átlagot, míg a piros görbe az adatokból számolt átlaggal és szórással megegyező átlagú és szórású normális eloszlást jelenti.

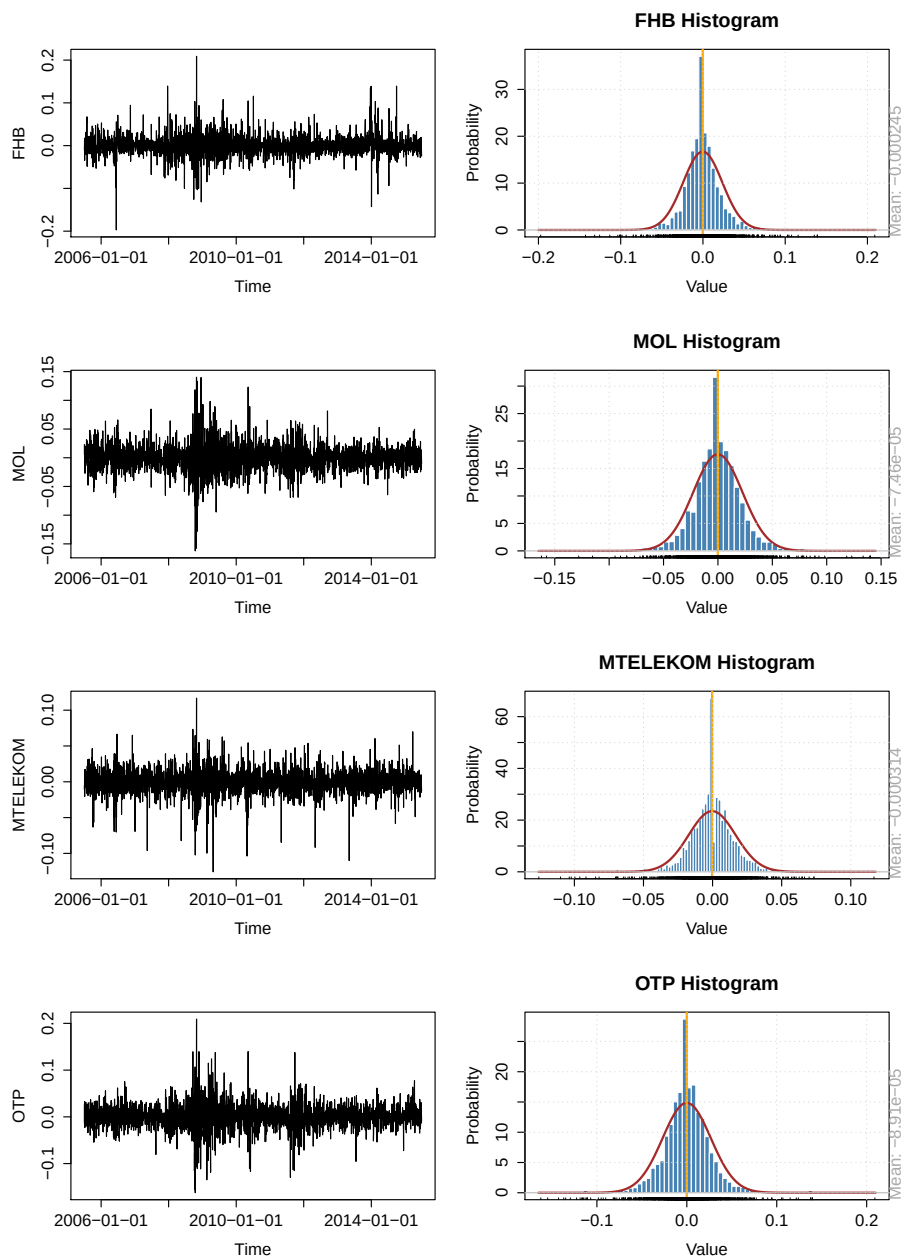
A legtöbb elmélet normalitást feltételez az adatok eloszlására vonatkozóan. A gyakorlatban ez ritkábban valósul meg, ami téves következtetésekhez vezethet. Így először az alapvető statisztikákat és a normalitást vizsgálom meg. Alapvető statisztikák alatt értem a minimumot, az első kvartilis, a mediánt, az átlagot, a harmadik kvartilis, a maximumot, a szórást, a ferdeséget, a lapultságot, a terjedelmet és az interkvartilis terjedelmet (IQR). A százalékban kifejezett logaritmikus hozamokból számolt alapvető statisztikákat a 3.1 táblázatban foglaltam össze. Látható, hogy az FHB részvény hozama rendelkezik a legnagyobb minimummal, a Raba részvény hozama pedig a legnagyobb maximummal. Leolvasható továbbá, hogy a hét részvény közül csak a Raba és a Richter rendelkezik pozitív átlaggal, valamint, hogy a szórás az OTP esetében a legnagyobb.

3.1. táblázat. A hét részvény logaritmikus hozamaira vonatkozó alapvető statisztikák

	FHB	MOL	MTELEKOM	OTP	Pannergy	Raba	Richter
Minimum	-19,720%	-16,223%	-12,573%	-16,235%	-16,138%	-16,229%	-12,189%
1. kvartilis	-1,140%	-1,184%	-0,905%	-1,314%	-0,786%	-0,900%	-0,954%
Medián	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%
Átlag	-0,025%	-0,008%	-0,031%	-0,009%	0,000%	0,021%	0,012%
3. kvartilis	0,970%	1,176%	0,860%	1,351%	0,645%	0,852%	0,961%
Maximum	20,891%	14,027%	11,680%	20,916%	13,961%	24,701%	9,074%
Szórás	2,385%	2,268%	1,701%	2,686%	1,931%	2,131%	1,821%
Ferdeség	0,248	0,153	-0,535	-0,059	0,294	0,689	-0,105
Lapultság	8,860	5,966	6,379	6,128	12,359	15,446	3,533
Terjedelem	40,611%	30,25%	24,253%	37,151%	30,099%	40,93%	21,263%
IQR	2,11%	2,36%	1,765%	2,665%	1,431%	1,752%	1,915%

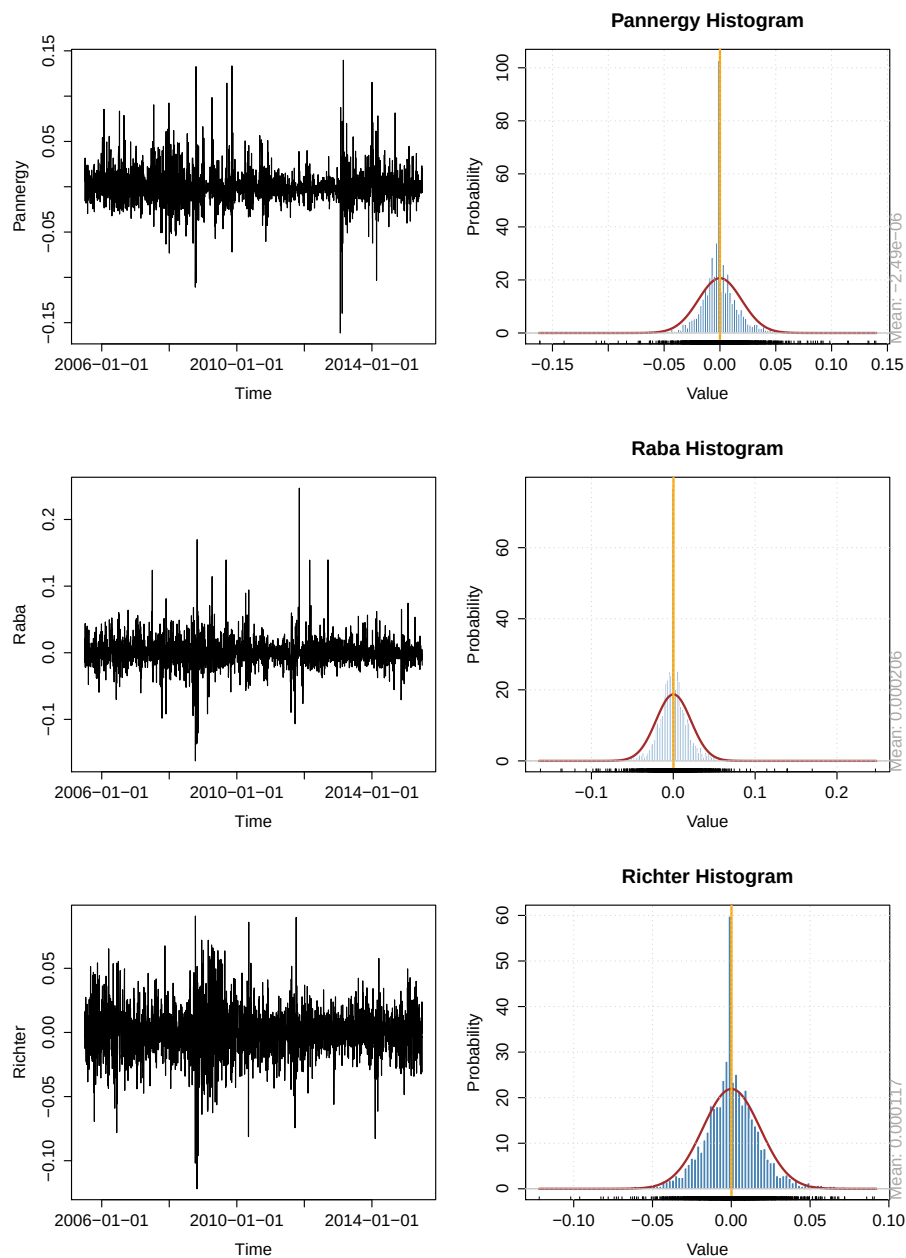
Forrás: saját számítás

A normalitás vizsgálatának egyik módja a ferdeség és a csúcsosság megvizsgálása. A ferdeséggel tulajdonképpen a szimmetriától való eltérés mérhető. A normális eloszlás ferdesége például nulla, hiszen a Gauss görbe szimmetrikus és bármely egyéb szimmetrikus



3.2. ábra. Az FHB, MOL, MTELEKOM és OTP részvények napi hozamai és azok eloszlásai 2005.07.01 és 2015.06.29 között.

Forrás: saját szerkesztés



**3.3. ábra. A Pannergy, Raba és Richter részvények napi hozamai és azok eloszlásai
2005.07.01 és 2015.06.29 között.**

Forrás: saját szerkesztés

eloszlás ferdesége szintén nulla. Negatív ferdeség azt jelenti, hogy az eloszlás bal széle hosszabb, vastagabb, míg a pozitív ferdeség hosszabb, illetve vastagabb jobb farkat jelent. A vizsgált részvények közül az OTP és a Richter állnak a legközelebb a szimmetrikus eloszláshoz.

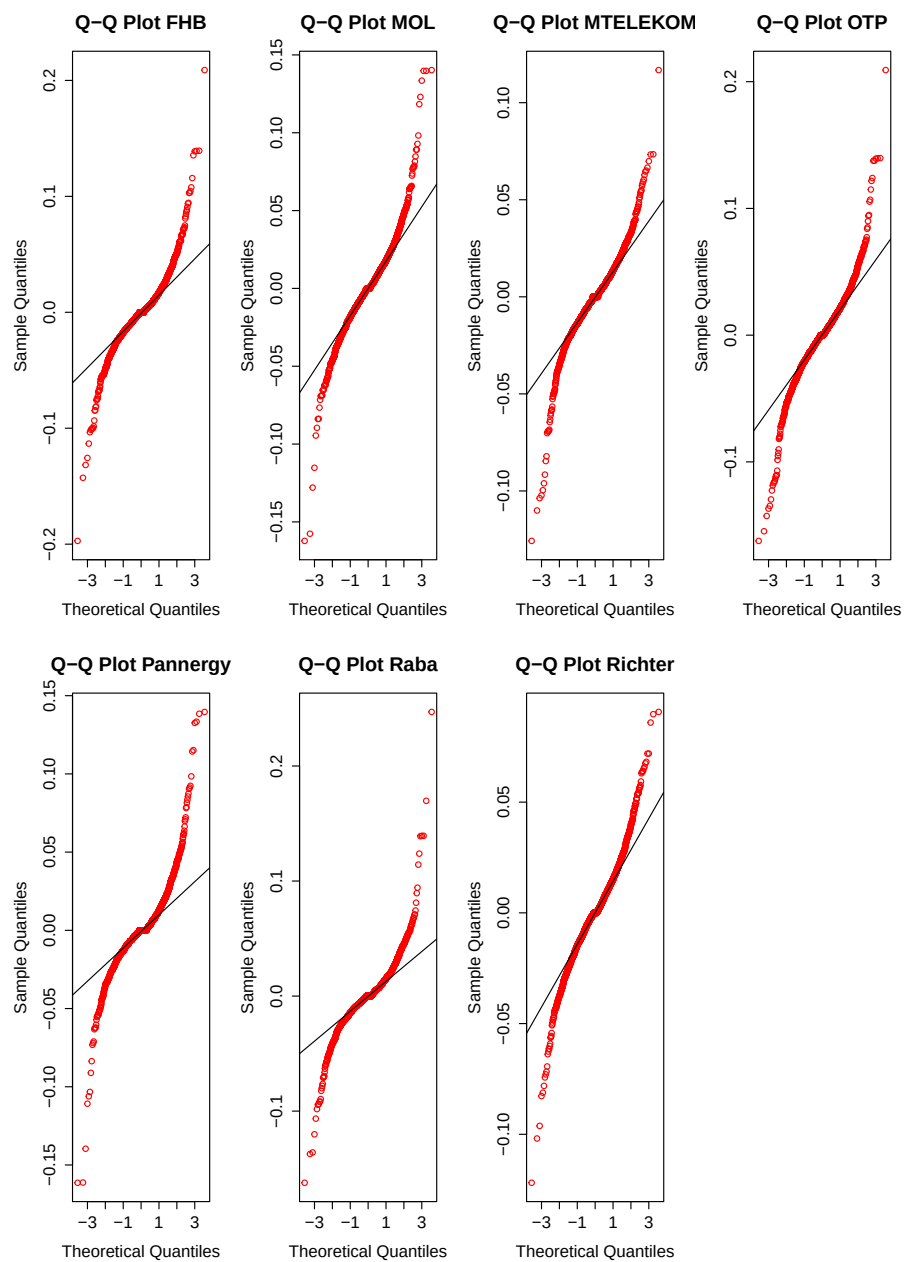
A lapultság tulajdonképpen azt mutatja meg, hogy az eloszlásfüggvény hogyan viszonyul a normális eloszláshoz. A normális eloszlás sűrűségfüggvényének lapultsága nulla, míg az ennél csúcsosabb sűrűségfüggvények pozitív, a kevésbé csúcsos sűrűségfüggvények negatív lapultsági mutatóval rendelkeznek. Az általam elemezni kívánt hét részvény mind csúcsosabb a normális eloszlásnál. A mérőszám a Raba illetve a Pannergy esetén a legmagasabb: a Raba esetében 15,446, míg a Pannergy esetében 12,359.

Az előbbieken a hozamok eloszlására tett megállapítások a 3.2 és a 3.3 ábrák hisztogramjain is megfigyelhetők. Mind a hét részvény esetében viszonylag szimmetrikus eloszlásról van szó, és látható, hogy mindegyik hozam eloszlásfüggvénye sokkal csúcsosabb, mint a normális eloszlásé. Tehát az első vizsgálatok alapján egyik eloszlásról sem feltételezek normalitást.

Egy másik lehetőség a normalitás megvizsgálására a hipotézis vizsgálat. Többek között a Shapiro-Wilk és a Kolmogorov-Smirnov teszt alkalmas annak a nullhipotézisnek a tesztelésére, hogy az adatok normális eloszlásból származnak-e. Mindkét tesztet lefuttattam a hét részvény hozamainak tesztelésére és minden esetben a p-érték jóval kisebb volt mint a választott küszöbérték (0,05). Ez azt jelenti, hogy mindkét teszt és mind a hét részvény esetén elvetjük a nullhipotézist, vagyis a hozamok nem normális eloszlásból származnak.

Ezt támasztja alá az úgynevezett kvantilis-kvantilis (Q-Q plot) ábra (CARMONA, 2013) is (3.4 ábra), amely a minta tapasztalati kvantiliseit veti össze az illesztett eloszlás kvantiliseivel. Amennyiben a két eloszlás azonos a pontok egy egyenesen - a 45°-os egyenesen - helyezkednek el. Minél jobban rásimulnak a pontok az egyenesre, annál jobbnak mondható az illeszkedés a két eloszlás között. A vizsgált hét részvény egyikének esetében sem illeszkednek a pontok az egyenesre annyira, hogy normalitást feltételezhetnénk az eloszlásukról.

A hisztogramok, az eloszlás ferdesége és csúcsossága, a normalitás teszt, valamint a kvantilis-kvantilis ábrák elemzése után elmondható tehát, hogy egyik részvény eloszlásáról sem feltételezhető normalitás.



3.4. ábra. A hét részvény logaritmikus hozamainak kvantilis-kvantilis ábrája

Forrás: saját szerkesztés

3.1.2. A vizsgált részvények kockázata

Ebben a részfejezetben a vizsgált tíz évre vonatkozóan mutatom be a részvények kockázatát. Az elméleti 2.1 fejezetben bemutatott öt kockázati mérték értékét számolom ki a részvények logaritmikus hozamait alapul véve a teljes tíz éves periódusra vonatkozóan. Ezen értékek, azaz a részvények variancia (2.10 egyenlet), szórás (2.11 egyenlet), szemivariancia (2.15 egyenlet), VaR (2.23 egyenlet) és ES (2.27 egyenlet) értékei $\alpha = 0,01$ illetve $\alpha = 0,05$ szinteken a 3.2 táblázatban láthatóak százalékban kifejezve.

3.2. táblázat. A hét részvény logaritmikus hozamaira vonatkozó kockázati értékek

	FHB	MOL	MTELEKOM	OTP	Pannergy	Raba	Richter
variancia	5,688%	5,144%	2,893%	-1,314%	7,215%	4,541%	3,316%
szórás	2,385%	2,267%	1,701%	2,686%	1,931%	2,131%	1,821%
szemivariancia	0,027%	0,025%	0,015%	0,037%	0,017%	0,021%	0,017%
VaR _{0,01}	6,661%	5,904%	4,987%	7,224%	5,102%	5,670%	4,732%
VaR _{0,05}	3,438%	3,447%	2,483%	4,082%	2,605%	2,817%	2,817%
ES _{0,01}	9,425%	8,036%	7,410%	10,973%	7,780%	8,633%	6,673%
ES _{0,05}	5,492%	5,073%	4,122%	6,348%	4,283%	4,819%	4,156%

Forrás: saját számítás

Ezek alapján látható, hogy mind a hét kiszámított kockázati mérték alapján az OTP a legkockázatosabb részvény a vizsgált hét részvény közül. A legkevésbé kockázatosnak pedig az MTELEKOM és a Richter bizonyult. Az OTP value at risk értéke $\alpha = 5\%$ -os szinten: 4,082%. Ez azt jelenti, hogy 5% annak az esélye, hogy az OTP részvénnel nagyobb veszünk mint 4,082%. A különböző alfa értékeket hasonlóan értelmezhetjük. Az expected shortfall esetén az 5%-os szinten az OTP esetében számított 6,348% azt jelenti, hogy a legrosszabb 5%-nyi esetben a várható veszteség 6,348%. Természetesen, különböző alfa értékek esetén az 5%-os esethez hasonlóan értelmezhető az ES értéke.

További részletesebb számítások a részvények, illetve portfóliók kockázatára vonatkozóan találhatóak a 4.2 fejezetben.

3.2. A hozam

A hozamot többféleképpen is kiszámíthatjuk. A két legtöbbet használt hozam az úgynevezett egyszerű és a logaritmikus hozam. Ezek bemutatásánál főleg TSAY, 2005 és CALAFIORE – EL GHAOUI, 2014 könyvére hagyatkozok.

3.2.1. Részvény hozama

Elsőként a részvény egyszerű és logaritmikus hozamára vonatkozó definíciókat és összefüggéseket vezetem le, foglalom össze.

a. Egyszerű hozam (simple return)

Az Oxford dictionary a hozamot, egy bizonyos időintervallum alatt a befektetés nyereségeként definiálja, az eredeti befektetés arányában. A következőekben a hozamot matematikai szempontból mutatom be.

A részvény hozama esetében vegyük a $[0, T]$ időintervallumot. Legyen továbbá P_0 a részvény ára a nulladik, míg P_T a részvény ára a T -edik időpillanatban. Ha a nulladik és a T -edik időpillanat között nincs pénzáramlás, akkor *egylépéses nettó egyszerű hozamról* (*one-period simple net return*) beszélünk és az $R_{[0,T]}^S[1]$ jelölést vezetem be, ahol $[0, T]$ jelöli az időintervallumot, S , hogy egyszerű hozamról van szó, míg $[1]$, hogy egylépésesről. Tehát az egylépéses nettó egyszerű hozamot a következőképpen definiálhatjuk:

$$R_{[0,T]}^S[1] := \frac{P_T - P_0}{P_0} = \frac{P_T}{P_0} - 1. \quad (3.1)$$

Ebből következik, hogy az *egylépéses bruttó egyszerű hozam* (*one-period simple gross return*):

$$GrR_{[0,T]}^S[1] := 1 + R_{[0,T]}^S[1] = \frac{P_T}{P_0}. \quad (3.2)$$

A továbbiakban, ha egyszerű hozamot említek, akkor az egylépéses nettó egyszerű hozamra gondolok.

A következőekben a $[0, T]$ intervallumot felosztom n kisebb, páronként diszjunkt részintervallumra. A nulladik időpontot jelölje t_0 , az utolsó időpontot jelölje $t_n := T$ és legyenek a köztes időpontok t_i , ahol $t_{i-1} < t_i$, $i = 1, \dots, n$, $n \in \mathbb{N}$. A definíció alapján ezeken a részintervallumokon is kiszámíthatjuk az egylépéses egyszerű bruttó hozamokat: $GrR_{[t_{i-1}, t_i]}^S[1] = 1 + R_{[t_{i-1}, t_i]}^S[1] = \frac{P_{t_i}}{P_{t_{i-1}}}$, és ekkor a $[0, T]$ intervallumon a „hozam” értékének ezen részintervallumok hozamainak szorzata kell hogy legyen. Ezt nevezzük *n-lépéses bruttó*

egyszerű hozamnak (*n*-period simple gross return):

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^n GrR_{[t_{i-1}, t_i]}^S[1] &= \prod_{i=1}^n \left(1 + R_{[t_{i-1}, t_i]}^S[1]\right) = \\ &= \left(1 + R_{[t_0, t_1]}^S[1]\right) \left(1 + R_{[t_1, t_2]}^S[1]\right) \cdot \dots \cdot \left(1 + R_{[t_{n-1}, t_n]}^S[1]\right) = \\ &= \frac{P_{t_1}}{P_{t_0}} \frac{P_{t_2}}{P_{t_1}} \cdot \dots \cdot \frac{P_{t_n}}{P_{t_{n-1}}} = \frac{P_{t_n}}{P_{t_0}} =: GrR_{[0, T]}^S[n]. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Megjegyzendő, hogy mivel $t_0 = 0$ és $t_n = T$ az n -lépéses egyszerű bruttó hozam megegyezik az egylépéses egyszerű bruttó hozammal:

$$GrR_{[0, T]}^S[n] = \frac{P_{t_n}}{P_{t_0}} = \frac{P_T}{P_0} = GrR_{[0, T]}^S[1]. \quad (3.4)$$

Hasonlóan az egylépéses esethez, a nettó hozam egyenlő a bruttó hozam eggyel csökkentve, és így az n -lépéses nettó egyszerű hozam (*n*-period simple net return):

$$R_{[0, T]}^S[n] := \frac{P_{t_n}}{P_{t_0}} - 1. \quad (3.5)$$

A (3.3) és a (3.5) egyenletek segítségével az n -lépéses egyszerű bruttó hozamot a következőképpen írhatjuk át:

$$GrR_{[0, T]}^S[n] = \frac{P_{t_n}}{P_{t_0}} = \prod_{i=1}^n \frac{P_{t_i}}{P_{t_{i-1}}} = 1 + R_{[0, T]}^S[n]. \quad (3.6)$$

b. Logaritmikus hozam (logarithmic/continuously compounded return)

A logaritmikus hozam definiálásához osszuk fel a $[0, T]$ intervallumot n egyenlő hosszúságú részintervallumra. Az n -lépéses egyszerű hozamnál bemutatott jelölést használom. Tételezzük fel továbbá, hogy minden $[t_{i-1}, t_i]$ részintervallumon a hozam értéke egyenlő nagyságú és az egy $R_{[0, T]}^*[1]$ -el jelölt, egylépéses hozam n -ed része. Jelölje ezeket a hozamokat R , azaz $R := R_{[0, T]}^*[1]/n$. Ebben az esetben tehát a (3.3) egyenlet a következőképpen írható:

$$GrR_{[0, T]}^S[n] = \prod_{i=1}^n \left(1 + R_{[t_{i-1}, t_i]}^S[1]\right) = (1 + R)^n = \left(1 + \frac{R_{[0, T]}^*[1]}{n}\right)^n. \quad (3.7)$$

Mivel t_0 a nulladik, míg t_n az utolsó időpont, a (3.7) egyenlet átírható:

$$GrR_{[0, T]}^S[n] = \frac{1}{P_0} \prod_{i=1}^{n-1} \frac{P_{t_i}}{P_{t_i}} P_T, \quad (3.8)$$

és így a (3.7) és (3.8) kifejezések segítségével a következő összefüggést kapjuk:

$$\frac{P_T}{P_0} = \left(1 + \frac{R_{[0, T]}^*[1]}{n}\right)^n. \quad (3.9)$$

Finomítsuk most a beosztást a végtelenségig, vagyis az időintervallumok hossza tartson nullához, és így n a végtelenhez ($n \rightarrow \infty$), ekkor

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_T}{P_0} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{R_{[0,T]}^*[1]}{n} \right)^n, \quad (3.10)$$

vagyis az exponenciális függvény definícióját felhasználva

$$\frac{P_T}{P_0} = \exp \left(R_{[0,T]}^*[1] \right) \quad (3.11)$$

és így

$$\ln \left(\frac{P_T}{P_0} \right) = R_{[0,T]}^*[1]. \quad (3.12)$$

Ezt a hozamot, azaz az egylépéses egyszerű bruttó hozam logaritmusát, *egylépéses logaritmikus hozamnak* (*one-period log return*) nevezzük és $R_{[0,T]}^L[1]$ -el jelöljük:

$$R_{[0,T]}^L[1] := \ln \left(\frac{P_T}{P_0} \right) = \ln(1 + R_{[0,T]}^S[1]). \quad (3.13)$$

Az egyszerű hozamhoz hasonlóan definiálhatjuk az *n-lépéses logaritmikus hozamot* (*n-period logarithmic return*):

$$\begin{aligned} R_{[0,T]}^L[n] &:= \ln \left(\frac{P_{t_1}}{P_{t_0}} \frac{P_{t_2}}{P_{t_1}} \cdots \frac{P_{t_n}}{P_{t_{n-1}}} \right) = \\ &= \sum_{i=1}^n \ln \left(\frac{P_{t_i}}{P_{t_{i-1}}} \right) = \sum_{i=1}^n R_{[t_{i-1}, t_i]}^L[1]. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Látható, hogy ebben az esetben az n -lépéses logaritmikus hozam az egylépéses logaritmikus hozamok összegével egyenlő. Többek között ez az a tulajdonság, ami miatt többet használják a számításoknál a logaritmikus hozamot, mint az egyszerű hozamot. Például nulla közeli számok összeadása nem jelent gondot, de összeszorításuknál már tapasztalhatunk aritmetikai túlcsoordulást.

Mivel t_0 és t_n a nulladik, illetve utolsó időpontnak felelnek meg, hasonlóan az egyszerű hozam esetéhez az egylépéses logaritmikus hozam megegyezik az n -lépéses logaritmikus hozammal:

$$R_{[0,T]}^L[1] = R_{[0,T]}^L[n]. \quad (3.15)$$

Megjegyzendő, hogy természetesen bármely időintervallumon az előzőekben leírtak szerint lehet a hozamot kiszámítani. A dolgozatomban napi részvényárakat használok és napi hozamokkal dolgozok, azaz az általam figyelembe vett időintervallum mindig egy nap. Így, például az egylépéses egyszerű és logaritmikus hozam a következőképpen is írható:

$$R_t^S := R_{[t-1, t]}^S[1] = \frac{P_t}{P_{t-1}} - 1, \quad (3.16)$$

illetve

$$R_t^L := R_{[t-1,t]}^L[1] = \ln \left(\frac{P_t}{P_{t-1}} \right). \quad (3.17)$$

A továbbiakban a számításokhoz a (3.16) és a (3.17) egyenletben bemutatott hozamokkal fogok számolni, és a t időpontbeli hozamról fogok beszélni. Vegyük észre, hogy ezek alapján már könnyen felírható az egyszerű és a logaritmikus hozamok közötti összefüggés:

$$R_t^S = \exp \left(R_t^L \right) - 1, \quad (3.18)$$

valamint

$$R_t^L = \ln \left(1 + R_t^S \right). \quad (3.19)$$

Bebizonyítható továbbá – az $\ln(1+x) \approx x$, ha $x \approx 0$ közelítés esetén az x helyére az egyszerű hozamot írva –, hogy ha az egyszerű hozamok nullához közeliek, akkor az egyszerű és logaritmikus hozam között minimális az eltérés:

$$R_{[t_{i-1},t_i]}^L[1] = \ln \left(\frac{P_{t_i}}{P_{t_{i-1}}} \right) \approx \frac{P_{t_i}}{P_{t_{i-1}}} - 1 = R_{[t_{i-1},t_i]}^S[1], \quad \text{ha } R_{[t_{i-1},t_i]}^S[1] \approx 0. \quad (3.20)$$

3.2.2. Portfólió hozama

Ebben a részben a portfólió egyszerű és logaritmikus hozamának kiszámítását mutatom be, amihez a következő jelölésrendszert használom:

n : a portfólióban szereplő különböző típusú részvények száma

S_t : a portfólió összértéke a t -edik időpillanatban

$S_{t,i}$: az i -edik részvény értéke a t -edik időpillanatban

$P_{t,i}$: az i -edik részvény ára a t -edik időpillanatban

$w_{i,t}$: az i -edik részvény relatív súlya a portfólióban a t -edik időpillanatban

k_i : az i -edik részvény mennyisége a portfólióban

Vegyük most egy portfóliót, amely n részvényből áll. Az előző jelöléseket használva látható, hogy az i -edik részvény értéke a t -edik időpillanatban a következőképpen fejezhető ki:

$$S_{t,i} = k_i P_{t,i} = w_{i,t} S_t. \quad (3.21)$$

Továbbá, a t -edik időpillanatban a portfólió összértéke:

$$S_t = \sum_{i=1}^n S_{t,i} = \sum_{i=1}^n k_i P_{t,i}. \quad (3.22)$$

A (3.21) és a (3.22) egyenleteket felhasználva ki tudjuk fejezni a relatív súlyokat a t -edik időpillanatban:

$$w_{t,i} = \frac{S_{t,i}}{S_t} = \frac{k_i P_{t,i}}{\sum_{i=1}^n k_i P_{t,i}}. \quad (3.23)$$

A (3.23) egyenletben relatív súlyokat használunk, mert az i -edik részvény értékének az arányát fejezi ki a portfólió összértékéből. Ezek a súlyok a részvényáraknak megfelelően időben változnak. A továbbiakban, ha súlyt említünk, akkor ezen relatív súlyokat értjük.

Vegyük észre továbbá, hogy az a természetes feltételezés, miszerint a súlyok összege eggyel egyenlő, ebben az esetben is bármely időpillanatban megállja a helyét, azaz:

$$\sum_{i=1}^n w_{t,i} = 1. \quad (3.24)$$

Meg kell jegyezni, hogy a fent bemutatott, valamint a továbbiakban levezetésre kerülő képletek, összetételében nem menedzselt portfólió hozamának kiszámítására vonatkoznak (k_i konstans).

a. Egyszerű hozam (simple return)

A portfólió egyszerű hozamát a t -edik időpillanatban R_t^S -el jelöljük, és a részvény egyszerű hozamához hasonlóan definiálhatjuk:

$$R_t^S := \frac{S_t}{S_{t-1}} - 1. \quad (3.25)$$

Felhasználva, hogy a súlyok összege eggyel egyenlő, valamint, hogy $R_{t,i}^S = \frac{P_{t,i}}{P_{t-1,i}} - 1$, ahol $R_{t,i}^S$ az i -edik részvény t -edik időpillanatbeli egyszerű hozama, a (3.22) kifejezés a következőképpen alakítható át:

$$S_t = \sum_{i=1}^n k_i P_{t,i} = \sum_{i=1}^n k_i P_{t-1,i} (1 + R_{t,i}^S) = \sum_{i=1}^n S_{t-1,i} (1 + R_{t,i}^S) = \sum_{i=1}^n S_{t-1} w_{t-1,i} (1 + R_{t,i}^S), \quad (3.26)$$

és így a (3.25) definíció a

$$R_t^S = \frac{S_t}{S_{t-1}} - 1 = \sum_{i=1}^n w_{t-1,i} R_{t,i}^S \quad (3.27)$$

módon is kifejezhető. Látható tehát, hogy a portfólió egyszerű hozama megegyezik a portfólióban szereplő részvények egyszerű hozamainak súlyozott összegével.

b. Logaritmikus hozam (logarithmic/continuously compounded return)

A portfólió logaritmikus hozamát a t -edik időpillanatban R_t^L szimbólummal jelöljük, és a részvény logaritmikus hozamához hasonlóan a következőképpen definiáljuk:

$$R_t^L := \ln \left(\frac{S_t}{S_{t-1}} \right). \quad (3.28)$$

Az egyszerű és a logaritmikus hozam közti összefüggést ((3.18) egyenlet) valamint a (3.27) egyenletet felhasználva, a portfólió logaritmikus hozama a következőképpen is kifejezhető:

$$R_t^L = \ln \left(\frac{S_t}{S_{t-1}} \right) = \ln \left(1 + \sum_{i=1}^n w_{t-1,i} R_{t,i}^S \right) = \ln \left(\sum_{i=1}^n w_{t-1,i} \exp \left(R_{t,i}^L \right) \right), \quad (3.29)$$

ahol $R_{t,i}^L$ az i -edik részvény logaritmikus hozama a t -edik időpillanatban.

Vegyük észre, hogy sajnálatos módon, a portfólió logaritmikus hozama nem rendelkezik az egyszerű hozamhoz hasonló, a (3.27) egyenletben bemutatott „kényelmes” tulajdonsággal, azaz NEM számolható ki az egyes részvények logaritmikus hozamának súlyozott összegeként. A részvény hozamához hasonlóan, az $\ln(1+x) \approx x$ közelítést felhasználva, a portfólió hozamáról is belátható, hogy ha a portfólió egyszerű hozamai nullához közeli értékek, akkor az egyszerű és a logaritmikus hozamok minimális eltérést mutatnak:

$$R_t^L = \ln \left(1 + R_t^S \right) \approx R_t^S. \quad (3.30)$$

Tehát, ha felhasználjuk azt a feltevést, hogy az egyszerű hozamok nullához közeli, valamint az exponenciális függvény definícióját, akkor látható, hogy

$$\begin{aligned} R_t^L &\approx R_t^S = \sum_{i=1}^n R_{t,i}^S w_{t-1,i} = \sum_{i=1}^n \left(\exp \left(R_{t,i}^L \right) - 1 \right) w_{t-1,i} = \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{\left(R_{t,i}^L \right)^j}{j!} - 1 \right) w_{t-1,i} \approx \sum_{i=1}^n \left(\left(1 + R_{t,i}^L \right) - 1 \right) w_{t-1,i} = \\ &= \sum_{i=1}^n w_{t-1,i} R_{t,i}^L, \end{aligned} \quad (3.31)$$

azaz a portfólió logaritmikus hozama nem egyezik meg a benne szereplő részvények logaritmikus hozamainak súlyozott összegével, de közelíthető vele.

4. fejezet

Vizsgálati eredmények és azok értékelése

Vizsgálataim célja a pénzügyi kockázat minél pontosabb matematikai leírása, mérése, modellezése, illetve a már meglévő modellek továbbfejlesztése és összehasonlítása volt.

4.1. Kockázati mértékek

A 2.1 fejezetben bemutatam illetve bebizonyítottam, hogy az öt megvizsgált és gyakran használt kockázati mérték közül, azaz a variancia, a szórás, a szemivariancia, a kockáztatott érték és a várható veszteség közül csak az várható veszteség alkalmas a kockázat mérésére. Az említett kockázati mértékek közül az ES az egyetlen koherens kockázati mérték, vagyis csak ez rendelkezik az elvárt négy tulajdonság (monotonitás, szubadditivitás, pozitív homogenitás és eltolás invariancia) mindegyikével. A kockázati mértékek tulajdonságai összefoglalva megtalálhatóak a 2.5 táblázatban, a bizonyítások pedig az A függelékben.

4.2. Egyszerű vs. logaritmikus hozam

Természetesen nem csak elméleti, de gyakorlati szinten is fontos a kockázat pontos mérése, modellezése. A gyakorlati számításokhoz, elemzésekhez hét részvény tíz évre vonatkozó árfolyam adatait használtam fel. Mivel céloom nemcsak a kockázat mérése, hanem összehasonlítása is volt, ezért az árak helyett az azokból képzett hozamokat használtam a számításokhoz.

A 3.2 részben pontosítottam az úgynevezett egyszerű és logaritmikus hozam definícióját, továbbá meghatároztam a köztük lévő összefüggéseket és különbségeket. Megállapítható, hogy a logaritmikus hozamnak az egyszerű hozammal szemben az az előnye, hogy az n-lépéses

logaritmikus hozamot kiszámolhatjuk az egylépéses logaritmikus hozamok összegeként, míg az n -lépéses egyszerű hozam az egylépéses egyszerű hozamok szorzata, ami nulla közeli értékek esetében számolási problémákhoz vezethet.

Portfóliók esetében fontos kiemelni, hogy a portfólió relatív súlyai a portfólióban szereplő részvények árától (is) függnék, így időben változnak. Egyenlő súlyú portfólió esetén minden időpillanatban újra kell számolni a portfólióban lévő részvények számát. Egyenlő súlyú portfóliónak nevezem azt a portfóliót, ahol a portfólióban lévő részvények súlya megegyezik, azaz $w_{t,i} = w_{t,j}$, bármely t , illetve $i \neq j$ esetén. Ebből következően egyenlő súlyú portfólió esetén $w_{t,i} = \frac{1}{n}$. Fontos megemlíteni, hogy a portfólió egyszerű hozama megegyezik a benne szereplő részvények egyszerű hozamainak súlyozott összegével. Ezzel szemben a portfólió logaritmikus hozamát csak közelíteni tudjuk a benne szereplő részvények logaritmikus hozamainak súlyozott összegével.

4.2.1. A részvények, valamint a belőlük képzett portfólió egyszerű és logaritmikus hozam-eloszlásainak összehasonlítása

Mind a részvények, mind pedig a portfóliók esetében látható volt, hogy ha az egyszerű hozamok nullához közeli, akkor az egyszerű és a logaritmikus hozamok között minimális az eltérés. Ezt az elméleti megállapítást gyakorlati szinten is szeretném megvizsgálni. A számításokhoz használt R kódok az C.1 függelékben találhatóak.

Mint azt már a 3.1 fejezetben bemutattam hét részvény árai állnak rendelkezésemre tíz évre vonatkozóan. Az első adatok 2005.07.01-i részvényáradatok, így ezt az időpontot tekintem $t = 0$ -nak, míg az utolsó 2015.06.29-i részvényáradatokat $t = 2607$ -nek. Az egyszerű és a logaritmikus hozamok összehasonlításához először a részvények egyszerű és logaritmikus hozamainak kiszámítására van szükség a (3.16) és (3.17) egyenleteket használva. Meg kell jegyezni, hogy a definíciók és a konstrukció miatt az első hozam értékét a $[t = 0, t = 1]$ intervallumon lehet kiszámolni, aminek a jelölése minden egyes $i = 1, \dots, 7$ részvény esetén $R_{1,i}^S$, illetve $R_{1,i}^L$. A részvények egyszerű és logaritmikus hozamaira vonatkozó alapstatisztikákat a 4.1 és 4.2 táblázatban foglaltam össze.

4.1. táblázat. Részvények egyszerű hozamainak alapvető statisztikai jellemzői

	FHB	MOL	MTELEKOM	OTP	Pannergy	Raba	Richter
Minimum	-17,898%	-14,975%	-11,815%	-14,985%	-14,903%	-14,981%	-11,475%
Alsó kvantilis	-1,134%	-1,177%	-0,901%	-1,305%	-0,783%	-0,896%	-0,949%
Medián	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%
Átlag	0,004%	0,018%	-0,017%	0,027%	0,018%	0,043%	0,028%
Felső kvantilis	0,974%	1,183%	0,863%	1,361%	0,647%	0,855%	0,965%
Maximum	23,234%	15,058%	12,389%	23,264%	14,983%	28,019%	9,498%
Terjedelem	41,130%	30,033%	24,204%	38,249%	29,886%	43,000%	20,973%
IQR	2,108%	2,360%	1,764%	2,666%	1,430%	1,751%	1,914%

Forrás: saját számítás

4.2. táblázat. Részvények logaritmikus hozamainak alapvető statisztikai jellemzői

	FHB	MOL	MTELEKOM	OTP	Pannergy	Raba	Richter
Minimum	-19,720%	-16,223%	-12,573%	-16,235%	-16,138%	-16,229%	-12,189%
Alsó kvantilis	-1,140%	-1,184%	-0,905%	-1,314%	-0,786%	-0,900%	-0,954%
Medián	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%
Átlag	-0,024%	-0,008%	-0,031%	-0,009%	0,000%	0,021%	0,012%
Felső kvantilis	0,970%	1,176%	0,860%	1,351%	0,645%	0,852%	0,961%
Maximum	20,891%	14,026%	11,680%	20,916%	13,960%	24,701%	9,074%
Terjedelem	40,611%	30,250%	24,253%	37,150%	30,100%	40,930%	21,263%
IQR	2,110%	2,360%	1,765%	2,665%	1,431%	1,752%	1,915%

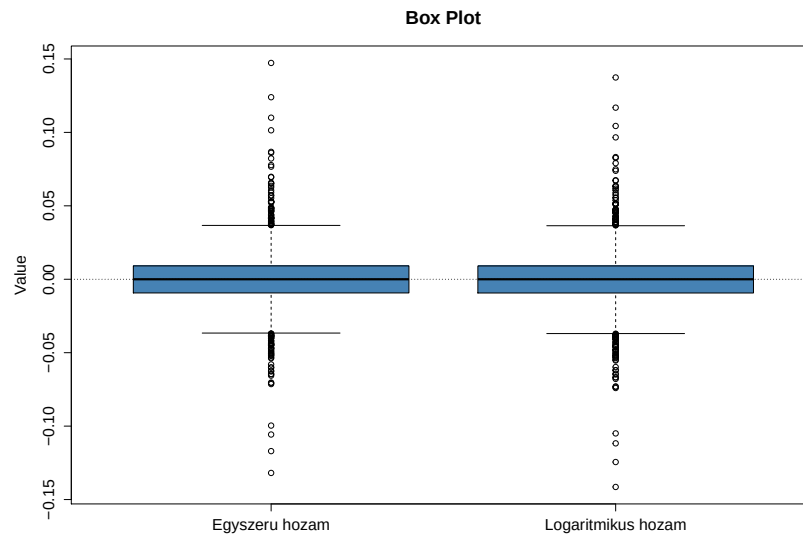
Forrás: saját számítás

A 4.1 és 4.2 táblázatokból is láthatjuk, hogy a hozamok nullához közeli: a medián minden esetben nulla, az interkvartilis terjedelem (IQR: felső kvartilis és az alsó kvartilis különbsége) pedig mindkét esetben és minden részvény esetében viszonylag kicsi. Az átlagok szintén nullához közeli értékek. Az egyszerű hozamok esetén az MTELEKOM részvényen kívül minden részvénynek pozitív az átlaghozama, míg a logaritmikus hozamok esetében csak a Raba és a Richter részvények rendelkeznek pozitív átlaghozammal. Az egyszerű hozamok esetében a legnagyobb maximummal a Raba (28,019 %), míg a legnagyobb minimummal az FHB (-17,898%) rendelkezik. Logaritmikus hozamok esetén ugyanez tapasztalható: a Raba 24,701%-al a legnagyobb maximummal, míg az FHB -19,720%-al a legnagyobb minimummal rendelkező részvény.

A 4.1 és a 4.2 táblázatok összehasonlításából kiderül, hogy a részvények egyszerű és logaritmikus hozamainak eloszlása csak kis mértékben tér el egymástól, megerősítve ezzel az elméleti megállapítást.

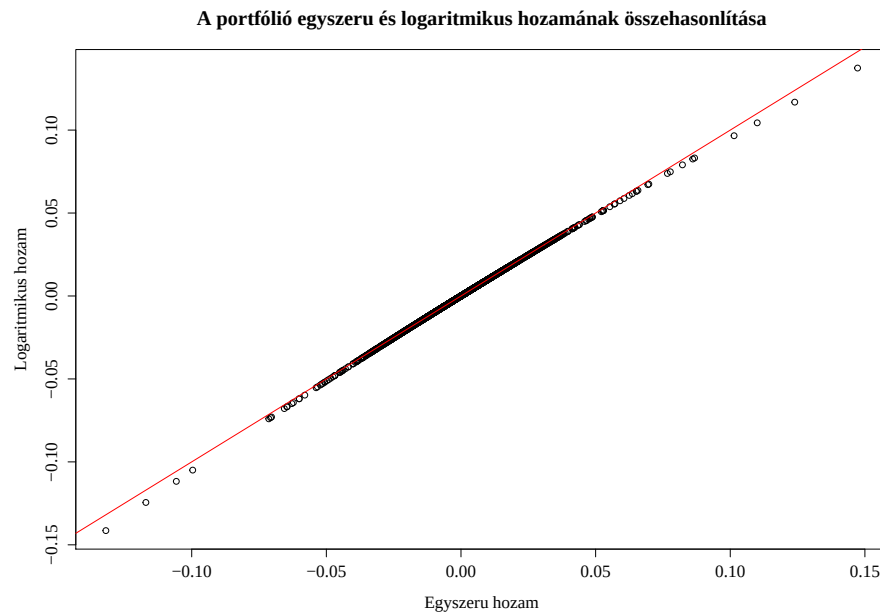
A részvények után azt vizsgálom meg, hogy a közelítés a portfóliók esetén is megállja-e a helyét a gyakorlatban. A vizsgálathoz egy olyan portfóliót hozok létre, amelyben mind a hét részvényből egy-egy darab szerepel, azaz $k_i = 1, i = 1, \dots, 7$, a (3.27) és (3.28) egyenleteket felhasználva kiszámolom ennek a portfóliónak az egyszerű és logaritmikus hozamait. A hozamokat box-plot ábrák segítségével foglaltam, illetve hasonlítottam össze, amelyek a 4.1 ábrán láthatók. A két box-plot ábra összehasonlításából egyértelműen megállapítható, hogy a portfólió egyszerű és logaritmikus hozamai nullához közeli értékek és nagyon hasonló eloszlásúak.

A 4.2 ábrán látható egy másik vizuális módja az összehasonlításnak: az egyik tengelyen az egyszerű, míg a másik tengelyen a logaritmikus hozamot tüntettem fel. Ezen az ábrán, minél közelebb esnek a pontok a 45°-os egyeneshez, annál közelebb van a két eloszlás egymáshoz. Erről az ábráról (4.2 ábra) is leolvasható tehát, hogy a hét részvényből képzett portfólió egyszerű és logaritmikus hozamainak eloszlása szinte azonos.



4.1. ábra. Box-plot: A hét részvényből álló portfólió egyszerű és logaritmus hozamai

Forrás: saját szerkesztés



4.2. ábra. A portfólió egyszerű és logaritmus hozamának összehasonlítása

Forrás: saját szerkesztés

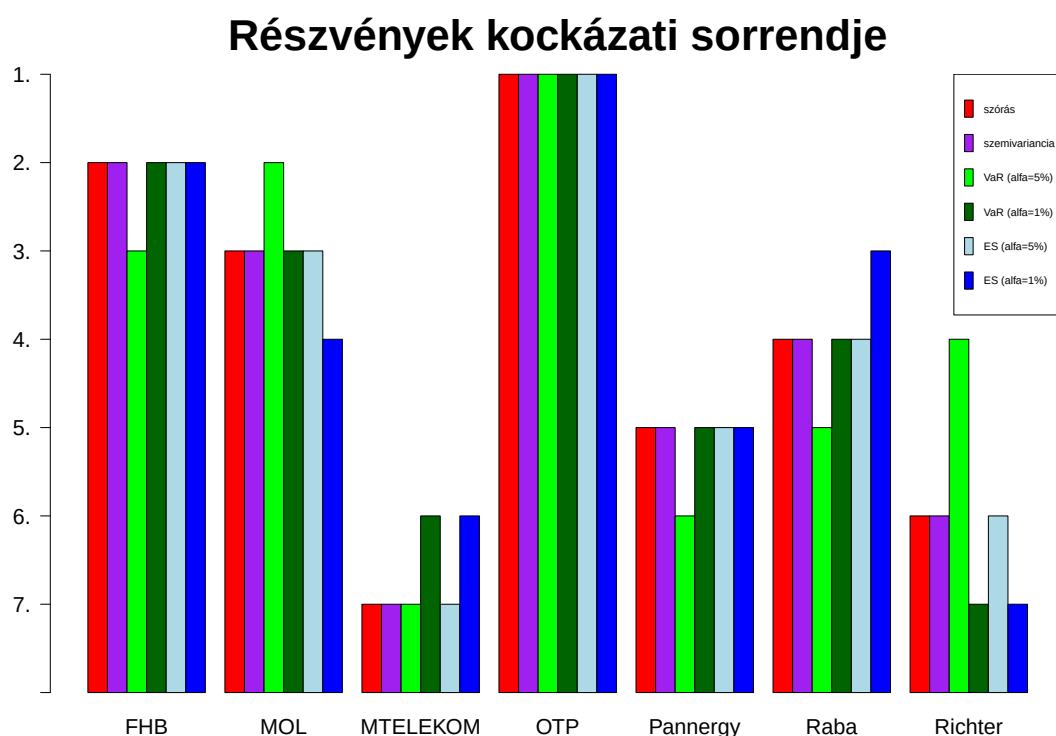
4.2.2. A kockázati sorrend összehasonlítása egyszerű és logaritmikus hozamok esetén

Az előzőekben elméleti és gyakorlati szinten is bemutattam, hogy ha az egyszerű hozam értékei nullához közeli, akkor az egyszerű és a logaritmikus hozam értékek közel azonosak (mind részvények, mind pedig portfóliók esetén). Ebből a megállapításból arra következtethetünk, hogy tulajdonképpen mindegy, hogy az egyszerű vagy pedig a logaritmikus hozamot használjuk a számításainkhoz, végül ugyanarra a következtetésre és így ugyanarra a döntésre kellene jutnunk. A továbbiakban ezt a feltételezést fogom megvizsgálni először részvény, majd portfólió adatokra támaszkodva, különböző kockázati mértékek esetén.

Részvények esetén a módszer, amit használok a következő (és az ötlete Bugártól (BUGÁR – UZSOKI, 2006) származik): először kiszámolom mind a hét részvény egyszerű (3.16 egyenlet) és logaritmikus (3.17 egyenlet) hozamait, majd ezeket alapul véve a részvények kockázatát. Ezek alapján pedig mindkét esetben (egyszerű és logaritmikus hozam) kockázati sorrendet állítok fel. Ebben a sorrendben az első helyre kerül az adott kockázati mértéknek megfelelő legkockázatosabb részvény, második helyre a következő legkockázatosabb, stb. A kockázat kiszámításához négy, a 2.1 fejezetben bemutatott kockázati mértéket fogok használni, a szórást, a szemivarianciát, a kockázatosított értéket (VaR) és a várható veszteséget (ES).

A számítások ugyanazt a kockázati sorrendet eredményezték az egyszerű, illetve a logaritmikus hozamok felhasználása esetén, amely sorrend megtalálható a 4.3 ábrán. A piros színű oszlop jelenti a szórás szerinti sorrendet, a lila a szemivariancia szerinti sorrendet, a zöld, illetve a sötétzöld a VaR szerinti sorrendet jelöli 5%-os, illetve 1%-os alfa szintek esetén, míg a világos és sötétkék oszlopok az ES szerinti sorrendet mutatják, szintén 5%-os és 1%-os alfa esetében. A logaritmikus hozamok esetén, a különböző kockázati értékek megtalálhatóak a 3.2 táblázatban.

A 4.3 ábra eredményeiből leolvasható, hogy a szórás, a szemivariancia és az $\alpha = 5\%$ -os szintű ES ugyanarra a kockázati sorrendre vezetett, azaz ezen kockázati mértékek alapján a legkockázatosabb részvény az OTP, ezt követi az FHB, a MOL, a Raba, a Pannergy, a Richter és végül az MTELEKOM. Meg kell jegyezni továbbá, hogy az egyetlen, amiben a kockázati mértékek „egyet értenek”, hogy az OTP részvény a legkockázatosabb, mert mind a hatféle mérték ezt a részvényt sorolta az első helyre. A továbbiakban a használt kockázati mérték



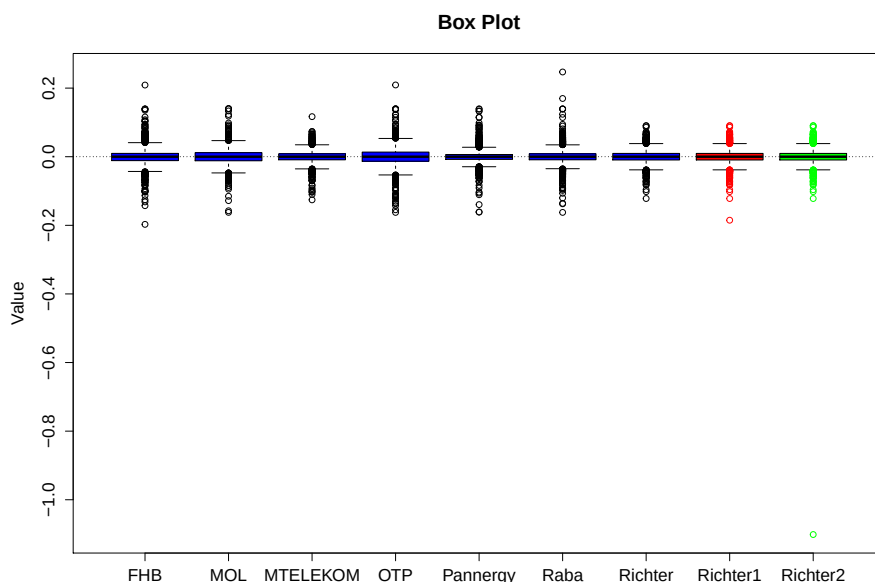
4.3. ábra. Részvények kockázati sorrendje különböző kockázati mértékek esetén.

Forrás: saját számítás

függvényében a sorrend változékonyabb képet mutat. Kiemelkedő eltérésnek gondolom, hogy a Richter az 5%-os VaR-t használva a negyedik helyen van, ezzel szemben az 1%-os VaR-t használva már a hetedik helyen, azaz ez a legkevésbé kockázatos részvény. Hasonlóan, a többi kockázati mérték is a hatodik vagy hetedik helyre sorolja a Richtert.

Érdeemes megvizsgálni, hogy mi történik akkor, ha feltételezzük, hogy valamilyen esemény hatására az egyik részvény ára megváltozik, ezzel például nagyobb negatív hozamot eredményezve. Kísérleti jelleggel a Richter részvény hozamai esetében vezettem be egy kiugró értéket. Ennek hatására a Richter egyszerű hozamainak a minimuma $-16,9\%$ -ra, míg a logaritmikus hozamainak minimuma $-18,5\%$ -ra csökkent. Logaritmikus hozamok esetén a 4.4 ábrán látható, késsel színezve, a hét részvény kiindulási értékeinek box plot ábrái. A Richter1 nevű, piros színnel jelölt box plot diagram mutatja a megváltoztatott Richter részvény eloszlását, a többi részvényhez viszonyítva. Egyértelműen látható az ábrán a bevezetett kiugró érték.

Ezen hozamok segítségével ismételtelen kiszámoltam a kockázati sorrendeket. A kapott eredmények a 4.3 táblázatban láthatóak.



4.4. ábra. A részvények logaritmikus hozamainak box plot ábrája

Forrás: saját szerkesztés

4.3. táblázat. Részvények kockázati sorrendjének összehasonlítása

	Szórás	Szemi- variancia	VaR _{0,01}	VaR _{0,05}	ES _{0,01}	ES _{0,05}	
						egyszerű	log
FHB	2	2	2	3	2	2	2
MOL	3	3	3	2	4	3	3
MTELEKOM	7	7	6	7	6	7	7
OTP	1	1	1	1	1	1	1
Pannergy	5	6	5	6	5	6	5
Raba	4	4	4	5	3	4	4
Richter	6	5	7	4	7	5	6

Forrás: saját számítás

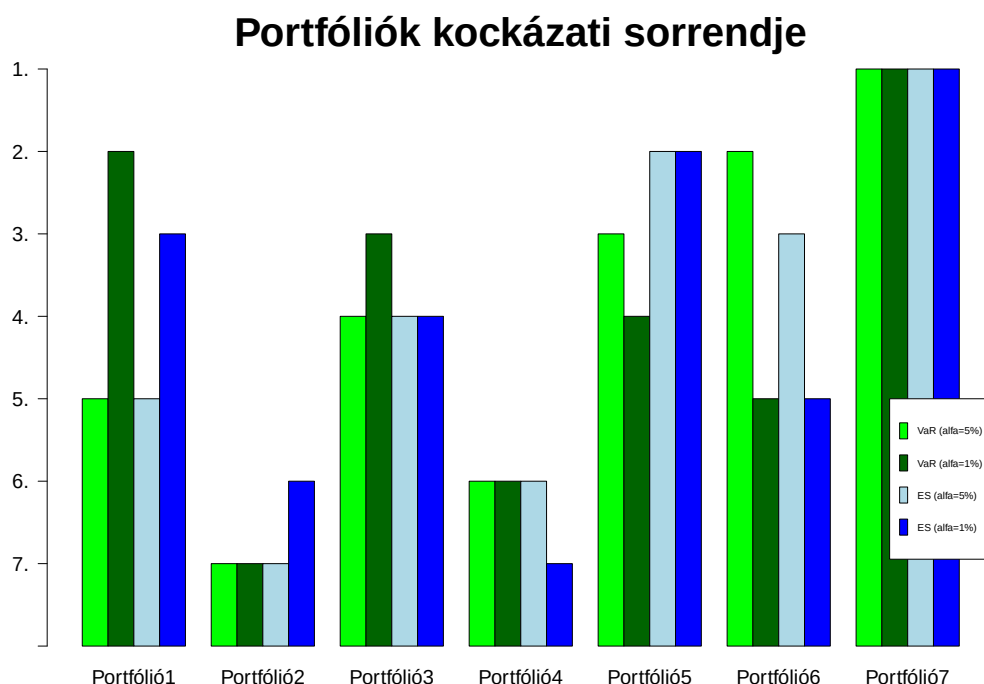
Azt tapasztaltam, hogy már ez a kis változtatás is eltérést eredményezett az 5%-os ES esetében. Az egyszerű hozamok alapján számított kockázati sorrend az OTP-t sorolja az első helyre. Ezt követi az FHB, MOL, Raba, Richter, Pannergy és végül az MTELEKOM. Ezzel szemben, ha a logaritmikus hozamokat használom a számításokhoz, akkor az ötödik és hatodik hely felcserélődik (4.3 táblázat piros cellái), azaz a Richter kockázatosabb részvénynek bizonyul a Pannergy-nél. A többi kockázati mérték esetében az egyszerű és a logaritmikus hozamokkal

számolt kockázati értékek ugyanazt a sorrendet eredményezték (ezért a 4.3 táblázatban nem jelölöm ezeket külön). Ez a sorrend a szórás, a VaR (mindkét alfa szint) és az 1%-os ES esetén megegyezik a változtatás előtt számolt sorrendekkel (4.3 ábra). A szemivariancia esetében annyi változás figyelhető meg, hogy az ötödik és a hatodik helyen lévő Pannergy és Richter helyet cseréltek, vagyis az újabb adatokkal számolva a Richter kockázatosabb mint a Pannergy.

A fent bemutatott számításokból egyértelműen kiderül, hogy annak ellenére, hogy az egyszerű és logaritmikus hozamok eloszlása szinte megegyezik, mégsem mindegy, hogy melyiket használjuk a számításokhoz. Látható, hogy pl. az egyetlen koherens kockázati mérték, az ES segítségével kiszámolt kockázati sorrend különbözik az egyik, illetve a másik hozamtípust véve alapul. Meg kell jegyezni továbbá, hogy nagyobb kiugró érték, illetve több részvényt is tapasztalható kiugró értékek, további eltéréseket eredményezhetnek a két hozamtípus alapján számolt kockázati sorrendekben, ami pedig eltérő döntésekhez vezethet.

A részvények után a portfóliókat vizsgálom meg. A portfóliók esetében hasonló módszert használok, mint a részvényeknél. Úgy hozok létre hét különböző portfóliót a részvényekből, hogy minden portfólió hat különböző részvényből tartalmaz egyet-egyet. Ezt úgy érem el, hogy minden esetben kihagyok a hét részvényből egyet, azaz a Portfólió1 nem tartalmazza az FHB-t, a Portfólió2 a MOL részvényt, a Portfólió3 az MTELEKOM részvényt, stb. Majd ezeknek a portfólióknak az egyszerű (3.25 egyenlet) és logaritmikus hozamait (3.28 egyenlet) felhasználva kiszámítom a kockázataikat, amelyek segítségével kockázati sorrendet állítok fel. A kockázat kiszámításához a két leggyakrabban használt kockázati mértéket, a VaR-et és az ES-t használom. A kockázati sorrendek a 4.5 ábrán láthatóak. Mivel nem tapasztaltam eltérő sorrendet egyik esetben sem, ezért az ábrán látható oszlopok a kockázati sorrendet mutatják $\alpha = 0,05$ és $\alpha = 0,01$ szinteken, mind az egyszerű, mind pedig a logaritmikus hozamok esetén. A zöld, illetve a sötétzöld oszlopok jelentik a VaR szerinti sorrendet 5%-os, illetve 1%-os alfa szintek esetén, míg a világos és sötétkék oszlopok az ES szerinti sorrendet mutatják, szintén 5%-os és 1%-os alfa esetében.

Mind a négy kockázati mérték szerint a Portfólió7 (összetétele: FHB, MOL, MTELEKOM, OTP, Pannergy, Raba) a legkockázatosabb portfólió. A két legkevésbé kockázatos portfólió a Portfólió2 (összetétele: FHB, MOL, MTELEKOM, OTP, Pannergy, Raba, Richter) és a Portfólió4 (összetétele: FHB, MOL, MTELEKOM, Pannergy, Raba, Richter). Portfólió1 (összetétele: MOL, MTELEKOM, OTP, Pannergy, Raba, Richter) esetében pedig elég nagy



4.5. ábra. A portfóliók kockázati sorrendje VaR és ES esetén

Forrás: saját szerkesztés

különbség vehető észre a két alfa szint között, mind a VaR, mind pedig az ES kockázati mértéket használva. Például a VaR esetében 5%-os szinten a Portfólió1 az ötödik, míg 1%-os szinten a második helyen áll.

Érdeemes ismételt megvizsgálni, hogy előfordulhat-e olyan eset, amikor az egyszerű, illetve a logaritmikus hozam használata eltérő kockázati sorrendhez vezetne. Ennek érdekében ismételt egy kiugró értéket vezetek be a Richter részvény hozamaihoz hasonlóan. Ebben az esetben a részvények logaritmikus hozamainak eloszlása megtalálható a 4.4 box plot ábrán. A kék színnel jelölt értékek az eredetiek, míg a zöld (Richter2) a most bevezetett, egy kiugró értékkel rendelkező Richter részvény. Ezekből az adatokból a fentebb leírt módon portfóliókat képezek, majd kiszámítom ezek egyszerű és logaritmikus hozamait, és különböző alfa szinteken ismételt meghatározom az ES és a VaR értékeket, létrehozva egy új kockázati sorrendet. Az összefoglalt eredmények a 4.4 táblázatban találhatóak.

A 4.4 táblázatból látható, hogy a mind a két alfa szinten, mind az egyszerű, mind pedig a logaritmikus hozamok esetén ugyanazt a sorrendet eredményezi, tehát ebben az esetben a sorrend nem függ a számításokhoz használt hozamtípustól. Az ES esetében 1%-os szinten - hasonlóan a VaR-hez - nem tapasztalható sorrendbeli eltérés sem az egyszerű, sem a

4.4. táblázat. Portfóliók kockázati sorrendjének összehasonlítása

α	VaR				ES			
	0,05		0,01		0,05		0,01	
hozam	egyszerű	log	egyszerű	log	egyszerű	log	egyszerű	log
Portfólió1	5	5	4	4	5	5	4	4
Portfólió2	7	7	7	7	7	6	1	1
Portfólió3	3	3	5	5	4	4	5	5
Portfólió4	6	6	6	6	6	7	7	7
Portfólió5	2	2	3	3	2	2	3	3
Portfólió6	4	4	2	2	3	3	6	6
Portfólió7	1	1	1	1	1	1	2	2

Forrás: saját számítás

logaritmikus hozam esetében. Nem mondható ugyanez el az ES-ről 5%-os szinten: a hatodik és a hetedik helyen lévő portfóliók felcserélődtek (4.4 táblázat pirossal jelölt cellái). Ez az eltérő sorrend pedig azt jelenti, hogy ebben az esetben is eltérő módon döntenénk az egyszerű vagy a logaritmikus hozamot használva a számításokhoz.

Az eredményekből az is egyértelműen látható, hogy nem csak a hozam típusa (egyszerű vagy logaritmikus), vagy a választott kockázati mérték, de az adott kockázati mérték mellett a választott alfa szintnek is nagy szerepe lehet a sorrend kialakításában és így a döntés meghozatalában. Például a VaR a Portfólió6-ot az negyedik helyre sorolja $\alpha = 0,05$ kockázati szinten, viszont ugyanezt a portfóliót a második helyre teszi $\alpha = 0,01$ szinten. Egy másik példa Portfólió3, amely 5%-os szinten a harmadik, míg 1%-os szinten az ötödik a kockázati sorrendben.

A fenti számítások alapján elmondható, hogy - hasonlóan a részvényekhez - a portfóliók esetén is megfigyelhető a kockázati sorrend változása a hozam típusának függvényében. Itt is meg kell jegyezni továbbá, hogy több kiugró érték, vagy a portfólió másfajta összetétele további sorrendbeli eltéréseket eredményezhet.

4.3. Utótesztelés

A 2.1 alfejezetben bebizonyítottam, hogy elméleti szinten sem a variancia, sem a szórás, sem a szemivariancia, sem pedig a leggyakrabban használt VaR nem alkalmas a kockázat mérésére,

hiszen egyik sem elégíti ki a koherencia tulajdonságot, így egyik sem koherens. Azt is bemutattam, hogy létezik koherens kockázati mérték, mégpedig a várható veszteség (ES). Ennek a fejezetnek az a célja, hogy a ma leggyakrabban használt két kockázati mértéket, azaz a VaR-et és az ES-t összehasonlítsa a gyakorlati alkalmazási lehetőségeit is figyelembe véve. Az úgynevezett utótesztelés (backtesting) módszert használom annak a megvizsgálására, hogy melyik kockázati mérték bizonyul jobbnak. Jobbnak akkor nevezem a kockázati mértéket, ha azzal pontosabban meg tudjuk becsülni a kockázatot, azaz, ha a tényleges és a becsült értékek között kisebb eltérés tapasztalható.

A piaci kockázat kiszámításának három főbb módszere ismert: a variancia-kovariancia módszer, a Monte Carlo szimuláció és a történeti szimuláció (EMBRECHTS et al., 2005). Ezek a módszerek tulajdonképpen a hozam/veszteség (Profit & Loss) eloszlásfüggvény becslésének módszerében különböznek egymástól (BUGÁR – UZSOKI, 2006). Mivel a fejezet célja a VaR és az ES összehasonlítása történeti szimuláció segítségével, így a másik két módszerről csak említést teszek.

A variancia-kovariancia módszer lényege - ahogy a neve is mutatja - a portfólióban szereplő eszközök varianciájának, valamint ezen eszközök páronkénti kovarianciájának a kiszámítása. A variancia-kovariancia mátrixot (a portfólióban szereplő eszközöknek megfelelően) súlyozva kapjuk meg a portfólió varianciáját. Ahhoz, hogy a variancia segítségével kiszámítsuk a kockázatot, valamilyen feltételezéssel kell élni a hozamok eloszlására vonatkozóan. Legkézenfekvőbb (főleg számolási szempontból) a normalitás feltételezése (DAMODARAN, 2008). A hozamok normalitása a legtöbb esetben, főleg napi, illetve rövid időintervallumra vonatkozó hozamok esetén, nem teljesül a gyakorlatban, mint ahogy az általam bemutatott adatok esetén sem (3.1.1 fejezet). Napi adatok esetén a normális eloszlásnál sokkal csúcsosabb eloszlás tapasztalható: a napi hozamokra jellemző eloszlás „középső” része sokkal vékonyabb, valamint jóval hosszabb és vastagabb farokkal rendelkezik, mint a normális eloszlás. Ez azt is jelenti, hogy több extrém érték jellemző ezen hozamokra, mint amit a normális eloszlás feltételez, ami a kockázat alulbecsléséhez vezethet (EMBRECHTS et al., 2005). Ezen probléma orvoslására az irodalomban több javaslatot is találhatunk, de nem-normális modellek esetében, a paraméterek becslése, valamint a kockázat kiszámítása igen bonyolulttá válhat. További pontatlanságot okozhat az az általános feltevés, hogy a varianciák és a kovarianciák időben állandóak. Ezzel szemben a különböző GARCH (Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity) modellek segítségével, az időbeli változást is figyelembe véve

becsülhetjük meg a varianciát, amivel pontosabb képet alkothatunk a varianciáról, illetve a kockázatról (DAMODARAN, 2008). Egy további kritikája a variancia-kovariancia módszernek, hogy nem csak a kockázati faktorok többdimenziós normális eloszlását, hanem azt is feltételezi, hogy az eloszlásfüggvény a kockázati faktorok lineáris függvénye. Ezen feltevések általában a valóságban nem teljesülnek (EMBRECHTS et al., 2005).

Egy másik, igen gyakran használt módszer a piaci kockázat becslésére a Monte Carlo szimuláció. A Monte Carlo szimuláció összefoglaló neve minden olyan módszernek, amelyben az eloszlásfüggvényt szimuláció segítségével becsüljük. A szimuláció első lépése egy modell illesztése és kalibrálása a történeti adatokra. Második lépés a modell segítségével, az adatokkal megegyező eloszlású, m (nagy számú) realizáció generálása. Ezen m scenárió segítségével meghatározható az eloszlásfüggvény, amelyből a kockázat már kiszámolható. Vegyük észre, hogy a módszer nem oldja meg a modell-illesztési problémát, és a szimuláció eredménye az illesztett modell pontosságától függ (EMBRECHTS et al., 2005). A gyakorlatban sokat előforduló példa a Monte Carlo szimulációra, amikor a részvényárak változását az úgynevezett geometriai Brown-mozgással (GBM) szimulálják. A GBM azzal a feltételezéssel él, hogy a logaritmikus hozamok normális eloszlást követnek (HULL, 2006; ARRATIA, 2014). Mint azt már többször megemlítettem, az általam elemezni kívánt adatok hozamai nem követnek normális eloszlást, így a GBM alkalmazása téves eredményre vezetne.

A fentieket is figyelembe véve, a következőkben csak a történeti szimulációval fogok foglalkozni. Ennek a módszernek az előnye az előzőekkel szemben, hogy semmilyen előzetes feltételezéssel nem kell élni az eloszlásfüggvényekre vonatkozóan.

4.3.1. Utótesztelés történeti szimuláció segítségével

Az utótesztelés végrehajtásához létre kell hozni az úgynevezett idő-ablakokat (time window). Az irodalomban és a gyakorlatban is az idő-ablakok értéke leggyakrabban egy év, azaz 250 kereskedési nap ($T = 250$). Az első ablak az 1. naptól a 250. napig tart, a második ablak a 2. naptól a 251. napig, és így tovább. Az első idő-ablak adatait felhasználva ki lehet számolni a szükséges kockázati mérték értékét az első 250 napra vonatkozóan, ami egyben előrejelzés a 251. napra. Ha rendelkezésre áll a 251. napi hozam is, akkor az első idő-ablak alapján számított becslt érték összehasonlítható a valódi hozam értékével. Ekkor már kiszámolható a második idő-ablakra vonatkozó kockázati mérték, ami egy becslt érték lesz a következő napra,

azaz a 252. napra vonatkozóan. Ha rendelkezésre áll a 252. napi hozam, akkor a becsült kockázat összehasonlítható a tényleges értékkel. És így tovább, az összes adaton végiglépkedve, ahogy azt a 4.5 táblázatban összefoglaltam. Ezt a módszert történeti szimulációnak (historical simulation) nevezzük, hiszen azzal a feltételezéssel él, hogy a múltban történt eseményekkel le tudjuk írni, meg tudjuk becsülni a jövőbeli eseményeket.

4.5. táblázat. A számításokhoz használt idő-ablakok

idő-ablak	első nap	utolsó nap	becslés
1.	1.	250.	251.
2.	2.	251.	252.
3.	3.	252.	253.
⋮	⋮	⋮	⋮
(n-249).	(n - 249).	n.	(n + 1).

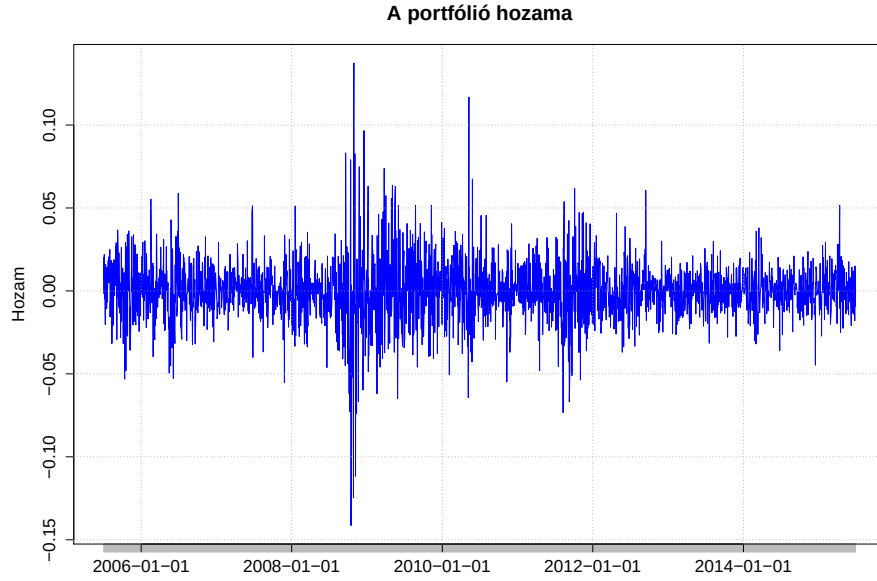
Forrás: saját szerkesztés

4.3.2. VaR vs. ES

A 4.3.1 fejezetben bemutatott módszert alkalmazom a két leggyakrabban használt kockázati mérték összehasonlítására. Elméleti szinten már a 2.1 fejezetben egyértelművé vált, hogy csak az ES alkalmas a kockázat mérésére, hiszen ez az egy kockázati mérték koherens. Ezért a továbbiakban azt vizsgálom, hogy a VaR vagy az ES bizonyul jobbnak a gyakorlatban.

A számításokhoz, a 3.1 fejezetben is használt, hét részvény tíz évre vonatkozó logaritmikus hozamait használom fel. A részvényekből olyan portfóliót hozok létre, amely mind a hét részvényből pontosan egyet tartalmaz. Ahogy azt a 3.2.2 alfejezetben is leírtam, a portfólió logaritmikus hozama a portfólió-árfolyamokból számolt logaritmikus hozammal egyezik meg (PETTERS – DONG, 2016). Így, a portfólió hozamok $n = 2606$ elemből álló adatsort képeznek (4.6. ábra).

A számításokhoz – a könnyebb áttekinthetőség végett – először táblázatba rendezem a portfólió hozamokat, azaz az adatokat: az első oszlopba kerül az első 250 elem, a másodikba a második 250 elem és így tovább (4.6 táblázat). Így minden oszlop tulajdonképpen egy idő-ablak, ami az adott esetben megegyezik az úgynevezett scenárióval. (A scenárió, vagy más néven



4.6. ábra. A portfólió napi logaritmikus hozamai 2005.07.01 és 2015.06.29 között.

forgatókönyv a jövő egy lehetséges állapotát írja le.) A modellben jelölje r_t^m az m -edik szcenárióhoz és t -edik időpillanathoz tartozó logaritmikus hozam értékét, ahol $m = 1, \dots, M$ és $t = 1, \dots, T$. Az elemezni kívánt adatok esetében az $n = 2606$, a $T = 250$ és az $M = 2357$. Vegyük észre, hogy a konstrukció miatt például az $r_2^1 = r_2^2$ vagy az $r_3^1 = r_2^2 = r_1^3$. A VaR_α^m és az ES_α^m jelölik az m -edik szcenárió adataiból számolt VaR és ES értékeket. Természetesen, mivel minta realizációról van szó, a kockázati mértékek kiszámításához a (2.23) és (2.27) képleteket használom, azaz ha $r^m = (r_1^m, \dots, r_{250}^m)$, akkor

$$\text{VaR}_\alpha^m = -r_k^{m*} = -\widehat{F}_{\{r_1^m, \dots, r_{250}^m\}}^{\leftarrow},$$

illetve

$$ES_\alpha^m = -\frac{\sum_{t=1}^k r_t^{m*}}{k},$$

ahol $k = \min\{l | l > n\alpha, l \in \mathbb{N}\}$, r_i^{m*} pedig az r_i^m minta realizáció növekvő sorrendbeli permutációjának i -edik elemét jelöli ($i = 1, \dots, 250$) az adott m -edik szcenárióra vonatkozóan.

a. A VaR utótesztelése

Ahogy már fentebb említettem, a VaR tesztelésére idő-ablakokat használok. Ezen idő-ablakok adatait felhasználva, ki lehet számolni a VaR értékét és ezt az értéket össze lehet hasonlítani a következő napi valódi hozam értékével. Az összehasonlítás azt jelenti, hogy minden egyes esetben megvizsgálom, hogy az adott hozam értéke kisebb-e, mint az arra a napra becsült VaR érték (-1)-szerese, majd összeszámolom, hogy hány esetben volt ez tapasztalható, azaz hogy

4.6. táblázat. Portfólió logaritmikus hozamainak idő-ablakokba rendezése

		Szcenário (m)					
		$m = 1$	$m = 2$	$m = 3$	$\cdots$	$m = 2356$	$m = 2357$
Idő (t)	t=1	r_1^1	r_1^2	r_1^3	$\cdots$	r_1^{2356}	r_1^{2357}
	t=2	r_2^1	r_2^2	r_2^3	$\cdots$	r_2^{2356}	r_2^{2357}
	t=3	r_3^1	r_3^2	r_3^3	$\cdots$	r_3^{2356}	r_3^{2357}
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\vdots$	
	t=250	r_{250}^1	r_{250}^2	r_{250}^3	$\cdots$	r_{250}^{2356}	r_{250}^{2357}
		VaR_α^1	VaR_α^2	VaR_α^3	$\cdots$	VaR_α^{2356}	VaR_α^{2357}
		ES_α^1	ES_α^2	ES_α^3	$\cdots$	ES_α^{2356}	ES_α^{2357}

Forrás: saját szerkesztés

hány esetben becsülte alá a VaR a tényleges kockázat értékét. Ennek a valószínűsége - a VaR definíciója alapján - meg kell, hogy egyezzen a konfidenciaszinttel, azaz α -val (DANIELSSON, 2011).

Jelölje R^m az m -edik szcenárióhoz tartozó valószínűségi változót és r_t^m az R^m egy minta realizációját, ahol a $t = 1, \dots, 250$. A VaR definíciója alapján:

$$P(R^{m+1} < -\text{VaR}_\alpha(R^{m+1})) = \alpha$$

és így

$$\begin{aligned} \alpha &= P(R^{m+1} < -\text{VaR}_\alpha(R^{m+1})) \\ &= \mathbb{E} \left(\mathbf{1}_{\{R^{m+1} < -\text{VaR}_\alpha(R^{m+1})\}} \right), \end{aligned} \quad (4.1)$$

ahol $\mathbf{1}_{\{R^{m+1} < -\text{VaR}_\alpha(R^{m+1})\}}$ az $\{R^{m+1} < -\text{VaR}_\alpha(R^{m+1})\}$ halmaz indikátorfüggvénye.

A minta realizáció segítségével a várható értéket a relatív gyakorisággal, míg az $(m + 1)$ -edik szcenárióhoz tartozó VaR az m -edik szcenárióhoz tartozó empirikus eloszlásfüggvény

segítségével közelíthető, és így:

$$\hat{\alpha} = \frac{1}{M-1} \sum_{m=1}^{M-1} \mathbf{1}_{\{r_T^{m+1} < -\text{VaR}_\alpha^m\}}. \quad (4.2)$$

Minél közelebb van a becsült kockázat a ténylegeshez, azaz minél pontosabban becsülhetjük meg a VaR-el a kockázatot, annál közelebb lesz ez az érték α -hoz.

b. Az ES utótesztelése

A Bázeli Bizottság 2012-ben - az 1996 óta használt VaR kockázati mérték helyett - az ES, mint új szabályozói kockázati mérték bevezetését javasolta. A probléma csak az volt, hogy ellentétben a VaR-ral úgy gondolták, hogy bizonyos matematikai tulajdonsága (elicitability) miatt, az ES nem utótesztelhető. (A definíció és részletes leírás a témával kapcsolatban megtalálható például EMMER et al. (2015) és ACERBI – SZEKELY (2014) cikkében.) Így, a Bázeli Bizottság azt javasolta, hogy adaptálják az ES-t mint kockázati mértéket és folytassák az utótesztelést a VaR használatával. A legújabb kutatások megoldani látszanak ezt a problémát is, mert kimutatták, hogy az ES is utótesztelhető.

Az ES utótesztelését ACERBI – SZEKELY, 2014 cikke alapján végzem el.

Belátható (ACERBI, 2002), hogy az ES folytonos esetben a következőképpen írható fel:

$$ES_\alpha(X) = -\frac{1}{\alpha} \mathbb{E}(X \mathbf{1}_{\{X < q_\alpha\}}). \quad (4.3)$$

Továbbra is jelölje R^m az m -edik scenárióhoz tartozó valószínűségi változót, és r_t^m az R^m egy minta realizációját, $t = 1, \dots, 250$, valamint VaR_α^m , illetve ES_α^m az m -edik scenárióhoz tartozó minta realizációból számolt VaR és ES értékeket α -szinten. Az $I^m := \mathbf{1}_{\{R^m < -\text{VaR}_\alpha(R^m)\}}$ jelöléssel, valamint az $X = R^m$ helyettesítéssel élve a (4.3) egyenlet a következő alakot ölti:

$$ES_\alpha(R^m) = -\frac{1}{\alpha} \mathbb{E}(R^m I^m). \quad (4.4)$$

A (4.4) egyenletet, valamint a várható érték tulajdonságait felhasználva látható, hogy:

$$0 = \frac{1}{\alpha} \mathbb{E} \left(\frac{R^m I^m}{ES_\alpha(R^m)} \right) + 1. \quad (4.5)$$

Mindkét oldal M -szerinti átlagát véve:

$$\frac{1}{M} \sum_{m=1}^M 0 = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \left[\frac{1}{\alpha} \mathbb{E} \left(\frac{R^m I^m}{ES_\alpha(R^m)} \right) + 1 \right]. \quad (4.6)$$

A (4.6) egyenlet átrendezésével pedig látható, hogy

$$0 = \mathbb{E} \left(\frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \frac{R^m I^m}{ES_{\alpha}(R^m)} \right) + \alpha, \quad (4.7)$$

azaz

$$\alpha = -\mathbb{E} \left(\frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \frac{R^m I^m}{ES_{\alpha}(R^m)} \right). \quad (4.8)$$

Hasonlóan a VaR-hez, a várható érték a relatív gyakorisággal közelíthető és így a minta realizációból számolt α becslt értéke:

$$\hat{\alpha} = -\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \frac{r_t^m \mathbf{1}_{\{r_t^m < -\text{VaR}_{\alpha}^m\}}}{ES_{\alpha}^m}. \quad (4.9)$$

Minél közelebb van a becslt kockázat a ténylegeshez, azaz minél pontosabban becsülhetjük meg a ES-el a kockázatot, annál közelebb lesz ez az érték α -hoz.

4.3.3. Eredmények

A számításokat a már bemutatott adatokon, az R statisztikai program segítségével végeztem el. A felhasznált programok az C.2 függelékben találhatóak. Az 4.7. táblázatban láthatóak az utótesztelés eredményei, 0,5%, 1%, 2%, 2,5% és 5%-os szinteken, a VaR-ra, valamint az ES-re vonatkozóan. Az $\hat{\alpha}$ oszlopokban tüntettem fel a történeti szimulációval kapott alfa értékeket. Az $|\hat{\alpha} - \alpha|$ oszlopokban lévő számok azt mutatják, hogy a tényleges alfa érték mennyire tér el az előrejelzések alapján számított alfa értéktől.

4.7. táblázat. A történeti utótesztelés eredménye

	VaR		ES	
α	$\hat{\alpha}$	$ \hat{\alpha} - \alpha $	$\hat{\alpha}$	$ \hat{\alpha} - \alpha $
0,5%	0,89%	0,39%	0,41%	0,09%
1%	1,27%	0,27%	0,83%	0,17%
2%	1,99%	0,01%	1,68%	0,32%
2,5%	2,72%	0,22%	2,42%	0,08%
5%	5,17%	0,17%	4,85%	0,15%

Forrás: saját szerkesztés

A számításokhoz használt adatok alapján, az utótesztelés eredményeiből látható, hogy $\alpha = 2\%$ -os szinten a VaR sokkal jobbnak bizonyul az ES-nél. Közeli eredmények születtek

$\alpha = 5\%$ -os szinten: a VaR esetében az eltérés 0,17%, míg az ES esetében 0,15%, azaz ezen a szinten az ES bizonyult jobbnak, az összes többi alfa értékhez hasonlóan. Ez azt jelenti, hogy $\alpha = 2\%$ kivételével minden vizsgált alfa szinten az ES-sel számított alfa érték közelebb volt az elméleti értékhez, mint a VaR-ral számított alfa.

A két kockázati mérték, a különböző alfa szinteken számolt abszolút hibák vizsgálata mellett összehasonlítható a relatív hiba segítségével is. Vektorok relatív hibájának kiszámítása a következő összefüggéssel történik (PRYCE, 1984):

$$\mathcal{E}_{re} = \frac{\|\hat{\alpha} - \alpha\|}{\|\alpha\|}, \quad (4.10)$$

ahol $\hat{\alpha} = (\hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2, \dots, \hat{\alpha}_n)$ jelöli az elméleti értékekből, míg $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, $n \in \mathbb{N}$ a számított, mért értékekből képzett vektort. A VaR és az ES relatív hibáinak összehasonlításához a leggyakrabban használt normát, az euklideszi normát használom:

$$\mathcal{E}_{re} = \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^5 (\hat{\alpha}_i - \alpha_i)^2}}{\sqrt{\sum_{i=1}^5 \alpha_i^2}}. \quad (4.11)$$

A (4.11) egyenlet alapján, a VaR relatív hibája a 4.7. táblázatban bemutatott alfa szinteket figyelembe véve $\mathcal{E}_{re}^{\text{VaR}} = 0,091$, míg az ES relatív hibája $\mathcal{E}_{re}^{\text{ES}} = 0,068$. Vagyis a többdimenziós relatív hibákat összehasonlítva elmondható, hogy az ES-nek kisebb a relatív hibája, így összességében jobb kockázati mértéknek bizonyul.

A fentebb bemutatott számításokat, valamint az elméleti tényeket is figyelembe véve úgy gondolom, hogy az várható veszteséggel pontosabb képet kaphatunk a kockázatról, mint a VaR kockázati mértéket használva.

4.4. A hozam-variancia kritérium helyett a hozam-ES kritérium használata megváltoztatja a portfólióval kapcsolatos döntéseinket

A *modern portfólióelmélet* (*modern portfolio theory*, *MPT*) alapgondolata Markowitz (1952) nevéhez fűződik (MARKOWITZ, 1952, 1959), amiért 1990-ben gazdaságtudományi Nobel-díjat érdemelt ki. Az MPT abban segíti a racionális befektetőket, hogy a diverzifikációt felhasználva hogyan tudják a kockázatos eszközökből álló portfóliójukat optimalizálni.

Miután elméleti szinten bebizonyosodott, hogy az ES jobb kockázati mérték, mint a VaR - amit a történeti szimuláció alapján végzett utótesztelés is alátámasztott -, és ellentétben a VaR-el az ES koherens is, és így támogatja a diverzifikációt, érdemes megvizsgálni, hogy mi történik abban az esetben, ha a hagyományos Markowitz-féle átlag-variancia portfólió optimalizáció helyett az átlag-ES optimalizációt használjuk.

Először a hozam-variancia optimalizációs modellt mutatom be, ahol a kockázatot a variancia segítségével határozzuk meg. A hozam-variancia modell bemutatása után megvizsgálom, hogy mennyiben változtat az optimális portfólió összetételén, ha a variancia helyett az ES-t használjuk a portfólió kockázatának kiszámításához. Mivel a legtöbbet használt kockázati mérték a VaR nem konvex (2.1.3 részfejezet), azért lehetetlenné válik az optimalizációs feladatoknál való alkalmazása. A modellek leírásánál főleg WÜRTZ et al., 2009 és CORNUEJOLS – TÜTÜNCÜ, 2006 könyvére támaszkodom.

4.4.1. Hozam-variancia portfólió optimalizáció

A modell az eszközök hozamát valószínűségi változóknak tekinti, míg magát a portfóliót az eszközök súlyozott kombinációjával írja le. Az MPT feltételezi továbbá, hogy az eszközök hozama normális vagy elliptikus eloszlású, a befektetők racionálisak és kockázatkerülők, azaz két azonos várható hozamú portfólió közül a kevésbé kockázatosat választanák, nincsenek tranzakciós költségek és az eszközök tetszőlegesen oszthatók (vehetünk például 0,5869 részvényt is).

Elmondható tehát, hogy a portfólió várható hozama a benne lévő n ($n \in \mathbb{N}$) eszköz várható hozamainak a súlyozott összege, azaz ha R_p jelöli a portfóliót, R_i pedig az i -edik ($i = 1, \dots, n$) eszköz hozamát, valamint $\mathbb{E}(R_i) = \mu_i$, az i -edik eszköz várható hozama és $\mu \in \mathbb{R}^n$ pedig az ezen hozamokat tartalmazó vektor, akkor a portfólió várható hozama:

$$\mathbb{E}(R_p) = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}(R_i)w_i = \sum_{i=1}^n \mu_i w_i = \mu^T \mathbf{w}, \quad (4.12)$$

ahol w_i az i -edik eszköz súlya a portfólióban, valamint $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$ az ezeket a súlyokat tartalmazó vektor. Ez azt jelenti, hogy a portfólió reprezentálható egy n -elemű $\mathbf{w}$ valós vektorral (VARGA-HASZONITS, 2006). Ezek a súlyok megegyeznek a 3.2 fejezetben bemutatott adott

időpillanatra vonatkozó relatív súlyokkal ($w_{t,i} = \frac{S_{t,i}}{S_t} = \frac{k_i P_{t,i}}{\sum_{i=1}^n k_i P_{t,i}}$).

A várható hozam mellett a portfólió varianciája a következőképpen számolható ki:

$$\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_i w_j \text{cov}(R_i, R_j), \quad (4.13)$$

vagy mátrixos formában felírva:

$$\sigma_p^2 = \mathbf{w}^T \Sigma \mathbf{w}, \quad (4.14)$$

ahol Σ a kovarianciamátrix, azaz $\Sigma_{i,j} = \text{cov}(R_i, R_j)$.

A Markowitz modellben a hozamot a minta átlagával, míg a kockázatot a portfólióban lévő eszközök hozamának szórásával becsüljük (WÜRTZ et al., 2009). Abban az esetben, amikor a cél egységnyi tőkét befektetve, egy adott $\bar{r}$ portfólió hozam mellett a kockázat (variancia) minimalizálása, akkor az optimalizációs probléma a következő alakot ölti:

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n} \quad & \mathbf{w}^T \Sigma \mathbf{w} \\ & \mu^T \mathbf{w} = \bar{r} \\ & \mathbf{w}^T \mathbf{1} = 1, \end{aligned} \quad (4.15)$$

ahol $\mathbf{1}$ n-dimenziós egységvektor.

Ezt az optimalizációs feladatot nevezzük Markowitz-feladatnak. Az első kifejezés azt mutatja, hogy a varianciát, azaz a kockázatot szeretnénk minimalizálni. A másodikból kifejezésből látható, hogy a minimumot adott várható hozam mellett akarjuk elérni. Az utolsó egyenlet pedig azt fejezi ki, hogy a portfóliósúlyok összege egyenlő az induló tőkével (ezt nevezzük költségvetési korlátnak) (VARGA-HASZONITS, 2006).

A Markowitz modellnek pontosan egy megoldása van (WÜRTZ et al., 2009), ami a következő alakban írható:

$$\mathbf{w}^* = \bar{r} \mathbf{w}_0^* + \mathbf{w}_1^*, \quad (4.16)$$

ahol az

$$\begin{aligned} A &= \mu^T \Sigma^{-1} \mu \\ B &= \mathbf{1}^T \Sigma^{-1} \mathbf{1} \\ C &= \mathbf{1}^T \Sigma^{-1} \mu \end{aligned} \quad (4.17)$$

jelölések bevezetésével

$$\begin{aligned} w_0^* &= \frac{B\Sigma^{-1}\mu - C\Sigma^{-1}\mathbf{1}}{AB - C^2} \\ w_1^* &= \frac{C\Sigma^{-1}\mu - A\Sigma^{-1}\mathbf{1}}{AB - C^2}. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Ekkor az adott $\bar{r}$ hozamhoz tartozó optimális portfólió szórása:

$$\sigma^* = \sqrt{\frac{B\bar{r}^2 - 2C\bar{r} + A}{AB - C^2}}. \quad (4.19)$$

A (4.19) egyenlet négyzetre emelésével és átrendezésével az optimális portfólió varianciájára a következő kifejezés adódik:

$$\sigma^{*2} = \frac{B}{AB - C^2} \left(\bar{r} - \frac{C}{B} \right)^2 + \frac{1}{B}. \quad (4.20)$$

Az optimalizációs feladat megoldását határpontoknak nevezzük, és a (4.20) képletből is látható, hogy ha a hozam-variancia síkban ábrázoljuk ezeket a pontokat, akkor egy parabolaívet kapunk. Ennek alternatívájaként, általában a gyakorlatban a vízszintes tengelyen a szórást, a függőleges tengelyen a hozamot, majd ebben a síkban az összes lehetséges portfóliót szoktuk ábrázolni. A (4.20) egyenlet átrendezésével a következő hiperbola egyenletet kapjuk:

$$\frac{\sigma^{*2}}{1/B} - \frac{(\bar{r} - \frac{C}{B})^2}{D/B^2} = 1, \quad (4.21)$$

ahol $D = AB - C^2$ és így a hiperbola csúcspontja a $\left(\sqrt{\frac{1}{B}}, \frac{C}{B} \right)$ koordinátájú pont (4.7 ábra). Tehát látható, hogy míg a határpontokat a hozam-variancia síkon ábrázolva parabolaívet, addig a hozam-szórás síkon ábrázolva hiperbolaívet kapunk (BARUCCI, 2003).

Maga a hiperbolaív, valamint az ettől a hiperbolaívtől „jobbra” található pontok halmaza adja a lehetséges portfóliók halmazát, míg az ettől „balra” eső területen nem fordulhat elő portfólió. Látható, hogy ha $\sigma > \sqrt{\frac{1}{B}}$, akkor a szórás minden értékéhez két határportfólió tartozik. Ezek közül természetesen mindig a nagyobb várható hozamú a hatékonyabb, ezért a hiperbolaív felső részét (hozam $\geq C/B$) *hatékony határvonalnak* (efficient frontier) nevezzük. A hatékony határvonal legkisebb kockázatú portfóliója az úgynevezett *globálisan legkisebb varianciájú portfólió* (global minimum variance portfolio, MVP).

A kockázatmentes eszköz hozamát (r_F) a határvonalon lévő valamely portfólióval összekötő egyenes az úgynevezett *tőkeallokációs* (capital allocation line, CAL) vagy más néven *tőkepiaci*

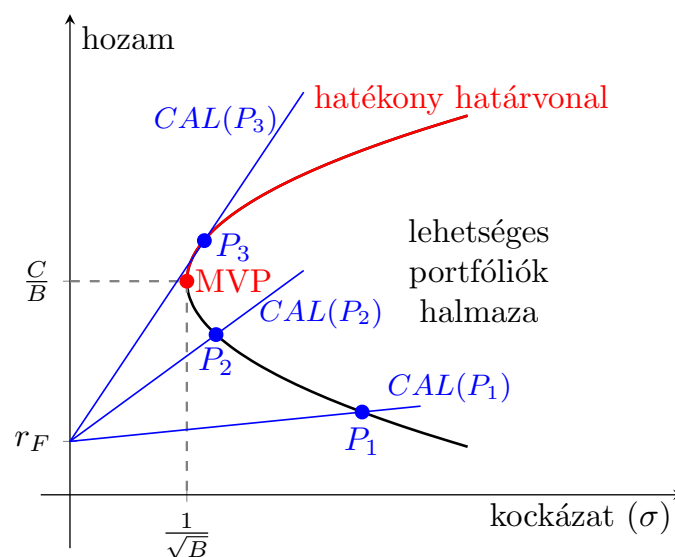
egyenes (capital market line, CML). Ez az egyenes mutatja meg a kockázatmentes eszköz és az adott portfólió lineáris kombinációját. Ha minden pénzünket a kockázatmentes eszközbe tesszük, akkor a függőleges tengelyen vagyunk, ha pedig minden pénzünket az adott $P_i, i \in \mathbb{N}$ portfólióba fektetjük, akkor a CAL egyenes P_i pontjában. Ezen pontok között bármely pont az egyenesen azt jelenti, hogy megosztjuk a befektetésünket a kockázatmentes eszköz és a P_i portfólió között. Minél meredekebb a CAL egyenes annál jobb, hiszen akkor egységnyi kockázt növekedéshez nagyobb várható hozamnövekedés tartozik. A meredekséget a következőképpen számolhatjuk ki:

$$\frac{\text{portfólió várható hozama} - \text{kockázatmentes hozam}}{\text{portfólió kockázata}}. \quad (4.22)$$

A CAL egyenes meredekségét *Sharpe index*nek (Sharpe ratio) nevezzük:

$$SR = \frac{\mathbb{E}(R_p) - r_F}{\sigma_P}. \quad (4.23)$$

Minél nagyobb a Sharpe index értéke, annál meredekebb az egyenes (BACON, 2011). Vagyis a legjobb ilyen egyenes az a hatékony határvonalhoz húzott érintő.



4.7. ábra. A kockázat-hozam síkon a lehetséges portfóliók halmaza, határportfóliók, a hatékony határvonal és a tőkeallokációs egyenesek.

Forrás: saját szerkesztés

A szórás konvexitásának köszönhetően a Markowitz-modell azt mondja ki, hogy adott induló tőke és elvárt hozam mellett érdemesebb a pénzünket diverzifikálni, azaz jobban járunk, ha megosztjuk azt több pénzügyi eszköz között, ahelyett, hogy az egészet egy eszközbe fektetnénk. A várható hozamot minden befektető szubjektív módon választja meg

(VARGA-HASZONITS, 2006).

A következőekben, 3.1 fejezetben bemutatott adatok segítségével vizsgálom meg, hogy milyen eredményhez vezet az optimalizáció. A portfólió optimalizáláshoz az Rmetrics programcsomagot, azon belül is az fPortfolio modult használom és Würtz (WÜRTZ et al., 2009) könyve alapján dolgozom. Az elemzés során a rövidre eladást (short selling) kizárom a modellből, így a portfóliósúlyok nulla és egy közé esnek ($0 \leq w_i \leq 1$). (A rövidre eladásnak tulajdonképpen az a lényege, hogy kölcsönt is veszünk fel, tehát nem csak a saját tőkénket fektetjük be, és ilyenkor negatív értékű eszközarányok is megjelenhetnek.) Az optimalizáció eredménye a 4.8 ábrán valamint a 4.8 táblázatban látható. Meg kell jegyezni, hogy mivel napi adatokkal számoltam, így a kapott hozameredmények is napi hozamok.

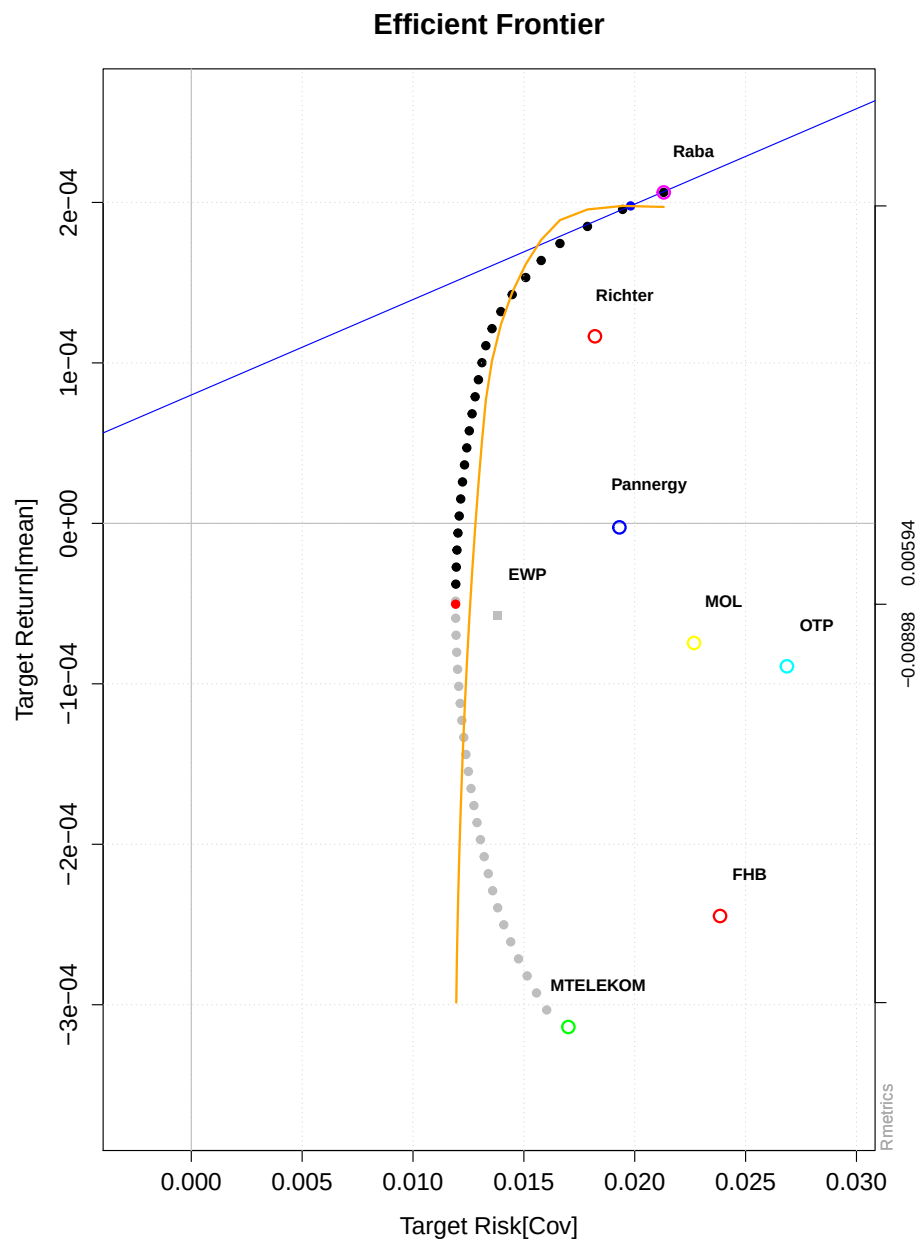
4.8. táblázat. Speciális portfóliók várható hozama, szórása, VaR és ES értéke az átlag-variancia portfólió optimalizálás eredményeként

Portfólió	Hozam	Szórás	VaR	ES
Egyenlő súlyú	-0,0001	0,0138	0,0209	0,0332
Hatékony (hozam=0)	0,0000	0,0121	0,0182	0,0287
Hatékony (hozam=0,0001)	0,0001	0,0131	0,0190	0,0307
Maximális Sharpe-index	0,0002	0,0198	0,0262	0,0451
Minimum kockázat	-0,0001	0,0119	0,0185	0,0286

Forrás: saját számítás

A 4.8 ábrán a hiperbolaív a Markowitz-modell megoldása, amelytől „jobbra” helyezkednek el a lehetséges portfóliók. A határportfóliók közül a hatékonyabbakat fekete pontok jelölik, ez a hatékony határvonal. A színes körök az egyes részvényeket ábrázolják, amelyek segítségével lehet olvasni (ill. ki lehet számolni) a kockázatot és a hozzá tartozó hozamot abban az esetben, ha a portfólióban egyedül csak az adott részvény szerepelne. Látható, hogy így csak a Raba-val, valamint a Richterrel érhető el pozitív hozam. A legkisebb kockázata az MTELEKOM-nak, míg a legmagasabb az OTP-nek van.

Az EWP (equally weighted portfolio), azaz *egyenlő súlyú portfólió*, azt a portfóliót mutatja,



4.8. ábra. A hatékony határvonal, amikor a kockázat mérésére a szórást használjuk

Forrás: saját számítás

amit akkor kapnánk, ha minden részvény egyenlő súllyal szerepelne a portfólióban. Látható, hogy ennek a portfóliónak a kockázata (szórása) 0,0138, ami az elemzett portfóliók között a második legmagasabb, ráadásul az így kapott hozam negatív (-0,01%). Sőt ugyanekkora kockázattal magasabb hozamot, vagy ugyanekkora hozamot kisebb kockázattal is elérhetnénk. A számítógépes elemzésből az is kiderül (4.8 táblázat), hogy ebben az esetben a VaR értéke 0,0209, míg az ES értéke 0,0332.

A hiperbola görbén látható piros pont a minimális kockázatú portfóliót jelenti a hozam rögzítése nélkül. A minimális kockázatú (szórás értéke 0,0119) portfólióhoz tartozó hozam negatív: -0,01%. Az 4.8 ábrán a kék vonal a maximális meredekségű allokációs egyenes, ami a kockázatmentes rátától a hatékony határvonalhoz húzott érintő, azaz ennek a legnagyobb a Sharpe indexe. Ezt az érintési pontot a hatékony határvonalon kékkel jelöltem. Kockázatmentes rátának tekinthető a Magyar Kincstári Takarékjegy hozama, aminek az értéke 1,5% és 2,5% között mozog. Az elemzés készítésekor (2016. 03. 29.) az éves hozam 2% volt, ami napi hozamra átszámolva 0,008%.

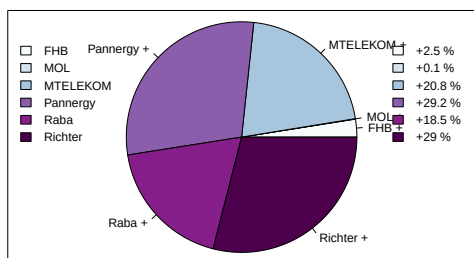
A narancssárga vonal maga a Sharpe-index és a 4.8 ábra jobb oldalán látható ennek a szóródása, ami ebben az esetben -0,00898 és 0,00594 közé esik. A Sharpe index, azaz a hozam kockázat arány maximalizálása arra az eredményre vezetett, hogy az elérhető maximális hozam 0,02% és csak két részvény maradt a portfólióban, ami a Rába (90,59%) és a Richter (9,41%) volt. Természetesen ezen a hozamszinten a kockázat értéke viszonylag magas (szórás=0,0166) és bármelyik kockázati mértéket tekintve ez a legkockázatosabb portfólió (4.8 táblázat).

A 4.9 ábrán látható négy speciális portfólióban a részvények eloszlása. Az alsó sorban jobbra található a Sharpe index szerint végzett portfólió optimalizáció eredménye. Ahogy már említettem két részvény marad a portfólióban ez pedig a Rába és a Richter, rendre 90,% és 9,4%-ban. Ha ebbe a portfólióba fektetünk, akkor 0,02%-os hozamot érhetünk el, a szórás értéke 0,0198, a VaR értéke 0,0262 és az ES értéke pedig 0,0451 (4.8 táblázat). A 4.9 ábrán a felső sorban található két hatékony portfólió összetétele, tehát ezek a hatékony határvonalon helyezkednek el. Az első amikor a várható hozam értéke nulla, míg a második amikor a várható hozam 0,01%. Megfigyelhető, hogy abban az esetben, mikor a várható hozam értéke nulla, a hét részvényből az OTP kivételével minden részvény benne marad a portfólióban. A legnagyobb súllyal a Pannergy (29,2%) és a Richter (29%) szerepelnek, majd ezeket követi az MTELEKOM (20,8%), Rába (18,5%), FHB (2,5%) és végül a MOL (0,1%). 0,01%-os várható

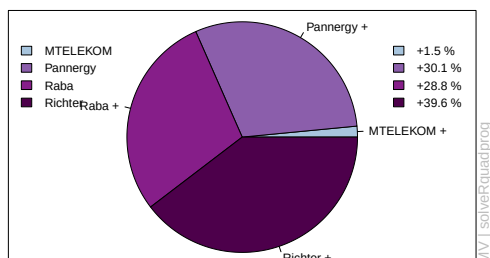
hozam esetén már csak négy részvényt tartalmaz az optimális portfólió, ezek: Richter (39,6%), Pannergy (30,1%), Raba (28,8%) és az MTELEKOM (1,5%). A 4.8 táblázatból leolvashatóak ezekben az esetekben is az adott várható hozam mellett, a szórás, VaR és ES értékek. Megfigyelhető, hogy a legnagyobb hozam a legnagyobb kockázattal érhető el, hiszen a legkockázatosabb portfólió (mind a három kockázati mérték szerint) a maximális Sharpe indexű portfólió és ez ígéri a legmagasabb hozamot is. Érdekes megfigyelni továbbá, hogy a második legkockázatosabb portfólió az egyenlő súlyú portfólió, viszont ebben az esetben a legkisebb a hozam értéke, ráadásul negatív is.

A kördiagramok közül az utolsó a hozam rögzítése nélkül elérhető a minimális kockázatú portfólió (bal alsó a 4.9 ábrán). Ez a portfólió a hatékony határvonal ábrán (4.8 ábra) a piros pont. Látható, hogy ebben az esetben a hét részvény közül az OTP és a MOL nem szerepelnek a portfólióban. A minimum kockázatú portfólióban legnagyobb súlyú az MTELEKOM (29,3%), majd a Pannergy (28,5%), Richter (23,5%), Raba (13,4%), és az FHB (5,3%) következnek. Az is látható, hogy annak ellenére, hogy ezzel a portfólió összetétellel érnénk el a legkisebb kockázatot a hozam értéke ebben az esetben is negatív lenne: -0,01% (4.8 táblázat).

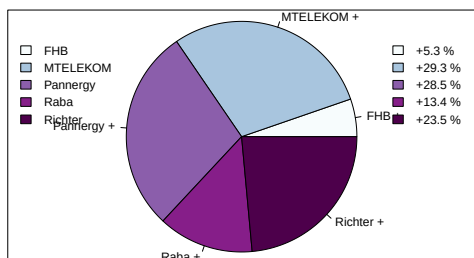
Weights
Hatékony portfólió (hozam=0%)



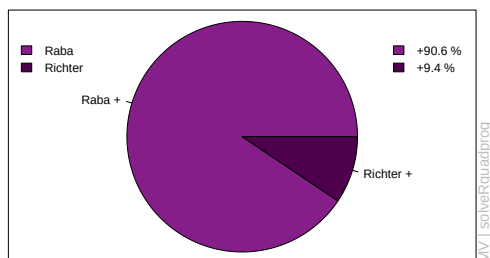
Weights
Hatékony portfólió (hozam=0,01%)



Weights
Minimum kockázatú portfólió



Weights
Maximum Sharpe indexu portfólió



4.9. ábra. A hatékony, a minimális kockázatú és a maximális Sharpe-indexű portfóliókban a részvények súlyai a szórás minimalizálásakor

Forrás: saját szerkesztés

4.4.2. Hozam-ES portfólió optimalizáció

Ebben a fejezetben a szórás helyett az ES-t használom, mint kockázati mértéket és a cél ennek a minimalizálása. Ellentétben az hozam-variancia portfólió optimalizálásával, ebben az esetben nem kell elliptikus eloszlást feltételezni (WÜRTZ et al., 2009). Ekkor a Markowitz-modellel megegyező jelölések mellett az optimalizációs feladat a következő formában írható:

$$\begin{aligned} \min_{w \in \mathbb{R}^n} \text{ES}_\alpha(w) \\ \mu^T w &= \bar{r} \\ w^T \mathbf{1} &= 1. \end{aligned}$$

Látható, hogy a feltételek ugyanazok, mint az átlag-variancia portfólió optimalizálása esetén, azaz egy egységnyi tőke befektetése esetén a cél egy adott $\bar{r}$ hozam mellett a kockázat (ES) minimalizálása.

A következőekben a hozam-ES optimalizációs modellt technikai okokból a veszteségfüggvényre mutatom be, ellentétben az eddig ismertetett profit függvény esetével. Ebből adódik az is, hogy a VaR és az ES definíciója egy kicsit eltér az eddig leírtaktól.

Legyen $r_i := R_i(\omega)$, $r = (r_1, \dots, r_n)$ minta realizáció és jelölje $f(w, r)$ a portfólió veszteségfüggvényét abban az esetben, ha a lehetséges portfóliók halmazából a $w \in \mathbb{R}^n$ portfóliót választottuk. Feltételezzük továbbá, hogy az R_p valószínűségi vektorváltozónak létezik a $p(r)$ -rel jelölt sűrűségfüggvénye. Ekkor fix w mellett a veszteség eloszlásfüggvénye a következőképpen határozható meg:

$$\Psi(w, \gamma) := \int_{f(w, r) < \gamma} p(r) dr. \quad (4.24)$$

Az ehhez a portfólióhoz tartozó VaR értéke α szinten:

$$\text{VaR}_\alpha(w) := \inf \{ \gamma \in \mathbb{R} \mid \Psi(w, \gamma) \geq \alpha \} \quad (4.25)$$

és az ES értéke, szintén α szinten:

$$\text{ES}_\alpha(w) := \frac{1}{1 - \alpha} \int_{f(w, r) \leq \text{VaR}_\alpha(w)} f(w, r) p(r) dr. \quad (4.26)$$

Mivel az ES függvény definíciójában a VaR explicit módon szerepel bonyolult közvetlenül ennek a függvénynek az optimalizációja, ezért helyette a következő függvényt tekintjük:

$$F_\alpha(w, \gamma) := \gamma + \frac{1}{1 - \alpha} \int_{f(w, r) \geq \gamma} (f(w, r) - \gamma) p(r) dr. \quad (4.27)$$

Ekkor

$$\min_{w \in X} \text{ES}_\alpha(w) = \min_{w \in X, \gamma} F_\alpha(w, \gamma), \quad (4.28)$$

ahol X a lehetséges portfóliók halmaza.

Gyakran problémát okoz, hogy a $p(r)$ együttes eloszlásfüggvény kiszámítása, meghatározása lehetetlen. Helyette valamilyen y_s , $s = 1, \dots, S$ scenáriókkal lehet számolni, mely értékek például történeti adatokból vagy számítógépes szimulációból származnak. Ha feltételezzük, hogy minden scenáriónak ugyanakkora a valószínűsége, akkor a következő becslés írható fel az $F_\alpha(w, \gamma)$ függvényre:

$$\hat{F}_\alpha(w, \gamma) := \gamma + \frac{1}{(1 - \alpha)S} \sum_{s=1}^S (f(w, r_s) - \gamma)^+, \quad (4.29)$$

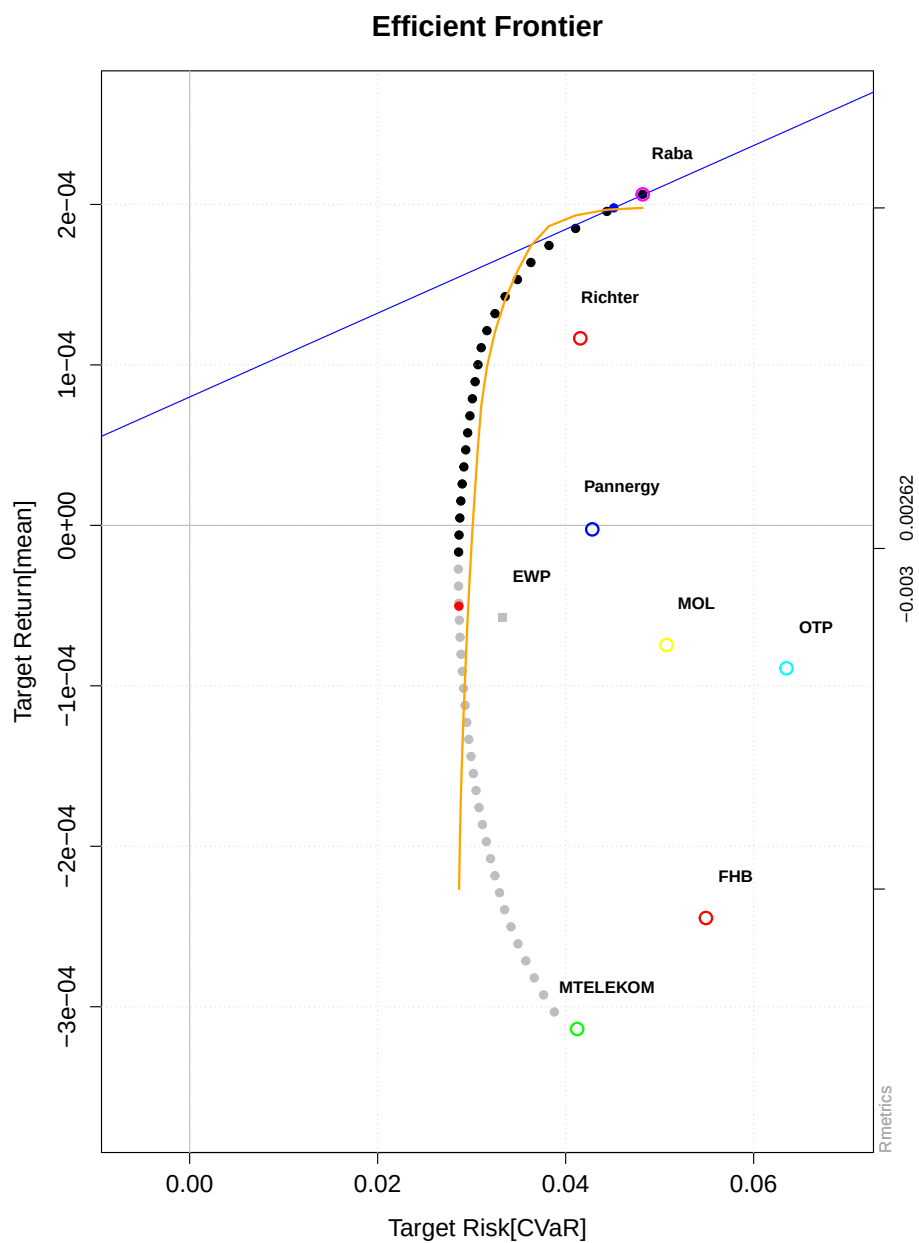
ahol $z^+ = \max\{z, 0\}$.

Az optimalizációs feladat megoldásához, a képletek részletesebb levezetéséhez és a bizonyításokhoz tekintsük például CORNUEJOLS – TÜTÜNCÜ, 2006.

A következőekben, hasonlóan az átlag-variancia portfólió optimalizáláshoz, megvizsgálom a hatékony határvonalat és a lehetséges portfóliók halmazát a 3.1 fejezetben bemutatott adatokon.

A hatékony határvonal a 4.10 ábrán látható, $\alpha = 0,05$ esetén. A jelölésrendszer ugyanaz, mint amit a hozam-variancia optimalizáció esetében használtam. Az x -tengelyen látható CVaR megjelölés a feltételes kockázatotott értékre utal (Conditional Value at Risk), ami folytonos esetben (a hozam folytonos valószínűségi változó) megegyezik az expected shortfall-al (EMBRECHTS – HOFERT, 2014).

A sötétebb pontok jelentik a hatékony határvonalat, a színes körök az egy-egy részvényből álló portfóliót, a piros pont a legkisebb kockázatú portfóliót (a hozam rögzítése nélkül), míg a kék pont a legnagyobb hozamút. A kék egyenes a hatékony határvonalhoz húzott érintő és a narancssárga vonal a Sharpe index. A Sharpe index értéke -0,0034 és 0,00262 között változik. Ismét látható, hogy a részvények önmagukban negatív hozamot hoznak, a Raba és a Richter kivételével. A legnagyobb hozam ismételen a Raba és a Richter kombinációjából álló portfólióval érhető el, melynek értéke 0,02%. Ekkor a szórás értéke 0,0208, a VaR értéke 0,0273 és az ES értéke pedig 0,0472 (4.9 táblázat).



4.10. ábra. Hatékony határvonal: hozam-ES portfólió optimalizálás esetén ($\alpha = 0,05$)

Forrás: saját számítás

4.9. táblázat. Speciális portfóliók várható hozama, szórása, VaR és ES értéke az átlag-ES portfólió optimalizálás eredményeként ($\alpha = 0,05$)

Portfólió	Hozam	Szórás	VaR	ES
Egyenlő súlyú	-0,0001	0,0138	0,0209	0,0332
Hatékony (hozam=0)	0,0000	0,0121	0,0181	0,0286
Hatékony (hozam=0,0001)	0,0001	0,0131	0,0192	0,0307
Maximális Sharpe-index	0,0002	0,0208	0,0273	0,0472
Minimum kockázat	0,0000	0,0121	0,0183	0,0284

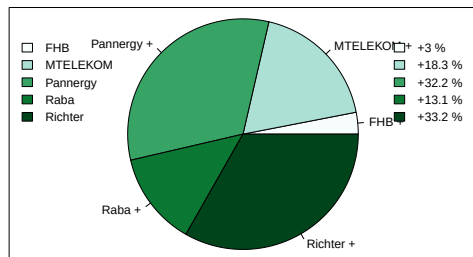
Forrás: saját számítás

Négy speciális portfólió összetételéről a 4.11 ábrán láthatóak a kördiagramok: két hatékony portfólió, a maximális Sharpe indexű és a minimális kockázatú portfólió. A két hatékony portfólió közül az első esetében a rögzített várható hozam 0%, míg a második esetben 0,01%. Mindkét portfólióban a Richter részvény szerepel a legnagyobb súllyal (33,2% illetve 40,5%). A 0%-os hozamú portfóliónál ezt követi a Pannergy (32,2%), az MTELEKOM (18,3%), a Raba (13,1%) és végül az FHB (3%). Látható, hogy a hét részvényből itt csak öt maradt a portfólióban. Ha megnöveljük a várható hozamot 0,01%-ra, akkor a Richter részvényt a Pannergy (31,7%), Raba (27,1%) majd az MTELEKOM (0,7%) követi. A 4.11 ábrán a másik két kördiagramból a bal alsó a minimális kockázatú portfólió összetételét mutatja (a hozam rögzítése nélkül), a jobb alsó pedig a legmagasabb Sharpe indexszel rendelkezőt. A minimális kockázatú portfólió összetétele: Pannergy (33,6%), Richter (30,2%), MTELEKOM (22%), Raba (8%), FHB (6,1%). A legnagyobb Sharpe indexszel rendelkező portfólió két részvényből áll: 97% Raba, 3% Richter. Megfigyelhető, hogy az OTP és a MOL egyik optimális portfólióban sem szerepel. A 4.9 táblázatból leolvashatóak ezekben az esetekben is a várható hozam, szórás, VaR és ES értékek.

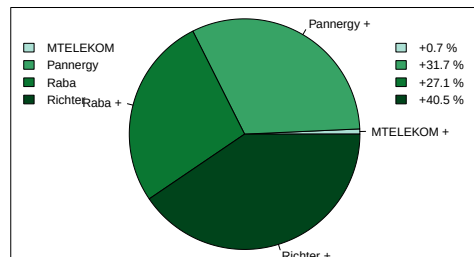
4.4.3. Összehasonlítás

A kérdés tehát az, hogy eltérő döntést hozhatunk-e abban az esetben, ha a szórás helyett az ES-t használjuk a kockázat mérésére. Ahhoz, hogy ezt meg tudjam válaszolni, a hatékony határvonal mentén kiszámoltam a súlyok eloszlását, azaz a portfólió összetételét az

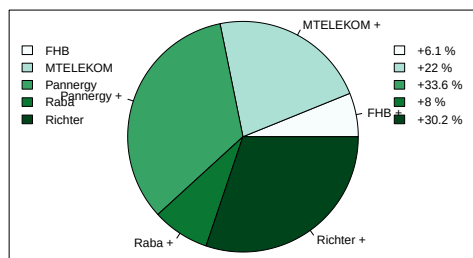
Weights
Hatékony portfólió (hozam=0%)



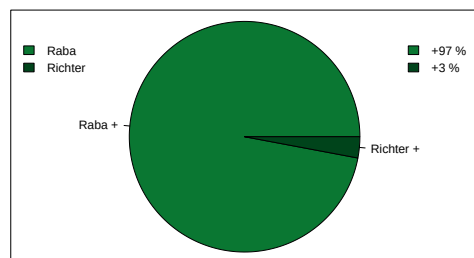
Weights
Hatékony portfólió (hozam=0,01%)



Weights
Minimum kockázatú portfólió



Weights
Maximum Sharpe indexu portfólió



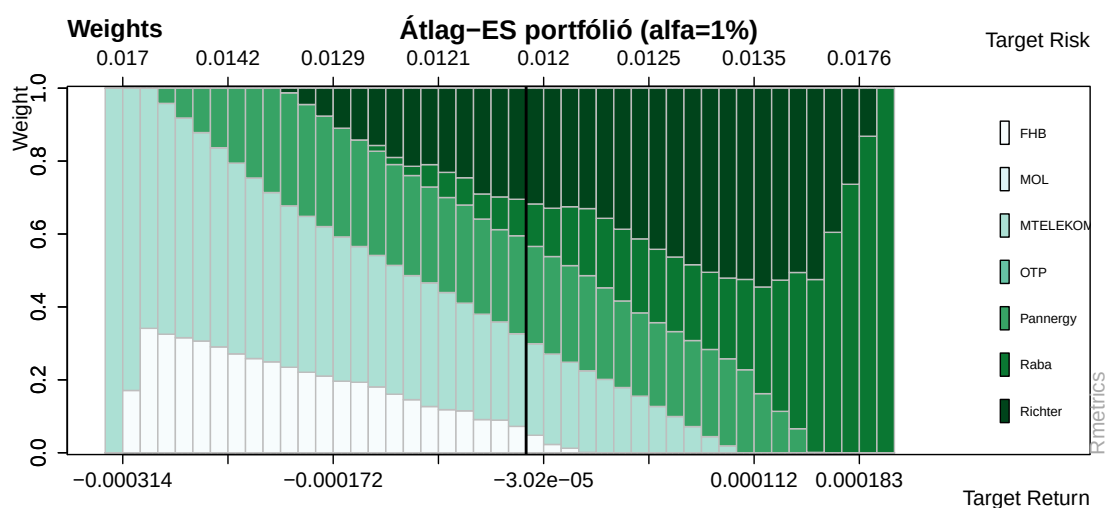
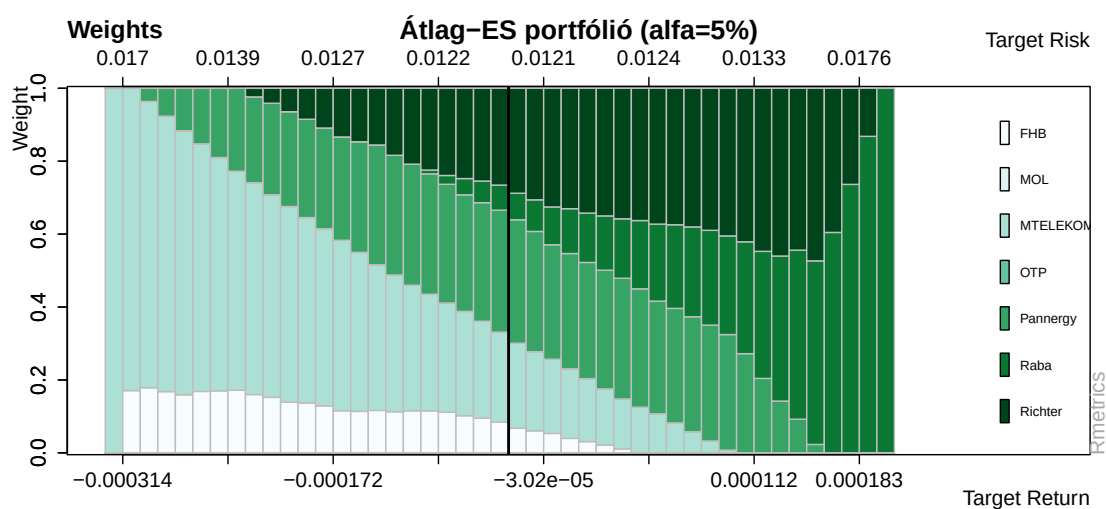
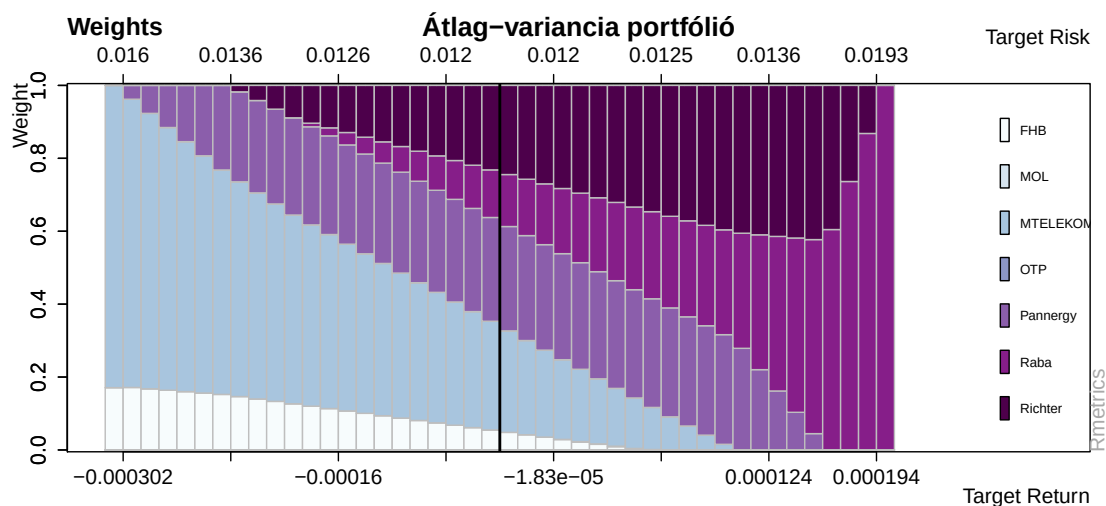
4.11. ábra. A hatékony, a minimális kockázatú és a maximális Sharpe-indexű portfóliókban a részvények súlyai az ES minimalizálása esetén ($\alpha = 0,05$)

Forrás: saját szerkesztés

átlag-variancia és átlag-ES esetében, $\alpha = 5\%$ -os és $\alpha = 1\%$ -os szinteken (4.12 ábra). A függőleges tengelyen láthatóak a súlyok, a vízszintes tengelyen lent a hozam, míg fent a kockázat értékei. Az első esetben ez a kockázat a szórás, a második két esetben pedig az ES, rendre 5%-os illetve 1%-os kockázati szinten. Az erősebb függőleges vonal jelöli a minimális kockázatú portfóliót (ez a hatékony határvonalon a piros pont).

Első ránézésre, pontosabb számítások nélkül látható, hogy a három ábra hasonló eloszlása ellenére szembetűnőek a különbségek is. Ezért a továbbiakban egy kicsit közelebbről is megvizsgálom ezen eltéréseket, csak a pozitív várható hozamra koncentrálna. Ehhez kiszámoltam egy-egy portfólió összetételét a hatékony határvonalon, rögzített hozam mellett. Negatív hozam elérését nem tűzzük ki célul és az előzőekben láttuk, hogy a legmagasabb hozam, amit ezekkel a részvényekkel elérhetünk 0,0002, azaz $0 < \text{hozam} \leq 0,0002$.

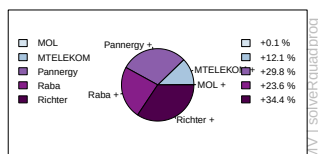
A 4.13 ábrán, az adott példákön látható, hogy eltérések tapasztalhatóak a különböző optimalizációk között. A portfólió összetétele ugyan rögzített 0,015%-os, illetve 0,01%-os hozam mellett megegyezik, de ezeknek eltér az aránya. 0,015%-os rögzített hozam esetén az optimális portfólió három részvényből áll: Raba, Richter és Pannergy (de eltérő súlyokkal), míg 0,01%-os rögzített hozam esetén négy részvényből: Richter, Pannergy, Raba és MTELEKOM (szintén eltérő súlyokkal). Ezekben a konkrét esetekben tehát, a súlyok különbözősége miatt, egy bizonyos helyzetben különbözőképpen döntenénk a portfólió összetételére vonatkozóan. Még nagyobb eltérés tapasztalható például 0,005%-os hozam rögzítése mellett, mert itt már a portfóliók összetétele sem egyezik meg. A szórás minimalizálásával kapott portfólióban öt részvény szerepel, név szerint: Richter, Pannergy, Raba, MTELEKOM, MOL. Az $ES_{0,05}$, illetve $ES_{0,01}$ minimalizálásával kapott portfólióban pedig csak négy részvény szerepel, hiszen ebben az esetben a MOL nem része az optimális portfóliónak. Vagyis látható, hogy például ebben a konkrét esetben is eltérő döntést hoznánk a kockázati mérték megválasztásának függvényében, nem csak a portfólióban szereplő részvények súlyára, hanem az optimális portfólió összetételére vonatkozóan is.



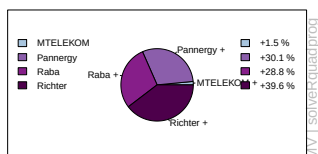
4.12. ábra. A súlyok alakulása az átlag-szórás portfólió, átlag-ES portfólió $\alpha = 0,05$ és $\alpha = 0,01$ esetén a hatékony határvonal mentén

Forrás: saját szerkesztés

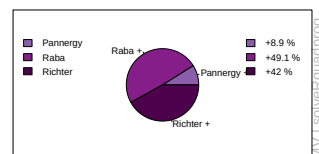
Súlyok
Átlag–variancia portfólió (hozam=0,005%)



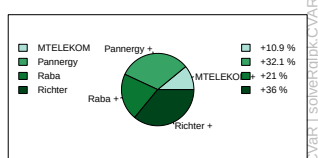
Súlyok
Átlag–variancia portfólió (hozam=0,01%)



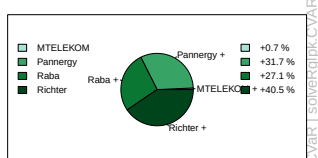
Súlyok
Átlag–variancia portfólió (hozam=0,015%)



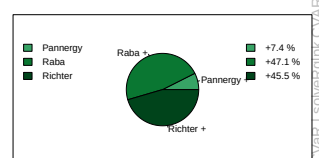
Súlyok
Átlag–ES (alfa=5%) portfólió (hozam=0,005%)



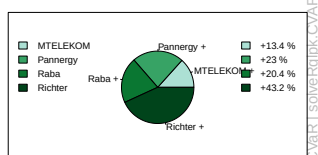
Súlyok
Átlag–ES (alfa=5%) portfólió (hozam=0,01%)



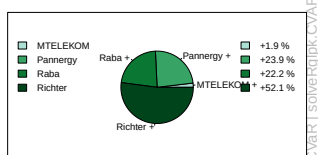
Súlyok
Átlag–ES (alfa=5%) portfólió (hozam=0,015%)



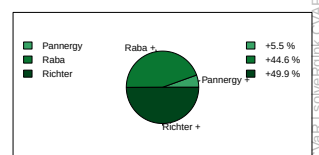
Súlyok
Átlag–ES (alfa=1%) portfólió (hozam=0,005%)



Súlyok
Átlag–ES (alfa=1%) portfólió (hozam=0,01%)



Súlyok
Átlag–ES (alfa=1%) portfólió (hozam=0,015%)



4.13. ábra. A súlyok alakulása az átlag–szórás portfólió, átlag-ES portfólió $\alpha = 0,05$ és $\alpha = 0,01$ esetén a hatékony határvonal mentén különböző rögzített hozamok mellett.

Forrás: saját szerkesztés

4.5. A kopulafüggvény hatása a kockázatszámítás pontosságára

Ahogy arra már az elméleti bevezetőben is utaltam a diverzifikáció fontos szerepet játszik a kockázat csökkentésében. Míg a VaR nem, addig az ES támogatja ezt. A problémát viszont az okozhatja, ha bizonyos esemény hatására a portfólióban lévő részvények, vagy azok egy része ugyanúgy viselkedik, azaz egyszerre kezd el növekedni vagy csökkenni. Ez kiolthatja a diverzifikáció „védelmező” hatását. Ezért kell nagy hangsúlyt fektetni a függőségi struktúra vizsgálatára. A fejezet további részében tehát én is arra keresem a választ, hogy van-e és milyen függőségi struktúra a részvények között, illetve, hogy ennek segítségével hogyan lehetne kiszámítani a kockázat (VaR és ES) értékét. Továbbá, hogy az így kiszámított értékek jobb megközelítései-e a valóságnak, mint az eddig bemutatott módszerek által számított értékek.

4.5.1. Páronkénti korreláció

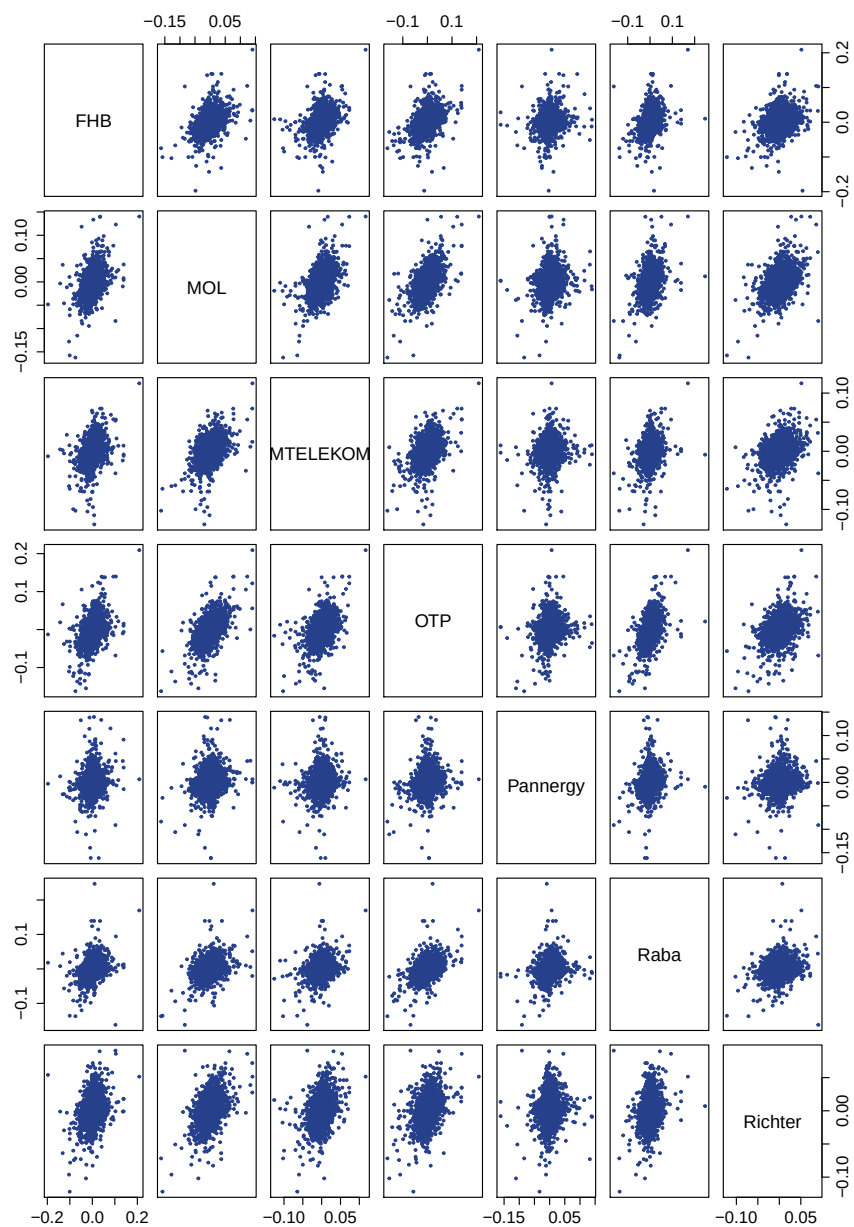
A korreláció vizsgálatát az adatok páronkénti ábrázolásával kezdtem. Az eredmény a 4.14 ábrán látható. A pontfelhők alapján megállapítható, hogy a részvények logaritmikus hozamai nem függetlenek, valamiféle korreláció áll fenn minden pár között.

A vizuális megjelenítés mellett természetesen számszerűleg is kiszámolható a Pearson, Kendall és Spearman korrelációs együttható értéke, a (2.33), (2.35) és (2.37) egyenleteket felhasználva. Az eredmények a 4.15 ábrán láthatóak. A korreláció értéke minden esetben pozitív, tehát egyértelműen látszik, hogy a hét részvény nem független egymástól. A legszorosabb korreláció az OTP és a MOL között mérhető mind a három korrelációs együttható alapján, valamint az is megfigyelhető, hogy a Pannergy szinte független az összes többi részvénytől, hiszen nullához közeli korrelációs értékeket számoltam.

4.5.2. Kopula

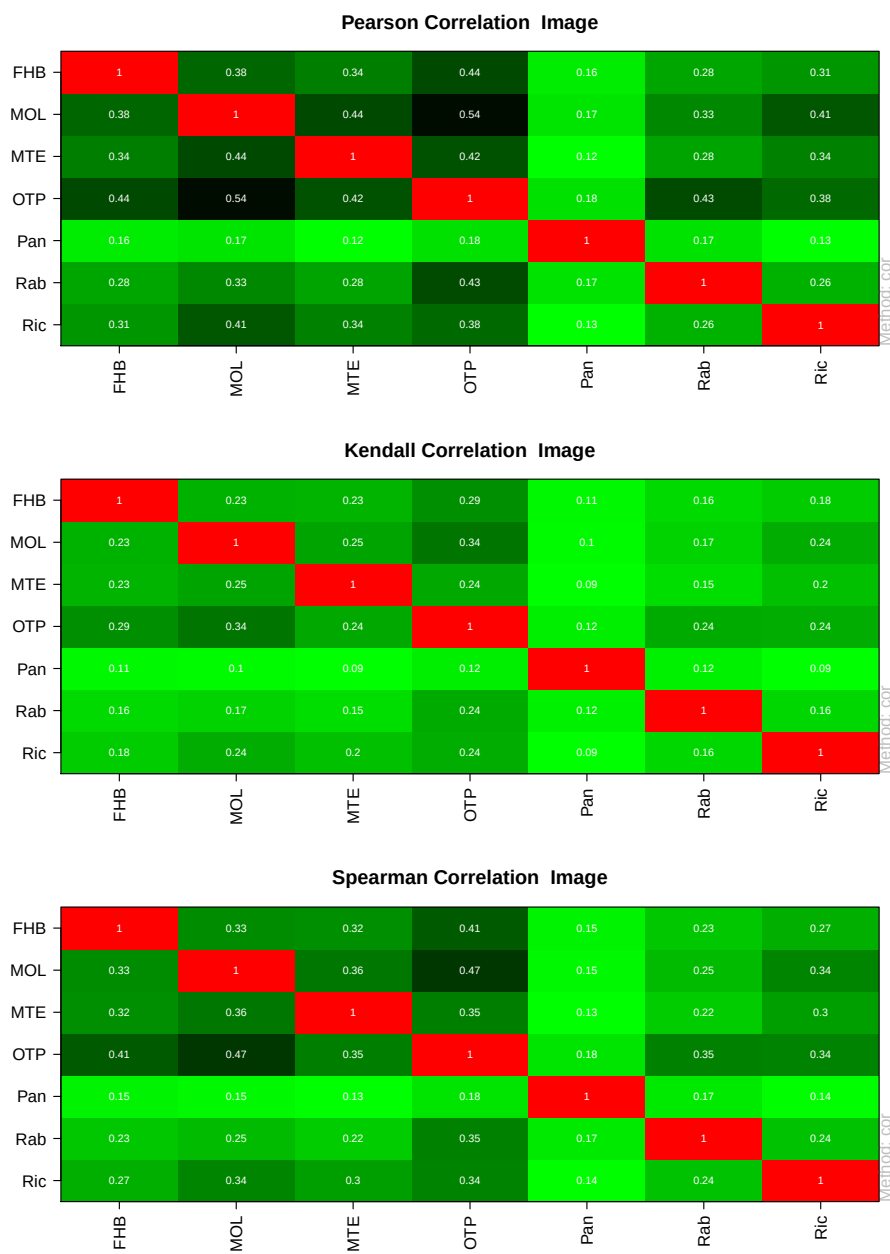
A részvények közötti korreláció pontosabb vizsgálata a kockázat meghatározása szempontjából igen fontos. Ehhez viszont a páronkénti korreláció mérésénél többre van szükség. A kettőnél magasabb dimenziójú korrelációt pedig, a kopula függvényekkel tudjuk leírni.

A fejezet célja számításokkal is alátámasztani, vagy esetleg megcáfolni azt az állítást, miszerint



4.14. ábra. Részvények logaritmikus hozamainak páronkénti ábrázolása

Forrás: saját szerkesztés



4.15. ábra. A Pearson, Kendall és a Spearman korreláció értékei

Forrás: saját számítás

a kopulafüggvény a kockázatszámítás hatékonyságát javíthatja. Ez alatt azt értem, hogy ha a történeti szimuláció helyett a kopula függvények segítségével számítjuk ki a VaR illetve az ES értékét, pontosabb kockázati értéket kapunk. Pontosabbnak, illetve jobbnak továbbra is akkor nevezek egy kockázati mértéket, ha a tényleges és a becsült érték minél közelebb van egymáshoz. Ez az előzőekhez hasonlóan az utótesztelés módszerével ellenőrizhető. Most is a 4.3 fejezetben leírtaknak megfelelően fogok eljárni. Azaz először tekintem az első idő-ablakot és ennek felhasználásával megbecsülöm a következő napi kockázatot, majd ezt a kockázatot összehasonlítom a valódi hozam értékével. Ezt a folyamatot ismétlem minden idő-ablakon végiglépkedve. A kockázat kiszámításához pedig most a kopula függvényen alapuló Monte Carlo szimulációt fogom használni.

A kopulán alapuló Monte Carlo szimuláció segítségével végzett kockázatszámítás lépései a következők (XU – CHEN, 2012):

1. A kopula modell kiválasztása (Gauss, Student, Arkhimédeszi stb.)
2. A peremeloszlások kiválasztása és ezen eloszlások paramétereinek a becslése
3. Az adatok átranszformálása a kopula függvény értelmezési tartományába
4. Kopula függvény illesztése a (transzformált) adatokra, valamint ezen kopulafüggvény paramétereinek becslése
5. A becsült kopulafüggvénynek megfelelő együttes sűrűségfüggvénnyel rendelkező véletlen változók generálása
6. A peremeloszlások inverz függvényét használva véletlen változók generálása
7. A szimulált adatok segítségével a portfólió nyereségének/veszteségének a kiszámítása
8. Az 1-7. lépések ismétlése annyiszor, hogy a szimulált eloszlás megfelelően közel legyen a „valódi” eloszláshoz
9. VaR és ES kiszámítása az eloszlásfüggvény segítségével

A következőkben ezen lépéseket fejtem ki részletesebben a saját adatokra és jelölésrendszerre átültetve. A lépések kifejtésénél DEUSS, 2009 cikkére támaszkodom. Mivel egyben utótesztelést is végzek, így ezt a kilenc lépést minden egyes idő-ablakokra el kell végezni és a

feltételeknek minden egyes idő-ablakra igaznak kell hogy legyenek. Az utótesztelésről a 4.3 fejezetben írtam részletesebben. A kilenc lépést az első idő-ablakra mutatom be.

1. A kopula modell kiválasztása

Az elemzést az implicit kopulák közül a Gauss és a Student kopulával, az explicit kopulák közül pedig a Frank, Clayton és Gumbel kopulákkal szeretném elvégezni. Ezen kopulák részletes leírása megtalálható a 2.2.4 részfejezetben. A Gumbel kopulát viszont már az elején ki kell zárni az elemzésből, hiszen ennek a kopulának a paramétere $\Theta \geq 1$. Ez azt jelenti - a (2.65) képletet használva -, hogy a Kendall-féle tau értéke nulla és egy közé esik. Vagyis, csak pozitívan korrelált adatok esetén alkalmazható, és ennek igaznak kell lennie minden idő-ablak esetén. Az első idő-ablak vizsgálatakor kiderül, hogy a Raba és a Pannergy között a Kendall-féle tau értéke -0,004, ami kizárja a Gumbel kopula használatának a lehetőségét. Így tehát az elemzést a Gauss, Student-féle t, Frank és Clayton kopulákkal végzem el.

2. A peremeloszlások kiválasztása és ezen eloszlások paramétereinek a becslése

Az elemzés során az empirikus eloszlásfüggvényt fogom használni a portfólióban lévő minden egyes részvény eloszlásának becslésére. Ezek az eloszlások a peremeloszlások. Az empirikus eloszlásfüggvényeket minden egyes idő-ablak esetén meg kell határozni.

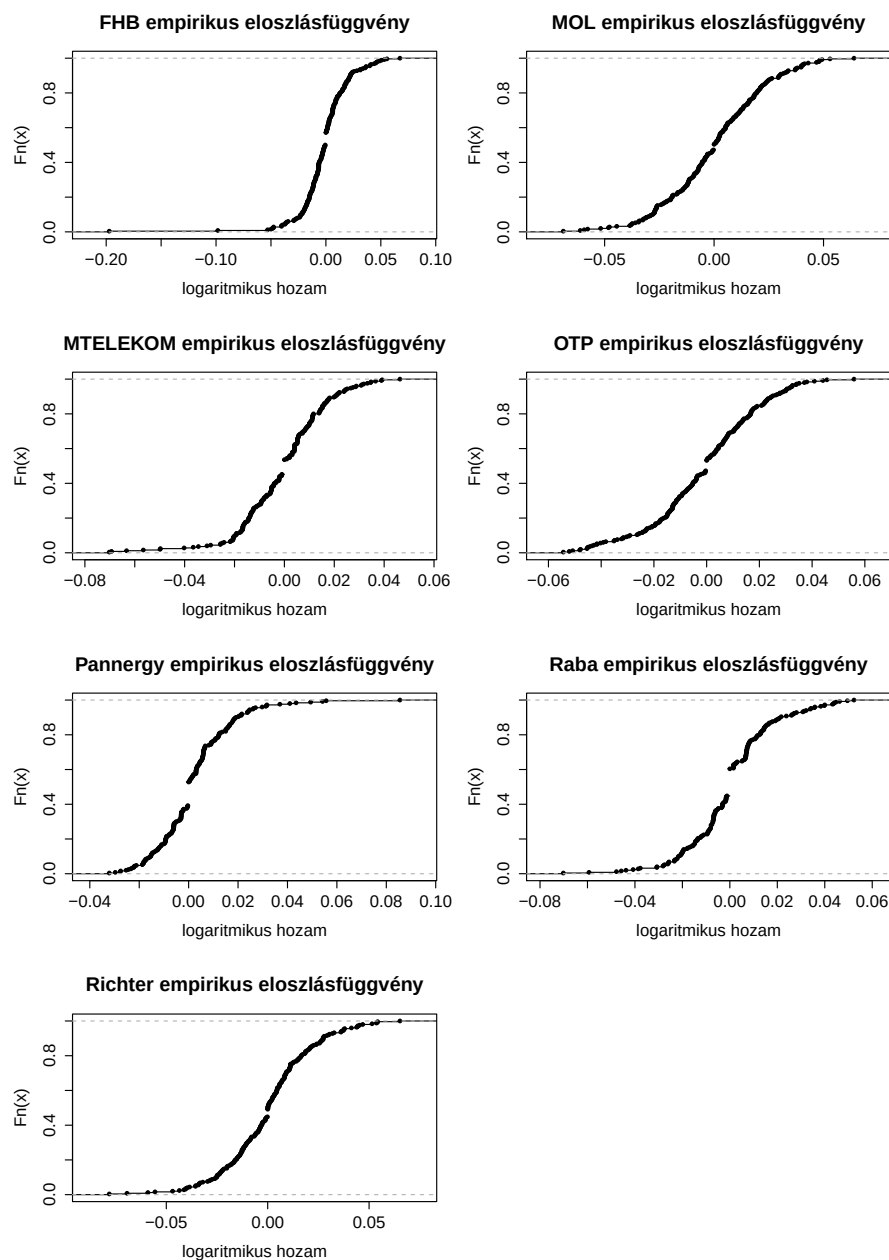
Jelölje $r_{t,i}$ az i -edik ($i = 1, \dots, n$) részvény t -edik ($t = 1, \dots, T$) időpontjához tartozó logaritmusos hozam értékét. Ekkor az első idő-ablakhoz ($t = 1, \dots, 250, i = 1, \dots, 7$) tartozó adatmátrix a következő alakot ölti:

$$R_1 = \begin{bmatrix} r_{1,1} & r_{1,2} & \dots & r_{1,7} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ r_{250,1} & r_{250,2} & \dots & r_{250,7} \end{bmatrix}.$$

Ebben az idő-ablakban az i -edik részvény empirikus eloszlásfüggvénye:

$$F_i(x) = \widehat{F}_{\{r_{1,i}, \dots, r_{250,i}\}}(x) := \frac{1}{T+1} \sum_{t=1}^{250} \mathbf{1}_{\{r_{t,i} \leq x\}}(x). \quad (4.30)$$

A (4.30) egyenletben szereplő $\frac{1}{T+1}$ faktorra azért van szükség, mert így az eloszlásfüggvényt mesterségesen egy alatt tarthatjuk ($F_i(x) \in [0, 1)$), hiszen az problémákat okozhat a későbbiekben a számításoknál (DEUSS, 2009). A 4.16 ábrán láthatóak az első 250 napra vonatkozó empirikus eloszlásfüggvények.

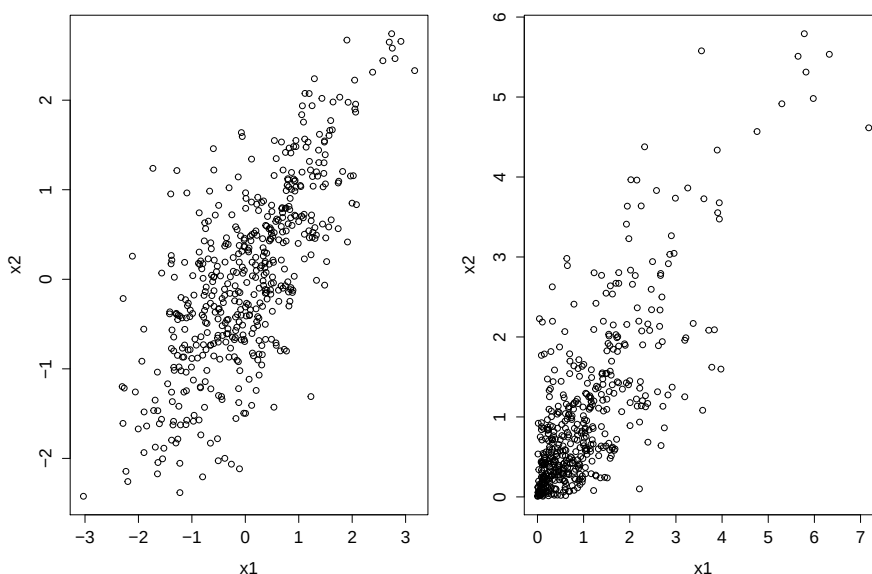


4.16. ábra. A hét részvény első 250 napjára vonatkozó empirikus eloszlásfüggvények

Forrás: saját szerkesztés

3. Az adatok átttranszformálása a kopula függvény értelmezési tartományába

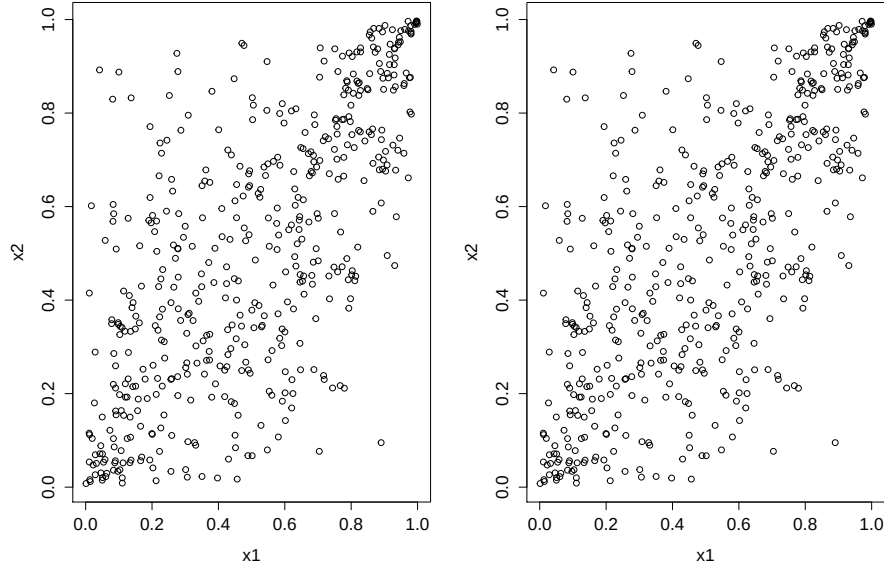
A következőekben egy Embrechtstől (EMBRECHTS – HOFERT, 2014) származó példán mutatom be, hogy miért is fontos ez a lépés, azaz az adatok átttranszformálása egyenletes peremeloszlásúvá. A 4.17 ábrán két 500 elemű adathalmazt láthatunk, F_1 és F_2 peremeloszlásokkal. Az elsőn F_1 és F_2 standard normális eloszlásfüggvények: $F_1(x) = F_2(x) = \phi(x)$, míg a másodikon standard exponenciális eloszlást követnek: $F_1(x) = F_2(x) = 1 - \exp(-x)$. Első ránézésre a két ábra között semmi összefüggés nem látható. A probléma viszont az, hogy a két ponthalmaz teljesen más skálán mozog, ezért az összehasonlítás lehetetlenné válik. Ahhoz, hogy valóban össze tudjuk hasonlítani a két eloszlást át kell transzformálni a peremeloszlásokat standard egyenletes eloszlásúvá. Tudjuk, hogy ha $X_j \sim F_j$ és F_j folytonos, akkor $F_j(X_j) \sim U[0, 1]$. A transzformáció eredménye a 4.18 ábrán látható. Így már össze lehet hasonlítani a két ábrát és észrevehető, hogy a kettő teljesen ugyanaz. Mivel a peremeloszlások standard egyenletes eloszlásúak, így a 4.18 ábrán egy mintát láthatunk az $(U_1, U_2) = (F_1(X_1), F_2(X_2)) \sim C$ kopulára.



4.17. ábra. Standard normális peremeloszlásokkal (balra), illetve standard exponenciális peremeloszlásokkal (jobbra) rendelkező 500 elemű minta

Forrás: saját szerkesztés, EMBRECHTS – HOFERT, 2014 alapján

A gyakorlatban az F_1 és F_2 peremeloszlások nem ismertek. Ilyenkor, mint ahogy már említettem, az empirikus eloszlásfüggvény használható a függőségi struktúra vizsgálatára. Így kapható meg az úgynevezett *pseudo-megfigyelés* (*pseudo-observation*):



4.18. ábra. A 4.17 ábrán generált minta átttranszformálásával képzett 500 elemű minták

Forrás: saját szerkesztés, EMBRECHTS – HOFERT, 2014 alapján

$$\begin{aligned}
 U_1 &= \begin{bmatrix} F_1(r_{1,1}) & \dots & F_7(r_{1,7}) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ F_1(r_{250,1}) & \dots & F_7(r_{250,7}) \end{bmatrix} = \frac{1}{T+1} \begin{bmatrix} \text{rank}(r_{1,1}) & \dots & \text{rank}(r_{1,7}) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \text{rank}(r_{250,1}) & \dots & \text{rank}(r_{250,7}) \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} u_{1,1} & \dots & u_{1,7} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ u_{250,1} & \dots & u_{250,7} \end{bmatrix}.
 \end{aligned} \tag{4.31}$$

A (4.31) egyenletben felhasználtam, hogy az empirikus eloszlásfüggvényt az

$$\widehat{F}_i(r_{t,i}) = \frac{\text{rank}(r_{t,i})}{T+1} \tag{4.32}$$

formulával közelíthetjük, ahol $\text{rank}(r_{t,i})$ az i -edik részvény t -edik elemének a rangja az adott részvény logaritmikus hozamai alapján számítva. Az inverz eloszlásfüggvény módszer alapján pedig láthatjuk, hogy az így generált pszeudo-megfigyelések eloszlása egyenletes a $[0, 1]$ intervallumon.

4. Kopula függvény illesztése a (transzformált) adatokra, valamint ezen kopulafüggvény paramétereinek becslése

A (megfelelő) kopula paramétereinek becsléséhez az úgynevezett *kanonikus maximum likelihood módszert* (*canonical maximum likelihood method*, CML) használok, hiszen ez a

becslési módszer az empirikus peremeloszlás függvényeken alapszik. Ennek segítségével meg lehet becsülni a kopula paramétereket anélkül, hogy specifikálni kellene a peremeloszlásokat és azok paramétereit (YAN, 2007).

Jelölje az egyes $F_i, i = 1, \dots, n$ peremeloszlás függvény paramétereit $\theta_i = (\theta_i^1, \theta_i^2, \dots)$, jelölje továbbá $\theta = (\theta^1, \theta^2, \dots)$ a választott C kopula paramétereit. Ekkor Sklar tétele (2.50) a következő formában terjeszthető ki (DEUSS, 2009):

$$F(x_1, \dots, x_n, \theta_1, \dots, \theta_n, \theta) = C(F_1(x_1, \theta_1), \dots, F_n(x_n, \theta_n), \theta). \quad (4.33)$$

Például, ha a peremeloszlások normális eloszlást követnek, akkor ezeknek két paraméterük van: az átlag és a szórás. Ha egy kopulát illesztünk ezen adatokra, akkor további paraméter becslésére van szükség, ami például a Gauss kopula esetében a korrelációs mátrix ((2.54) összefüggés). Mindezeket alapul véve és az együttes eloszlás sűrűségfüggvényét ((2.52) egyenlet) felhasználva a kopula modell likelihood függvénye az első idő-ablakra és a konkrét logaritmikus hozamokra vonatkozóan:

$$L(r_1, \dots, r_{250}, \theta_1, \dots, \theta_7, \theta) = \prod_{t=1}^{250} c(F_1(r_{t,1}, \theta_1), \dots, F_7(r_{t,7}, \theta_7), \theta) \prod_{i=1}^7 f_i(r_{t,i}, \theta_i), \quad (4.34)$$

ahol $r_i = (r_{1,i}, \dots, r_{250,i})$, valamint f_i az i -edik ($i = 1, \dots, n$) részvény sűrűségfüggvénye. A (4.34) egyenlet logaritmus adja a log-likelihood függvényt:

$$l(r_1, \dots, r_{250}, \theta_1, \dots, \theta_7, \theta) = \sum_{t=1}^{250} \ln c(F_1(r_{t,1}, \theta_1), \dots, F_7(r_{t,7}, \theta_7), \theta) \prod_{i=1}^7 f_i(r_{t,i}, \theta_i). \quad (4.35)$$

Mivel az empirikus eloszlásfüggvényekkel számolok, azért a peremeloszlások paramétereinek becslését nem kell elvégezni, hiszen azok nem függnek a paraméterektől (DEUSS, 2009). Így a log-likelihood függvény az

$$\widehat{l}(r_1, \dots, r_{250}, \theta) = \sum_{t=1}^{250} \ln c(F_1(r_{t,1}), \dots, F_7(r_{t,7}), \theta) \quad (4.36)$$

alakban írható.

Összefoglalva ez azt jelenti, hogy a kopulaparaméter a következőképpen becsülhető:

$$\widehat{\theta} = \arg \max_{\theta \in \Theta} \sum_{t=1}^{250} \ln c(u_{t,1}, \dots, u_{t,7}, \theta), \quad (4.37)$$

ahol Θ jelöli a modell szempontjából lehetséges paraméterek halmazát.

5. A becsült kopulafüggvénynek megfelelő együttes sűrűségfüggvénnyel rendelkező véletlen változók generálása

Sklar tétele alapján tudjuk, hogy

$$C(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n)) = F(x_1, \dots, x_n). \quad (4.38)$$

Tegyük fel, hogy a peremeloszlások folytonosak és így létezik az inverzüik: $F_i^{-1}, i = 1, \dots, n$. Vezessük be továbbá a $F_i(x_i) := v_i$ jelölést, és így $x_i = F_i^{-1}(v_i)$. Ezen jelölések felhasználásával a (4.38) egyenlet a következőképpen írható:

$$C(v_1, \dots, v_n) = F\left(F_1^{-1}(v_1), \dots, F_n^{-1}(v_n)\right). \quad (4.39)$$

Ebben az esetben tehát a $v = (v_1, \dots, v_n)$ vektor eloszlása a C kopulafüggvénynek megfelelő.

6. A peremeloszlások inverz függvényét használva véletlen változók generálása

A v vektorból a peremeloszlások inverz függvényét használva megkapható az $x_1, \dots, x_n$ szimulált logaritmikus hozam minden egyes részvény esetén (a következő napra vonatkozóan), hiszen: $x_1 = F_1^{-1}(v_1) = F_1^{-1}(F_1(x_1)), \dots, x_n = F_n^{-1}(v_n) = F_n^{-1}(F_n(x_n))$.

7. A szimulált adatok segítségével a portfólió nyereségének vagy veszteségének a kiszámítása

A 6. pontban megkapott, szimulált értékek a 251. nap logaritmikus hozamainak a becslései, minden egyes részvény esetében. Ezen értékeket és a 250. napnak az árfolyamát ismerve a (3.17) egyenlet alapján kiszámolható a részvények 251. napra becsült ára:

$$P_{251,i} = P_{250,i} \exp(x_{251,i}),$$

ahol $P_{t,i}$ jelöli az i -edik részvény t -edik napi árát, $x_{t,i}$ pedig az i -edik részvény t -edik napra becsült logaritmikus hozamát. Tehát az első idő-ablak esetén $x_{250,i}$ a 6. pontban szimulált értékeknek felel meg, azaz $x_{251,i} := x_i$. $P_{250,i}$, azaz az „előző” napi ár a történeti adatokból származik.

A részvények áraiból pedig kiszámolható azon portfólió logaritmikus hozama, amely minden egyes részvényből pontosan egyet tartalmaz ((3.28) egyenlet):

$$R_{251}^L = \ln\left(\frac{S_{251}}{S_{250}}\right),$$

ahol ebben az esetben $S_t = \sum_{i=1}^n P_{t,i}$.

8. Az 1-7. lépések ismétlése annyiszor, hogy a szimulált eloszlás megfelelően közel legyen a „valódi” eloszláshoz

Irodalmi utalások és előzetes saját számítások alapján úgy gondolom, hogy a szimulációt 6000-szer ismételve a „tényleges” és a szimulált eloszlás között az eltérés minimális és a program eléggé stabil.

9. VaR és ES kiszámítása az eloszlásfüggvény segítségével

A 8. pontban generált eloszlásból kiszámítható a VaR és az ES értéke.

A fent bemutatott kilenc pontot végig kell számolni minden egyes idő-ablak esetén, majd a 4.3 fejezetben részletesen tárgyalt utótesztelés módszerével letesztelhető a szimuláció pontossága, hatékonysága, mind a VaR, mind pedig az ES esetében.

A szimuláció megírásához ismételten az R programot, azon belül is a 'copula' programcsomagot (HOFERT et al., 2014) használtam. A program az C.3 függelékben található, míg az eredményeket a 4.10 táblázatban foglaltam össze. A táblázatban 5%-os, 2,5%-os és 1%-os szinten látható a kopula függvény segítségével végzett Monte Carlo szimuláció utótesztelésének az eredménye VaR és ES esetén.

4.10. táblázat. Kopulán alapuló Monte Carlo szimuláció utótesztelésének eredményei

kopula \ alfa	VaR			ES		
	5%	2,5%	1%	5%	2,5%	1%
Gauss	5,7749%	3,3121%	1,5287%	4,9875%	2,4867%	0,9858%
Clayton	5,6900%	2,9299%	1,1890%	4,9880%	2,4872%	0,9862%
Frank	6,4112%	3,9490%	1,9958%	4,9872%	2,4865%	0,9856%
Student	5,9023%	3,3121%	1,4013%	4,9877%	2,4870%	0,9861%

Forrás: saját számítás

Mivel a módszer pontosságát az határozza meg, hogy a szimuláció segítségével kapott alfa értékek milyen közel vannak az elméleti (eredeti) alfa értékekhez, ezért a 4.11 táblázatban feltüntettem az adott négy kopula és három kockázati szint mellett ezeket az eltéréseket is, a VaR és az ES esetén.

4.11. táblázat. Kopulán alapuló Monte Carlo szimuláció utótesztelés-eredményeinek eltérése az elméleti értékektől

		VaR			ES		
kopula \ alfa		5%	2,5%	1%	5%	2,5%	1%
Gauss		0,7749%	0,8121%	0,5287%	0,0125%	0,0133%	0,0142%
Clayton		0,6900%	0,4299%	0,1890%	0,0120%	0,0128%	0,0138%
Frank		1,4112%	1,4490%	0,9958%	0,0128%	0,0135%	0,0144%
Student		0,9023%	0,8121%	0,4013%	0,0123%	0,0130%	0,0139%

Forrás: saját számítás

A 4.11 táblázatból kiderül, hogy mind a VaR mind pedig az ES esetén, minden alfa szinten a legjobb közelítést a négy kopula függvény közül a Clayton kopula adja. A legrosszabbnak pedig a Frank kopula bizonyult, mindkét kockázati mérték és minden alfa szint esetén. Általában pénzügyi területen a normál kopulánál a t-kopula hasznosabbnak bizonyul, hiszen a t-kopula vastagabb farokkal rendelkezik, mint a normál kopula. Az adatok a legtöbb esetben nem normális eloszlásból származnak és problémát jelent az extrém események modellezése. Ezek az extrém események általában többször fordulnak elő a valóságban, mint ahogy azt a normális eloszlás feltételezi. A saját adataimon kiszámolt értékek is ezt támasztják alá. Látható, hogy a Gauss kopula csak 5%-os szinten és csak a VaR esetén bizonyult jobbnak a t-kopulánál. A szélekben és az ES esetén a t-kopula pontosabban modellezi a kockázatot.

Ha a VaR-et hasonlítom össze az ES-al azt tapasztalom, hogy az ES minden kopula és minden alfa szint esetén sokkal pontosabb, jobb kockázati mértéknek bizonyul, ami ismét az ES használatát erősíti a VaR-el szemben.

Az előzőekben tehát bemutattam, hogy bizonyos kopulák pontosabb, míg mások kevésbé pontos modellezését adják a valóságnak. Az is kiderült, hogy az ES minden esetben jobbnak bizonyult a VaR-nál a kopulán alapuló szimuláció esetében. Viszont egy további fontos kérdés, hogy a kopulán alapuló szimuláció jobb közelítése-e a valóságnak mint például a történeti szimuláción alapuló (4.3 fejezet). Az összehasonlítás megkönnyítése céljából az eredmények összefoglalva a VaR esetén a 4.12, míg ES esetén a 4.13 táblázatban láthatóak. Mindkét táblázatban a számok az elméleti és a számítások segítségével közelített alfa értékek közötti

eltéréseket mutatják.

4.12. táblázat. A kopulán és a történeti szimuláción alapuló kockázatszámítás eredményei a kockáztatott érték esetén

		VaR				
modell alfa		Gauss	Clayton	Frank	Student	Történeti
5%		0,7749%	0,6900%	1,4112%	0,9023%	0,1761%
2,5%		0,8121%	0,4299%	1,4490%	0,8121%	0,2153%
1%		0,5287%	0,1890%	0,9958%	0,4013%	0,2728%

Forrás: saját számítás

4.13. táblázat. A kopulán és a történeti szimuláción alapuló kockázatszámítás eredményei az expected shortfall esetén

		ES				
modell alfa		Gauss	Clayton	Frank	Student	Történeti
5%		0,0125%	0,0120%	0,0128%	0,0123%	0,0149%
2,5%		0,0133%	0,0128%	0,0135%	0,0130%	0,0775%
1%		0,0142%	0,0138%	0,0144%	0,0139%	0,1712%

Forrás: saját számítás

A VaR esetében azt tapasztaltam, hogy a legtöbb esetben a történeti szimuláció pontosabb képet ad a kockázatról, mint a kopula segítségével végzett Monte Carlo szimuláció. Az általam használt adatok esetében a kopula módszer egy esetben bizonyult jobbnak: a Clayton kopula esetén, $\alpha = 1\%$ -os szinten. Ebben az esetben tehát, a tekintett négy kopula közül a legjobbnak számító Clayton kopula segítségével pontosabb képet kaptam az extrém események alakulásáról (melynek mérése igen nehéz feladat), valamint a kockázatról, mint a történeti szimuláció segítségével.

Az ES esetében már sokkal egyértelműbb eredmények születtek. Mind a négy kopula modell, mind a három alfa szinten pontosabban becsülte meg a kockázatot, mint a történeti szimulációval végzett kockázatszámítás.

5. fejezet

Következtetések, javaslatok

Kutatásaim célja az volt, hogy megvizsgáljam, hogy milyen módszerekkel lehetne mérni, modellezni, jellemezni minél pontosabban egy portfólió kockázatát. Úgy gondolom, hogy az egyik legnehezebb feladatot az elmélet és a gyakorlat összehangolása jelenti. A precíz matematikai leírást megtartva, azokat gyakorlati számításokkal alátámasztva, a portfólió kockázat pontosabb mérésének kutatásán belül a következő hipotéziseket vizsgáltam:

H1. Az egyszerű vagy a logaritmikus hozam használata nem befolyásolja a vizsgálati eredményeket

A valóság minél pontosabb modellezése fontos szerepet játszik döntéseink meghozatalában. A jövő előrejelzése segít egy konkrét döntési helyzetben meghozni a megfelelő döntést. A döntés meghozatalához pedig mérlegelnünk kell különböző lehetőségek közül. Ezért nagyon fontos, hogy a modellek, számítások egymással összehasonlíthatóak legyenek. Például a részvények árait nem tudjuk összehasonlítani, mert azok különböző tartományokban mozognak. Ahhoz, hogy számításokat tudjunk végezni és következtetéseket tudjunk levonni „közös skálán” kell őket mérni. Az árak helyett tehát a hozamokat használjuk. Kétféle hozamot vizsgáltam és hasonlítottam össze: az egyszerű és logaritmikus hozamot. Bebizonyítható hogy ezen kétféle hozam értékei egymáshoz közeli értékek. Így felvetődik a kérdés, hogy tulajdonképpen mindegy, hogy melyiket használjuk a számításokhoz. A gyakorlati elemzésemből kiderül, hogy eltérő kockázati sorrendet eredményezhet az egyik illetve másik hozam típus használata, amely így ugyanabban a döntési helyzetben különböző döntéshez vezetne.

H2. A kockáztatott érték (VaR) helyett a várható veszteség (expected shortfall) a kockázat pontosabb mérését teszi lehetővé

Elméleti és gyakorlati számítások alapján is azt tapasztaltam, hogy a használt kockázati mértékek mindegyike rendelkezik olyan tulajdonsággal, amely esetlegesen a kockázat téves megítéléséhez vezethet. A kockázatotott értéket nagyon sok kritika érte, hiszen például nem veszi figyelembe a VaR-on túli értékeket és a diverzifikációt sem támogatja, így nem alkalmas a kockázat mérésére. Ezzel szemben az expected shortfall egy koherens kockázati mérték, azaz a kockázati mértékekkel szemben felállított követelményeknek eleget tesz. Az úgynevezett utótesztelés módszerével ellenőrizhetjük le azt, hogy egy adott kockázati mértékkel mennyire pontosan tudjuk előrejelezni a kockázatot. A történeti utótesztelés eredménye a tekintett öt kockázati szint közül egyben találta csak jobbnak a VaR-et. Így az elméleti és a gyakorlati eredményeket (abszolút és relatív hibák) is összevetve úgy gondolom, hogy az ES pontosabb képet ad a kockázatról, mint a VaR.

H3. A hagyományos hozam-variancia kritérium helyett a hozam-expected shortfall kritérium használata megváltoztatja az optimális portfólió összetételét

A modern portfólió optimalizáció alapjainak letétele Markowitz nevéhez fűződik, aki a portfólió kockázatát a variancia segítségével számította ki. Az optimalizáció során a cél adott hozam mellett egy olyan portfólió összeállítása aminek a kockázata minimális, illetve adott kockázat mellett a maximális hozamú portfólió összetételének meghatározása. Mivel láthattuk, hogy a variancia nem alkalmas a kockázat mérésére, felmerül a kérdés, hogy milyen hatással van az optimalizációra, ha a variancia helyett az expected shortfall-t használjuk. Az optimalizációt elvégeztem az ES esetén $\alpha = 5\%$ -os és $\alpha = 1\%$ -os szinten is. Az optimális portfóliók hatékony határvonal mentén történő összehasonlítása alapján az tapasztalható, hogy az elérni kívánt hozam függvényében más és más lehet a portfólió összetétele, illetve az összetétel aránya a különböző alfa szintek, illetve kockázati mérték használata esetén. Ez pedig természetesen megváltoztathatja a portfólió összetételére vonatkozó döntéseinket.

H4. A kockázatszámítás pontosságát a kopula függvény javítja

A kockázatszámítás szempontjából nagyon fontos megvizsgálni a portfólióban szereplő eszközök kapcsolatát, függőségi struktúráját. Hiába diverzifikálunk a kockázat csökkentése érdekében, ha egy bekövetkezett esemény hatására a portfólióban szereplő eszközök, vagy azoknak egy része ugyanúgy viselkedik, kioltva ezzel a diverzifikáció hatását. A kopula függvények használatával viszont fényt deríthetünk ezekre az összefüggésekre, ami a kockázat pontosabb modellezéséhez vezethet. A kopula függvények segítségével végzett szimuláció alapú kockázatszámítás szintén az utótesztelés módszerével tesztelhető. Az eredményeket

összehasonlítva a történeti szimuláció esetével, tapasztalható volt, hogy a kopulafüggvény segíthet pontosabb képet alkotni a kockázatról.

További kutatások témája lehetne mindazonáltal egy, az általam használt kopuláknál, jobb, pontosabb kopula-modell felállítása. Hasznos lenne továbbá az eddig ismert kockázati mértékeknel is kevesebb negatív tulajdonsággal rendelkező mérőszám a kockázat mérésére. Az extrém események hatásának részletesebb, pontosabb tanulmányozása is pontosíthatja a kockázatszámítást és az előrejelzést. (Ezzel az úgynevezett Extreme Value Theory foglalkozik.) Természetesen izgalmas és érdekes kutatási témákat, kérdéseket és eredményeket vethet fel a kopulaelmélet pénzügyi területen túli alkalmazása.

Itt jegyezném meg továbbá, Donnelly és Embrechts (DONNELLY – EMBRECHTS, 2010) gondolataival egyetértésben, hogy a matematikai eszközök és modellek alkalmazásával a gyakorlatban nagyon körültekintően kell(ene) bánni. Fontos a modell egyértelmű, matematikailag korrekt leírása, valamint az alkalmazás előtti megértése. Figyelembe kell venni továbbá az alkalmazhatóság feltételeit. (Például a geometria Brown-mozgáson alapuló szimuláció alkalmazása nem normális eloszlású logaritmikus hozamokon félrevezető eredményt adna.) Mindezek elmulasztása, illetve figyelmen kívül hagyása félrevezető eredményekhez vezethet, aminek súlyos következményei lehetnek.

6. fejezet

Az értekezés fontosabb megállapításai, új illetve újszerű eredményei

1. Összefoglaltam az elméleti és gyakorlati tudnivalókat néhány ismertebb kockázati mértékről. Matematikai pontossággal (definíciók, tételek, stb.) bemutattam öt kockázati mértéket: a szórást, a varianciát, a szemivarianciát, a kockázatosított értéket (VaR) és az Expected Shortfall-t (ES). Bebizonyítottam, hogy ezen kockázati mértékek közül egyedül az ES koherens, így a tekintett kockázati mértékek közül elméleti szinten csak az ES érdemes a kockázat mérésére. Külön kitértem továbbá ezen kockázati mértékek minta realizációból történő kiszámításának módjára.
2. Tisztáztam a részvények illetve a portfólió egyszerű és logaritmikus hozamainak kiszámítási módjait, valamint a köztük lévő legfontosabb kapcsolatokat. A kockázati sorrendre gyakorolt hatásaik vizsgálatával, egy kisebb empirikus tanulmány segítségével bebizonyítottam, hogy a használt hozam típusának, valamint a pontos relatív súlyok helyett közelítő értékek használatának befolyása van a vizsgálati eredményekre.
3. Pontosítottam a történi szimuláción alapuló utótesztelés módszerének a leírását mind a VaR mind pedig az ES esetén. Mivel sokáig azt gondolták, hogy az ES nem utótesztelhető, ezért újszerű eredménynek tartom az ES utótesztelését konkrét részvény adatokra vonatkozóan. A módszer segítségével bebizonyítottam, hogy az ES jobb kockázati mértéknek bizonyul mint a VaR. A számításokhoz nem normális, illetve nem elliptikus eloszlásból származó adatokat használtam.
4. Gyakorlati elemzés segítségével bebizonyítottam, hogy ha a hagyományos hozam-variancia kritérium helyett a hozam-ES kritériumot használjuk a portfólió

optimalizálásánál, az megváltoztathatja a portfólió összetételére vonatkozó döntéseinket

5. Rámutattam, hogy mennyire fontos a portfólióban lévő eszközök közötti kapcsolat feltérképezése. Bemutattam, hogy mindezt magasabb dimenzióban az úgynevezett kopula függvények segítségével tehetjük meg. A kopula függvények segítségével hét dimenzióban tudtam vizsgálni a függőségi struktúrát, valamint ezt összekapcsolva az utótesztelés módszerével, szimulációs programot írtam annak megvizsgálására, hogy melyik kopula függvény bizonyul jobbnak a gyakorlatban. Ezen szimuláció segítségével bebizonyítottam, hogy a kopula függvény használata javítja a kockázatszámítás pontosságát.

Összefoglalás

A pénzügy és a matematika kéz a kézben járnak. A matematika eszközöket és modelleket ad a pénzügy számára, a pénzügyi terület pedig kérdésekkel és megoldásra váró feladatokkal látja el a matematikusokat. Nagyon lényeges viszont, hogy a két terület pontosan megértse egymást.

A dolgozatomban a pénzügyi kockázat néhány témakörén belül a matematikai elméletet ötvöztem a pénzügyi gyakorlattal. Már a legelején felvetődött a kérdés, hogy mi is az a kockázat és hogy hogyan lehet ezt mérni matematikai mutatók segítségével. Definiáltam és részletesen bemutattam öt, a gyakorlatban használt kockázati mértéket. Ezek voltak a variancia, a szórás, a szemivariancia, a kockázatotott érték, vagy más néven value at risk (VaR) és az expected shortfall (ES).

A gyakorlat azt feltételezi, hogy ha egy befektetés hozama sosem kisebb mint egy másiké, akkor ez a befektetés nem kockázatosabb mint a másik, vagy ha többszörözünk egy portfóliót, de megtartjuk az összetételét, akkor a kockázat a nagysággal arányosan változik. Megköveteli továbbá, hogy ha a pozíciókhoz adott hozamú kockázatmentes eszközt adunk, akkor a kockázat ennek a pénzáramnak a nagyságával csökkenjen. Szintén természetes feltételezés, hogy a diverzifikáció ne növelje a befektetés kockázatát. Ha ezeket a elvárásokat lefordítjuk a matematika nyelvére, akkor azt mondhatjuk, hogy a kockázatot egy olyan leképezéssel mérhetjük (a véletlen változók és a valós számok között), amely monoton, pozitív homogén, eltolás invariáns, valamint szubadditív. Bebizonyítható, hogy az öt kockázati mérték közül csak az ES elégíti ki mind a négy tulajdonságot, azaz ez az egyetlen koherens kockázati mérték, így az egyetlen, amely elméletileg alkalmas a kockázat mérésre.

Ennek ellenére pénzügyi területen még mindig a VaR a leggyakrabban használt kockázati mérték, amely csak úgynevezett elliptikus eloszlások esetén bizonyul koherensnek. A gyakorlatban használt adatok többsége pedig nem elliptikus eloszlásból származik.

A gyakorlati számításokhoz hét részvény ár adatait használtam tíz évre vonatkozóan. Az alapvető statisztikák, ábrázolások és néhány teszt elvégzésével és vizsgálatával megállapítottam, hogy egyik részvény logaritmikus hozamai sem követnek normális eloszlást, amit a legtöbb matematikai modell feltételez. Így például nem tudtam alkalmazni - a gyakorlatban igen gyakran a részvényárak szimulációjára használt - geometriai Brown-mozgást, hiszen az a logaritmikus hozamok normalitását feltételezi.

Többek között azért is fontos, hogy minél pontosabban modellezni tudjuk a valóságot és meg tudjuk becsülni a kockázatot, mert bizonyos helyzetekben ezek alapján akarunk, tudunk dönteni. Annak érdekében pedig, hogy ezt a döntést meg tudjuk hozni, az adatoknak, az eredményül kapott mérőszámoknak, vagy kifejezéseknek összehasonlíthatóaknak kell lenniük. Ebből adódóan egyértelművé válik például, hogy a portfólió árakat nem tudjuk egymással összehasonlítani, ezért van szükség a hozam meghatározására. A dolgozatomban matematikai precizitással mutattam be az egyszerű és a logaritmikus hozamot. Egyértelműsítettem a definíciókat, jelöléseket valamint a két fogalom közötti összefüggéseket és eltéréseket, mind az eszközök, mint pedig a portfóliók esetén. Mivel - ha az egyszerű hozamok nullához közeli értékek - a kétféleképpen számolt hozamértékek eloszlása közel azonos, felvetődik a kérdés, hogy befolyással van-e egyáltalán az eredményekre ha az egyik illetve a másik hozamtípust használjuk. A kockázati sorrend elemzése egyértelművé tette, hogy nem mindegy, hogy milyen adatokat használunk a számításainkhoz, még akkor sem, ha azok eloszlása nagyon közel van egymáshoz, más eredményre juthatunk.

Portfólió optimalizáció szempontjából sem mindegy, hogy melyik kockázati mértéket választjuk a kockázat mérésére. Összehasonlítottam a hagyományos Markowitz-féle modellt, vagyis, amikor a kockázat mérésére a varianciát használjuk, azzal a modellel, ahol pedig az expected shortfall-t. Megjegyezném, hogy a variancia a kívánt négy tulajdonság egyikét sem elégíti ki, míg az ES mindegyiket. Az optimalizáció szempontjából - a gyakorlatban legtöbbször használt - VaR nem jöhet számításba, hiszen nem konvex, ami pedig nagy mértékben megnövelheti az optimalizáció komplexitását, vagy éppen lehetetlenné teheti annak elvégzését. Azt tapasztaltam, hogy a kétféle modellel végzett optimalizáció különböző eredményhez vezetett, ami alatt azt értem, hogy ugyanazon rögzített hozam mellett másféle portfólió összetételt javasol a kockázat minimalizálása érdekében. Ez pedig azt jelenti, hogy különböző döntést hoznánk ugyanabban a helyzetben az egyik illetve a másik modell alkalmazásával.

A Markowitz elmélet egyik alapgondolata, hogy a diverzifikáció csökkenti a portfólió kockázatát. A diverzifikációnak ezt a kockázatsökkentő hatását viszont a portfólióban lévő részvények együttes mozgása kiolthatja. Hiába diverzifikálunk, ha egy esemény hatására a részvények, vagy azok egy része együtt mutat extrém viselkedést. Ezért kell megvizsgálni a portfólióban lévő eszközök függőségi rendszerét, korrelációját. Páronkénti lineáris korrelációt mérhetünk a Pearson-féle korrelációs együtthatóval, míg rangkorrelációt a Kendall-, illetve a Spearman-féle mutatókkal. Az extrém esetek páronkénti feltérképezésénél a szélekben való függőségi mutató segíthet. Magasabb rendű és komplexebb függőségi struktúra vizsgálatára szolgálnak az úgynevezett kopula függvények.

Ezen kopula függvények közül a gyakorlatban is leggyakrabban használtakat hasonlítottam össze, név szerint a normális (Gauss), Student-féle t, Gumbel, Clayton és Frank kopulákat. Az összehasonlítás azt jelenti, hogy megvizsgáltam, hogy melyiket alkalmazva lehet pontosabban megbecsülni a kockázatot. Pontosabbnak akkor nevezek egy modellt vagy mértéket, ha az általa becsült értékek és a tényleges értékek között minimális az eltérés. Ez az úgynevezett utótesztelés módszere. Az adatokat bizonyos időintervallumokra osztva megbecsüljük a másnapi kockázatot, majd ezt a becsült értéket összehasonlítjuk a valós értékkel. Ezt elvégezzük az összes időintervallumon és megszámlaljuk, hogy hányszor becsültük alá a kockázatot. Ha ehhez az elemzéshez a történeti adatokat használjuk, akkor történeti szimuláción alapuló, míg ha kopulák által közelített adatokat, akkor pedig kopulán alapuló utótesztelésről beszélhetünk.

Az eredmények először is azt igazolják, hogy az expected shortfall valóban jobb kockázati mértéknek bizonyul, mint a kockázatosított érték. A fentebb felsorolt kopulák közül a Gumbel kopula nem használható az elemzéshez, bizonyos paraméterfeltételek nem teljesülése miatt. A többi kopula közül a legjobban a Clayton kopula segítségével tudtam megbecsülni a kockázatot, míg a legrosszabb eredményt a Frank kopula adta. A normális és a t-kopula összehasonlításában egyértelműen kimutatható az a tény, hogy az extrém események modellezésére (a szélekben való függőség miatt) a t-kopula alkalmasabb. Ezért is részesítik ezt előnyben a pénzügyi számításoknál a Gauss kopulával szemben. Megfigyelhető volt továbbá, hogy a kockázatszámítás pontosságát a kopula modellekkel javítani tudjuk.

Summary

Finance and Mathematics go hand in hand. Mathematics provides tools and models for finance, while finance provides questions and problems to be solved for mathematicians. Therefore it is important that the two areas understand each other.

In my thesis - within some of the topics of financial risk - I tried to combine the mathematical theory with the financial practice. Already at the beginning the question arose: what is the risk and how it can be measured with mathematical notions. I defined and explained in details the five in practice most often used risk measures. These are the following: variance, the standard deviation, the semivariance, the value at risk (VaR) and the expected shortfall (ES).

Practice assumes that if the return on an investment is smaller than on another one, then this investment should not have larger risk than the other one, or if we multiply the portfolio value but keep the relative proportion of the assets in it, the risk of the portfolio should change proportionally to the value of the portfolio. It assumes moreover, that if we realize an additional fixed cash flow then the risk should be reduced by exactly the sum of the cash flow. It is also a natural assumption that the diversification should not increase the riskiness of a portfolio. By translating these expectations to the language of mathematics, we can say, that the risk can be measured by a monotone, positive homogeneous, translation invariant and subadditive map (between the set of random variables and the real numbers). It can be proven that out of the five risk measures considered only ES satisfies all the four properties, thus ES is the only so-called coherent risk measure. Consequently ES is the only one of the aforementioned risk measures which is theoretically suitable for measuring risk.

Despite its non-coherence, VaR is still the most frequently used risk measure in the financial sector, which is coherent only in the case of the so-called elliptical distributions. Most of data used in practice is not elliptically distributed.

For the empirical study I used seven stock price data over ten years. After examining the basic statistics, several test results, plots and figures, I found that the logarithmic returns of the stocks do not follow normal distributions as most mathematical models in finance assume. For example, I could not use geometric Brownian motion, which is often used in practice to simulate the stock prices, because the model assumes normality of the logarithmic returns.

Among other things it is very important to model the reality and predict the risk accurately, because in some situations we want to, we have to decide based on these predictions. In order to be able to make this decision, the data and also the results must be comparable. For example, it is obvious that portfolio prices cannot be compared with each other, therefore it is necessary to determine the return first. In my thesis, with mathematical accuracy I presented the simple and the logarithmic returns. I clarified the definitions, the notations and the differences as well as the connections between the two notions, both in terms of assets and portfolios. If the simple returns are close to zero, the distribution of the returns calculated in two ways are nearly the same. The question arises whether the return type used has any influence on the results. The analysis of the riskiness order clearly showed that the result of the calculation can strongly depend on the type of data used, even if the distributions are close to each other.

As far as portfolio optimization is concerned it is also important which risk measure is chosen to measure the risk. I compared the traditional Markowitz model which uses variance for measuring the risk, with the model, which uses expected shortfall. I would like to add that variance does not satisfy any of the four expected properties, whereas ES satisfies all of them. The most widely used risk measure VaR cannot be considered in the case of optimization because it is not convex, which can highly increase the complexity of the optimization or it can make it even impossible to use. I came to the conclusion, that the two optimization models led to different results, and thus suggest different portfolio composition to minimize the risk (with fixed returns). This means that we would make different decisions in the same situation using one or the other model.

One of the basic concepts of the Markowitz theory is that diversification reduces the risk of the portfolio. This risk-reducing effect of the diversification can, however, be canceled by the same behavior of the stocks in the portfolio. There is no point in diversification if all or some of the stocks in the portfolio react on an event with the same extreme behavior. That is why it is

necessary to examine the dependence and correlation of the assets in the portfolio. Pairwise linear correlation can be measured by the Pearson correlation coefficient, while rank correlation can be measured by the Kendall and the Spearman coefficients. Higher order and more complex dependency structures can be measured by the so-called copula functions.

I compared the most commonly used copula functions in practice, namely the normal (Gauss), the Student-t, the Gumbel, the Clayton and the Frank copulas. Comparison means that I analyzed which copula function measures more precisely the risk. I call a model or a measure more precise if the difference between the values it estimated and the actual values is minimal. This is the so-called backtesting method. More precisely, we divide the data into time intervals to estimate the risk of tomorrow and then we compare this estimated value with the real value. We repeat this for all the time windows and we count how many times the risk measure underestimated the risk. If historical data were used for the analysis the model is called historical backtesting, while if it was based on copula method the model is called copula backtesting.

The results show that the expected shortfall is indeed a better risk measure than the value at risk. From the above mentioned copula functions the Gumbel copula could not be used for my analysis due to the failure to meet certain parameter conditions. Among the other copulas I could the best estimate the risk with the Clayton copula, while the worst result was given by the Frank copula. The comparison of the normal and Student-t copula clearly shows that the Student-t copula is more suitable for modeling extreme events (because of the tail dependence). That is why the Student-t copula is preferred in financial calculations. It could be also observed that the efficiency of risk calculation can be improved with copula models.

Irodalomjegyzék

- Aas, K. (2004): Modelling the dependence structure of financial assets: A survey of four copulas. Research report SAMBA/22/04, Norwegian Computing Center.
- Acerbi, C. – Nordio, C. – Sirtori, C. (2001): Expected shortfall as a tool for financial risk management. *arXiv preprint cond-mat/0102304*.
- Acerbi, C. – Szekely, B. (2014): Backtesting expected shortfall. *Risk*, 27(11).
- Acerbi, C. – Tasche, D. (2002): Expected shortfall: a natural coherent alternative to value at risk. *Economic notes*, 31(2):379–388.
- Acerbi, Carlo – Tasche, D. (2002): On the coherence of expected shortfall. *Journal of Banking & Finance*, 26(7):1487–1503.
- Alexander, C. (2009): *Market Risk Analysis, Value at Risk Models*, volume 4. John Wiley & Sons.
- Arratia, A. (2014): *Computational Finance*. Springer.
- Artzner, P. – Delbaen, F. – Eber, J.-M. – Heath, D. (1999): Coherent measures of risk. *Mathematical finance*, 9(3):203–228.
- Bacon, C. R. (2011): *Practical portfolio performance measurement and attribution*, volume 568. John Wiley & Sons.
- Barucci, E. (2003): *Financial markets theory*. Springer.
- Bélyácz, I. (2010): Kockázat vagy bizonytalanság? Elméletttörténeti töredék a régi dilemmáról. *Közgazdasági Szemle, LVII. évf.*, pages 652–665.
- Bélyácz, I. (2013): A financializáció szerepe a globális pénzügyi válság kialakulásában. *Erdélyi Múzeum*, 75(3):1–16.

- Benedek, G. – Kóbor, Á. – Pataki, A. (2002): A kapcsolatszorosság mérése m-dimenziós kopulákkal és értékpapírportfólió-alkalmazások. *Közgazdasági Szemle*, 49(2):105–125.
- Bernstein, P. L. (1996): *Against the gods: The remarkable story of risk*. Wiley New York.
- Boisbunon, A. (2012): The class of multivariate spherically symmetric distributions. *Université de Rouen*. Technical Report.
- Borodovsky, L. – Lore, M. (2000): *Professional's Handbook of Financial Risk Management*. Butterworth-Heinemann.
- Bugár, G. – Uzsoki, M. (2006): Befektetések kockázatának mérése. *Statisztikai Szemle*, 84(9).
- Burns, P. (2007): R relative to statistical packages: comment 1 on technical report number 1 (version 1.0) strategically using general purpose statistics packages: A look at stata, sas and spss. *UCLA Technical Report Series*.
- Calafiore, G. C. – El Ghaoui, L. (2014): *Optimization models*. Cambridge university press.
- Carmona, R. (2013): *Statistical analysis of financial data in R*. Springer Science & Business Media.
- Cherubini, U. – Luciano, E. – Vecchiato, W. (2004): *Copula methods in finance*. John Wiley & Sons.
- Cizek, P. – Härdle, W. K. – Weron, R. (2005): *Statistical tools for finance and insurance*. Springer Science & Business Media.
- Cornuejols, G. – Tütüncü, R. (2006): *Optimization methods in finance*, volume 5. Cambridge University Press.
- Damodaran, A. (2003): *Investment philosophies: successful strategies and the investors who made them work*, volume 185. John Wiley & Sons.
- Damodaran, A. (2003-2008): (Unpublished paper) Value at Risk (VaR). <http://people.stern.nyu.edu/adamodar/pdfiles/papers/VAR.pdf>. Accessed: 2017-04-25.
- Daniélsson, J. (2011): *Financial risk forecasting: the theory and practice of forecasting market risk with implementation in R and Matlab*, volume 588. John Wiley & Sons.
- Das, B. – Embrechts, P. – Fasen, V. (2013): Four theorems and a financial crisis. *International Journal of Approximate Reasoning*, 54(6):701–716.

- Delbaen, F. (2000): Draft: Coherent risk measures. *Lecture notes, Pisa*.
- Delbaen, F. (2002): Coherent risk measures on general probability spaces. In *Advances in finance and stochastics*, pages 1–37. Springer.
- Deuß, P. (2009): Measuring the value at risk of a stock portfolio the copula approach. *Bergische Universität Wuppertal*. Working Paper.
- Donnelly, C. – Embrechts, P. (2010): The devil is in the tails: actuarial mathematics and the subprime mortgage crisis. *Astin Bulletin*, 40(01):1–33.
- Durante, F. – Sempì, C. (2010): Copula theory: an introduction. In *Copula theory and its applications*, pages 3–31. Springer.
- Eftekhari, B. – Pedersen, C. S. – Satchell, S. E. (2000): On the volatility of measures of financial risk: an investigation using returns from european markets. *The European Journal of Finance*, 6(1):18–38.
- Embrechts, P. (2000): Extreme value theory: Potentials and Limitations as an Integrated Risk Management Tool. Manuscript, Zurich, Switzerland: Department of Mathematics, ETH, Swiss Federal Technical University. <https://people.math.ethz.ch/~embrecht/ftp/evtpot.pdf>. Accessed: 2017-05-03.
- Embrechts, P. – Frey, R. – McNeil, A. (2005): Quantitative risk management. *Princeton Series in Finance, Princeton*, 10.
- Embrechts, P. – Hofert, M. (2013): A note on generalized inverses. *Mathematical Methods of Operations Research*, 77(3):423–432.
- Embrechts, P. – Hofert, M. (2014): Statistics and quantitative risk management for banking and insurance. *Annual Review of Statistics and Its Application*, 1:493–514.
- Embrechts, P. – Lindskog, F. – McNeil, A. (2001): Modelling dependence with copulas. *Rapport technique, Département de mathématiques, Institut Fédéral de Technologie de Zurich, Zurich*.
- Embrechts, P. – McNeil, A. – Straumann, D. (2002): Correlation and dependence in risk management: properties and pitfalls. *Risk management: value at risk and beyond*, pages 176–223.
- Embrechts, P. – Resnick, S. I. – Samorodnitsky, G. (1999): Extreme value theory as a risk management tool. *North American Actuarial Journal*, 3(2):30–41.

- Emmer, S. – Kratz, M. – Tasche, D. (2015): What is the best risk measure in practice? a comparison of standard measures. *Journal of Risk*, 18(2):31–60.
- Fang, K.-T. – Kotz, S. – Ng, K. W. (1990): *Symmetric multivariate and related distributions*. Chapman and Hall.
- Fazekas, I. (2000): Bevezetés a matematikai statisztikába. *Kossuth Egyetemi Kiadó, Debrecen*.
- Follmer, H. – Schied, A. (2008): Convex and coherent risk measures. *October*, 8:2008.
- Gáll, J. – Pap, G. (2010): *Bevezetés a pénzügyi matematikába*. Szegedi Egyetemi Kiadó.
- Härdle, W. – Okhrin, O. – Okhrin, Y. (2008): Modeling dependencies with copulae. In *Applied Quantitative Finance*, pages 3–36. Springer.
- Helleiner, E. (2011): Understanding the 2007–2008 global financial crisis: Lessons for scholars of international political economy. *Annual Review of Political Science*, 14:67–87.
- Hofert, M. – Kojadinovic, I. – Maechler, M. – Yan, J. (2014): copula: Multivariate dependence with copulas. *R package version 0.999-9*, <http://CRAN.R-project.org/package=copula>.
- Hull, J. C. (2006): *Options, futures, and other derivatives*. Pearson Education India.
- Joe, H. (1997): *Multivariate models and multivariate dependence concepts*. CRC Press.
- Jorion, P. (1999): *A kockáztatott érték*. Panem.
- Jorion, P. (2006): *Value at Risk-The New Benchmark for Managing Financial Risk*. McGraw-Hill.
- Joshi, M. S. – Paterson, J. M. (2013): *Introduction to Mathematical Portfolio Theory*. Cambridge University Press.
- Kaminsky, G. L. – Reinhart, C. M. – Vegh, C. A. (2003): The unholy trinity of financial contagion. *The Journal of Economic Perspectives*, 17(4):51–74.
- Knight, F. (1921): Risk, uncertainty, and profit. Hart Schaffner and Marx prize essays no 31. *Boston and New York: Houghton Mifflin*.
- Kungwani, P. (2014): Risk management-an analytical study. *IOSR Journal of Business and Management*, 16(3):83–89.

- Malevergne, Y. – Sornette, D. (2006): *Extreme financial risks: From dependence to risk management*. Springer Science & Business Media.
- Markowitz, H. (1952): Portfolio selection. *The journal of finance*, 7(1):77–91.
- Markowitz, H. (1959): *Portfolio selection: efficient diversification of investments*. John Wiley & Sons.
- Nándori, P. (2009): Virtual Laboratories in Probability and Statistics. http://math.bme.hu/~nandori/Virtual_lab/stat/index.xhtml. Accessed: 2017-02-26.
- Nelsen, R. B. (2013): *An introduction to copulas*, volume 139. Springer Science & Business Media.
- Petters, A. O. – Dong, X. (2016): *An Introduction to Mathematical Finance with Applications*. Springer.
- Polansky, A. M. (2011): *Introduction to statistical limit theory*. CRC Press.
- Pryce, J. (1984): A new measure of relative error for vectors. *SIAM journal on numerical analysis*, 21(1):202–215.
- Rakonczi, P. (2009): *On modeling and prediction of multivariate extremes with applications to environmental data*. Centre for Mathematical Sciences, Mathematical Statistics, Lund University.
- Rókusfalvy, P. (2002): A környezetpszichológia alapkérdései. *Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest*.
- Ruppert, D. (2011): *Statistics and data analysis for financial engineering*. Springer.
- Rüschendorf, L. (2013): Mathematical risk analysis. *Springer Ser. Oper. Res. Financ. Eng. Springer, Heidelberg*.
- Schmidt, T. (2007): Coping with copulas. *Copulas-From theory to application in finance*, pages 3–34.
- Szegő, G. (2002): Measures of risk. *Journal of Banking & Finance*, 26(7):1253–1272.
- Tsay, R. S. (2005): *Analysis of financial time series*, volume 543. John Wiley & Sons.
- Varga-Haszonits, I. (2006): Kockázati mértékek instabilitása. *Doktori értekezés*.

- Wozabal, D. (2008): A new method for value-at-risk constrained optimization using the difference of convex algorithm. In *CARIPLO Workshop, September*. Citeseer.
- Würtz, D. – Chalabi, Y. – Chen, W. – Ellis, A. (2009): *Portfolio optimization with R/Rmetrics*. Rmetrics.
- Xu, C. – Chen, H. (2012): Measuring portfolio value at risk. *Lund University Libraries*. Student Paper.
- Yan, J. (2007): Enjoy the joy of copulas: with a package copula. *Journal of Statistical Software*, 21(4):1–21.

Táblázatok jegyzéke

2.1. VaR szubadditivitása: az X (illetve Y) valószínűségi változóhoz tartozó alsó és felső VaR értékek különböző α szinteken	28
2.2. VaR szubadditivitása: az $X + Y$ valószínűségi változóhoz tartozó alsó és felső VaR értékek különböző α szintek esetén	29
2.3. ES példa: Az X valószínűségi változó ES-ja különböző α szinteken	35
2.4. Példa: VaR és ES értékek	36
2.5. Néhány ismert kockázati mérték tulajdonságai	37
2.6. Példa: A Spearman-féle rang korreláció kiszámítása	41
2.7. Kontingencia táblázat: két független kockadobás együttes eloszlása	45
2.8. Kontingencia táblázat: két kockadobás együttes eloszlása, ahol $X_1 \leq X_2$	46
3.1. A hét részvény logaritmikus hozamaira vonatkozó alapvető statisztikák	67
3.2. A hét részvény logaritmikus hozamaira vonatkozó kockázati értékek	72
4.1. Részvények egyszerű hozamainak alapvető statisztikai jellemzői	81
4.2. Részvények logaritmikus hozamainak alapvető statisztikai jellemzői	81
4.3. Részvények kockázati sorrendjének összehasonlítása	86
4.4. Portfóliók kockázati sorrendjének összehasonlítása	89
4.5. Idő-ablakok	92
4.6. Portfólió logaritmikus hozamainak idő-ablakokba rendezése	94
4.7. A történeti utótesztelés eredménye	96
4.8. Speciális portfóliók várható hozama, szórása, VaR és ES értéke az átlag-variancia portfólió optimalizálás eredményeként	102
4.9. Speciális portfóliók várható hozama, szórása, VaR és ES értéke az átlag-ES portfólió optimalizálás eredményeként ($\alpha = 0,05$)	109
4.10. Kopulán alapuló Monte Carlo szimuláció utótesztelésének eredményei	124

4.11. Kopulán alapuló Monte Carlo szimuláció utótesztelés-eredményeinek eltérése az elméleti értékektől	125
4.12. A kopulán és a történeti szimuláción alapuló kockázatszámítás eredményei a VaR esetén	126
4.13. A kopulán és a történeti szimuláción alapuló kockázatszámítás eredményei az ES esetén	126

Ábrák jegyzéke

2.1. Kvantilisok	22
2.2. Az eloszlásfüggvény és a kvantilis értékek lehetséges formái	24
2.3. Az α -kvantilis a nyereséget illetve a veszteséget ábrázoló sűrűségfüggvények esetén	26
2.4. Két különböző sűrűségfüggvény (eloszlás) megegyező VaR-kel	27
2.5. Az X és Y valószínűségi változók eloszlásfüggvényei a VaR 1. példája alapján .	28
2.6. Az $X + Y$ valószínűségi változó eloszlásfüggvénye a VaR 1. példája alapján . .	29
2.7. Az $\alpha \mapsto \text{VaR}_\alpha(X)$ függvény az 1. példa esetén	31
2.8. Az $X_i, i = 1, 2$, valamint az $X_1 + X_2$ valószínűségi változók eloszlásfüggvényei a 2. VaR példa alapján	36
2.9. Két példa standard normális peremeloszlásokkal és $\rho = 0,7$ lineáris korrelációs együtthatóval rendelkező eloszlásra	39
2.10. Kockadobás eloszlásfüggvénye	45
2.11. Két kocka dobása esetén az eloszlásfüggvény, ahol az egyik valószínűségi változó a kisebb dobás eredményét mutatja	47
2.12. A szorzat, minimum és maximum kopula eloszlásfüggvényei	50
2.13. Gauss kopula	55
2.14. Student kopula	57
2.15. Gumbel kopula	59
2.16. Clayton kopula	60
2.17. Frank kopula	61
2.18. Kétdimenziós minták a Gauss, a Student, a Clayton, a Frank és a Gumbel kopulákra	63
3.1. Az FHB, MOL, MTELEKOM, OTP, Pannergy, Raba és Richter részvények napi árfolyamai	66
3.2. Az FHB, MOL, MTELEKOM és OTP részvények napi hozamai és azok eloszlásai	68

3.3. A Pannergy, Raba és Richter részvények napi hozamai és azok eloszlásai	69
3.4. A hét részvény logaritmikus hozamainak kvantilis-kvantilis ábrája	71
4.1. Box-plot: Portfólió egyszerű és logaritmikus hozama	83
4.2. A portfólió egyszerű és logaritmikus hozamának összehasonlítása	83
4.3. Részvények kockázati sorrendje 1	85
4.4. A részvények logaritmikus hozamainak box plot ábrája	86
4.5. A portfóliók kockázati sorrendje	88
4.6. A portfólió napi logaritmikus hozamai	93
4.7. Hatékony határvonal	101
4.8. Hatékony határvonal: hozam-variancia portfólió optimalizáció esetén	103
4.9. A hatékony, a minimális kockázatú és a maximális Sharpe-indexű portfóliókban a részvények súlyai a szórás minimalizálásakor	105
4.10. Hatékony határvonal: hozam-ES portfólió optimalizálás esetén ($\alpha = 0,05$) . . .	108
4.11. A hatékony, a minimális kockázatú és a maximális Sharpe-indexű portfóliókban a részvények súlyai az ES minimalizálása esetén ($\alpha = 0,05$)	110
4.12. A súlyok alakulása az átlag-variancia és átlag-ES portfólióban a hatékony határvonal mentén	112
4.13. A súlyok alakulása az átlag-szórás portfólió és átlag-ES portfólió esetén a hatékony határvonal mentén különböző rögzített hozamok mellett.	113
4.14. Részvények logaritmikus hozamainak páronkénti ábrázolása	115
4.15. A Pearson, Kendall és a Spearman korreláció értékei	116
4.16. Empirikus eloszlásfüggvények	119
4.17. Standard normális illetve standard exponenciális peremeloszlású 500 elemű minták	120
4.18. A 4.17 ábrán generált minta áttaszformálásával képzett 500 elemű minták . .	121
B.1. Példák egyváltozós körkörös eloszlásokra	162
B.2. Példák kétváltozós körkörös eloszlásokra	162
B.3. Példák kétváltozós elliptikus eloszlásokra	163

A. függelék

Kockázati mértékek tulajdonságainak vizsgálata

A.1. Variancia tulajdonságai

A koherens kockázati mértékektől elvárt négy tulajdonság teljesülésének vizsgálata a variancia esetében, JOSHI – PATERSON, 2013 könyve alapján.

Monotonitás

Viszonylag könnyű példát konstruálni annak megmutatására, hogy a variancia nem teljesíti a monoton tulajdonságot. Például definiáljuk az X valószínűségi változót a következőképpen: $P(X = 2) = 0,5$ és $P(X = 5) = 0,5$, míg az Y valószínűségi változót: $P(Y = 1) = 0,5$ és $P(Y = 0,5) = 0,5$. Azaz minden esetben $X \geq Y$. Ekkor a varianciákat kiszámítva

$$\sigma^2(X) = \mathbb{E}(X - \mathbb{E}(X))^2 = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2 = 2,25$$

$$\sigma^2(Y) = \mathbb{E}(Y - \mathbb{E}(Y))^2 = \mathbb{E}(Y^2) - (\mathbb{E}(Y))^2 = 0,0625.$$

látható, hogy $X \geq Y$ esetén $\sigma^2(X) \geq \sigma^2(Y)$ teljesül, azaz a variancia nem monoton.

Szubadditivitás

A variancia alaptulajdonságaiból tudjuk, hogy:

$$\sigma^2(X + Y) = \sigma^2(X) + \sigma^2(Y) + 2 \operatorname{cov}(X, Y).$$

Azokban az esetekben, amikor a kovariancia pozitív, azaz $\operatorname{cov}(X, Y) > 0$, akkor $\sigma^2(X + Y) > \sigma^2(X) + \sigma^2(Y)$. Tehát, a szubadditív tulajdonság sem teljesül.

Pozitív homogenitás

Legyen $\lambda \geq 0$, ekkor a variancia alaptulajdonságai alapján:

$$\sigma^2(\lambda X) = \lambda^2 \sigma^2(X).$$

Vagyis a variancia nem pozitív homogén.

Eltolás invariancia

Legyen $a \in \mathbb{R}$, ekkor ismételten a variancia egyik alaptulajdonságát felhasználva:

$$\sigma^2(X + a) = \sigma^2(X).$$

Azaz a variancia az eltolás invariancia tulajdonságát sem teljesíti.

A.2. Szórás tulajdonságai

Ebben a részfejezetben azt vizsgálom meg, hogy hogyan viselkedik a szórás, a koherens kockázati mértékek mely tulajdonságait elégíti ki. A bizonyításokat JOSHI – PATERSON, 2013 könyve alapján végzem el.

Monotonitás

A varianciánál bemutatott példa esetében:

$$\sigma(X) = \sqrt{\sigma^2(X)} = 1,5$$

$$\sigma(Y) = \sqrt{\sigma^2(Y)} = 0,25.$$

Vagyis $X > Y$ esetén $\sigma(X) > \sigma(Y)$, azaz a szórás nem monoton.

Szubadditivitás

Tudjuk, hogy

$$\sigma^2(X + Y) = \sigma^2(X) + \sigma^2(Y) + 2 \operatorname{cov}(X, Y)$$

illetve, hogy

$$\operatorname{cov}(X, Y) := \sigma(X)\sigma(Y)\rho(X, Y).$$

Mivel $\sigma(X) \geq 0$ és $\sigma(Y) \geq 0$, valamint $-1 \leq \rho(X, Y) \leq 1$, ezért $\operatorname{cov}(X, Y) \leq \sigma(X)\sigma(Y)$.

Vagyis $\sigma^2(X + Y) \leq \sigma^2(X) + \sigma^2(Y) + 2\sigma(X)\sigma(Y) = (\sigma(X) + \sigma(Y))^2$. Ebből pedig

gyökvonással következik, hogy $\sigma(X + Y) \leq \sigma(X) + \sigma(Y)$, azaz a szórás szubadditív.

Pozitív homogenitás

Tudjuk, hogy $\sigma^2(\lambda X) = \lambda^2 \sigma^2(X)$, ahol $\lambda \geq 0$. Ebből gyökvonással adódik, hogy $\sigma(\lambda X) = \lambda \sigma(X)$, vagyis a szórás esetében a pozitív homogén tulajdonság is teljesül.

Eltolás invariancia

Legyen $a \in \mathbb{R}$, ekkor hasonlóan az előzőekhez a $\sigma^2(X + a) = \sigma^2(X)$ egyenletből gyökvonással kapjuk, hogy $\sigma(X + a) = \sigma(X)$, azaz a szórás nem eltolás invariáns.

A.3. Szemivariancia tulajdonságai

Ebben a részfejezetben bebizonyítom, hogy a szemivariancia sem koherens, hiszen nem monoton és nem szubadditív (JOSHI – PATERSON, 2013).

Monotonitás

Továbbra is a varianciánál bemutatott példára kiszámolva a szemivariancia értékét: $SV(X) = 1,125$ és $SV(Y) = 0,03125$. Azaz $X \geq Y$ esetén $SV(X) > SV(Y)$, azaz a szemivariancia nem monoton.

Szubadditivitás

Az egyszerűség kedvéért a következő jelöléseket vezetem be:

$$A := \min\{X - \mathbb{E}(X), 0\},$$

$$B := \min\{Y - \mathbb{E}(Y), 0\}.$$

Ekkor:

$$\begin{aligned} SV(X) + SV(Y) &= \mathbb{E}\left((\min\{X - \mathbb{E}(X), 0\})^2\right) + \mathbb{E}\left((\min\{Y - \mathbb{E}(Y), 0\})^2\right) \\ &= \mathbb{E}\left((\min\{X - \mathbb{E}(X), 0\})^2 + (\min\{Y - \mathbb{E}(Y), 0\})^2\right) \\ &= \mathbb{E}\left(A^2 + B^2\right) = \mathbb{E}\left(A^2 + B^2 + 2AB\right) - \mathbb{E}(2AB) \\ &= \mathbb{E}\left((A + B)^2\right) - 2\mathbb{E}(AB) \\ &= \mathbb{E}\left((\min\{X - \mathbb{E}(X), 0\} + \min\{Y - \mathbb{E}(Y), 0\})^2\right) - 2\mathbb{E}(AB). \end{aligned}$$

Tegyük fel, hogy $X - \mathbb{E}(X) < 0$ és $Y - \mathbb{E}(Y) < 0$. Ebben az esetben $A = X - \mathbb{E}(X)$, $B = Y - \mathbb{E}(Y)$, $2\mathbb{E}(AB) > 0$, valamint $\min\{X - \mathbb{E}(X), 0\} + \min\{Y - \mathbb{E}(Y), 0\} = \min\{X - \mathbb{E}(X) + Y - \mathbb{E}(Y), 0\}$ és így

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(\left(\min\{X - \mathbb{E}(X), 0\} + \min\{Y - \mathbb{E}(Y), 0\}\right)^2\right) - 2\mathbb{E}(AB) \\ = \mathbb{E}\left(\left(\min\{X - \mathbb{E}(X) + Y - \mathbb{E}(Y), 0\}\right)^2\right) - 2\mathbb{E}(AB) \\ = \text{SV}(X + Y) - 2\mathbb{E}(AB).\end{aligned}$$

Azaz ebben az esetben $\text{SV}(X + Y) > \text{SV}(X) + \text{SV}(Y)$, tehát a szemivariancia nem szubadditív.

Pozitív homogenitás

Legyen $\lambda \geq 0$, ekkor

$$\begin{aligned}\text{SV}(\lambda X) &= \mathbb{E}\left(\left(\min\{\lambda X - \mathbb{E}(\lambda X), 0\}\right)^2\right) \\ &= \mathbb{E}\left(\left(\min\{\lambda(X - \mathbb{E}(X)), 0\}\right)^2\right) \\ &= \lambda^2 \mathbb{E}\left(\left(\min\{X - \mathbb{E}(X), 0\}\right)^2\right) = \lambda^2 \text{SV}(X).\end{aligned}$$

Láthatjuk tehát, hogy a szemivariancia sem elégíti ki a pozitív homogén tulajdonságot.

Eltolás invariancia

Legyen $a \in \mathbb{R}$, ekkor

$$\begin{aligned}\text{SV}(X + a) &= \mathbb{E}\left(\left(\min\{X + a - \mathbb{E}(X + a), 0\}\right)^2\right) \\ &= \mathbb{E}\left(\left(\min\{X + a - \mathbb{E}(X) - a, 0\}\right)^2\right) \\ &= \mathbb{E}\left(\left(\min\{X - \mathbb{E}(X), 0\}\right)^2\right) = \text{SV}(X).\end{aligned}$$

Azaz a szemivariancia eltolás invariáns.

A.4. Kockázatotott érték tulajdonságai

A következőekben azt vizsgálom meg, hogy a koherens kockázati mértékektől elvárt négy tulajdonság közül hányat teljesít a VaR. A bizonyításokat külön elvégzem az alsó és a felső VaR esetére és GÁLL – PAP, 2010 könyvére támaszkodom.

Monotonitás

Általánosan igaz, hogy ha $X \leq Y$, akkor $F_X(x) \geq F_Y(x)$ minden $x \in \mathbb{R}$ esetén, hiszen $X \leq Y$

akkor és csak akkor, ha $\forall (\omega_1, \omega_2) \in \Omega \times \Omega : X(\omega_1) \leq Y(\omega_2)$ és így $\{\omega_1 \in \Omega | X(\omega_1) \leq x\} \supset \{\omega_2 \in \Omega | Y(\omega_2) \leq x\}$.

a. Alsó VaR esetén:

A fentiekből következik, hogy

$$\begin{aligned} \{x \in \mathbb{R} | F_Y(x) \geq \alpha\} &\subseteq \{x \in \mathbb{R} | F_X(x) \geq \alpha\} \\ \Rightarrow \inf\{x \in \mathbb{R} | F_Y(x) \geq \alpha\} &\geq \inf\{x \in \mathbb{R} | F_X(x) \geq \alpha\} \\ \Rightarrow q_\alpha(Y) &\geq q_\alpha(X) \\ \Rightarrow -\text{VaR}_\alpha(Y) &\geq -\text{VaR}_\alpha(X) \\ \Rightarrow \text{VaR}_\alpha(Y) &\leq \text{VaR}_\alpha(X). \end{aligned}$$

b. Felső VaR esetén:

Hasonlóan, a fentebb leírtakból következik, hogy

$$\begin{aligned} \{x \in \mathbb{R} | F_Y(x) > \alpha\} &\subset \{x \in \mathbb{R} | F_X(x) > \alpha\} \\ \Rightarrow \inf\{x \in \mathbb{R} | F_Y(x) > \alpha\} &\geq \inf\{x \in \mathbb{R} | F_X(x) > \alpha\} \\ \Rightarrow q^\alpha(Y) &\geq q^\alpha(X) \\ \Rightarrow -\text{VaR}^\alpha(Y) &\geq -\text{VaR}^\alpha(X) \\ \Rightarrow \text{VaR}^\alpha(Y) &\leq \text{VaR}^\alpha(X). \end{aligned}$$

Láthatjuk tehát, hogy a felső és az alsó VaR is monoton.

Szubadditivitás

A 2.1.3 fejezetben két példát is tekintek annak bemutatására, hogy a VaR nem szubadditív.

Pozitív homogenitás

Ha $\lambda > 0$, akkor $F_{\lambda X}(x) = F_X(x/\lambda)$, minden $x \in \mathbb{R}$ esetén. Így

a. Alsó VaR esetén:

$$\inf\{x \in \mathbb{R} | F_{\lambda X}(x) \geq \alpha\} = \inf\{x \in \mathbb{R} | F_X(x/\lambda) \geq \alpha\} = \lambda \inf\{y \in \mathbb{R} | F_X(y) \geq \alpha\}.$$

Azaz

$$\begin{aligned} q_\alpha(\lambda X) &= \lambda q_\alpha(X) \\ \Rightarrow -\text{VaR}_\alpha(\lambda X) &= -\lambda \text{VaR}_\alpha(X) \\ \Rightarrow \text{VaR}_\alpha(\lambda X) &= \lambda \text{VaR}_\alpha(X). \end{aligned}$$

b. Felső VaR esetén:

$$\inf\{x \in \mathbb{R} | F_{\lambda X}(x) > \alpha\} = \inf\{x \in \mathbb{R} | F_X(x/\lambda) > \alpha\} = \lambda \inf\{y \in \mathbb{R} | F_X(y) > \alpha\}.$$

Azaz

$$\begin{aligned} q^\alpha(\lambda X) &= \lambda q^\alpha(X) \\ \Rightarrow -\text{VaR}^\alpha(\lambda X) &= -\lambda \text{VaR}^\alpha(X) \\ \Rightarrow \text{VaR}^\alpha(\lambda X) &= \lambda \text{VaR}^\alpha(X). \end{aligned}$$

Vagyis az alsó és a felső VaR is kielégíti a pozitív homogén tulajdonságot.

Eltolás invariancia

Ha $a \in \mathbb{R}$, akkor $F_{X+a}(x) = F_X(x - a)$, minden $x \in \mathbb{R}$ esetén. Így

a. Alsó VaR esetén:

$$\inf\{x \in \mathbb{R} | F_{X+a}(x) \geq \alpha\} = \inf\{x \in \mathbb{R} | F_X(x - a) \geq \alpha\} = \inf\{y \in \mathbb{R} | F_X(y) \geq \alpha\} + a.$$

Azaz

$$\begin{aligned} q_\alpha(X + a) &= a + q_\alpha(X) \\ \Rightarrow -\text{VaR}_\alpha(X + a) &= a - \text{VaR}_\alpha(X) \\ \Rightarrow \text{VaR}_\alpha(X + a) &= \text{VaR}_\alpha(X) - a. \end{aligned}$$

b. Felső VaR esetén:

$$\inf\{x \in \mathbb{R} | F_{X+a}(x) > \alpha\} = \inf\{x \in \mathbb{R} | F_X(x - a) > \alpha\} = \inf\{y \in \mathbb{R} | F_X(y) > \alpha\} + a.$$

Azaz

$$\begin{aligned} q^\alpha(X + a) &= a + q^\alpha(X) \\ \Rightarrow -\text{VaR}^\alpha(X + a) &= a - \text{VaR}^\alpha(X) \\ \Rightarrow \text{VaR}^\alpha(X + a) &= \text{VaR}^\alpha(X) - a. \end{aligned}$$

Tehát, az alsó és a felső VaR is eltolás invariáns kockázati mérték.

Egy további fontos tulajdonsága a VaR-nek, hogy ha X egy valószínűségi változó és $\alpha \in (0, 1)$, akkor az $\alpha \mapsto \text{VaR}_\alpha(X)$ és $\alpha \mapsto \text{VaR}^\alpha(X)$ függvények monoton csökkenőek azaz, ha $\alpha_1 < \alpha_2$ akkor $\text{VaR}^{\alpha_1}(X) \geq \text{VaR}^{\alpha_2}(X)$ illetve $\text{VaR}_{\alpha_1}(X) \geq \text{VaR}_{\alpha_2}(X)$.

Ha $\alpha_1 < \alpha_2$ akkor

a. alsó VaR esetén:

$$\begin{aligned}
& \{x \in \mathbb{R} | F_X(x) \geq \alpha_2\} \subseteq \{x \in \mathbb{R} | F_X(x) \geq \alpha_1\} \\
& \Rightarrow \inf\{x \in \mathbb{R} | F_X(x) \geq \alpha_2\} \geq \inf\{x \in \mathbb{R} | F_X(x) \geq \alpha_1\} \\
& \Rightarrow q_{\alpha_2}(X) \geq q_{\alpha_1}(X) \\
& \Rightarrow -\text{VaR}_{\alpha_2}(X) \geq -\text{VaR}_{\alpha_1}(X) \\
& \Rightarrow \text{VaR}_{\alpha_2}(X) \leq \text{VaR}_{\alpha_1}(X).
\end{aligned}$$

b. felső VaR esetén:

$$\begin{aligned}
& \{x \in \mathbb{R} | F_X(x) > \alpha_2\} \subset \{x \in \mathbb{R} | F_X(x) > \alpha_1\} \\
& \Rightarrow \inf\{x \in \mathbb{R} | F_X(x) > \alpha_2\} \geq \inf\{x \in \mathbb{R} | F_X(x) > \alpha_1\} \\
& \Rightarrow q^{\alpha_2}(X) \geq q^{\alpha_1}(X) \\
& \Rightarrow -\text{VaR}^{\alpha_2}(X) \geq -\text{VaR}^{\alpha_1}(X) \\
& \Rightarrow \text{VaR}^{\alpha_2}(X) \leq \text{VaR}^{\alpha_1}(X).
\end{aligned}$$

A.5. Expected Shortfall tulajdonságai

A továbbiakban azt bizonyítom be, hogy az ES kielégíti az elvárt mind a négy tulajdonságot, azaz egy koherens kockázati mértékről van szó.

Monotonitás

Teljesen hasonlóan a VaR-hez belátható, hogy az Expected Shortfall is monoton, azaz ha $X \leq Y$, akkor $\text{ES}_\alpha(X) \geq \text{ES}_\alpha(Y)$.

Pozitív homogenitás

Ebben az esetben is hasonlóan a VaR-hez belátható, hogy az Expected Shortfall is pozitív homogén, azaz $\forall \lambda \geq 0$ esetén $\text{ES}_\alpha(\lambda X) = \lambda \text{ES}_\alpha(X)$.

Eltolás invariancia

A VaR mintájára láthatjuk, hogy az ES eltolás invariáns, azaz $\forall a \in \mathbb{R}$ esetén $\text{ES}_\alpha(X + a) = \text{ES}_\alpha(X) - a$.

Szubadditivitás

A szubadditív tulajdonság megvizsgálásához az expected shortfall-t kifejezzük egy másik, talán kevésbé szemléletes, de nem kevésbé hasznos formulával is:

$$ES_\alpha(X) = -\frac{1}{\alpha} \mathbb{E}(X \mathbf{1}_{\{X \leq q_\alpha\}}^\alpha),$$

ahol

$$\begin{aligned} \mathbf{1}_{\{X \leq q_\alpha\}}^\alpha &:= \mathbf{1}_{\{X \leq q_\alpha\}} + \frac{\alpha - F(q_\alpha)}{P(X = q_\alpha)} \mathbf{1}_{\{X = q_\alpha\}} \\ &= \begin{cases} \mathbf{1}_{\{X \leq q_\alpha\}}, & \text{ha } P(X = q_\alpha) = 0, \\ \mathbf{1}_{\{X \leq q_\alpha\}} + \frac{\alpha - F(q_\alpha)}{P(X = q_\alpha)} \mathbf{1}_{\{X = q_\alpha\}}, & \text{ha } P(X = q_\alpha) > 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Fontos megemlíteni, hogy $\mathbf{1}_{\{X \leq q_\alpha\}}^\alpha$ a következő tulajdonságokkal rendelkezik:

- i. $0 \leq \mathbf{1}_{\{X \leq q_\alpha\}}^\alpha \leq 1$
- ii. $\mathbb{E}(\mathbf{1}_{\{X \leq q_\alpha\}}^\alpha) = \alpha$
- iii. $\bar{x}_\alpha := \frac{1}{\alpha} \mathbb{E}(X \mathbf{1}_{\{X \leq q_\alpha\}}^\alpha) = \frac{1}{\alpha} \mathbb{E}(X \mathbf{1}_{\{X \leq q_\alpha\}}) + \left(1 - \frac{F(q_\alpha)}{\alpha}\right) q_\alpha.$

Bizonyítás.

- i. Ha F folytonos, azaz $P(X = q_\alpha) = 0$, akkor $F(q_\alpha) = \alpha$ és

$$\mathbf{1}_{\{X \leq q_\alpha\}}^\alpha = \mathbf{1}_{\{X \leq q_\alpha\}} = \begin{cases} 1, & \text{ha } X(\omega) \leq q_\alpha(X), \\ 0, & \text{ha } X(\omega) > q_\alpha(X). \end{cases}$$

Ha F nem folytonos, azaz $P(X = q_\alpha) > 0$, akkor $F(q_\alpha) \geq \alpha$, és

$$\begin{aligned} \mathbf{1}_{\{X \leq q_\alpha\}}^\alpha|_{X=q_\alpha} &= 1 + \frac{\alpha - F(q_\alpha)}{P(X = q_\alpha)} = \frac{P(X = q_\alpha) + \alpha - F(q_\alpha)}{P(X = q_\alpha)} \\ &= \frac{F(q_\alpha) - F(q_{\alpha-}) + \alpha - F(q_\alpha)}{P(X = q_\alpha)} \\ &= \frac{\alpha - F(q_{\alpha-})}{F(q_\alpha) - F(q_{\alpha-})} \in [0, 1], \end{aligned}$$

ahol $F(q_{\alpha-}) := \sup_{x < q_\alpha} \{F(x)\}$.

Vagyis ebben az esetben:

$$\mathbf{1}_{\{X \leq q_\alpha\}}^\alpha = \begin{cases} 0, & \text{ha } X(\omega) > q_\alpha(X), \\ \frac{\alpha - F(q_{\alpha-})}{F(q_\alpha) - F(q_{\alpha-})}, & \text{ha } X(\omega) = q_\alpha(X), \\ 1, & \text{ha } X(\omega) < q_\alpha(X). \end{cases}$$

Azaz $\mathbf{1}_{\{X \leq q_\alpha\}}^\alpha \in [0, 1]$.

ii. Legyen $a = \frac{\alpha - F(q_\alpha)}{P(X = q_\alpha)} \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} \left(\mathbf{1}_{\{X \leq q_\alpha\}} + \frac{\alpha - F(q_\alpha)}{P(X = q_\alpha)} \mathbf{1}_{\{X = q_\alpha\}} \right) &= \mathbb{E}(\mathbf{1}_{\{X \leq q_\alpha\}}) + a \mathbb{E}(\mathbf{1}_{\{X = q_\alpha\}}) \\
&= P(X \leq q_\alpha) + a P(X = q_\alpha) \\
&= F(q_\alpha) + a P(X = q_\alpha) \\
&= F(q_\alpha) + \frac{\alpha - F(q_\alpha)}{P(X = q_\alpha)} P(X = q_\alpha) \\
&= \alpha.
\end{aligned}$$

iii.

$$\begin{aligned}
\bar{x}_\alpha &= \frac{1}{\alpha} \mathbb{E}(X \mathbf{1}_{\{X \leq q_\alpha\}}^\alpha) = \frac{1}{\alpha} \mathbb{E} \left(X \mathbf{1}_{\{X \leq q_\alpha\}} + X \frac{\alpha - F(q_\alpha)}{P(X = q_\alpha)} \mathbf{1}_{\{X = q_\alpha\}} \right) \\
&= \frac{1}{\alpha} \mathbb{E}(X \mathbf{1}_{\{X \leq q_\alpha\}}) + \frac{1}{\alpha} \mathbb{E} \left(X \mathbf{1}_{\{X = q_\alpha\}} \frac{\alpha - F(q_\alpha)}{P(X = q_\alpha)} \right) \\
&= \frac{1}{\alpha} \mathbb{E}(X \mathbf{1}_{\{X \leq q_\alpha\}}) + \frac{1}{\alpha} \frac{\alpha - F(q_\alpha)}{P(X = q_\alpha)} \mathbb{E}(X \mathbf{1}_{\{X = q_\alpha\}}) \\
&= \frac{1}{\alpha} \mathbb{E}(X \mathbf{1}_{\{X \leq q_\alpha\}}) + \frac{1}{\alpha} \frac{\alpha - F(q_\alpha)}{P(X = q_\alpha)} q_\alpha P(X = q_\alpha) \\
&= \frac{1}{\alpha} \mathbb{E}(X \mathbf{1}_{\{X \leq q_\alpha\}}) + q_\alpha \left(1 - \frac{F(q_\alpha)}{\alpha} \right)
\end{aligned}$$

□

Vegyük észre, hogy $ES_\alpha = -\bar{x}_\alpha$.

Ezen tulajdonságok és állítások felhasználásával már belátható, hogy az ES szubadditív:

Legyen $Z = X + Y$. Ekkor

$$(X - q_\alpha(X)) \left(\mathbf{1}_{\{Z \leq q_\alpha(Z)\}}^\alpha - \mathbf{1}_{\{X \leq q_\alpha(X)\}}^\alpha \right) \geq 0,$$

hiszen ha $X(\omega) = q_\alpha(X)$, akkor az első tényező nulla, így a szorzat is nulla. Ha $X(\omega) > q_\alpha(X)$, akkor $\mathbf{1}_{\{X \leq q_\alpha(X)\}}^\alpha = 0$, azaz egy pozitív és egy nemnegatív szám szorzatáról van szó, ami minden esetben nemnegatív. És végül, ha $X(\omega) < q_\alpha(X)$, akkor $\mathbf{1}_{\{X \leq q_\alpha(X)\}}^\alpha = 1$, azaz egy negatív és egy nempozitív szám szorzatáról beszélünk, ami szintén nemnegatív. Így

$$\begin{aligned}
& \alpha(ES_\alpha(X) + ES_\alpha(Y) - ES_\alpha(Z)) \\
&= \mathbb{E} \left(Z \mathbf{1}_{\{Z \leq q_\alpha(Z)\}}^\alpha - X \mathbf{1}_{\{X \leq q_\alpha(X)\}}^\alpha - Y \mathbf{1}_{\{Y \leq q_\alpha(Y)\}}^\alpha \right) \\
&= \mathbb{E} \left(X \mathbf{1}_{\{Z \leq q_\alpha(Z)\}}^\alpha + Y \mathbf{1}_{\{Z \leq q_\alpha(Z)\}}^\alpha - X \mathbf{1}_{\{X \leq q_\alpha(X)\}}^\alpha - Y \mathbf{1}_{\{Y \leq q_\alpha(Y)\}}^\alpha \right) \\
&= \mathbb{E} \left(X(\mathbf{1}_{\{Z \leq q_\alpha(Z)\}}^\alpha - \mathbf{1}_{\{X \leq q_\alpha(X)\}}^\alpha) + Y(\mathbf{1}_{\{Z \leq q_\alpha(Z)\}}^\alpha - \mathbf{1}_{\{Y \leq q_\alpha(Y)\}}^\alpha) \right) \\
&= \mathbb{E} \left((X - q_\alpha(X))(\mathbf{1}_{\{Z \leq q_\alpha(Z)\}}^\alpha - \mathbf{1}_{\{X \leq q_\alpha(X)\}}^\alpha) + (Y - q_\alpha(Y))(\mathbf{1}_{\{Z \leq q_\alpha(Z)\}}^\alpha - \mathbf{1}_{\{Y \leq q_\alpha(Y)\}}^\alpha) \right) \\
&+ \mathbb{E} \left(q_\alpha(X)(\mathbf{1}_{\{Z \leq q_\alpha(Z)\}}^\alpha - \mathbf{1}_{\{X \leq q_\alpha(X)\}}^\alpha) + q_\alpha(Y)(\mathbf{1}_{\{Z \leq q_\alpha(Z)\}}^\alpha - \mathbf{1}_{\{Y \leq q_\alpha(Y)\}}^\alpha) \right) \\
&\geq q_\alpha(X) \mathbb{E}(\mathbf{1}_{\{Z \leq q_\alpha(Z)\}}^\alpha - \mathbf{1}_{\{X \leq q_\alpha(X)\}}^\alpha) + q_\alpha(Y) \mathbb{E}(\mathbf{1}_{\{Z \leq q_\alpha(Z)\}}^\alpha - \mathbf{1}_{\{Y \leq q_\alpha(Y)\}}^\alpha) \\
&= q_\alpha(X)(\alpha - \alpha) + q_\alpha(Y)(\alpha - \alpha) = 0.
\end{aligned}$$

Vagyis $\alpha(ES_\alpha(X) + ES_\alpha(Y) - ES_\alpha(Z)) \geq 0$, azaz az expected shortfall szubadditív:

$$ES_\alpha(X + Y) \leq ES_\alpha(X) + ES_\alpha(Y).$$

B. függelék

Elliptikus eloszlások

Ebben a részben két, a normális eloszlásnál általánosabb eloszláscsaládot mutatok be, a körkörös és az elliptikus eloszlást BOISBUNON, 2012, EMBRECHTS et al., 2002, FANG et al., 1990.

B.1. Definíció. *Körkörös eloszlás (Spherical Distribution)*

Azt mondjuk, hogy az $X = (X_1, \dots, X_n)^T$ valószínűségi vektorváltozó körkörös eloszlású, ha bármely $U \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ortogonális transzformáció (azaz, ahol U kielégíti az $UU^T = U^T U = I_{n \times n}$ egyenlőséget) esetén UX eloszlása megegyezik X eloszlásával, vagyis

$$X =_d UX,$$

ahol $=_d$ eloszlásban való egyenlőséget jelent.

Az ilyen típusú eloszlásoknak $\psi(t)$ karakterisztikus függvénye kielégíti a következő egyenlőséget: $\psi(t) = \phi(t^T t)$, ahol $\phi(\cdot)$ egy skalár függvény, amit az eloszlás karakterisztikus generátorfüggvényének nevezünk.

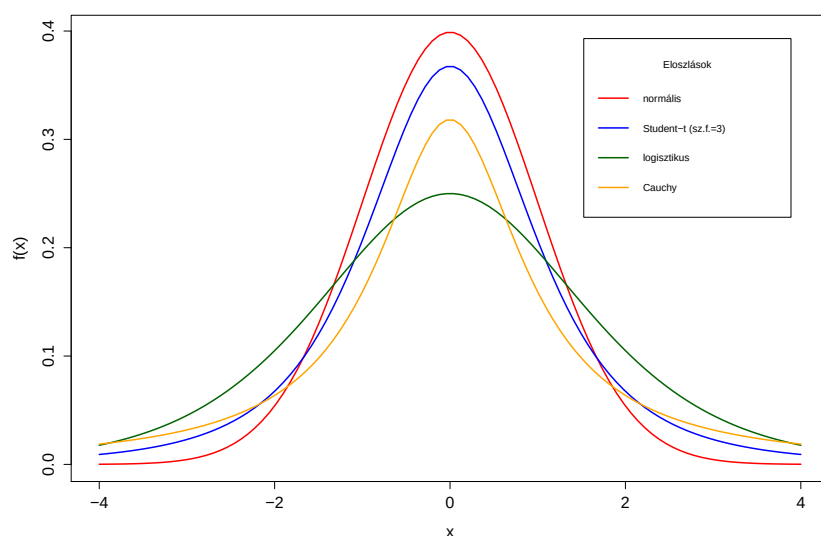
Jelölése: $X \sim S_n(\phi)$.

Körkörös eloszlás például a többdimenziós standard normális, centrális Student-t illetve a standard logisztikus eloszlás. Az egyváltozós és a kétváltozós eseteket az B.1 és B.2 ábrán láthatjuk.

A körkörös eloszlásnál általánosabb eloszláscsalád az elliptikus eloszlások családja.

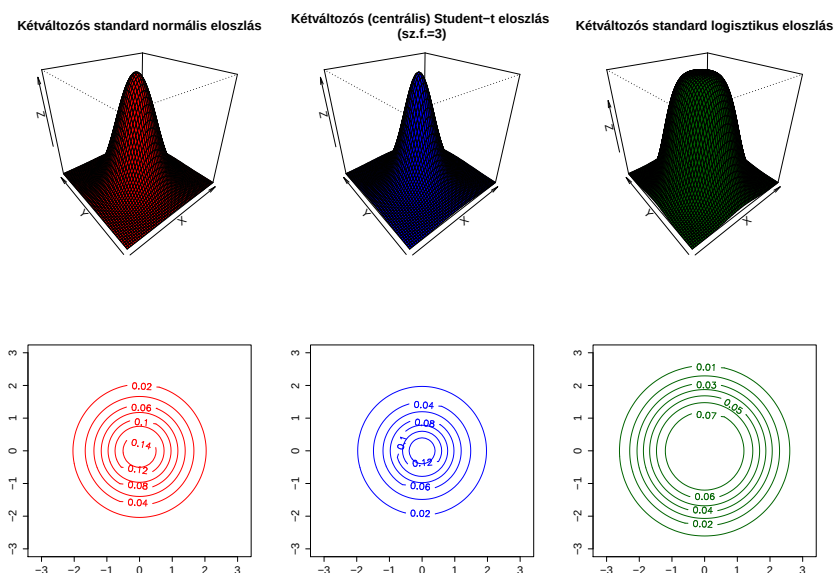
B.2. Definíció. *Elliptikus eloszlás (Elliptical Distribution)*

Azt mondjuk, hogy az $X = (X_1, \dots, X_n)^T$ valószínűségi vektorváltozó elliptikus eloszlású $\mu \in \mathbb{R}^n$



B.1. ábra. Példák egyváltozós körkörös eloszlásokra: standard normális, 3 szabadságfokú centrális Student-t, standard logisztikus és Cauchy eloszlás (amely az 1 szabadságfokú Student-t eloszlás) sűrűségfüggvényei.

Forrás: saját szerkesztés



B.2. ábra. Példák kétváltozós körkörös eloszlásokra. A felső sorban a standard normális, 3 szabadságfokú centrális Student-t és standard logisztikus eloszlás kétdimenziós sűrűségfüggvényei. Az alsó sorban pedig ezen eloszlások körkörös kontúrjai láthatóak.

Forrás: saját szerkesztés

és $\Sigma \in \mathbb{R}^{n \times n}$ paraméterekkel, ha X eloszlása megegyezik $\mu + A^T Y$ eloszlásával, vagyis

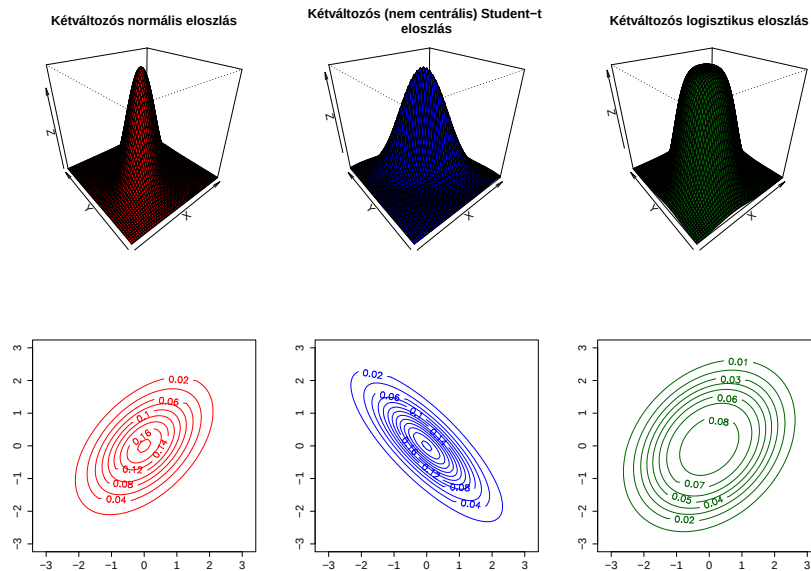
$$X =_d \mu + A^T Y,$$

ahol $Y \sim S_n(\phi)$ és $A^T A = \Sigma$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

Az ilyen típusú eloszlások $\psi(t)$ karakterisztikus függvénye a következő alakot ölti:
 $\psi(t) = \exp(it^T \mu) \phi(t^T \Sigma t)$.

Jelölése: $X \sim E_n(\mu, \Sigma, \phi)$

Elliptikus eloszlás például a többdimenziós normális, Student-t illetve a logisztikus eloszlás. A kétváltozós eseteket az B.3 ábrán láthatjuk.



B.3. ábra. Példák kétváltozós elliptikus eloszlásokra: normális, (nem centrális) Student-t és logisztikus eloszlás. A korrelációs együttható értéke rendre 0.5, -0.8 és 0.3. Ezen eloszlások kontúrjai ellipszisek.

Forrás: saját szerkesztés

B.1. Tétel. Az elliptikus eloszlású valószínűségi vektorváltozók a következő tulajdonságokkal rendelkeznek:

1. Az elliptikus eloszlású valószínűségi változók bármely lineáris kombinációja is elliptikus eloszlású, ugyanazzal a karakterisztikus generátorfüggvénnyel.

2. Az elliptikus eloszlású valószínűségi változók peremeloszlása is elliptikus eloszlású, ugyanazzal a karakterisztikus generátorfüggvénnyel.
3. Ha a Σ szigorúan pozitív definit, akkor X_1, X_2 -re vonatkoztatott feltételes valószínűsége is elliptikus eloszlású, de különböző karakterisztikus generátorfüggvénnyel.

B.1. Megjegyzés.

1. Tulajdonképpen azt mondhatjuk, hogy azokat a többdimenziós eloszlásokat nevezzük elliptikusnak, amelyekre a sűrűségfüggvény nívófelületei ellipszoidok.
2. X eloszlása nem határozza meg egyértelműen a hozzá tartozó elliptikus eloszlást, csak a μ paramétert. Σ és ϕ konstans erejéig egyértelműek.¹

¹A körkörös és elliptikus eloszlásokról részletesebb leírást, valamint a bizonyításokat megtalálhatjuk Embrechts-Mcneil-Straumann EMBRECHTS et al., 2002 munkájában.

C. függelék

R kódok

C.1. Egyszerű vs. logaritmikus hozam

```
library(fPortfolio)
library(PerformanceAnalytics)

setwd("D:/Panni/Egyetem/agrár/PhD/dolgozat/adatok")
data<-readSeries(file="data_stocks.csv", header=T, sep=";", format="%Y.%
    m.%d")

price<-align(data, by="1d", method="before", include.weekends=FALSE)

#részvények egyszerű és logaritmikus hozamai
simplereturn<-matrix(data=NA, nrow=2606, ncol=7)
for (j in 1:7 )
{
  for (i in 1:2606)
  {
    simplereturn[i,j]<-(as.numeric(price[(i+1),j])/as.numeric(price[i,j
      ])))-1
  }
}
```

```

logreturn<-returns(price)

summary(logreturn)
summary(simplereturn)

#portfólió egyszerű és logaritmikus hozamai
portfolio_price<-c()
for(i in 1:2607)
{
  portfolio_price[i]<-sum(price[i,])
}

portfolio_simplereturn<-c()
for (i in 1:2606)
{
  portfolio_simplereturn[i]<-(portfolio_price[i+1]/portfolio_price[i])-1
}

portfolio_logreturn<-returns(portfolio_price)[2:2607]

#ábrák
portfolio_returns<-cbind(portfolio_simplereturn, portfolio_logreturn)
boxPlot(portfolio_returns)

par(family = "serif")
plot(portfolio_simplereturn,portfolio_logreturn,
      xlab="Egyszerű hozam", ylab="Logaritmikus hozam",
      main="A portfólió egyszerű és logaritmikus hozamának
           összehasonlítása")
abline(coef=c(0,1), col="red")

#részvények szórása
variance_log<-c()

```

```

SD_log<-c()
for(i in 1:7)
{
  variance_log[i]<-var(logreturn[,i])
  SD_log[i]<-sd(logreturn[,i])
}

variance_simple<-c()
SD_simple<-c()
for(i in 1:7)
{
  variance_simple[i]<-var(simplereturn[,i])
  SD_simple[i]<-sd(simplereturn[,i])
}

height<-rbind(abs(SD_simple), abs(SD_log))
mp <- barplot(height, beside = TRUE,
              names.arg = c("FHB", "MOL", "MTELEKOM", "OTP", "Pannergy", "
                           Raba", "Richter"),
              col=c("purple", "blue"), main="Szórás",cex.main=2)

#részvények szemivarianciája
semivar1_log<-matrix(data=NA, nrow=2606, ncol=7)
for (j in 1:7)
{
  semivar1_log[,j]<-logreturn[,j]-mean(logreturn[,j])
}

semivar1_log[semivar1_log>0]<-0

semivar2_log<-semivar1_log^2

semivar_log<-c()

```

```

for (i in 1:7)
{
  semivar_log[i]<-mean(semivar2_log[,i])
}

semivar1_simple<-matrix(data=NA, nrow=2606, ncol=7)
for (j in 1:7)
{
  semivar1_simple[,j]<-simplereturn[,j]-mean(simplereturn[,j])
}

semivar1_simple[semivar1_simple>0]<-0

semivar2_simple<-semivar1_simple^2

semivar_simple<-c()
for (i in 1:7)
{
  semivar_simple[i]<-mean(semivar2_simple[,i])
}

height<-rbind(abs(semivar_simple), abs(semivar_log))
mp <- barplot(height, beside = TRUE,
              names.arg = c("FHB", "MOL", "MTELEKOM", "OTP", "Pannergy", "
                           Raba", "Richter"),
              col=c("purple", "blue"), main="Szemivariancia", cex.main=2)

#részvénnyek VaR értéke (alpha=0,01)
VaR_log<-c()
for(i in 1:7)
{
  VaR_log[i]<-varRisk(logreturn[,i], weight=rep(1,2606), alpha=0.01)
}

```

```

VaR_simple<-c()
for(i in 1:7)
{
  VaR_simple[i]<-varRisk(simplereturn[,i], weight=rep(1,2606), alpha
    =0.01)
}

height<-rbind(abs(VaR_simple), abs(VaR_log))
mp <- barplot(height, beside = TRUE,
  names.arg = c("FHB", "MOL", "MTELEKOM", "OTP","Pannergy", "
    Raba", "Richter"),
  col=c("purple", "blue"), main="Value at Risk (alpha=0,01)",
  cex.main=2)

#részvények ES értéke (alpha=0,01)
ES_log<-c()
for(i in 1:7)
{
  ES_log[i]<-cvarRisk(logreturn[,i], weight=rep(1,2606), alpha=0.01)
}

ES_simple<-c()
for(i in 1:7)
{
  ES_simple[i]<-cvarRisk(simplereturn[,i], weight=rep(1,2606), alpha
    =0.01)
}

height<-rbind(abs(ES_simple), abs(ES_log))
mp <- barplot(height, beside = TRUE,
  names.arg = c("FHB", "MOL", "MTELEKOM", "OTP","Pannergy", "
    Raba", "Richter"),

```

```
col=c("purple", "blue"), main="Expected Shortfall (alpha
      =0,01)", cex.main=2)
```

```
#portfóliók kockázata (alpha=0,01)
VaR_log<-c()
VaR_simple<-c()
ES_log<-c()
ES_simple<-c()

for (j in 1:7)
{

for(i in 1:2607)
{
  portfolio_price[i]<-sum(price[i,-j])
}

portfolio_simplereturn<-c()
for (k in 1:2606)
{
  portfolio_simplereturn[k]<-(portfolio_price[k+1]/portfolio_price[k])-1
}
VaR_simple[j]<-varRisk(portfolio_simplereturn, weight=rep(1,2606), alpha
  =0.01)
ES_simple[j]<-cvarRisk(portfolio_simplereturn, weight=rep(1,2606), alpha
  =0.01)

portfolio_logreturn<-returns(portfolio_price)[2:2607]
VaR_log[j]<-varRisk(portfolio_logreturn, weight=rep(1,2606), alpha=0.01)
ES_log[j]<-cvarRisk(portfolio_logreturn, weight=rep(1,2606), alpha=0.01)
}

#közelített értékek
```

```

#egyszerű hozam
simplereturn<-matrix(data=NA, nrow=2606, ncol=7)
for (j in 1:7 )
{
  for (i in 1:2606)
  {
    simplereturn[i,j]<-(as.numeric(price[(i+1),j])/as.numeric(price[i,j
    ])))-1
  }
}
app_portfolio_simplereturn<-c()
for (i in 1:2606)
{
  app_portfolio_simplereturn[i]<-1/7*(sum(simplereturn[i,]))
}
app_simple<-cbind(app_portfolio_simplereturn, portfolio_simplereturn)

#logaritmikus hozam1
logreturn<-returns(price)
app_portfolio_logreturn1<-c()
for(i in 1:2606)
{
  app_portfolio_logreturn1[i]<-log(1/7*sum(exp(logreturn)[i,]))
}

#logaritmikus hozam2
logreturn<-returns(price)
app_portfolio_logreturn2<-c()
for(i in 1:2606)
{
  app_portfolio_logreturn2[i]<-1/7*sum(logreturn[i,])
}

```

```

#ábra
par(mfrow=c(3,1))
plot(portfolio_simplereturn, app_portfolio_simplereturn, xlim=c(-0.85,
  0.15),
  xlab="Portfólió egyszerű hozam", ylab="Közelítés",
  main="Portfólió egyszerű hozamának közelítése")
abline(coef=c(0,1), col="red")
plot(portfolio_logreturn, app_portfolio_logreturn1, xlim=c(-0.85, 0.15),
  xlab="Portfolio logaritmikus hozam", ylab="Közelítés",
  main="Portfólió logaritmikus hozamának közelítése")
abline(coef=c(0,1), col="red")
plot(portfolio_logreturn, app_portfolio_logreturn2, xlim=c(-0.85, 0.15),
  xlab="Portfólió logaritmikus hozam", ylab="Közelítés",
  main="Portfólió logaritmikus hozamának közelítése")
abline(coef=c(0,1), col="red")

#kockázati sorrend kiszámítása a közelített értékek segítségével (alpha
  =0,01)
VaR_log1<-c()
VaR_log2<-c()
VaR_simple<-c()
ES_log1<-c()
ES_log2<-c()
ES_simple<-c()

for(p in 1:7)
{

simplereturn<-matrix(data=NA, nrow=2606, ncol=6)

for (j in 1:6)
{
  for (i in 1:2606)

```

```

{
  simplereturn[i,j]<-(as.numeric(price[, -p][(i+1),j])/as.numeric(price
    [, -p][i,j]))-1
}
}
app_portfolio_simplereturn<-c()
for (i in 1:2606)
{
  app_portfolio_simplereturn[i]<-1/6*(sum(simplereturn[i,]))
}

VaR_simple[p]<-varRisk(app_portfolio_simplereturn, weight=rep(1,2606),
  alpha=0.01)
ES_simple[p]<-cvarRisk(app_portfolio_simplereturn, weight=rep(1,2606),
  alpha=0.01)

logreturn<-returns(price[, -p])
app_portfolio_logreturn1<-c()
for(i in 1:2606)
{
  app_portfolio_logreturn1[i]<-log(1/6*(sum(exp(logreturn)[i,])))
}

VaR_log1[p]<-varRisk(app_portfolio_logreturn1, weight=rep(1,2606), alpha
  =0.01)
ES_log1[p]<-cvarRisk(app_portfolio_logreturn1, weight=rep(1,2606), alpha
  =0.01)

logreturn<-returns(price[, -p])
app_portfolio_logreturn2<-c()
for(i in 1:2606)
{
  app_portfolio_logreturn2[i]<-1/6*sum(logreturn[i,])
}

```

```

}

VaR_log2[p]<-varRisk(app_portfolio_logreturn2, weight=rep(1,2606), alpha
  =0.01)
ES_log2[p]<-cvarRisk(app_portfolio_logreturn2, weight=rep(1,2606), alpha
  =0.01)
}

#ábrák
height<-rbind(abs(VaR_simple), abs(VaR_log1), abs(VaR_log2))
mp <- barplot(height, beside = TRUE, ylim=c(0,0.085),
  names.arg = c("P1", "P2", "P3", "P4","P5", "P6", "P7"),
  col=c("purple", "orange", "blue"), main="Value at Risk (
    alpha=0,01)")

height<-rbind(abs(ES_simple), abs(ES_log1), abs(ES_log2))
mp <- barplot(height, beside = TRUE, ylim=c(0,0.085),
  names.arg = c("P1", "P2", "P3", "P4","P5", "P6", "P7"),
  col=c("purple", "orange", "blue"), main="Expected Shortfall
    (alpha=0,01)")

```

C.2. Utótesztelés történeti szimuláció segítségével

a. A VaR utótesztelése

```

library(fPortfolio)

data<-readSeries(file="data_stocks.csv", header=T, sep=";", format="%Y.%
  m.%d")
data2<-align(data, by="1d", method="before", include.weekends=FALSE)
dataRet<-returns(data2)

portfolio<-c()
for (j in 1:2607)

```

```

{
  portfolio[j]<-sum(data2[j,])
}

portfolioRet<-returns(portfolio)[2:2607]
T=250

I=matrix(data=NA, nrow=T, ncol=2606-(T-1))

for (j in 1:(2606-(T-1)))
{
  I[,j]<-portfolioRet[j:(T-1+j)]
}

VaR_vector<-rep(0,4)
pos=1
list.alpha<-c(0.01, 0.02, 0.025, 0.05)
for (alpha in list.alpha)
{

  z<-rep(0,2606-(T-1))
  for (m in 1:(2606-(T-1)))
  {
    z[m]<-varRisk(I[,m],weights=rep(1,T), alpha=alpha)
  }

  i<-rep(0,2606)
  for (m in 1:(2606-T))
  {
    if (I[T,(m+1)]<z[m])
    {
      i[m]<-1
    }
  }
}

```

```

    else
    {
        i[m]<-0
    }
}

s<-sum(i)
e<-(s/(2606-(T-1)))
VaR_vector[pos]=e
pos=pos+1
}
VaR_vector

diff<-abs(list.alpha-VaR_vector)
diff

```

b. Backtesting ES

```

library(fPortfolio)

data<-readSeries(file="data_stocks.csv", header=T, sep=";", format="%Y.%m.%d")

data2<-align(data, by="1d", method="before", include.weekends=FALSE)

dataRet<-returns(data2)

T=250
portfolio<-c()
for (j in 1:2607)
{
    portfolio[j]<-sum(data2[j,])
}

portfolioRet<-returns(portfolio)[2:2607]

```

```

I=matrix(data=NA, nrow=T, ncol=2606-(T-1))

for (j in 1:(2606-(T-1)))
{
  I[,j]<-portfolioRet[j:((T-1)+j)]
}

ES_vector<-rep(0,5)
pos=1
list.alpha<-c(0.005, 0.01, 0.02, 0.025, 0.05)
for (alpha in list.alpha)
{

VaR<-c()
ES<-c()

for (m in 1:(2606-(T-1)))
{
  VaR[m]<-as.vector(varRisk(I[,m],weights=rep(1,T), alpha=alpha))
  ES[m]<-as.vector(cvarRisk(I[,m],weights=rep(1,T), alpha=alpha))
}

i<-matrix(data=NA, nrow=T, ncol=2606-(T-1))

for (m in 1:(2606-(T-1)))
{
  for (t in 1:T)
  {
    if (I[t,m]<VaR[m])
    {
      i[t,m]<-I[t,m]
    }
  }
}

```

```

else
{
  i[t,m]<-0
}
}
}

```

```

z<-rep(0,(2606-(T-1)))
for (m in 1:(2606-(T-1)))
{
  z[m]<-sum(i[,m])/(ES[m]*T)
}

```

```

s<-sum(z)
e<-s/(2606-(T-1))
e
ES_vector[pos]=e
pos=pos+1
}
ES_vector

```

```

diff<-abs(list.alpha-ES_vector)
diff

```

C.3. Kopulán alapuló Monte Carlo szimuláció

```

library(copula)
library(fPortfolio)

setwd("D:/Panni/Egyetem/agrár/PhD/dolgozat/adatok")
data<-readSeries(file="data_stocks.csv", header=T, sep=";", format="%Y.%
m.%d")

```

```

#részvény árak
stock_prices<-align(data, by="1d", method="before", include.weekends=
  FALSE)
#a részvények hozamainak kiszámítása
stock_returns<-returns(stock_prices)
#a portfólió árának kiszámítása
portfolio_price<-c()
for(i in 1:2607)
{
  portfolio_price[i]<-sum(stock_prices[i,])
}
#a portfólió hozamának kiszámítása
portfolio_returns<-returns(portfolio_price)[2:2607]

NBR_days <- 2606 #a napok száma
NBR_stocks <- 7 #a részvények száma
scenario_length <-6000 #a szcenárió hossza
alpha <- 0.050

#inverz függvény definiálása
inverse<-function(f, lower=-100, upper=100){
  function(y) uniroot((function(x) f(x)-y),
    extendInt="yes", lower=lower, upper=upper)[1]}

#A becsült kopulafüggvénynek megfelelő együttes sűrűségfüggvénnyel
  rendelkező véletlen változók generálása Gauss kopula esetén
I=matrix(data=NA, nrow=scenario_length, ncol=NBR_days-249)
tmp_matrix <-matrix(data=NA, nrow = NBR_stocks, ncol = scenario_length,
  byrow = FALSE)
for(i in 251:NBR_days)
{

```

```

#az adatok átttranszformálása a kopula függvény értelmezési
    tartományába
pseudo_obs<-pobs(t(data[, (i-250):(i-1)]))

#kopulafüggvény kiválasztása
normal<-normalCopula(dim=NR_stocks)

#kopulafüggvény illesztése a transzformált adatokra
fit_normal<-fitCopula(normal,pseudo_obs)

#a becsült kopulafüggvénynek megfelelő véletlen változók generálása
copula_tmp_scenario <- rCopula(scenario_length, normalCopula(coef(
    fit_normal), dim=NR_stocks))

copula_tmp_scenario <- t(copula_tmp_scenario)

#a peremeloszlások inverz függvényét használva véletlen változók
    generálása
for(k in 1:NR_stocks)
{
    #empirical distribution of the marginals
    emp_cumulative_distr_function<-ecdf(data[k, (i-250):(i-1)])
    inverse_ecdf<-inverse(function(x) emp_cumulative_distr_function(x),
        min(as.numeric(copula_tmp_scenario[k,])),
        max(as.numeric(copula_tmp_scenario[k,])))

    for(l in 1:scenario_length)
    {
        tmp_matrix[k,l]<-as.numeric(inverse_ecdf(copula_tmp_scenario[k,l
            ]))
    }
}

```

```

scenario_price<-matrix(data=NA, nrow=NBR_stocks, ncol=
  scenario_length)
for(p in 1: 7)
{
  scenario_price[p,<-stock_prices[(i-1),p]*exp(tmp_matrix[p,])
}
scenario_portfolio_price<-c()
for(r in 1:scenario_length)
{
  scenario_portfolio_price[r]<-sum(scenario_price[,r])
}
scenario_portfolio_values <- rep(0,scenario_length)
for(j in 1:scenario_length)
{
  scenario_portfolio_values[j]<-log(scenario_portfolio_price[j]/
    portfolio_price[i-1])
}

I[,i-250]<-scenario_portfolio_values
}

#az egyes szcenáriókhoz tartozó VaR és ES értékek kiszámítása
scenario_VARs<-c()
scenario_ESs<-c()
for (m in 1:(NBR_days-250))
{
  scenario_VARs[m]<-varRisk(as.vector(I[,m]),weights=rep(1,
    scenario_length), alpha=alpha)
  scenario_ESs[m]<-cvarRisk(as.vector(I[,m]),weights=rep(1,
    scenario_length), alpha=alpha)
}

#Backtesting VaR

```

```

I<-rep(0,NBR_days-250-1)
for (i in 1:(NBR_days-250-1))
{
  if (portfolio_returns[i+250]<scenario_VARS[i])
  {
    I[i]<-1
  }
  else
  {
    I[i]<-0
  }
}
s<-sum(I)
e<-(s/(NBR_days-250-1))
e

#Backtesting ES
M<-matrix(data=NA, nrow=scenario_length, ncol=NBR_days-250)

for (m in 1:(NBR_days-250))
{
  for (t in 1:scenario_length)
  {
    if (I[t,m]<scenario_VARS[m])
    {
      M[t,m]<-I[t,m]
    }
    else
    {
      M[t,m]<-0
    }
  }
}

```

```

z<-c()
for (m in 1:(NBR_days-250))
{
  z[m]<-sum(M[,m])/(scenario_Ess[m]*scenario_length)
}

s<-sum(z)
e<-s/(NBR_days-250)
e

```

NYILATKOZAT

Alulírott, **Miskolczi Panna** (szül.: Debrecen, 1985. 08. 01.) büntetőjogi és fegyelemi felelősségem tudatában kijelentem és aláírással igazolom, hogy a doktori (Ph.D) fokozat megszerzése céljából benyújtott értekezésem kizárólag saját, önálló munkám.

Nyilatkozom továbbá, hogy:

- az Ihrig Károly Gazdálkodás- és Szervezéstudományok Doktori Iskola szabályzatát megismertem, és az abban foglaltak megtartását magamra nézve kötelezően elismerem;
- a felhasznált irodalmat korrekt módon kezeltem, a disszertációra vonatkozó jogszabályokat és rendelkezéseket betartottam;
- a disszertációban található másoktól származó, nyilvánosságra hozott vagy közzé nem tett gondolatok és adatok eredeti lelőhelyét a hivatkozásokban, az irodalomjegyzékben, illetve a felhasznált források között hiánytalanul feltüntettem a mindenkor szerzői jogvédelem figyelembevételével;
- a benyújtott értekezéssel azonos, vagy részben azonos tartalmú értekezést más egyetemen, illetve doktori iskolában nem nyújtottam be tudományos fokozat megszerzése céljából.

Debrecen, 2017. május 02.

Miskolczi Panna